

Eliminasi Gauss-Jordan

Dalam aljabar linear, eliminasi Gauss-Jordan adalah versi dari eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauss-Jordan kita membuat nol elemen-elemen di bawah maupun di atas diagonal utama suatu matriks. Hasilnya adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satuan (semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, elemen-elemen lainnya nol).

Dalam bentuk matriks, eliminasi Gauss-Jordan ditulis sebagai berikut.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array} \right]$$

Solusinya: $x_1 = b'_1$
 $x_2 = b'_2$
 $\dots \dots \dots$
 $x_n = b'_n$

Seperti pada metode eliminasi gauss naïf, metode eliminasi Gauss-Jordan naïf tidak menerapkan tata-ancang pivoting dalam proses eliminasinya.

Langkah-langkah operasi baris yang dikemukakan oleh Gauss dan disempurnakan oleh Jordan sehingga dikenal dengan Eliminasi Gauss-Jordan, sebagai berikut:

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan ini disebut 1 utama (leading 1).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah dari matriks.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat lain.

Algoritma Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut:

1. Masukkan matriks A dan vector B beserta ukurannya n
2. Buat augmented matriks $[A \mid B]$ namakan dengan A
3. Untuk baris ke-i dimana $i=1$ s/d n
 - a) Perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol:
 Bila ya:
 Pertukarkan baris ke-i dan baris ke $i+k \leq n$, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.
 Bila tidak: Lanjutkan
 - b) Jadikan nilai diagonalnya menjadi satu, dengan cara untuk setiap kolom k dimana $k=1$ s/d $n+1$, hitung $a_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$
4. Untuk baris ke j, dimana $j=i+1$ s/d n
 Lakukan operasi baris elementer untuk kolom k dimana $k=1$ s/d n
 Hitung $c = a_{j,i}$
 Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c \cdot a_{i,k}$
5. Penyelesaian, untuk $i=n$ s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)

$$x_i = a_{i,n+1}$$

Contoh:

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots \text{(i)} \\ \dots \text{(ii)} \\ \dots \text{(iii)} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kalikan baris (i) dengan (-2), lalu tambahkan ke baris (ii)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \quad \text{kalikan baris (i) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \quad \text{kalikan baris (ii) dengan (1/2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ kalikan baris (ii) dengan } (-3), \text{ lalu tambahkan ke baris (iii)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ kalikan baris (iii) dengan } (-2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ kalikan baris (ii) dengan } (-1), \text{ lalu tambahkan ke baris (i)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ kalikan baris (iii) dengan } \left(-\frac{1}{12}\right), \text{ lalu tambahkan ke baris (i),} \\ \text{dan kalikan baris (iii) dengan } \left(\frac{7}{2}\right), \text{ lalu tambahkan ke baris (ii)}$$

Diperoleh penyelesaian $x = 1, y = 2, z = 3$.

Soal-soal yang harus dikerjakan dan jawabannya dikirimkan sebelum batas yang sudah ditentukan.

1. Misalkan diberikan SPL sebagai dengan eliminasi Gauss Jordan:

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

2. Misalkan diberikan SPL sebagai berikut dengan eliminasi Gauss Jordan:

$$x + y - z = 6$$

$$3x - 4y + 2z = -2$$

$$2x + 5y + z = 0$$