BAB VII
DISTRIBUSI PROBABILITAS

Distribusi Binomial (Bernaulli)

Distribusi binomial sering juga disebut distribusi Bernoulli, karena penemu distribusi ini adalah James Bernoulli. Distribusi binomial ini merupakan ukuran penyebaran data dalam n kali percobaan dan hasilnya sesuai dengan percobaan Bernoulli diulang sebanyak n kali, dimana pada setiap pengulangan hanya akan ada 2 kemungkinan yaitu sukses atau gagal. Misalkan p adalah peluang sukses maka 1-p adalah peluang gagal. Pada distribusi binomial ini terdapat variabel acak binomial X yang merupakan sebuah variabel acak diskrit yang bernilai bulat dan terkait dengan pengulangan-pengulangan suatu percobaan. Prinsip dalam distribusi binomial adalah bahwa :

- Setiap percobaan pada distribusi binomial hanya menghasilkan 2 kejadian yang berkomplemen seperti gagal/sukses, ya/tidak, berhasil/tidak berhasil.
- Setiap pengulangan bebas terhadap pengulangan berikutnya.

Misalkan kita melakukan percobaan dengan melakukan uji coba suatu program aplikasi pengenalan wajah, dan kita ingin mengamati kemunculan kejadian cocok dan tidak cocok. Apabila wajah yang di inputkan sesuai dengan wajah yang dikenali aplikasi maka aplikasi kita berhasil (cocok), sebaliknya apabila wajah yang diinputkan tidak sesuai dengan wajah yang dikenali aplikasi maka aplikasi kita gagal (tidak cocok). Pada prakteknya, distribusi binomial ini sering digunakan untuk memodelkan jumlah keberhasilan N buah populasi dalam n buah sampel. Misalkan, pada contoh aplikasi pengenalan wajah diatas, kita melakukan N = 50 kali percobaan dan diperoleh fakta bahwa

- Jumlah kemunculan cocok (kejadian A) adalah 40 kali
- Jumlah kemunculan tidak cocok (Kejadian A^c) adalah 10 kali,

artinya

- $P(A) = \frac{40}{50} * 100 = 80\%$
- $P(A^c) = \frac{10}{50} * 100 = 20\%$

Pada distribusi binomial kita akan mencari peluang keberhasilan untuk n buah sampel yang kita ambil, misalnya berapa peluang muncul kejadian cocok apabila kita akan lakukan 5 kali percobaan lagi berdasarkan data 50 percobaan yang telah kita lakukan ? untuk menjawab pertanyaan ini kita perhatian uraian di bawah ini.

Misalkan X merupakan sebuah variabel acak yang merepresentasikan jumlah kemunculan kejadian A di dalam n kali percobaan, maka X pastilah sebuah bilangan bulat (diskrit), dimana X = 1, 2, … n. Pada titik sampel yang terdiri dari k buah kejadian A dengan peluang kemunculan A adalah p dan (n-k) kejadian A^c dengan peluang kejadian A^c adalah 1-p, akan memiliki peluang kemunculan adalah sebesar $p^k (1-p)^{n-k}$.

Bila bilangan n kecil dan p besar, maka perhitungan probabilitas nilai variabel acak x tidak mengalami masalah, karena nilai probabilitas p dapat dihitung langsung atau diperoleh dengan memakai tabel untuk bilangan n, nilai p dan nilai x tertentu. Namun jika n besar dan p sangat kecil maka probabilitas nilai x sulit dihitung baik secara langsung maupun dengan memakai tabel distribusi binomial karena tabel hanya menyediakan nilai probabilitas untuk maksimum n = 30 dan nilai minimum p = 0.01.

1) Distribusi Binomial Tunggal

Besarnya nilai probabilitas setiap x peristiwa sukses dari n kali eksprimen ditunjukkan oleh probabilitas sukses (p) dan probabilitas gagal (1-p). peluang distribusi binomial dengan parameter (n,p) dapat ditentukan menggunakan persamaan:

$$f(x) = P(X = k) = b(x, n, p) = \binom{n}{k} p^x (1-p)^{n-x}$$

Keterangan :

$0 \leq p \leq 1$ (nilai p antara 0 sampai 1)

P(X = x) = Peluang kejadian x terjadi

p = Peluang sukses

n = Jumlah pengulangan

x = Jumlah sukses dalam n kali pengulangan

$\binom{n}{k}$ = Koefisien Binomial

Koefisien binomial merupakan kombinasi yang diperoleh dengan persamaan :

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Contoh 3.1.

(Soal ini diambil dari R. Manurung, dkk, 2013, namun angkanya diubah)

Sebuah perusahaan komputer menghasilkan chip-chip computer. Chip-chip ini selalu diuji kualitasnya. Pengalaman menunjukkan bahwa 4% dari chip-chip yang diuji rusak *(defect)*. Setiap harinya perusahaan komputer itu menghasikan 20 buah chip computer. Berapakah probabilitas bahwa pada hari tertentu terdapat 5 chip yang rusak ?

Penyelesaian :

Diketahui :

n = 20,

x = 5,

p = 4% = 0.04

(1-p) = 1-0.04 = 0.96

$$f(5) = P(X = 5) = b(5{,}20{,}0.04) = \frac{20!}{5!\,(20-5)!}(0.04)^5(0.96)^{15}$$

$$f(5) = P(X = 5) = b(5{,}20{,}0.04) = 24.117{,}33 * 0.000000102 * 0.542$$

$$f(5) = P(X = 5) = b(5{,}20{,}0.04) = 0.00134$$

Artinya peluang 5 chip computer yang rusak diantara 20 chip computer yang di produksi adalah 0.134%.

Contoh 3.2.

Perusahaan X memproduksi semacam alat, ternyata terdapat 5 % produk yang rusak. Jika secara acak diambil 10 buah dari alat tersebut untuk diselidiki, berapa probabilitas akan terdapat :

a) Dua rusak
b) Tidak ada yang rusak

Penyelesaian :

Diketahui :

N = 10

p = 0.05

(1-p) = 0.95

a) x = 2

$$\mathrm{f}(2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \mathrm{b}(2{,}10{,}0.05) = \frac{10!}{2!\,(10-2)!}(0.05)^2(0.95)^8$$

$$\mathrm{f}(2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \mathrm{b}(2{,}10{,}0.05) = 45 * 0.0025 * 6.6\mathrm{E} - 01$$

$$\mathrm{f}(2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \mathrm{b}(2{,}10{,}0.05) = 0.075$$

b) x = 0

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathrm{b}(0{,}10{,}0.05) = \frac{10!}{0!\,(10-0)!}(0.05)^0(0.95)^{10}$$

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathrm{b}(0{,}10{,}0.05) = 1 * 1 * 0.599$$

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathrm{b}(0{,}10{,}0.05) = 0.599$$

Contoh 3.3.

Dilakukan penelitian tentang tingkat kepuasan pengguna sistem informasi akademik suatu universitas dengan respondennya adalah mahasiswa. Pengumpulan data dilakukan dengan menyebarkan kuisioner dalam skala linkert (skala untuk mengukur persepsi, sikap atau pendapat seseorang atau kelompok mengenai sebuah peristiwa atau fenomena sosial berdasarkan definisi operasional yang telah ditetapkan oleh peneliti). Bentuk pertanyaan adalah positif dengan skor

5 = sangat puas

4 = puas

3 = cukup puas

2 = tidak puas

1 = sangat tidak puas

Setelah pengolahan data diperoleh bahwa :

30% mahasiswa menyatakan sangat puas

45% mahasiswa menyatakan puas

15% mahasiswa menyatakan cukup puas

5% mahasiswa menyatakan tidak puas

5% mahasiswa menyatakan sangat tidak puas

Bila kita bertemu dengan 4 orang mahasiswa dan menanyakan tingkat kepuasan mereka, berapa peluang :

a) 2 mahasiswa akan menyatakan sangat puas

b) Tidak ada mahasiswa yang menyatakan puas

c) 3 mahasiswa akan menyatakan cukup puas

Penyelesaian :

a) X = 2

Diketahui :

x = 2

n = 4

p = 30% = 0.3

1-p = 0.7

$$\mathrm{f}(2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \mathrm{b}(2{,}4, 0.3) = \frac{4!}{2!\,(4-2)!}(0.3)^2(0.7)^2$$

$$\mathrm{f}(2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \mathrm{b}(2{,}4, 0.3) = 6 * 0.09 * 0.49$$

$$\mathrm{f}(2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \mathrm{b}(2{,}4, 0.3) = 0.265$$

artinya peluang 2 mahasiswa diantara 4 mahasiswa yang diwawancarai akan menjawab sangat puas adalah 26.5%.

b) X = 0

Diketahui :

x = 0

n = 4

p = 45% = 0.45

1-p = 0.55

$$f(0) = P(X = 0) = b(0,4, 0.45) = \frac{4!}{0!\,(4-0)!}(0.45)^0(0.55)^4$$

$$f(0) = P(X = 0) = b(0,4, 0.45) = 1 * 1 * 0.092$$

$$f(0) = P(X = 0) = b(0,4, 0.45) = 0.092$$

artinya peluang tidak ada mahasiswa diantara 4 mahasiswa yang diwawancarai akan menjawab puas adalah 9.2%.

c) X = 3

Diketahui :

x = 3

n = 4

p = 15% = 0.15

1-p = 0.85

$$f(3) = P(X = 3) = b(3,4, 0.15) = \frac{4!}{3!\,(4-3)!}(0.15)^3(0.85)^1$$

$$f(3) = P(X = 3) = b(3,4, 0.15) = 4 * 0.0034 * 0.85$$

$$f(3) = P(X = 3) = b(3,4, 0.15) = 0.0115$$

artinya peluang 3 mahasiswa diantara 4 mahasiswa yang diwawancarai akan menjawab cukup puas adalah 1.15%.