Ewa Pabisek
Piotr Pluciński
Adam Wosatko

Matematyka stosowana i metody numeryczne

Konspekt z wykładu

12 Równania różniczkowe zwyczajne - problem początkowy

Równanie o postaci ogólnej:

$$F(\,x,\,y,\,y',\,y'',\ldots,\,y^m\,)=0,$$
$$\text{gdzie}\quad y^{(k)}\equiv\frac{\mathrm{d}^k\,y(x)}{\mathrm{d}\,x^k},\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{1}$$

w którym jako niewiadoma występuje funkcja tylko jednej zmiennej niezależnej $y(x)$ oraz niektóre (albo wszystkie) jej pochodne $y^{(k)}(x),\ 0<k\le m$ nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu m.

12.1 Pojedyncze równanie różniczkowe pierwszego rzędu

Numeryczne rozwiązywanie równania różniczkowego

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=f(x,\ y(x)),\quad x\in[a,\ b]. \tag{2}$$

z warunkiem początkowym

$$y(x_0)=y_0.\quad x_0\in[a,\ b], \tag{3}$$

polega na generowaniu ciągu punktów o współrzędnych $(x_j,\,y_j),\ j=1,2,\ldots$ na płaszczyźnie $0xy$, startując z punktu początkowego $(x_0,\,y_0)$.

12.2 Metody jednokrokowe

- Metoda Eulera (metoda stycznych)

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i),\quad x_{i+1}=x_i+h,\quad i=0,1,\cdots \tag{4}$$

- Polepszone metoda Eulera

$$\begin{aligned}k_1&=h\cdot f(x_i,\ y_i)\\ k_2&=h\cdot f(x_i+\frac{1}{2}h,\ y_i+\frac{1}{2}k_1)\\ y_{i+1}&=y_i+k_2\end{aligned}$$

- Metoda Runge-Kutty – II rzędu:

$$\begin{aligned}k_1&=h\cdot f(x_i,\ y_i)\\ k_2&=h\cdot f(x_i+h,\ y_i+k_1)\\ y_{i+1}&=y_i+\frac{1}{2}(k_1+k_2)\end{aligned}$$

- Metoda Runge-Kutty typu 1 – III rzędu:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_i,\ y_i) \\
k_2 &= h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(x_i + h,\ y_i - k_1 + 2k_2) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)
\end{aligned}$$

- Metoda Runge-Kutty typu 2 – III rzędu:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_i,\ y_i) \\
k_2 &= h \cdot f(x_i + \frac{1}{3}h,\ y_i + \frac{1}{3}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(x_i + \frac{2}{3}h,\ y_i + \frac{2}{3}k_2) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)
\end{aligned}$$

- Klasyczna metoda Runge-Kutty – IV rzędu:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_i,\ y_i) \qquad k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= h \cdot f(x_i + h,\ y_i + k_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

- Metoda Runge-Kutty – formuła 3/8:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_i,\ y_i) \quad k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{1}{3}h,\ y_i + \frac{1}{3}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(x_i + \frac{2}{3}h,\ y_i - \frac{1}{3}k_1 + k_2) \\
k_4 &= h \cdot f(x_i + h,\ y_i + k_1 - k_2 + k_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

- Metoda England I:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_i,\ y_i) \qquad k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2) \\
k_4 &= h \cdot f(x_i + h,\ y_i - k_2 + 2k_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

- Metoda Runge-Kutty-Gilla:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h\cdot f(x_i,\ y_i) \qquad k_2 = h\cdot f(x_i+\frac{1}{2}h,\ y_i+\frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h\cdot f(x_i+\frac{1}{2}h,\ y_i+\frac{\sqrt{2}-1}{2}k_1+\frac{1-\sqrt{2}}{2}k_2) \\
k_4 &= h\cdot f(x_i+h,\ y_i-\frac{\sqrt{2}}{2}k_2+\frac{2+\sqrt{2}}{2}k_3) \\
y_{i+1} &= y_i+\frac{1}{6}(k_1+(2-\sqrt{2})k_2+(2+\sqrt{2})k_3+k_4)
\end{aligned}
$$

Przykład:
Obliczyć metodą RKIII rzędu wartość funkcji $y(0.9)$ dla problemu początkowego:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0.$$

Obliczenia wykonać dla $h = 0.3$.

$$
\begin{aligned}
&k_1 = h\cdot f\big(x_i,\, y_i\big), \\
&k_2 = h\cdot f\big(x_i+\tfrac{1}{3}\,h,\, y_i+\tfrac{1}{3}\,k_1\big), \\
&k_3 = h\cdot f\big(x_i+\tfrac{2}{3}\,h,\, y_i+\tfrac{2}{3}\,k_2\big), \\
&y_{i+1} = y_i+\tfrac{1}{4}\cdot\big(k_1+3k_3\big).
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$y(x) = e^x - x - 1 \quad \to \quad y(0.9) = 0.5596.$$

Rozwiązanie:

Dla $x_0 = 0 \to y_0 = 0$
Dla $x_1 = 0.3$
$k1 = h\cdot f\big(x_0,\, y_0\big) = 0.3\cdot f(0.0,\, 0.0) = 0.0$
$k2 = h\cdot f\big(x_0+\frac{1}{3}\,h,\, y_0+\frac{1}{3}\,k_1\big) = 0.3\cdot f(0.1,\, 0.0) = 0.03$
$k3 = h\cdot f\big(x_0+\frac{2}{3}\,h,\, y_0+\frac{2}{3}\,k_2\big) = 0.3\cdot f(0.2,\, 0.02) = 0.066$
$y_1 = y_0+\frac{1}{4}\cdot\big(k_1+3\,k_3\big) = 0.0+\frac{1}{4}\cdot(0.0+3\cdot 0.066) = 0.049$
Dla $x_2 = 0.6$
$k1 = 0.3\cdot f(0.3,\, 0.049) = 0.105$
$k2 = 0.3\cdot f(0.4,\, 0.084) = 0.145$
$k3 = 0.3\cdot f(0.5,\, 0.146) = 0.194$
$y_2 = 0.049+\frac{1}{4}\cdot(0.105+3\cdot 0.194) = 0.221$
Dla $x_3 = 0.9$
$k1 = 0.3\cdot f(0.6,\, 0.221) = 0.246$
$k2 = 0.3\cdot f(0.7,\, 0.303) = 0.301$
$k3 = 0.3\cdot f(0.8,\, 0.422) = 0.367$
$y_3 = y(0.9) = 0.221+\frac{1}{4}\cdot(0.246+3\cdot 0.367) = 0.558$

12.3 Metody wielokrokowe

Metody wielokrokowe charakteryzują się tym, że do wykonania jednego kroku obliczeń wykorzystywane są przybliżenia obliczone w kilku kolejnych, bezpośrednio poprzedzających krokach. W metodach tych funkcję podcałkową interpolujemy odpowiednim wielomianem, a następnie całkujemy ten wielomian.

W ten sposób otrzymujemy dwie rodziny metod:

- algorytm metody jawnej (Adamsa-Bashfortha)

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} f_{i-j}, \tag{5}$$

- algorytm metody niejawnej (Adamsa-Moultona).

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=0}^{n} \beta^{\star}_{ij} f_{i-j+1} \tag{6}$$

β_{ij} *i* $\beta^{\star}_{ij}$ są współczynnikami liczbowymi.

12.4 Przykłady metod wielokrokowych

- Jednokrokowa metoda Adamsa-Bashfortha:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i \tag{7}$$

- Dwukrokowa metoda Adamsa-Bashfortha:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(3f_i - f_{i-1}\Big) \tag{8}$$

- Trzykrokowa metoda Adamsa-Bashfortha:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\Big(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}\Big) \tag{9}$$

- Czterokrokowa metoda Adamsa-Bashfortha:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\Big(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\Big) \tag{10}$$

- Jednokrokowa metoda Adamsa-Moultona:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h\Big(f_i + f_{i+1}\Big), \tag{11}$$

  nosi nazwę metody trapezów.
  Metoda ta może też mieć postać:

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1} \tag{12}$$

  i wówczas nazywa się wsteczną metodą Eulera.

- Dwukrokowa metoda Adamsa-Moultona:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\Big(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\Big) \tag{13}$$

- Trzykrokowa metoda Adamsa-Moultona:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\Big(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\Big) \tag{14}$$

12.5 Metody typu predyktor-korektor

Jednym ze sposobów realizacji metody wielokrokowej niejawnej jest algorytm nazywany predyktor-korektor.

1. W każdym kroku pierwszym etapem jest tzw. predykcja, czyli obliczanie przybliżenia początkowego za pomocą metody jawnej.
2. Drugim etapem obliczeń jest tzw. korekcja, za pomocą metody niejawnej, która ma na celu skorygowanie wartości obliczonego przybliżenia początkowego.

Przykład zastosowania wzorów:

1. Predyktorem może być jednokrokowa metoda Adamsa-Bashfortha:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf_i.$$

2. Korektorem może być jednokrokowa metoda Adamsa-Moultona:

$$y_{i+1}^{(it)} = y_i + hf_{i+1}^{(it-1)}.$$

Błąd względny:

$$\varepsilon = \left| \frac{y_{i+1}^{(it)} - y_{i+1}^{(it-1)}}{y_{i+1}^{(it)}} \right|$$

gdzie $it = 1, 2, \cdot n^{dop}$

12.6 Rozwiązywanie układów równań pierwszego rzędu

Każde równanie rzędu n można zastąpić układem n równań rzędu pierwszego.
Np. równanie

$$y''' = f(x, y, y', y'') \tag{15}$$

z warunkami początkowymi: $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0$. możemy zastąpić układem

$$\begin{array}{l} y' = u, \\ u' = v, \\ v' = f(x, y, u, v). \\ \text{z warunkami początkowymi:} \\ u_0 = y'_0, \quad v_0 = y''_0, \quad y = y_0. \end{array} \tag{16}$$

Układ równań rzędu pierwszego można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{F}(x,\ \mathbf{y}) \tag{17}$$

gdzie: $\mathbf{y}_0$ reprezentuje warunki początkowe, $\mathbf{y}(x)$ jest wektorem o składowych $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$, a $\mathbf{F}(\mathbf{y}, x)$ funkcją wektorową, której składowymi są funkcje $f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Przykład:
Rozwiązać równanie różniczkowe drugiego rzędu, opisujące linię ugięcia belki wspornikowej dla znanego rozkładu momentu zginającego:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M(x)}{E \cdot I}.$$

Moment zginający: $M(x) = -\frac{1}{2} \cdot p_y \cdot (L - x)^2$.
Równanie ugięcia belki wspornikowej sprowadzamy do układu równań:

$$v' = \varphi, \qquad \varphi' = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_y}{E \cdot I} \cdot (L - x)^2.$$

Warunki brzegowe (dla lewego końca belki – punkt x_0): $v(x_0 = 0) = 0$, $v'(x_0 = 0) = 0$.

Rozwiązanie ścisłe:
$v_{\text{ścisłe}}(x) = \frac{1}{EI}\frac{p_y}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot L \cdot x^3 + \frac{1}{12} \cdot x^4\right)$

13 Równania różniczkowe zwyczajne - problem brzegowy

Zajmiemy się poszukiwaniem funkcji $y(x)$,

- które są rozwiązaniem równania rzędu co najmniej drugiego,
- określonych na przedziale (a, b),
- zdefiniowanych n warunkami, z których jedne dotyczą punktu a, a inne – punktu b.

W celu znalezienia rozwiązania zagadnienia brzegowego zastosujemy metodę różnic skończonych (MRS). Zasadą metody MRS jest obliczanie przybliżeń pochodnych za pomocą tzw. wzorów różnicowych.

Centralne wzory różnicowe dla zagadnienia jednowymiarowego:

$$f' = \frac{1}{2h}\big(-1f_{i-1} + 1f_{i+1}\big), \qquad f'' = \frac{1}{h^2}\big(1f_{i-1} - 2f_i + 1f_{i+1}\big),$$
$$f''' = \frac{1}{2h^3}\big(-1f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + 1f_{i+2}\big), \qquad f^{IV} = \frac{1}{h^4}\big(1f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + 1f_{i+2}\big)$$

Przykład:
Rozwiązać problem brzegowy:

$$y''(x) + \frac{1}{4}y = 8, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad \text{gdzie } a = 0.0,\ b = 10.0;$$

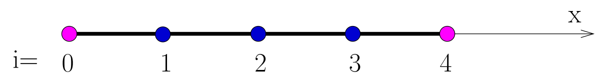
Rozwiązanie:
Przedział $[0,\ 10]$ dzielimy na $n = 4$ części. Długość podprzedziału $h = 2.5$.

Tworzymy układ równań różnicowych dla $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1}) + \frac{1}{4}y_i = 8 \rightarrow 0.16 \cdot y_{i-1} - 0.07 \cdot y_i + 0.16 \cdot y_{i+1} = 8$$

Postać różnicowa warunków brzegowych: $1 \cdot y_0 = 0$, $1 \cdot y_4 = 0$.

Układ równań w postaci macierzowej:



$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{wb. i=0} \\ \text{i= } 1 \\ 2 \\ 3 \\ \text{wb. i=4} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & \\
0.16 & -0.07 & 0.16 & & \\
 & 0.16 & -0.07 & 0.16 & \\
 & & 0.16 & -0.07 & 0.16 \\
 & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$
y(x) = 32\left[\frac{\cos(5)-1}{\sin(5)}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right]
$$

nr	x	MRS_4	Rozwiązanie ścisłe
1	0.000	0.0000	0.0000
2	2.500	39.7408	44.5949
3	5.000	67.3866	71.9429
4	7.500	39.7408	44.5949
5	10.000	0.0000	0.0000

13.1 Problem zginania belki

- Zastosujemy MRS do rozwiązania problemu sformułowanego lokalnie np. za pomocą przemieszczeniowego równania różniczkowego czwartego rzędu opisującego zginanie belki prostej.

$$
\frac{\mathrm{d}^4 v(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p_y(x)}{EJ} \; .
$$

- Poszukiwaną "pierwotną" funkcją jest funkcja ugięcia belki $v(x)$.
- Funkcjami "wtórnymi" będą: moment zginający $M(x)$ oraz siła poprzeczna $T(x)$:

$$
M(x) = -EJ\,\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} \; , \quad T(x) = -EJ\,\frac{\mathrm{d}^3 v(x)}{\mathrm{d}x^3} \; .
$$

- Do równania różniczkowego należy dopisać odpowiednie warunki brzegowe, wynikające z brzegowych więzów kinematycznych oraz brzegowych obciążeń.

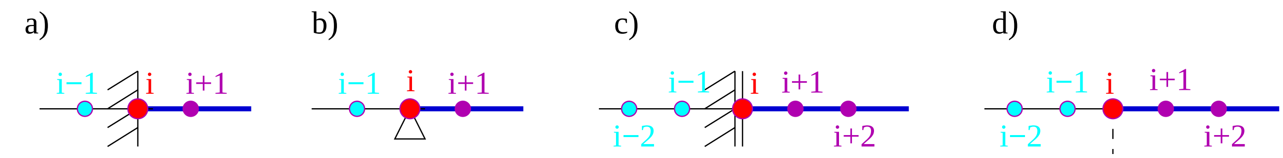
Jednowymiarowe zagadnienie brzegowe zginania belki opisane równaniem różniczkowym czwartego rzędu, po zastosowaniu **centralnego ilorazu różnicowego** ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p_y(x)}{EJ} \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}}{h^4} = \frac{p_{y_i}}{EJ}$$

$$v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2} = b_i, \quad b_i = h^4 \cdot \frac{p_{y_i}}{EJ}$$

Tworzy się układ równań, w którym należy uwzględnić jeszcze warunki brzegowe.

Warunki brzegowe:



a) **Brzeg utwierdzony**: $v = 0$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$,

w zapisie różnicowym: $v_i = 0$, $\frac{-v_{i-1}+v_{i+1}}{2h} = 0$.

b) **Brzeg przegubowo podparty**: $v = 0$, $M = -EJ\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = 0$,

w zapisie różnicowym: $v_i = 0$, $-EJ\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2} = 0$.

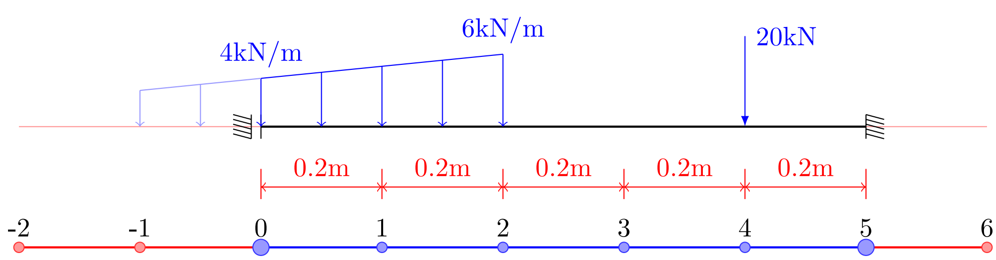
c) **Brzeg pionowo przesuwny**: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$, $T = -EJ\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = 0$,

w zapisie różnicowym: $\frac{-v_{i-1}+v_{i+1}}{2h} = 0$, $-EJ\frac{-v_{i-2}+2v_{i-1}-2v_{i+1}+v_{i+2}}{2h^3} = 0$.

d) **Brzeg swobodny**: $M = -EJ\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = 0$, $T = -EJ\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = 0$,

w zapisie różnicowym: $-EJ\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2} = 0$, $-EJ\frac{-v_{i-2}+2v_{i-1}-2v_{i+1}+v_{i+2}}{2h^3} = 0$.

Przykład 2:
Policzyć ugięcie belki zadanej na rysunku poniżej metodą MRS z modułem siatki h=0.2m



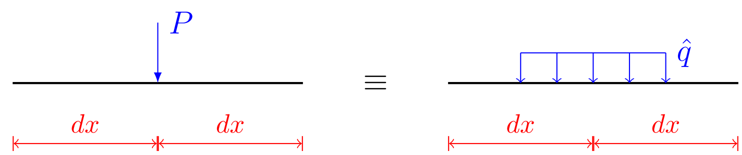
Równanie różnicowe rozpisujemy dla węzłów $i = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$1 \cdot v_{i-2} - 4 \cdot v_{i-1} + 6 \cdot v_i - 4 \cdot v_{i+1} + 1 \cdot v_{i+2} = p_y(x_i)b \quad \text{gdzie} \quad b = h^4/(EJ)$$

Warunki brzegowe:

dla	$x = 0:$	$v' = 0$	$T = 0$
	$i = 0:$	$-1 \cdot v_{-1} + 1 \cdot v_1 = 0$	$-1 \cdot v_{-2} + 2 \cdot v_{-1} - 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$
dla	$x = L:$	$v = 0$	$v' = 0$
	$i = 5:$	$v_5 = 0$	$-1 \cdot v_4 + 1 \cdot v_6 = 0$

Uwzględnienie siły skupionej



$$P = \hat{q}\ dx \Rightarrow \hat{q} = \frac{P}{dx} = \frac{20}{0.2} = 100$$

Otrzymujemy **układ równań MRS**:

1. $1 \cdot v_{-2} - 4 \cdot v_{-1} + 6 \cdot v_0 - 4 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 4b$
2. $1 \cdot v_{-1} - 4 \cdot v_0 + 6 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 5b$
3. $1 \cdot v_0 - 4 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 - 4 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 = 3b$
4. $1 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 + 6 \cdot v_3 - 4 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 = 0$
5. $1 \cdot v_2 - 4 \cdot v_3 + 6 \cdot v_4 - 4 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 = 100b$
6. $-1 \cdot v_{-1} + 1 \cdot v_1 = 0$
7. $-1 \cdot v_{-2} + 2 \cdot v_{-1} - 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$
8. $v_5 = 0$
9. $-1 \cdot v_4 + 1 \cdot v_6 = 0$

Zapis macierzowy układu równań i rozwiązanie

	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6			
0	1	-4	6	-4	1					v_{-2}	4	0.2718
1		1	-4	6	-4	1				v_{-1}	5	0.3302
2			1	-4	6	-4	1			v_0	3	0.3508
3				1	-4	6	-4	1		v_1	0	0.3302
4					1	-4	6	-4	1	v_2	100	0.2718
wb		-1		1						v_3	0	0.1866
i=0	-1	2		-2	1					v_4	0	0.0906
wb								1		v_5	0	0
i=5							-1		1	v_6	0	0.0906

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b} \cdot \frac{0.0016}{EJ} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.2718 \\ 0.3302 \\ 0.3508 \\ 0.3302 \\ 0.2718 \\ 0.1866 \\ 0.0906 \\ 0 \\ 0.0906 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ}$$