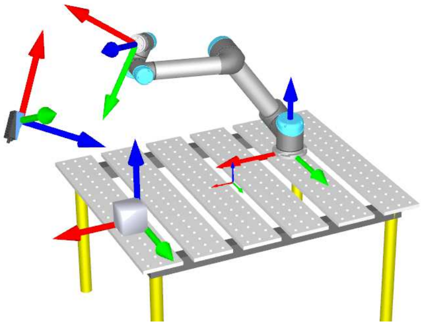
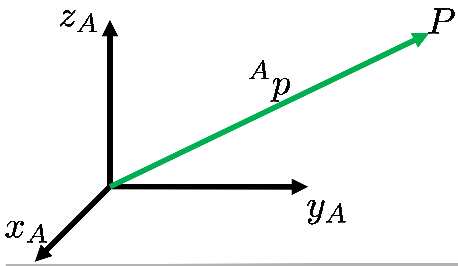
Grundbegriffe

Kartesische Koordinatensysteme

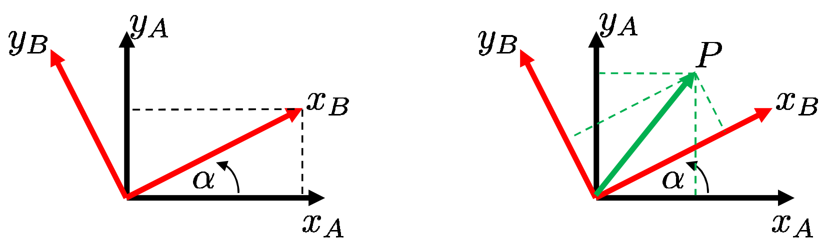


Jeder Punkt im Raum kann mit seinen Koordinaten im Koordinatensystem beschrieben werden



$$ {}^A p = {}^A\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} $$

2D Rotation



Rotationsmatrix $$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$ {}^A R_B = R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} $$

„dreht von A auf B"
"transformiert von B nach A"

Rechenregeln $$R^{-1} = R^T = {}^B R_A = R(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Koordinatentransformation $${}^A p = {}^A R_B \, {}^B p$$

Beispiel

B ist gegenüber A um 30° gedreht $R(30^\circ) =$

Einheitsvektoren

$$^{B}x_B = {}^{B}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad {}^{A}x_B =$$

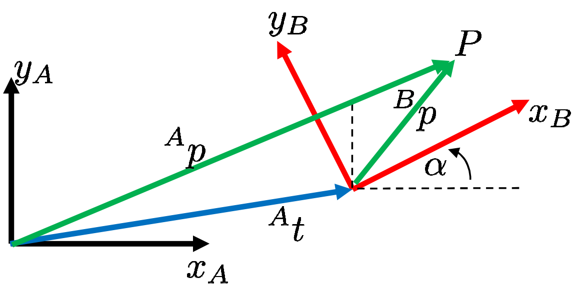
$$^{A}y_B =$$

$$^{B}x_A =$$

$$^{B}y_A =$$

2D Koordinatensysteme

Koordinatensystem B ist gegenüber A verschoben und verdreht.



Die Vektoren müssen im gleichen Koordinatensystem dargestellt sein

$$^{A}p = {}^{A}R_B\,{}^{B}p + {}^{A}t = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} {}^{B}\begin{bmatrix}p_x\\p_y\end{bmatrix} + {}^{A}\begin{bmatrix}t_x\\t_y\end{bmatrix}$$

Umschreiben auf Matrix-Vektor-Multiplikation

$$^{A}p = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & t_x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & t_y \end{bmatrix} {}^{B}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{A}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & t_x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{B}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

homogene Koordinaten

$$^{A}\tilde{p} = \begin{bmatrix} ^{A}R_B & ^{A}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{B}\tilde{p}$$

$$^{A}\tilde{p} = {}^{A}T_B \, {}^{B}\tilde{p}$$

homogene Transformationsmatrix

Rechenregel

$$^{A}T_B \, {}^{B}T_C = \begin{bmatrix} ^{A}R_B & ^{A}t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}R_C & ^{B}t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ^{A}R_B \, {}^{B}R_C & ^{A}R_B \, {}^{B}t_2 + {}^{A}t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}T_C$$

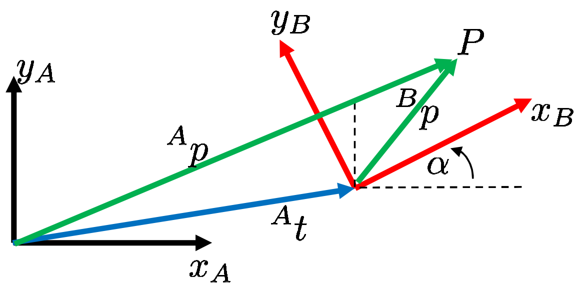
$$({}^{A}T_B)^{-1} = {}^{B}T_A = \begin{bmatrix} ^{B}R_A & -{}^{B}R_A \, {}^{A}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel

$$\alpha = 30^\circ$$

$$^{A}t = {}^{A}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{B}p = {}^{B}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

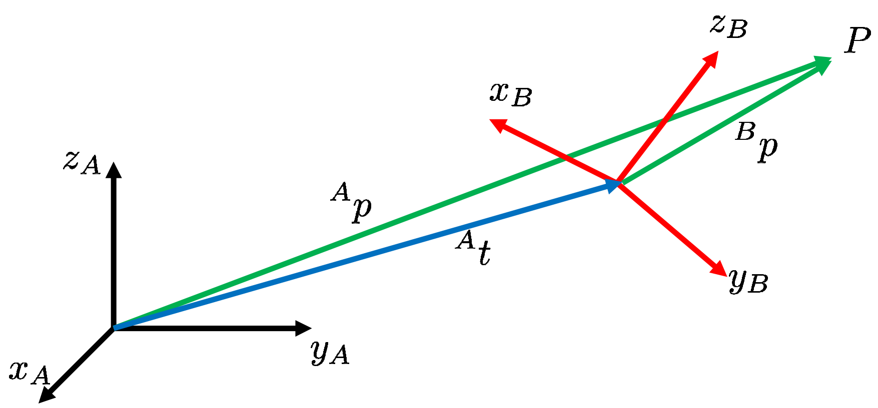


$$^{A}\tilde{p} =$$

Ursprung von {A} in {B}

$$^{B}\tilde{o} =$$

3D Koordinatensysteme



3D Rotation

Es gibt unterschiedliche Darstellungen von 3D-Rotationen:

- Drehachse / -winkel

- Eulerwinkel (Winkel und Drehreihenfolge)

- Quaternionen

Man kann die Darstellungen ineinander umrechnen.

Wichtig für die Kinematik ist die Umrechnung von / zu einer Rotationsmatrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Rotationsmatrix: die Spalten sind die Koordinatenachsen des B-Systems dargestellt im A-System

Rotationsmatrix

$${}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}X_{B} & {}^{A}Y_{B} & {}^{A}Z_{B} \end{bmatrix}$$

Die Spalten sind die Koordinatenachsen des B-Systems dargestellt im A-System

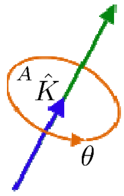
Die 9 Parameter sind nicht unabhängig. Es gibt 6 Nebenbedingungen (3 für Einheitslänge, 3 für paarweise Orthogonalität)

Darstellung mit Rotationsachse und Winkel

Anwendung: Universal Robots, Parameter rx, ry, rz

Rotationsachse (normiert) $\quad {}^{A}\hat{K} = {}^{A}\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$

Drehwinkel $\quad \theta$



Anstatt der 3+1 = 4 Parameter wird oft die Kombination (Multiplikation von Achse und Winkel) angegeben

$$ {}^{A}\hat{K}\theta = {}^{A}\begin{bmatrix} k_x\theta \\ k_y\theta \\ k_z\theta \end{bmatrix} = {}^{A}\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} $$

Der Winkel berechnet sich somit $\quad \theta = \left\| {}^{A}\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

Berechnung der Rotationsmatrix

$$ {}^{A}R_B = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix} $$

mit $\quad v\theta = 1 - \cos\theta$

Berechnung des Winkel und der Achse

$$\theta = acos(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2})$$

$${}^{A}\hat{K} = {}^{A}\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Anmerkung: In der Bildverarbeitungsbibliothek OpenCV gibt es für diese Berechnungen die Funktion Rodrigues()

Winkeldarstellung

Nach Euler lässt sich jede Rotation durch drei Rotationen um unterschiedliche Koordinatenachsen darstellen

Einzelachsrotationen

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es gibt insgesamt 12 Kombinationen von Drehreihenfolgen

Eulersche Drehreihenfolgen:

XYZ, XZY, YZX, YXZ, ZXY, ZYX

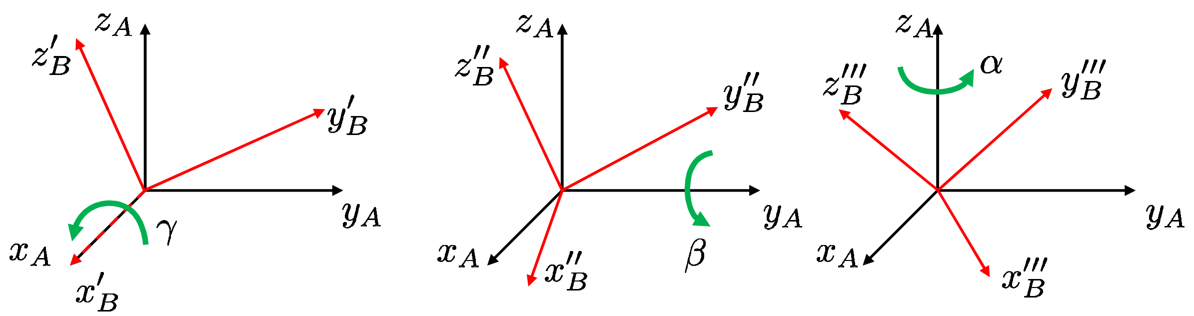
Kardanische Drehreihenfolgen:

XYX, XZX, YXY, YZY, ZXZ, ZYZ

Die drei Winkel nennt man Eulerwinkel

X-Y-Z-(fixed)-Darstellung (KUKA, Motoman, Fanuc)

Rotation um ein festes Koordinatensystem
1. Rotation um x-Achse um Winkel gamma (roll)
2. Rotation um y-Achse um Winkel beta (pitch)
3. Rotation um z-Achse um Winkel alpha (yaw)
(nennt man roll-pitch-yaw oder Roll-Nick-Gier)



Berechnung der Rotationsmatrix

$$^{A}R_B = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

Berechnung der Winkel

gegeben: $^{A}R_B = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

gesucht: α, β, γ

$$\beta = atan2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})$$

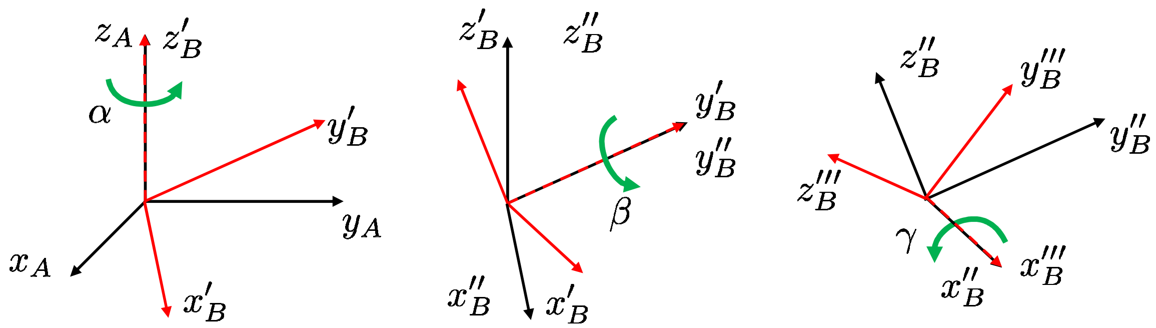
$$\alpha = atan2(r_{21}/\cos(\beta), r_{11}/\cos(\beta))$$

$$\gamma = atan2(r_{32}/\cos(\beta), r_{33}/\cos(\beta))$$

Singularität bei $\beta = 90^\circ$

Z'-Y'-X'-Darstellung

Rotation um aktuelle / mitdrehende Koordinatensysteme
1. Rotation um z-Achse um Winkel alpha
2. Rotation um neue y-Achse um Winkel beta
3. Rotation um neue x-Achse um Winkel gamma



Berechnung der Rotationsmatrix

$$^{A}R_{B} = {}^{A}R_{B'} \, {}^{B'}R_{B''} \, {}^{B''}R_{B'''}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

→ 3 Rotationen um feste Achsen ergeben die gleiche Orientierung wie die 3 Rotationen um bewegte Achsen in umgekehrter Reihenfolge

Z-Y-Z-Darstellung

1. Rotation um z-Achse um Winkel alpha
2. Rotation um y-Achse um Winkel beta
3. Rotation um z-Achse um Winkel gamma

$$ {}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} $$

Inverses Problem

$$ \beta = atan2(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}) $$

$$ \alpha = atan2(r_{23}/\sin(\beta), r_{13}/\sin(\beta)) $$

$$ \gamma = atan2(r_{32}/\sin(\beta), -r_{31}/\sin(\beta)) $$

Singularität bei $\beta = 0°$

Z-Y-X-Darstellung (bzw. X'-Y‘-Z‘-Darstellung) (Stäubli)

1. Rotation um z-Achse um Winkel gamma
2. Rotation um y-Achse um Winkel beta
3. Rotation um x-Achse um Winkel alpha

$$ {}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta \\ -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix} $$

Inverses Problem

$$ \beta = atan2(r_{13}, \sqrt{r_{23}^2 + r_{33}^2}) $$

$$ \alpha = atan2(-r_{23}/\cos(\beta), r_{33}/\cos(\beta)) $$

$$ \gamma = atan2(-r_{12}/\cos(\beta), -r_{11}/\cos(\beta)) $$

Singularität bei $\beta = 90°$

3D Position und Orientierung

$$^{A}\tilde{p} = {}^{A}T_{B}\, {}^{B}\tilde{p}$$

$$^{A}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_B & {}^{A}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{B}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rechenregeln wie bei 2D

Beispiel

{B} ist gegenüber {A} um 30° um z-Achse gedreht und um $^{A}t = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ verschoben

$$^{A}T_{B} =$$

$$^{B}T_{A} =$$