ELEMINASI GAUSS

Karl Friedich Gauss (1977-1855) adalah seorang ahli matematika dan ilmuwan dari Jerman. Gauss yang kadang-kadang dijuluki "pangeran ahli matematika" disejajarkan dengan Isaac Newton dan Archimedes sebagai salah satu dari tiga ahli matematika yang terbesar yang pernah ada. Dalam seluruh sejarah matematika, tidak pernah ada seorang anak yang begitu cepat berkembang, sebagaimana Gauss, yang dengan usahanya sendiri menyelesaikan dasar aritmetika sebelum ia dapat berbicara. Pada suatu hari, saat ia bahkan belum berusia tiga tahun, melalui cara dramatis orang tuanya mulai menyadari kejeniusan Gauss.

Wilhelm Jordan (1842-1899) adalah seorang insinyur Jerman yang ahli dalam bidang geodesi. Sumbangannya untuk penyelesaian sistem linear dalam buku populernya, *Handbuch de Vermessungskunde* (Buku panduan Geodesi) pada tahun 1988. Contoh Sumbangannya untuk penyelesaian sistem linear dalam buku populernya

Dalam aljabar linear, eliminasi Gauss-Jordan adalah versi dari eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauus-Jordan kita membuat nol elemen-elemen di bawah maupun di atas diagonal utama suatu matriks. Hasilnya adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satuan (Semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, elemen-elemen lainnya nol).

Metode eliminasi Gauss-Jordan kurang efisien untuk menyelesaikan sebuah SPL, tetapi lebih efisien daripada eliminasi Gauss jika kita ingin menyelesaikan SPL dengan matriks koefisien sama.

Motede tersebut dinamai Eliminasi Gauss-Jordan untuk menghormati Carl Friedrich Gauss dan Whilhelm Jordan.

Di dalam matematika, system persamaan linier adalah kumpulan persamaan-persamaan linier yang memiliki variabel-variabel yang sama. Bentuk umum dari sistem persamaan linier dengan *n* peubah dinyatakan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
. \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\
. \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\
. \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Dengan mengunakan perkalian matriks, kita dapat menulis persamaan di atas sebagai persamaan matriks

$$Ax = b$$

Yang dalam hal ini,

$A = [a_{i,j}]$ adalah matriks berukuran *n x n*

$x = [x_j]$ adalah matriks berukuran *n x 1*

$b = [b_j]$ adalah matriks berukuran *n x 1* (disebut juga vector kolom)

Yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variabel sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variabel bebas. Cara eliminasi ini sudah banyak dikenal.

Eliminasi Gauss adalah suatu cara mengoperasikan nilai-nilai di dalam matriks sehingga menjadi matriks yang lebih sederhana. Caranya adalah dengan melakukan operasi baris sehingga matriks tersebut menjadi matriks yang eselon-baris. Ini dapat digunakan sebagai salah satu metode penyelesaian persamaan linear dengan menggunakan matriks. Caranya dengan mengubah persamaan linear tersebut ke dalam matriks teraugmentasi dan mengoperasikannya. Setelah menjadi matriks Eselon-baris, lakukan substitusi balik untuk mendapatkan nilai dari variabel-variabel tersebut.

Metode ini berangkat dari kenyataan bahwa bila matriks A berbentuk *segitiga atas* (menggunakan Operasi Baris Elementer) seperti system persamaan berikut ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Maka solusinya dapat dihitung dengan ***teknik penyulingan mundur*** (*backward substitution):*

$$a_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \;\Rightarrow\; x_{n-1} = \frac{(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)}{a_{n-1,n-1}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$dst.$$

Sekali $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{k+1}$ diketahui, maka nilai x_k dapat dihitung dengan:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}, \qquad k = n-1, n-2, \dots, 1 \text{ dan } a_{kk} \neq 0.$$

Kondisi $a_{kk} \neq 0$ sangat penting. Sebab bila $a_{kk} \neq 0$, persamaan diatas menjerjakan pembagian dengan nol. Apabila kondisi tersebut tidak dipenuhi, maka SPL tidak mempunyai jawaban.

Contoh:

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots \text{(i)} \\ \dots \text{(ii)} \\ \dots \text{(iii)} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (i) dengan (-2), lalu tambahkan ke baris (ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (i) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (ii) dengan (1/2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ kalikan baris (ii) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (iii) dengan (-2)

Solusi system diperoleh dengan teknik penyulihan mundur sebagai berikut:

$$x_3 = 3$$

$$x_2 - \frac{7}{2}x_3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$$

Diperoleh penyelesaian x = 1, y = 2, z = 3.

♥ Tata ancang pivoting

Prinsip tata ancang pivoting adalah sebagai berikut: jika $a_{p,p}^{(p-1)}$= 0, cari baris k dengan $a_{k,p} \neq 0$ dan k > p, lalu pertukaran baris p dan baris k. Metode eliminasi Gauss dengan tata ancang pivoting disebut metode eliminasi Gauss yang diperbaiki (*modified Gauusian elimination*)

Contoh:

Selesaikan sistem prsamaan lanjar berikut dengan meetode eliminasi Gauss yang menerapkan tata ancang pivoting.

$x_1 + 2_{x2} + \; x_3 = 2$

$3_{x1} + 6_{x2} = 9$

$2_{x1} + 8_{x2} + 4_{x3} = 6$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{R}_2 - 3\mathrm{R}_1 \\ \sim \\ \mathrm{R}_3 - 2\mathrm{R}_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{R}_1 \Leftrightarrow \mathrm{R}_3 \\ (*) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Operasi baris 1 Operasi baris 2

Setelah operasi baris 1, elemen a_{22} yang akan menjadi pivot pada operasi baris 2 ternyata sama dengan nol. Karena itu, pada operasi baris 2, elemen baris 2 dipertukarkan dengan elemen baris 3. Tanda (*) menyatakan pertukaran baris terjadi akibat proses pivoting. Sekarang elemen $a_{22} = 4 \neq 0$ sehingga operasi baris elementer dapat diteruskan. Tetapi, karena matriks A sudah membentuk matriks U, proses eliminasi selesai. Solusinya diperoleh dengan teknik penyulihan mundur, yaitu $x_3 = -1, x_2 = 1,$ dan $x_1 = 1$.

Melakukan pertukaran baris untuk menghindari pivot yang bernilai nol adalah cara pivoting yang sederhana (*simple pivoting*). Masalah ini dapat juga timbul bila elemen pivot sangat dekat ke nol, karena jika elemen pivot sangat kecil dibandingkan terhadap elemen lainnya, maka galat pembulatan dapat muncul.

♥ Kemungkinan solusi SPL

Tidak semua SPL mempunyai solusi. Ada 3 kemungkinan yang dapat terjadi pada SPL:

a) Mempunyai solusi yang unik
b) Mempunyai banyak solusi, atau
c) Tidak ada solusi sama sekali

Untuk SPL dengan tiga buah persamaan atau lebih (dengan tiga peubah atau lebih)tidak terdapat tafsiran geometrinya (tidak mungkin dibuat ilustrasi grafiknya) seperti pada SPL dengan dua buah persamaan. Namun, kita masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya. Agar lebih jelas, tinjau contoh pada SPL yang disusun oleh tiga persamaan.

1) Solusi unik/tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{Eliminasi} \\ \text{Gauss} \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$

2) Solusi banyak/tidak terhingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{Eliminasi} \\ \text{Gauss} \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

Yang dipenuhi oleh banyak nilai *x*. solusinya diberikan dalam bentuk parameter:

Misalkan $x_3 = k$,

Maka $x_2 = -6 + 3k$ dan $x_1 = 10 - 5k$ dengan $k \in R$.

3) Tidak ada solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{Eliminasi} \\ \text{Gauss} \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Yang dalam hal ini, tidak nilai x_i yang memenuhi, i=1,2,3

Eliminasi Gauss-Jordan

Dalam aljabar linear, eliminasi Gauss-Jordan adalah versi dari eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauss-Jordan kita membuat nol elemen-elemen di bawah maupun di atas diagonal utama suatu matriks. Hasilnya adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satuan (semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, elemen-elemen lainnya nol).

Dalam bentuk matriks, eliminasi Gauss-Jordan ditulis sebagai berikut.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{bmatrix}$$

Solusinya:

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= b'_1 \\ x_2 \quad &= b'_2 \\ \cdots\cdots \quad &\quad \cdots\cdots \\ x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Seperti pada metode eliminasi gauss naïf, metode eliminasi Gauss-Jordan naïf tidak menerapkan tata-ancang pivoting dalam proses eliminasinya.

Langkah-langkah operasi baris yang dikemukakan oleh Gauss dan disempurnakan oleh Jordan sehingga dikenal dengan Eliminasi Gauss-Jordan, sebagai berikut:

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan ini disebut 1 utama (leading 1).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah dari matriks.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat lain.

Algoritma Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut:

1. Masukkan matriks A dan vector B beserta ukurannya n
2. Buat augmented matriks [A|B] namakan dengan A
3. Untuk baris ke-i dimana i=1 s/d n
   a) Perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol:

      Bila ya:

      Pertukarkan baris ke-i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

      Bila tidak: Lanjutkan
   b) Jadikan nilai diagonalnya menjadi satu, dengan cara untuk setiap kolom k dimana k=1 s/d n+1, hitung $a_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$
4. Untuk baris ke j, dimana j=i+1 s/d n

   Lakukan operasi baris elementer untuk kolom k dimana k=1 s/d n

   Hitung $c = a_{j,i}$

   Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.\, a_{i,k}$
5. Penyelesaian, untuk i=n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)

$$x_i = a_{i,n+1}$$

Contoh:

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ldots \text{(i)} \\ \ldots \text{(ii)} \\ \ldots \text{(iii)} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (i) dengan (-2), lalu tambahkan ke baris (ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (i) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (ii) dengan (1/2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ kalikan baris (ii) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (iii) dengan (-2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (ii) dengan (-1), lalu tambahkan ke baris (i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ kalikan baris (iii)dengan $\left(-\frac{1}{12}\right)$, lalu tambahkan ke baris (i), dan kalikan baris (iii)dengan $\left(\frac{7}{2}\right)$, lalu tambahkan ke baris (ii)

Diperoleh penyelesaian x = 1, y = 2, z = 3.

Soal-soal yang harus dikerjakan dan jawabannya dikirimkan sebelum batas yang sudah ditentukan.

1. Misalkan diberikan SPL sebagai berikut dengan eleminasi Gauss:

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

2. Misalkan diberikan SPL sebagai berikut dengan eleminasi Gauss Jordan:

$$x + y - z = 6$$
$$3x - 4y + 2z = -2$$
$$2x + 5y + z = 0$$