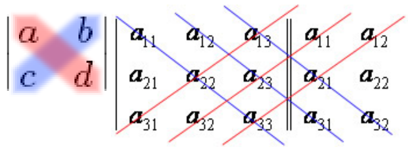
3.4 Determinanten und Eigenwerte

Im Folgenden $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ quadratisch, A^{ij} ist A nach Streichen von Zeile i und Spalte j.

Determinante einer Matrix:



- $\det(a)=a$, sonst $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det A^{ij}$ für eine Zeile $i \in \{1,\dots,n\}$
- $\det A = \det A^T$ (man kann nach Zeilen oder Spalten entwickeln)
- ist A Dreiecksmatrix, gilt $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (Produkt auf der Hauptdiagonale)
- Vertauschen von Zeilen kehrt das Vorzeichen von det A um
- multipliziert man eine Zeile mit λ, muss man det A mit λ multiplizieren
- daraus folgt: $\det(\lambda\cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$
- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ Rang A = n $\Leftrightarrow$ Kern A = {0}
  $\Leftrightarrow$ Zeilen und Spalten von A sind linear unabhängig. Dann $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
- $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$ (für $A,B \in \mathbb{K}^{n\times n}$) (gilt nicht für det(A+B)!)

Eigenwerte einer Matrix:

- $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert** von A, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ gibt, s.d. $A\cdot v = \lambda\cdot v$
- v heißt dann **Eigenvektor** zu λ und die Menge aller Eigenwerte **Spektrum** von A
- $\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid A\cdot v = \lambda\cdot v\} = \mathrm{Kern}(A-\lambda E_n)$ heißt **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig
- eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat höchstens n verschiedene Eigenwerte (und muss keine haben)
- λ Eigenwert $\Leftrightarrow \det(A-\lambda E_n) = 0$, $\chi_A(x) = \det(A-xE_n)$ heißt **charakteristisches Polynom**

Basistransformation:

- B und B' Basen für $\mathbb{K}^n$, S Standardbasis. $(a_1 \dots a_n)_B = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ (Vektor bezüglich Basis B)
- **Transf.mat.**: $T_{B\to B'} = B'^{-1}\cdot B$ mit $v_{B'} = T_{B\to B'}\cdot v_B$, also $T_{B\to S} = (b_1 \dots b_n)$, $T_{B'\to B} = T_{B\to B'}^{-1}$, $T_{B\to B''} = T_{B\to B'}\cdot T_{B'\to B''}$
- für eine Basis aus Eigenvektoren B und D mit λ_i auf der Hauptdiagonalen gilt $A\cdot v_B = D\cdot v_B$
- A **diagonalisierbar** $\Leftrightarrow \exists$ Basis aus Eigenvektoren $\Leftrightarrow \exists T, T^{-1}$: $T^{-1}\cdot A\cdot T = D$ bzw. $AT=TD$

4. Permutationen und symmetrische Gruppe

- eine bijektive Abbildung $\sigma: [1,n]\to[1,n]$ heißt **Permutation** von [1,n] (hier nur auf $\mathbb{N}$!)
- $(S_n,\circ)$ heißt **symmetrische Gruppe** vom Grad n, dabei $S_n = \{\sigma \mid \sigma: [1,n]\to[1,n] \text{ Permutation}\}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$ ist die Wertetabelle von $\sigma \in S_n$, $|S_n| = n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ (Fakultät)
- $\pi = (a_1\ a_2 \dots a_m)$ heißt **m-Zykel**, wenn für $a_i \neq a_j$ gilt $(a_m)=a_1$, $\pi(a_i)=a_{i+1}$ und $\pi(a)=a$ für $a\neq a_i$
- die Menge aller $a \in [1,n]$ mit $\sigma(a) \neq a$ heißt **Träger** von $\sigma \in S_n$ (bei m-Zykel: $\{a1,\dots,a_m\}$)
- sind π_1 und π_2 Zykel mit disjunkten Trägern, gilt $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$ (∘ kommutativ)
- jede Permutation ist eine Komposition von Zykeln mit disjunkten Trägern
- 2-Zykel heißen **Transpositionen**, jedes Zykel ist eine Komposition von Transpositionen
- daraus folgt: jede Permutation ist eine Komposition von Transpositionen
- also $S_n = \langle (i\ j) \rangle$ (die Transpositionen aus S_n erzeugen die symmetrische Gruppe S_n)
- $(i\ j)^{-1} = (i\ j)$, daraus und von oben folgt: $(a_1\ a_2 \dots a_m)^{-1} = (a_m \dots a_2\ a_1)$ (umdrehen!)

Analysis - 1. Folgen und Reihen. **Folgen:**

- eine Abbildung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a: \mathbb{N}\to M$ heißt **Folge** in M, $a_n = a(n)$ heißt n-tes **Folgenglied**
- (a_n) konvergiert gegen den **Grenzwert** $a \in \mathbb{C}$: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n>n_0: |a_n - a| < \varepsilon$
- (a_n) heißt **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert hat, sonst **divergent**
- ist (a_n) konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt
- (a_n) heißt **Nullfolge**, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $(a_n) \in \mathbb{C}$ ist Nullfolge $\Leftrightarrow (|a_n|)$ ist Nullfolge
- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n - a = 0$, für $\varepsilon>0$ und $a \in \mathbb{C}$ heißt $\{x \in \mathbb{C} \mid |a-x| < \varepsilon\}$ **ε-Umgebung** von a in $\mathbb{C}$

- für *reelle* Folgen (a_n), (b_n), (c_n) gilt:
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0: a_n>M$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M<0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0: a_n<M$ (**Unendlichkeit**)
  - (a_n) heißt **bestimmt divergent**, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
  - (a_n) ist nach oben (unten) **beschränkt** $\Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}: a_n\le M$ $(a_n\ge M)$
  - (a_n) ist beschränkt $\Leftrightarrow$ (a_n) ist nach oben *und* nach unten beschränkt
  - (a_n) ist **monoton** wachsend (fallend) $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1}\ge a_n$ $(a_{n+1}\le a_n)$ (>,< für streng monoton)
  - ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) beschränkt (nicht beschränkt $\Rightarrow$ nicht konvergent)
  - ist (a_n) nach oben (unten) beschr. und mon. wachsend (fallend), so konvergiert (a_n)
  - **Vergleichskriterium**: Ist $a_n \le b_n \le c_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b\in\mathbb{R}$, so ist $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
    Ist $a_n \le b_n$ $(b_n \le c_n)$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$), so ist $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$).
  - ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkt, so ist $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = 0$
  - ist $a_n \le b_n$ und sind (a_n) und (b_n) konvergent, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$ (beachte ≤!)
- für *komplexe* Folgen (a_n), (b_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ $(a,b \ne \pm\infty)$ gilt:
  - $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = a * b$, $\lim_{n\to\infty}(c * a_n) = c * a$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (beachte $b, b_n \ne 0$!), $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
  - (a_n) ist konvergent $\Leftrightarrow$ $(Re(a_n))$ und $(Im(a_n))$ konvergieren. Dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} Re(a_n) + i \lim_{n\to\infty} Im(a_n)$
- die **eulersche Zahl**: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, allgemein $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$
- (a_{m_n}) mit einer streng monoton wachsenden Folge $(m_n)\in\mathbb{N}$ heißt **Teilfolge** von (a_n)
- $a\in\mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** von (a_n), falls es eine Teilfolge mit dem Grenzwert a gibt
- jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt

Reihen:

- für $(a_k)\in\mathbb{C}$ bezeichnet die **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
- S_n heißt **n-te Partialsumme**. Konvergiert S_n gegen a, schreibt man $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$
- **geometrische Reihe**: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, für $|q|<1$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ bzw. $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$, für $|q|<1$: $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$
- ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ((a_k) keine Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht konvergent)
- die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $(a_k)\in\mathbb{R}$ heißt **alternierend**, wenn $a_i \cdot a_{i+1} < 0$
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $(a_k)\in\mathbb{C}$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
- jede absolut konvergente Reihe ist konvergent (stärkere Eigenschaft als Konvergenz)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k = \alpha * \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i * b_{k-i}$ (Cauchy-Produkt)
- **Konvergenzkriterien**: $(a_k)\in\mathbb{C}$, nicht absolut konvergent heißt divergent, wenn $a_k = |a_k|$
  - **Leibniz**: ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ altern. Reihe und $(|a_k|)$ mon. fallende Nullfolge, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
  - **Majorante**: $\exists$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (reell & konvergent) $\exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k>k_0: |a_k|\le b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
  - **Minorante**: $\exists$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (reell & divergent) $\exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k>k_0: |a_k|\ge b_k\ge 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht abs. konv.
  - **Quotient**: $\exists q\in\mathbb{R}$, $q<1$ $\exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k>k_0: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
    $\exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k>k_0: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

2. Stetigkeit von Funktionen. f: $D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt **reellwertige Funktion**

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definiert}\}$ heißt **Definitions-**, $W_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ **Wertebereich** von f
- f ist **monoton** wachsend $\Leftrightarrow \forall x > x'$: $f(x) \geq f(x')$ (fallend / streng analog)
- f nach oben **beschr.** $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in D_f$: $f(x) \leq M$ (unten analog). beschr. $\Leftrightarrow$ ob.&unt. beschr.
- $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $f(x) = a^x$ heißt **Exponentialfunktion**, e^x *die* Exponentialf.
- $f(x) = a^x$. Dann $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}_{>0}$, f injektiv und $f^{-1} = \log_a$ heißt **Logarithmus** mit $D_{\log} = \mathbb{R}_{>0}$, $W_{\log} = \mathbb{R}$
- $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$. $a^x = a^y$ und $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, $\log_e = \ln$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- f heißt **gerade** (ungerade), wenn $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) gilt (Achsen-/Punktsymmetrie)
- f hat den **Grenzwert** $y_0 \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D_f \setminus \{x_0\}$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0$
- $\lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$ ($\cdot$,: analog), $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim_{y \to y_0} g(y)$ mit $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$
- **rechtsseitiger Grenzwert**: $\lim_{x \to x_0+} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} > x_0$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0$ (linkss. analog)
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = y_0$, **asymptotisch**: $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0$
- f heißt **stetig** in $x_0 \in D_f$, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Für f, g stetig gilt $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$
- **Nullstellensatz**: f stetig auf $[a,b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = 0$
- **Zwischenwertsatz**: f stetig auf $[a,b] \wedge y \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y$
- Polynome (Grad 2n+1(haben mind. 1 Nullstelle, f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist streng monoton
- f stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ f hat ein Maximum und Minimum auf $[a,b]$ (gilt nicht für (a,b)!)

3. Differentialrechnung

- $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ heißt **Ableitung** von f in $x_0 \in D_f$, f ist **differenzierbar** in x_0
- ist f differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0 (Stetigkeit ist notw. Bedingung)
- gibt es die **n-te Ableitung** $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ (+stetig), ist f n-mal (stetig) differenzierbar
- **Monotoniekriterien**: f differenzierbar auf (a,b) mit $a, b \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$
  - f ist monoton wachsend auf $(a,b) \Leftrightarrow \forall x \in (a,b)$: $f'(x) \geq 0$ (fallend analog)
  - f ist streng mon. wac. auf $(a,b) \Leftarrow \forall x \in (a,b)$: $f'(x) > 0$ (fallend analog, beachte $\Leftarrow$!)
- f stetig auf $[a,b] \wedge$ diff-ar auf $(a,b) \wedge f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = 0$
- **Mittelwertsatz**: f stetig auf $[a,b] \wedge$ diff-ar auf $(a,b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- allgemein: f stetig und differenzierbar auf $(a,b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$: $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Extrema:

- f hat in x_0 ein lokales **Minimum** $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$: $f(x_0) < f(x)$ (**Maximum** analog)
- f hat in x_0 ein globales Minimum $\Leftrightarrow \forall x \in D_f \setminus \{x_0\}$: $f(x_0) < f(x)$ (Maximum analog)
- ist f differenzierbar auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ und hat f in x_0 ein Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$
- ist f nicht differenzierbar auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, *kann* f in x_0 ein Extremum haben
- $f'(x_0) = 0 \wedge$ links von x_0: $f'(x) < 0 \wedge$ rechts von x_0: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ lok. Min. (Max. analog)
- **Kriterium**: f m-mal differenzierbar auf (a,b) mit $a, b \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$ und $x_0 \in (a,b)$
  - $\exists$m gerade: $f'(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0 \neq f^{(m)}(x_0) \Rightarrow$ f hat in x_0 ein Extremum
  - $f^{(m)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum, $f^{(m)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

Krümmungsverhalten:

- f ist **konvex** (linksgekrümmt) $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f$: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ (**konkav** analog)
- x_0 ist **Wendepunkt** $\Leftrightarrow$ links von x_0: f konkav $\wedge$ rechts von x_0: f konvex (oder andersrum)
- **Kriterium**: f 2-mal differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$
  - f ist konvex $\Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $f''(x) \geq 0$, f ist konkav $\Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $f''(x) \leq 0$

- $\exists m$ ungerade: $f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0 \neq f^{(m)}(x_0) \Rightarrow$ f hat in x_0 einen Wendepunkt
- **<u>L'Hospital</u>**: in den Fällen "$\frac{0}{0}$" und "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$ (beachte $g, g' \neq 0$ und $x_0, c \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$)

<u>Taylorpolynome und -reihen:</u>

- $T_{f,n}(x, x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt n-tes **<u>Taylorpolynom</u>** von f mit Entw.pkt. x_0 (**<u>-reihe</u>** für $n=\infty$)
- $\forall x \in (a,b]\ \exists \theta \in (a,x)$: $f(x) = T_{f,n}(x, a) + R_{f,n}(x, \theta)$ mit dem **<u>Restglied</u>** $R_{f,n}(x, \theta) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$
- für ein Polynom P mit Grad n gilt $P(x) = T_{P,n}(x, 0)$. $e^x = T_{e^x}(x, 0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

<u>4. Integralrechnung</u>

- F heißt **<u>Stammfunktion</u>** von f, wenn $F' = f$, auch $\int f(x)dx = F(x) + c$ (**<u>unbestimmtes Integral</u>**)
- $\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$ heißt **<u>bestimmtes Integral</u>** von f (Summe von Flächeninhalten)
- $\int\limits_a^c f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx + \int\limits_b^c f(x)\, dx$ (f muss auf [a,c] keine Stammfunktion haben)
- $\int\limits_0^0 f(x)\, dx = 0$, $\int\limits_a^b f(x)\, dx = -\int\limits_b^a f(x)\, dx$, $\int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx$, $f(x) \leq g(x)$: $\int\limits_a^b f(x)\, dx \leq \int\limits_a^b g(x)\, dx$
- $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx = \lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_a^R f(x)\, dx$, $D_f = (a,b]$: $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx$, $D_f = (a,b)$: $\int\limits_a^c f(x)\, dx = \lim\limits_{a' \to a+} \int\limits_{a'}^b f(x)\, dx + \lim\limits_{c' \to c-} \int\limits_b^{c'} f(x)\, dx$

<u>5. Differentialrechnung in mehreren Variablen</u>

- im Folgenden $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $(\overline{x_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\overline{x^*}$, falls $\lim\limits_{k \to \infty} \left|\left|\overline{x_k} - \overline{x^*}\right|\right| = 0$
- $\lim\limits_{k \to \infty} \overline{x_k} = \overline{x^*} \Leftrightarrow (\overline{x_k})$ konvergiert komponentenweise gegen $\overline{x^*}$. **<u>ε-Kugel</u>** um $\overline{x^*}$: $\{\overline{y} \in \mathbb{R} \mid \left|\left|\overline{x^*} - \overline{y}\right|\right| < \varepsilon\}$
- f hat den **<u>Grenzwert</u>** y^* an $\overline{x^*} \Leftrightarrow \forall \overline{x_k} \to \overline{x^*}$: $\lim\limits_{k \to \infty} f(\overline{x_k}) = y^*$. Falls auch $\lim\limits_{k \to \infty} f(\overline{x_k}) = f(\overline{x^*})$, f **<u>stetig</u>** an $\overline{x^*}$
- die **<u>part. Ableitung</u>** $\frac{df}{dx_i} = f_{x_i}$ ist f', wobei man Variablen außer x_i als konstant annimmt
- sind die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} stetig, gilt $f_{xy} = f_{yx}$
- $\nabla f(\overline{x^*}) = \left(f_{x_1}(\overline{x^*}), \ldots, f_{x_n}(\overline{x^*})\right)$ heißt **<u>Gradient</u>** von f in $\overline{x^*}$
- $Hess_f(\overline{x^*}) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\overline{x^*}) & \ldots & f_{xy}(\overline{x^*}) \\ f_{yx}(\overline{x^*}) & \ldots & f_{yy}(\overline{x^*}) \end{pmatrix}$ heißt **<u>Hesse-Matrix</u>** von f in $\overline{x^*}$ (symmetrisch, falls alle f_* stetig!)
- symm. $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv (semi-)**<u>definit</u>** $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ ($\lambda_i \geq 0$) (negativ analog, **<u>indefinit</u>** sonst)
- f hat in $\overline{x^*}$ ein lokales **<u>Minimum</u>** $\Leftrightarrow \exists \varepsilon$-Kugel $\forall \overline{x}$ in ε-Kugel: $f(\overline{x^*}) \leq f(\overline{x})$ (**<u>Maximum</u>** analog)
- **<u>Kriterium für Extrema</u>**: $\nabla f(\overline{x^*}) = (0, \ldots, 0)$ und $Hess_f(\overline{x^*})$ definit $\Rightarrow$ f hat in $\overline{x^*}$ ein Extremum
  positiv (negativ) definit $\Rightarrow$ lok. Min. (Max.), indef. $\Rightarrow$ kein Extremum, semidef. $\Rightarrow$?

<u>7. Lagrange-Multiplikatoren-Methode</u>

- Extremum von f unter Nebenbedingungen $g_m(x_1, \ldots, x_n) = c_m$ bestimmen
- **<u>Lagrange-Funktion</u>**: $L(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \cdot (g_1(x_1, \ldots, x_n) - c_1) + \ldots + \lambda_m \cdot (g_m(x_1, \ldots, x_n) - c_m)$
- **<u>Notwendige Bedingung</u>**: $\overline{x^*}$ ist lok. Extremum $\wedge\ \nabla g_i(\overline{x^*}) \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$: $\nabla L(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, \overline{x^*}) = 0$

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)	Ableitungsregeln	f(x)	F(x)	Integrationsregeln
ax+b	a	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	(u+v)' = u' + v'	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$	∫λf = λ·∫f
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	ln x	$\frac{1}{x}$	(λv)' = λv'	$\frac{1}{x}$	ln |x|	∫(f+g) = ∫f + ∫g
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	sin x	cos x	(uv)' = u'v + uv'	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$	∫fg' = fg - ∫f'g
e^x	e^x	cos x	-sin x	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax}$	∫f(g)·g' = F(g)+c
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	tan x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	(u∘v)' = u'(v)·v'	tan x	-ln |cos x|	∫ln x = x·ln x - x

$\int f(g(x))\, dx = \frac{F(g(x))}{g'(x)} + c$ $\int g^n(x)\, g'(x)\, dx = \frac{1}{n+1} g^{n+1}(x) + c$ $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln|g(x)| + c$ $\int \frac{g'(x)}{g^n(x)}\, dx = \frac{-1}{(n-1)\, g^{n-1}(x)} + c$ $\int g'(x)\, e^{g(x)}\, dx = e^{g(x)} + c$

がんばって！ =)

"Sie leben ab jetzt in der Unendlichkeit!"