RELASI (Dr.Jemakmun,M.Si)

RELASI

1. Pengertian Relasi

Antara elemen-elemen dari dua buah himpunan seringkali terdapat suatu relasi atau hubungan tertentu.

Misalnya :

$A = \{ 2, 3, 5 \}$

$B = \{ 1, 4, 7, 10, 14 \}$

Akan kita tinjau relasi " adalah faktor dari " antara elemen-elemen himpunan A dengan elemen-elemen himpunan B. Tampaklah bahwa :

2 adalah faktor dari 4

2 adalah faktor dari 10

2 adalah faktor dari 14

5 adalah faktor dari 10

Sedangkan $3 \in A$ tidak berrelasi dengan suatu elemenpun dari himpunan B.

Relasi tersebut dapat digambarkan dengan diagram panah. *Gambarlah Diagram Panah tersebut!* Relasi itu dikatakan sebagai suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B. Perhatikan bahwa suatu relasi mempunyai arah tertentu. Dalam diagram diatas arah itu dinyatakan dengan anak panah. Relasi tersebut juga dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut. Elemen dari himpunan A yang berrelasi dengan elemen dari himpunan B di susun menjadi suatu pasangan terurut, diman elemen dari A pada urutan pertama dan elemen dari B pada urutan yang kedua. Jadi kalau relasi " adalah faktor dari " tersebut diberi nama R, maka :

$R = \{ (2, 4), (2, 10), (2, 14), (5, 10) \}$

Jelaslah bahwa $R \subseteq A \times B$

Secara umum dapat dikatakan bahwa suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B merupakan himpunan bagian dari AXB (produk Cartesius A dan B). sehingga dapat didefinisikan:

R adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B bhb. $R \subseteq A \times B$

A disebut daerah asal (domain) dan B disebut daerah kawan (kodomain) dari relasi R tersebut.

Jika $(x,y) \in R$, maka dikatakan bahwa "x berelasi dengan y" (ditulis "xRy"). Jika R adalah suatu relasi dari B ke A dengan $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x,y) \in R\}$, maka jelaslah bahwa $R^{-1} \subseteq B \times A$

Contoh :

A = { -3, 3, 4, 7, 10 }

B = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

Relasi "berselisih 2 dengan" antara elemen-elemen himpunan A dengan elemen-elemen himpunan B dapat disajikan sebagai himpunan bagian dari A x B, yaitu :

$R = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in B, |x - y| = 2 \}$

$= \{ (3,5), (4,2), (4,6),(7,5),(10,8) \} \subseteq A \times B$

(4,6) $\in$ R, maka dikatakan bahwa " 4 berelasi dengan 6 " (4 berselisih 2 dengan 6) atau 4R6.

$R^{-1} = \{ (5,3),(2,4),(6,4),(5,7),(8,10)\}$

2. Relasi-relasi Khusus

Jika A = B maka relasinya disebut sebagai relasi <u>pada</u> himpunan A.

a) Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi refleksif *bhb* setiap elemen dari A berrelasi R dengan dirinya sendiri.

R refleksif pada A *bhb*. $(\forall x \in A).\ (x,x) \in R$

$(\forall x \in A).\quad x\, R\, x$

Contoh :

A adalah suatu keluarga himpunan. R adalah relasi "himpunan bagian" yaitu: $R = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in A, x \subseteq y \}$

R adalah relasi refleksif pada A karena untuk setiap $x \in A$ berlakulah bahwa $x \subseteq x$, yaitu $(x \in A).\ (x,x) \in R$

Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi non- refleksif *bhb*. ada elemen dari A yang tidak berrelasi R dengan dirinya sendiri.

R non-refleksif pada A *bhb*. $(\exists x\, \varepsilon\, A).(x,x) \notin R$

$(\exists x \in A).\ x\, R\, x$

Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi irrefleksif bhb. setiap elemen dari A tidak berelasi R dengan dirinya sendiri.

R irrefleksif pada A *bhb*. $(\forall x \in A).(x,x) \notin R$

$(\forall\, x \in A).\ x \not{R}\ x$

Perhatikan bahwa suatu relasi yang irrefleksif dengan sendirinya adalah non-refleksif, tetapi sebaliknya belum tentu.

Contoh :

A = himpunan semua bilangan nyata.

Relasi " > " adalah suatu relasi yang irrefleksif (jadi juga non- refleksif) pada A karena setiap bilangan nyata tidak lebih besar dari pada dirinya sendiri.

A = himpunan semua manusia

Relasi " dapat menguasai" adalah relasi yang non – refleksif pada A (karena ada orang yang tidak dapat menguasai dirinya sendiri), tetapi bukan relasi yang irrefleksif (karena tidak semua orang tidak dapat menguasai dirinya sendiri)

b) Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi simetris bhb. Untuk setiap dua elemen x dan y dalam A, jika x berrelasi R dengan y, maka y berrelasi R dengan x.

R simetris pada A bhb. $(\forall\, x,y \in A)\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

$$(\forall\, x,y \in A)\ (x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in R^{-1}$$

$$(\forall\, x,y \in A)\ xRy \Rightarrow yRx$$

Contoh :

A = himpunan semua garis lurus pada bidang datar.

Relasi " sejajar" adalah relasi yang simetris pada A, karena untuk setiap dua garis lurus x dan y, di mana x//y, maka pastilah y//x

Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi <u>non – simetris</u> bhb. Ada sepasang elemen x dan y ε A dimana x berrelasi R dengan y tetapi y tidak berrelasi R dengan x.

R non- simetris pada A bhb. $(\exists\, x,y \in A).\ (x,y) \in R \ \wedge\ (y,x) \notin R$

$$(\exists\, x,y \in A).\ (x,y) \in R \ \wedge\ (y,x) \notin R^{-1}$$

$$(\exists\, x,y \in A).\ xRy \ \wedge\ y \not{R}\ x$$

Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi <u>asimetris</u> bhb. Untuk setiap pasangan elemen x dan y $\in$ A di mana x berrelasi R dengan y, maka y tidak berrelasi R dengan x.

R asimetris pada A bhb. $(\forall\, x,y \in A).\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$

$$(\forall\, x,y \in A).\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R^{-1}$$

$$(\forall\, x,y \in A).\ xRy \Rightarrow y \not{R}\, x$$

Jelas bahwa suatu relasi yang asimetris pada himpunan A pasti juga non-simetris pada A, tetapi sebaliknya belum tentu.

Contoh:

A = Keluarga himpunan.

Relasi " himpunan bagian sejati" adalah suatu relasi yang asimetris pada A (jadi juga non-simetris) karena untuk setiap dua himpunan x dan $y \in A$ dimana $x \subset y$, maka pastilah bahwa $y \not\subset x$

A = himpunan semua manusia.

Relasi "mencintai" adalah relasi yang non simetris pada A, tetapi bukan relasi yang asimetris pada A.

Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi anti-simetris bhb. Untuk setiap pasang elemen x dan $y \varepsilon A$, jika x berrelasi R dengan y dan y berrelasi R dengan x, maka x = y.

R antisimetris pada A bhb.

$(\forall x,y \in A). (x,y) \in R \wedge (y,x) \notin R \Rightarrow x = y$

$(\forall x,y \in A). (x,y) \in R \wedge (y,x) \notin R^{-1} \Rightarrow x = y$

$(\forall x,y \in A). xRy \wedge y \not R x \Rightarrow x = y$

Contoh:

A = keluarga himpunan.

Relasi " himpunan bagian" adalah relasi yang antisimetris pada A, karena untuk setiap dua himpunan x dan y, jika $x \subseteq y$ dan $y \subseteq x$, maka x = y.

c). Suatu relasi R pada himpunan A disebut transitif bhb. Untuk setiap tiga elemen x,y dan $z \varepsilon A$, jika x berrelasi R dengan y dan y berrelasi R dengan z , maka x berrelasi R dengan z.

R transitif pada A bhb.

$(\forall x,yz \in A). (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$(\forall x,yz \in A). xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Contoh:

A = himpunan semua bilangan nyata.

Relasi "adalah faktor dari" adalah relasi yang transitif pada A.

Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi <u>non-transitif</u> bhb. Ada tiga elemen x,y dan z $\in A$ dimana x berrelasi R dengan y dan y berrelasi z, tetapi x tidak berrelasi R dengan z.

R non-trasitif pada A bhb :

$(\exists x,yz \in A). (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \notin R$

$(\forall x,yz \in A). xRy \wedge yRz \Rightarrow x \not R z$

Jelaslah bahwa relasi yang intransitif pada himpunan A pasti juga non-transitif pada A.

Contoh:

A = himpunan semua garis lurus pada bidang datar.

Relasi “ tegaklurus” adalah relasi yang intransitif pada A (jadi juga non-transitif) karena untuk setiajp tiga garis x,y dan z, jika x tegak lurus y dan y tegaklurus z maka pastilah bahwa x tidak tegak lurus z.

A = himpunan semua manusia.

Relasi “ mengenal” adalah relasi yang non – transitif tetapi bukan relasi yang intransitif pada himpunan A tersebut.

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. **Jelaskan dan berilah contoh Relasi yang bersifat;**
   a. **Refliksif**
   b. **Simetrik**
   c. **Transitif**
2. **Jelaskan dan berilah contoh relasi komposisi dan relasi invers.**