



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Eliška Korcová

Chaos v otevřených mnohočásticových systémech

Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. Mgr. Pavel Stránský, Ph.D.

Studijní program: Teoretická fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2026

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Chaos v otevřených mnohočásticových systémech

Autor: Eliška Korcová

Ústav: Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. Mgr. Pavel Stránský, Ph.D., Ústav částicové a jaderné fyziky

Abstrakt:

Klíčová slova: klasický chaos, kvantový chaos, otevřené systémy, Lindbladova rovnice, mnohočásticová kolektivní dynamika, Grobe-Haake-Sommersova hypotéza

Title: Chaos in open many-body quantum systems

Author: Eliška Korcová

Institute: Institute of Particle and Nuclear Physics

Supervisor: doc. Mgr. Pavel Stránský, Ph.D., Institute of Particle and Nuclear Physics

Abstract:

Keywords: classical chaos, quantum chaos, open systems, Lindblad equation, many-body collective dynamics, Grobe-Haake-Sommers conjecture

Obsah

Úvod	2
1 Otevřené systémy	3
1.1 Lindbladova rovnice	3
2 Chaos	4
2.1 Chaos v uzavřených systémech	4
2.1.1 Základní statistiky	4
2.1.2 Teorie náhodných matic	5
2.2 Chaos v otevřených systémech	5
2.2.1 Complex spacing ratios	6
3 Boseho-Hubbardův model	7
Závěr	8
Seznam použité literatury	9
Seznam obrázků	10
A Přílohy	11

Úvod

1. Otevřené systémy

V kvantové mechanice často pracujeme s uzavřenými systémy, tedy takovými, které nijak neinteragují se svým okolím. Takový předpoklad je ovšem pouze idealizací skutečného systému, který nelze perfektně odizolovat a nutně k nějaké výměně energie nebo částic dochází. Pro popis v takovém případě uvažujeme, že systém, který nás zajímá, je pouze subsystémem v jiném celkovém uzavřeném systému. TODO obrázek

1.1 Lindbladova rovnice

Zatímco dynamiku uzavřených systémů popisuje Schrödingerova rovnice, pro otevřené systémy je nutné uvažovat Lindbladovu rovnici, která ji zobecňuje. Kromě shrödingerovského členu obsahuje navíc členy, které popisují disipaci - výměnu mezi subsystémem a jeho okolím.

Lindbladova rovnice nabývá tvaru

$$\mathcal{L}\rho \equiv \dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_i \left(L_i \rho(t) L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_i^\dagger L_i, \rho(t) \} \right). \quad (1.1)$$

Lindbladovský superoperátor \mathcal{L} působí nikoliv na stav, ale na matici hustoty. První člen na pravé straně odpovídá regulárnímu vývoji, zatímco druhý člen obsahuje skokové operátory L_i . Ty obecně popisují disipaci a mohou nabývat různého tvaru, nejjednodušším příkladem je přímo anihilační operátor $L_i = a_i$.

Vidíme, že \mathcal{L} není hermitovský. Jeho vlastní čísla jsou tak obecně komplexní. TODO nástřel odvození?

[1]

2. Chaos

V klasické hamiltonovské mechanice rozlišujeme dva typy pohybu: regulární, který odpovídá integrovatelným systémům, a chaotický, kterým se vyznačují systémy neintegrovatelné. Chaotické systémy rozpoznáme na základě vysoké citlivosti na počáteční podmínky: uvážíme-li soubor trajektorií, jejichž počáteční podmínky tvoří ve fázovém prostoru libovolně malou oblast, i přesto se budou od sebe v čase trajektorie exponenciálně vzdalovat. Rychlost vzdalování trajektorií formálně popisují tzv. Lyapunovy exponenty. Toto chování silně souvisí s nelinearitou pohybových rovnic, systém je však stále deterministický.

V kvantové fyzice se kvůli neurčitosti ztrácí význam klasických trajektorií ve fázovém prostoru. Vývoj systému řídí Schrödingerova rovnice, která je inherentně lineární a také unitární, kvůli čemuž není možné, aby se v čase exponenciálně zvětšovala odchylka jistého uvažovaného stavu, a nelze definovat koeficient analogický lyapunovskému exponentu. Místo toho se v kvantovém případě zkoumají jiné charakteristiky systému, zejména různé spektrální statistiky.

2.1 Chaos v uzavřených systémech

Jak už bylo řečeno, základem pro analýzu chaotičnosti kvantového systému je znalost jeho spektra. Hustota hladin závisí na energii - nižší hladiny jsou od sebe vzdálenější než ty vysoké. Hustota lze rozložit na hladkou část $\bar{\rho}(E)$, která popisuje spektrum globálně, a oscilující část $\tilde{\rho}(E)$, která popisuje lokální fluktuace:

$$\rho(E) = \bar{\rho}(E) + \tilde{\rho}(E). \quad (2.1)$$

Právě oscilující část je pro rozpoznávání chaosu klíčová a je nutné ji odizolovat pomocí procesu nazývaného "unfolding". Ten spočívá v přeskálování spektra tak, aby jeho hladká část byla popsána uniformním rozdělením. Díky tomu lze srovnávat fluktuace z celého spektra.

Poisson vs. Wigner
level spacings
unfolding

2.1.1 Základní statistiky

Přeskálujeme-li hladkou část hustoty hladin na uniformní rozdělení, vzdálenosti hladin se budou v případě regulárního systému řídit Poissonovým rozdělením. [2] To z podstaty poissonovského procesu implikuje, že jsou na sobě hladiny nezávislé.

Podle [3] je hlavním kritériem chaotičnosti repulze kvantových hladin. Zatímco vzdálenosti mezi hladinami regulárního systému popíše Poissonovo rozdělení, v případě chaotického systému se rozdělení vyznačuje silným potlačením malých vzdáleností mezi hladin, což interpretujeme jako jejich odpuzování. Hladiny jsou tedy zjevně jistým způsobem na rozdíl od regulárních systémů korelované.

TODO grafísek

2.1.2 Teorie náhodných matic

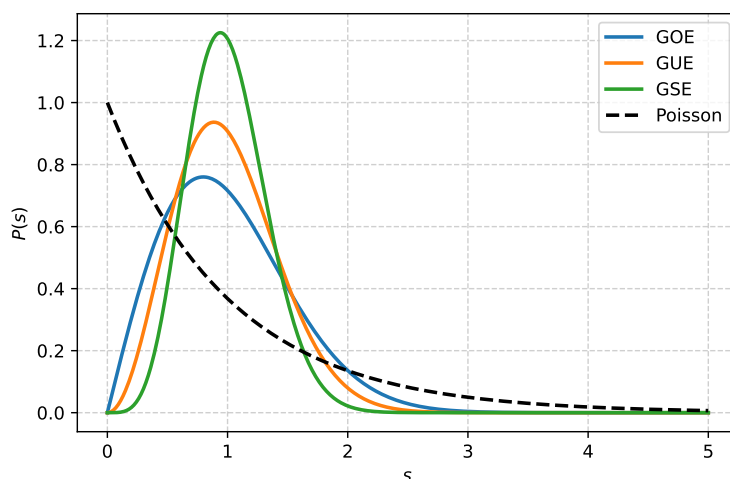
Náhodné matice jsou stěžejním objektem při studiu kvantového chaosu. Kvantové chaotické systémy se vyznačují stejnými spektrálními fluktuacemi, jako předpokládá teorie náhodných matic. [3] Tato domněnka sice nebyla dokázána ve všeobecnosti a naopak byly nalezeny speciální protipříklady, které se jí vymykají, ovšem naprostá většina studovaných systémů její platnost podporuje.

Je tak v našem zájmu zabývat se spektrálními vlastnostmi náhodných matic, abychom byli schopni lépe popisovat a identifikovat systémy vykazující kvantový chaos.

Existují tři hlavní třídy náhodných hermitovských matic: GOE ("Gaussian orthogonal ensemble"), GUE ("Gaussian unitary ensemble") a GSE ("Gaussian symplectic ensemble"). Konkrétní formule pro rozdělení hladin se odlišují v závislosti na zvolené třídě, ale všechny v nějaké míře vykazují chování

$$p(s) \approx s^\beta \quad \text{pro } s \ll 1 \quad \text{a} \quad p(s) \approx e^{-s^2} \quad \text{pro } s \gg 1, \quad (2.2)$$

tedy odpuzování blízkých hladin. Jak se míra odpuzování liší, lze vidět na obrázku 2.1, kde je pro srovnání taktéž znázorněno poissonovské rozdělení.



Obrázek 2.1: Rozdělení hladin

2.2 Chaos v otevřených systémech

Generalizujeme-li teorii pro hermitovské hamiltoniány na ty nehermitovské, očekáváme, že se klasicky integrovatelné systémy budou řídit Poissonovým rozdělením a klasicky chaotické systémy rozdělením odpovídajícím náhodných komplexních matic Ginibre. TODO cite a napsat jako člověk Obdobně jako v případě hermitovských náhodných matic rozlišujeme tři třídy: GinOE ("Ginibre orthogonal ensemble"), GinUE ("Ginibre unitary ensemble") a GinSE ("Ginibre symplectic ensemble"). Všechny tři se projevují kubickou repulzí $P(s) \propto s^3$ pro $s \ll 1$.

Zatímco uzavřené systémy jsou popsány hermitovským Hamiltoniánem, jehož vlastní čísla jsou reálná, Lindbladův pro disipativní systémy má kvůli nehermitičnosti vlastní čísla komplexní. Není tak možné vlastní hodnoty přímočaře

seřadit a určovat jejich hustotu a rozdělení. Existují ovšem zobecněné spektrální charakteristiky, které lze aplikovat i na komplexní spektrum.

level spacings - uvažujeme vzdálenosti v komplexní rovině - unfolding ve 2D je dost komplikovaný

Ginibre nemá dobrou konvergenci k $N \rightarrow \infty$, pro nízká N se chová hodně jinak

2.2.1 Complex spacing ratios

Jedna z možných alternativ analýzy spektra je představena v [4]. Pro spektrum $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ zavádí komplexní faktor z_k

$$z_k = \frac{\lambda_k^{NNN} - \lambda_k}{\lambda_k^{NN} - \lambda_k}, \quad (2.3)$$

kde λ_k^{NN} a λ_k^{NNN} je nejbližší, resp. druhý nejbližší soused vybraného vlastního čísla λ_k .

Výhodou této metody je, že nevyžaduje eliminaci hladké části hustoty vlastních čísel pomocí unfoldingu, který je v komplexní rovině velmi nejednoznačný.

Pro spektrum platí $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r \leq 1$. Koeficienty z_k se tedy nacházejí v kruhu o poloměru 1, jejich rozdělení ovšem není nutně uniformní.

3. Boseho-Hubbardův model

Boseho-Hubbardův model popisuje systém několika dutin, které mezi sebou vzájemně interagují. Speciálně uvažujme, že tyto dutiny jsou propojené do kruhu a každá interaguje pouze s dutinami, které s ní sousedí. Příslušný hamiltonián pro L dutin ("siteů") má tvar

$$\hat{H} = \frac{U}{2} \sum_{j=0}^{L-1} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_j - \frac{J}{2} \sum_{j=0}^{L-1} (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j) . \quad (3.1)$$

První člen popisuje interakci na jednom siteu a sílu této interakce určuje parametr $U > 0$. Druhý člen popisuje vzájemnou interakci mezi dvěma sousedními sitey a její síla je určena parametrem J . [5]

TODO tady bude obrázek

Závěr

Seznam použité literatury

- [1] MANZANO, D. A short introduction to the lindblad master equation. *AIP Advances*, 10(2), February 2020. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.5115323>.
- [2] BERRY, M. V. a TABOR, M. Level clustering in the regular spectrum. *Physical Review Letters*, 356, January 1977. URL <https://doi.org/10.1098/rspa.1977.0140>.
- [3] BOHIGAS, O., GIANNONI, M. J. a SCHMIT, C. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical Review Letters*, 52(1):1–4, January 1984. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.1>.
- [4] SÁ, L., RIBEIRO, P. a PROSEN, T. Complex spacing ratios: A signature of dissipative quantum chaos. *Physical Review X*, 10(2), April 2020. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.10.021019>.
- [5] DAHAN, D., ARWAS, G. a GROSFELD, E. Classical and quantum chaos in chirally-driven, dissipative bose-hubbard systems. *npj Quantum Information*, 8(1), February 2022. URL <http://dx.doi.org/10.1038/s41534-022-00518-2>.

Seznam obrázků

2.1	Rozdělení hladin	5
-----	----------------------------	---

A. Přílohy