Inhaltsverzeichnis

Operatoren

Niedersächsisches Kultusministerium

Operatoren für das Fach Mathematik (*KC Mathematik Gymnasiale Oberstufe*)

Operatoren, die für das Fach Mathematik besondere Bedeutung haben, werden in der untenstehenden Tabelle beschrieben und ggf. kommentiert.

Dabei ist zu beachten:

- Zusammensetzungen aus mehreren Operatoren (Beschreiben Sie ... und begründen Sie ...; Vergleichen und bewerten Sie ...) sind möglich.
- Eine Vorgabe zur Verwendung eines bestimmten Hilfsmittels erfolgt in der Regel nicht.
- Durch Zusätze sind Einschränkungen oder weitere Vorgaben möglich (Bestimmen Sie rechnerisch; Bestimmen Sie grafisch, ...). Speziell kann je nach eingeführter Technologie im Einzelfall die Darstellung eines Lösungsweges oder einer Lösung gefordert werden, welche auch ohne deren Einsatz nachvollziehbar ist (z. B. für GTR: Berechnen Sie algebraisch; für CAS: Dokumentieren Sie hierzu einen Rechenweg, der ohne den Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist).
- Die Verwendung weiterer Operatoren ist möglich, wenn sich der notwendige Bearbeitungsumfang deutlich aus dem Kontext oder einer ausführlicheren Beschreibung ergibt.

Operator	Beschreibung der erwarteten Leistung	Beispiele	Anmerkungen
Begründen	Je nach Kontext – einen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen – die Angemessenheit einer Verfahrensweise bzw. die Eignung der Werkzeuge darlegen Hierzu gehört eine inhaltliche Betrachtung.	Begründen Sie, dass der Funktionsgraph nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie, dass hier das Modell der BERNOULLI-Kette zugrunde gelegt werden kann. Begründen Sie Ihren Ansatz.	Auch bei der Verwendung mathematischer Syntax ist eine geschlossene Antwort erforderlich, die auch Textanteile enthält. Die Angabe einer Formel o. ä. genügt hier nicht. Aufgrund der verschiedenen Ausprägungen des Operators „Begründen" ergeben sich Überschneidungen mit „Beweisen" und „Zeigen", wobei dort formale bzw. rechnerische Aspekte eine höhere Bedeutung haben.
Berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend gewinnen	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. Berechnen Sie den Flächeninhalt ... Berechnen Sie die größtmögliche Höhe ...	Alle Werkzeugebenen sind zulässig, Einschränkungen s. o.
Beschreiben	Verfahren, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und fachsprachlich richtig mit eigenen Worten wiedergeben	Beschreiben Sie einen Lösungsweg. Beschreiben Sie die Struktur des Funktionsterms.	Vgl. Erläutern

1

Bestimmen / Ermitteln s. Berechnen	Einen möglichen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren	Ermitteln Sie den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.	Alle Werkzeugebenen sind zulässig, Einschränkungen s. o.
Beurteilen	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen	Beurteilen Sie die Güte der Trassierung. Beurteilen Sie die Verfahren bezüglich ihrer Gültigkeit.	Vgl. Entscheiden
Beweisen / Widerlegen	Einen Nachweis im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen durchführen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	Beweisen oder widerlegen Sie die gegebene These.	
Entscheiden	Bei verschiedenen Möglichkeiten sich begründet und eindeutig festlegen	Entscheiden Sie, welche der Alternativen die kostengünstigere ist. Entscheiden Sie, welcher Weg der kürzere ist. Entscheiden Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.	Vgl. Beurteilen Bei diesem Operator steht die eindeutige, begründete Festlegung aufgrund eines Vergleiches im Vordergrund.
Erläutern s. Beschreiben +	Verfahren, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und fachsprachlich richtig mit eigenen Worten wiedergeben und durch zusätzliche Informationen oder Darstellungsformen verständlich machen	Erläutern Sie den Bereich sinnvoller Ergebnisse. Erläutern Sie mögliche Lagebeziehungen dreier Ebenen. Erläutern Sie die dabei auftretenden Größen.	Vgl. Beschreiben Im Unterschied zur Beschreibung erfordert eine Erläuterung die Darstellung inhaltlicher Bezüge.
Erstellen	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, fachlich angemessener Form darstellen	Erstellen Sie eine Matrix, die ... beschreibt. (Wertetabelle, Verflechtungsdiagramm, ...)	
Herleiten	Aus bekannten Sachverhalten oder Aussagen heraus nach gültigen Schlussregeln mit Berechnungen oder logischen Begründungen die Entstehung eines neuen Sachverhaltes darlegen	Leiten Sie die Rekursionsformel ... her. Leiten Sie ein Verfahren zur ... her. Leiten Sie eine Gleichung einer Geraden her, die ...	In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit dem eingeführten Hilfsmittel durchgeführt werden. Einschränkungen s. o.

2

Interpretieren	Mathematische Objekte – als Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem, – umdeuten in eine andere mathematische Sicht-weise	… und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. Interpretieren Sie die Matrix. Interpretieren Sie den Graphen der Funktion als Graph einer Bestandsfunktion.	
Klassifizieren ohne Begründung der Klassen	Eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen	Klassifizieren Sie die Graphen der Schar …	Eine Begründung der vorgegebenen bzw. selbstgewählten Kriterien wird gesondert gefordert.
Nennen / Angeben	Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne Erläuterungen aufzählen	Nennen Sie drei Beispiele für … Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an.	
Skizzieren	Objekte oder Funktionen auf das Wesentliche reduziert grafisch übersichtlich darstellen	Skizzieren Sie die drei Objekte unter Berücksichtigung der gegenseitigen Lage. Skizzieren Sie typische Graphen zu …	Skizzieren wird immer im Kontext mit grafischen Darstellungen verwendet.
Untersuchen	Eigenschaften von oder Beziehungen zwischen Objekten herausfinden und darlegen	Untersuchen Sie, ob der Graph einen Hochpunkt besitzt. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E.	Je nach Sachverhalt kann ein Strukturieren, Ordnen oder Klassifizieren notwendig sein.
Vergleichen	Mindestens zwei Sachverhalte, Objekte oder Verfahren gegenüberstellen, ggf. Vergleichskriterien festlegen, Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede feststellen	Vergleichen Sie die errechneten Werte. Vergleichen Sie die … Verfahren.	Eine Bewertung wird gesondert gefordert.
Zeichnen / Grafisch darstellen	Eine grafische Darstellung anfertigen, die auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte hinreichend exakt ist bzw. Sachverhalte angemessen wiedergibt	Zeichnen Sie ein Schrägbild des Körpers. Stellen Sie die Daten grafisch dar. Zeichnen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm.	Bei Einsatz von CAS am PC sind auch Ausdrucke von elektronischen Zeichnungen zugelassen.
Zeigen / Nachweisen	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, mit Berechnungen oder logischen Begründungen bestätigen	Weisen Sie nach, dass sich die Geraden senkrecht schneiden. Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion gilt: …	In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit dem eingeführten Hilfsmittel (Einschränkungen s. o.) durchgeführt werden.

Hinweise zur Abiturprüfung

14. Mathematik

A. Fachbezogene Hinweise

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik sind die geltenden Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik (EPA) und das Kerncurriculum Mathematik. Beim Nachweis der fachlichen Kompetenzen kommt den Inhalten aus den Sachgebieten Analysis, Lineare Algebra / Analytische Geometrie und Stochastik besondere Bedeutung zu. Die in den Lernbereichen des Kerncurriculums angegebenen Beispiele für Sachkontexte werden als bearbeitet vorausgesetzt.
Funktionswerte der Standardnormalverteilung sowie binomiale Wahrscheinlichkeiten sind mithilfe der Funktionen des Rechners zu bestimmen.

B. Hinweise zu den Prüfungsaufgaben

Jede Prüfungsaufgabe besteht aus Aufgaben, die sich auf die drei Sachgebiete Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie/Lineare Algebra beziehen.

Für die Gymnasien, Gesamtschulen, Beruflichen Gymnasien, Abendgymnasien, die Kollegs, die Freien Waldorfschulen und für die Nichtschülerprüfung gilt:
Jede Prüfungsaufgabe besteht aus einem **Pflichtteil** und einem **Wahlteil**.

Die Aufgaben des Pflichtteils sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Formelsammlung zu bearbeiten. Für die Bearbeitung der Aufgaben des Wahlteils gelten die Erläuterungen in C. Sonstige Hinweise.

Für das **erhöhte Anforderungsniveau** beträgt die Bearbeitungszeit 300 Minuten, hinzu kommen 30 Minuten Auswahlzeit.
Im Einzelnen gelten folgende Zeiten:

- 60 Minuten Bearbeitungszeit für den Pflichtteil,
- 30 Minuten Auswahlzeit für den Wahlteil,
- 240 Minuten Bearbeitungszeit für den Wahlteil.

Für das **grundlegende Anforderungsniveau** beträgt die Bearbeitungszeit 220 Minuten, hinzu kommen 30 Minuten Auswahlzeit.
Im Einzelnen gelten folgende Zeiten:

- 45 Minuten Bearbeitungszeit für den Pflichtteil,
- 30 Minuten Auswahlzeit für den Wahlteil,
- 175 Minuten Bearbeitungszeit für den Wahlteil.

Nach Ablauf der Bearbeitungszeit des Pflichtteils geben die Prüflinge ihre Bearbeitung bei der Aufsicht führenden Lehrkraft ab. Sie erhalten dann die Aufgaben für den Wahlteil, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.
Der Anteil des Pflichtteils beträgt ca. 22 % der erreichbaren Bewertungseinheiten.

Für den Wahlteil werden den Prüflingen drei Blöcke von je zwei Aufgaben vorgelegt.

- Block 1 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis (Aufgabe 1A bzw. 1B),
- Block 2 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Stochastik (Aufgabe 2A bzw. 2B) und
- Block 3 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analytische Geometrie/ Lineare Algebra (Aufgabe 3A bzw. 3B).

Der Prüfling wählt aus jedem der drei Blöcke jeweils eine Aufgabe aus.
Die Gewichtung der drei Blöcke erfolgt etwa im Verhältnis 2 : 1 : 1.

Für die **Abendgymnasien, die Kollegs, die Waldorfschulen und für die Nichtschülerprüfung** besteht die Möglichkeit, sich durch eine geeignete Aufgabenauswahl hinsichtlich der Sachgebiete zu beschränken. Dies gilt nicht für das Sachgebiet Analysis.

20% Pflichtteil 22%
40% analysis 39%
20% stochastik 19,5%
20% lin. Algebra 19,5%
78% Wahlteil

Analysis

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung

Ausgehend von realitätsbezogenen Problemstellungen aus den Bereichen

- Zu- und Ablauf (Talsperre, Verkehrsströme),
- Geschwindigkeit – Weg, Fahrtenschreiber

wird eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt. Das Integral wird als aus Änderungen rekonstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und argumentativ erklärt. Dabei wird der Bezug zum Vorwissen aus der Differenzialrechnung im Sinne von Rückwärtsarbeiten hergestellt und für die Mathematisierung genutzt.

Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzrationaler Funktionen entwickelt und mithilfe der eingeführten Technologie auf weitere Funktionen ausgedehnt.

Im erhöhten Anforderungsniveau erfolgt neben einer formalen Betrachtung der Zusammenhänge und einer Präzisierung der Begriffe auch die Behandlung von Volumen von Rotationskörpern und Grenzwerten von Beständen und Flächeninhalten.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Integralbegriff – Rekonstruktion von Beständen – Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren – Stammfunktionen spezieller Funktionen – Summen- und Faktorregel – Unbestimmte Integrale – Rechengesetze für bestimmte Integrale – Inhalte begrenzter Flächen	
	– Geometrische Begründung des Hauptsatzes – Uneigentliche Integrale – Volumen von Rotationskörpern

Leitideen: Messen, Funktionaler Zusammenhang

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Bogenlänge, Mittelwertsatz, Schwerpunkt.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Arbeiten mit Daten, Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression
- Ermitteln bestimmter Integrale und Flächeninhalte
- Ermitteln von Stammfunktionen (CAS)

Analysis

Lernbereich: Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion

Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen

- Bevölkerungswachstum,
- stetige Verzinsung,
- radioaktiver Zerfall

werden die bereits bekannten Wachstumsmodelle – lineares, exponentielles und begrenztes Wachstum – durch das Modell des logistischen Wachstums ergänzt. Der Vergleich und die Interpretation verschiedener Modelle eines Wachstumsprozesses lassen sich besonders einfach mit der Exponentialfunktion zur Basis e durchführen. Die e-Funktion ermöglicht eine funktionale Beschreibung des logistischen Wachstums.

Durch Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen werden Möglichkeiten geschaffen, Wachstum auf vielfältige Art zu modellieren.

Im erhöhten Anforderungsniveau werden an geeigneten Beispielen aus dem Bereich Wachstum die Zusammenhänge zwischen den entsprechenden Funktionen und ihren Ableitungsfunktionen aufgezeigt und interpretiert, wie sie sich in den dazugehörigen Differenzialgleichungen widerspiegeln.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Begrenztes und logistisches Wachstum – e-Funktion – Verknüpfungen/Verkettung mit ganzrationalen Funktionen – Produkt-, Quotienten- und Kettenregel – Bedeutung des Wendepunktes und des Krümmungsverhaltens – Asymptotisches Verhalten – Definitionsbereich – Angleichung an Daten durch Parametervariation	
	– Differenzialgleichungen ohne Lösungsverfahren – Funktionenscharen

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Lösungsverfahren einfacher Differenzialgleichungen, Untersuchungen von Logarithmus-Funktionen.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Arbeiten mit Daten, Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression
- Bestimmen von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten
- Grafische Darstellung der Ableitungsfunktion
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Bestimmen von Grenzwerten und algebraische Untersuchung von Scharen (CAS)
- Bestimmen der Ableitungsfunktionen (CAS)

Erwartete Kompetenzen

6

Analysis

Lernbereich: Kurvenanpassung – Interpolation

Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen

- Trassierung,
- Biegelinien

werden ganzrationale Funktionen zu vorgegebenen Datenpunkten und/oder Eigenschaften bestimmt.

Bei Modellierungen mit abschnittsweise definierten Funktionen sind darüber hinaus an den Übergängen Eigenschaften wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Übereinstimmung der zweiten Ableitungen als Bedingungen zu nutzen und im Kontext zu interpretieren. Die Zugänge zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden auf intuitivem Weg gefunden. Durch Regression gewonnene Funktionen werden zum Vergleich herangezogen.

Je nach Anordnung der Lernbereiche kann bei der Beurteilung verschiedener Modellierungen auch ein Flächeninhaltsvergleich als Kriterium herangezogen werden.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Bestimmung von Funktionen aus gegebenen Eigenschaften – GAUSS-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Stetigkeit, Differenzierbarkeit – Abschnittsweise definierte Funktionen – Funktionenscharen	

Leitideen: Funktionaler Zusammenhang, Algorithmus

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Bogenlänge, Krümmungsmaß und Krümmungskreis.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression
- Bestimmen von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten
- Grafische Darstellung der Ableitungsfunktion
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Algebraische Untersuchung von Scharen (CAS)
- Bestimmen der Ableitungsfunktionen (CAS)

Analytische Geometrie

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung – Analytische Geometrie / Lineare Strukturen

Ausgehend von der zeichnerischen Darstellung von Körpern werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems für die Orientierung im Raum erkannt.

Durch die Einführung des Vektorbegriffs werden geometrische Zusammenhänge algebraisiert. Dabei besitzen die Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen eine grundlegende Bedeutung bei der Untersuchung von Lagebeziehungen und der Bestimmung von Schnittmengen.

Das Skalarprodukt und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Betrachtungen und Berechnungen.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Punkte im Raum – Darstellungen im kartesischen Koordinatensystem / Schrägbilder – Vektoren im Anschauungsraum – Rechengesetze für Vektoren, Kollinearität zweier Vektoren – Parametergleichungen von Gerade und Ebene – Lagebeziehungen und Schnittpunkte – Skalarprodukt – Längen von Strecken und Größen von Winkeln zwischen Vektoren	
	– Schnittmengen von Ebenen

Leitideen: Messen, Räumliches Strukturieren / Koordinatisierung

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Normalen- und Koordinatenform der Ebenengleichung, Kugel, Vektorprodukt.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Bestimmen der Lösungsmenge sowohl eindeutig als auch nicht eindeutig lösbarer LGS aus dem Bereich der analytischen Geometrie
- Bestimmen des Skalarproduktes je nach Möglichkeiten des Rechners

Lineare Algebra

Lernbereich: Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung

Ausgehend von Problemstellungen aus dem Bereich der Materialverflechtung werden mehrstufige Prozesse durch Darstellung in Matrizenform strukturiert. In diesem Zusammenhang werden die Rechengesetze für Matrizen einschließlich inverser Matrizen behandelt. Die Behandlung von Problemen zum Käufer- und Wahlverhalten eröffnet eine weitere Sichtweise auf Matrizen, indem sich wiederholende Prozesse hinsichtlich einer Langzeitprognose analysiert werden.

Auf erhöhtem Anforderungsniveau führen Anwendungen aus dem Bereich der Populationsentwicklung auch zur Betrachtung zyklischer Prozesse.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Matrizen und Prozessdiagramme zur strukturierten Darstellung von Daten – Rechengesetze für Matrizen, auch inverse Matrizen – Grenzmatrix und Fixvektor im Sachzusammenhang mit Käufer- und Wahlverhalten	
	– Populationsentwicklung – Zyklische Prozesse

Leitidee: Algorithmus

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: LEONTIEF-Modell, Transportprobleme.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Bestimmen der Lösungsmenge sowohl eindeutig als auch nicht eindeutig lösbarer LGS
- Operationen mit Matrizen

Stochastik

Lernbereich: Daten darstellen und auswerten – Beschreibende Statistik

Ausgehend von Daten zu Sachkontexten – wie z. B. Lebenserwartung von Männern und Frauen, Reaktionstest – werden zu deren Vergleich als Kenngrößen das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung s_n erarbeitet. Dabei sind die Darstellung der Daten in einem Histogramm und der Einsatz der eingeführten Technologie wichtige Hilfsmittel.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Histogramm – Standardabweichung	

Leitideen: Daten und Zufall, Messen

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Planung und Durchführung von Datenerhebungen, Simulation von Zufallsexperimenten, Regression und Korrelation.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Arbeiten mit Daten
- Darstellen von Daten durch Datenplots und Histogramme
- Bestimmen von arithmetischem Mittel und Standardabweichung

8

Stochastik

Lernbereich: Mit dem Zufall rechnen – Wahrscheinlichkeitsrechnung	
Ausgehend von Zufallsexperimenten werden Möglichkeiten zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten betrachtet. Durch Zufallsgrößen werden Ergebnismengen strukturiert. Die bekannten Kenngrößen für Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen und führen zum Erwartungswert μ und zur Standardabweichung σ. Die BERNOULLI-Kette dient als ein Modell zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Umgekehrt lassen sich zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit nur von σ abhängige Umgebungen um den Erwartungswert bestimmen. Im erhöhten Anforderungsniveau werden diskrete von stetigen Zufallsgrößen abgegrenzt und die Normalverteilung als ein Beispiel für eine stetige Verteilung verwendet.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
- Ergebnis, Ereignis, Ergebnismenge - Zufallsgröße - Wahrscheinlichkeitsverteilung - Erwartungswert und Standardabweichung - BERNOULLI-Kette und Binomialverteilung - σ-Umgebungen	
	- Stetige Zufallsgrößen - Normalverteilung
Leitideen: Daten und Zufall, Messen, Funktionaler Zusammenhang	
Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: weitere diskrete und stetige Verteilungen.	
Hinweise zum Technologieeinsatz: - Berechnen von Fakultäten und Binomialkoeffizienten - Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung und der Normalverteilung - Bestimmen von kumulierten Wahrscheinlichkeiten bei Binomialverteilungen und Normalverteilungen - Grafische Darstellungen von Verteilungen	

Stochastik

Lernbereich: Daten beurteilen – Beurteilende Statistik	
Ausgehend von Stichproben wird das Modell der BERNOULLI-Kette genutzt, um für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit Vertrauensintervalle zu bestimmen. Während im grundlegenden Anforderungsniveau konkrete Vertrauenswahrscheinlichkeiten (90 %, 95 %, 99 %) vorgegeben sind, erfolgt im erhöhten Anforderungsniveau mithilfe der Normalverteilung eine Bestimmung für beliebige Vertrauenswahrscheinlichkeiten.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
- Grundgesamtheit - Repräsentative Stichprobe - Bestimmung von Schätzwerten für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit	
- Vertrauensintervalle zu konkreten Vertrauenswahrscheinlichkeiten	- Vertrauensintervalle zu beliebigen Vertrauenswahrscheinlichkeiten
Leitideen: Daten und Zufall, Messen	
Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: weitere Verfahren der beurteilenden Statistik.	
Hinweise zum Technologieeinsatz: - Bestimmen von arithmetischem Mittel und Standardabweichung - Bestimmen von Vertrauensintervallen je nach Möglichkeiten des Rechners	

I. Analysis

1. Differentialrechnung und Funktionsuntersuchungen

1.0 Wiederholung

Durchführung einer Kurvendiskussion

Bestandteile: Definitionsbereich, Symmetrie, Schnittpunkt mit der y-Achse, Nullstellen, Ableitungen, Extrema, Wendepunkte, Globalverhalten, Wertebereich, Graph

1. Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$ ("ganzrationale Funktion")
   ↑ zeigt Werte, die für x eingesetzt werden dürfen bzw. für die f(x) definiert ist

2. Symmetrie:

Punktsymmetrie	Achsensymmetrie
Exponenten ungerade	Exponenten gerade
+ keine Konstante	(Konstante erlaubt)
NB: $f(-x) = -f(x)$	NB: $f(-x) = f(x)$
(nur Symm. zum Ursprung!)	(nur Symm. zur y-Achse!)

3. Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid f(0))$
4. Nullstellen: NB: $f(x_0) = 0$
   (ggf. Schnittpunkte: $S_x(x_0 \mid 0)$)
5. Ableitungen: $f'(x) = \ldots, f''(x) = \ldots, f'''(x) = \ldots$
6. Extrema / Extrempunkte: NB: $f'(x_E) = 0$

   nicht nötig, falls Aufgabe Existenz des Extremums bestätigt ⇒ HB: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

   $f''(x_E) > 0$: lokales Minimum

   $f''(x_E) < 0$: lokales Maximum

   (ggf. Extrempunkte: $E(x_E \mid f(x_E))$)
7. Wendepunkte: NB: $f''(x_W) = 0$

   HB: $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$ ⇐ nicht nötig, falls Aufgabe Existenz des Wendepunktes bestätigt

   (ggf. Wendepunkte: $W(x_W \mid f(x_W))$)

8. Globalverhalten: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ sowie $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Bsp.: $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\underset{+\infty}{x^4} \underset{\left(\frac{1}{2} - 0 + 0\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^4} \right)} \right) = +\infty$

9. Wertebereich: Intervall, das alle Funktionswerte $f(x)$ beschreibt; herzuleiten aus Extrema und Globalverhalten.

$W_f = [\text{kleinster Wert}; \text{größter Wert}]$

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4$; $W_f = [-\frac{1}{2}; +\infty]$

10. Graph: passenden Ausschnitt wählen und zeichnen

1.1 Ganzrationale Funktionenscharen (S.67)

Eine **Funktionen- oder Graphenschar** enthält einen variablen sogenannten **Scharparameter**: $f_t(x)=\frac{1}{3}x^3+tx,\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$

Funktionenscharen können ähnlichen Untersuchungen unterzogen werden wie „normale" Funktionen, diese sind dann oft vom Scharparameter abhängig.

Besondere Vorgehensweisen:

Büschelpunkte: gemeinsame Punkte aller Funktionen

NB: $t_1 \neq t_2 \wedge f_{t_1}(x_B) = f_{t_2}(x_B)$

(ggf. Büschelpunkte: $B(x_B \mid f_t(x_B))$, t darf beliebig sein)

Ortskurve/-linie: Graph, auf dem markante Punkte von f_t liegen (Hoch-/Tief- oder andere Extrempunkte, oder auch Wendepunkte)

$P_t(\ldots \mid \ldots)$

- P_{t_x} nach t auflösen (oder gleichwertigen einsetzbaren Term)
- dies in P_{t_y} einsetzen; dies ist die Gleichung der Ortskurve

Bsp.: $P_t\left(-\sqrt{-t} \mid \frac{2\sqrt{-t}^3}{3}\right)$

- $x = -\sqrt{-t} \Rightarrow \sqrt{-t} = -x$
- $y = \frac{2\sqrt{-t}^3}{3} = \frac{2\cdot(-x)^3}{3} = \frac{-2x^3}{3} = -\frac{2}{3}x^3$

1.2 Kurvenanpassung – Lineare Gleichungssysteme

1.2.1 Bestimmen ganzrationaler Funktionen (S.30)

Lösen einer "Steckbriefaufgabe"

- Bedingungen aufstellen + kurze Begründung

Bsp.: $O(0|0)$ liegt auf G_f : $f(0)=0$

$W(2|4)$ liegt auf G_f : $f(2)=4$

Steigung in W ist -3: $f'(2)=-3$

W ist Wendepunkt: $f''(2)=0$

- Wahl einer Funktion geeigneten Grades (gerade/ungerade anhand des Problems entscheiden, zunächst kleinstmöglichen Grad verwenden; falls der nicht geht, nächsthöheren (+2) verwenden) + Ableitungen bilden

Bsp.: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

- Lineares Gleichungssystem aus den Bedingungen aufstellen

Bsp.: $\left(\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(2)=4 \\ f'(2)=-3 \\ f''(2)=0 \end{array}\right) \left|\begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ 8a + 4b + 2c + d &=& 4 \\ 12a + 4b + c &=& -3 \\ 12a + 2b &=& 0 \end{array}\right|$

- Gleichungssystem lösen und Parameter einsetzen

Bsp.: TR: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} a = 5/4 \\ b = -15/2 \\ c = 12 \\ d = 0 \end{array}\right\} f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x$

- immer Probe machen: Graph zeichnen/betrachten (wenn z.B. ein Tiefpunkt gefordert ist, kann dennoch ein Hochpunkt entstehen)

Beachte: – Bedingungen können u. U. widersprüchlich sein (z.B. wg. Symmetrie)

– Das Ergebnis kann eine Funktionenschar sein (mit $1=1$ als Lösung oder @ im GTR)

1.2.2 Gauss-Algorithmus (S.34)

Ziel: Ein lineares Gleichungssystem (LGS) in die Dreiecksgestalt und dann in die Diagonalgestalt überführen.

- Zeilentausch – Gleichungen „aufsteigend" sortieren, vereinfacht folgende Rechenschritte
- Multiplikation – Gleichungen auf einen „Nenner" bringen
- Addition – Gleichungen so addieren, dass gewünschte Größe „eliminiert" wird

Bsp. für LGS mit genau einer Lösung:

(1)
$$\left|\begin{array}{l} -64a + 16b - 4c + d = -8 \\ -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ a + b + c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 5 \end{array}\right| \xRightarrow{\text{Zeilentausch}}$$

(2)
$$\left|\begin{array}{l} a + b + c + d = 1 \\ -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 5 \\ -64a + 16b - 4c + d = -8 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 8,\ \cdot(-27),\ \cdot 64 \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Eliminieren

(3)
$$\left|\begin{array}{l} a + b + c + d = 1 \\ 12b + 6c + 9d = 9 \\ -18b - 24c - 26d = -22 \\ 80b + 60c + 65d = 56 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ :3 \\ :2 \\ \\ \end{array} \xRightarrow{\text{vereinfachen}}$$

(4)
$$\left|\begin{array}{l} a + b + c + d = 1 \\ 4b + 2c + 3d = 3 \\ -9b - 12c - 13d = -11 \\ 80b + 60c + 65d = 56 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot 9,\ \cdot(-20) \\ \cdot 4\ + \\ + \end{array}$$

(5)
$$\left|\begin{array}{l} a + b + c + d = 1 \\ 4b + 2c + 3d = 3 \\ -30c - 25d = -17 \\ \boxed{20c} + 5d = -4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 2 \\ \cdot 3\ + \end{array}$$

(6)
$$\left|\begin{array}{l} a + b + c + d = 1 \\ 4b + 2c + 3d = 3 \\ -30c - 25d = -17 \\ -35d = -46 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ :(-35) \end{array}$$

Dreiecksgestalt

... (7)
$$\left|\begin{array}{l} a = 13/70 \\ b = 1/35 \\ c = -37/70 \\ d = 46/35 \end{array}\right|$$

Diagonalgestalt

$a = \frac{13}{70}$, $b = \frac{1}{35}$, $c = -\frac{37}{70}$, $d = \frac{46}{35}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \Big\{ \underbrace{\left(\frac{13}{70} \Big| \frac{1}{35} \Big| -\frac{37}{70} \Big| \frac{46}{35}\right)}_{\text{4-Tupel}} \Big\}$

Bsp. für unlösbares LGS:

$$\left|\begin{array}{l} x - 2y + z = 3 \\ 3x - 5y + 2z = 9 \\ x - 3y + 2z = -3 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

Bsp. für unendlich viele Lösungen:

$$\left|\begin{array}{l} x - 2y + z = 3 \\ 3x - 5y + 2z = 9 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x - z = 3 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right|$$

Setze $z = t$:
$y = t$
$x = t + 3$

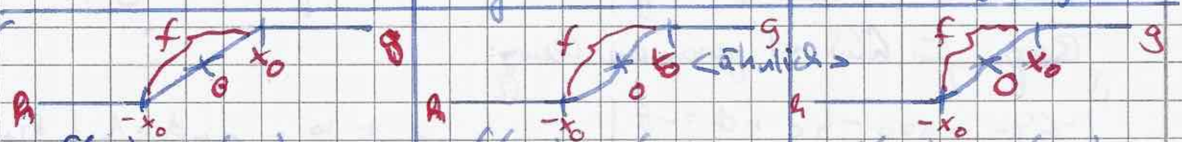
$\Rightarrow \mathbb{L} = \Big\{ \overbrace{(t+3 \,|\, t \,|\, t)}^{\text{Tripel}} ; t \in \mathbb{R} \Big\}$

(Es gibt auch nicht eindeutige, aber endliche Lösungen, z.B. wenn $t \in [3;9] \wedge t \in \mathbb{N}$.)

1.3 Trassierungen (S. 47) ...

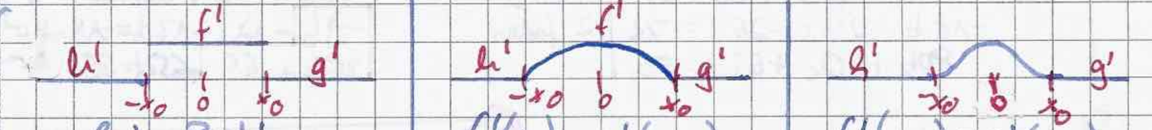
Zwei Trassen können auf unterschiedliche Weise verbunden werden. Die Übergangsfunktion ist ungeraden Grades, die Höhe des Grades ergibt sich aus der Anzahl der Bedingungen. Soll der Übergang punktsymmetrisch sein, lässt man gerade Glieder weg.

Es gibt drei Arten von Übergängen: (g, h: Trassen, f: Übergang)



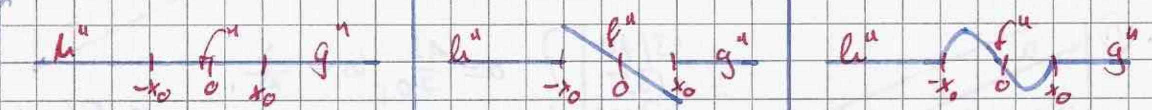
	nahtlos	glatt	krümmungsruckfrei
f	$f(x_0)=g(x_0)$	$f(x_0)=g(x_0)$	$f(x_0)=g(x_0)$

Da diese Übergänge zum Ursprung punktsymmetrisch sind, fällt die Bedingung $f(-x_0)=h(-x_0)$ weg.



	nahtlos	glatt	krümmungsruckfrei
f'	– keine Bedingung –	$f'(x_0)=g'(x_0)$	$f'(x_0)=g'(x_0)$

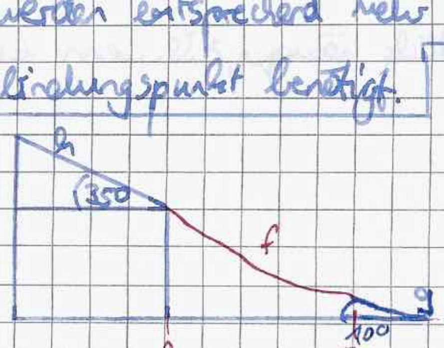
Auch hier fällt $f'(-x_0)=h'(-x_0)$ weg.



	nahtlos	glatt	krümmungsruckfrei
f''	– keine Bedingung –	– keine Bedingung –	$f''(x_0)=g''(x_0)$ ($f''(x_0)=h''(-x_0)$ entfällt)
Wahl des Funktionstyps	$f(x)=ax$	$f(x)=ax^3+bx$	$f(x)=ax^5+bx^3+cx$

Da $f(0)=0$, fällt das absolute Glied weg. Die Anzahl der Bedingungen (1 bzw. 2 bzw. 3) entscheidet über die Anzahl der Glieder.

Wenn Symmetrieverhältnisse ungeklärt oder nicht vorhanden sind, werden entsprechend mehr Glieder und Bedingungen für den 2. Verbindungspunkt benötigt.



Bsp.: $f(0)=15$ $\quad f'(0)=-0{,}7002$

$\underbrace{f(30)=0 \quad f'(30)=-0{,}1763}$

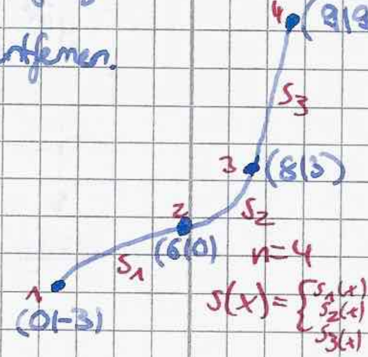
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

bx^2 ↓ asymmetrisch; d ↓ $f(0)\neq 0$

1.4 Spline-Interpolation (S. 52)

Bei der Spline-Interpolation werden Funktionen ermittelt, indem sie an den sogenannten Stützstellen in Abschnitte unterteilt werden, die (ähnlich der normalen Kurveninterpolation) dann bestimmt werden.

Die Spline-Interpolation ermöglicht Funktionen, die möglichst geringe Krümmung aufweisen und sich wenig von den Datenpunkten entfernen.



- Es gibt n Datenpunkte.
- $s(x)$ ist für $n-1$ Abschnitte abschnittsweise definiert.
- Die Abschnitte $s_i(x)$ sind (höchstens) 3. Grades.
- An den Stützstellen stimmen
  ① $s_i(x_s) = s_{i+1}(x_s)$
  ② $s_i'(x_s) = s_{i+1}'(x_s)$ (krümmungsruckfreier Übergang)
  ③ $s_i''(x_s) = s_{i+1}''(x_s)$
  überein.
- Im 1. und n-ten Datenpunkt gibt es keine Krümmung, also: ④ $s_i''(x_s) = 0$

Bsp. mit den Datenpunkten (0|-3), (6|0), (8|3), (9|9):

$$n=4, \text{ also } s(x)=\begin{cases} s_1(x); & 0 \le x < 6 \\ s_2(x); & 6 \le x < 8 \\ s_3(x); & 8 \le x \le 9 \end{cases}$$

$\le / <$ beachten!

① $s_1(0) = -3$		$s_1''(0) = 0$ ④
① $s_1(6) = 0$	$s_1'(6) = s_2'(6)$ ②	$s_1''(6) = s_2''(6)$ ③
① $s_2(6) = 0$		
① $s_2(8) = 3$	$s_2'(8) = s_3'(8)$ ②	$s_2''(8) = s_3''(8)$ ③
① $s_3(8) = 3$		
① $s_3(9) = 9$		$s_3''(9) = 0$ ④

$s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ | 4 Parameter

$s(x)$ hat 12 Parameter.

12 Bedingungen für 12 Parameter

$\Rightarrow$ Bedingungen wie gehabt als LGS formulieren und lösen.

1.5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

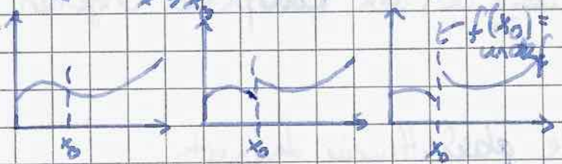
1.5.1 Stetigkeit (S.58)

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 dann stetig, wenn:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert
- gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

falls nicht: $f(x)$ ist an x_0 unstetig

falls $f(x_0)$ undefiniert, ist $f(x)$ an x_0 weder stetig noch unstetig



stetig　　unstetig　　weder stetig, noch stetig

„Sprünge" kennzeichnen unstetige Stellen.

Falls $f(x_0)$ undefiniert ist, kann die Funktion dennoch stetig fortsetzbar sein:

die Stelle ist weder stetig noch unstetig, also:

stetig fortsetzbar

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert

Eine Funktion ist stetig, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Ganzrationale Funktionen sind stetig ($D = \mathbb{R}$).

$\pm\infty$ zählen nicht als existente Grenzwerte.

Bsp. für unstetige Funktion:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 ; & x < 0 \\ 0 ; & x = 0 \\ 1 ; & x > 0 \end{cases}$$

„Strittige" Stelle: 0

$\lim\limits_{x \to 0-} -1 = -1 \qquad \lim\limits_{x \to 0+} 1 = 1$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein,

$sgn(x)$ ist an 0 unstetig, $sgn(x)$ ist unstetig.

Bsp. für stetige Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} -x ; & x < -1 \\ 1 ; & -1 \leq x < 1 \\ x ; & x \geq 1 \end{cases}$$

„Kritische" Stellen: $-1, 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} -x = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1)$

Stetig an der Stelle -1.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$

Stetig an der Stelle 1.

Überall stetig, also ist f stetig.

Bsp. für stetig fortsetz-/ergänzbare Funktion:

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x - 1 = -2 \qquad \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x - 1 = -2$

$\lim\limits_{x \to -1} x - 1 = -2$ existiert, obwohl $f(-1)$ nicht definiert ist. f ist stetig fortsetzbar. Die Definitionslücke kann geschlossen werden:

$$f^*(x) = \begin{cases} x - 1 ; & x \neq -1 \\ -2 ; & x = -1 \end{cases}$$

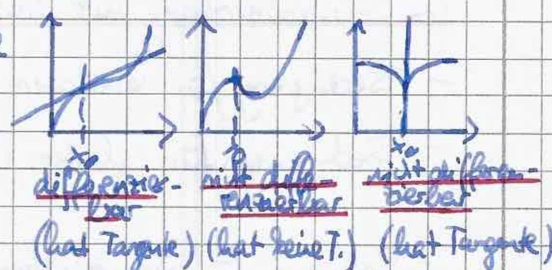
1.5.2 Differenzierbarkeit (S. 61)

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 dann differenzierbar, wenn die Ableitung $f'(x)$ an dieser Stelle x_0 existiert, also der Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Dies wird überprüft, indem man den linksseitigen sowie rechtsseitigen Grenzwert zur Stelle 0 bestimmt. Wenn beide übereinstimmen (und kein $\pm\infty$ vorkommt), existiert der beidseitige Grenzwert und damit auch eine Tangente sowie die Ableitung.

„Knicke" oder „Sprünge" kennzeichnen nicht differenzierbare Stellen.

An einer nicht differenzierbaren Stelle kann eine Tangente dann existieren, wenn sie parallel zur y-Achse verläuft (das ist der Fall, wenn der Grenzwert $\pm\infty$ beträgt).



Bsp. für nicht differenzierbare Funktion (an Stelle 0):

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, \text{ krit. Stelle: } 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} 1 = 1 \quad \text{(rechtsseitiger Grenzwert)}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{-f(x)}{-x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{-x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} -1 = -1 \quad \text{(linksseitiger Grenzwert)}$$

Die Grenzwerte stimmen nicht überein ($1 / -1$), $f(x)$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar und hat dort keine Tangente.

Bsp. für " mit Tangente:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}, \text{ krit. Stelle: } 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{-(-\sqrt{-x})}{-x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{-\cancel{\sqrt{-x}}}{-(\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x})} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{\sqrt{-x}} = \infty$$

Es existieren keine Grenzwerte, $f(x)$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Die Grenzen sind offen, eine Tangente (mit $m=\infty$) existiert, die parallel zur y-Achse verläuft.

1.5.3 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit (S.65)

Ist $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, ist sie dort auch stetig.

(Differenzierbarkeit impliziert ($\Rightarrow$) Stetigkeit.)

Diff.	$\rightarrow$ Stet.	
ja	ja	✓
ja	nein	✗
nein	ja	✓
nein	nein	✓

Ist $f(x)$ an der Stelle x_0 unstetig, kann sie dort nicht differenzierbar sein.

Zwei differenzierbare Teilfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ können zu einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ zusammengesetzt werden, wenn gilt:

- $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ Stetigkeit, kein Sprung, nahtloser Übergang
- $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$ Differenzierbarkeit, kein Knick, glatter Übergang

Im Zusammenhang mit Trassierung:

- Bedingung für nahtlosen Übergang = Bedingung für Stetigkeit
- Bedingungen für glatten Übergang = Bedingungen für Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- Bedingungen für krümmungsruckfreien Übergang = u.a. Bedingungen für Stetigkeit und Differenzierbarkeit

2. Integralrechnung

2.1 Hinführung zur Integralrechnung

geradlinig
krummlinig begrenzte Fläche

Die Durchflussmenge entspricht geometrisch jeweils dem Flächeninhalt (Rechtecke, Trapez), der durch den Graphen, die x-Achse und die Parallelen zur y-Achse eingeschlossen wird.

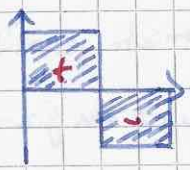
Man schließt von der momentanen Änderungsrate auf die Gesamtmenge (Rekonstruktion).

Ableitung $\underset{\text{differenzieren}}{\overset{\text{integrieren}}{\rightleftarrows}}$ Ausgangsfunktion

$\Rightarrow$ Kennt man die momentane Änderungsrate einer Größe, so kann man die Gesamtänderung der Größe als Flächeninhalt unter der Kurve deuten.

2.2 Der Begriff des Integrals

2.2.1 Orientierte Flächeninhalte – Geometrische Definition (S. 82)



Orientierte Flächeninhalte sind vorzeichenbehaftet.

+: positiv orientierter Flächeninhalt –: negativ orientierter Flächeninhalt

Die Funktion f sei über dem Intervall $[a;b]$ definiert.

Die Summe der orientierten Flächeninhalte, die der Graph von f, die x-Achse und die Parallelen zur y-Achse einschließen, heißt

Integral von f von a bis b.

Man schreibt: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$.

2.2.2 Näherungsweises Berechnen von Integralen – Analytische Definition (S. 88)

Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a;b]$ definiert und monoton wachsend bzw. fallend. Dann heißt der gemeinsame Grenzwert der Obersumme $\overline{S}_n$ und der Untersumme $\underline{S}_n$ (sofern er existiert) das Integral der Funktion f in den Grenzen a und b. Man schreibt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \int_a^b f(x)\,dx}$$

$\int$ Integralzeichen; dx Differential
a, b Grenzen; x Integrationsvariable
f(x) Integrand

Beispielhafter Beweis mit $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $[0;b]$:

$$\overline{S}_n = \underbrace{\frac{b}{n}}_{\text{Streifenbreite}} \cdot \underbrace{\left[f\left(\frac{b}{n}\right) + f\left(2\frac{b}{n}\right) + \dots + f\left(n\frac{b}{n}\right)\right]}_{\text{Streifen-Funktionswerte}} = \frac{b}{n} \cdot \left[\left(\frac{b}{n}\right)^3 + \left(2\frac{b}{n}\right)^3 + \dots + \left(n\frac{b}{n}\right)^3\right]$$

$$= \frac{b}{n}\left[1^3 \frac{b^3}{n^3} + 2^3\frac{b^3}{n^3} + \dots + n^3\frac{b^3}{n^3}\right] = \frac{b}{n}\cdot\frac{b^3}{n^3}\cdot\left[1^3+2^3+\dots+n^3\right] = \frac{b^4}{n^4}\cdot\underbrace{\sum_{x=1}^{n} x^3}_{\text{mit TR bestimmen}}$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\cdot\frac{n^2\cdot(1+n)^2}{4} = \frac{b^4}{4}\cdot\frac{n^2\cdot(1+n)^2}{n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^4}{4}\cdot\frac{n^2\cdot(1+n)^2}{n^4}\right) = \frac{b^4}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^2}\cdot(1+n)^2}{n^{\cancel{4}\,2}}\right) = \frac{b^4}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+n)^2}{n^2}\right) =$$

$$\frac{b^4}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1}\Big)^2 = \frac{b^4}{4}\cdot 1 = \frac{b^4}{4} = \frac{1}{4}b^4$$

$$\underline{S}_n = \frac{b}{n}\cdot\left[f\left(0\cdot\frac{b}{n}\right) + f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right) + \dots + f\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)\right] = \frac{b}{n}\cdot\left[1^3\cdot\frac{b^3}{n^3} + 2^3\cdot\frac{b^3}{n^3} + \dots + (n-1)^3\cdot\frac{b^3}{n^3}\right]$$

$$= \frac{b}{n}\cdot\frac{b^3}{n^3}\cdot\left[1^3+2^3+\dots+(n-1)^3\right] = \frac{b^4}{n^4}\cdot\underbrace{\sum_{x=1}^{n-1} x^3}_{\text{TR}} = \frac{b^4}{n^4}\cdot\left(\frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right)$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\cdot\frac{n^4-2n^3+n^2}{4} = \frac{b^4}{4}\cdot\frac{n^4-2n^3+n^2}{n^4} = \frac{b^4}{4}\cdot\left(\frac{n^4}{n^4} - \frac{2n^3}{n^4} + \frac{n^2}{n^4}\right) = \frac{b^4}{4}\cdot\left(1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^4}{4}\cdot\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{b^4}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{1}_{\to 1}-\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\Big) = \frac{b^4}{4}\cdot 1 = \frac{b^4}{4} = \frac{1}{4}b^4$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = \lim_{n\to\infty}\underline{S}_n = \int_0^b x^3\,dx = \frac{1}{4}b^4}$$

Es fällt auf:

$f(x) = 1$	$\int_0^b 1 = \frac{1}{1}b^1$	$\int_a^b 1 = \frac{1}{1}b^1 - \frac{1}{1}a^1$
$f(x) = x$	$\int_0^b x = \frac{1}{2}b^2$	$\int_a^b x = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$
$f(x) = x^2$	$\int_0^b x^2 = \frac{1}{3}b^3$	$\int_a^b x^2 = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$
$f(x) = x^3$	$\int_0^b x^3 = \frac{1}{4}b^4$	$\int_a^b x^3 = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$
$f(x) = x^n$	$\int_0^b x^n = \frac{1}{n+1}\cdot b^{n+1}$	$\int_a^b x^n = \frac{1}{n+1}\cdot b^{n+1} - \frac{1}{n+1}\cdot a^{n+1}$

Es gilt: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx}$

2.3 Aus Änderungsraten rekonstruierter Bestand – Integralfunktionen (S.96)

Gegeben sei eine Funktion f. Für eine fest gewählte Zahl a heißt die Funktion I_a mit $\boxed{I_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt}$, die jeder Stelle x den Wert des Integrals zuordnet, Integralfunktion von f zur unteren Grenze a.

Bsp.:

$f(t)=30t+150 \qquad I_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt = \left[15t^2+150t\right]_a^x$

$I_0(x)=15x^2+150x$

$= 15x^2+150x-(15a^2+150a)$

$= 15x^2+150x-15a^2-150a$

(Vorgriff:

$F(x)=I_0(x)+c=15x^2+150x+c$)

Es gilt:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0} \quad \text{und} \quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a -f(x)\,dx}$$

2.4 Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung (S. 103)

Ist die Integrandenfunktion f stetig, so ist die Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar und es gilt:

$\boxed{I_a'(x) = f(x)}$ $\Rightarrow$ Die Ableitung der Integralfunktion entspricht der Integrandenfunktion.

(Integral: Gemeinsamer Grenzwert von Ober- und Untersummen
Ableitung: Steigung der Tangente bzw. Grenzwert der Sekantensteigungen)

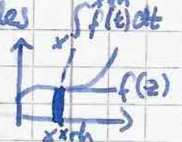
Beweis:

Zu zeigen: $I_0'(x) = f(x)$

Beweisführung mithilfe des Differenzenquotienten von $I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$:

$$\frac{I_0(x+h) - I_0(x)}{h} = \frac{\int_0^{x+h} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

Ist f stetig, so ist das Integral $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ so groß wie ein entsprechendes Rechteck mit den Seitenlängen h und $f(z)$ mit $x \leq z \leq x+h$:



$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \frac{f(z) \cdot h}{h} = f(z)$$ $\rightarrow$ Differenzenquotient von $I_0(x)$

Bestimmung des Grenzwertes des Differenzenquotienten:

$$I_0'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I_0(x+h) - I_0(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(z)$$

Falls $h \to 0$, gilt $z \to x$, da $x \leq z \leq x+h$. Also:

$\lim_{h \to 0} f(z) = f(x)$ oder: $\boxed{I_0'(x) = f(x)}$ q. e. d.

2.5 Integration mithilfe von Stammfunktionen

2.5.1 Berechnen von Integralen mithilfe von Stammfunktionen (S. 108)

$I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = [F(t)]_0^x = F(x) - F(0)$

$F(x)$ ist die sogenannte Stammfunktion oder Aufleitung.

Wie bewiesen, gilt: $F'(x) = f(x)$

$\left(I_0(0) = 0, \text{ da } \int_0^0 f(t)\,dt = 0. \right)$

Allgemein gilt: $\boxed{I_a(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$

oder: $\boxed{F(x) = I_0(x) + F(0)}$

Schlussfolgerung:

Eine Funktion F heißt Stammfunktion zur Funktion f, wenn gilt:

$F'(x) = f(x)$

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f im Intervall $[a;b]$, so gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ (s.o.)

Gibt es zu einer Funktion mehrere Stammfunktionen?

Ja. Seien F und G Stammfunktionen von f mit $G(x) = F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. $G'(x) = F'(x) = f(x)$

Damit ist gezeigt:

Ist F eine beliebige Stammfunktion zur Funktion f über dem Intervall $[a;b]$, so sind alle Stammfunktionen von f über dem Intervall $[a;b]$ gegeben durch: $\boxed{F(x) + c, \ c \in \mathbb{R}}$

Ferner gilt:

Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion ①, aber nicht jede Stammfunktion ist eine Integralfunktion ② (① $I_a(x) = F(x) + c$ mit $c = 0$;

② $F(x) = I_a(x) + c$ mit $c \neq -F(a)$.)

Rechenregeln für Integrale:

Faktorregel: $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot k$

Summenregel: $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

- Für den Mittelwert μ der Funktionswerte einer Funktion f im Intervall $[a;b]$ gilt: $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$
- Es ist möglich, dass sich im Intervall $[a;b]$ der Stammfunktion $F(x)$ keine Extrema befinden; dennoch können sogenannte Randextrema (Randminimum/maximum) existieren. Dazu betrachtet man die Ränder/Grenzen a und b des Intervalls.

2.5.2 Integration durch lineare Substitution (S. 114)

Ist F eine Stammfunktion der Funktion f, so gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(mx+b)\,dx = \frac{1}{m}\cdot\left[F(mx+b)\right]_a^b}, \quad m \neq 0$$

2.6 Berechnen von Flächeninhalten (S. 116)

Integrale dürfen negativ sein. Flächeninhalte müssen positiv sein (Betrag).

$\Rightarrow$ Betragsstriche, da die zu berechnende Fläche unterhalb der x-Achse liegt.

Es sei f eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion.

Für den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen G_f und der x-Achse über dem Intervall $[a;b]$ gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ falls } f(x) \geq 0 \text{ für } x \in [a;b]$$

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|, \text{ falls } f(x) \leq 0 \text{ für } x \in [a;b]$$

Sei f eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion, deren Graph teilweise oberhalb bzw. und unterhalb der x-Achse verläuft.

Dann gilt für den Flächeninhalt A der Fläche, die der Graph mit der x-Achse auf dem Intervall $[a;b]$ einschließt:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx \right|,$$ wobei $x_1, \dots, x_n$ die Nullstellen von f auf dem Intervall $[a;b]$ sind.

Seien f und g auf dem Intervall $[a;b]$ stetig. Für den Inhalt A der Fläche, die die Graphen G_f und G_g einschließen, gilt:

$$A = \left| \int_a^{x_{S1}} (f(x) - g(x))\,dx \right| + \left| \int_{x_{S1}}^{x_{S2}} (f(x) - g(x))\,dx \right| + \dots + \left| \int_{x_{Sn}}^{b} (f(x) - g(x))\,dx \right|,$$ wobei $x_{S1}, \dots, x_{Sn}$ die Schnittstellen der Graphen sind.

2.7 Uneigentliche Integrale (S. 126)

Integrale können nicht bestimmt werden, wenn die Integrandenfunktion auf dem Intervall $]a;b[$ Definitionslücken hat.

Bsp.: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2 \Rightarrow$ unsinnig, da $\frac{1}{x^2}$ positiv sein muss

Grund: $\frac{1}{x^2}$ hat im Intervall $]-1;1[$ bei 0 eine Definitionslücke.

Das Integral existiert nicht.

Befinden sich diese Definitionslücken an der Stelle a oder b, kann ein uneigentliches Integral existieren:

Die Funktion f soll stetig sein für $]a;b]$ ① oder $[a;b[$ ②. Dann ist:

① $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to a} \int_c^b f(x)dx$

② $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to b} \int_a^c f(x)dx$

Ein uneigentliches Integral kann auch für a oder $b = \pm\infty$ existieren:

Die Funktion f soll stetig sein für alle $x > a$ ③ oder $x < b$ ④. Dann ist:

③ $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int_a^c f(x)dx$

④ $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx$

Die Integrale links vom Gleichheitszeichen heißen uneigentliche Integrale. Existiert der Grenzwert rechts vom Gleichheitszeichen, ist der Flächeninhalt endlich und das uneigentliche Integral existiert, existiert er nicht, ist der Flächeninhalt unendlich und das uneigentliche Integral existiert nicht.

stetig für

Beispiele für: $]a;b]$ ① | $x > a$ ③

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{c \to 0} \int_c^1 \frac{1}{x^2} dx$

$= \lim\limits_{c \to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_c^1 = \lim\limits_{c \to 0} \left(-1 + \frac{1}{c}\right) = \infty$

existiert nicht / unendlich

uneigentliches Integral / Flächeninhalt...

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx$

$= \lim\limits_{c \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim\limits_{c \to \infty} \left(-\frac{1}{c} + 1\right) = 1$

existiert / endlich (1 FE)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{c \to 0} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$= \lim\limits_{c \to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = \lim\limits_{c \to 0} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$

existiert / endlich (2 FE)

uneigentliches (Integral) Flächeninhalt...

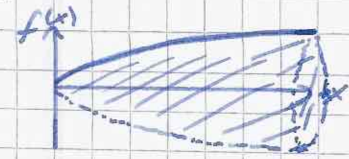
$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$= \lim\limits_{c \to \infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^c = \lim\limits_{c \to \infty} (2\sqrt{c} - 2) = \infty$

existiert nicht / unendlich

2.8 Rauminhalte von Rotationskörpern (S. 130)

$f(x)$ beschreibt einen Körper, der um die x-Achse im Raum rotiert.



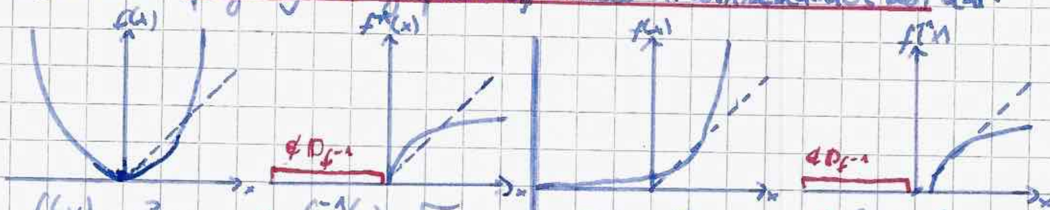
$f(x)$ beschreibt den Radius, $A(x) = \pi \cdot (f(x))^2$ den Flächeninhalt an der Stelle x. Das Volumen ist folglich

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2\,dx = \boxed{\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx}.$$

Umkehrfunktionen

Eine Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu einer Funktion $f(x)$ ordnet den Funktionswerten von $f(x)$ die x-Werte von $f(x)$ zu: $\boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$

Geometrisch stellt die Umkehrfunktion eine $90°$-Spiegelung des Graphen G_f bzw. eine Spiegelung des Graphen G_f an der 1. Winkelhalbierenden dar:



$f(x) = x^2 \longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $f(x) = e^x \longrightarrow f(x) = \ln x$

Rechnerisch bestimmt man die Umkehrfunktion wie folgt in 2 Schritten:

① $y = f(x)$ | nach x auflösen

② $x = \ldots y \ldots$ | x und y vertauschen

$y = \ldots x \ldots = f^{-1}(x)$

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

① $y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \Rightarrow 4y = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 4y - 4 \Rightarrow x = \sqrt{4y-4}$

② Variablentausch: $x = \sqrt{4y-4} \Rightarrow y = \sqrt{4x-4}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{4x-4}$ $\underbrace{\text{für } x \geq 1}_{\text{Man beachte Definitionslücken!}}$

3. Wachstumsmodelle

3.0 Wiederholung (S. 177)

Eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1, a \neq 0)$ heißt allgemeine Exponentialfunktion zur Basis b.

Für eine solche Funktion f gilt:

- $0 < b < 1$: Streng monoton fallend $(a > 0)$, steigend $(a < 0)$
- $b > 1$: streng monoton steigend $(a > 0)$, fallend $(a < 0)$
- x-Achse ist Asymptote
- Grundeigenschaft der Exponentialfunktionen:

Stelle	Funktionswert
x	$a \cdot b^x$
$x+s$	$a \cdot b^{x+s}$

($+s$ bei der Stelle, $\cdot b^s$ beim Funktionswert)

Ist $b^x = y$ $(y > 0;\ b > 0,\ b \neq 1)$, heißt der Exponent x Logarithmus von y zur Basis b: $x = \log_b(y) = \log_b y$

Folglich gilt:

$$\boxed{\log_b(b^x) = x} \quad \text{sowie} \quad \boxed{b^{\log_b y} = y}$$

$\log_{10} x = \log x$ heißt dekadischer Logarithmus.

Logarithmengesetze

$$\boxed{\begin{aligned} \log_b(x \cdot y) &= \log_b x + \log_b y \\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b x - \log_b y \\ \log_b(x^t) &= t \cdot \log_b x \\ \log_b x &= \frac{\log x}{\log b} \end{aligned}}$$

3.1 Exponentielles Wachstum

3.1.1 Lineares und exponentielles Wachstum (S.144)

Bsp.: $f(t) = 100 + 40x$ lineares Wachstum

$g(t) = 100 \cdot 1{,}0404^x$ exponentielles Wachstum

Änderungsraten:

	pro Jahr	pro Monat	pro Tag	
$g(t)$	$\frac{g(t+365)-g(t)}{365}$	$\frac{g(t+30)-g(t)}{30}$	$\frac{g(t+1)-g(t)}{1}$	
	$\approx 5{,}19785 \cdot 1{,}0404^t$	$\approx 7{,}6034 \cdot 1{,}0404^t$	$\approx 4{,}04 \cdot 1{,}0404^t$	$\Rightarrow$ Änderungsrate exponentiell
$f(t)$	$\frac{f(t+365)-f(t)}{365}$	$\frac{f(t+30)-f(t)}{30}$	$\frac{f(t+1)-f(t)}{1}$	
	$= 40$	$= 40$	$= 40$	$\Rightarrow$ Änderungsrate konstant

Momentane Änderungsraten / Ableitungen:

$$f'(t) = \lim_{h\to0}\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{100+40(t+h)-100-40t}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to0}\left(\frac{40h}{h}\right) = \lim_{h\to0}\left(40\cdot\frac{h}{h}\right) = \lim_{h\to0} 40 = 40$$

$$g'(t) = \lim_{h\to0}\left(\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{100\cdot1{,}0404^{t+h} - 100\cdot1{,}0404^t}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to0}\left(\frac{100\cdot1{,}0404^t\cdot1{,}0404^h - 100\cdot1{,}0404^t}{h}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{100\cdot1{,}0404^t(1{,}0404^h-1)}{h}\right)$$

$$= 100\cdot1{,}0404^t\cdot\lim_{h\to0}\left(\frac{1{,}0404^h-1}{h}\right) \approx 100\cdot1{,}0404^t\cdot0{,}0396$$

$$\approx 3{,}96\cdot1{,}0404^t \approx \underline{0{,}0396\cdot g(t)}$$

Die Ableitung einer Exponentialfunktion ist proportional zu dieser Funktion.

$$\approx \underline{g'(0)\cdot1{,}0404^t}$$

Allgemein: $f(t) = b^t$; $f'(t) = \lim_{h\to0}\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{b^{t+h}-b^t}{h}\right)$

$$= \lim_{h\to0}\left(\frac{b^h-1}{h}\right)\cdot b^t = \lim_{h\to0}\left(\frac{b^{0+h}-b^0}{h}\right)\cdot b^t = \lim_{h\to0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right)\cdot b^t$$

$$= f'(0)\cdot b^t$$

Für jede Exponentialfunktion f mit $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}^{>0}\setminus\{1\})$ gilt:

$$\boxed{f'(x) = f'(0)\cdot f(x) = f'(0)\cdot b^x}$$

3.1.2 e-Funktion und natürlicher Logarithmus (S.144/S.151)

Es gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot b^x$ für $f(x) = b^x$ (s. 3.1.1).

Besonders einfach wäre die Ableitung für $f'(0) = 1$.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{b^{0+h} - b^0}{h}\right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{b^h - 1}{h}\right)$$

Es muss gelten: $\frac{b^h - 1}{h} \approx 1 \Rightarrow b^h - 1 \approx h \Rightarrow b^h \approx h + 1 \Rightarrow b \approx \sqrt[h]{h+1} \Rightarrow b \approx (h+1)^{\frac{1}{h}}$

$$\lim_{h \to 0}\left((h+1)^{\frac{1}{h}}\right) \approx 2{,}71828\ldots$$

→ Für die irrationale Euler'sche Zahl e gilt:

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828\ldots}$$

→ Die Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ heißt natürliche Exponentialfunktion oder kurz e-Funktion.

→ Die e-Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{f'(x) = e^x}$$

→ Für die Stammfunktionen F gilt: $\boxed{F(x) = e^x + c}$ mit $c \in \mathbb{R}$

Aus $x = e^{\log_e x} = e^{\ln x}$ folgt:

→ Die Umkehrfunktion der e-Funktion heißt natürliche Logarithmusfunktion $\ln(x)$:

$$f(x) = e^x;\ f^{-1}(x) = \ln x;\ f(f^{-1}(x)) = e^{\ln x} = x$$

Entsprechend lauten die Logarithmusgesetze:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y;\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y;\ \ln(x^t) = t \cdot \ln x$$

→ Da $f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x \cdot \ln b}$

und $f'(x) = (e^{x \cdot \ln b})' = \ln(b) \cdot e^{x \cdot \ln b} = \ln(b) \cdot b^x$, gilt für jede Exponentialfunktion f mit $f(x) = b^x$ ($b \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$):

f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{f'(x) = \ln(b) \cdot b^x}$$

→ f mit $f(x) = \ln x$ hat für alle $x > 0$ die Ableitung $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$.

→ F mit $\boxed{F(x) = \ln(|x|)}$ ist für alle $x \neq 0$ Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{x}$.

3.1.3 Beschreibung von exponentiellem Wachstum mithilfe der e-Funktion (S.155)

Jedes exponentielle Wachstum mit $f(t) = a \cdot b^t$ mit $a = f(0)$ lässt sich mit der Euler'schen Zahl als Basis schreiben:

$$f(t) = a \cdot b^t = a \cdot \left(e^{\ln b}\right)^t = a \cdot e^{t \cdot \ln b} = \boxed{a \cdot e^{kt}}, \text{ wobei}$$

$$\boxed{k = \ln b} \begin{cases} > 0, & \text{falls } b > 1 \\ < 0, & \text{falls } 0 < b < 1 \end{cases}.$$

exponentielles Wachstum:	exponentielle Zunahme	exponentielle Abnahme
b	> 1	$\in \,]0;1[$
k	> 0	< 0
	Verdopplungszeit: $\boxed{t_V = \frac{\ln 2}{k}}$	Halbierungszeit: $\boxed{t_H = \frac{-\ln 2}{k}}$

Wachstumsgeschwindigkeit:

$$f'(t) = \left(a \cdot e^{kt}\right)' = k \cdot a \cdot e^{kt} = \boxed{k \cdot f(t)}$$

Proportional zum Bestand!

3.1.4 Differenzialgleichungen exponentieller Prozesse (S. 181)

Eine Gleichung, in der die (erste, zweite, ...) Ableitung einer Funktion vorkommt, heißt **Differenzialgleichung**. Diese kann auch die Funktion selbst oder die Funktionsvariable enthalten.

Die Lösungsmenge einer Differenzialgleichung enthält keine Zahlen, sondern **Funktionen**. Alle Funktionen, die eine Differenzialgleichung erfüllen, bilden demnach die Lösungsmenge der Differenzialgleichung.

Bsp.: $f'(x) = f(x)$. Lösungen sind bspw. $f(x) = e^x$ oder $f(x) = 0$.

$f''(x) = -f(x)$. Lösung ist bspw. $f(x) = 0$.

$f'(x) = x^2$. Lösung ist bspw. $f(x) = \frac{1}{3}x^3$.

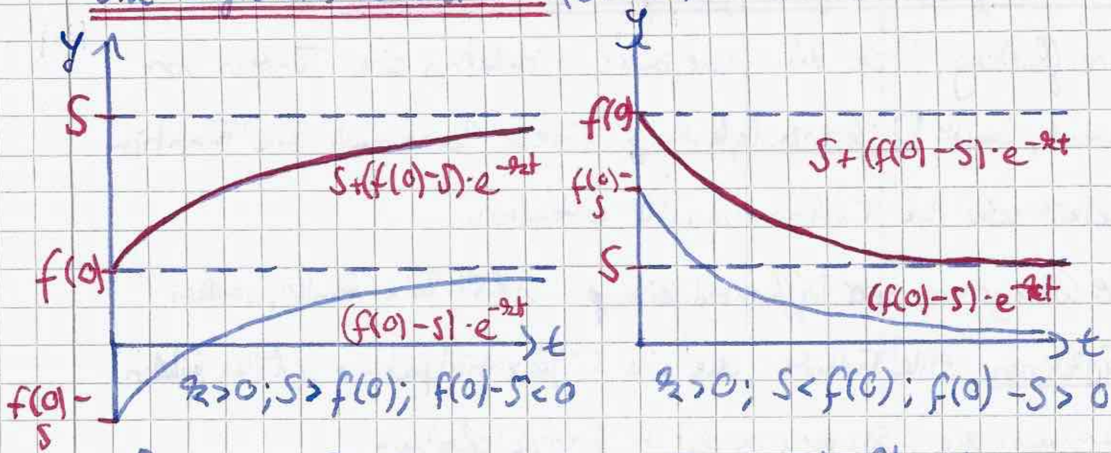
hier: $f'(x) = k \cdot f(x)$. Lösung ist bspw. $f(x) = e^{kx}$.

Die Funktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ erfüllt die Differenzialgleichung $f'(t) = k \cdot f(t)$, da $f'(t) = k \cdot a \cdot e^{kt} = k \cdot f(t)$ gilt. Den Proportionalitätsfaktor k nennt man **Wachstumskonstante**.

(Man kann nachweisen, dass Funktionen dieser Form die einzige Lösung der Differenzialgleichung $f'(t) = k \cdot f(t)$ sind.)

Differenzialgleichung	Lösungen	Lösung für $a = f(0)$
Exponentielles Wachstum:		
$f'(t) = k \cdot f(t)$	$f(t) = a \cdot e^{kt}$	$f(t) = f(0) \cdot e^{kt}$
Lineares Wachstum:		
$f'(t) = k$	$f(t) = kt + a$	$f(t) = kt + f(0)$
Beschleunigte Bewegung:		
$s''(t) = a$	$s(t) = \frac{1}{2} a t^2$	entfällt, da: $v_0 = 0 = f'(0)$, $s_0 = 0 = f(0)$

3.2 Begrenztes Wachstum (S. 166)



Begrenzte Zunahme — **Begrenzte Abnahme**

Sind Zu- oder Abnahmeprozesse einer natürlichen Sättigungsgrenze S ausgesetzt, heißen sie begrenzte Wachstumsprozesse.

Die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zur Differenz aus Sättigungsgrenze S und aktuellem Bestand.

Ein begrenzter Wachstumsprozess wird durch die Differenzialgleichung

$\boxed{f'(t) = k\cdot(S-f(t))}$ mit $k>0$ beschrieben.

Die Lösungen dieser Differenzialgleichung sind die Funktionen der Form

$\boxed{f(t) = S + a\cdot e^{-kt}}$ mit $k>0$.

Ist ein Anfangswert $f(0)$ gegeben, hat sie nur die Lösung

$\boxed{f(t) = S + (f(0)-S)\cdot e^{-kt}}$ mit $k>0$.

k ist immer >0, egal ob Zu- oder Abnahme!

Lösung der Differenzialgleichung:

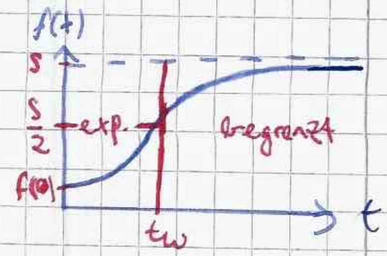
$f'(t) = k\cdot(S-f(t))$ mit $k>0$

$(f(t)-S)' = k\cdot(S-f(t)) \Rightarrow (f(t)-S)' = -k\cdot(f(t)-S)$

Lösung: $f(t)-S = a\cdot e^{-kt} \Rightarrow f(t) = S + a\cdot e^{-kt}$

Für bekanntes $f(0)$: $f(t) = S + (f(0)-S)\cdot e^{-kt}$.

3.3 Logistisches Wachstum (S. 171)



Wachstumsprozesse, die zunächst exponentiell und gegen Ende begrenzt ablaufen, werden als logistisches Wachstum bezeichnet.

Die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zum Produkt des Bestands $f(t)$ (der exponentielle Teil) und der Differenz zur Sättigungsgrenze $S-f(t)$ (der begrenzte Teil).

Daraus folgt die Differenzialgleichung für logistisches Wachstum

$$\boxed{f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t))}.$$

Für einen gegebenen Anfangswert $f(0)$ hat sie die Lösung

$$\boxed{f(t) = \frac{S}{1+\left(\frac{S}{f(0)}-1\right)\cdot e^{-kSt}}}.$$

$$f(t) = \frac{\overbrace{S}^{①}}{1+\underbrace{\left(\frac{S}{f(0)}-1\right)}_{②}\cdot e^{\underbrace{-kS}_{③}t}}$$

Bedeutung der Parameter bei $f(t) = \frac{c}{1+\underset{②}{a}e^{-\underset{③}{b}t}}$:

① c: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \frac{c}{1} = \underline{c = S}$

② a: $f(0) = \frac{c}{1+a} = \frac{S}{1+a} \Rightarrow 1+a = \frac{S}{f(0)} \Rightarrow \underline{a = \frac{S}{f(0)}-1}$

③ b: $f'(t) = k\cdot f(t)\cdot(S-f(t)) \Rightarrow k = \frac{f'(t)}{f(t)\cdot(S-f(t))} = \frac{b}{c} = \frac{b}{S} \Rightarrow \underline{b = k\cdot S}$

Beim logistischen Wachstum liegt die höchste Wachstumsgeschwindigkeit an der Wendestelle $\boxed{t_w = \frac{\ln\left(\frac{S}{f(0)}-1\right)}{k\cdot S}}$ bzw. für $\boxed{f(t) = \frac{S}{2}}$ vor.

Bsp.: $S = 700$; $f(0) = 4$; $f(1) = 8$; $f(t) = \frac{S}{1+\left(\frac{S}{f(0)}-1\right)\cdot e^{-kSt}}$

$$f(1) = \frac{700}{1+\left(\frac{700}{4}-1\right)\cdot e^{-k\cdot 700\cdot 1}} = 8 \Rightarrow k \approx 0{,}001$$

$$f(t) = \frac{700}{1+\left(\frac{700}{4}-1\right)\cdot e^{-0{,}001\cdot 700\cdot t}} = \frac{700}{1+174e^{-0{,}699t}}$$

II. Stochastik

1. Häufigkeitsverteilungen – Beschreibende Statistik

1.1 Arithmetisches Mittel einer Häufigkeitsverteilung (S.348)

Notenspiegel:

„Note“ → Merkmal

$n = 16$ → Anz. Merkmalsausprägungen n

15	14	13	12	11	10	09	08	07	06	05	04	03	02	01	00	→ Merkmalsausprägungen x_i
2	1	0	1	2	4	0	3	2	2	0	3	2	0	1	0	→ absolute Häufigkeiten $H(x_i)$
$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{1}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{1}{23}$	0	→ relative Häufigkeiten $h(x_i)$:

Häufigkeitsverteilung

$$\boxed{h(x_i) = \frac{H(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} H(x_i)}}$$

Arithmetisches Mittel $\hat{=}$ Durchschnitt

… mit absoluten Häufigkeiten

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot H(x_1) + \dots + x_n \cdot H(x_n)}{H(x_1) + \dots + H(x_n)} = \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot H(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} H(x_i)}}$$

… mit relativen Häufigkeiten

$$\bar{x} = x_1 \cdot h(x_1) + \dots + x_n \cdot h(x_n) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot h(x_i)}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h(x_i) = 1 \right)$$

1.2 Klassieren von Daten (S. 334)

- Bei Häufigkeitsverteilungen kann man Merkmalsausprägungen zu Klassen zusammenfassen, damit eine optische Darstellung aussagekräftiger wird.
- Bei der Berechnung von $\bar{x}$ werden die Klassenmitten (näherungsweise) als x_i herangezogen.
- Ergebnisse auf der Klassengrenze werden der unteren Klasse zugeordnet.

Bsp.:

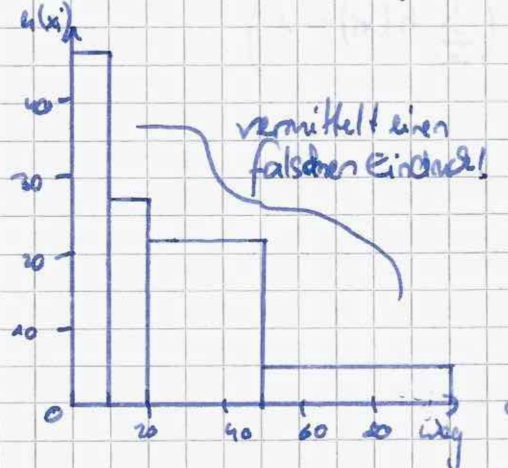
Reaktionszeit	$1{,}00 \le t < 1{,}05$	$1{,}05 \le t < 1{,}10$	$1{,}10 \le t < 1{,}15$	$1{,}15 \le t < 1{,}20$	$1{,}20 \le t < 1{,}25$	$1{,}25 \le t < 1{,}30$
$H(x_i)$	2	3	5	6	3	1
$h(x_i)$	0,1	0,15	0,25	0,3	0,15	0,05

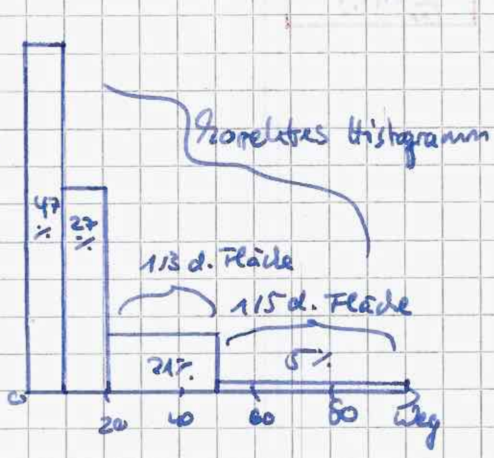
Praktischer Mittelwert: $\bar{x} \approx 0{,}1 \cdot 1{,}025 + 0{,}15 \cdot 1{,}075 + \ldots = 1{,}145$

Unterschiedlich breite Klassen werden zeichnerisch nicht als Säulendiagramme, sondern als Histogramme dargestellt.

Bsp.:

Weg zum Arbeitsplatz	$0 \le l < 10$	$10 \le l < 20$	$20 \le l < 50$	$50 \le l < 100$
$h(x_i)$	0,47	0,27	0,21	0,05





Histogramme verrechnen die Klassenbreite mit den Werten $h(x_i)$ so, dass ein angemessener Eindruck entsteht. Auf eine y-Achse wird verzichtet.

1.3 Empirische Standardabweichung – Streuung (S. 361)

Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert einer Häufigkeitsverteilung.

Die empirische Standardabweichung ist das arithmetische Mittel der Abweichungen vom arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung:

$$\bar{s} = \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot h(x_1) + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot h(x_n)} = \boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((x_i - \bar{x})^2 \cdot h(x_i) \right)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot h(x_i) \right) - \bar{x}^2}}$$

Merkmalswert

arithm. Mittel

relative Häufigkeit

quadrieren, um Vorzeichen zu entfernen

Wurzel ziehen

1.4 Wiederholung (S.377)

Zufallsversuche liefern ein zufallsabhängiges **Ergebnis**.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsversuches nennt man **Ergebnismenge S**.

Laplace-Versuche ordnen jedem möglichen Ergebnis dieselbe Wahrscheinlichkeit zu.

Bsp.: Laplace-Versuch: Würfel: $S=\{1;2;3;4;5;6\}$; Münze: $S=\{K;Z\}$

anderer Versuch: Heftzwecke: $S=\{\perp ; \top\}$

Relative Häufigkeiten eines bereits durchgeführten Versuches lassen bei hinreichend großer Versuchszahl auf die **Wahrscheinlichkeit** schließen (**empirisches Gesetz der großen Zahlen**).

Hat ein Ergebnis eines Versuchs die Wahrscheinlichkeit $P(E)$, erwartet man für eine große Versuchszahl n, dass E etwa $n \cdot P(E)$ mal auftritt (**Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit**).

Einzelne Ergebnisse eines Versuchs können zu **Ereignissen (Ereignismengen)** zusammengefasst werden: $E_{\text{gerade Augenzahl}} = \{\underbrace{2;4;6}_{a_1\ a_2\ a_3}\}$

Elementare Summenregel:

$$\boxed{P(E) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i} \left(= P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \right)$$

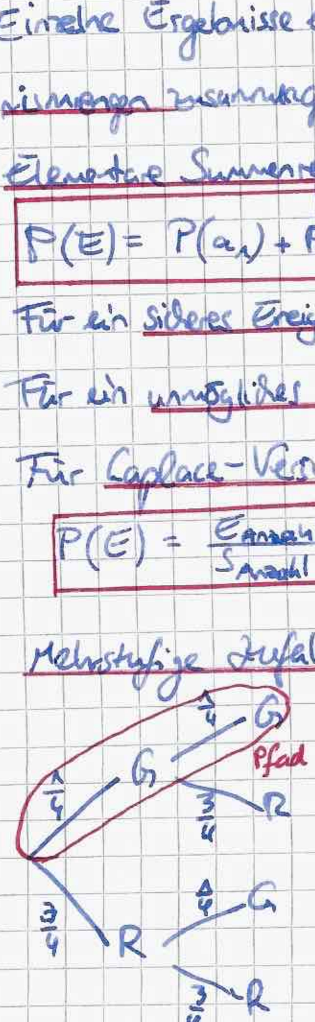
Für ein **sicheres Ereignis** E gilt: $\boxed{P(E) = 1}$.

Für ein **unmögliches Ereignis** E gilt: $\boxed{P(E) = 0}$, falls E kein Ergebnis aus S enthält.

Für **Laplace-Versuche** gilt: $\boxed{P(E) = \frac{E_{\text{Anzahl}}}{S_{\text{Anzahl}}}}$

Ist $\overline{E}$ das Gegenereignis zu E, gilt die **Komplementärregel**: $\boxed{P(E) + P(\overline{E}) = 1}$

Mehrstufige Zufallsversuche werden in **Baumdiagrammen** dargestellt.



Pfade führen zu **Ergebnissen**. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist das Produkt der Pfadwahrscheinlichkeiten (**Pfadmultiplikationsregel**).

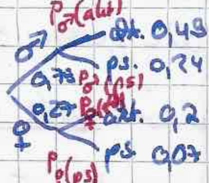
Ereignisse mit mehreren Ergebnissen haben als Wahrscheinlichkeit die addierten Pfadwahrscheinlichkeiten (**Pfadadditionsregel**)

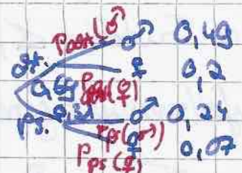
1.5 EXKURS: Bedingte Wahrscheinlichkeiten – Satz von Bayes

<u>Vierfeldertafeln</u> sind eine alternative Darstellungsform zu Baumdiagrammen.

	♂	♀	
aktiv	57	23	80
passiv	28	8	36
	85	31	116

	♂	♀	
aktiv	0,49	0,2	0,69
passiv	0,24	0,07	0,31
	0,73	0,27	1



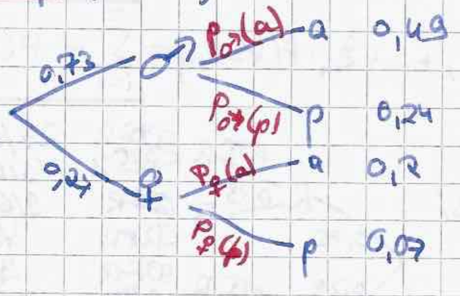


Können bei einem Zufallsversuch die Ereignisse A und B eintreten, so heißt die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung, dass B bereits eingetreten ist, die <u>durch B bedingte Wahrscheinlichkeit von A</u>.

Man schreibt: $\boxed{P_B(A)}$

Es gilt: $$\boxed{P_B(A) = \frac{\overbrace{P(A \wedge B)}^{\text{gesamte Pfadwahrscheinlichkeit}}}{P(B)}}$$

<u>Bsp.</u> (s. oben):



$$\left.\begin{aligned} P_{♂}(a) &= \frac{P(♂a)}{P(♂)} = \frac{0,49}{0,73} = 0,67 \\ P_{♂}(p) &= \frac{P(♂p)}{P(♂)} = \frac{0,24}{0,73} = 0,33 \end{aligned}\right\} 1$$

$$\left.\begin{aligned} P_{♀}(a) &= \frac{P(♀a)}{P(a)} = \frac{0,2}{0,27} = 0,74 \\ P_{♀}(p) &= \frac{P(♀p)}{P(p)} = \frac{0,07}{0,27} = 0,26 \end{aligned}\right\} 1$$

2. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2.1 Zufallsgröße – Erwartungswert einer Zufallsgröße (S.386)

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis der Ergebnismenge S eines Zufallsversuchs genau eine reelle Zahl z_i zuordnet, heißt Zufallsgröße.

Eine Funktion P, die jedem Ereignis einer Zufallsgröße $(X = z)$ genau eine Wahrscheinlichkeit $(P(X=z))$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

Kann eine Zufallsgröße X die Werte $z_1, \dots, z_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X=z_1), \dots, P(X=z_m)$ annehmen, so heißt der zu erwartende Mittelwert $E(X)$ oder μ der Verteilung Erwartungswert der Zufallsgröße X.

Es gilt: $\mu = E(X) = \mu = z_1 \cdot P(X=z_1) + \dots + z_m \cdot P(X=z_m) = \boxed{\sum_{i=1}^{m} z_i \cdot P(X=z_i)}$

Bsp.:

3-maliges drehen eines Glücksrades;
1 mal blau: 1 € Gewinn
2 mal blau: 3 € Gewinn
3 mal blau: 6 € Gewinn
Einsatz: 1 €

X: Gewinn in € ⟹ Zufallsgröße

S	z	$P(X=z)$ ↳ Wahrscheinlichkeitsverteilung	$z \cdot P(X=z)$
0	−1	27/64	$(-1) \cdot 27/64$
1	0	$3 \cdot 9/64 = 27/64$	$0 \cdot 27/64$
2	2	$3 \cdot 3/64 = 9/64$	$2 \cdot 9/64$
3	5	1/64	$5 \cdot 1/64$

S ⇓ mögliche Ergebnisse des Zufallsversuches

z ⇓ mögliche Werte, die X annehmen kann

$P(X=z)$ ⇓ Wahrscheinlichkeit, dass X z annimmt

$$\mu = E(X) = -\frac{27}{64} + \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = -\frac{1}{16} \Rightarrow \text{Erwartungswert}$$

Im Schnitt sind $\frac{1}{16}$ € Verlust zu erwarten.
Das Spiel lohnt sich nicht.

2.2 Binomialverteilung

2.2.1 Bernoulli-Ketten (S.391)

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Erfolg und Misserfolg) heißt Bernoulli-Versuch. p ist die Erfolgs-, q die Misserfolgswahrscheinlichkeit.

Wird ein Bernoulli-Versuch n-Mal durchgeführt und ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für Erfolg und Misserfolg nicht, so spricht man von einem n-stufigen Bernoulli-Versuch oder einer Bernoulli-Kette der Länge n.

Man betrachtet die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Erfolge angibt.

Zusammenfassung:

Bernoulli-Versuch: $S = \{E; \bar{E}\}$; $p = P(E)$; $q = 1 - p$

Bernoulli-Kette: n-malige Durchführung eines Bernoulli-Versuches

$$p_1, p_2, \ldots, p_n = p$$

X: Anzahl der Erfolge; $z \in \{0, 1, \ldots, n\}$

2.2.2 Binomialkoeffizienten – Bernoulli-Formel (S.395)

Für natürliche Zahlen n und k mit $k \leq n$ heißt

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1} = \boxed{\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ („n über k")

Dieser gibt an, wie viele Pfade einer n-stufigen Bernoulli-Kette dafür stehen, dass die Anzahl der Erfolge k wird.

Ferner gilt: $\boxed{\binom{n}{0}=1}$ (x! „x Fakultät": Anzahl der Möglichkeiten, x Elemente anzuordnen)

Will man einen Pfad einer Bernoulli-Kette berechnen, ist dieser: $p^k\cdot q^{n-k} = p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

Daraus folgt für eine Bernoulli-Kette der Länge n, $n \in \mathbb{N}$, mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p die Bernoulli-Formel

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}$$, wobei die Zufallsgröße X die Erfolgszahl k mit $k \leq n$ angibt.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kann eine Zufallsgröße X die Werte $0, 1, \ldots, n$ annehmen und gilt für die Wahrscheinlichkeiten $P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, dann heißt X binomialverteilte Zufallsgröße und die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung Binomialverteilung.

Ändern sich die Wahrscheinlichkeiten mit zunehmender Stufe sehr geringfügig, kann man näherungsweise einen Binomialansatz benutzen.
(Bsp.: Hohes Verhältnis von Stichprobe und Gesamtheit, wenig Kugeln werden aus einer Urne mit sehr vielen Kugeln gezogen.)

Herleitung des Binomialkoeffizienten am Beispiel von $\binom{6}{2}$/$\binom{6}{3}$/$\binom{6}{4}$:

Es gibt 6 Mglk., 1 Erfolg anzuordnen: OXXXXX; XOXXXX; …

Es gibt $6\cdot 5$ Mglk., 2 Erfolge anzuordnen: OOXXXX, OXOXXX; …

Es gibt immer 2 Mglk., davon einen Erf. anz.: O_1O_2XXXX; O_2O_1XXXX

Also gibt es doppelte Mglkk., die entfernt werden müssen: $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$

Für $\binom{6}{3}$ stellt man fest: $\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}$; $\binom{6}{4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2}$

Man erweitert: $\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\boxed{\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}$; $\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\boxed{\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}}$; $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\boxed{\frac{2\cdot1}{2\cdot1}}$

Vereinfacht: $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot4!}$ $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot3!}$ $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\cdot2!}$

Allgemein: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

2.3 Erwartungswert einer Binomialverteilung (S. 406)

Für den Erwartungswert $E(X)$ der binomialverteilten Zufallsgröße

X: Anzahl der Erfolge gilt:

$$\boxed{\mu = E(X) = n \cdot p}$$

($n \hat{=}$ Stufenzahl
$p \hat{=}$ Erfolgswahrscheinlichkeit)

Maximum einer Binomialverteilung

Für das Maximum $k_{max} \in \mathbb{N}$ einer Binomialverteilung gilt:

$$\boxed{\mu - (1-p) \leq k_{max} \leq \mu + p}$$

($p \hat{=}$ Erfolgswahrscheinlichkeit
$1-p \hat{=}$ Misserfolgswahrscheinlichkeit)

Bsp.: $n = 10$; $p = \frac{2}{3}$

$\mu = n \cdot p = 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

$\frac{20}{3} - \frac{1}{3} \leq k_{max} \leq \frac{20}{3} + \frac{2}{3}$; $k_{max} \in \mathbb{N}$

$k_{max} = \frac{21}{3} = 7$

Bsp.: $n = 20$; $p = \frac{2}{3}$

$\mu = n \cdot p = 20 \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{3}$

$\frac{40}{3} - \frac{1}{3} \leq k_{max} \leq \frac{40}{3} + \frac{2}{3}$

$\frac{39}{3} \leq k_{max} \leq \frac{42}{3}$

$k_{max} = 13 \lor k_{max} = 14$

2.4 Anwendungen der Binomialverteilung

2.4.1 Auslastungsmodell – Kumulierte Binomialverteilung (S. 410)

Für eine n-stufige Bernoulli-Kette mit X: Anzahl der Erfolge heißen die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k)$ mit $0 \leq k \leq n;\ k \in \mathbb{N}$ eine kumulierte Binomialverteilung: $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)$

n Personen üben im Mittel m Minuten pro Stunde eine Tätigkeit aus. Sofern die Personen dies unabhängig voneinander tun, ist folgender Binomialansatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass k Personen gleichzeitig diese Tätigkeit ausüben, zulässig:

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \underbrace{\left(\frac{m}{60}\right)^k}_{\text{Wahrscheinlichkeit, dass eine Person Tätigkeit ausübt}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{m}{60}\right)^{n-k}}_{\text{" nicht ausübt}}}$$

Bsp.: 2 Fahrkartenautomaten; pro Stunde ziehen 50 Personen eine Fahrkarte; das dauert im Mittel 1 Minute

Mit welcher Wahrscheinlichkeit genügen 2 Automaten?

X: Anzahl Personen an den Automaten; X ist binomialverteilt
(Personen sind unabhängig voneinander; es gibt keine Stoßzeiten.)
$n = 50 \quad p = \frac{1}{60}$

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} P(X=i) = \sum_{i=0}^{2} \binom{50}{i} \left(\frac{1}{60}\right)^i \cdot \left(1-\frac{1}{60}\right)^{50-i} \approx 0{,}9492$$

Um wie viel würde sich dies mit einem zusätzlichen Automaten verbessern?

$$P(X \leq 3) - P(X \leq 2) \approx 0{,}0411$$

Wie viele Automaten braucht man, wenn diese bei 125 Personen zu mindestens 95 % ausreichen sollen? $n = 125$

$$P(X \leq k) \geq 0{,}95 \Rightarrow \text{GTR-Intersection: } k \geq 5$$
$$P(X \leq 5) \approx 0{,}9812$$

Ergänzung: Wenn X: Anzahl bedienter Kunden, dann ist die Wahrscheinlichkeit für wartende Kunden:

$$\boxed{P(X > k) = 1 - P(X \leq k)}$$ ← Anwendung der Komplementärregel

2.4.2 Kugel-Fächer-Modell (S. 415)

Gegeben sind n Kugeln / Rosinen / Geburtstage etc., die zufällig auf f Fächer / Brötchen / Tage verteilt werden.

Zufallsversuche dieser Art können als n-stufige Bernoulli-Ketten mit $\boxed{p=\frac{1}{f}}$ gedeutet und einem Binomialansatz gelöst werden.

So berechnet man, mit welcher Wahrscheinlichkeit auf ein beliebiges Fach/Brötchen/einen Tag 0, 1, 2, ..., n Kugeln/Rosinen/Geburtstage verteilt werden: $\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{f}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{f}\right)^{n-k}}$

X: Anzahl Kugeln in beliebigem Fach/spezifischem Fach

p kann als „Trefferwahrscheinlichkeit" gedeutet werden. (n = 8 Enten, 10 Jäger ⇒ $p=\frac{1}{10}$ „Trefferwahrsch.")

Aussagen über ein beliebiges Fach können für alle Fächer verallgemeinert werden: Ein Fach ist bspw. mit $P(X=0) =$ 20% leer, also sind 20% aller Fächer leer, also sind (wenn $f=10$) 2 Fächer leer (Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit).

Das $\frac{1}{e}$-Gesetz

Werden n Kugeln zufällig auf n Fächer verteilt, bleiben ca. 37% der Fächer leer, ca. 37% enthalten genau eine und ca. 26% mehr als eine Kugel.

$$P(X=0) = \binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^0\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-0} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$
$$P(X=1) = \binom{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \approx \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$
$$P(X\geq 2) \approx 1-2\cdot\frac{1}{e} \approx 0{,}26$$

, da $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Bsp.: 60 Druckfehler auf 400 Seiten; $n=60$; $f=400$; $p=\frac{1}{400}$;
X: Anzahl Druckfehler pro Seite; X ist binomialverteilt

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Seite mit mindestens 2 Druckfehlern aufzuschlagen?

$$P(X\geq 2) = \sum_{k=2}^{60}\left(\binom{60}{k}\left(\frac{1}{400}\right)^k\cdot\left(\frac{399}{400}\right)^{60-k}\right) \approx 0{,}01$$

Wie viele Seiten sind fehlerfrei?

$$P(X=0) = \binom{60}{0}\cdot\left(\frac{1}{400}\right)^0\cdot\left(\frac{399}{400}\right)^{60} \approx 0{,}8605$$

$f\cdot P(X=0) = 400\cdot 0{,}8605 \approx 344$ Seiten sind fehlerfrei.

Bsp.: 100 Personen; Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat mindestens 1 Person am 9. März Geburtstag?; $f=365$; $p=\frac{1}{365}$; X: Anzahl Geburtstage am 9. März
X ist binomialverteilt

$P(X\geq 1) = 1-P(X=0)$ ⇐ Komplementärregel

$= 1-\binom{100}{0}\left(\frac{1}{365}\right)^0\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{100} \approx 0{,}2399$

Mit $n=365$ Personen:

Da $n=f$, gilt das $\frac{1}{e}$-Gesetz: $P(X\geq 1) = 1-P(X=0) \approx 1-0{,}37 \approx 0{,}63$

3. Beurteilende Statistik (S. 425)

Münzwurf: $p=0,5$; X: Anzahl Wappen; X ist binomialverteilt

n	μ	$P(X=\mu)$
100	50	0,08
200	100	0,06
400	200	0,04

(n: $\cdot 2$, $\cdot 2$; gesamt $\cdot 4$ — μ: $\cdot 2$, $\cdot 2$; gesamt $\cdot 4$ — P: $\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$; gesamt $\cdot \frac{1}{2}$)

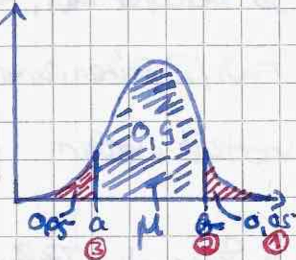
($\Rightarrow$ Bei Vervierfachung der Versuchszahl halbiert sich die Wahrscheinlichkeit, bei Verdopplung ver-$\frac{1}{\sqrt{2}}$-facht sie sich.)

Intervalle, die zum Erwartungswert μ symmetrisch liegen und 90% der Ergebnisse beinhalten

↳ s. Sigma-Umgebungen

n	μ	Intervall	$P(a \le \mu \le b) \approx 0,9$	Länge d. Intervalls
100	50	[42; 58]	0,911	16
200	100	[89; 111]	0,896	22
400	200	[184; 216]	0,901	32

(n: $\cdot 2$, $\cdot 2$; gesamt $\cdot 4$ — μ: $\cdot 2$, $\cdot 2$; gesamt $\cdot 4$ — Länge: $\cdot\sqrt{2}$, $\cdot\sqrt{2}$; gesamt $\cdot 2$)



Es gilt: $P(X \ge b) = 0,05$ und $a = b - \mu$, da:

$$P(a \le \mu \le b) = 1 - 2\cdot P(X \ge b) = 1 - 2\cdot 0,05 = 0,9$$

(Bei Vervierfachung von n verdoppelt sich die Intervalllänge, bei Verdopplung ver-$\sqrt{2}$-facht sie sich.)

Das Histogramm einer Binomialverteilung hat eine Glockenform. Mit wachsendem n wird das Histogramm breiter, flacher und symmetrischer.

Für $p \to 0$ und $p \to 1$ wird das Histogramm schmaler, höher und asymmetrischer.

3.1 Binomialverteilung für große Stufenzahlen

3.1.1 Standardabweichung (S. 428)

Gegeben ist eine n-stufige Bernoulli-Kette mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Die Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge hat die Standardabweichung

$$\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\,.$$

(Für andere, nicht binomialverteilte Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt:

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_m - \mu)^2 \cdot P(X = x_m)}$$

Dies ist eine Anwendung der empirischen Standardabweichung $\bar{s}$.)

Mit zunehmender Stufenzahl n nimmt auch die Streuung σ zu.

3.1.2 Sigma-Regeln (S. 432)

Für eine n-stufige Bernoulli-Kette gilt:

Zum Erwartungswert μ symmetrische Intervalle der Form

$[\mu - k\cdot\sigma ; \mu + k\cdot\sigma]$ heißen Sigma-Umgebungen oder

σ-Umgebungen von μ.

Falls $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung), gilt näherungsweise:

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$

$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$

$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$

ⓐ $P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$

$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$

$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Man schreibt auch: In 90% der Fälle gilt: $|X-\mu| \le 1{,}64$

Ist eine Sigma-Umgebung zu bestimmen, ist darauf zu achten, dass die Intervallgrenzen $\in \mathbb{N}$ sind. Je nach Aufgabenstellung sind die Grenzen so zu runden, dass ein symmetrisches oder zu μ asymmetrisches Intervall entsteht. In jedem Falle sollte das Intervall möglichst nah an 90%, 95%, ... heranreichen (z.B. 89,...% oder 91,...%), wenn die Aufgabenstellung nichts anderes verlangt (mindestens ... %).

Bsp.: X: Anzahl Wappen beim Münzwurf ; $n = 400$; $p = 0{,}5$

$\mu = 0{,}5 \cdot 400 = 200 \quad \sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}5^2} = \sqrt{100} = 10$

In welchem Intervall liegt die Anzahl der Wappen zu 90%? ⓐ

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$

$\mu - 1{,}64\sigma = 200 - 1{,}64 \cdot 10 = 183{,}6$

$\mu + 1{,}64\sigma = 200 + 1{,}64 \cdot 10 = 216{,}4$

Probe mit TR:
$P(183 \le X \le 217) \approx 0{,}9200$
$P(184 \le X \le 216) \approx 0{,}9012$

Da es näher an 90%, lautet das gesuchte (symmetrische) Intervall:

$[184 ; 216]$. Falls asymmetrische Intervalle erlaubt sind:

$P(183 \le X \le 216) \approx 0{,}9106$

$P(184 \le X \le 217) \approx 0{,}9106$

Kein asymmetrisches Intervall liegt näher an 90%, also bleibt die Lösung $[184 ; 216]$.

3.2 Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe

3.2.1 Schätzung zu erwartender absoluter Häufigkeiten (S. 436)

Ergebnisse n-stufiger Bernoulli-Ketten können auf 2 Arten prognostiziert werden:

Punktschätzung: Angabe, welchen Wert die Zufallsgröße X voraussichtlich
= Erwartungswert annehmen wird. Entspricht dem Erwartungswert μ.

Intervallschätzung: Angabe, in welchem Intervall der Wert der Zufallsgröße
σ-Umgebungen X mit großer Wahrscheinlichkeit liegen wird. Diese Wahrscheinlichkeit heißt Sicherheitswahrscheinlichkeit. Für typische Werte wie 90%, 95%, ... können σ-Umgebungen zur Intervallschätzung herangezogen werden.

Man sagt: In 90% der Fälle gilt ...
Bei 90% der Durchführungen des Versuches wird das Ergebnis ... sein. (Häufigkeitsinterpretation)

→ Intervallschätzungen geben an, wie das Ergebnis einer Stichprobe voraussichtlich ausfallen wird, sie sind folglich ein Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe.

Bsp: Anteil Linkshänder in der Gesamtheit: $p = 0{,}1$
Stichprobenumfang: $n = 1000$
$\Big\}\ \sigma = \sqrt{90} \approx 9{,}49$

Punktschätzung: $\mu = 0{,}1 \cdot 1000 = 100$ Personen der Stichprobe werden Linkshänder sein.

Intervallschätzung (mit 90% Sicherheitswahrscheinlichkeit): $P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$

$\mu - 1{,}64\sigma = 100 - 1{,}64 \cdot 9{,}49 \approx 84{,}44$
$\mu + 1{,}64\sigma = 100 + 1{,}64 \cdot 9{,}49 \approx 115{,}56$

$(P(84 \le X \le 116) \approx 0{,}9183)$
$P(85 \le X \le 115) \approx 0{,}8980 \Rightarrow [85; 115]$

In 90% der Stichproben werden 85 bis 115 Personen Linkshänder sein.

3.2.2 Schätzung zu erwartender relativer Häufigkeiten (S. 436)

Ähnlich wie zur absoluten Häufigkeit X lassen sich Schätzungen zur relativen Häufigkeit $\frac{X}{n}$ angeben:

Punktschätzung: Angabe, welchen Wert die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ voraussichtlich annehmen wird. Entspricht der Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Intervallschätzung: Anstatt σ-Umgebungen von μ zu betrachten, betrachtet man σ-Umgebungen von p:

$$|X-\mu| \le 1{,}96\sigma \quad |:n$$
$$\left|\frac{X}{n}-\frac{\mu}{n}\right| \le 1{,}96\frac{\sigma}{n}$$
$$\left|\frac{X}{n}-p\right| \le 1{,}96\frac{\sigma}{n}$$

Das Verständnis von σ-Umgebungen kann also wie folgt erweitert werden:

Falls $\sigma > 3$, gilt näherungsweise:

$$\boxed{\begin{aligned} P\left(p-1{,}64\frac{\sigma}{n} \le \frac{X}{n} \le p+1{,}64\frac{\sigma}{n}\right) &\approx 0{,}90 \\ P\left(p-1{,}96\frac{\sigma}{n} \le \frac{X}{n} \le p+1{,}96\frac{\sigma}{n}\right) &\approx 0{,}95 \\ P\left(p-2{,}58\frac{\sigma}{n} \le \frac{X}{n} \le p+2{,}58\frac{\sigma}{n}\right) &\approx 0{,}99 \end{aligned}}$$

Entsprechend auch für 1σ-, 2σ-, 3σ-, $k\sigma$-Umgebungen

	Zusammenfassung: absolute..	relative Häufigkeiten
Punktschätzung	μ	p
Intervallschätzung	σ-Umgebungen von μ	σ-Umgebungen von p
Beispiel	$\mu-k\sigma \le X \le \mu+k\sigma$	$p-k\frac{\sigma}{n} \le \frac{X}{n} \le p+k\frac{\sigma}{n}$

Abweichungen

- Ergebnisse X bzw. $\frac{X}{n}$, die außerhalb der $2{,}58\sigma$-Umgebung liegen: hochsignifikante Abweichungen
- Ergebnisse X bzw. $\frac{X}{n}$, die außerhalb der $1{,}96\sigma$-Umgebung liegen: signifikante Abweichungen
- Ergebnisse X bzw. $\frac{X}{n}$, die innerhalb der $1{,}96\sigma$-Umgebung liegen: verträgliche Ergebnisse

p stammt aus tatsächlichem Wahlergebnis $\Leftarrow$ **Bsp.**: $n = 102713$ CDU: $p = 0{,}352$ SPD: $p = 0{,}342$
FDP: $p = 0{,}098$ Grüne: $p = 0{,}081$ Linke: $0{,}087$ Wie fällt eine Stichprobe zu 95% aus?

CDU: $\sigma \approx 153{,}06$ $\quad p-1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}3491$ $\quad p+1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}355 \Rightarrow [34{,}91\%; 35{,}5\%]$
SPD: $\sigma \approx 152{,}03$ $\quad p-1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}3391$ $\quad p+1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}3449 \Rightarrow [33{,}91\%; 34{,}49\%]$
FDP: $\sigma \approx 94{,}44$ $\quad p-1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}0962$ $\quad p+1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}0998 \Rightarrow [9{,}62\%; 9{,}98\%]$
Grüne: $\sigma \approx 87{,}44$ $\quad p-1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}0799$ $\quad p+1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}0827 \Rightarrow [7{,}99\%; 8{,}27\%]$
Linke: $\sigma \approx 90{,}32$ $\quad p-1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}0853$ $\quad p+1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}0887 \Rightarrow [8{,}53\%; 8{,}87\%]$

Tatsächliches Stichprobenergebnis:

$$\left.\begin{aligned} &\text{CDU: } 35{,}5\% \in [34{,}91\%; 35{,}5\%] \\ &\text{SPD: } 34{,}0\% \in [33{,}91\%; 34{,}49\%] \end{aligned}\right\} \text{verträgliche Ergebnisse}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{FDP: } 10{,}5\% \notin [9{,}62\%; 9{,}98\%] \\ &\text{Grüne: } 8{,}5\% \notin [7{,}99\%; 8{,}27\%] \\ &\text{Linke: } 7{,}5\% \notin [8{,}53\%; 8{,}87\%] \end{aligned}\right\} \text{(hoch?) signifikante Abweichungen}$$

(ggf. mit $2{,}58\sigma$-Umgebung nachprüfen)

3.3 Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit

3.3.1 Schätzen der Erfolgswahrscheinlichkeit – Konfidenzintervalle (S. 442)

Aus gegebenen Werten für die absolute Häufigkeit X oder die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ ist ein Rückschluss auf die Erfolgswahrscheinlichkeit p möglich. Dies ist eine Schätzung verträglicher Ergebnisse für p (95% / $1{,}96\sigma$), das bestimmte Intervall heißt Vertrauens- oder Konfidenzintervall.

Da die Erfolgswahrscheinlichkeit den Anteil der Gesamtheit angibt (Häufigkeitsinterpretation), nennt man das Verfahren Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit.

Es gilt: $P(\mu - z\sigma \leq X \leq \mu + z\sigma)$

$\Rightarrow \quad |X-\mu| \leq z \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

und $\quad \left|\frac{X}{n} - p\right| \leq z \cdot \frac{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}{n}$

Für ein 95%-Konfidenzintervall gilt:

$\boxed{|X-\mu| \leq 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$, falls eine absolute Häufigkeit gegeben ist;

$\boxed{\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}{n}}$ falls eine relative Häufigkeit gegeben ist.

Bsp.: $n = 1000$; $\frac{X}{n} = 0{,}518$; $\gamma = 90\%$ ← Sicherheitswahrscheinlichkeit

$|0{,}518 - p| \leq 1{,}64 \cdot \frac{\sqrt{1000p(1-p)}}{1000}$

Konfidenzintervall

$0{,}4921 \leq p \leq 0{,}5438 \Rightarrow [0{,}4921; 0{,}5438]$

3.3.2 Notwendiger Stichprobenumfang (S. 447)

Will man für eine gegebene maximale Abweichung von der Erfolgswahrscheinlichkeit mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit den notwendigen Stichprobenumfang bestimmen, so muss die σ-Umgebung der Erfolgswahrscheinlichkeit kleiner gleich der gegebenen maximalen Abweichung sein: $1{,}96\,\frac{\sigma}{n} \leq d \Rightarrow 1{,}96\,\frac{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}{n} \leq d$

$1{,}96\,\frac{\sqrt{np(1-p)}}{d} \leq n \Rightarrow n^2 \geq 1{,}96^2\,\frac{np(1-p)}{d^2} \Rightarrow \boxed{n \geq \left(\frac{1{,}96}{d}\right)^2 \cdot p \cdot (1-p)}$

(für $k = 1{,}96$)

Falls die Erfolgswahrscheinlichkeit p unbekannt ist, wird der für σ ungünstigste Fall $p = 0{,}5$ angenommen:

$\boxed{n \geq \left(\frac{1{,}96}{d}\right)^2 \cdot 0{,}25}$, falls p unbekannt ist.

Bsp.: Abweichung: maximal 3% (zu 95%); $p \approx 20\%$
Welcher Stichprobenumfang ist nötig?

$n \geq \left(\frac{1{,}96}{0{,}03}\right)^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8$

$n \geq 682{,}951 \Rightarrow n \approx 683$

Falls p unbekannt:

$n \geq \left(\frac{1{,}96}{0{,}03}\right)^2 \cdot 0{,}25$

$n \geq 1067{,}11 \Rightarrow n \approx 1067$

Alternative Aufgabenstellung: $n = ?$; $p = \frac{1}{4}$; mind. 1 Mal Erfolg (zu 90%).

$P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \Rightarrow 1 - P(X=0)$
$= 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0{,}9$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0{,}1 \Rightarrow n \geq 8{,}004$

Man muss mindestens 9 Mal den Versuch durchführen.

III. Lineare Algebra – Matrizen

1. Vervielfachung und Addition von Matrizen (S.302)

Eine Zahlentabelle mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ heißt Matrix A

mit m Zeilen und n Spalten, kurz $m \times n$-Matrix. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $m, n \in \mathbb{N}$

Eine Matrix A heißt quadratisch, wenn gilt: $m = n$.

Das r-fache einer Matrix erhält man, indem man jedes Element der Matrix mit r multipliziert: $6 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & 12 & 6 & 30 \\ 18 & 36 & 30 & 18 & 42 \\ 6 & 12 & 24 & 36 & 24 \\ 12 & 18 & 18 & 6 & 30 \end{pmatrix}$

Matrizen werden addiert, indem man die einander entsprechenden Elemente addiert: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 9 & 8 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 5 & 2 & 12 \\ 8 & 15 & 13 & 8 & 16 \\ 4 & 5 & 9 & 15 & 9 \\ 6 & 8 & 7 & 3 & 11 \end{pmatrix}$

Dies ist nur möglich, falls die Matrizen dieselbe Gestalt haben, also $m \times n$-Matrizen sind.

Rechengesetze

Kommutativgesetz	$A + B = B + A$
Assoziativgesetz	$(A+B)+C = A+(B+C)$
Nullmatrix, neutrales Element	$A - A = 0$ (Matrix)
gemischtes Assoziativgesetz	$r \cdot (l \cdot A) = (r \cdot l) \cdot A$
1. Distributivgesetz	$(r + l) \cdot A = r \cdot A + l \cdot A$
2. Distributivgesetz	$r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2{,}2 & 2{,}3 & 2{,}6 & 2{,}0 \\ 2{,}2 & 0 & 1{,}8 & 1{,}9 & 2{,}4 \\ 2{,}3 & 1{,}8 & 0 & 2{,}7 & 1{,}7 \\ 2{,}6 & 1{,}9 & 2{,}7 & 0 & 3{,}0 \\ 2{,}0 & 2{,}4 & 1{,}7 & 3{,}0 & 0 \end{pmatrix}$$ Symmetrieachse

symmetrische Matrix (Voraussetzung: $m = n$)

Eine Matrix, die nur aus einer Spalte $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ besteht, heißt m-dimensionaler Spaltenvektor.

Eine Matrix, die nur aus einer Zeile $\underbrace{(a_1 | a_2 | \dots | a_n)}_{| \text{ optional}}$ besteht, heißt n-dimensionaler Zeilenvektor.

2. Multiplikation von Matrizen

2.1 Produkt zweier Matrizen (S. 306)

$$\boxed{A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \\ a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} & a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} \end{pmatrix}}$$

$$(3 \times 2) \cdot (2 \times 2) = (3 \times 2)$$

Die Multiplikation zweier Matrizen ist nur möglich, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix der Anzahl der Spalten der zweiten Matrix entspricht: $\boxed{(l \times m) \cdot (m \times n) = (l \times n)}$

Bsp.: ... für eine Bestellung:

$$\begin{array}{r} \text{Soja} \\ \text{Milchpulver} \\ \text{Vitamine} \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}68 \\ 0{,}22 & 0{,}35 & 0{,}28 \\ 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}04 \end{pmatrix} \\ \text{Mix 1} \quad \text{Mix 2} \quad \text{Mix 3} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \begin{pmatrix} 308 \\ 124{,}5 \\ 17{,}5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Soja} \\ \text{Milchpulver} \\ \text{Vitamine} \end{array}$$

Produktmatrix/ Materialverbrauchsmatrix — Bestellvektor — Bedarfsvektor

... für mehrere Bestellungen:

$$\ldots \cdot \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 200 & 150 & 150 & 250 \\ 150 & 200 & 100 & 200 \\ 100 & 200 & 150 & 100 \end{pmatrix} \\ \text{Bst.1} \ \text{Bst.2} \ \text{Bst.3} \ \text{Bst.4} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 308 & 368{,}5 & 334{,}5 & 375{,}5 \\ 124{,}5 & 155 & 145 & 153 \\ 17{,}5 & 22{,}5 & 20{,}5 & 21{,}5 \end{pmatrix} \\ \text{Bst.1} \ \text{Bst.2} \ \text{Bst.3} \ \text{Bst.4} \end{array} \begin{array}{l} \text{Soja} \\ \text{Milchpulver} \\ \text{Vitamine} \\ \end{array}$$

Bestellmatrix — Bedarfsmatrix

2.2 Rechengesetze für die Multiplikation von Matrizen (S. 306)

Sofern die Matrizenprodukte definiert sind, gilt:

Assoziativgesetz	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Distributivgesetz	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
Distributivgesetz	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
—	$(k \cdot A)(l \cdot B) = (k \cdot l)(A \cdot B)$; $k, l \in \mathbb{R}$

Das Kommutativgesetz gilt im Allgemeinen nicht.

Eine quadratische $n \times n$-Matrix E_n der Form $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ heißt Einheitsmatrix. Alle Elemente $a_{ij} = 1$ mit $i = j$ liegen auf der Hauptdiagonalen der Matrix. Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation.

Für eine $k \times l$-Matrix A gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} E_k \cdot A &= A \\ A \cdot E_l &= A \\ E \cdot E &= E \end{aligned}}$$

Inverses Element

Gibt es zur quadratischen $n \times n$-Matrix A eine quadratische $n \times n$-Matrix B mit

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = E_n}$$

, so heißen A und B zueinander invers. Die zu A inverse Matrix B wird mit A^{-1} bezeichnet.

Bsp. zur Berechnung einer inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = ? \quad ; \quad A \cdot A^{-1} = E_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -4 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} 2y_1 + 1y_2 + 1y_3 &= 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 &= 1 \\ 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} y_1 &= -1 \\ y_2 &= 3 \\ y_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \left| \begin{aligned} 2z_1 + 1z_2 + 1z_3 &= 0 \\ 3z_1 + 2z_2 + 2z_3 &= 0 \\ 1z_1 + 1z_2 + 2z_3 &= 1 \end{aligned} \right| \begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= -1 \\ z_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix ist nur dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren der Matrix linear unabhängig sind, d. h. wenn deren Determinante ungleich 0 ist.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ → linear abhängig mit dem Faktor -1, also existiert keine inverse Matrix.

3. Anwendungsbeispiele

3.1 Codierungen (S.317)

C: Codiermatrix ; C^{-1}: Decodiermatrix

M: Nachricht ; M^* = verschlüsselte Nachricht

$$\boxed{\begin{array}{l} C \cdot M = M^* \\ C^{-1} \cdot M^* = M \end{array}}$$

$C \cdot M = M^*$ ⇐ Codieren einer Nachricht

$C^{-1} \cdot M^* = M$ ⇐ Decodieren einer verschlüsselten Nachricht

Beweis:

$$C \cdot M = M^*$$

$$\underbrace{C^{-1} \cdot C}_{} = E$$

$$E \cdot M = M$$

$$C^{-1} \cdot \underbrace{M^*}_{} = \underbrace{M}_{}$$

Verschlüsseln

Bsp.: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{c} A-Z \\ 1-26 \end{array}$; $\begin{array}{c} \_ \\ 27 \end{array}$ $M \hat{=}$ "MATHE_MACHT_SPASS_"

$$M = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 20 & 8 & 5 & 27 \\ 13 & 1 & 3 & 8 & 20 & 27 \\ 19 & 16 & 1 & 19 & 19 & 27 \end{pmatrix}$$

$$M^* = C \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 1 & 20 & 8 & 5 & 27 \\ 13 & 1 & 3 & 8 & 20 & 27 \\ 19 & 16 & 1 & 19 & 19 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -15 & 2 & -11 & 1 & 0 \\ 167 & 71 & 59 & 132 & 186 & 297 \\ 96 & 51 & 29 & 81 & 102 & 162 \end{pmatrix}$$

Entschlüsseln

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; M^* \text{ s.o.}$$

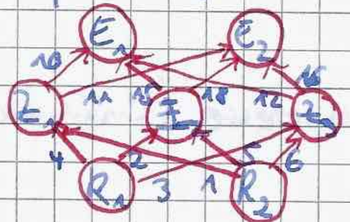
$$C^{-1} \cdot M^* = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -15 & 2 & -11 & 1 & 0 \\ 167 & 71 & 59 & 132 & 186 & 297 \\ 96 & 51 & 29 & 81 & 102 & 162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 20 & 8 & 5 & 27 \\ 13 & 1 & 3 & 8 & 20 & 27 \\ 19 & 16 & 1 & 16 & 19 & 27 \end{pmatrix}$$

$M \hat{=}$ "MATHE_MACHT_SPASS_" ... Wer's glaubt...

3.2 Materialverflechtung (S.311)

Eine grafische Übersicht, aus der hervorgeht, wie die Endprodukte mit den Rohstoffen und Zwischenprodukten mengenmäßig verflochten sind, nennt man Gozintograph.

Bsp.: 2 Stufen; 2 Rohstoffe; 3 Zwischenprodukte; 2 Endprodukte



Mehrere Stufen von Zwischenprodukten sind möglich.

Der Gozintograph ist benannt nach Zepartzat Gozinto (scherzhaft für: „the part that goes into“). Wichtig!1!

Der Gozintograph eines Produktionsprozesses beschreibt dessen mengenmäßige Materialverflechtung. Ein Pfeil $\rightarrow$ beschreibt, wie viel von einer Mengeneinheit eines vorangehenden Stoffes für die Herstellung einer nachfolgenden Mengeneinheit benötigt wird.

Ein Gozintograph kann in Matrizenform dargestellt werden.

Bsp.:

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{array}{c} Z_1\ Z_2\ Z_3 \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array}\begin{array}{c} E_1\ E_2 \\ \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 15 & 18 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{array}{c} E_1\ \ E_2 \\ \begin{pmatrix} 106 & 128 \\ 157 & 197 \end{pmatrix} \end{array}$$

Materialverbrauchsmatrix 1 — Materialverbrauchsmatrix 2 — Produktmatrix

im Allgemeinen schreibt man:

$$\text{von... (Zeile)} \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}, \quad \text{nach... (Spalte)}$$

Eine Bestellung sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 106 & 128 \\ 157 & 197 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{pmatrix} 234 \\ 354 \end{pmatrix}$$

Produktmatrix — Bestellvektor — Bedarfsvektor

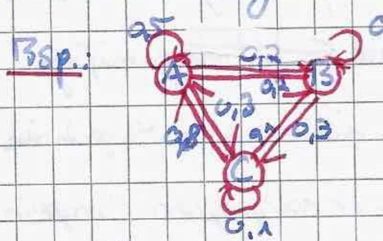
3.3 Austauschprozesse – Stochastische Prozesse (S. 328)

Eine quadratische Matrix P, die nur aus Elementen $0 \le a_{ij} \le 1$ besteht und deren Spaltensummen alle 1 betragen, heißt stochastische Matrix. Eine stochastische Matrix beschreibt einen Austauschprozess.

Das z-fache Produkt einer quadratischen Matrix M mit sich selbst heißt Matrixpotenz M^z mit $z \in \mathbb{N}$.

Ein Übergangsdiagramm veranschaulicht Austauschprozesse (ähnlich wie das Zustandsdiagramm eines endlichen Automaten).

Bsp.:



$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\overbrace{\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}}^{\text{von}}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\Bigg\}\text{nach}$$

von: Spalte
nach: Zeile

Übergangsdiagramm — Übergangsmatrix

Ist ein Startvektor für den Austauschprozess gegeben, bestimmt man die n-te Generation wie folgt:

$$\boxed{\vec{s_n} = P^n \cdot \vec{s_0}}\ ,$$ Generation n = Übergangsmatrix zur Generation n · Startvektor

da: $\vec{s_1} = P \cdot \vec{s_0}$

$\vec{s_2} = P \cdot \underbrace{(P \cdot \vec{s_0})}_{\vec{s_1}} = (P \cdot P) \cdot \vec{s_0} = P^2 \cdot \vec{s_0}$

$\vec{s_3} = P \cdot (\overbrace{P \cdot (P \cdot \vec{s_0})}^{\vec{s_2}}) = P^3 \cdot \vec{s_0}$ usw. usf.

Manche Austauschprozesse nähern sich für große Generationen n einem Grenz- oder Fixvektor $\vec{g}$ an.

Existenz einer Grenzmatrix

Wenn es unter den stochastischen Matrizen $P, P^2, P^3, \dots$ eine Matrix mit mindestens einer Zeile gibt, in der alle Elemente echt positiv (>0) sind, besitzt der Austauschprozess einen Grenzvektor sowie eine Grenzmatrix.

Stabile Grenzverteilung / Fixvektor / Grenzvektor $\vec{g}$:

Gibt an, wie sich ein Austauschprozess langfristig entwickelt:

$$\vec{g} = \lim_{n \to \infty} P^n \cdot \vec{s_0}$$ // Verständnisformel, dient nicht zur Berechnung!

Grenzmatrix G

Die Grenzmatrix ist die Übergangsmatrix der stabilen Grenzverteilung. Da sich nichts mehr verändert (Fix-Vektor), sind die Spalten der Grenzmatrix identisch. Sie entspricht:

$$G = \lim_{n \to \infty} P^n$$ // dient ebenfalls nur zum Verständnis

Berechnung des Grenzvektors $\vec{g}$

P sei eine stochastische Matrix mit der stabilen Grenzverteilung $\vec{g}$.

Notwendige Bedingung: $\boxed{P \cdot \vec{g} = \vec{g}}$ Gibt es einen Startvektor $\vec{g}$, der sich nach einer Generation nicht ändert?

Zudem muss die Summe der Komponenten von $\vec{g}$ der Gesamtzahl an Objekten entsprechen: $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots = n}$

Lässt man diese Bedingung weg, erhält man eine allgemeine Grenzverteilung, die das Verhältnis der Objekte beschreibt.

Bsp.: $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad (P \cdot \vec{x} = \vec{x})$

$$\left| \begin{array}{l} 0,5x_1 + 0,2x_2 + 0,8x_3 = x_1 \\ 0,2x_1 + 0,5x_2 + 0,1x_3 = x_2 \\ 0,3x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 = x_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -0,5x_1 + 0,2x_2 + 0,8x_3 = 0 \\ 0,2x_1 - 0,5x_2 + 0,1x_3 = 0 \\ 0,3x_1 + 0,3x_2 - 0,9x_3 = 0 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right| \quad \text{Setze } x_3 = t: \left| \begin{array}{l} x_1 = 2t \\ x_2 = t \end{array} \right| \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$ ⇒ allgemein, kein Sachzusammenhang!

Ferner gilt: $2t + t + t = 2400$
$t = 600$ $\quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 600 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ muss ganzzahlig sein!

Berechnung der Grenzmatrix G

Alle Spalten von G sind identisch und haben die Spaltensumme 1 (stochastische Matrix). Alle Spalten stimmen mit dem Grenzvektor überein, falls gilt:

$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots = 1}$

Bsp.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ (s.o.) $\quad 2t + t + t = 1$
$t = 0,25$ $\quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$

Da $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$, gilt: $G = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$. } G muss quadratisch sein!

Wichtig: Die Gleichung $P \cdot \vec{g} = \vec{g}$ kann grundsätzlich durch die Triviallösung $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ erfüllt werden. Diese ist jedoch keine stabile Grenzverteilung.

3.4 Populationsentwicklungen – zyklische Prozesse (S. 339)

Populationsentwicklungen sind Austauschprozesse, in denen Individuen verschiedene Entwicklungsstadien erreichen können. Sie können sich dabei vermehren oder absterben. Die Übergangsmatrizen sind i.d.R. keine stochastischen Matrizen, denn die Spaltensummen müssen nicht 1 sein.

Ein Austauschprozess hat zyklische Schwankungen und heißt zyklischer Prozess der Länge n, falls gilt: $M^n = k \cdot E$ Übergangsmatrix ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix mit $k \in \mathbb{R}^{>0}$

oder: $M^{n+1} = k \cdot M$

Falls die Übergangsmatrix dann mit der Einheitsmatrix übereinstimmt ($M^n = E$), sprechen wir von einem stabilen zyklischen Prozess der Länge n.

(Dies ist keine stabile Grenzverteilung! Es finden immer noch Übergänge statt!)

Ist für eine Populationsentwicklung eine Übergangsmatrix M der Form

kann auch 4×4, 5×5... sein!

$$\boxed{M = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}}$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}$$

a: Übergang in Stadium 2
b: Übergang in Stadium 3 } Überlebensrate/-wahrscheinlichkeit
c: Übergang zurück in Stadium 1 ⇒ Reproduktionsrate

mit $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ und $c > 0$ gegeben, dann gilt:

> Falls $a \cdot b \cdot c = 1$, bleibt die Population stabil (s.o. $k = 1$).
> Falls $a \cdot b \cdot c > 1$, wächst die Population (s.o. $k > 1$);
> falls $a \cdot b \cdot c < 1$, schrumpft die Population (s.o. $k < 1$)
> um den Faktor $a \cdot b \cdot c$.

auch hier ist die Triviallösung nicht zulässig!

Mit dem Kriterium $\boxed{M \cdot \vec{x} = \vec{x}}$ kann bei zyklischen Prozessen die Stabilität nachgewiesen werden bzw. die sich zyklisch wiederholende Population $\vec{x}$ berechnen. Dies ist von der stabilen Grenzverteilung abzugrenzen. (!)

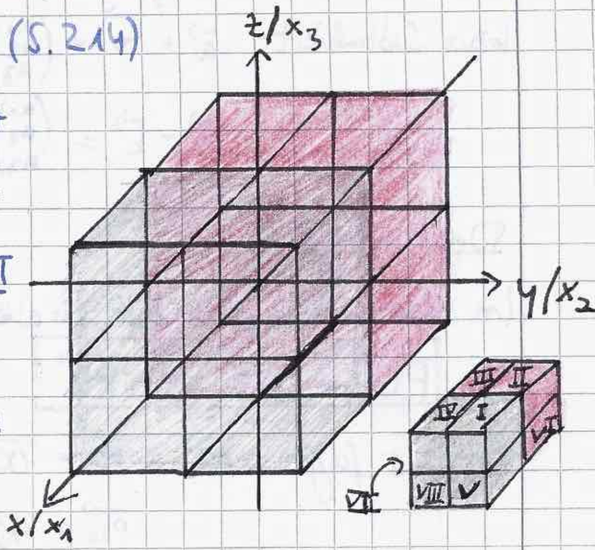
Die Länge n eines zyklischen Prozesses kann an der Übergangsmatrix erkannt werden (falls M eine 3×3-Matrix ist, ist $n = 3$).

IV. Analytische Geometrie

1. Vektorrechnung – Punkte und Vektoren im Raum

1.1 Kartesisches Koordinatensystem (S. 214)

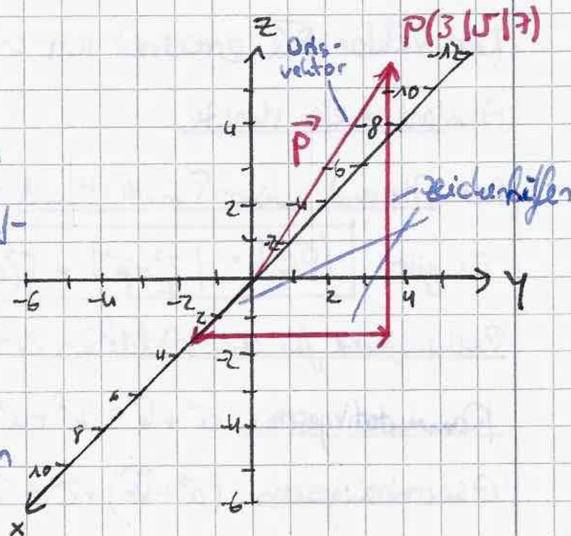
Das kartesische Koordinatensystem besteht aus acht Oktanden. Die Oktanden I–IV liegen oberhalb, die Oktanden V–VIII unterhalb der xy-/x_1x_2-Ebene.



Es gibt drei Koordinatenachsen. Punkte haben drei Koordinaten der Form

$P(x|y|z)$ bzw. $P(x_1|x_2|x_3)$.

1.2 Vektoren (S. 219)



Ein Vektor mit drei Koordinaten ist ein geordnetes Zahlentripel, welches als Spalte geschrieben wird: $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$.

Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullvektor.

Der Vektor, der den Ursprung O auf den Punkt P abbildet, heißt Ortsvektor von P: $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ ① ② $\overrightarrow{\text{Ursprung Punkt}}$ ① ② $\overrightarrow{\text{Anfang Spitze}}$ ① ②

Im Raum stellen Vektoren Pfeile dar, die von einem beliebigen Bezugspunkt ① zu einem Punkt ② verlaufen (angedeutet durch die Spitze).

Sind Pfeile zueinander parallel, gleich lang und gleich orientiert, so sind sie Repräsentanten eines Vektors.

Derjenige Vektor, dessen Repräsentanten entgegengesetzt orientiert sind zum Vektor $\vec{v}$, heißt Gegenvektor zum Vektor $\vec{v}$, man schreibt $-\vec{v}$.

Länge eines Vektors

Unter der Länge eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Länge der Pfeile, die zu diesem Vektor gehören. Statt Länge sagt man: Betrag des Vektors $\vec{a}$. Es gilt:

$\boxed{|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$, ferner gilt: $|\vec{0}| = 0$

1.3 Addition und Subtraktion von Vektoren (S.224)

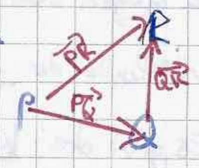
Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden koordinatenweise addiert bzw. subtrahiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Summe}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Differenz}$$

Dreiecksregel

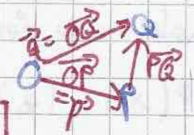
Im Koordinatensystem gilt für alle Punkte P, Q und R:



$$\boxed{\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}}$$

Daraus folgt: $\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{q} - \vec{p}$$



Der Vektor $\vec{PQ}$ errechnet sich wie folgt: $\boxed{\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}}$

Abstand zweier Punkte

Der Abstand zweier Punkte P und Q entspricht der Länge des Vektors $\vec{PQ}$.

Es gilt: $\boxed{|\vec{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + (q_3-p_3)^2}}$

Rechengesetze für die Addition von Vektoren

Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Assoziativgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Neutrales Element: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

Inverses Element: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

1.4 Vervielfachen von Vektoren (S. 228)

Ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ wird mit einer reellen Zahl $t \in \mathbb{R}$ vervielfacht, indem man jede Koordinate von $\vec{v}$ mit t multipliziert.

Das t-fache eines Vektors $\vec{v}$ ist

$$\boxed{t \cdot \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \\ tv_3 \end{pmatrix}}.$$

Falls $t > 0$, so bleibt die Richtung, aber es entsteht die t-fache Länge.

Falls $t < 0$, erhält man den Gegenvektor mit t-facher Länge.

Falls $t = -1$, erhält man den Gegenvektor.

$0 < t < 1$	verkürzt	$-1 < t < 0$	verkürzt (negativ)
$1 < t$	verlängert	$t < -1$	verlängert (negativ)

Rechengesetze für das Vervielfachen von Vektoren

$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

$m \cdot \vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{m \text{ Summanden}}$, falls $m \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{aligned} r \cdot (s \cdot \vec{a}) &= (r \cdot s) \cdot \vec{a} \\ r \cdot (-\vec{a}) &= -r \cdot \vec{a} \\ (r \pm s) \cdot \vec{a} &= r \cdot \vec{a} \pm s \cdot \vec{a} \\ r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} \end{aligned}\right\} r, s \in \mathbb{N}$$

Mittelpunkt einer Strecke

Für den Ortsvektor $\vec{m}$ zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ gilt

$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Ortsvektoren von A und B sind.

Punktspiegelung

Soll ein Punkt P am Punkt Q gespiegelt werden, so hat der Bildpunkt P' den Ortsvektor $\boxed{\begin{aligned} \vec{p'} &= \vec{q} + \vec{PQ} \\ &= \vec{q} + \vec{q} - \vec{p} \end{aligned}}$, wobei $\vec{p}$ und $\vec{q}$ die Ortsvektoren von P und Q sind.

Einheitsvektoren / Normierung eines Vektors

lalala, Wasserschaden..

Ein Einheitsvektor $\vec{a_0}$ hat die Länge $\boxed{|\vec{a_0}| = 1}$.

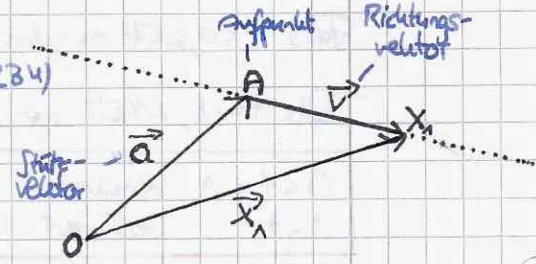
Ein beliebiger Vektor $\vec{a}$ kann durch Normierung zu einem Einheitsvektor werden. Es gilt:

$$\boxed{\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}} \quad \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right)$$

Einheitsvektoren sind z.B. im Zusammenhang mit Geradenparametern anzuwenden.

2 Geraden im Raum

2.1 Parameterdarstellung einer Geraden (S.284)



Sei A ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ und $\vec{v}$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor. Dann bilden die Punkte X mit den Ortsvektoren

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$ eine Gerade g durch den Punkt A.

Man schreibt: $\boxed{\underbrace{g:}_{\text{lies: „mit"}} \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}}$ $\Rightarrow$ Punktrichtungsform

Eine Gerade kann auch durch zwei Punkte im Raum festgelegt werden:

$$\boxed{\begin{aligned} k: \vec{y} &= \vec{a} + l \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{a} + l \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \end{aligned}} \Rightarrow \text{Zweipunkteform}$$

Eine Gerade hat unendlich viele Parameterdarstellungen.

Bsp.:
$$\left.\begin{aligned} g_1: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ g_2: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$ g_1, g_2 etc. beschreiben alle dieselbe Gerade.

Bsp.: Anwendung der Normierung (s.o.)

$$g. \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ Welche Punkte auf g haben vom Aufpunkt den Abstand 3 LE?

Man normiert $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Neue Gerade: $g^*: \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

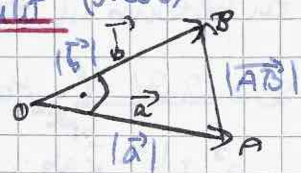
Ortsvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm 1 \cdot \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-2 \\ \sqrt{3}+5 \end{pmatrix}$

Punkte: $P_1(1-\sqrt{3} \,|\, \sqrt{3}-2 \,|\, \sqrt{3}+5) \approx P_1(-0{,}7321 \,|\, -0{,}2679 \,|\, 6{,}7321)$

$P_2(\sqrt{3}-1 \,|\, 2-\sqrt{3} \,|\, -\sqrt{3}-5) \approx P_2(0{,}7321 \,|\, 0{,}2679 \,|\, -6{,}7321)$

3. Winkel im Raum

3.1 Orthogonalität zweier Vektoren – Skalarprodukt (S.250)



Zu zeigen: $\vec{a} \perp \vec{b}$ orthogonal

Die Anwendung des Satzes von Pythagoras ergibt:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$$

Daraus ergibt sich: $0 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Allgemein gilt: Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind zueinander orthogonal, wenn gilt: $\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0}$.

Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann man die Zahl (das Skalar) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ berechnen. Man nennt sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt das Orthogonalitätskriterium

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \quad \underset{\text{gilt vorwärts und rückwärts}}{\Longleftrightarrow} \quad \vec{a} * \vec{b} = 0},$$

Rechengesetze für das Skalarprodukt

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und alle Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$ Kommutativgesetz

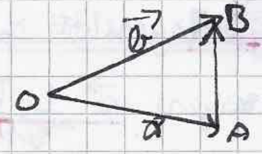
$\vec{a} * (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$ Distributivgesetz

$(r \cdot \vec{a}) * (s \cdot \vec{b}) = (r \cdot s) \cdot (\vec{a} * \vec{b})$

$\vec{a} * \vec{0} = 0$

$\vec{a} * \vec{a} = \vec{a}^2 > 0$, falls $\vec{a} \neq \vec{0}$

3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren (S.256)



Zu berechnen ist der von $\vec a$ und $\vec b$ eingeschlossene Winkel φ „phi". Man geht aus vom Kosinussatz:

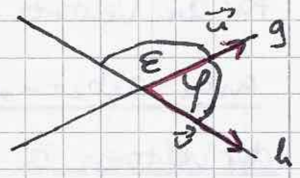
$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma = c^2$$

$$|\vec a|^2 + |\vec b|^2 - 2|\vec a||\vec b| \cdot \cos\varphi = |\overrightarrow{AB}|^2$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec a * \vec b}{|\vec a||\vec b|}$$

Für den Winkel φ, der von den Vektoren $\vec a \neq \vec 0$ und $\vec b \neq \vec 0$ eingeschlossen wird, gilt: $\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec a * \vec b}{|\vec a||\vec b|}}$, mit $0° \leq \varphi \leq 180°$

Schnittwinkel zweier Geraden



Bei zwei sich schneidenden Geraden sind zwei Schnittwinkel, φ und ε, denkbar. Da der Schnittwinkel immer der kleinere Winkel von beiden ist, gilt:

Wenn sich zwei Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec u$ und $\vec v$ schneiden, dann gilt für die Größe des Schnittwinkels φ:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec u * \vec v|}{|\vec u||\vec v|}} \quad \text{mit } 0° \leq \varphi \leq 90°$$

Geometrische Form des Skalarproduktes

Für je zwei Vektoren $\vec a \neq \vec 0$ und $\vec b \neq \vec 0$ mit dem Richtungsunterschied/Winkel φ gilt: $\boxed{\vec a * \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \cos\varphi}$

Es gibt drei geometrische Sonderfälle:

gleich gerichtet/orientiert $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$: $\vec a * \vec b = |\vec a||\vec b|$ ($\cos\varphi = 1$; $\varphi = 0°$)

Orthogonalitätskriterium $\vec a \perp \vec b$: $\vec a * \vec b = 0$ ($\cos\varphi = 0$; $\varphi = 90°$)

entgegengesetzt orientiert $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$: $\vec a * \vec b = -|\vec a||\vec b|$ ($\cos\varphi = -1$; $\varphi = -180°$)

4. Ebenen

4.1 Parameterdarstellung einer Ebene (S. 266)

Ist eine Ebene durch die Punkte P, Q und R (die nicht alle auf einer Geraden liegen) festgelegt, so gilt für die Ortsvektoren $\vec{x}$ der Punkte X in der Ebene E:

$$\boxed{E: \vec{x} = \vec{p} + k \cdot \overrightarrow{PQ} + l \cdot \overrightarrow{PR}} \Rightarrow \text{Dreipunkteform}$$

Desweiteren kann sie durch zwei Richtungsvektoren festgelegt sein:

$$\boxed{E: \vec{x} = \vec{p} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}} \Rightarrow \text{Punkt-Richtungsgleichung}$$

Außerdem kann sie festgelegt sein durch:

- zwei sich schneidende Geraden: $E: \vec{x} = \vec{a_1} + r \cdot \vec{v_1} + s \cdot \vec{v_2}$
- zwei parallele Geraden: $E: \vec{x} = \vec{a_1} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \overrightarrow{a_1 a_2}$
- Gerade und Punkt: $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \overrightarrow{AP}$
- drei Punkte: $E: \vec{x} = \vec{p} + u \cdot \overrightarrow{PQ} + v \cdot \overrightarrow{PR}$

Gleichungen der Koordinatenebenen

$$E_{xy}: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

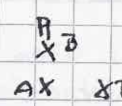
$$E_{xz}: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{yz}: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Lagebeziehungen

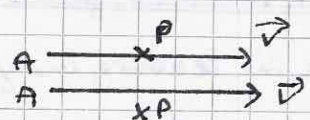
5.1 Punkt und Punkt

identisch: $\vec{a} = \vec{b}$
nicht identisch: $\vec{a} \neq \vec{b}$



5.2 Punkt und Gerade

Punkt liegt auf Gerade: $\vec{p} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$
Punkt liegt nicht auf Gerade: $\vec{p} \neq \vec{a} + t \cdot \vec{v}$



5.3 Gerade und Gerade (S. 241)

Um die Beziehung zweier Geraden zu ermitteln, müssen die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit überprüft werden (Kollinearität):

Falls $\vec{v_1} = k \cdot \vec{v_2}$, sind die Geraden identisch oder echt parallel.

Falls $\vec{v_1} \neq k \cdot \vec{v_2}$, sind die Geraden windschief oder sie schneiden sich.

$g: \vec{x} = \vec{a_1} + r\cdot\vec{v_1}$
$h: \vec{y} = \vec{a_2} + s\cdot\vec{v_2}$

Lässt sich $\vec{v_1}$ durch $\vec{v_2}$ darstellen?

$\vec{v_1} = k\cdot\vec{v_2}$ — linear abhängig

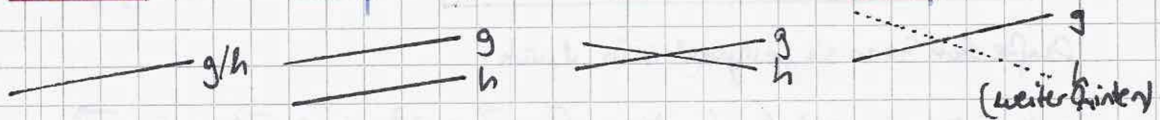
$\vec{v_1} \neq \vec{v_2}\cdot k$ — linear unabhängig

linear abhängig: Liegt A_1 auf h / A_2 auf g?

- $\vec{a_1} = \vec{y}$: g und h sind identisch.
- $\vec{a_1} \neq \vec{y}$: g und h sind echt parallel.

linear unabhängig: Schneiden sich g und h?

- $\vec{x} = \vec{y}$: g und h schneiden sich.
- $\vec{x} \neq \vec{y}$: g liegt windschief zu h.



Bsp.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$ $h: \vec{y} = \begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

Überprüfe $\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ auf Abhängigkeit:

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot k \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2k = 3 \\ -k = -1 \\ k = 4 \end{array}\right| \Rightarrow k = 1{,}5 \rightarrow \text{⚡}$$

Schneiden sich g und h?

$$\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 3r - 2s = -1 \\ -r + s = 1 \\ 4r - s = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l}\Rightarrow r = 1 \\ \Rightarrow s = 4r - 2 \Rightarrow s = 2\end{array} \quad \Rightarrow 3 - 2 = -1 \ \checkmark$$

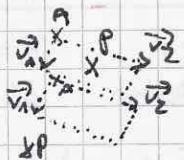
Für $r = 1 \wedge s = 2$ schneiden sich g und h.

Berechnung des Schnittpunktes: $\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\5\end{pmatrix} \Rightarrow S(5|-5|5)$

5.4 Ebene und Punkt

Punkt liegt in Ebene: $\vec{p} = \vec{a} + r\cdot\vec{v_1} + s\cdot\vec{v_2}$

Punkt liegt nicht in Ebene: $\vec{p} \neq \vec{a} + r\cdot\vec{v_1} + s\cdot\vec{v_2}$



5.5 Ebene und Gerade (S. 272)

Um die Beziehung einer Gerade zu einer Ebene zu ermitteln, kann man die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit überprüfen (Komplanarität):

Falls $\vec{u} = r\cdot\vec{v_1} + s\cdot\vec{v_2}$, ist die Gerade echt parallel zur Ebene oder liegt in ihr.

Falls $\vec{u} \neq r\cdot\vec{v_1} + s\cdot\vec{v_2}$, schneidet die Gerade die Ebene.

$$g: \vec{x} = \vec{a_1} + t \cdot \vec{u}$$
$$\underbrace{E: \vec{y} = \vec{a_2} + r \cdot \vec{v_1} + s \cdot \vec{v_2}}$$

Lässt sich $\vec{u}$ durch $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ darstellen?

$\vec{u} = r \cdot \vec{v_1} + s \cdot \vec{v_2}$

$\underbrace{\text{linear abhängig}}$ $(g \parallel E)$

Liegt A_1 in E?

$\vec{a_1} = \vec{y}$

g liegt in E: $g \parallel E \wedge g \subset E$

$\vec{a_1} \neq \vec{y}$

g ist echt parallel zu E: $g \parallel E \wedge g \not\subset E$

$\vec{u} \neq r \cdot \vec{v_1} + s \cdot \vec{v_2}$

$\underbrace{\text{linear unabhängig}}$

g schneidet E: $\underbrace{g \cap E = \{S\}}$

Den Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene nennt man Durchstoßpunkt.

Die Durchstoßpunkte einer Gerade durch die Koordinatenebenen nennt man Spurpunkte.

Die oben dargestellte Lagebeziehung kann auch rechnerisch durch einfaches Gleichsetzen ermittelt werden, insbesondere wenn ein Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) ermittelt werden soll.

Bsp.: 1.) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\end{pmatrix}$ $E: \vec{y} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} k - 2l + t = -1 \\ -2k + l + 4t = -1 \\ k + 2l - 7t = 3 \end{matrix} \right|$

$\overset{TR}{\Rightarrow} \left| \begin{matrix} k - 3t = 1 \\ l - 2t = 1 \\ 0 = 0 \end{matrix} \right| \Big\}$ Unendlich viele Lösungen: Die Gerade liegt in der Ebene.

2.) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $E: \vec{y} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{x} = \vec{y} \overset{TR}{\Rightarrow} \left| \begin{matrix} \dots \\ 0 = 1 \end{matrix} \right|$ Keine Lösungen: Die Gerade ist echt parallel zur Ebene.

3.) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $E: \vec{y} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\vec{x} = \vec{y} \overset{TR}{\Rightarrow} t = -6 \wedge k = -1 \wedge l = 3$ Eine Lösung.

Berechnung des Durchstoßpunktes:

$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\8\\0\end{pmatrix} \Rightarrow S(-3|8|0)$

Berechnung von Spurpunkten

Spurpunkte können nach obigem Schema berechnet werden, dies ist allerdings auch einfacher möglich, indem man eine Koordinate des Spurpunktes gleich 0 setzt.

Bsp.: $\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}x_1\\0\\x_3\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \overset{TR}{\Rightarrow}$ (Einsetzen!) $\left\{\begin{matrix} \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \; x_1x_2\text{-/xy-Ebene} \; S_1(3|4|0) \\ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \; x_1x_3\text{-/xz-Ebene} \; S_2(1|0|2) \\ \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \; x_2x_3\text{-/yz-Ebene} \; S_3(0|-2|3) \end{matrix}\right.$

Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch eine Ebene

Bsp.:
$$\left.\begin{array}{l} t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\} = \begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \underset{\text{(Einsetzen!)}}{\overset{\text{TR}}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{lll} \begin{pmatrix}-1/3\\0\\0\end{pmatrix} & x\text{-Achse} & S_1\left(-\frac{1}{3}\middle|0\middle|0\right) \\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & y\text{-Achse} & S_2(0|1|0) \\ \begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix} & z\text{-Achse} & S_3\left(0\middle|0\middle|\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.$$

5.6 Ebene und Ebene (S. 276)

Um die Beziehung zweier Ebenen zu ermitteln, kann man die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit überprüfen.

Falls $\vec{u_1} = k\cdot\vec{v_1} + l\cdot\vec{v_2} \wedge \vec{u_2} = k\cdot\vec{v_1} + l\cdot\vec{v_2}$, sind die Ebenen identisch oder echt parallel.

Falls $\vec{u_1} \neq k\cdot\vec{v_1} + l\cdot\vec{v_2} \vee \vec{u_2} \neq k\cdot\vec{v_1} + l\cdot\vec{v_2}$, schneiden sich die Ebenen.

$$E_1: \vec{x} = \vec{a_1} + k\cdot\vec{v_1} + l\cdot\vec{v_2}$$
$$\underbrace{E_2: \vec{y} = \vec{a_2} + m\cdot\vec{u_1} + n\cdot\vec{u_2}}$$

Lassen sich $\vec{u_1}$ und $\vec{u_2}$ durch $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ darstellen?

Linear abhängig (s.o.)
- Liegt A_1 in E_2?
  - $\vec{a_1} = \vec{y}$: E_1 und E_2 sind identisch.
  - $\vec{a_1} \neq \vec{y}$: E_1 und E_2 sind echt parallel.

Linear unabhängig (s.o.)
- E_1 und E_2 schneiden sich in einer Schnittgeraden.

Auch hier reicht einfaches Gleichsetzen der Ebenengleichungen aus:

$$\left.\begin{array}{lll} \dots\ 0=0 & \Rightarrow & \text{identisch} \\ \dots\ 0=1 & \Rightarrow & \text{echt parallel}\end{array}\right\}\ \text{s. } \underline{5.5}$$

Bsp. zur Berechnung einer Schnittgeraden:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad E_2: \vec{y} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow k\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

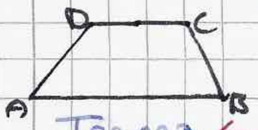
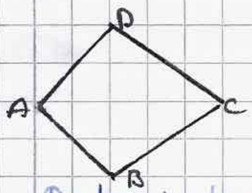
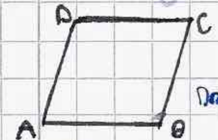
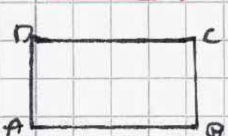
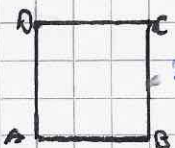
$$\left|\begin{array}{llll} 3k & & -m & =3 \\ & l & +2m+n & =-2 \\ -k & & & =-2 \end{array}\right| \Rightarrow k=2 \quad \Rightarrow m=3 \quad \Rightarrow l+n=-8$$

k in E_1 einsetzen oder m in E_2 einsetzen:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

E_1 und E_2 schneiden sich mit der Schnittgerade $S: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

6. Nachweis spezieller Vierecke

Viereck	abgeleitet von	Eigenschaften	Nachweis
 Trapez	Viereck	2 parallele Seiten	$\vec{AB} = k \cdot \vec{CD}$
 Drachenviereck	Viereck	2 Paare gleich langer benachbarter Seiten	$\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{AD}\rvert \wedge$ $\lvert\vec{BC}\rvert = \lvert\vec{CD}\rvert$
 Parallelogramm	Viereck → Trapez	jeweils 2 gleich lange und parallele Seiten	$\vec{AD} = \vec{BC} \wedge$ $\vec{AB} = \vec{DC}$
 Raute	Viereck → Drachenviereck, Trapez → Parallelogramm	alle Seiten gleich lang	$\vec{AD} = \vec{BC} \wedge$ $\vec{AB} = \vec{DC} \wedge$ $\lvert\vec{AD}\rvert = \lvert\vec{AB}\rvert$
 Rechteck	Viereck → Trapez → Parallelogramm	alle Innenwinkel 90°	$\vec{AD} = \vec{BC} \wedge$ $\vec{AB} = \vec{DC} \wedge$ $\vec{AB} * \vec{AD} = 0$
 Quadrat	Viereck → Drachenviereck, Trapez → Parallelogramm → Raute, Rechteck	alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel 90°	$\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{BC}\rvert =$ $\lvert\vec{CD}\rvert = \lvert\vec{DA}\rvert \wedge$ $\vec{AB} * \vec{AD} = 0$

Ferner gilt: zwei benachbarte Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die ein Viereck „aufspannen", dürfen nicht parallel, also linear abhängig sein:

$\vec{u} \nparallel \vec{v}$, also: $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$

oder: $\vec{u} * \vec{v} \neq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ (s. 3.2.)

V. Anhang (oder: Zeug, das nirgendwo anders hinpasst)

monoton steigend/fallend: $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$

streng monoton " : $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$

($f'(x)$ darf an genau einer Stelle 0 sein.
Bsp.: x^3 ist trotz $f(0) = 0$ streng monoton steigend.)

Sattelpunkt: Wendepunkt mit $f'(x) = 0$

Tangente an einen Punkt legen: $y = m_t \cdot x + b$; $m_t = f'(P_x)$

NB: $P_y = m_t \cdot P_x + b$

Normale: Gerade, die orthogonal zu einer anderen verläuft

$y = m_n \cdot x + b$; $m_n = -\frac{1}{m}$

NB: $P_y = m_n \cdot P_x + b$, wobei P der Schnittpunkt der beiden Geraden ist

Exponenten: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (negativer Exponent); $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ (ganzrationaler Exponent)

Division durch Null: Beim Umstellen einer Gleichung durch Variablen nur dann teilen, wenn diese nicht null sein können!

(Bsp.: $0 = x(t_1 - t_2)$ | : x; da $x \in \mathbb{R}$, nicht erlaubt)

Steigung aus Winkel errechnen:  $\tan\alpha = \frac{GK}{AK} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{x}{1} = x$

$y = mx + b$; $m = \tan\alpha$

Symmetrie nachweisen: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie (y-Achse)

$= -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie (Ursprung)

1. Berechnungen mit dem Taschenrechner

1.1 Analysis

1.1.1 Differentialrechnung und Funktionsuntersuchungen

Grenzwerte bestimmen: $\lim_{x \to 0} e^x$ ⇒ limit(e^(x), x, 0)

Differenzieren:

①	d(x^2, x)	1. Ableitung:	2x
②	d(x^2, x, 2)	2. Ableitung:	2
③	d(x^2, x, 0)	„original"-Funktion:	x^2
④	d(x^2, x, -1)	Stammfunktion:	x^3/3
⑤	d(2x, x, -2)	Stammfunktion:	x^3/3

Lineare Gleichungssysteme lösen:

$$\left| \begin{array}{l} -8a+4b-2c = 10 \\ 12a-4b+c = 0 \\ c = -6 \\ d = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \Rightarrow a = 1 \\ \Rightarrow b = 3/2 \\ \Rightarrow c = -6 \\ \Rightarrow d = 0 \end{array}$$

① rref([-8,4,-2,0,10;12,-4,1,0,0;0,0,1,0,-6;0,0,0,1,0])

⇒ [1,0,0,0,1;0,1,0,0,3/2;0,0,1,0,-6;0,0,0,1,0]

– oder –

② solve(-8a+4b-2c=10 and 12a-4b+c=0 and c=-6 and d=0, {a,b,c,d})

⇒ a=1 and b=3/2 and c=-6 and d=0

Unendlich viele Lösungen:

rref([4,1,0,0;9,3,1,1;1,1,1,1]) ⇒ [1,0,-1/3,-1/3;0,1,4/3,4/3;0,0,0,0] $\overbrace{}^{\text{unendliche Lösungsmenge!}}$ 0=0

solve(4a+b=0 and 9a+3b+c=1 and a+b+c=1, {a,b,c})

⇒ a=(@2-1)/3 and b=-4·(@2-1)/3 and c=@2   @ = unendliche Lösungsmenge

@2 ist ein Parameter, bspw. t: $a = \frac{t-1}{3}$; $b = -4 \cdot \frac{t-1}{3}$; $c = t$

Gleichungen addieren: (2a+b=5)+(a=7) ⇒ 3a+b=12,

subtrahieren: (2a+b=5)-(a=7) ⇒ a+b=-2,

multiplizieren: (2a+b=5)·(a=7) ⇒ a(2a+b)=35,
expand((2a+b=5)·(a=7)) ⇒ 2a^2+ab=35

und **dividieren:** (2a+b=5)/(a=7) ⇒ (2a+b)/a = 5/7,
expand((2a+b=5)/(a=7)) ⇒ b/a+2 = 5/7

Wenn man ein Gleichungssystem mit dem Taschenrechner löst, sind folgende Angaben nötig:

Gleichungssystem, Lösungsmatrix, Deutung, Lösungsmenge/Funktionsgleichung/Antwort

| ... | [...]   a = ... b = ...   L = {...} / f(x) = ...

Lösungsspalte bei Spline-Interpolation: rref([Bedingungen]) → a

a^T[Anz. Bedingungen + 1] ⇒ Lösungsspalte als $[a_1, a_2, a_3, \ldots b_1, b_2, b_3, \ldots]$

1.1.2 Integralrechnung

Integrieren:
1. ∫(x^2, x) — Stammfunktion F(x): x^3/3
2. ∫(x^2, x, 0, b) — Integralfunktion $I_0(x)$: b^3/3
3. ∫(x^2, x, 0, 2) — Integral $I_0(2)$: 8/3

Umkehrfunktion bestimmen:

solve(y = f(x), x) ⇒ Ergebnis: Variablen tauschen

Bsp.: solve(y = x^2, x) ⇒ $x = -\sqrt{y} \wedge y \geq 0 \vee$ ⇒ entfällt, da $-\sqrt{x^2} \neq x$ für $x \geq 0$
$x = \sqrt{y} \wedge y \geq 0$

Variablen tauschen: $f^{-1}(x) = y = \sqrt{x}$

1.2 Stochastik

Sequenz von Zahlen:
1. seq(x, x, 0, 2) ⇒ {0,1,2}
2. seq(2^x, x, 0, 5) ⇒ {1,2,4,8,16,32}
3. seq(2^x, x, 0, 5, 2) ⇒ {1, 4, 16}
4. seq(x, x, 5, 0) ⇒ { }
5. seq(5−x, x, 0, 5) ⇒ {5,4,3,2,1,0}

Prozent → Dezimal:
{0.33, 0.36, ...}
⇒ {33, 36}

Dezimal → Prozent: {33, 36}/100 ⇒ {0.33, 0.36}

Arithmetisches Mittel:
1. mean({1,2,3}) ⇒ 2
2. mean($\underbrace{\{1,2,3\}}_{seq(x,x,1,3)}$, {2,7,5}) ⇒ 2,39

Empirische Standardabweichung: √(sum((a − mean(a, b))^2 · b))
seq(x, x, 10, 10.8, 0.1) → a — Merkmalsausprägungen
{1,2,2,3,4,4,0,3,1}/20 → b — relative Häufigkeiten

Nicht stdDev benutzen!

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k}$ ⇒ nCr(n, k)

Einzelne Wahrscheinlichkeit P(X = k) einer Binomialverteilung:

TIStat.binomPdf(20, 3/60, 5) — Catalog → Flash Apps → b

Wahrscheinlichkeitsverteilung P(X = k): TIStat.binomPdf($\overset{n}{20}$, $\overset{p}{3/60}$) ⇒ {...}

Kumulierte Wahrscheinlichkeit(sverteilung) P(X ≤ k) einer Binomialverteilung:

TIStat.binomCdf($\overset{n}{20}$, $\overset{p}{3/60}$, $\overset{lo}{0}$, $\overset{hi}{5}$) bzw. TIStat.binomCdf(20, 3/60) ⇒ { }

Lösen einer Bedingung wie P(X ≤ k) ≥ 0,95: 0,95 → y1(x)
TIStat.binomCdf(50, 1/60, 0, x) → y2(x)
nicht bestimmbar, bestimmbar
Zeichnen + Intersection durchführen.

Zentralwert: median({1,2,3,4,5}) ⇒ 2,5 (2 ∧ 3)

1.3 Lineare Algebra – Matrizen

Matrix eingeben: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ [a,b;c,d]
[[a,b][c,d]]

Inverse Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow$ [1,3;1,2]^-1

Determinante: det([1,3;1,2]) $\Rightarrow -1 \neq 0$, inverse Matrix existiert
det([1.5,3;1,2]) $\Rightarrow 0 = 0$, inverse Matrix existiert nicht

Achtung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{array}{l} 0x_1 + 0x_2 + x x_3 = x_1 \\ 0{,}25x_1 + 0x_2 + 0x_3 = x_2 \\ 0x_1 + 0{,}5x_2 + 0x_3 = x_3 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x \cdot x_3 = x_1 \\ 0{,}25x_1 = x_2 \\ 0{,}5x_2 = x_3 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 0{,}25 \cdot (x \cdot x_3) = x_2 \\ 0{,}5 \cdot (0{,}25 \cdot (x \cdot x_3)) = x_3 \end{array}\right|$$

kann mit GTR nicht zuverlässig gelöst werden!

$\Rightarrow 0{,}125 \cdot x \cdot x_3 = x_3 \Rightarrow 0{,}125x = 1 \Rightarrow x = 8$

manuelles Lösen notwendig!

⇓

Immer, wenn das Gleichungssystem nicht linear ist! (Variablen enthält!)

Achtung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ mit solve:

solve([0,0,8;0.25,0,0;0,0.5,0]·[x;y;z]=[x;y;z],{x,y,z})

$\Rightarrow$ x=8·@3 and y=2·@3 and z=@3

@3 ist ein Parameter, bspw. t: $x=8t$; $y=2t$; $z=t$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$

1.11 Analysis (Ergänzung)

1.11.3 Wachstumsmodelle

Regression exponentieller Prozesse: [APPS] → Data/Matrix Editor → neue Variable →

C1	C2
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
⋮	⋮

→ [F5] Calc → Calculation Type: ExpReg
x: C1
y: C2

ggf. Store RegEQ to…: y1(x) → [ENTER]

Einen Datensatz plotten: Wie oben im Data/Matrix Editor Datensatz eingeben → [F2] Plot Setup → [F1] Define → Plot Type: Passend wählen → [ENTER]
x: C1
y: C2
→ [F3] Graph ([Window] ggf. anpassen!)

Regression begrenzter Prozesse:
seq(x,x,…,…,…) → x
{…, …, …} → y
alternativer Eingabeweg

→ D/M-Editor → c1=x; c2=y → C3 = S − C2 (Sättigungsgrenze) → [F5] Calc Type: ExpReg

→ x: C1
y: C3
→ Store to RegEQ = y1(x) → S − y1(x) → y2(x)
S-Grenze, Regression; Funktion, die begrenztes Wachstum beschreibt

Regression logistischer Prozesse:
wie „Regression exponentieller Prozesse", nur: Calculation Type: Logistic

1.4 Analytische Geometrie

Vektor eingeben: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow [x; y; z]$

Spalten- in Zeilenvektor: $\vec{v}^{\,T} \Rightarrow [x; y; z]^T$ $\boxed{\text{CATALOG}}$ $\to$ T

Länge eines Vektors: $|\vec{x}| \Rightarrow \text{norm}([x; y; z]) \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Skalarprodukt: $\vec{a} * \vec{b} \Rightarrow \text{dotP}([x; y; z], [a; b; c]) \Rightarrow ax + by + cz$

1.2 Stochastik (Ergänzung)

Einzelne Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ einer durch die Normalverteilung angenäherten Binomialverteilung:

$$\text{TIStat.normPdf}(\underset{k,}{5}, \underset{\mu,}{3/60 \cdot 200}, \underset{\sigma}{\sqrt{3/60 \cdot 200 \cdot 57/60}}) \mathrel{\hat{=}} \varphi_{\mu,\sigma}(k)$$

$$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x) = \text{TIStat.normPdf}(x, 0, 1) = \text{TIStat.normPdf}(x)$$

$\Rightarrow \varphi(x)$, falls man μ und σ weglässt!

Kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ " :

$$\text{TIStat.normCdf}(\underset{lo,}{0.5}, \underset{hi,}{5.5}, \underset{\mu,}{3/60 \cdot 200}, \underset{\sigma}{\sqrt{3/60 \cdot 200 \cdot 57/60}}) \mathrel{\hat{=}} \int_{a-0.5}^{b+0.5} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx$$

$$\int_{a-0.5}^{b+0.5} \varphi_{0,1}(x)\,dx = \int_{a-0.5}^{b+0.5} \varphi(x)\,dx = \text{TIStat.normCdf}(a-0.5, b+0.5\underbrace{, 0, 1}_{\text{(kann entfallen, s.o.)}})$$

Obere Grenze einer Intervallwahrscheinlichkeit:

$$P(X \leq k) = 0,9 = \int_{-\infty}^{k} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \text{invNorm}(\underset{area,}{0.9}, \underset{\mu,}{9450}, \underset{\sigma}{\sqrt{6032.5}}) \Rightarrow k \approx 9565$$

Berechnung beliebiger σ-Umgebungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{invNorm}(0.95) \Rightarrow 1,64 \\ &\text{invNorm}(0.975) \Rightarrow 1,96 \\ &\text{invNorm}(0.995) \Rightarrow 2,58 \end{aligned}\right\} \cdot \sigma \qquad \text{invNorm} \mathrel{\hat{=}} \Phi^{-1}$$

etc. pp.

2. Berechnungen ohne Hilfsmittel

2.1 Ableitungsregeln

2.1.1 Wiederholung

Ableitung einer Konstanten	$f(x)=C$	$f'(x)=0$
Ableitung von x	$f(x)=x$	$f'(x)=1$
Potenzregel	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
Faktorregel	$f(x)=c\cdot u(x)$	$f'(x)=c\cdot u'(x)$
Summen-/Differenzregel	$f(x)=u(x)+v(x)$ $u(x)-v(x)$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$ $u'(x)-v'(x)$

Aus der Potenzregel folgt:

Ableitung eines Bruchs	$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-1\cdot x^{-2}$
Ableitung einer Wurzel	$f'(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

2.1.2 Spezielle Ableitungsregeln

Ableitung der e-Funktion	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
Ableitung einer Exponentialfunktion	$f(x)=b^x$	$f'(x)=\ln(b)\cdot b^x$
Ableitung des Logarithmus	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
Ableitungen in der Trigonometrie	$f(x)=\sin x$ $\cos x$ $-\sin x$ $-\cos x$ $(\tan x$	$f'(x)=\cos x$ $-\sin x$ $-\cos x$ $\sin x$ $\frac{1}{\cos^2 x})$

2.1.3 Ableitungsregeln verknüpfter Funktionen (S. 179)

Summenregel (s.o.)	$f(x)=u(x)+v(x)$ $u+v$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$ $u'+v'$
Produktregel	$f(x)=u(x)\cdot v(x)$ uv	$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ $u'v+uv'$
Quotientenregel	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ $\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ $(u'v-uv')/v^2$
Kettenregel	$f(x)=u(v(x))$ $u(v)$	$f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$ $u'(v)\cdot v'$

2.2 Integrationsregeln

Grundsätzlich gilt: Beim Integrieren sind Ableitungsregeln „rückwärts" anzuwenden.

2.2.1 Ausgewählte Stammfunktionen

$f(x)=0$	$F(x)=0$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$	$F(x)=2\sqrt{x}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}$
$f(x)=c$	$F(x)=cx$	$f(x)=e^{x}$	$F(x)=e^{x}$
$f(x)=x^{n}$ $n\neq-1!$	$F(x)=\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$	$f(x)=e^{2x}$	$F(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$F(x)=\ln(\lvert x\rvert)$	$f(x)=a^{x}$	$F(x)=\frac{1}{\ln a}\cdot a^{x}$

$\Rightarrow$ Alle Stammfunktionen sind jeweils durch $\boxed{F(x)+c}$ gegeben ($c\in\mathbb{R}$).
$\hat{=}$ unbestimmtes Integral

2.2.2 Rechengesetze für Integrale

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$ Gleiche Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a -f(x)\,dx$$ Vertauschte Integrationsgrenzen

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$ Faktorregel

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$ Summenregel

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$ Zusammengefasste Integrationsgrenzen

2.2.3 Integration durch lineare Substitution (S. 114)

Umkehr der Kettenregel für eine lineare innere Funktion:

$$\int_a^b f(m\cdot x+b)\,dx = \frac{1}{m}\cdot\Big[F(m\cdot x+b)\Big]_a^b$$ bzw.

$$f(x)=f(m\cdot x+b) \Rightarrow F(x)=\frac{1}{m}\cdot F(m\cdot x+b)$$

2.3 Lösen quadratischer Gleichungen

Binomische Formeln:

$$\boxed{\begin{aligned} &1.\ (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ &2.\ (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \\ &3.\ (a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2 \end{aligned}}$$

In einer quadratischen Gleichung taucht das Quadrat der Variable auf.

Bsp.: $-2x^2-26x-44=0 \quad |:(-2)$

Man muss zur Normalform umformen.

Bsp.: $x^2+13x+22=0$

Die Normalform lautet: $\boxed{x^2-px+q=0}$

Dies kann mit binomischen Formeln formuliert werden, falls gilt: $\boxed{q=\left(\frac{p}{2}\right)^2}$

Bsp.: $p=13$; $(p/2)^2 = 42,25$

Man führt eine quadratische Ergänzung durch und kann die Gleichung lösen: $x^2+13x+42,25=20,25$

$$(x+6,5)^2 = 20,25 \quad |\sqrt{\ }$$

$$x+6,5 = 4,5 \lor x+6,5=-4,5$$

$$x=-2 \lor x=-11$$

$$\mathbb{L}=\{-2;-11\}$$

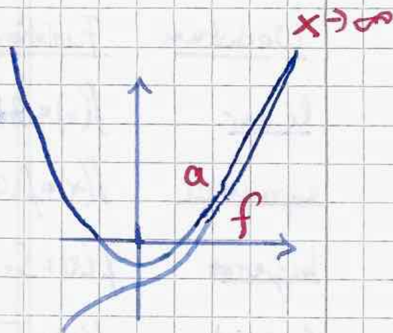
Für die allgemeine Normalform ergibt sich als Lösungsansatz die

pq-Formel: $\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$ ⇒ quadratische Gleichung erst in Normalform bringen!

3. Ergänzungen ... die nirgendwo anders mehr reinpassen

3.1 Analysis

3.1.1 Näherungsfunktionen (S.152)



a ist Näherungsfunktion der Funktion f für $x \to \infty$,

falls gilt: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)-a(x)| = 0}$

Bsp.: $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} - x$

Vermutung: $a(x) = -x$

Beweis: $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)-a(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} \left|\frac{1}{2}\cdot e^{2x} - x + x\right|$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left|\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right| = 0$ q.e.d.

$-x$ ist eine Näherungsfunktion oder Asymptote zu f für $x \to -\infty$.

Eine Näherungsfunktion heißt dann Asymptote, wenn sie eine Gerade ist.

3.2 Stochastik

3.2.1 Übersicht zu Wachstumsprozessen

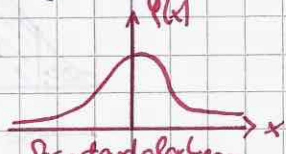
Wachstum	Funktionsgleichung	Differenzialgleichung
linear	$f(x) = kt + f(0)$	$f'(x) = k$
exponentiell	$f(x) = f(0) \cdot e^{kt}$	$f'(x) = k \cdot f(x)$
begrenzt	$f(x) = S + (f(0) - S) \cdot e^{-kt}$	$f'(x) = k \cdot (S - f(x))$
logistisch	$f(x) = \frac{S}{1 + (\frac{S}{f(0)} - 1) \cdot e^{-kSt}}$	$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (S - f(x))$

3.2.2 Normalverteilung

3.2.2.1 Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

=) Lässt sich eine Funktion finden, deren Graph sich an eine Binomialverteilung annähert?

Ja, durch die Gauss'sche Glockenfunktion, deren Graph eine Annäherung an das Histogramm einer Binomialverteilung beschreibt.



Die Funktionsgleichung der Standardglockenfunktion lautet:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

Allerdings muss die Lage der Kurve noch angepasst werden:

Verschiebung um μ nach rechts: $\varphi(x - \mu)$

Streckung parallel zur y-Achse mit dem Faktor σ: $\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Streckung parallel zur x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$: $\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma}$

Daraus folgt:

Funktionen mit $\boxed{\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$ heißen Gauss'sche Glockenfunktionen, ihre Graphen heißen Glockenkurven oder -graphen.

Diese Funktionen dienen einerseits als Wahrscheinlichkeitsdichten reellwertiger Zufallsgrößen ①, andererseits beschreiben sie die Konturen von Binomialverteilungen ②.

① Eine Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ, wenn sie eine Gauss'sche Glockenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt.

-) Werte können beliebig dicht aneinanderliegen

② Für eine Binomialverteilung mit $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung) kann man die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge näherungsweise mit der Normalverteilung berechnen:

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^k \approx \boxed{\varphi_{\mu,\sigma}(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

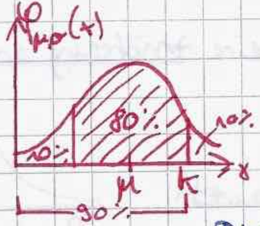
Für Intervallwahrscheinlichkeiten derselben Binomialverteilung gilt:

$$P(a\le X\le b) = \sum_{k=a}^{b}\left(\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^k\right) \approx \boxed{\int_{a-0,5}^{b+0,5}\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx}$$

(Dies ist eine Variation der Näherungsformeln von De Moivre und Laplace: $P(X=k)\approx \frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ ⇒ lokale Näherungsformel

$P(X\le k)\approx \underbrace{\Phi}_{\text{Stammfunktion von }\varphi}\left(\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}\right)$) ⇒ integrale Näherungsformel

Desweiteren kann man die obere Grenze eines Intervalls mit dem GTR bestimmen:



⇒ Um wie viel streuen die Ergebnisse um μ maximal mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%?

$$P(X\le k) = 0,9 = \int_{-\infty}^{k}\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx \overset{GTR}{\Rightarrow} k\approx \ldots$$

Intervall anschließend runden und Symmetrie sicherstellen!

Diese Rechnung erweitert die bereits bekannten σ-Regeln.

3.2.2.2 Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen

Eine Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, wenn für alle Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$\boxed{P(a\le X\le b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx}$$

keine Näherung mehr!

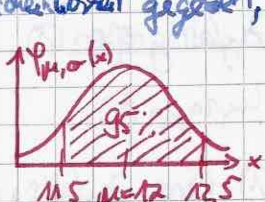
$\geq \mathrel{\hat{=}} >$, $\leq \mathrel{\hat{=}} <$ } ist bei Normalverteilung irrelevant!

Die Laplace-Bedingung ($\sigma > 3$) muss nicht gelten.

Für eine offene untere Grenze wählt man $a = -\infty$.

Auch bei normalverteilten Zufallsgrößen kann die obere Grenze eines Intervalls bestimmt werden (s.o.). (Die bekannten σ-Regeln gelten auch hier.)

Ist ein symmetrisches Intervall um μ und dessen Wahrscheinlichkeit gegeben, kann man σ berechnen: $\frac{\beta+1}{2} = \Phi\left(\frac{|a-\mu|}{\sigma}\right)$



Bsp.: $[11,5;\ 12,5]$; $\mu=12$; $\beta=0,95$

$\frac{1,95}{2} = \Phi\left(\frac{12,5-12}{\sigma}\right)$ | $\Phi^{-1} \mathrel{\hat{=}}$ invNorm beim GTR

$\Phi^{-1}\left(\frac{1,95}{2}\right) = \frac{0,5}{\sigma} \Rightarrow \sigma\approx 0,255$

3.2.7 Stetige Zufallsgrößen

Eine Funktion f heißt Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Eine Zufallsgröße X und deren Verteilung heißen stetig, falls es eine geeignete Dichtefunktion mit diesen Eigenschaften gibt, sodass gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Normalverteilte Zufallsgrößen sind spezielle stetige Zufallsgrößen. Sie sind nicht ganzzahlig (reell), es gibt eine Dichtefunktion und unendlich viele Realisierungen von X.

Binomialverteilte Zufallsgrößen sind diskrete Zufallsgrößen. Sie sind ganzzahlig und es gibt abzählbar viele Realisierungen der Zufallsgröße X.

$F(k) = P(X \leq k)$ heißt Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X.

Damit ist $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ die Dichte- und $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung.

Erwartungswert und Standardabweichung bei stetigen Zufallsgrößen

Sei f eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X. μ und σ lauten dann:

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx}$$

s. arithmetisches Mittel $\bar{x}$ relativer Häufigkeiten

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}}$$

s. empirische Standardabweichung $\bar{s}$