No.

Date 18 Dec 2021

Nama : Eko Saputra
NIM : 201420001
Kelas : IF3A

Tugas Analisis Numerik

Turunan Numerik

A. Persoalan Turunan Numerik

Persoalan turunan numerik adalah menentukan nilai hampiran nilai turunan fungsi F. Meskipun metode numerik untuk menghitung turunan fungsi tersedia, tetapi perhitungan turunan sebagai sedapat mungkin dihindari, Alasan nilai turunan numerik umumnya kurang teliti dibandingkan dengan nilai fungsinya. Dalam keanggotaanya, turunan adalah limit dari hasil bagi selisih : yaitu pengurangan dua buah nilai yang besar $((f x+h) - f x))$ dan membaginya dengan bilangan yang kecil (a). Pembagian ini dapat menghasilkan turunan dengan galat yang besar.

B. Tiga pendekatan dalam Menentukan Turunan Numerik

Misalkan diberikan nilai-nilai x di $x_0 - h$, serta nilai fungsi untuk nilai-nilai x tersebut. Titik-titik yang diperoleh adalah (x_{-1}, f_{-1}), (x_0, f_0), (x_1, f_1) yang dalam hal ini $x_{-1} = x_0 - h$ dan $x_1 = x_0 + h$.

1. Hampiran selisih ~~mundur~~ Maju (forword Difference Aproximation)

$$f'x_0 = \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

2. Hampiran selisih mundur (Backword Difference Aproximation)

$$f'x_0 = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \frac{f_0 - f_1}{h}$$

3. Hampiran selisih pusat (central Difference Aproximation)

$$f'x_0 = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

C. Penurunan Rumus dengan Deret Taylor

Misalkan diberi titik-titik (x_i, f_i), $i = 0, 1, 2, \ldots n$
$x_1 = x_0 + ih$ dan $f_i = f(x_1)$

↳

<-

a) Hampiran Selisih -maju

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + (x_{i+1} - x_i)^2 f''(x_i) +$$

$$f_{i+1} = f_i + h f_i'' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \ldots$$

$$h f_i' = f_{i+1} - f_i - \frac{h^2}{2} f_i'' + \ldots$$

$$f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} f_i''$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

Yang dalam hal ini, $O(h) = \frac{h}{2} f_i''(t), x_i < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_0 dan x_i persamaannya rumusnya menjadi

$$f_0' = \frac{f_i - f_0}{h} + O(h)$$

b.) Hampiran selisih mundur

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2!} f''(x_i) \times \ldots$$

$$f_{i-1} = f_i - h f_i + \frac{h^2}{2} f_i'' + \ldots$$

$$h f_i = f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{2} f_i'' + \ldots$$

$$f_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{h}{2} f_i'' + \ldots$$

$$f_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

$\llcorner_7$

No.

Date

$\leftarrow$

Yang dalam hal ini, $O(h) = -\frac{h}{2} f_i''(t), x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_0 dan x_1 persamaan rumusnya menjadi

$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} \; O(h)$$

c. Hampiran Selisih Pusat

Kurangkan persamaan hampiran selisih maju dengan mundur

$$f_{i+1} \; f_{i-1} = 2h f_i' + \frac{h^3}{3} f_i''' + \ldots$$

$$2h f_i' = f_i' + = f_{i+1} - f_{i-1} - \frac{h^3}{3} f_i'''$$

$$f_i = f_{i+1} - f_i - \frac{h^2}{6} f_i'''' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Yang dalam hal ini, $O(h^2) = -\frac{h^2}{6} f_i''''(t). x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_{-1} dan x_1 persamaan rumusnya menjadi

$$f_0' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Rumus untuk turunan kedua, $f''(x)$ dengan bantuan Deret taylor

a) Hampiran selisih pusat

Jumlahkan persamaan hampiran selisih maju dengan mundur

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(4)} + \ldots$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(4)} + \ldots$$

$$f_i'' = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} - \frac{h^2}{12} f_i^{(4)}$$

←

Jadi $f_i'' = f_{i+1} - 2f_i + f_i$

$f_0'' = f_1 - 2$

b) Hampiran selisih - mundur

Dengan cara yang sama seperti hampiran selisih - pusat diatas diperoleh

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

Yang dalam hal ini, $O(h) = hf''(t), x_{i-2} < t < x_i$

c) Hampiran selisih - maju

Dengan cara yang sama seperti hamparan selisih - pusat diatas diperoleh :

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

Yang dalam hal ini, $O(h) = -hf''(t). x_i < t < x_{i+2}$

Untuk nilai - nilai f di x_0, x_1 dan x_2 persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

D) Perumusan Rumus Turunan Numerik dengan polinom Interpolasi

misalkan diberikan titik - titik data berjarak sama

$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$

dan

$x = x_0 + sh. s \in R$

No.

Date

←

Contoh soal :

Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut :

x	$f(x)$
1.3	3.669
1.5	4.482
1.7	5.474
1.9	6.686
2.1	8.166
2.3	9.974
2.5	12.182

(a) Hitunglah $f'(1.7)$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$ dan $O(h^4)$

(b) Hitunglah $f'(1.4)$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$

(c) Rumus apa yang digunakan untuk menghitung $f'(1.3)$ dan $f'(2.5)$?

Penyelesaian

(a) orde $O(h^2)$

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Ambil titik-titik $x_{-1} = 1.5$ dan $x_1 = 1.9$, yang dalam hal ini $x_0 = 1.7$ terletak di tengah keduanya dengan $h = 0.2$

$$f'(1.7) = \frac{6.686 - 4.489}{2(0.2)} = 5.510 \text{ (empat angka benar)}$$

Orde $O(h^4)$

$$f_0' = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12}$$

Ambil titik-titik $x_{-2} = 1.3$ dan $x_{-1} = 1.5$, $x_1 = 1.9$ dan $x_2 = 2.1$ yang dalam hal ini $x_0 = 1.7$ terletak di pertengahannya.

$$f'(1.7) = \frac{-8.166 + 8(6.686) - 8(4.482) + 3.669}{12(0.2)}$$

$= 5.473$ (4 angka benar)

No.

Date

<-

(b) Orde $O(h^2)$

Ambil titik-titik $X_{-1} = 1.3$ dan $X_1 = 1.5$, yang dalam hal ini $X_0 = 1.4$ terletak ditengahnya dari $h = 0.1$

$F'(1.4) = \frac{4.482 - 3.669}{2(0.1} = 4.063$ (4 angka benar)

(c) Untuk menghitung $F'(1.3)$ digunakan rumus hampiran selisih - maju, ~~Seb~~ sebab $x = 1,3$ hanya mempunyai titik-titik sesudahnya (maju). tetapi tidak memiliki titik-titik sebelumnya. Sebaliknya, untuk menghitung nilai $F'(25)$ digunakan rumus hampiran selisih mundur, sebab $X = 2.5$ hanya mempunyai titik-titik sebelumnya

Hampiran selisih maju:

$F_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$

$F'(1.3) = \frac{4.482 - 3.669}{0.2} = 4.065$

Hampiran selisih mundur

$F_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$

$F'(2.5) = \frac{12.182 - 9.974}{0.2}$

$= 11.04$