Aljabar Boolean(Jemakmun)

- Misalkan terdapat
  - Dua operator biner: + dan ·
  - Sebuah operator uner: ’.
  - *B* : himpunan yang didefinisikan pada opeartor +, ·, dan ’
  - 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari *B*.

  Tupel $(B, +, \cdot, ')$

  disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma-aksioma atau postulat Huntington berikut:

  1. *Closure*: (i) $a + b \in B$
     (ii) $a \cdot b \in B$

  2. Identitas: (i) $a + 0 = a$
     (ii) $a \cdot 1 = a$

  3. Komutatif: (i) $a + b = b + a$
     (ii) $a \cdot b = b \,.\, a$

  4. Distributif: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
     (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

  5. Komplemen[1]: (i) $a + a' = 1$
     (ii) $a \cdot a' = 0$

- Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, harus diperlihatkan:
  1. Elemen-elemen himpunan *B*,
  2. Kaidah operasi untuk operator biner dan operator uner,
  3. Memenuhi postulat Huntington.

Aljabar Boolean Dua-Nilai

Aljabar Boolean dua-nilai:

- $B = \{0, 1\}$
- operator biner, + dan ·
- operator uner, ’
- Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	a'
0	1
1	0

Cek apakah memenuhi postulat Huntington:

1. *Closure* : jelas berlaku
2. Identitas: jelas berlaku karena dari tabel dapat kita lihat bahwa:

   (i) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
   (ii) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

3. Komutatif: jelas berlaku dengan melihat simetri tabel operator biner.
4. Distributif: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dapat ditunjukkan benar dari tabel operator biner di atas dengan membentuk tabel kebenaran:

a	b	c	$b + c$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$(a \cdot b) + (a \cdot c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0

1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(ii) Hukum distributif $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ dapat ditunjukkan benar dengan membuat tabel kebenaran dengan cara yang sama seperti (i).

5. Komplemen: jelas berlaku karena Tabel 7.3 memperlihatkan bahwa:

   (i) $a + a‘ = 1$, karena 0 + 0’= 0 + 1 = 1 dan 1 + 1’= 1 + 0 = 1
   (ii) $a \cdot a = 0$, karena 0 · 0’= 0 · 1 = 0 dan 1 · 1’ = 1 · 0 = 0

Karena kelima postulat Huntington dipenuhi, maka terbukti bahwa $B = \{0, 1\}$ bersama-sama dengan operator biner + dan · operator komplemen ‘ merupakan aljabar Boolean.

Ekspresi Boolean

- Misalkan (*B*, +, ·, ’) adalah sebuah aljabar Boolean. Suatu ekspresi Boolean dalam (*B*, +, ·, ’) adalah:
  (i) setiap elemen di dalam *B*,
  (ii) setiap peubah,
  (iii) jika e_1 dan e_2 adalah ekspresi Boolean, maka $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$, e_1’ adalah ekspresi Boolean

Contoh:

0
1
a
b
c

$a + b$
$a \cdot b$
$a' \cdot (b + c)$
$a \cdot b' + a \cdot b \cdot c' + b'$, dan sebagainya

Mengevaluasi Ekspresi Boolean

- Contoh: $a' \cdot (b + c)$
  jika $a = 0$, $b = 1$, dan $c = 0$, maka hasil evaluasi ekspresi:
  $0' \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$

- Dua ekspresi Boolean dikatakan **ekivalen** (dilambangkan dengan '=') jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk setiap pemberian nilai-nilai kepada n peubah.
  Contoh:
  $a \cdot (b + c) = (a \,.\, b) + (a \cdot c)$

Contoh. Perlihatkan bahwa $a + a'b = a + b$.

Penyelesaian:

a	b	a'	$a'b$	$a + a'b$	$a + b$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

- Perjanjian: tanda titik (·) dapat dihilangkan dari penulisan ekspresi Boolean, kecuali jika ada penekanan:

  (i) $a(b + c) = ab + ac$
  (ii) $a + bc = (a + b)(a + c)$
  (iii) $a \cdot 0$, bukan a0

Prinsip Dualitas

- Misalkan S adalah kesamaan (*identity*) di dalam aljabar Boolean yang melibatkan operator $+$, $\cdot$, dan komplemen, maka jika pernyataan S^* diperoleh dengan cara mengganti

  $\cdot$ dengan $+$
  $+$ dengan $\cdot$
  0 dengan 1
  1 dengan 0

  dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan S^* juga benar. S^* disebut sebagai *dual* dari S.

Contoh.

(i) $(a \cdot 1)(0 + a') = 0$ dualnya $(a + 0) + (1 \cdot a') = 1$
(ii) $a(a' + b) = ab$ dualnya $a + a'b = a + b$

Hukum-hukum Aljabar Boolean

1. Hukum identitas: (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = a$	2. Hukum idempoten: (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$
3. Hukum komplemen: (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	4. Hukum dominansi: (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$
5. Hukum involusi: (i) $(a')' = a$	6. Hukum penyerapan: (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$

7. Hukum komutatif: (i) $a + b = b + a$ (ii) $ab = ba$	8. Hukum asosiatif: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$
9. Hukum distributif: (i) $a + (b\,c) = (a + b)\,(a + c)$ (ii) $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$	10. Hukum De Morgan: (i) $(a + b)' = a'b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

Contoh 7.3. Buktikan (i) $a + a'b = a + b$ dan (ii) $a(a' + b) = ab$

Penyelesaian:

(i) $a + a'b = (a + ab) + a'b$ (Penyerapan)
$= a + (ab + a'b)$ (Asosiatif)
$= a + (a + a')b$ (Distributif)
$= a + 1 \bullet b$ (Komplemen)
$= a + b$ (Identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

Fungsi Boolean

- **Fungsi Boolean** (disebut juga fungsi biner) adalah pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, kita menuliskannya sebagai

  $$f : B^n \rightarrow B$$

  yang dalam hal ini B^n adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n (*ordered n-tuple*) di dalam daerah asal B.
- Setiap ekspresi Boolean tidak lain merupakan fungsi Boolean.

- Misalkan sebuah fungsi Boolean adalah

  $f(x, y, z) = xyz + x'y + y'z$

  Fungsi f memetakan nilai-nilai pasangan terurut ganda-3 (x, y, z) ke himpunan {0, 1}.

  Contohnya, (1, 0, 1) yang berarti $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 1$ sehingga $f(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1' \cdot 0 + 0' \cdot 1 = 0 + 0 + 1 = 1$.

Contoh. Contoh-contoh fungsi Boolean yang lain:

1. $f(x) = x$
2. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$
3. $f(x, y) = x' y'$
4. $f(x, y) = (x + y)'$
5. $f(x, y, z) = xyz'$

- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut **literal**.

  Contoh: Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ pada contoh di atas terdiri dari 3 buah literal, yaitu x, y, dan z'.

Contoh. Diketahui fungsi Booelan $f(x, y, z) = xy\ z'$, nyatakan h dalam tabel kebenaran.

Penyelesaian:

x	y	z	$f(x, y, z) = xy\ z'$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Komplemen Fungsi

1. Cara pertama: menggunakan hukum De Morgan
   Hukum De Morgan untuk dua buah peubah, x_1 dan x_2, adalah

   Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

   $$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= (x(y'z' + yz))' \\ &= x' + (y'z' + yz)' \\ &= x' + (y'z')' (yz)' \\ &= x' + (y + z) (y' + z') \end{aligned}$$
2. Cara kedua: menggunakan prinsip dualitas.
   Tentukan dual dari ekspresi Boolean yang merepresentasikan f, lalu komplemenkan setiap literal di dalam dual tersebut.

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

dual dari f: $x + (y' + z') (y + z)$

komplemenkan tiap literalnya: $x' + (y + z) (y' + z') = f'$

Jadi, $f'(x, y, z) = x' + (y + z)(y' + z')$

Bentuk Kanonik

- Jadi, ada dua macam bentuk kanonik:
  1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product* atau SOP)
  2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum* atau POS)

Contoh: 1. $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ → SOP

Setiap suku (*term*) disebut *minterm*

2. $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$ → POS

Setiap suku (*term*) disebut *maxterm*

- Setiap *minterm*/*maxterm* mengandung literal lengkap

x	y	*Minterm* Suku	*Minterm* Lambang	*Maxterm* Suku	*Maxterm* Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	$x\,y$	m_3	$x' + y'$	M_3

x	y	z	*Minterm* Suku	*Minterm* Lambang	*Maxterm* Suku	*Maxterm* Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'y\,z'$	m_2	$x + y'+z$	M_2
0	1	1	$x'y\,z$	m_3	$x + y'+z'$	M_3
1	0	0	$x\,y'z'$	m_4	$x'+ y + z$	M_4
1	0	1	$x\,y'z$	m_5	$x'+ y + z'$	M_5
1	1	0	$x\,y\,z'$	m_6	$x'+ y'+ z$	M_6
1	1	1	$x\,y\,z$	m_7	$x'+ y'+ z'$	M_7

Contoh 7.10. Nyatakan tabel kebenaran di bawah ini dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Tabel 7.10

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0

1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Penyelesaian:

(a) SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

atau (dengan menggunakan lambang *minterm*),

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \sum (1, 4, 7)$$

(b) POS

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z') \\ & (x' + y + z')(x' + y' + z) \end{aligned}$$

atau dalam bentuk lain,

$$f(x, y, z) = M_0\, M_2\, M_3\, M_5\, M_6 = \prod(0, 2, 3, 5, 6)$$

Contoh 7.11. Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Penyelesaian:

(a) SOP

$$\begin{aligned} x &= x(y + y') \\ &= xy + xy' \end{aligned}$$

$= xy\ (z + z') + xy'(z + z')$
$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$

$y'z = y'z\ (x + x')$
$= xy'z + x'y'z$

Jadi $f(x, y, z) = x + y'z$
$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$
$= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$

atau $f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma\ (1,4,5,6,7)$

(b) POS
$f(x, y, z) = x + y'z$
$= (x + y')(x + z)$

$x + y' = x + y' + zz'$
$= (x + y' + z)(x + y' + z')$
$x + z = x + z + yy'$
$= (x + y + z)(x + y' + z)$
Jadi, $f(x, y, z) = (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z)$
$= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$
atau $f(x, y, z) = M_0M_2M_3 = \prod(0, 2, 3)$

Konversi Antar Bentuk Kanonik

Misalkan
$f(x, y, z) = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7)$

dan $f\,'$adalah fungsi komplemen dari f,

$f\,'(x, y, z) = \Sigma\ (0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

$$
\begin{aligned}
f'(x, y, z) &= (f'(x, y, z))' = (m_0 + m_2 + m_3)' \\
&= m_0' \,.\, m_2' \,.\, m_3' \\
&= (x'y'z')' \,(x'y\,z')' \,(x'y\,z)' \\
&= (x + y + z)\,(x + y' + z)\,(x + y' + z') \\
&= M_0\, M_2\, M_3 \\
&= \prod (0,2,3)
\end{aligned}
$$

Jadi, $f(x, y, z) = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7) = \prod\ (0,2,3)$.

Kesimpulan: $m_j' = M_j$

Contoh. Nyatakan

$f(x, y, z) = \prod\ (0, 2, 4, 5)$ dan

$g(w, x, y, z) = \Sigma(1, 2, 5, 6, 10, 15)$

dalam bentuk SOP.

Penyelesaian:

$f(x, y, z) = \Sigma\ (1, 3, 6, 7)$

$g(w, x, y, z) = \prod\ (0, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14)$

Contoh. Carilah bentuk kanonik SOP dan POS dari $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

Penyelesaian:

(a) SOP

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= y' + xy + x'yz' \\
&= y'\,(x + x')\,(z + z') + xy\,(z + z') + x'yz' \\
&= (xy' + x'y')\,(z + z') + xyz + xyz' + x'yz' \\
&= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz'
\end{aligned}
$$

atau $f(x, y, z) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

(b) POS

$f(x, y, z) = M_3 = x + y' + z'$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN HARUS DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN.

1. Himpunan B = {0,1,2} dan dua buah operator, +(jumlah) dan *(kali), selidiki apakah himpunan B dan kedua operator tersebut membentuk Aljabar Boolean.

2. Misalkan fungsi $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, carilah fungsi komplemenya menggunakan metode;
   a. De Morgan
   b. Prinsip Dualitas.

3. Misalkan fungsi $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, tentukan nilai-nilai fungsi yang mungkin dengan menggunakan tabel.