TEORI HIMPUNAN

1. Dasar-dasar Teori Himpunan

a. Definisi Himpunan

Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang berbeda. (Liu, 1986) Himpunan digunakan untuk mengelompokkan sejumlah objek. Objek yang terdapat dalam himpunan disebut elemen, unsur atau anggota. Biasanya notasi himpunan ditulis dengan huruf besar seperti A, B, C, … dan elemen dengan huruf kecil.

b. Menyatakan Himpunan

1) Menuliskan tiap-tiap anggota himpunan di antara 2 kurung kurawal
2) Menuliskan sifat-sifat yang ada pada semua anggota himpunan di antara 2 kurung kurawal.

Contoh :

Nyatakan dengan notasi himpunan dengan menuliskan tiap-tiap anggotanya dan sifat-sifatnya himpunan berikut ini :

1. A adalah himpunan bilangan asli antara 1 dan 6
2. B adalah himpunan mata kuliah yang anggotanya adalah : kalkulus, logika matematika, matematika diskrit, statistika, fisika
3. C adalah himpunan bilangan riil yang lebih besar dari 5
4. D adalah himpunan yang terdiri dari bilangan 2, 4, 6, 8, 10
5. E adalah himpunan bilangan riil lebih kecil dari 5 dan lebih besar dari 10

Jawab :

1. A adalah himpunan bilangan asli antara 1 dan 6
   - Dengan menulis tiap-tiap anggotanya
     A = {2, 3, 4, 5}
   - Dengan menulis sifat-sifatnya
     A = {x | 1 < x < 6, x $\in$ Asli}
2. B adalah himpunan mata kuliah yang anggotanya adalah : kalkulus, logika matematika, matematika diskrit, statistika, fisika
   - Dengan menulis tiap-tiap anggotanya
     B = {kalkulus, logika matematika, matematika diskrit, statistika, fisika.
   - Dengan menulis sifat-sifatnya
     B tidak bisa dituliskan sifat-sifatnya, karena tidak ada sifat yang sama di antara anggota-anggotanya

3. C adalah himpunan bilangan riil yang lebih besar dari 5

- Dengan menulis tiap-tiap anggotanya

  C tidak bisa dituliskan anggota-anggotanya, karena jumlah anggota C tak terhingga.

- Dengan menulis sifat-sifatnya

  $C = \{x \mid x > 5, x \in \text{Riil}\}$

4. D adalah himpunan yang terdiri dari bilangan 2, 4, 6, 8, 10

- Dengan menulis tiap-tiap anggotanya

  $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

- Dengan menulis sifat-sifatnya

  D = {x | x adalah 5 buah bilangan asli pertama yang genap}

5. E adalah himpunan bilangan riil lebih kecil dari 5 dan lebih besar dari 10

- Dengan menulis tiap-tiap anggotanya

  E = tidak bisa dituliskan anggota-anggotanya, karena jumlah anggota E tak terhingga.

- Dengan menulis sifat-sifatnya

  $E = \{x \mid x < 5 \text{ dan } x > 10, x \in \text{Riil}\}$

c. Diagram Venn

Penyajian himpunan dengan diagram Venn ditemukan oleh seorang ahli matematika Inggris bernama John Venn tahun 1881. Himpunan semesta digambarkan dengan segiempat dan himpunan lainnya dengan lingkaran di dalam segiempat tersebut.

Contoh :

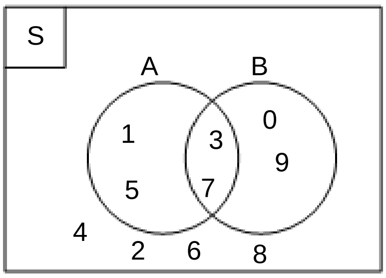
Gambarkan dengan diagram Venn himpunan-himpunan berikut ini :

1. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{0, 3, 7, 9\}$
2. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 3, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6\}$
3. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ dan $B = \{0, 1, 3, 7\}$

Jawab :

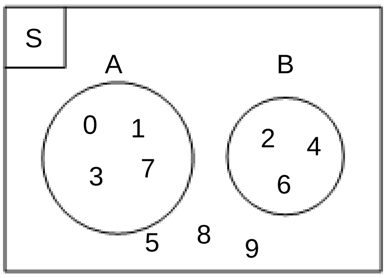
1. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{0, 3, 7, 9\}$

   Diagram Venn :



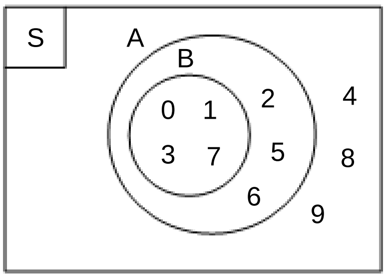
2. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 3, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6\}$

Diagram Venn :



3. S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7} dan B = {0, 1, 3, 7}

Diagram Venn :



d. Kardinalitas

Misalkan himpunan A mempunyai anggota yang berhingga banyaknya. Jumlah anggota himpunan A disebut kardinal dari himpunan A, ditulis dengan notasi n(A).

Contoh :

Tentukan kardinalitas dari himpunan berikut :

1. A = {2, 4, 6, 8, 10}
2. B = {x | 1 < x < 6, x $\in$ Asli}
3. C = {x | x > 5, x $\in$ Riil}
4. D = {x | x bilangan cacah yang lebih kecil dari 10}
5. E = {x | x bilangan prima yang lebih kecil dari 15}

Jawab :

1. A = {2, 4, 6, 8, 10}

   n (A) = 5
2. B = {x | 1 < x < 6, x $\in$ Asli}

   B = {2, 3, 4, 5}

   n(B) = 4
3. C = {x | x > 5, x $\in$ Riil}

   n(C) = ~
4. D = {x | x bilangan cacah yang lebih kecil dari 10}

   D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9}

   n(D) = 10

5. E = {x | x bilangan prima yang lebih kecil dari 15}
   E = {2, 3, 5, 7, 11, 13}
   n(E) = 6

e. Himpunan Bagian dan Kesamaan Himpunan

1) Himpunan Bagian

   Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota B.

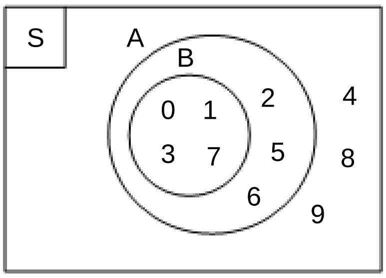
   Notasi $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; ((\forall x)\; x \in A \Rightarrow x \in B)$

   Contoh :

   S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7} dan B = {0, 1, 3, 7}

   $B \subseteq A$

   Diagram Venn :



2) Kesamaan Himpunan

   Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A adalah anggota B dan setiap anggota B adalah anggota A.

   Notasi : $A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

   Contoh :

   S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

   A = {x | x (x – 1)(x – 3) = 0, x ∈ Riil}

   B = {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7}

   A = {0, 1, 3}

   $A \subseteq B$

f. Himpunan Semesta dan Himpunan Kosong

Himpunan Semesta, ditulis dengan simbol S atau U adalah himpunan semua objek yang dibicarakan sedangkan himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong, ditulis dengan simbol ϕ atau { }.

g. Himpunan Saling Lepas

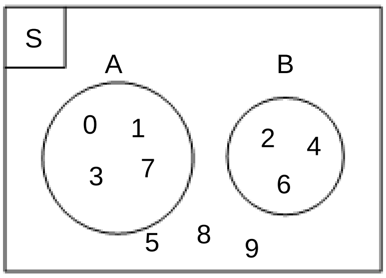
Himpunan A dan himpunan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika kedua himpunan tidak mempunyai anggota yang sama.

Notasi : A // B

Contoh :

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {0, 1, 3, 7} dan B = {2, 4, 6}

Diagram Venn :



h. Himpunan yang Ekivalen

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B, jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan sama.

Notasi : A ~ B $\Leftrightarrow$ n(A) = n(B)

Contoh :

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},

A = {0, 1, 3, 7} $\Rightarrow$ n(A) = 4

B = {2, 4, 6, 7} $\Rightarrow$ n(B) = 4

n(A) = n(B) $\Rightarrow$ A ~ B

i. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan semesta dan himpunan kosong.

Notasi : p(A)

Contoh :

A = {1, 2, 3}

p(A) = {{ }, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

2. Operasi pada Himpunan

a. Gabungan

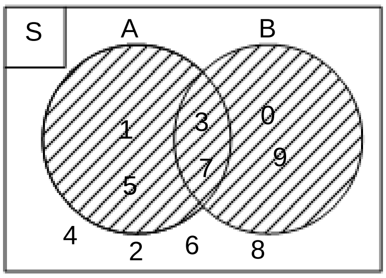
Gabungan (*union*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B.

Notasi : $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Contoh :

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9}, A = {1, 3, 5, 7} dan B = {0, 3, 7, 9}

Diagram Venn :



$A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

b. Irisan

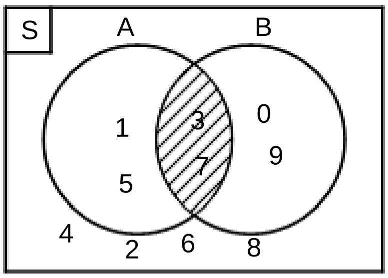
Irisan (*intersection*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota dari himpunan A dan anggota himpunan B.

Notasi : $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Contoh :

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9}, A = {1, 3, 5, 7} dan B = {0, 3, 7, 9}

Diagram Venn :



$A \cap B = \{3, 7\}$

c. Komplemen

Komplemen himpunan A terhadap himpunan semesta S adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota S yang bukan anggota A.

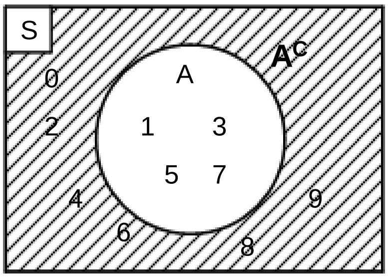
Notasi : $A^c = \{x \mid x \in S \wedge x \notin A\}$

atau $\overline{A} = \{x \mid x \in S \wedge x \notin A\}$

Contoh :

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9}, A = {1, 3, 5, 7}

Diagram Venn :



A^C = {0, 2, 4, 6, 8, 9}

d. Selisih

Selisih himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A dan bukan anggota himpunan B. Selisih himpunan A dan B adalah komplemen himpunan B terhadap himpunan A.

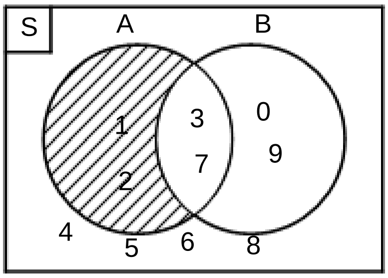
Notasi : $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

atau $A - B = A \cap \overline{B}$

Contoh :

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {1, 2, 3, 7} dan B = {0, 3, 7, 9}

Diagram Venn :



A – B = {1, 2}

e. Beda Setangkup

Beda Setangkup (*symetric difference*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya ada pada himpunan A atau B, tetapi tidak pada keduanya.

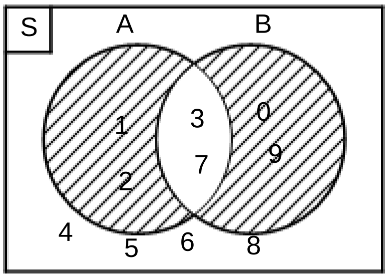
Notasi : $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

atau : $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh :

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {1, 2, 3, 7} dan B = {0, 3, 7, 9}

Diagram Venn :



$A \oplus B = \{1, 2, 8, 9\}$

3. Sifat-sifat Operasi pada Himpunan

1) Hukum Identitas

a) $A \cup \phi = A$

b) $A \cap S = A$

c) $A \oplus \phi = A$

2) Hukum Null

a) $A \cap \phi = \phi$

b) $A \cup S = S$

c) $A \oplus A = \phi$

3) Hukum Komplemen

a) $A \cup A^c = S$

b) $A \cap A^c = \phi$

4) Hukum Idempoten

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

5) Hukum Involusi

$(A^c)^c = A$

6) Hukum Penyerapan

a) $A \cup (A \cap B) = S$

b) $A \cap (A \cup B) = A$

7) Hukum Komutatif

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $A \oplus B = B \oplus A$

8) Hukum Asosiatif

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

9) Hukum Distributif

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

10) Hukum De Morgan

a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

4. Prinsip Dualitas

Selain dari beberapa sifat operasi pada himpunan ada cara lain dengan mengganti tanda $\cup$ dengan $\cap$, $\cap$ dengan $\cup$, ϕ dengan U, U dengan ϕ. Cara ini dikenal dengan Prinsip Dualitas. Prinsip Dualitas sering digunakan untuk menurunkan hukum yang lain dan membuktikan suatu kalimat himpunan.

1) Hukum Identitas : $A \cup \phi = A$	Dualnya : $A \cap U = A$
2) Hukum Null : $A \cap \phi = \phi$	Dualnya : $A \cup U = U$
3) Hukum Komplemen : $A \cup \overline{A}$	Dualnya : $A \cap \overline{A} = \phi$
4) Hukum Idempoten : $A \cup A = A$	Dualnya : $A \cap A = A$
5) Hukum Penyerapan : $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya : $A \cap (A \cup B) = A$
6) Hukum Komutatif : $A \cup B = B \cup A$	Dualnya : $A \cap B = B \cap A$
7) Hukum Asosiatif : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8) Hukum Distributif : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9) Hukum Komutatif : $A \cup B = B \cup A$	Dualnya : $A \cap B = B \cap A$
10) Hukum De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5. Pembuktian Kalimat Himpunan

Kalimat himpunan adalah pernyataan yang menggunakan notasi himpunan, kalimat himpunan dapat berupa kesamaan himpunan, dan untuk membuktikan kebenaran pada kesamaan himpunan dapat digunakan beberapa cara untuk memperoleh kesimpulan benar. Salah satunya “pembuktian dengan sifar operasi pada himpunan”.

Contoh :

Buktikan :

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$
2. $A \cup (B - A) = A \cup B$
3. $(A - B) - C = (A - C) - 3$
4. $A \cup (\overline{A \cup B}) = A \cup \overline{B}$
5. $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
6. $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti :

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B})$ (hukum distributif)
   $= A \cap S$ (hukum komplemen)
   $= A$ (hukum identitas)

2. $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \overline{A})$ (definisi operasi selisih)
   $= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$ (hukum distributif)
   $= (A \cup B) \cap S$ (hukum komplemen)
   $= A \cup B$ (hukum identitas)

3. $(A - B) - C = (A \cap \overline{B}) - C$ (definisi operasi selisih)
   $= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$ (definisi operasi selisih)
   $= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B}$ (hukum assosiatif)
   $= (A - C) \cap \overline{B}$ (definisi operasi selisih)
   $= (A - C) - B$ (definisi operasi selisih)

4. $A \cup (\overline{A \cup B}) = A \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ (hukum De Morgan)
   $= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B})$ (hukum distributif)
   $= S \cap (A \cup \overline{B})$ (hukum komplemen)
   $= A \cup \overline{B}$ (hukum identitas)

5. $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$ (hukum distributif)
   $= S \cap (A \cup B)$ (hukum komplemen)
   $= A \cup B$ (hukum identitas)

6. $A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ (hukum distributif)
   $= \phi \cup (A \cap B)$ (hukum komplemen)
   $= A \cap B$ (hukum identitas)

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN

1. Gambarkan dengan diagram Venn himpunan-himpunan berikut ini :
   A. S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {2, 3, 6, 7} dan B = {0, 3, 7, 8,9}
   B. S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {0, 1, 3, 5,7} dan B = {0, 2, 4, 6, 9}
   C. S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8} dan B = {0, 1, 3, 6, 7, 9}

2. Jika himpunan S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11, 12}, A = {1, 3, 5, 7, 9, 12} dan B = {0, 3, 5, 7, 9, 10}

   Tentukanlah himpunan dan diagram dari;
   a. Irisan A dan B
   b. Gabungan A dan B
   c. Komplemen A da B
   d. Selisih A dan B
   e. Beda setangkup A dan B

SELAMAT MENGERJAKAN DAN KIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTUNYA