NAMA : EKO SAPUTRA
NIM : 201420001

Metode Numerik Secara Umum

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa (*engineering*), seperti Teknik Sipil, Teknik Mesin, Elektro, dan sebagainya. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal alias rumit. Model matematika yang rumit ini adakalanya tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan **solusi sejatinya (*exact solution*)**. Yang dimaksud dengan metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku (lazim).

Sebagai contoh ilustrasi, tinjau sekumpulan persoalan matematik di bawah ini. Bagaimana cara anda menyelesaikannya?

1. Tentukan akar-akar persamaan polinom:

$$23.4x^7 - 1.25x^6 + 120x^4 + 15x^3 - 120x^2 - x + 100 = 0$$

2. Selesaikan sistem persamaaan lanjar (*linear*):

$$\begin{aligned}
1.2a - 3b - 12c + 12d + 4.8e - 5.5f + 100g &= 18\\
0.9a + 3b - c + 16d + 8e - 5f - 10g &= 17\\
4.6a + 3b - 6c - 2d + 4e + 6.5f - 13g &= 19\\
3.7a - 3b + 8c - 7d + 14e + 8.4f + 16g &= 6\\
2.2a + 3b + 17c + 6d + 12e - 7.5f + 18g &= 9\\
5.9a + 3b + 11c + 9d - 5e - 25f - 10g &= 0\\
1.6a + 3b + 1.8c + 12d - 7e + 2.5f + g &= -5
\end{aligned}$$

3. Bila diperoleh tabulasi titik-titik (x,y) sebagai berikut (yang dalam hal ini rumus fungsi $y = f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit):

x	$y = f(x)$
2.5	1.4256
3.0	1.7652
3.5	2.0005
4.4	2.8976
6.8	3.8765

Peranan Komputer dalam Metode Numerik

Komputer berperan besar dalam perkembangan bidang metode numerik. Hal ini mudah dimengerti karena perhitungan dengan metode numerik adalah berupa operasi aritmetika seperti penjumlahan, perkalian, pembagian, plus membuat perbandingan. Sayangnya, jumlah operasi aritmetika ini umumnya sangat banyak dan berulang, sehingga perhitungan secara manual sering menjemukan. Manusia (yang melakukan perhitungan manual ini) dapat membuat kesalahan dalam melakukannya. Dalam hal ini, komputer berperanan mempercepat proses perhitungan tanpa membuat kesalahan.

Penggunaan komputer dalam metode numerik antara lain untuk memprogram. Langkah-langkah metode numerik diformulasikan menjadi program komputer. Program ditulis dengan bahasa pemrograman tertentu, seperti FORTRAN, PASCAL, C, C++, BASIC, dan sebagainya.

Sebenarnya, menulis program numerik tidak selalu diperlukan. Di pasaran terdapat banyak program aplikasi komersil yang langsung dapat digunakan. Beberapa contoh aplikasi yang ada saat ini adalah *MathLab*, *MathCad*, *Maple*, *Mathematica*, *Eureka*, dan sebagainya. Selain itu, terdapat juga *library* yang berisi rutin-rutin yang siap digabung dengan program utama yang ditulis pengguna, misalnya *IMSL* (*International Mathematical and Statistical Library*) *Math/Library* yang berisi ratusan rutin-rutin metode numerik.

Selain mempercepat perhitungan numerik, dengan komputer kita dapat mencoba berbagai kemungkinan solusi yang terjadi akibat perubahan beberapa parameter. Solusi yang diperoleh juga dapat ditingkatkan ketelitiannya dengan mengubah-ubah nilai parameter.

Kemajuan komputer digital telah membuat bidang metode numerik berkembang secara dramatis. Tidak ada bidang matematika lain yang mengalami kemajuan penting secepat metode numerik. Tentu saja alasan utama penyebab kemajuan ini adalah perkembangan komputer itu sendiri, dari komputer mikro sampai komputer *Cray*, dan kita melihat perkembangan teknologi komputer tidak pernah berakhir. Tiap generasi baru komputer menghadirkan keunggulan seperti waktu, memori, ketelitian, dan kestabilan perhitungan. Hal ini membuat ruang penelitian semakin terbuka luas. Tujuan utama penelitian itu adalah pengembangan algoritma numerik yang lebih baik dengan memanfaatkan keunggulan komputer semaksimal mungkin. Banyak algoritma baru lahir atau perbaikan algoritma yang lama didukung oleh komputer.

Bagian mendasar dari perhitungan rekayasa yang dilakukan saat ini adalah perhitungan "waktu nyata" (*real time computing*), yaitu perhitungan keluaran (hasil) dari data yang diberikan dilakukan secara simultan dengan *event* pembangkitan data tersebut, sebagaimana yang dibutuhkan dalam mengendalikan proses kimia atau reaksi nuklir, memandu pesawat udara atau roket dan sebagainya [KRE88]. Karena itu, kecepatan perhitungan dan kebutuhan memori komputer adalah pertimbangan yang sangat penting.

Jelaslah bahwa kecepatan tinggi, keandalan, dan fleksibilitas komputer memberikan akses untuk penyelesaian masalah praktek. Sebagai contoh, solusi sistem persamaan lanjar yang besar menjadi lebih mudah dan lebih cepat diselesaikan dengan komputer. Perkembangan yang cepat dalam metode numerik antara lain ialah penemuan metode baru, modifikasi metode yang sudah ada agar lebih mangkus, analisis teoritis dan praktis algoritma untuk proses perhitungan baku, pengkajian galat, dan penghilangan jebakan yang ada pada metode [KRE88].

Mengapa Kita Harus Mempelajari Metode Numerik?

Seperti sudah disebutkan pada bagian awal bab ini, para rekayasawan dan para ahli ilmu alam, dalam pekerjaannya sering berhadapan dengan persamaan matematik. Persoalan yang muncul di lapangan diformulasikan ke dalam model yang berbentuk persamaan matematika. Persamaan tersebut mungkin sangat kompleks atau jumlahnya lebih dari satu. Metode numerik, dengan bantuan komputer, memberkan cara penyelesaian persoalan matematika dengan cepat dan akurat.

Terdapat beberapa alasan tambahan mengapa kita harus mempelajari metode numerik [CHA91]:

1. Metode numerik merupakan alat bantu pemecahan masalah matematika yang sangat ampuh. Metode numerik mampu menangani sistem persamaan besar, kenirlanjaran, dan geometri yang rumit yang dalam praktek rekayasa seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitik.
2. Seperti sudah disebutkan pada upapab 1.4, di pasaran banyak tersedia program aplikasi numerik komersil. Penggunaan aplikasi tersebut menjadi lebih berarti bila kita memiliki pengetahuan metode numerik agar kita dapat memahami cara paket tersebut menyelesaikan persoalan.
3. Kita dapat membuat sendiri program komputer tanpa harus membeli paket programnya. Seringkali beberapa persoalan matematika yang tidak selalu dapat diselesaikan oleh program aplikasi. Sebagai contoh, misalkan ada program aplikasi tertentu yang tidak dapat dipakai untuk menghitung integrasi lipat dua, , atau lipat tiga, . Mau tidak mau, kita harus menulis sendiri programnya. Untuk itu, kita harus mempelajari cara pemecahan integral lipat dua atau lebih dengan metode numerik.
4. Metode numerik menyediakan sarana untuk memperkuat kembali pemahaman matematika. Karena, metode numerik ditemukan dengan menyederhanakan matematika yang lebih tinggi menjadi operasi matematika yang mendasar.

Tahap-Tahap Memecahkan Persoalan Secara Numerik

Ada enam tahap yang dilakukan dakam pemecahan persoalan dunia nyata dengan metode numerik, yaitu

1. **Pemodelan**

   Ini adalah tahap pertama. Persoalan dunia nyata dimodelkan ke dalam persamaan matematika (lihat contoh ilustrasi pada upabab 1.2)

2. **Penyederhanaan model**

   Model matematika yang dihasilkan dari tahap 1 mungkin saja terlalu kompleks, yaitu memasukkan banyak peubah (variable) atau parameter. Semakin kompleks model matematikanya, semakin rumit penyelesaiannya. Mungkin beberapa andaian dibuat sehingga beberapa parameter dapat diabaikan. Contohnya, faktor gesekan udara diabaikan sehingga koefisian gesekan di dalam model dapat dibuang. Model matematika yang diperoleh dari penyederhanaan menjadi lebih sederhana sehingga solusinya akan lebih mudah diperoleh.

3. **Formulasi numerik**

   Setelah model matematika yang sederhana diperoleh, tahap selanjutnya adalah memformulasikannya secara numerik, antara lain:

   a. menentukan metode numerik yang akan dipakai bersama-sama dengan analisis galat awal (yaitu taksiran galat, penentuan ukuran langkah, dan sebagainya). Pemilihan metode didasari pada pertimbangan:
      - apakah metode tersebut teliti?
      - apakah metode tersebut mudah diprogram dan waktu pelaksanaannya cepat?
      - apakah metode tersebut tidak peka terhadap perubahan data yang cukup kecil?

   b. menyusun algoritma dari metode numerik yang dipilih.

4. **Pemrograman**

   Tahap selanjutnya adalah menerjemahkan algoritma ke dalam program komputer dengan menggunakan salah satu bahasa pemrograman yang dikuasai.

5. **Operasional**

   Pada tahap ini, program komputer dijalankan dengan data uji coba sebelum data yang sesungguhnya.

6. **Evaluasi**

Bila program sudah selesai dijalankan dengan data yang sesungguhnya, maka hasil yang diperoleh diinterpretasi. Interpretasi meliputi analisis hasil *run* dan membandingkannya dengan prinsip dasar dan hasil-hasil empirik untuk menaksir kualitas solusi numerik, dan keputusan untuk menjalankan kembali program dengan untuk memperoleh hasil yang lebih baik.

Peran Ahli Informatika dalam Metode Numerik

Dari tahap-tahap pemecahan yang dikemukan di atas, tahap 1 dan 2 melibatkan para pakar di bidang persoalan yang bersangkutan. Kalau persoalannya dalam bidang eknik Sipil, maka orang dari bidang Sipil-lah yang menurunkan model matematikanya. Kalau persoalannya menyangkut bidang Teknik Kimia (TK), maka ahli Teknik Kimia-lah yang mempunyai kemmapuan membentuk model matematikanya.

Dimanakah peran orang Informatika? Orang Informatika baru berperan pada tahap 3 dan 4, dan 5. Tetapi, agar lebih memahami dan menghayati persoalan, sebaiknya orang Informatika juga ikut dilibatkan dalam memodelkan, namun perannya hanyalah sebagai pendengar.

Tahap 6 memerlukan kerjasama informatikawan dengan pakar bidang bersangkutan. Bersama-sama dengan pakar, informatikawan mendiskusikan hasil numerik yang diperoleh, apakah hasil tersebut sudah dapat diterima, apakah perlu dilakukan perubahan parameter, dsb.

Perbedaan Metode Numerik dengan Analisis Numerik

Untuk persoalan tertentu tidaklah cukup kita hanya menggunakan metode untuk memperoleh hasil yang diinginkan; kita juga perlu mengetahui apakah metode tersebut memang memberikan solusi hampiran, dan seberapa bagus hampiran itu [BUC92]. Hal ini melahirkan kajian baru, yaitu **analisis numerik**.

Metode numerik dan analisis numerik adalah dua hal yang berbeda. Metode adalah algoritma, menyangkut langkah-langkah penyelesaian persoalan secara numerik, sedangkan analisis numerik adalah terapan matematika untuk menganalisis metode [NOB72]. Dalam analisis numerik, hal utama yang ditekankan adalah analisis galat dan kecepatan konvergensi sebuah metode. Teorema-teorema matematika banyak dipakai dalam menganalisis suatu metode. Di dalam buku ini, kita akan memasukkan beberapa materi analisis numerik seperti galat metode dan kekonvergenan metode.

ALJABAR LINEAR

A. PENGERTIAN DAN NOTASI MATRIKS

1. PENGERTIAN

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom yang ditulis diantara tanda kurung ( ) atau [ ] atau || ||

Susunan horizontal disebut dengan baris sedangkan susunan vertikal disebut dengan kolom

Bentuk Umum Matriks :

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris } \mathbf{1} \\ \longrightarrow \text{baris } \mathbf{2} \\ \\ \longrightarrow \text{baris } \mathbf{m} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Kolom} & \text{Kolom} & \text{Kolom} \end{array} \end{array}$$

a $_{mn}$ adalah elemen atau unsur matriks yang terletak pada baris ke-m dankolom ke-n

Nama matriks ditulis dengan menggunakan huruf besar A,B, P, Q, dsb . Sedangkan Unsur/elemen-elemen suatu matriks dengan huruf kecil sesuai nama matriks dengan indeks sesuai letak elemennya, seperti a_{11}, a_{12}, ...

Contoh 1: Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & -3 & 8 \\ 2 & -5 & 9 & 12 & -4 \\ 3 & 0 & 7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a. banyak baris
b. banyak kolom
c. elemen-elemen baris ke-1
d. elemen-elemen kolom ke-3
e. $a_{3.4}$
f. $a_{1.3}$

Jawab :
a. banyak baris : **3** buah
b. banyak kolom :**5** buah
c. elemen-elemen baris ke-1 : **1, 4, 6, -3, 8**
d. elemen-elemen kolom ke-3 : **6, 9, 7**
e. $a_{3.4}$ = elemen baris ke-3 kolom ke-4 = **5**
f. $a_{1.3}$ = elemen baris ke-1 kolom ke-3 = **6**

2. ORDO MATRIKS

Yaitu banyaknya baris dan kolom yang menyatakan suatu matriks.

A_{mxn} artinya matriks A berordo m x n yaitu banyaknya baris m buah dan banyaknya kolom n buah.

Contoh : Diketahui $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

Tentukan ordo matriks P dan Q

Jawab : Ordo matriks P = 2 x 4 atau $P_{2\,x3}$; Ordo matriks Q = 3 x 2 atau $Q_{2\,x3}$

3. JENIS-JENIS MATRIKS

1. Matriks Nol

Yaitu matriks yang setiap elemennya nol.

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Matriks Baris

Yaitu matriks yang hanya mempunyai satu baris

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Matriks Kolom

Yaitu matriks yang hanya mempunyai satu kolom.

Contoh : $P = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Matriks Bujur sangkar/Matriks Persegi

Yaitu suatu matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama.

Ordo matriks n x n sering disingkat dengan n saja.

Contoh : $K = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & 4 & 9 \\ -6 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

5. Matriks Diagonal

Yaitu matriks persegi yang semua elemennya nol, kecuali elemen-elemen diagonal utamanya.

Contoh : $E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

6. Matriks Satuan /MatriksIdentitas (I)

Yaitu matriks persegi yang semua elemen diagonal utamanya satu, dan elemen lainnya nol.

Contoh : $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Matriks Skalar

Yaitu matriks persegi yang semua elemen pada diagonal utamanya sama, tetapi bukan nol dan semua elemen lainnya nol.

Contoh : $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$

8. **Matriks Segitiga Atas**
   Yaitu matriks yang semua elemen di bawah diagonal utamanya nol.
   Contoh : $A=\begin{bmatrix}2&1&-3\\0&1&4\\0&0&5\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5&7&9&4\\0&-1&1&6\\0&0&4&8\\0&0&0&3\end{bmatrix}$

9. **Matriks Segitiga Bawah**
   Yaitu matriks yang semua elemen di atas diagonal utamanya nol.
   Contoh : $K=\begin{bmatrix}3&0&0\\4&4&0\\1&-3&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&-1&0&0\\9&3&4&0\\8&2&6&7\end{bmatrix}$

10. **Matriks Koefisien**
    Yaitu matriks yang semua elemennya merupakan koefisien-keofisien dari suatu sistem persamaan linear.
    Contoh1: Matriks koefisien dari sistem persamaan liniear 2x + 3y =7 adalah : $\begin{bmatrix}2&3\\-4&5\end{bmatrix}$
    -4x + 5y =-3

    Contoh 2: Matriks koefisien dari sistem persamaan liniear 3x +2y-z = 7
    4x +2z = 8 adalah $\begin{bmatrix}3&2&-1\\4&0&2\\1&-5&4\end{bmatrix}$
    x -5y+4z =-6

4. KESAMAAN DUA MATRIKS

Dua matriks dikatakan sama jika ordo dan elemen-elemen yang seletak sama.

Contoh 1: $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\end{bmatrix}$

Jika A= B maka: a=p, b=q, c=r dan d=s

Contoh 2: Tentukan x dan y dari $\begin{bmatrix}3&1\\8&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&x\\2y&-5\end{bmatrix}$

Jawab : x = 1
2y = 8 $\Rightarrow$ y =4

5. TRANSPOSE MATRIKS

Transpose (putaran) matriks A yaitu matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukarkan elemen-elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris.
Transpose matriks A dinyatakan dengan A^T atau A'.

Contoh 3: Jika $P=\begin{bmatrix}1&2&4\\7&3&9\end{bmatrix}$ maka tentukan P^T

Jawab : P^T = $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

B. OPERASI MATRIKS

1. PENJUMLAHAN MATRIKS

Dua matriks dapat dijumlahkan jika ordonya sama. Yang dijumlahkan yaitu elemen-elemen yang seletak.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}$

Contoh : Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan :

a). A + B b). B + A c). B + C d). A + (B + C) e) A+B f). (A + B) + C

Jawab : a. **A + B** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

b. **B + A** = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

c. B + C = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

d. **A + (B + C)** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ = $= \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

e. (A + B) = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

f. **(A + B)+C** = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

1. A + B = B + A (bersifat komutatif)
2. A + (B + C) = (A + B) + C (bersifat asosiatif)
3. A + O = O + A = A (O matriks identitas dari penjumlahan)
4. A + (-A) = (-A) + A = O (-A matriks invers penjumlahan)

2. PENGURANGAN MATRIKS

Dua matriks dapat dikurangkan jika ordonya sama. Yang dikurangkan elemen-elemen yang seletak.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{bmatrix}$

Contoh : Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, maka tentukan :

a. A – B b. B – A c. (A-B)-C d. A-(B-C)

Jawab :

a. A – B = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \ldots$

b. B – A = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat Pengurangan matriks :

1. A – B $\neq$ B – A (tidak komutatif)
2. A – (B – C) = (A – B) – C (asosiatif)

3. PERKALIAN MATRIKS

3.1 PERKALIAN MATRIKS DENGAN BILANGAN REAL (SKALAR)

Hasil perkalian skalar k dengan sebuah matriks A yang berordo m x n adalah sebuah matriks yang berordo m x n dengan elemen-elemennya adalah hasil kali skalar k dengan setiap elemen matriks A.

Contoh : Jika $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ maka tentukan :

a. 2(A + B) b. 2A + 2B c. 2(3A) d. 6A

Jawab : a. 2(A + B) = …

b. 2A + 2B = …

c. 2(3A) = …

d. 6A = …

3.2 PERKALIAN MATRIKS DENGAN MATRIKS

Dua matriks A dan B dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks A (matriks kiri) sama dengan jumlah baris matriks B (matriks kanan).
Ordo hasil perkalian matriks A_{mxn} dengan B_{nxp}, misalnya matriks C yang akan berordo mxp (seperti permainan domino).

$$\boxed{A_{m\,x\,n}\ .\ B_{n\,x\,p} = C_{m\,x\,p}}$$

Cara mengalikan matriks A dan B yaitu dengan menjumlahkan setiap perkalian elemen pada baris matriks A dengan elemen kolom matriks B dan hasilnya diletakkan sesuai dengan baris dan kolom pada matriks C (matriks hasil perkalian).
Misal : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ maka :

AB = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs & at+bu \\ cp+dq & cr+ds & ct+du \end{bmatrix}$

Contoh : Diketahui $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 0\\-2 & 5\end{bmatrix}$ dan $C=\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}$.

Tentukan :

a. AB	b. BA	c. BC	d. AC	e. (AB)C	f. A(BC)
g. B + C	h. A(B + C)	i. AB + AC	j. AI		k. IA

Jawab : a. AB = $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\-2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-4 & 0+10\\0-6 & 0+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 10\\-6 & 15\end{bmatrix}$

b. BA = $\begin{bmatrix}4 & 0\\-2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+0 & 8+0\\-2+0 & -4+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\-2 & 11\end{bmatrix}$

c. BC = $\begin{bmatrix}4 & 0\\-2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12+0 & -8+0\\-6+5 & 4+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -8\\-1 & 24\end{bmatrix}$

d. AC = $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2 & -2+8\\0+3 & 0+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\3 & 12\end{bmatrix}$

e. (AB)C = $\begin{bmatrix}0 & 10\\-6 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+10 & 0+40\\-18+15 & 12+60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 40\\-3 & 72\end{bmatrix}$

f. A(BC) = $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12 & -8\\-1 & 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12-2 & -8+48\\0-3 & 0+72\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 40\\-3 & 72\end{bmatrix}$

g. B + C = $\begin{bmatrix}4 & 0\\-2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3 & 0+(-2)\\-2+1 & 5+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -2\\-1 & 9\end{bmatrix}$

f. A(B + C) = $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -2\\-1 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7-4 & -2+18\\0-3 & 0+27\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 16\\-3 & 27\end{bmatrix}$

g. AB + AC = $\begin{bmatrix}0 & 10\\-6 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\3 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15+14 & 18+16\\5+28 & 6+32\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & 34\\33 & 38\end{bmatrix}$

g. AI = $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 0+2\\0+0 & 0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\ldots$

h. IA = $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 2+0\\0+0 & 0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\ldots$

<u>Sifat-sifat perkalian matriks</u> :

1. Umumnya tidak komutatif (AB $\neq$ BA)
2. Asosiatif : (AB)C = A(BC)
3. Distributif kiri : A(B + C) = AB + AC
   Distributif kanan : (B + C)A = BA + CA
4. Identitas : IA = AI = A
5. k(AB) = (kA)B

C. INVERS MATRIKS

1. INVERS MATRIKS ORDO 2 x 2

Jika AB = BA = I , dimana I matriks satuan yaitu $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka A dan B dikatakan saling invers.

Invers matriks A dinotasikan A^{-1}.

Misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka :

AB = I $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ap + br = 1

cp + dr = 0

$\Rightarrow p = \dfrac{d}{ad-bc}$ dan $r = \dfrac{-c}{ad-bc}$

aq + bs = 0

cq + ds = 1

$\Rightarrow q = \dfrac{-b}{ad-bc}$ dan $s = \dfrac{a}{ad-bc}$

Karena $B = A^{-1}$ = $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$

ad – bc disebut Determinan (D) atau $|A|$ atau det(A).

Jadi $D = |A| = \det(A) = ad - bc$.

Jika D = 0, maka matriks A tidak mempunyai invers dan matriks A disebut matriks Singular. Jika ad – bc $\neq 0$ maka matriks A disebut matriks Non Singular.

Contoh 1: Tentukan determinan $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

Jawab : $|A| = ...$

Contoh 2: Tentukan matriks X jika $X\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

Jawab : XA = B $\Rightarrow$ X = BA^{-1} = ...

Jika ada persamaan matriks berbentuk :

AX = B maka X = $A^{-1}B$
XA = B maka X = BA^{-1}

ELEMINASI GAUSS

Karl Friedich Gauss (1977-1855) adalah seorang ahli matematika dan ilmuwan dari Jerman. Gauss yang kadang-kadang dijuluki “pangeran ahli matematika” disejajarkan dengan Isaac Newton dan Archimedes sebagai salah satu dari tiga ahli matematika yang terbesar yang pernah ada. Dalam seluruh sejarah matematika, tidak pernah ada seorang anak yang begitu cepat berkembang, sebagaimana Gauss, yang dengan usahanya sendiri menyelesaikan dasar aritmetika sebelum ia dapat berbicara. Pada suatu hari, saat ia bahkan belum berusia tiga tahun, melalui cara dramatis orang tuanya mulai menyadari kejeniusan Gauss.

Wilhelm Jordan (1842-1899) adalah seorang insinyur Jerman yang ahli dalam bidang geodesi. Sumbangannya untuk penyelesaian sistem linear dalam buku populernya, *Handbuch de Vermessungskunde* (Buku panduan Geodesi) pada tahun 1988. Contoh Sumbangannya untuk penyelesaian sistem linear dalam buku populernya

Dalam aljabar linear, eliminasi Gauss-Jordan adalah versi dari eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauus-Jordan kita membuat nol elemen-elemen di bawah maupun di atas diagonal utama suatu matriks. Hasilnya adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satuan (Semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, elemen-elemen lainnya nol).

Metode eliminasi Gauss-Jordan kurang efisien untuk menyelesaikan sebuah SPL, tetapi lebih efisien daripada eliminasi Gauss jika kita ingin menyelesaikan SPL dengan matriks koefisien sama.

Motede tersebut dinamai Eliminasi Gauss-Jordan untuk menghormati Carl Friedrich Gauss dan Whilhelm Jordan.

Di dalam matematika, system persamaan linier adalah kumpulan persamaan-persamaan linier yang memiliki variabel-variabel yang sama. Bentuk umum dari sistem persamaan linier dengan *n* peubah dinyatakan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
. \qquad . \qquad . \qquad . \\
. \qquad . \qquad . \qquad . \\
. \qquad . \qquad . \qquad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Dengan mengunakan perkalian matriks, kita dapat menulis persamaan di atas sebagai persamaan matriks

$$Ax = b$$

Yang dalam hal ini,

$A = [a_{i,j}]$ adalah matriks berukuran *n x n*

$x = [x_j]$ adalah matriks berukuran *n x 1*

$b = [b_j]$ adalah matriks berukuran *n x 1* (disebut juga vector kolom)

Yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variabel sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variabel bebas. Cara eliminasi ini sudah banyak dikenal.

Eliminasi Gauss adalah suatu cara mengoperasikan nilai-nilai di dalam matriks sehingga menjadi matriks yang lebih sederhana. Caranya adalah dengan melakukan operasi baris sehingga matriks tersebut menjadi matriks yang eselon-baris. Ini dapat digunakan sebagai salah satu metode penyelesaian persamaan linear dengan menggunakan matriks. Caranya dengan mengubah persamaan linear tersebut ke dalam matriks teraugmentasi dan mengoperasikannya. Setelah menjadi matriks Eselon-baris, lakukan substitusi balik untuk mendapatkan nilai dari variabel-variabel tersebut.

Metode ini berangkat dari kenyataan bahwa bila matriks A berbentuk *segitiga atas* (menggunakan Operasi Baris Elementer) seperti system persamaan berikut ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Maka solusinya dapat dihitung dengan ***teknik penyulingan mundur*** (*backward substitution):*

$$a_{nn}x_n = b_n \;\Rightarrow\; x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \;\Rightarrow\; x_{n-1} = \frac{\left(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n\right)}{a_{n-1,n-1}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$dst.$$

Sekali $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, .., x_{k+1}$ diketahui, maka nilai x_k dapat dihitung dengan:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}, \qquad k = n-1, n-2, \dots, 1 \text{ dan } a_{kk} \neq 0.$$

Kondisi $a_{kk} \neq 0$ sangat penting. Sebab bila $a_{kk} \neq 0$, persamaan diatas menjerjakan pembagian dengan nol. Apabila kondisi tersebut tidak dipenuhi, maka SPL tidak mempunyai jawaban.

Contoh:

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots(\text{i}) \\ \dots(\text{ii}) \\ \dots(\text{iii}) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (i) dengan (-2), lalu tambahkan ke baris (ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (i) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (ii) dengan (1/2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ kalikan baris (ii) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (iii) dengan (-2)

Solusi system diperoleh dengan teknik penyulihan mundur sebagai berikut:

$$x_3 = 3$$

$$x_2 - \frac{7}{2}x_3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$$

Diperoleh penyelesaian x = 1, y = 2, z = 3.

♥ Tata ancang pivoting

Prinsip tata ancang pivoting adalah sebagai berikut: jika $a_{p,p}^{(p-1)}$= 0, cari baris k dengan $a_{k,p} \neq 0$ dan k > p, lalu pertukaran baris p dan baris k. Metode eliminasi Gauss dengan tata ancang pivoting disebut metode eliminasi Gauss yang diperbaiki (*modified Gauusian elimination*)

Contoh:

Selesaikan sistem prsamaan lanjar berikut dengan meetode eliminasi Gauss yang menerapkan tata ancang pivoting.

$x_1 + 2_{x2} + \; x_3 = 2$

$3_{x1} + 6_{x2} = 9$

$2_{x1} + 8_{x2} + 4_{x3} = 6$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{R}_2 - 3\mathrm{R}_1 \\ \sim \\ \mathrm{R}_3 - 2\mathrm{R}_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{R}_1 \Leftrightarrow \mathrm{R}_3 \\ (*) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Operasi baris 1 Operasi baris 2

Setelah operasi baris 1, elemen a_{22} yang akan menjadi pivot pada operasi baris 2 ternyata sama dengan nol. Karena itu, pada operasi baris 2, elemen baris 2 dipertukarkan dengan elemen baris 3. Tanda (*) menyatakan pertukaran baris terjadi akibat proses pivoting. Sekarang elemen $a_{22} = 4 \neq 0$ sehingga operasi baris elementer dapat diteruskan. Tetapi, karena matriks A sudah membentuk matriks U, proses eliminasi selesai. Solusinya diperoleh dengan teknik penyulihan mundur, yaitu $x_3 = -1, x_2 = 1,$ dan $x_1 = 1$.

Melakukan pertukaran baris untuk menghindari pivot yang bernilai nol adalah cara pivoting yang sederhana (*simple pivoting*). Masalah ini dapat juga timbul bila elemen pivot sangat dekat ke nol, karena jika elemen pivot sangat kecil dibandingkan terhadap elemen lainnya, maka galat pembulatan dapat muncul.

♥ Kemungkinan solusi SPL

Tidak semua SPL mempunyai solusi. Ada 3 kemungkinan yang dapat terjadi pada SPL:

a) Mempunyai solusi yang unik
b) Mempunyai banyak solusi, atau
c) Tidak ada solusi sama sekali

Untuk SPL dengan tiga buah persamaan atau lebih (dengan tiga peubah atau lebih)tidak terdapat tafsiran geometrinya (tidak mungkin dibuat ilustrasi grafiknya) seperti pada SPL dengan dua buah persamaan. Namun, kita masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya. Agar lebih jelas, tinjau contoh pada SPL yang disusun oleh tiga persamaan.

1) Solusi unik/tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{Eliminasi} \\ \text{Gauss} \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$

2) Solusi banyak/tidak terhingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{Eliminasi} \\ \text{Gauss} \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

Yang dipenuhi oleh banyak nilai *x*. solusinya diberikan dalam bentuk parameter:

Misalkan $x_3 = k$,

Maka $x_2 = -6 + 3k$ dan $x_1 = 10 - 5k$ dengan $k \in R$.

3) Tidak ada solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{Eliminasi} \\ \text{Gauss} \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Yang dalam hal ini, tidak nilai x_i yang memenuhi, i=1,2,3

Eliminasi Gauss-Jordan

Dalam aljabar linear, eliminasi Gauss-Jordan adalah versi dari eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauss-Jordan kita membuat nol elemen-elemen di bawah maupun di atas diagonal utama suatu matriks. Hasilnya adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satuan (semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, elemen-elemen lainnya nol).

Dalam bentuk matriks, eliminasi Gauss-Jordan ditulis sebagai berikut.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{bmatrix}$$

Solusinya:
$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &= b'_1 \\ x_2 \quad\quad &= b'_2 \\ \cdots\cdots \quad &\quad \cdots\cdots \\ x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Seperti pada metode eliminasi gauss naïf, metode eliminasi Gauss-Jordan naïf tidak menerapkan tata-ancang pivoting dalam proses eliminasinya.

Langkah-langkah operasi baris yang dikemukakan oleh Gauss dan disempurnakan oleh Jordan sehingga dikenal dengan Eliminasi Gauss-Jordan, sebagai berikut:

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan ini disebut 1 utama (leading 1).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah dari matriks.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat lain.

Algoritma Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut:

1. Masukkan matriks A dan vector B beserta ukurannya n
2. Buat augmented matriks [A|B] namakan dengan A
3. Untuk baris ke-i dimana i=1 s/d n
   a) Perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol:

      Bila ya:

      Pertukarkan baris ke-i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

      Bila tidak: Lanjutkan
   b) Jadikan nilai diagonalnya menjadi satu, dengan cara untuk setiap kolom k dimana k=1 s/d n+1, hitung $a_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$
4. Untuk baris ke j, dimana j=i+1 s/d n

   Lakukan operasi baris elementer untuk kolom k dimana k=1 s/d n

   Hitung $c = a_{j,i}$

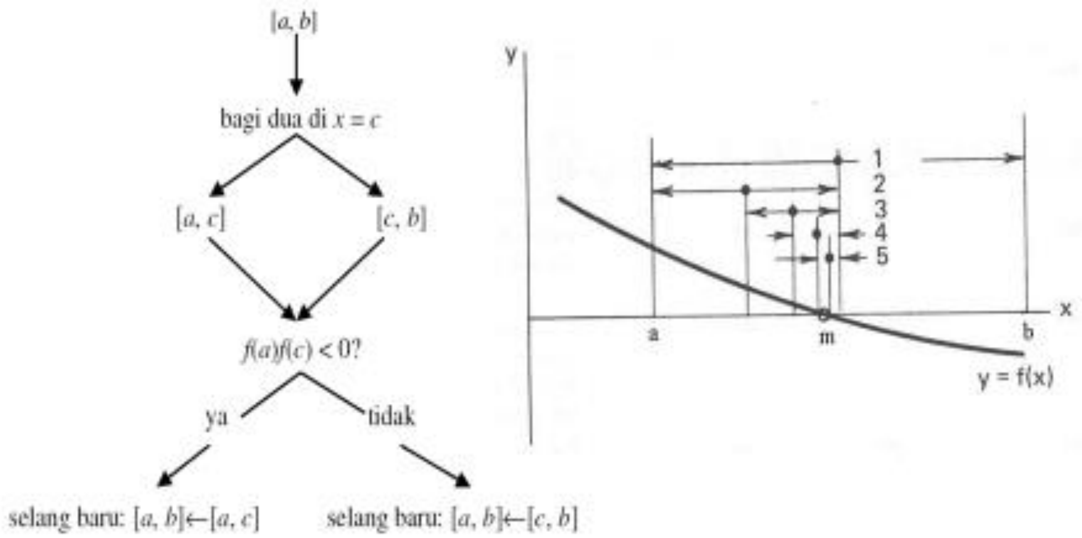
   Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$

CARA 1 MATODE BISEKSI.

Prinsip:

Ide awal metode ini adalah metode table, dimana area dibagi menjadi N bagian. Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung akar sedangkan bagian yang tidak mengandung akar dibuang. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.

Langkah-langkah Biseksi



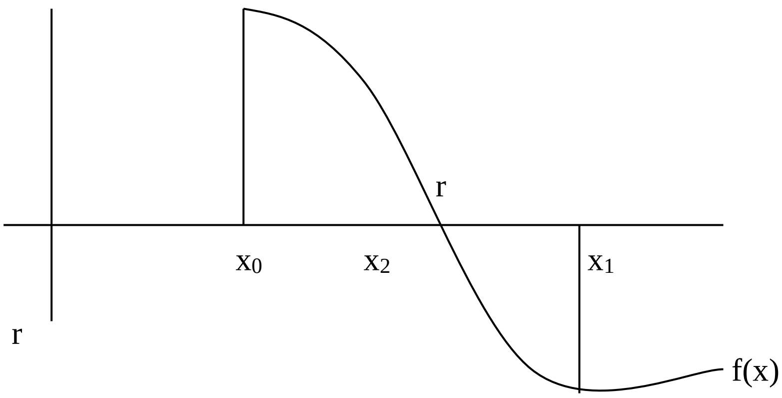
Algoritma Biseksi;

- Jika f(x) kontinu pada interval [a,b] dan f(a).f(b) < 0 maka terdapat minimal satu akar.

- Algoritma sederhana metode biseksi :
  1. Mulai dengan interval [a,b] dan toleransi ε
  2. Hitung f(a) dan f(b)
  3. Hitung c = (a + b)/2 dan f(c)
  4. Jika f(a).f(c) < 0 maka b = c dan f(b) = f(c) jika tidak a = c dan f(a) = f(c)
  5. Jika │a-b│ < ε maka proses dihentikan dan di dapat akar x = c
  6. Ulangi langkah 3

CARA II METODE BISEKSI

$f(x) = 0$ menghitung akar dari $f(x)$, jika r akar $f(x)$ $\longrightarrow$ $f(r) = 0$



$| x_{k+1} - x_k | < \varepsilon$

Yang mengandung akar dari $f(x) = 0$

PROSEDUR

1. Pilih interval awal $[x_0 \; , \; x_1]$ tentukan nilai δ, ε
2. $\boxed{x_2 = [x_0 + x_1]/2}$

3. membuang interval yang tidak berguna tinjau $f(x_0)$. $f(x_2)$

- Jika $f(x_0)$. $f(x_2) > 0$ maka x_2 mengantikan x_0
- Jika $f(x_0)$. $f(x_2) = 0$ maka STOP x_2 akar
- Jika $f(x_0)$. $f(x_2) < 0$ maka x_2 mengantikan x_1

4. STOP. $I\ x_1 - x_0\ I < \delta$ atau $I\ f(x_0)\ f(x_2)\ I < \varepsilon$

Metode Biseksi menjamin bahwa selalu berhasil menemukan akar yang kita cari. Hanya kelemahan dari metode tersebut bekerja sangat lambat karena slalu menentukan titik tengah x_2 sebagai titik ujung interval berikutnya, padahal mungkin tadinya sudah mendekati akar.

Contoh 1: Carilah hampiran x yg mendekati $f(x) = x^3 - x - 1$, batas $\partial = 0{,}1$

Iterasi	X_0	X_1	X_2	$f(X_0)$	$f(X_2)$	$f(X_0)f(X_2)$	$\mid X_0 - X_1 \mid$
1	**1**	**2**	**1.5**	**-1**	**0,875**	**-0,875**	**1**
2	**1**	**1,5**	**1,25**	**-1**	**-0,297**	**0,297**	**0,5**
3	**1,25**	**1,5**	**1,375**	**-0,297**	**0,225**	**-0,067**	**0,25**
4	**1,25**	**1,375**	**1,312**	**-0,297**	**-0,053**	**0,016**	**0,125**

Disimpulkan nilai X mendekati adalah x = 1,312

Contoh 2. Carilah hampiran x yang mendekati $f(x) = e^{x} - 5x^2$, batas $\partial = 0{,}01$

Iterasi	X_0	X_1	X_2	$f(X_0)$	$f(X_2)$	$f(X_0)f(X_2)$	$\mid X_0 - X_1 \mid$
1	**0**	**1**	**0,5**	**1**	**0,3987**	**0,3987**	**1**
2	**0,5**	**1**	**0,75**	**0,3987**	**-0,6955**	**-0,2773**	**0,5**
3	**0,5**	**0,75**	**0,625**	**0,3987**	**-0,0849**	**-0,0338**	**0,25**
4	**0,5**	**0,625**	**0,5625**	**0,3987**	**0,1730**	**0,0690**	**0,125**
5	**0,5625**	**0,625**	**0,5937**	**0,1730**	**0,0481**	**0,0083**	**0,0625**

6	**0,5937**	**0,625**	**0,6094**	**0,0481**	**-0,0174**	**-0,0008**	**0,0313**
7	**0,5937**	**0,6094**	**0,6016**	**0,0481**	**0,0156**	**0,0008**	**0,0157**
8	**0,6016**	**,6094**	**0,6055**	**0,0156**	**-0,0009**	**-0,00001**	**0,0078**

Disimpulkan nilai X mendekati adalah x = 0,6055

DERET TAYLOR DAN DERET MACLUOREN

1. Deret Taylor
   Teorema: hanya ada satu deret pangkat dalam (x-c) yang memenuhi untuk f(x) sehingga:

   $f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + ... = \sum_0^\infty a_n(x - c)^n$ berlaku untuk semua x dalam beberapa interval di sekitar c dengan $a_n = \frac{f^n(c)}{n!}$

Deret: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$ disebut deret Taylor

Bukti:

Jika $f(x)$ kontinu dalam selang $(c\text{-}h, c\text{+}h)$ dengan $0 \le h \le \infty$ dan andaikan f didefinisikan sebagai:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots\cdots + a_n(x-c)^n + \cdots\cdots \qquad (1)$$

Untuk semua x dalam selang $(c\text{-}h, c\text{+}h)$, maka:

$$f^1(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots\cdots + na_n(x-c)^{n-1} + \cdots\cdots$$

$$f^{11}(x) = 2a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3(x-c) + 3\cdot 4\cdot a_4(x-c)^2 + 4\cdot 5a_5(x-c)^3 + \cdots\cdots + \cdots$$

$$f^{111}(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-c) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-c)^2 + 4\cdot 5\cdot 6a_6(x-c)^3 + \cdots\cdots + \cdots$$

. . . .

. . . .

$$f^n(x) = n!a_n + (n+1)!\,a_{n+1}(x-c) + (n+2)!\,a_{n+2}(x-c)^2 + (n+3)!\,a_{n+3}(x-c)^3 + \cdots\cdots$$

Jika pada fungsi turunan di atas ditetapkan $x = c$, maka diperoleh:

$$f(c) = a_0;\; f^1(c) = 1!a_1;\;\; f^{11}(c) = 2!a_2;\;\; f^{111}(c) = 3!a_3;\; .....\;\; f^n(c) = n!a_n$$

atau

$$a_0 = f(c);\;\; a_1 = \frac{f^1(c)}{1!}\;;\;\; a_2 = \frac{f^{11}(c)}{2!}\;;\;\; a_3 = \frac{f^{111}(c)}{3!}\;;\; .....\;\; a_n = \frac{f^n(c)}{n!}$$

Jika harga $a_0, a_1, a_2, a_3,$ . . . . , a_n . . . . . dimasukkan ke persamaan (1) di atas, maka akan didapat:

$$f(x) = f(c) + \frac{f^1(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{11}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{111}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

2. **Deret Mac Laurin**

Jika deret Taylor diterapkan untuk c=0 → deret Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Contoh. Deretkan $f(x) = e^{2x}$

a. di sekitar 0
b. di sekitar 2

Jawab.

a.
$$\begin{aligned}
&f(x) = e^{2x} \rightarrow f(0) = e^0 = 1\\
&f'(x) = 2e^{2x} \rightarrow f'(0) = 2\\
&f''(x) = 4e^{2x} \rightarrow f''(0) = 4\\
&f'''(x) = 8e^{2x} \rightarrow f'''(0) = 8\\
&dst
\end{aligned}$$

shg deret Mc Laurin → $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \ldots.. + \frac{2^n}{n!}x^n$ ***Deret Maclouren***

b.
$$\begin{aligned}
&f(x) = e^{2x} \rightarrow f(2) = e^4\\
&f'(x) = 2e^{2x} \rightarrow f'(2) = 2e^4\\
&f''(x) = 4e^{2x} \rightarrow f''(2) = 4e^4\\
&f'''(x) = 8e^{2x} \rightarrow f'''(2) = 8e^4\\
&dst
\end{aligned}$$]

shg deret Taylor di sekitar c=2 →

$e^{2x} = e^4 + 2e^4(x-2) + \frac{4e^4}{2!}(x-2)^2 + \frac{8e^4}{3!}(x-2)^3 + \ldots.. + \frac{2^n e^4}{n!}(x-2)^n$ ***Deret Taylor***

TURUNAN NUMERIK

A. Persoalan Turunan Numerik

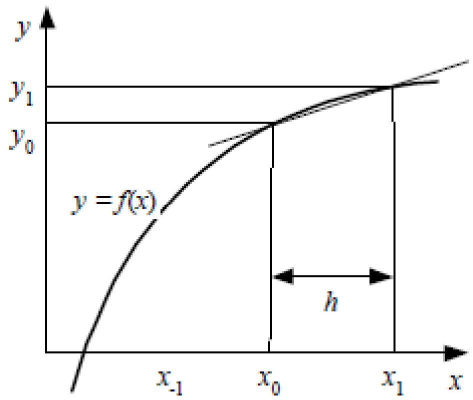
Persoalan turunan numerik adalah menentukan nilai hampiran nilai turunan fungsi f. Meskipun metode numerik untuk menghitung turunan fungsi tersedia, tetapi perhitungan turunan sedapat mungkin dihindari. Alasannya, nilai turunan numerik umumnya kurang teliti dibandingkan dengan nilai fungsinya. Dalam kenyataannya, turunan adalah limit dari hasil bagi selisih: yaitu pengurangan dua buah nilai yang besar $(fx + h) \; - \; fx)$) dan membaginya dengan bilangan yang kecil (h). Pembagian ini dapat menghasilkan turunan dengan galat yang besar.

B. Tiga Pendekatan dalam Menentukan Turunan Numerik

Misal diberikan nilai – nilai x di $x_0 - h$, serta nilai fungsi untuk nilai – nilai x tersebut. Titik-titik yang diperoleh adalah $(x_{-1}, f_{-1}), (x_0, f_0), (x_1, f_1)$, yang dalam hal ini $x_{-1} = x_0 - h$ dan $x_1 = x_0 + h$.

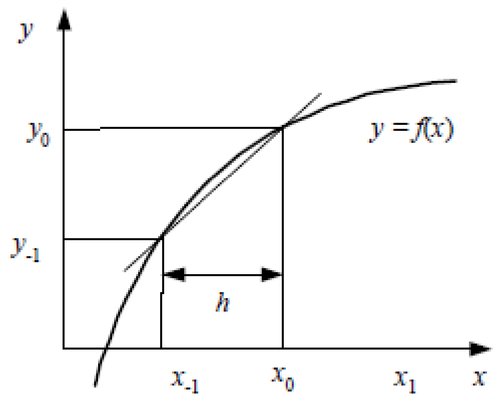
1. Hampiran Selisih Maju (Forward Difference Approximation)

$$f'x_0 = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$



2. Hampiran selisih-mundur (Backward Difference Approximation)

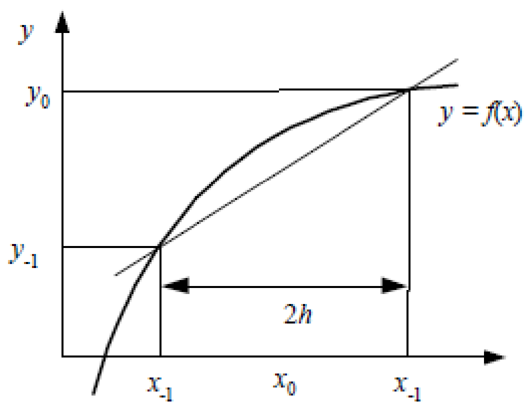
$$f'x_0 = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{f_0 - f_1}{h}$$



(b) Hampiran selisih-mundur

3. Hampiran selisih-pusat (Central Difference Approximation)

$$f'x_0 = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$



(c) Hampiran selisih-pusat

C. Penurunan Rumus dengan Deret Taylor

Misalkan diberi titik-titik (x_i, f_i), $\quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

$x_i = x_0 + ih$ dan $f_i = f(x_i)$

a. Hampiran selisih – maju

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \cdots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \cdots$$

$$hf_i' = f_{i+1} - f_i - \frac{h^2}{2} f_i'' + \cdots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} f_i''$$

$$f_i{}' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

Yang dalam hal ini, $O(h) = \frac{h}{2} f_i{}''(t), x_i < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di $x_0 dan\ x_1$ persamaan rumusnya menjadi

$$f_0{}' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

b. Hampiran selisih mundur

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \cdots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i{}' + \frac{h^2}{2} f_i{}'' + \cdots$$

$$hf_i{}' = f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{2} f_i{}'' + \cdots$$

$$f_i{}' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{h}{2} f_i{}'' + \cdots$$

$$f_i{}' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

Yang dalam hal ini, $O(h) = -\frac{h}{2} f_i{}''(t), x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di $x_0 dan\ x_1$ persamaan rumusnya menjadi

$$f_0{}' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$

c. Hampiran selisih pusat

Kurangkan persamaan hampiran selisih maju dengan mundur

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i{}' + \frac{h^3}{3} f_i{}''' + \cdots$$

$$2hf_i{}' = f_{i+1} - f_{i-1} - \frac{h^3}{3} f_i{}'''$$

$$f_i{}' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f_i{}'''' + \cdots$$

$$f_i{}' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Yang dalam hal ini, $O(h^2) = -\frac{h^2}{6} f_i''''(t), x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di $x_{-1}\ dan\ x_1$ persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

- Rumus untuk Turunan Kedua, $f''(x)$ dengan bantuan Deret Taylor
    a) Hampiran selisih-pusat

    Jumlahkan persamaan hampiran selisih maju dengan mundur

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(4)} + \cdots$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(4)} + \cdots$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f_i^{(4)}$$

$$jadi, f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$yang\ dalam\ h$al ini, $O(h^2) = -\frac{h^2}{12} f_i^{(4)}(t), x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di $x_{-1},\ x_0 dan\ x_1$ persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_i}{h^2} + O(h^2)$$

b) Hampiran selisih-mundur

Dengan cara yang sama seperti hampiran selisih-pusat di atas, diperoleh:

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

$yang\ dalam\ h$al ini, $O(h) = hf''(t), x_{i-2} < t < x_i$

Untuk nilai-nilai f di $x_{-2},\ x_{-1} dan\ x_0$ persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0'' = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h)$$

c) Hampiran selisih-maju

Dengan cara yang sama seperti hampiran selisih-pusat di atas, diperoleh:

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

$yang\ dalam$ hal ini, $O(h) = -hf''(t), x_i < t < x_{i+2}$

Untuk nilai-nilai f di $x_0,\ x_1 dan\ x_2$ persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

D. Penurunan Rumus Turunan Numerik dengan Polinom Interpolasi

Misalkan diberikan titk-titik data berjarak sama,

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0,1,2, \dots, n,$$

$$dan$$

$$x = x_0 + sh, s\ \in R$$

Adalah titik yang akan dicari nilai interpolasinya. Polinom Newton-Gregory yang menginterpolasi seluruh titik data tersebut adalah:

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + \frac{s\Delta f_0}{1!} + s(s-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + s(s-1)(s-2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!}$$

$$+ s(s-1)(s-2) \dots (s-n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}$$

$$= F(s)$$

Yang dalam hal ini, $s = \frac{(x - x_0)}{h}$

Turunan pertama dari $f(x)$ adalah :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dF}{ds}\frac{ds}{dx}$$

$$= \left(0 + \Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{s^2}{2} - s + \frac{1}{3}\right)\Delta 3 f_0 + \cdots\right)\frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0 + galat\right)$$

Berdasarkan persamaan diatas, diperoleh rumus turunan numerik dengan ketiga pendekatan (maju, mundur, pusat) sebagai berikut :

(a) Hampiran selisih-maju

- Bila digunakan titik-titik $x_0 dan\ x_1$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta f_0) = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

- Bila digunakan titik-titik $x_0, x_1, dan\ x_2$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0\right)$$

Untuk titik $x_0 \rightarrow s = \frac{(x_0 - x_0)}{h} = 0$, sehingga

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}(\Delta f_1 - \Delta f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta f_1\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}f_1 - \frac{3}{2}f_0 - \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_1\right)$$

$$f'(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

(b) Hampiran selisih-mundur

Polinom interpolasi: Newton-Gregory mundur bila digunakan titik-titik $x_0 dan\ x_{-1}$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(\nabla f_0) = \frac{f_0 - f_{-1}}{h}$$

(c) Hampiran selisih-pusat

digunakan titik-titik $x_0, x_1, dan\ x_2$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0\right)$$

Untuk titik $x_1 \rightarrow s = \frac{(x_1 - x_0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, sehingga

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}(\Delta f_1 - \Delta f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_1\right)$$

$$= \frac{1}{2h}(f_1 - f_0 + f_2 - f_1)$$

$$f'(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

Untuk titik $x_{-1}, x_0, dan\ x_1$:

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Rumus untuk Turunan Kedua, $f''(x)$ dengan Polinom Interpolasi

Turunan kedua f adalah

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}(0 + \Delta^2 f_0 + (s-1)\Delta^3 f_0).\frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0 + (s-1)\Delta^3 f_0)$$

Misalkan untuk hampiran selisih-pusat, titik-titik yang digunakan $x_0, x_1, dan\ x_2$:

- Untuk titik $x_1 \rightarrow s = \frac{(x_1 - x_0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, sehingga

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0 + (1-1)\Delta^3 f_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta f_1 - \Delta f_0)$$

$$= \frac{1}{h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

Untuk titik $x_{-1}, x_0, dan\ x_1$:

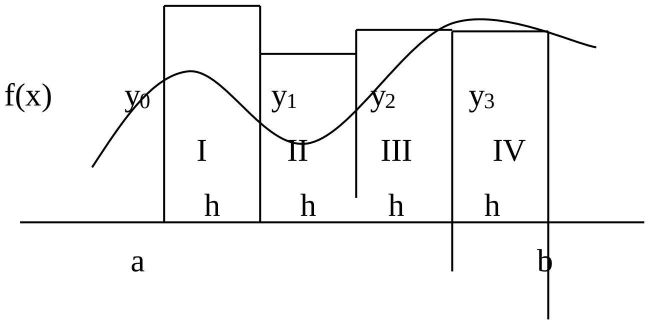
$$f''(x_0) = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}$$

Metode Persegi Panjang

Daerah integral di bagi-bagi menjadi n buah subinterval dengan lebar interval sama.

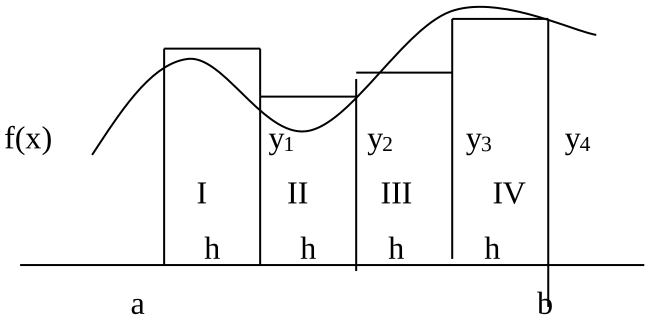
a. Tinggi diambil dari Ujung Kiri Sub Interval

$$h = \left(\frac{b-a}{n}\right)$$



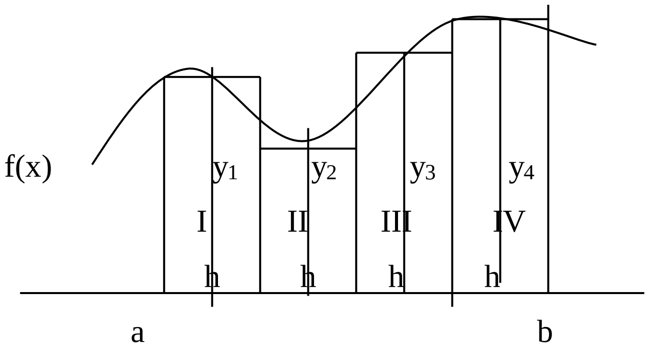
$$\boxed{I = h\ (y_0 + y_1 + \ldots y_{n-1})}$$

b. Tinggi diambil dari Ujung Kanan SubInterval



$$\boxed{\mathbf{I = h}\ (y_1 + y_2 + \ldots y_n)}$$

c. Tinggi diambil dari Titik Tengah SubInterval



$$\boxed{\textbf{I = h } \left(y_{(a+\frac{h}{2})} + y_{(a+\frac{3h}{2})} + \dots y_{[a+(\frac{2n-1}{2})]} \right)}$$

Contoh :

Hitung $\int_0^4 x^2 dx =$

Dengan menggunakan Kalkulus dasar ;

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^4 = \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3} = 21{,}3333$$

Perhitungan dengan menggunakan Metode Persegi Panjang :

a. Tinggi diambil dari Ujung Kiri SubInterval

Daerah yang terbentuk adalah daerah yang dibatasi oleh kurva y = x^2 , garis x = 0 , x = 4 dan sumbu x

Misal daerah dibagi menjadi 4 subinterval (n=4)

I = h $\left(y_0 + y_1 + \dots y_{n-1} \right)$

h = $\frac{4-0}{4}$ =1

I = 1 { f(0) + f(1) + f(2) + f(3) } = 1 { 0 + 1 + 4 + 9 } = 14

b. Tinggi diambil dari Ujung Kanan SubInterval

Daerah yang terbentuk adalah daerah yang dibatasi oleh kurva y = x^2 , garis x = 0 , x = 4 dan sumbu x

Misal daerah dibagi menjadi 4 subinterval (n=4)

I = h $\left(y_0 + y_1 + \dots y_{n-1} \right)$

h = $\frac{4-0}{4}$ =1

I = 1 { f(1) + f(2) + f(3) + f(4) } = 1 { 1 + 4 + 9 + 16 } = 30

c. Tinggi diambil dari Titik Tengah SubInterval

Daerah yang terbentuk adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis x = 0 , x = 4 dan sumbu x

Misal daerah dibagi menjadi 4 subinterval (n=4)

Ambil nilai tengah antara subinterval

I = h $\left(y_{(a+\frac{h}{2})} + y_{(a+\frac{3h}{2})} + \ldots y_{[a+(\frac{(2n-1)h}{2})]}\right)$

h = $\frac{4-0}{4}$ =1

I = 1 { f(0,5) + f(1,5) + f(2,5) + f(3,5) }

= 1 { 0,25 + 2,25 + 6,25 + 12,25} = 21