TURUNAN NUMERIK

A. Persoalan Turunan Numerik

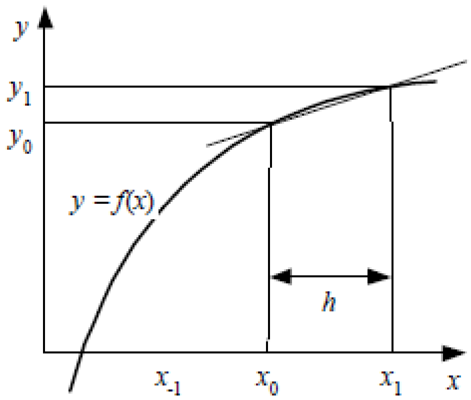
Persoalan turunan numerik adalah menentukan nilai hampiran nilai turunan fungsi f. Meskipun metode numerik untuk menghitung turunan fungsi tersedia, tetapi perhitungan turunan sedapat mungkin dihindari. Alasannya, nilai turunan numerik umumnya kurang teliti dibandingkan dengan nilai fungsinya. Dalam kenyataannya, turunan adalah limit dari hasil bagi selisih: yaitu pengurangan dua buah nilai yang besar $(fx + h) - fx)$) dan membaginya dengan bilangan yang kecil (h). Pembagian ini dapat menghasilkan turunan dengan galat yang besar.

B. Tiga Pendekatan dalam Menentukan Turunan Numerik

Misal diberikan nilai – nilai x di $x_0 - h$, serta nilai fungsi untuk nilai – nilai x tersebut. Titik-titik yang diperoleh adalah $(x_{-1}, f_{-1}), (x_0, f_0), (x_1, f_1)$, yang dalam hal ini $x_{-1} = x_0 - h$ dan $x_1 = x_0 + h$.

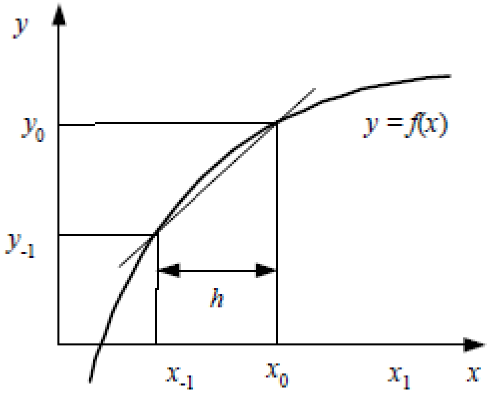
1. Hampiran Selisih Maju (Forward Difference Approximation)

$$f'x_0 = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$



2. Hampiran selisih-mundur (Backward Difference Approximation)

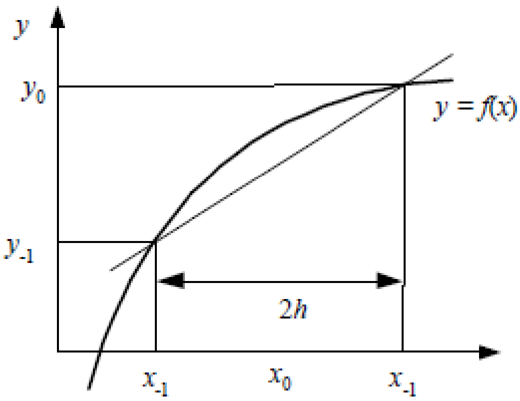
$$f'x_0 = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{f_0 - f_1}{h}$$



(b) Hampiran selisih-mundur

3. Hampiran selisih-pusat (Central Difference Approximation)

$$f'x_0 = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$



(c) Hampiran selisih-pusat

C. Penurunan Rumus dengan Deret Taylor

Misalkan diberi titik-titik (x_i, f_i), $\quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

$x_i = x_0 + ih$ dan $f_i = f(x_i)$

a. Hampiran selisih – maju

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \cdots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \cdots$$

$$hf_i' = f_{i+1} - f_i - \frac{h^2}{2} f_i'' + \cdots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} f_i''$$

$$f_i{}' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

Yang dalam hal ini, $O(h) = \frac{h}{2} f_i{}''(t), x_i < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di $x_0 dan\ x_1$ persamaan rumusnya menjadi

$$f_0{}' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

b. Hampiran selisih mundur

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \cdots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i{}' + \frac{h^2}{2} f_i{}'' + \cdots$$

$$hf_i{}' = f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{2} f_i{}'' + \cdots$$

$$f_i{}' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{h}{2} f_i{}'' + \cdots$$

$$f_i{}' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

Yang dalam hal ini, $O(h) = -\frac{h}{2} f_i{}''(t), x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di $x_0 dan\ x_1$ persamaan rumusnya menjadi

$$f_0{}' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$

c. Hampiran selisih pusat

Kurangkan persamaan hampiran selisih maju dengan mundur

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i{}' + \frac{h^3}{3} f_i{}''' + \cdots$$

$$2hf_i{}' = f_{i+1} - f_{i-1} - \frac{h^3}{3} f_i{}'''$$

$$f_i{}' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f_i{}'''' + \cdots$$

$$f_i{}' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Yang dalam hal ini, $O(h^2) = -\frac{h^2}{6} f_i''''(t), x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di $x_{-1}\ dan\ x_1$ persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0' = \frac{f_{i+1-}f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

- Rumus untuk Turunan Kedua, $f''(x)$ dengan bantuan Deret Taylor
  a) Hampiran selisih-pusat

  Jumlahkan persamaan hampiran selisih maju dengan mundur

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(4)} + \cdots$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(4)} + \cdots$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f_i^{(4)}$$

$$jadi, f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$yang\ dalam\ h$al ini, $O(h^2) = -\frac{h^2}{12} f_i^{(4)}(t), x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di $x_{-1},\ x_0 dan\ x_1$ persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_i}{h^2} + O(h^2)$$

  b) Hampiran selisih-mundur

  Dengan cara yang sama seperti hampiran selisih-pusat di atas, diperoleh:

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

$yang\ dalam\ h$al ini, $O(h) = hf''(t), x_{i-2} < t < x_i$

Untuk nilai-nilai f di $x_{-2},\ x_{-1} dan\ x_0$ persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0'' = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h)$$

  c) Hampiran selisih-maju

  Dengan cara yang sama seperti hampiran selisih-pusat di atas, diperoleh:

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

$yang\ dalam$ hal ini, $O(h) = -hf''(t), x_i < t < x_{i+2}$

Untuk nilai-nilai f di x_0, $x_1 dan\ x_2$ persamaan rumusnya menjadi :

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

D. Penurunan Rumus Turunan Numerik dengan Polinom Interpolasi

Misalkan diberikan titk-titik data berjarak sama,

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0,1,2, \dots, n,$$

$$dan$$

$$x = x_0 + sh, s \in R$$

Adalah titik yang akan dicari nilai interpolasinya. Polinom Newton-Gregory yang menginterpolasi seluruh titik data tersebut adalah:

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + \frac{s\Delta f_0}{1!} + s(s-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + s(s-1)(s-2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!}$$
$$+ s(s-1)(s-2) \dots (s-n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}$$

$$= F(s)$$

Yang dalam hal ini, $s = \frac{(x-x_0)}{h}$

Turunan pertama dari $f(x)$ adalah :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dF}{ds}\frac{ds}{dx}$$

$$= \left(0 + \Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{s^2}{2} - s + \frac{1}{3}\right)\Delta 3 f_0 + \cdots\right)\frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0 + galat\right)$$

Berdasarkan persamaan diatas, diperoleh rumus turunan numerik dengan ketiga pendekatan (maju, mundur, pusat) sebagai berikut :

(a) Hampiran selisih-maju

- Bila digunakan titik-titik $x_0 dan\ x_1$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta f_0) = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

- Bila digunakan titik-titik $x_0, x_1, dan\ x_2$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0\right)$$

Untuk titik $x_0 \rightarrow s = \frac{(x_0 - x_0)}{h} = 0$, sehingga

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}(\Delta f_1 - \Delta f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta f_1\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}f_1 - \frac{3}{2}f_0 - \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_1\right)$$

$$f'(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

(b) Hampiran selisih-mundur

Polinom interpolasi: Newton-Gregory mundur bila digunakan titik-titik $x_0 dan\ x_{-1}$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(\nabla f_0) = \frac{f_0 - f_{-1}}{h}$$

(c) Hampiran selisih-pusat

digunakan titik-titik $x_0, x_1, dan\ x_2$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0\right)$$

Untuk titik $x_1 \rightarrow s = \frac{(x_1 - x_0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, sehingga

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}(\Delta f_1 - \Delta f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_1\right)$$

$$= \frac{1}{2h}(f_1 - f_0 + f_2 - f_1)$$

$$f'(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

Untuk titik $x_{-1}, x_0, dan\ x_1$:

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Rumus untuk Turunan Kedua, $f''(x)$ dengan Polinom Interpolasi

Turunan kedua f adalah

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}(0 + \Delta^2 f_0 + (s-1)\Delta^3 f_0).\frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0 + (s-1)\Delta^3 f_0)$$

Misalkan untuk hampiran selisih-pusat, titik-titik yang digunakan $x_0, x_1, dan\ x_2$:

- Untuk titik $x_1 \rightarrow s = \frac{(x_1 - x_0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, sehingga

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0 + (1-1)\Delta^3 f_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta f_1 - \Delta f_0)$$

$$= \frac{1}{h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

Untuk titik $x_{-1}, x_0, dan\ x_1$:

$$f''(x_0) = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}$$

UNTUK TUGAS

1. **SILAKAN KALIAN BUAT RINGKASAN DARI MATERI PERTEMUAN 10 INI.**
2. **SILAKAN CARI CONTOH SOAL PERHITUNGAN SECARA NUMERUK ATAU PROGRAM KOMPUTER.**