1. Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie (ZE=Zufallsexperiment, WK=Wahrscheinlichkeit)

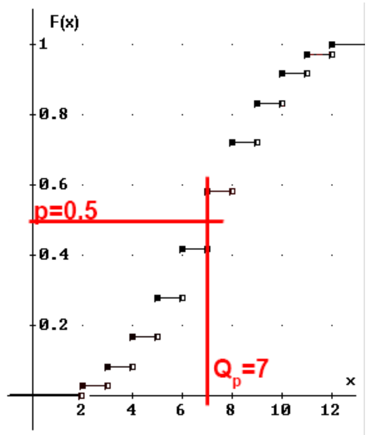
- Der **Ereignisraum** Ω ist die Menge der **Ergebnisse** eines ZE. Im Folgenden $A,B,\ldots \subseteq \Omega$.
- Teilmengen von Ω heißen **Ereignisse**. Ist das Ergebnis eines ZE in A, ist A eingetreten
- $|A|=1 \Rightarrow$ Elementarereignis, $A=\Omega \Rightarrow$ sicheres Ereignis, $A=\varnothing \Rightarrow$ unmögliches Ereignis
- $A\cap B=\varnothing \Rightarrow$ A, B **unvereinbar**, $\bar{A} = \Omega\setminus A \Rightarrow$ Gegenereignis, $A\cap B \Leftrightarrow$ A und B, $A\cup B \Leftrightarrow$ A oder B
- Sei $|\Omega| \leq |\mathbb{N}|$. (Ω, P) mit $P: 2^{\Omega}\to\mathbb{R}$ heißt **WK-Raum** gdw.
  $P(A)\geq 0\ \forall A\subset\Omega$ und $P(\Omega)=1$ und $P(A_1\cup A_2\cup\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$ für $A_1,A_2,\ldots$ paarweise disjunkt
- $P(\omega)=P(\{\omega\})$. Kennt man $P(\omega)\ \forall\omega\subseteq\Omega$, kennt man das gesamte WK-Maß

$P(\bar{A}) = P(\Omega\setminus A)=1-P(A)$	$P(A\mid B) = P(A\cap B)/P(B)$ (**bedingte WK**)	A,B **unabhängig** $\Leftrightarrow$
$P(\varnothing) = 0$	$= P(A)/P(B)\cdot P(B\mid A)$ (**Bayes**)	$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$
$P(A\cup B)= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$	$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A\mid B) = P(A)\cdot P(B\mid A)$	$A_1,\ldots,A_n$ unabh.$\Leftrightarrow$ *jede*
$A\subseteq B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$	unabh. $\Rightarrow P(A\mid B) = P(A) \wedge P(B\mid A) = P(B)$	Teilmenge unabh.!

- $|\Omega|<|\mathbb{N}|$, $P(\omega)=1/|\Omega|$, dann $P(A)=|A|/|\Omega|$ und (Ω, P) WK-Raum, ZE ist **Laplace-Experiment**
- (Ω, P_B) mit $P_B(A) := P(A\mid B)$ ist WK-Raum
- **totale WK**: Für paarweise unvereinbare A_i mit $\Omega = \cup A_i$ und $B \subseteq \Omega$ gilt $P(B) = \Sigma P(A_i\cap B)$
- Mehrstufige Zufallsexperimente: $P(\omega_1,\ldots,\omega_n) = \Pi P_i(\omega_i)$
- **Kombinatorik**: $\binom{n}{k}=n!/(k!\cdot(n-k)!)$, $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{1}=n$, Anz. Teilmengen $A\subseteq B$ mit $|A|=k$, $|B|=n$

Permutation (mit Reihenf.)	**Variation** (mit Reihenf.)	**Kombination** (ohne Reihenf.)
$n!$ (n unterschiedl. Dinge) $n!/k!$ (unter n k gleiche)	$n!/(n-k)!$ (n einmalige) n^k (n wiederverwendbare)	$\binom{n}{k}$ (n einmalige) (#Teilmengen!) $\binom{n+k-1}{k}$ (n wiederverwendbare)

2. Zufallsvariablen (=ZV)



- $X: \Omega\to\mathbb{R}$ heißt **Zufallsvariable**, Bild(X) sind **Realisierungen**
- **Verteilungsfunktion** $F: \mathbb{R}\to[0,1]$ mit $F(x)=P(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\leq x\})=P(X\leq x)$
- X ist dann F-verteilt (X~F). Zunächst der **diskrete Fall**:
- die Abbildung $P(X=x_i)$ für Realisierungen x_i heißt **WK-Verteilung**
- $P(x<X\leq y) = F(y)-F(x)$, $P(X=x^*)=\text{limr}_{x^*}F(x)-\text{liml}_{x^*}F(x)$
- F ist mon. wachsend & rechtss. stetig, $\lim_{-\infty}F(x)=0$, $\lim_{\infty}F(x)=1$
- Q_p ist **p-Quantil** $\Leftrightarrow \text{liml}_{Qp}F(x)\leq p\leq F(Q_p)$, $Q_{0.5}$ heißt **Median**
- **Bernoulli-ZE**: zwei Ergebnisse mit Erfolgs-WK p. Bei n Wiederholungen (p unabhängig!) ist X (Anzahl Erfolge) **binomialverteilt**

	Erwartungswert	**Varianz**
diskret	$E(X)=\mu = \Sigma_{1;\infty}x_i\cdot P(X=x_i)$	$V(X)=\sigma^2 = \Sigma_{1;\infty}(x_i-\mu)^2\cdot P(X=x_i) = E(X^2)-\mu^2 = E((X-\mu)^2)$
stetig	$= \int_{-\infty;\infty}x\cdot f(x)dx$	$= \int_{-\infty;\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx = \int_{-\infty;\infty}x^2\cdot f(x)dx-\mu^2$
+	$E(aX+b) = a\mu+b$	$V(aX+b) = a^2\cdot\sigma^2$
	$E(aX+Y) = aE(X)+E(Y)$	$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2C(X,Y)$ (C: **Kovarianz**)
·	unabh. $\Leftrightarrow E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$	unabh. $\Leftrightarrow V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

- $(X-\mu)/\sigma$ hat *immer* Erwartungswert 0 und Varianz 1 (für $\sigma\neq 0$)
- $X_1,\ldots,X_n$ bzw. X,Y **unabhängig** $\Leftrightarrow P(\cap X_i=x_i)=\Pi P(X_i=x_i) \Leftrightarrow C(X,Y):=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)=0$
- **Korrelationskoeffizient**: $C(X,Y)/\sqrt{V(X)*V(Y)}$
- für $X'_n=1/n\cdot(X_1+\ldots+X_n)$, X_i identisch verteilt und unabhängig gilt $\lim_{n;\infty}P(|X'_n-\mu|<\varepsilon)=1$ und $\lim_{n;\infty}P(|(X'_n-\mu)/\sqrt{\sigma^2/n}|\leq z)=\Phi(z)$ (das arithm. Mittel ist asympt. $N(\mu,\sigma^2/n)$-verteilt)
- Im **kontinuierlichen Fall**: Verteilungsfunktion F(x) wie oben, statt WK-Verteilung **Dichtefunktion** $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, f integrierbar, $\int_{-\infty;\infty}f(x)dx=1$, $F(x)=\int_{-\infty;x}f(x)dx$. Dann auch $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)=\int_{a;b}f(t)dt$ ($\leq$,$<$ gleichwertig!), insb. $P(X=x)=0$.

Binomialvtlg. $B(n,p)$	**Hypergeom.** $H(n,M,N)$	**Poissonvtlg.** $P(\lambda)$
$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ n: Stufen p: Erfolgs-WK $\mu = np$ $\sigma^2 = np(1-p)$	$P(X=k) = \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} / \binom{N}{n}$ N Dinge, M anders n gezogen, k anders $\mu = n\cdot L$ mit $L=M/N$ $\sigma^2 = n\cdot L\cdot(1-L)\cdot\frac{N-n}{N-1}$	$P(X=k) = \lambda^k/k!\cdot e^{-\lambda}$ λ: Anz. seltener Ereignisse $\mu = \sigma^2 = \lambda$
Normalvtlg. $N(\mu,\sigma^2)$	**Gleichvtlg.** $I=[a,b]$	**Exponentialv.** $Exp(\lambda)$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $F(x) = \Phi((x-\mu)/\sigma)$ $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ $(X-\mu)/\sigma$ ist immer standardnormalvtlt.	$f(x) = 1/(b-a)$ auf I 0 sonst $P(X\in[c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$ $\mu = (b+a)/2$ $\sigma^2 = (b-a)^2/12$	$f(x) = \lambda\cdot e^{-\lambda x}$ für $x>0$ 0 sonst $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$ für $x\geq 0$ 0 sonst $\mu = 1/\lambda$ $\sigma^2 = 1/\lambda^2$

$\chi^2(m)=\Gamma(m/2,½)$
$X\sim\chi^2(m)$, $Z\sim N(0,1)$:
$t(m)=Z/\sqrt{X/m}$
$t(m)$ ist $\approx N(\mu,\sigma^2)$!

Sei $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, dann $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$ und $\frac{n-1}{\sigma^2}\overline{S_X}^2\sim\chi^2(n-1)$ und $(\overline{X}-\mu)/(\overline{S_X}/\sqrt{n})\sim t(n-1)$.
Sei $X\sim B(1,p)$, dann asymptotisch $\overline{X}\sim N(p,p(1-p)/n)$.

$H(n,M,N) \approx B(n,M/N)$ für $n/N < 0.05$

- **Approximationen**:
  $X\sim B(n\geq 50,\ p\leq 0.1) \Rightarrow P(X=k) \approx \lambda^k/k!\cdot e^{-\lambda}$ mit $\lambda = np$ (Binomial- durch Poissonvtlg.)
  $X\sim P(\lambda\geq 9) \Rightarrow P(X\leq k) \approx \Phi((k+½-\lambda)\ /\sqrt{\lambda})$ (Poisson- durch Normalvtlg.)
  $X\sim B(n,p)$, $np(1-p)\geq 9 \Rightarrow P(X\leq k) \approx \Phi((k+½-np)/\sqrt{np(1-p)})$ (Binomial- durch Normalvtlg.)
  $P(a\leq X\leq b) \approx \Phi((b+½-np)/\sqrt{np(1-p)})$
  $-\Phi((a-½-np)/\sqrt{np(1-p)})$
- X_1,X_2 unabh. und $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. Dann $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

3. Statistik

- **Stichprobe** vom Umfang n, h_i: abs. Häufigk. des Merkmals a_i, x_i: Merkmal des Elements i
- empirischer **Mittelwert**: $\bar{x} = 1/n\cdot\Sigma x_i$
- empirische **Varianz**: $\overline{s_x}^2 = 1/(n-1)\cdot\Sigma(x_i-\bar{x})^2$
- empirische **Verteilungsfkt**.: $\overline{F_n(x)} = 1/n\cdot|\{i|x_i\leq x\}|$

Erwartungstreue und konsistente Stichprobenfunktionen, wenn man x als ZV X auffasst.

- empirisches **p-Quantil** für geordnete x_i: $\hat{x}_p = x_{floor(np)+1}$ für $np\notin\mathbb{N}$, $½(x_{np}+x_{np+1})$ sonst
- empirische **Kovarianz**: $s_{x,y} = 1/(n-1)\cdot\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$, Korrelationskoeff.: $r_{x,y} = s_{x,y}/(s_x\cdot s_y)$

4. Induktive Statistik (KI=**Konfidenzintervall**)

Sei $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. Finde KI $I(\omega)$ mit $P(\theta\in I(\omega))=1-\alpha$ ($1-\alpha$ **Konfidenzniveau**, θ ein Parameter):

σ^2 bekannt		σ^2 unbekannt	σ^2 gefragt
μ gefragt (*Fall 1*)	μ gefragt (1-seitig)	μ gefragt	μ unbekannt
Gegeben: α n $\overline{X}$ $z_{1-\alpha/2}$	α n $\overline{X}$ $z_{1-\alpha}$	α n $\overline{X}$ $\overline{S_X}$ $t_{n-1,1-\alpha/2}$	α n $\overline{S_X}^2$ $c_{n-1,\alpha/2}$ $c_{n-1,1-\alpha/2}$
$[\overline{X}-\sigma z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n},$ $\overline{X}+\sigma z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]$	$(-\infty,\ \overline{X}+\sigma z_{1-\alpha}/\sqrt{n}]$ $[\overline{X}-\sigma z_{1-\alpha}/\sqrt{n},\ \infty)$	$[\overline{X}-t_{n-1,1-\alpha/2}\overline{S_X}/\sqrt{n},$ $\overline{X}+t_{n-1,1-\alpha/2}\overline{S_X}/\sqrt{n}]$	$[(n-1)\overline{S_X}^2/c_{n-1,1-\alpha/2},$ $(n-1)\overline{S_X}^2/c_{n-1,\alpha/2}]$

- z_α, $t_{n,\alpha}$, $c_{n,\alpha}$ sind die Quantile der Normal-, t- und χ^2-Verteilung
- für den *Fall 1* ist $n \geq 4(z_{1-\alpha/2})^2\sigma^2/\delta^2$, wenn die Intervalllänge höchstens δ sein soll
- ein KI ist ein **Hypothesentest**. Dabei $H_0=\theta\in\Theta_0$, $H_1=\theta\in\Theta_1$, A_0=Annahme-, A_1=Ablehnungsbereich, α **Signifikanzniveau**
- **Gauß-Test**: $H_0=\mu>\mu_0$, $H_1=\mu\leq\mu_0$. $P(A_0|H_1)=P((\overline{X}-\mu_0)/\sqrt{\sigma^2/n}\geq k)\leq\alpha$
  $H_0=\sigma^2>\sigma^2_0$, $H_1=\sigma^2\leq\sigma^2_0$. $P(A_0|H_1)=P((n-1)\overline{X}/\sigma^2\geq k)\ \leq\alpha$

	Ergebnis liegt im Annahmebereich	Ergebnis liegt im Ablehnungsbereich
Hypothese ist wahr	Entscheidung richtig	Fehler 1. Art
Hypothese ist falsch	Fehler 2. Art	Entscheidung richtig

5. *Numerik* - *5.1 Approximation*

- für n+1 **Stützstellen** (x_i,y_i) existiert das **Interpolationspolynom** $p(x)=\Sigma a_i x^i$ mit $p(x_i)=y_i$
- naiv: LGS mit Bedingungen $p(x_i)=y_i$ nach a_i's lösen
- **Horner-Schema**: $f(x)=(\dots(a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\dots)x+a_0$ minimiert die Multiplikationen

i	x_i \ j	0	1	2	3
		α_{i0}	α_{i1}	α_{i2}	α_{i3}
0	0	0			
1	1	2	2		
2	-2	2	0	1	
3	-1	2	0	0	1

Newton n=3

y_i
α_{ii}

Lagrange	**Neville**	**Newton**	**Splines** (Grad k)
$L_i(x)=\Pi_{j=0,j\neq i;n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ $p(x)=\Sigma y_i L_i(x)$	$p_{i,0}(x)=y_i$ $p_{i,j}(x)=\frac{(x-x_{i-j})p_{i,j-1}(x)-(x-x_i)p_{i-1,j-1}(x)}{x_i-x_{i-j}}$ $p(x)=p_{n,n}(x)$	$\alpha_{i,0}=y_i$ $\alpha_{i,j}=\frac{\alpha_{i,j-1}-\alpha_{i-1,j-1}}{x_i-x_{i-j}}$ $p(x)=\Sigma\alpha_{i,i}\cdot\Pi_{j=0;i-1}(x-x_j)$	$p_i(x_i)=y_i$ $p_i(x_{i+1})=y_{i+1}$ $p_i^{(s)}(x_{i+1})=p_{i+1}^{(s)}(x_{i+1})$ $s\leq k-1$, k-1 zus. Bed.

5.2 Numerische Integration

$\int_{a;b}f(x)dx \approx \Sigma f(z_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)$, x_i sind n Unterteilungen von [a,b], z_i sind Zwischenwerte

$\approx h\cdot\Sigma\alpha_{i,n}f(x_i)$ mit $x_i=a+i\cdot h$, $h=(b-a)/n$,

$\alpha_{i,n} = \int_{0;1}\Pi_{j=0,j\neq i;n}\frac{x-j}{i-j}dx$ (**Newton-Cotes**)

$\alpha_{i,n}$	i=0	i=1	i=2	i=3
n=1	1/2	1/2		
n=2	1/3	4/3	1/3	
n=3	3/8	9/8	9/8	3/8

5.3 Nullstellenbestimmung

- **Newton-Verfahren**: $x^{(0)}\in[a,b]$, $x^{(k+1)}=x^{(k)}-f(x^{(k)})/f'(x^{(k)})$
- **Sekanten-Verfahren**: $x^{(0)},x^{(1)}\in[a,b]$, $x^{(k+1)}=x^{(k)}-f(x^{(k)})\cdot(x^{(k)}-x^{(k-1)})/(f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)}))$

5.4 Numerische lineare Algebra

Ziel ist die Lösung des Gleichungssystems $A\cdot x=b$. Dafür gibt es folgende Zerlegungen:

LU-Zerlegung $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$	**Cholesky-Zerlegung** $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$	**QR-Zerlegung** $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\geq n$
$A=P\cdot L\cdot U$ P Permutations-, L untere, U obere Dreiecksmatrix Gauß-Alg. auf (U=A|P=I|L=I) Zeilentausch in U ⇒ Spaltentausch in P Addiere α-faches in U ⇒ trage -α in L ein	$A=G\cdot G^T$ für A sym. pos. def. G untere Dreiecksmat. Bsp.: $\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{matrix} \cdot \begin{matrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{matrix} = A$ (man darf keine Wurzel aus <0 ziehen und a,c,f müssen >0 sein, dann pos. def.)	$A=Q\cdot R$ für Rang(A)=n⇔det A≠0 Sei $A=(a_i)$. u_i orthogonal mit $u_i=a_i-\Sigma_{j=1;i-1}\langle u_j,a_i\rangle/\Vert u_j\Vert^2\cdot u_j$ $q_i=u_i/\Vert u_i\Vert$ sind normierte u_i Dann $Q=(q_i)$ mit $Q^{-1}=Q^T$ und $R=Q^T A$ obere Dreiecksmatrix. Lösung x minimiert $\Vert Ax-b\Vert$.
$PLU\underline{x}=b$ lösen: Setze $y=Ux$. Löse $L\underline{y}=P^T b$. Löse $U\underline{x}=y$.	$GG^T\underline{x}=b$ lösen: Setze $y=G^T x$. Löse $G\underline{y}=b$. Löse $G^T\underline{x}=y$.	$QR\underline{x}=b$ lösen: Löse $R\underline{x}=Q^T b$. (Probe!)

Man definiert folgende Normen: ($\Vert\cdot\Vert$ ⇒ $\Vert\cdot\Vert_2$)

Vektor	**Summennorm** $\Vert x\Vert_1 = \Sigma\vert x_i\vert$	**euklid. Norm** $\Vert x\Vert_2 = (\Sigma x_i^2)^{½}$	**Maximumnorm** $\Vert x\Vert_\infty = \max\vert x_i\vert$
Matrix	**Spaltensummennorm** $\Vert A\Vert_1 = \max_j \Sigma_i\vert a_{ij}\vert$	$\Vert A\Vert_2 = \max_{x\neq 0}\Vert Ax\Vert_2/\Vert x\Vert_2$ $= \max_{\Vert x\Vert 2=1}\Vert Ax\Vert_2$ **Spektral**	**Zeilensummennorm** $\Vert A\Vert_\infty = \max_i \Sigma_j\vert a_{ij}\vert$

- diese Normen sind **submultiplikativ** ($\Vert AB\Vert\leq\vert\Vert A\Vert\cdot\Vert B\Vert$) und **verträglich** ($\Vert Ax\Vert\leq\Vert A\Vert\cdot\Vert x\Vert$)
- Spektralnorm ist die Wurzel des größten Eigenwertes von $A\cdot A^T$. λ Eigenwert⇔$\det(A-\lambda E_n)=0$
- **Kondition**: $cond(A) = \Vert A\Vert\cdot\Vert A^{-1}\Vert$, cond(orthog. Matrix)=1. Ziel ist minimale Kondition!
- $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ **strikt diagonaldominant** ⇔ $\vert a_{ii}\vert > \Sigma_{j=1,j\neq i;n}\vert a_{ij}\vert$ (Diagonaleint.>restl. Zeileneintr.)
- A str. diag. ⇒ A invertierbar. A str. diag. ∧ $a_{ii} > 0$ ⇒ A positiv definit
- **Iterationsverfahren** zur Lösung von $A\cdot x=b$ mit $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Zerlege dazu in A=L+U+D, L untere Dreiecks-, U obere Dreiecks-, D Diagonalmatrix (L und U haben Diagonale 0). Dann:
- **Jacobi**: $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$, $x^{(k+1)}=D^{-1}(b-(L+U)x^{(k)})$ **Gauß-Seidel**: $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$, $x^{(k+1)}=(D+L)^{-1}(b-Ux^{(k)})$

6. Differenzialgleichungen (=DGL)

- $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ für $y: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt **gewöhnliche DGL n'ter Ordnung** (=DGLn)
  explizit: nach $y^{(n)}$ umgestellt — **autonom**: unabhängig von x
  linear (LDGL): $y^{(n)}(x)=b(x)+\Sigma_{0;n-1}a_i(x)y^{(i)}(x)$ — **homogen**: $b(x)=0$ (sonst **inhomogen**)
  konstante Koeffizienten (KK): a_i unabhängig von x
- für eine hom. LDGL gibt es n linear unabh. Lösungen, die den Lösungsraum aufspannen
- für eine inhom. LDGL sind $y_h + y_p$ Lsg. mit y_h alle hom. und y_p spezieller inhom. Lsg.
- **Wronski-Determinante**: $W(x) = \det(y_1,\dots,y_n;\dots;y_1^{(n-1)},\dots,y_n^{(n-1)})$
- wenn $\Sigma\lambda_i y_i(x)=0 \Rightarrow \lambda_i=0$ oder $\exists x$: $W(x)\neq 0$, dann sind $y_1,\dots,y_n$ **lin. unabh.**
- $y' = a(y-A) \Rightarrow y = A+ce^{ax}$, $y' = a(y-A)^2 \Rightarrow y = A-1/(ax-c)$. Einige Lösungsverfahren:

DGL1: $y' = u(x)\cdot v(y)$ **Trennung der Var.** Bestimme $U(x) = \int u(x)dx$ und $V(y) = \int 1/v(y)dy$ Lsg. ist $V(y) = U(x)+c$ nach y umgestellt	DGL1: **Integration** $y' = a(x)$ Lsg. ist $\int a(x)dx + c$
hom. LDGL1: $y' = a(x)\cdot y$ Bestimme $A(x) = \int a(x)dx$ Lsg. ist $y_h = ce^{A(x)}$	inhom. LDGL1: $y' = a(x)\cdot y + b(x)$ $W(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx$ **Variation d. Konst.** Lsg. ist $y_h + W(x)e^{A(x)}$ (y_h siehe links)
hom. LDGLnKK: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0y = 0$ Finde NS von $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_0=0$ **charakt. Gleichung** k-fache NS α ergibt lin. unabh. Lösungen: reell: $x^je^{\alpha x}$ ($j=0\dots k-1$) komplex: $x^je^{\beta x}\sin\gamma x$ und $x^je^{\beta x}\cos\gamma x$ (für $\alpha=\beta+\gamma i$) Lsg. ist y_h = Linearkomb. aus lin. unabh. Lsg.	inhom. LDGL2KK: $y''+a_1y'+a_0y = b(x)$ y_1, y_2 lin. unabh. homogene Lösungen. $W_1(x) = \int -y_2(x)b(x)/W(x)dx$ $W_2(x) = \int y_1(x)b(x)/W(x)dx$ Lsg. ist $y_h + W_1(x)y_1(x) + W_2(x)y_2(x)$ (y_h siehe links)

Dies & Das

- $\log_a(x\cdot y)=\log_a(x)+\log_a(y)$, $\log_a \frac{x}{y}=\log_a(x)-\log_a(y)$, $\log_a(x^b)=b\cdot\log_a(x)$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $T_{f,n}(x,x_0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt n-tes **Taylorpolynom** von f mit Entw.pkt. x_0 (**-reihe** für $n=\infty$)
- **Komplexe Zahlen**: Polardarstellung: $z=|z|\cdot(\cos\phi+i\cdot\sin\phi)=|z|\cdot e^{\phi i}$, $\cos\phi = \frac{Re(z)}{|z|}$, $\sin\phi = \frac{Im(z)}{|z|}$
  $\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{|z|}\cdot(\cos\frac{\phi}{n} + i\cdot\sin\frac{\phi}{n})\cdot\omega_n^k$ mit $k=0,\dots,n-1$ und n-ter Einheitswurzel $\omega_n^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$, $\omega_n^0 = 1$

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)	Ableitungsregeln	f(x)	F(x)	Integrationsregeln
$ax+b$	a	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$(u+v)' = u' + v'$	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\int\lambda f = \lambda\cdot\int f$
x^a	$a\cdot x^{a-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(\lambda v)' = \lambda v'$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\int(f+g) = \int f + \int g$
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$	$\sin x$	$\cos x$	$(uv)' = u'v + uv'$	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x$	$\int fg' = fg - \int f'g$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\int f(g)\cdot g' = F(g)+c$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(u\circ v)' = u'(v)\cdot v'$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\int\ln x = x\cdot\ln x - x$

$\int f(g(x))\,dx = \frac{F(g(x))}{g'(x)} + c$ $\quad\int g^n(x)\,g'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}g^{n+1}(x) + c$ $\quad\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c$ $\quad\int\frac{g'(x)}{g^n(x)}\,dx = \frac{-1}{(n-1)\,g^{n-1}(x)} + c$ $\quad\int g'(x)\,e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + c$

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
arc	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Trigonometrie: $\sin^2x+\cos^2x = 1$
$\tan x = \sin x/\cos x$
$\sin(x\pm y) = \sin x\cdot\cos y\pm\cos x\cdot\sin y$
$\cos(x\pm y) = \cos x\cdot\cos y\mp\sin x\cdot\sin y$

"Man macht das in der Praxis eher nur theoretisch!"