# Fungsi

## 1. Pengertian Fungsi

Antara anggota-anggota dari suatu himpunan dapat terjadi suatu relasi dengan anggota-anggota dari himpunan yang lain. Misalnya antara anggota-anggota himpunan semua pria dengan anggota-anggota semua wanita dapat diadakan relasi " suami ".

Secara matematis suatu relasi R antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B dapat dipandang sebagai himpunan bagian dari produk Cartesius kedua himpunan itu.

$$R \subseteq A \times B.$$

Misalnya : A = { 1, 3, 5 } dan B = { 2, 0, 4 }, maka relasi "lebih kecil" antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B dapat disajikan dengan: $R = \{ (1, 2), (1, 4), (3, 4) \} \subseteq A \times B$.

Fungsi atau pemetaan adalah suatu relasi khusus antara anggota-anggota dua buah himpunan. Sehingga fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.

Suatu relasi antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B disebut Fungsi (pemetaan) bhb relasi itu mengkaitkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Suatu fungsi biasanya disajikan dengan lambang f. Jika fungsi f mengkaitkan anggota-anggota himpunan A, maka dikatakan bahwa f adalah fungsi dari A ke B dan disajikan dengan lambang:

$$f : A \rightarrow B$$

A disebut daerah asal (daerah sumber, domain ) dari fungsi f, sedangkan B disebut daerah kawan. (daerah jajahan , kodomain) dari fungsi f. Jika $x \in A$ oleh fungsi f dikaitkan (dikawankan) dengan suatu anggota dari B, maka anggota dari B itu disebut "bayangan dari x" dan disajikan dengan lambang "f(x)". f(x) seringkali juga disebut "nilai fungsi" untuk x. Secara simbolis matematis, definisi fungsi f dapat disajikan sbb.

$$f : A \rightarrow B \textit{ bhb}. (\forall x \in A).(\exists ! y \in B) . y = f(x)$$

Perhatikan bahwa suatu fungsi f dari A ke B adalah suatu relasi yang mempunyai dua sifat khusus, yaitu:

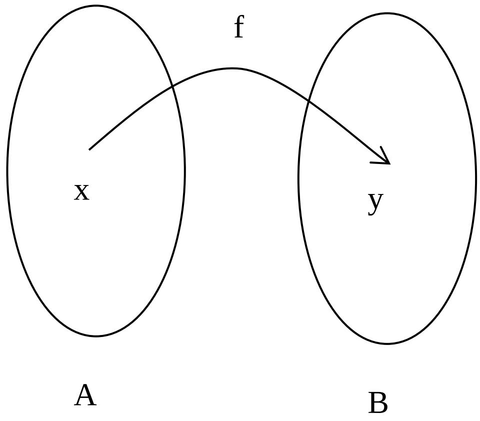
a. Setiap anggota himpunan A (daerah asal) dikawankan dengan anggota himpunan B (Seringkali dikatakan bahwa "daerah asal dihabiskan"

b. Kawan dari anggota-anggota himpunan A (daerah asal) adalah tunggal. Sifat ini dapat dinyatakan secara simbolis:

$(\forall\ x_1, x \in A).\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Pada umumnya, untuk suatu fungsi $f : A \rightarrow B$, anggota-anggota dari himpunan B (daerah kawan ) tidak perlu mempunyai kawan anggota himpunan A (daerah kawan tidak perlu di habiska), dan jika anggota himpunan B mempunyai kawan anggota himpunan A, kawannya diA itu tidak harus tunggal.

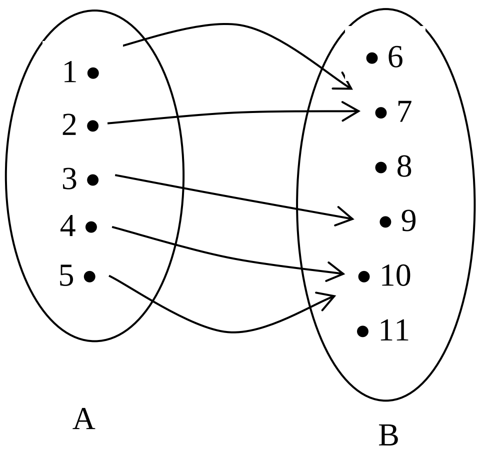
Suatu fungsi f dari A ke B dapat diilustrasikan dengan diagram panah sebagai berikut.




Himpunan semua anggota himpunan B yang merupakan bayangan dari suatu anggota himpunan A disebut daerah hasil (range) dari fungsi f dan disajikan dengan $R_f$ . Jadi:

$R_f = \{\ y \in B \mid (\exists\ x \in A).\ y = f(x)\ \}$

Misalnya untuk fungsi $f : A \rightarrow B$ yang disajikan dengan diagram panah sebagai berikut.



$f(1) = f(2) = 7$ ; $f(3) = 9$ ; $F(4) = f(5) = 10$

$R_f = \{ 7, 9, 10 \}$

Seperti telah diuraikan di atas, jika suatu anggota dari daerah kawan mempunyai kawan anggota dari daerah asal, maka kawannya itu tidak harus tunggal. Himpunan semua anggota dari daerah asal yang merupakan kawan dari suatu anggota daerah kawan disebut bayangan invers dari y dan disajikan dengan lambang $f^{-1}(y)$. Jadi:

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid y = f(x)\}$$

Pada contoh fungsi : $f : A \rightarrow B$ di atas:

$f^{-1}(7) = \{1, 2\}$;

$f^{-1}(9) = \{3\}$ ;

$f^{-1}(10) = \{4, 5\}$;

$f^{-1}(6) = f^{-1}(8) = f^{-1}(11) = \phi$ .

Jika $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari A ke B, maka yang dimaksud dengan invers dari fungsi f, disajikan dengan $f^{-1}$, adalah relasi yang mengkaitkan anggota-anggota himpunan B dengan anggota-anggota himpunan A. Jelaslah bahwa pada umumnya invers dari suatu fungsi tidak merupakan fungsi (dari B ke A) melainkan hanyalah merupakan suatu relasi biasa.

**2. Cara menyajikan fungsi**

Ada dua macam cara untuk menyajikan suatu fungsi , yaitu :

a. Cara aturan : fungsi itu disajikan dengan cara menyatakan aturan yang menentukan relasi antara angggota – anggota daerah asal dengan anggota – anggota daerah kawannya.

   Contoh :

   $f: R \rightarrow R$ dimana $f(x) = x^2$

   R = himpunan semua bilangan nyata.

b. Cara himpunan : Seperti halnya relasi, maka fungsi f dari A ke B dapat dipandang sebagai himpunan bagian ( khusus ) dari A x B.

   Maka fungsi $f : R \rightarrow R$ dimana $f(x) = x^2$ dapat juga disajikan sebagai suatu himpunan, yaitu himpunan bagian dari R x R :

$$f = \{ (x,y) \mid x \in R, y \in R \;\; y = x^2 \}$$

Fungsi f : A $\rightarrow$ B yang digambarkan dengan diagram panah pada contoh diatas dapat juga disajikan sebagai :

f = { (1,7),(2,7),(3,9),(4,10),(5,10)}

Perhatikan bahwa dalam penyajian fungsi dengan cara himpunan, setiap anggota dari daerah asalnya muncul tepat satu kali sebagai komponen yang pertama dari anggota – anggota himpunan itu.

**3. Kesamaan dua buah fungsi.**

Dua buah fungsi f : A $\rightarrow$ B dan g : A $\rightarrow$ B dikatakan sama jika kedua fungsi itu mengkaitkan anggota-anggota dari daerah asalnya dengan anggota- anggota yang sama di daerah kawannya.

$f = g$ bhb $(\forall x \in A).\ f(x) = g(x)$

Contoh :

$f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 2(x+1)(x-2)$, dan $g : R \rightarrow R$ dengan $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$

Karena $f(x) = 2(x+1)(x-2) = 2(x^2 - x - 2) = 2x^2 - 2x - 4 = g(x)$, maka f = g

**4. Fungsi – fungsi Khusus.**

Beberapa fungsi khusus yang diberi sebutan karena sifat-sifat/ karakteristiknya adalah sebagai berikut.

a. Suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut fungsi surjektif dari A kepada (onto) B jika setiap anggota B merupakan bayangan dari suatu anggota A. Jadi pada fungsi yang surjektif, daerah hasilnya berimpit dengan daerah kawan (atau daerah kawannya dihabiskan ).

   f : A $\rightarrow$ B adalah fungsi surjektif bhb.

   $(\forall y \in B)(\exists x \in A).\ y = f(x)$ bhb $R_f = B$ bhb $(\forall y \in B)\ f^{-1}(y) \neq \phi$

   Contoh :

   $A = \{x \mid x = \text{bilangan bulat}\}$

   $B = \{x \mid x = \text{bilangan cacah}\}$

   f : A $\rightarrow$ B dimana $f(x) = |x|$

b. Suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut fungsi injektif bila anggota – anggota dari B yang merupakan bayangan dari A, merupakan bayangan dari tepat satu anggota A. Dengan perkataan lain f : A $\rightarrow$ B adalah fungsi injektif bhb.$(\forall x_1, x_2 \in A).\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ bhb. $(\forall x_1, x_2 \in A).\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

   Contoh:

A = {x │ x = bilangan asli}

B = {x │ x = bilangan nyata}

Fungsi f ini adalah fungsi yang injektif, karena jika f ($x_1$) = f ($x_2$), maka $x_1$ -1 = $x_2$ -1 sehingga $x_1 = x_2$ .

Fungsi f ini tidak surjektif karena ada anggota B yang tidak merupakan bayangan dari suatu anggota A, misalnya ½ $\in$B.

c. Suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B yang sekaligus surjektif dan injektif disebut daerah kawannya merupakan bayangan dari tepat suatu anggota dari daerah asalnya. Dengan demikian jika f adalah fungsi bijektif maka setiap anggota dari daerah asal mempunyai satu kawan di daerah kawan dan sebaliknya setiap anggota dari daerah kawan mempunyai satu kawan di daerah asal. Karena itu fungsi bijektif seringkali disebut juga korespondensi satu-satu.

Contoh :

A = {x │ x = bilangan positif}

B = {x │ x = bilangan nyata}

f : A $\rightarrow$ B di mana f (x) = log x

Fungsi f surjektif karena setiap y$\in$B merupakan bayangan suatu x$\in$A, yaitu x = $10^{y}$ .

Fungsi f ini injektif karena jika f ($x_1$) = f ($x_2$), maka log $x_1$ = log $x_2$ , sehingga

$$10^{\log x_1} = 10^{\log x_2}$$

$$x_1 = x_2 .$$

Dengan demikian f adalah fungsi bijektif. Mudah dibuktikan bahwa f adalah fungsi bijektif *bhb*. $f^{-1}$ merupakan fungsi.

Invers dari suatu fungsi bijektif disebut fungsi invers.

Jadi jika f : A $\rightarrow$ B adalah fungsi bijektif, maka fungsi inversnya adalah $f^{-1}$ : B $\rightarrow$ A.

Pada contoh diatas fungsi invers dari fungsi bijektif f : A $\rightarrow$B di mana f (x) = log x ialah $f^{-1}$ : B $\rightarrow$ A dimana $f^{-1}$ ( y )= $10^{y}$ .

d. Suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut fungsi konstan jika bayangan semua anggota A adalah satu anggota yang sama dari B.

f : A $\rightarrow$ B adalah fungsi konstan bhb ($\exists$ !c$\in$B) ($\forall$ x$\in$A) . f ( x ) = c

e. Suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut fungsi indentitas jika bayangan dari setiap anggota dari A ialah dirinya sendiri. ( Daerah asal dan saerah kawan dari suatu fungsi identits adalah himpunan yang sama ).

f : A $\rightarrow$ A adalah fungsi indentitas bhb.( $\forall$ x$\in$A). f ( x ) = x

Jelaslah bahwa suatu fungsi identitas adalah fungsi yang bijektif.

**SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN**

1. **Jelaskan dan berilah contoh fungsi yang bersifat;**
   a. **Injektif**
   b. **Surjektif**
   c. **Bijektif**
2. **Jelaskan dan berilah contoh fungsi komposisi dan fungsi invers.**