

PENYELESAIAN MATRIKS PERSAMAAN LINEAR 2 DAN 3 VARIABEL

Matriks dapat digunakan untuk mempermudah dalam menentukan penyelesaian sistem persamaan linear. Pada pembahasan kali ini, kita akan menggunakannya untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel.

1. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel adalah

$$ax + by = p \dots\dots\dots (1)$$

$$cx + dy = q \dots\dots\dots (2)$$

Persamaan (1) dan (2) di atas dapat kita susun ke dalam bentuk matriks seperti di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Tujuan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel adalah menentukan nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaan itu. Oleh karena itu, berdasarkan penyelesaian matriks bentuk $AX = B$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

asalkan $ad - bc \neq 0$.

Contoh 1 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan cara matriks.

$$2x + y = 7$$

$$x + 3y = 7$$

Jawab:

Dari persamaan di atas dapat kita susun menjadi bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan rumus penjelasan persamaan matriks di atas, diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{(2 \times 3) - (1 \times 1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh penyelesaian $x = 1$ dan $y = 2$.

2. Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Kalian tentu tahu bahwa untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dapat dilakukan dengan beberapa cara, misalnya eliminasi, substitusi, gabungan antara eliminasi dan substitusi, operasi baris elementer, serta menggunakan invers matriks. Kalian dapat menggunakan cara-cara tersebut dengan bebas yang menurut kalian paling efisien dan paling mudah.

Misalkan diberikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Sistem persamaan linear di atas dapat kita susun ke dalam bentuk matriks seperti berikut.

$$\text{Misalkan } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Bentuk di atas dapat kita tuliskan sebagai $AX = B$.

Penyelesaian sistem persamaan $AX = B$ adalah $X = A^{-1} B$. Dalam hal ini,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

Oleh karena itu, diperoleh :

$$X = \left(\frac{1}{\det A} \text{adj}(A) \right) B = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A) B$$

asalkan $\det A \neq 0$.

Contoh 2 :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

$$2x + y - z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - 2y + z = 0$$

Jawaban :

Cara 1:

Operasi elemen baris, selain dapat digunakan untuk mencari invers matriks, dapat pula digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

Dengan menggunakan operasi baris elementer.

$$\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_2} \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} B_2 - 2B_1 \\ B_3 - B_1 \end{array}} \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 0 - y - 3z = -11 \\ 0 - 3y + 0 = -6 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -B_2 \\ -\frac{1}{3}B_3 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y + 3z = 11 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

Dengan demikian, diperoleh $y = 2$. Kita substitusikan nilai $y = 2$ ke persamaan (2) sehingga :

$$y + 3z = 11 \leftrightarrow 2 + 3z = 11$$

$$\leftrightarrow 3z = 11 - 2$$

$$\leftrightarrow 3z = 9$$

$$\leftrightarrow z = 3$$

Substitusikan $y = 2$ dan $z = 3$ ke persamaan (1) sehingga diperoleh :

$$x + y + z = 6 \leftrightarrow x + 2 + 3 = 6$$

$$\leftrightarrow x + 5 = 6$$

$$\leftrightarrow x = 6 - 5$$

$$\leftrightarrow x = 1$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$.

Dengan demikian, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1, 2, 3)\}$.

Cara 2:

Sistem persamaan linear di atas dapat kita susun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dengan menggunakan minor-kofaktor, diperoleh :

$$\det A = 2(3) - 1(0) + (-1)(-3) = 9$$

Dengan menggunakan minor-kofaktor, diperoleh :

$$\begin{aligned} K_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \\ K_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 1) = 0 \\ K_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \\ K_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1 \\ K_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3 \\ K_{23} &= (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 1) = 5 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, kalian akan memperoleh $K_{31} = 2$, $K_{32} = -3$, dan $K_{33} = 1$ (coba tunjukkan).

Dengan demikian, diperoleh :

$$\text{kof}(A) = \text{kof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu, $\text{adj}(A) = (\text{kof}(A))^T$.

$$\text{Adj}(A) = \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi, } X = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A) B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, diperoleh $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$. Dengan demikian, himpunan penyelesaian sistem persamaan di atas adalah $\{(1, 2, 3)\}$.

**SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN HARUS DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS
WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN**

1. Carilah penyelesaian persamaan linear berikut.

$$\begin{aligned}2x + y &= -5 \\ -3x - 2y &= 12\end{aligned}$$

2. Selesaikan sistem persamaan berikut:
- $$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

3. Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}5x_1 + 2x_2 + 10x_4 &= 16 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 9x_3 - 19x_4 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 &= 5\end{aligned}$$