

LOGIKA MATEMATIKA

I. PENDAHULUAN

Logika adalah dasar dan alat berpikir yang logis dalam matematika dan pelajaran-pelajaran lainnya, sehingga dapat membantu dan memberikan bekal tambahan untuk menyampaikan pelajaran di sekolah. Dalam Logika dipelajari metode-metode dan prinsip-prinsip yang dapat dipakai untuk membedakan cara berpikir benar (correct) atau tidak benar (incorrect), sehingga dapat membantu menyatakan ide-ide tepat dan tidak mempunyai arti ganda. Jadi, dalam ilmu logika hanya mempelajari atau memperhatikan kebenaran dan kesalahan dari penalaran, dan penarikan kesimpulan dari sebuah pernyataan atau lebih.

II. PERNYATAAN

Pernyataan adalah suatu kalimat yang mempunyai nilai kebenaran **benar** **saja** atau **salah saja** dan **tidak kedua-duanya**.

Istilah-istilah lain dari pernyataan adalah kalimat matematika tertutup, kalimat tertutup, kalimat deklaratif, statement atau proposisi.

III. PERNYATAAN TUNGGAL DAN MAJEMUK

Suatu kalimat selain dibedakan atas pernyataan dan bukan pernyataan, kalimat juga dibedakan pula atas pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk. Pernyataan tunggal atau pernyataan sederhana adalah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain atau sebagai bagiannya, sedangkan pernyataan majemuk dapat merupakan kalimat baru yang diperoleh dengan cara menggabungkan beberapa pernyataan tunggal.

Dua pernyataan tunggal atau lebih dapat digabungkan menjadi sebuah kalimat baru yang merupakan pernyataan majemuk, sedangkan tiap pernyataan bagian dari pernyataan majemuk disebut komponen-komponen pernyataan majemuk. Komponen-komponen dari pernyataan majemuk itu tidak selamanya harus pernyataan tunggal, tetapi mungkin saja pernyataan majemuk. Namun yang terpenting adalah bagaimana menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk.

Untuk menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk dapat dipakai kata gabung atau kata perangkai yang disebut operasi-operasi logika matematika.

Contoh:

1. Jakarta adalah ibukota negara RI
2. Merah putih adalah bendera negara RI
3. 2 adalah bilangan prima yang genap
4. Jika suatu bilangan habis dibagi dua maka bilangan itu genap

Soal:

Buatlah contoh pernyataan tunggal dan majemuk, kemudian tentukan nilai kebenarannya!

IV. OPERASI LOGIKA

- Adapun operasi-operasi yang dapat membentuk pernyataan majemuk adalah
1. Negasi atau ingkaran, dengan kata perangkai tidaklah benar, simbol " \sim "
 2. Konjungsi, dengan kata perangkai dan, simbol " \wedge "
 3. Disjungsi, dengan kata perangkai atau, simbol " \vee "
 4. Implikasi, dengan kata perangkai Jika, maka, simbol " \Rightarrow "
 5. Biimplikasi, dengan kata perangkaijika dan hanya jika, simbol " \Leftrightarrow "

Contoh pernyataan majemuk:

1. Bunga mawar berwarna merah dan bunga melati berwarna putih
2. Ani dan Ana anak kembar
3. Cuaca hari ini mendung atau cerah
4. Jika $x = 0$ maka $x^2 = x$
5. Suatu segitiga dikatakan segitiga sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama

V. TABEL KEBENARAN

1. Operasi Negasi

Operasi negasi atau ingkaran adalah operasi yang dikenakan hanya pada sebuah pernyataan. Operasi negasi dilambangkan " \sim ".
Jika p adalah pernyataan tunggal, maka $\sim p$ adalah pernyataan majemuk.
Negasi dari suatu pernyataan yang bernilai benar adalah salah dan negasi dari suatu pernyataan yang bernilai salah adalah benar.

Definisi: Suatu pernyataan dan negasinya mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan

Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

p	$\sim p$
B	S
S	B

Contoh:

p : Jakarta ibukota negara Republik Indonesia

$\sim p$: Jakarta bukan ibukota negara Republik Indonesia

2. Operasi Konjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai dan disebut konjungsi. Operasi konjungsi dilambangkan dengan " \wedge ".

Definisi: Sebuah konjungsi bernilai benar jika komponen-komponennya bernilai benar, dan bernilai salah jika salah satu dari komponennya bernilai salah

Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

3. Operasi Disjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai atau disebut disjungsi. Operasi disjungsi dilambangkan dengan " \vee "

Definisi: Sebuah disjungsi inklusif bernilai benar jika paling sedikit salah satu komponennya bernilai benar, sedangkan disjungsi eksklusif bernilai benar jika paling sedikit komponennya bernilai benar tetapi tidak kedua-duanya.

Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

Disjungsi Inklusif:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Disjungsi Eksklusif:

p	q	$p \underline{\vee} q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

4. Operasi Implikasi

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai Jika maka disebut implikasi. Operasi implikasi dilambangkan dengan " \Rightarrow "

Definisi: Sebuah pernyataan implikasi hanya salah jika antesedennya benar dan konsekwennya salah, dalam kemungkinan lainnya implikasi bernilai benar.

Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

p	q	$p \Rightarrow q$

B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

5. Operasi Bi-implikasi

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai jika dan hanya jika disebut biimplikasi. Operasi biimplikasi dilambangkan dengan " \Leftrightarrow "

Definisi: Sebuah pernyataan biimplikasi bernilai benar jika komponen-komponennya mempunyai nilai kebenaran sama, dan jika komponen-komponennya mempunyai nilai kebenaran tidak sama maka biimplikasi bernilai salah.

Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

VI. BENTUK-BENTUK PERNYATAAN

Bentuk-bentuk pernyataan dalam logika dibedakan dalam:

1. Kontradiksi
2. Tautologi
3. Kontingensi

Kontradiksi adalah suatu bentuk pernyataan yang hanya mempunyai contoh substitusi yang salah, atau sebuah pernyataan majemuk yang salah dalam segala hal tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Tautologi adalah sebuah pernyataan majemuk yang benar dalam segala hal, tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Kontingensi adalah sebuah pernyataan majemuk yang bukan suatu tautologi maupun kontradiksi.

Contoh:

Selidiki pernyataan di bawah ini apakah suatu tautologi, kontradiksi atau kontingensi!

$$(\sim p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$q \rightarrow p$	$(\sim p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$
B	B	S	S	B	B
B	S	S	S	B	B
S	B	B	B	S	B
S	S	B	S	B	B

Karena pada tabel kebenaran di atas benar semua, maka pernyataan di atas suatu tautologi

Soal:

Selidiki apakah pernyataan-pernyataan di bawah ini suatu tautologi, kontradiksi atau kontingensi!

1. $(p \wedge q) \rightarrow p$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(\sim q \wedge r) \rightarrow (r \wedge p)]$
3. $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

VII. IMPLIKASI LOGIS DAN EKWIVALEN LOGIS

Suatu bentuk pernyataan implikasi yang merupakan tautologi disebut implikasi logis.

Contoh:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dua atau lebih pernyataan majemuk yang mempunyai nilai kebenaran sama disebut ekwivalen logis dengan notasi " \equiv " atau " \approx "

Contoh:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	B	B

Karena $p \Leftrightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran sama dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, maka kedua pernyataan majemuk di atas disebut ekwivalen logis.

Jadi, $p \Leftrightarrow q \approx (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Soal:

Selidiki apakah pernyataan di bawah ini apakah implikasi logis atau ekwivalen logis!

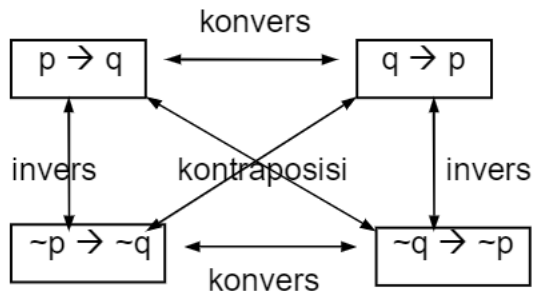
1. $[(p \rightarrow q) \vee r] \rightarrow [(p \wedge \sim q) \vee r]$
2. $[\sim(p \wedge q)] \equiv (p \rightarrow q)$

VIII. KONVERS, INVERS DAN KONTRAPOSISI

- Jika suatu bentuk implikasi $p \rightarrow q$ diubah menjadi $q \rightarrow p$ disebut konvers
- Jika suatu bentuk implikasi $p \rightarrow q$ diubah menjadi $\sim p \rightarrow \sim q$ disebut invers

- Jika suatu bentuk implikasi $p \rightarrow q$ diubah menjadi $\sim q \rightarrow \sim p$ disebut kontraposisi

Skema konvers, invers dan kontraposisi dapat dilihat sbb:



Contoh:

Carilah konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan:

“ Jika binatang itu bertubuh besar maka binatang itu disebut gajah “

Konvers : Jika binatang itu disebut gajah maka binatang itu bertubuh besar

Invers : Jika binatang itu tidak bertubuh besar maka binatang itu bukan gajah

Kontraposisi: Jika binatang itu bukan gajah maka binatang itu tidak bertubuh besar

Latihan SILAKAN KERJAKAN SOAL-SOAL BERIKUT DAN JAWABAN DIKIRIMKAN

1. Selidiki apakah pernyataan di bawah ini tautologi, kontradiksi atau kontingensi
 - a. $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow r)$
 - b. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
 - c. $(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$
2. Selidiki apakah pernyataan di bawah ini implikasi logis, ekwivalen logis atau tidak kedua-duanya
 - a. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [(p \rightarrow \sim q) \vee r]$
 - b. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (p \vee q)$
 - c. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \rightarrow r]$