DERET TAYLOR DAN DERET MACLUOREN

1. Deret Taylor
   Teorema: hanya ada satu deret pangkat dalam (x-c) yang memenuhi untuk f(x) sehingga:

   $f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + ... = \sum_{0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ berlaku untuk semua x dalam

   beberapa interval di sekitar c dengan $a_n = \frac{f^n(c)}{n!}$

Deret: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$ disebut deret Taylor

Bukti:

Jika $f(x)$ kontinu dalam selang $(c\text{-}h,\ c\text{+}h)$ dengan $0 \le h \le \infty$ dan andaikan f didefinisikan sebagai:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots\cdots + a_n(x-c)^n + \cdots\cdots \qquad (1)$$

Untuk semua x dalam selang $(c\text{-}h,\ c\text{+}h)$, maka:

$$f^1(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots\cdots + na_n(x-c)^{n-1} + \cdots\cdots$$

$$f^{11}(x) = 2a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3(x-c) + 3\cdot 4\cdot a_4(x-c)^2 + 4\cdot 5a_5(x-c)^3 + \cdots\cdots + \cdots$$

$$f^{111}(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-c) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-c)^2 + 4\cdot 5\cdot 6a_6(x-c)^3 + \cdots\cdots + \cdots$$

. . . .

. . . .

$$f^n(x) = n!a_n + (n+1)!\,a_{n+1}(x-c) + (n+2)!\,a_{n+2}(x-c)^2 + (n+3)!\,a_{n+3}(x-c)^3 + \cdots\cdots$$

Jika pada fungsi turunan di atas ditetapkan $x = c$, maka diperoleh:

$$f(c) = a_0;\ \ f^1(c) = 1!a_1;\ \ f^{11}(c) = 2!a_2;\ \ f^{111}(c) = 3!a_3;\ \ .....\ \ f^n(c) = n!a_n$$

atau

$$a_0 = f(c);\ \ a_1 = \frac{f^1(c)}{1!};\ \ a_2 = \frac{f^{11}(c)}{2!};\ \ a_3 = \frac{f^{111}(c)}{3!};\ \ .....\ \ a_n = \frac{f^n(c)}{n!}$$

Jika harga $a_0, a_1, a_2, a_3,$ . . . . , a_n . . . . . dimasukkan ke persamaan (1) di atas, maka akan didapat:

$$f(x) = f(c) + \frac{f^1(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{11}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{111}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

2. Deret Mac Laurin

Jika deret Taylor diterapkan untuk c=0 → deret Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots\dots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + \dots.$$

Contoh. Deretkan $f(x) = e^{2x}$

a. di sekitar 0
b. di sekitar 2

Jawab.

a.
$$f(x) = e^{2x} \rightarrow f(0) = e^0 = 1$$
$$f'(x) = 2e^{2x} \rightarrow f'(0) = 2$$
$$f''(x) = 4e^{2x} \rightarrow f''(0) = 4$$
$$f'''(x) = 8e^{2x} \rightarrow f'''(0) = 8$$
$$dst$$

shg deret Mc Laurin → $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \dots\dots + \frac{2^n}{n!}x^n$ ***Deret Maclouren***

b.
$$f(x) = e^{2x} \rightarrow f(2) = e^4$$
$$f'(x) = 2e^{2x} \rightarrow f'(2) = 2e^4$$
$$f''(x) = 4e^{2x} \rightarrow f''(2) = 4e^4 \quad]$$
$$f'''(x) = 8e^{2x} \rightarrow f'''(2) = 8e^4$$
$$dst$$

shg deret Taylor di sekitar c=2 →

$e^{2x} = e^4 + 2e^4(x-2) + \frac{4e^4}{2!}(x-2)^2 + \frac{8e^4}{3!}(x-2)^3 + \dots\dots + \frac{2^n e^4}{n!}(x-2)^n$ ***Deret Taylor***

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. Tentukan deret Taylor dan Macluoren dari;

   a. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ b. $f(x) = \ln(1+x)$

2. Tentukan deret Taylor dan Macluoren dari;

   a. $f(x) = \sin x$ b. $f(x) = \cos x$