Ziele der Trajektorienplanung:

- Berechnung eines zeitlichen Verlaufs von einem Startpunkt zu einem Endpunkt

- zeitliche Diskretisierung (Sollwert für Gelenkregler)

- Glattheitsanforderungen an Trajektorie

- Einhaltung von Nebenbedingungen (max. Geschwindigkeit)

- Synchronisierung der Achsen





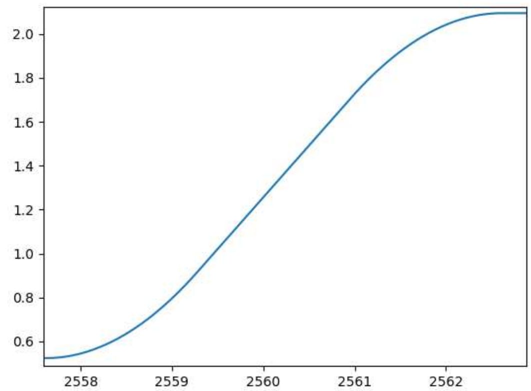
**Beispiel UR3**

Drehung des ersten Motors von 30° (0,5236 rad) auf 120° (2,0944 rad) in 5 Sekunden

```
movej([d2r(30),d2r(-90),0,d2r(-90),0,0])
movej([d2r(120),d2r(-90),0,d2r(-90),0,0],t=5)
```

Aufzeichnung aus URSim mit RTDE

Gelenkwinkel Motor 1



PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com



## 1. Ansatz: Gelenkwinkel linear

Ansatz: $q(t) = a_0 + a_1 t$ Polynom 1. Grades

Bedingungen: $q(t_0 = 0) = q_0$

$q(t_1) = q_1$

Lösung: $t = 0 \rightarrow a_0 + a_1 0 = a_0 = q_0$

$t = t_1 \rightarrow a_0 + a_1 t_1 = q_1$

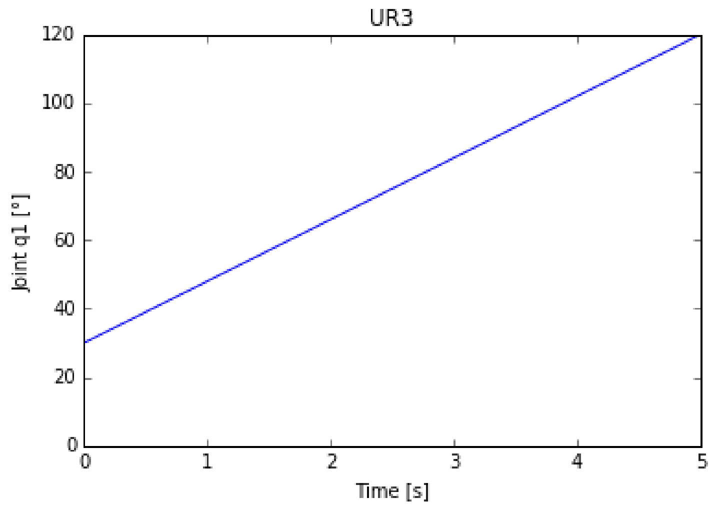
$$a_1 = \frac{q_1 - q_0}{t_1}$$

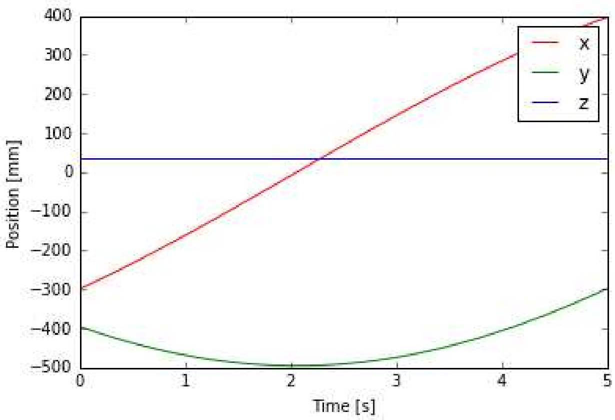
Beispiel: $q_0 = 30^\circ, q_1 = 120^\circ, t_1 = 5s$

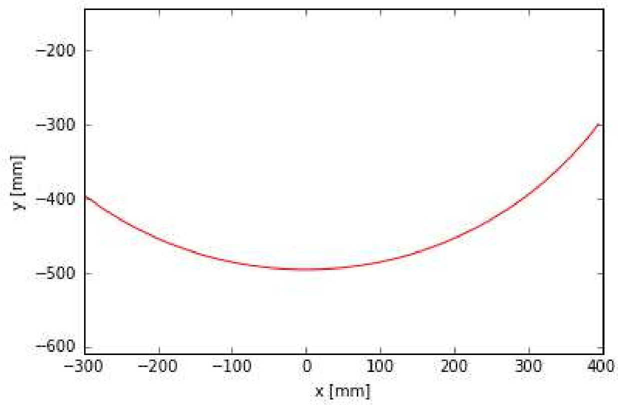




$$q_0 = 30^\circ, q_1 = 120^\circ, t_1 = 5s$$

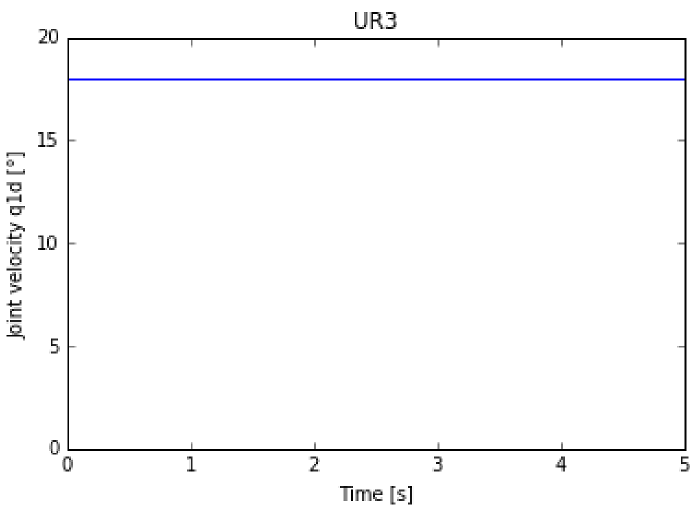



Position [mm]
Time [s]
x
y
z


y [mm]
x [mm]






UR3
Joint velocity q1d [°]
Time [s]

## 2. Ansatz: Gelenkwinkel kubisch

Ansatz: $q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ Polynom 3. Grades

Ableitungen: $\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

$$\ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

Bedingungen: $q(t_0 = 0) = q_0$

$$q(t_1) = q_1$$

$$\dot{q}(t_0 = 0) = 0$$

$$\dot{q}(t_1) = 0$$



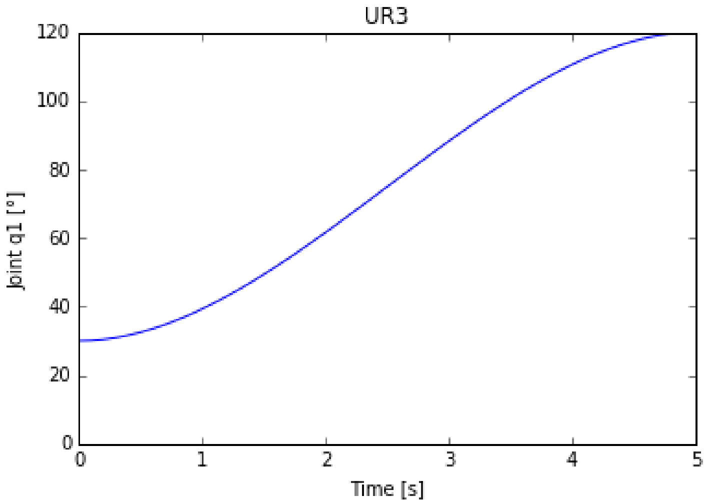


## Lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \dot{q}(t_0) = 0 \\ \dot{q}(t_1) = 0 \end{bmatrix}$$

## Vorwärtskinematik UR3

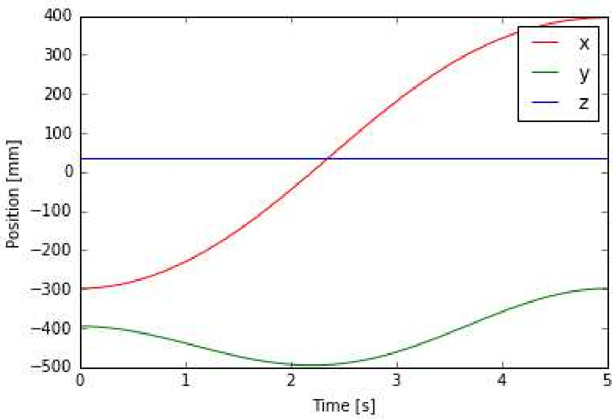
$$q_0 = 30°, q_1 = 120°, t_1 = 5s$$

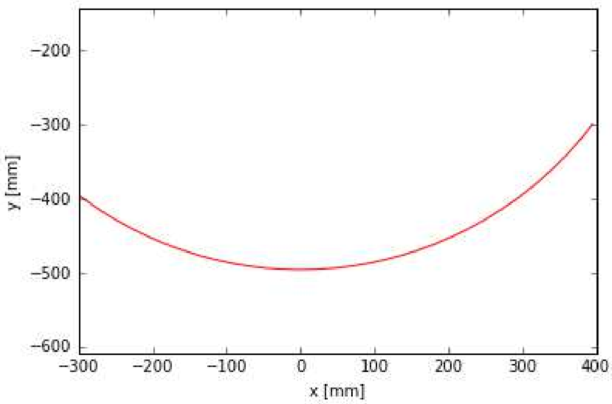







## Vorwärtskinematik UR3

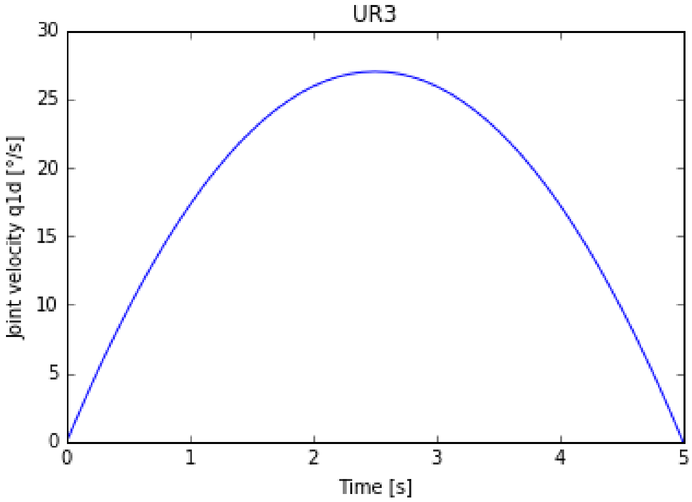


PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com



## Vorwärtskinematik UR3

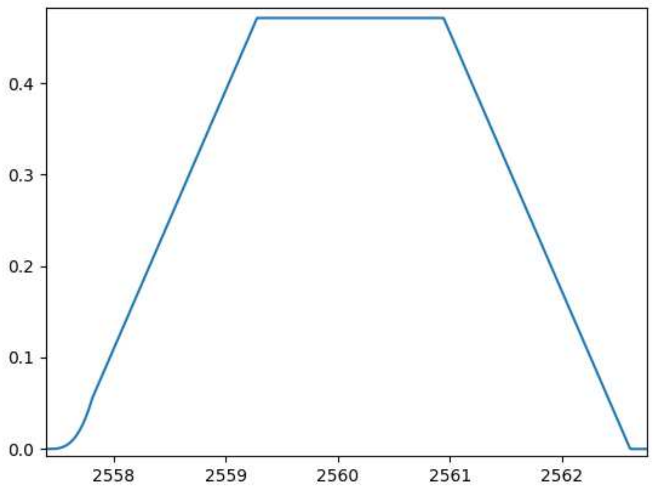







## Aufzeichnung aus URSim mit RTDE

## Gelenkgeschwindigkeit Motor 1



## 3. Ansatz: Gelenkwinkel 5. Ordnung

Ansatz: $q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_5 t^5$ Polynom 5. Grades

Ableitungen: $\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$

$$\ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

Bedingungen:

$$q(t_0 = 0) = q_0$$

$$q(t_1) = q_1$$

$$\dot{q}(t_0 = 0) = 0$$

$$\dot{q}(t_1) = 0$$

$$\ddot{q}(t_0 = 0) = 0$$

$$\ddot{q}(t_1) = 0$$





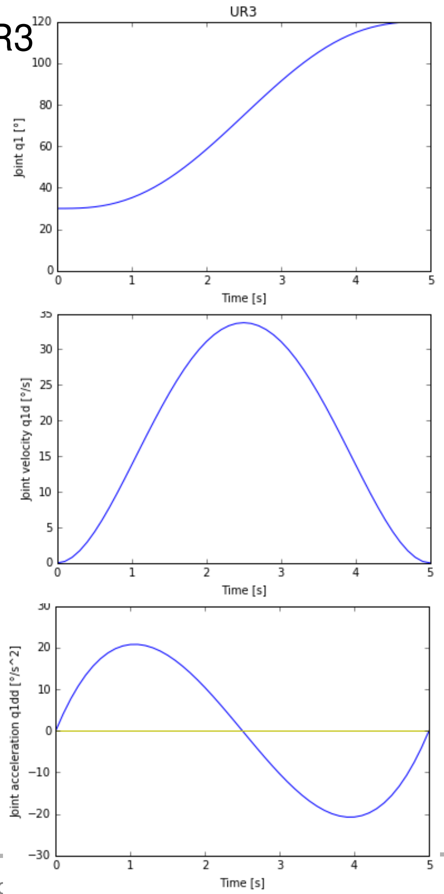
## Lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^4 & t_1^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^2 & 4t_1^3 & 5t_1^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_1 & 12t_1^2 & 20t_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \dot{q}(t_0) = 0 \\ \dot{q}(t_1) = 0 \\ \ddot{q}(t_0) = 0 \\ \ddot{q}(t_1) = 0 \end{bmatrix}$$

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com



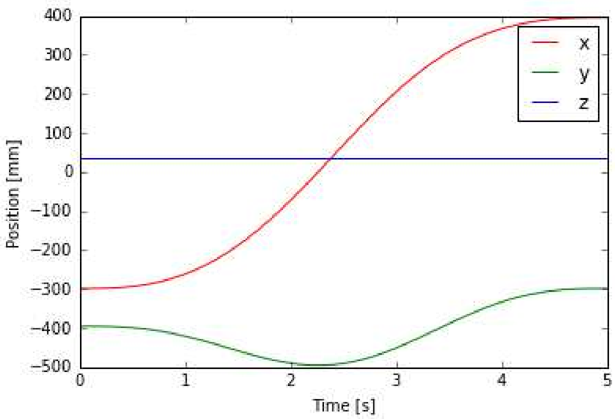
## Vorwärtskinematik UR3

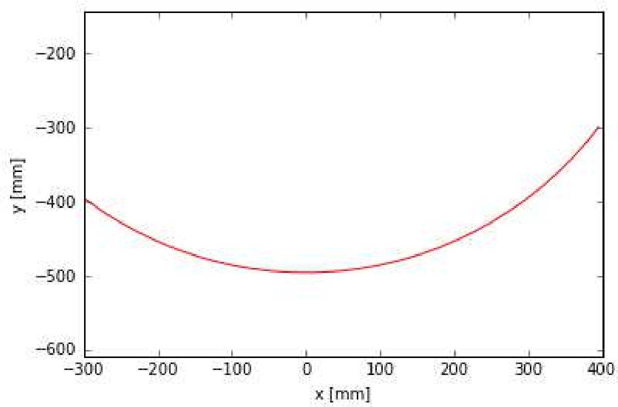







## Vorwärtskinematik UR3



PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com



## 4. Ansatz: Verbindung von zwei kubischen Verläufen mit kontinuierlicher Geschwindigkeit und Beschleunigung

1. Trajektorie: $q_A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

2. Trajektorie: $q_B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$

Bedingungen:

$$q_A(t_0 = 0) = q_0$$
$$q_A(t_1) = q_1$$
$$q_B(t_1) = q_1$$
$$q_B(t_2) = q_2$$
$$\dot{q_A}(t_0 = 0) = 0$$
$$\dot{q_B}(t_2) = 0$$
$$\dot{q_A}(t_1) = \dot{q_B}(t_1)$$
$$\ddot{q_A}(t_1) = \ddot{q_B}(t_1)$$

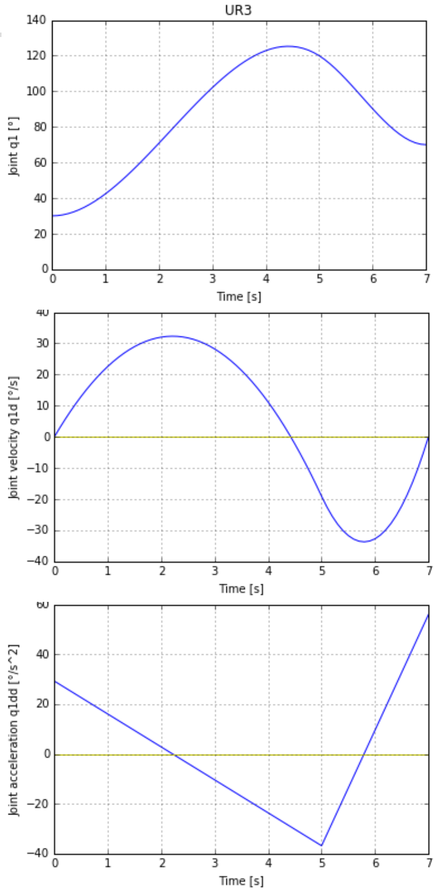




## Lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t_2 & 3t_2^2 \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^2 & 0 & -1 & -2t_1 & -3t_1^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_1 & 0 & 0 & -2 & -6t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Vorwärtskinematik UR3

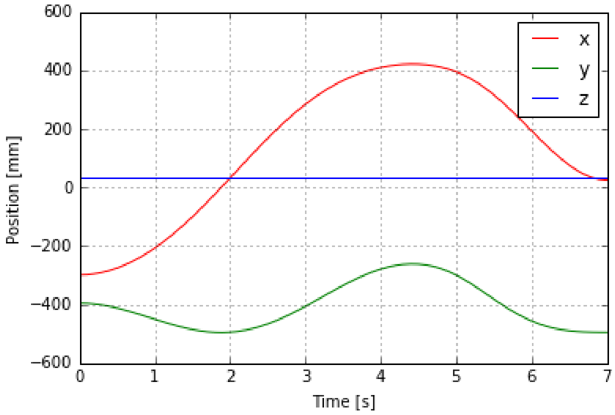


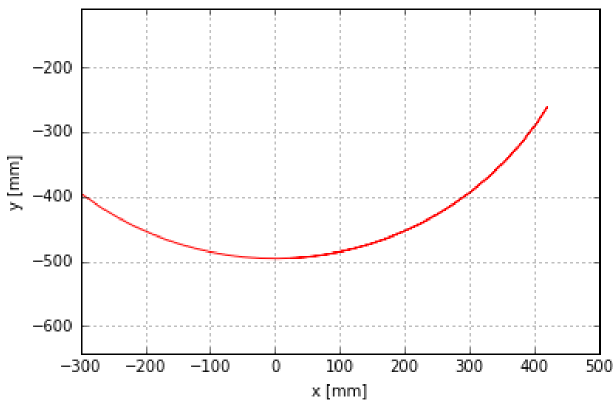



PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com



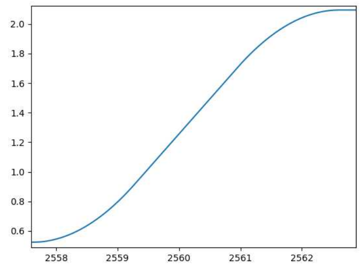
## Vorwärtskinematik UR3



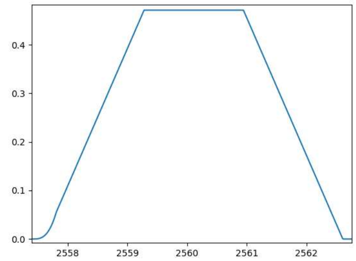



## Aufzeichnung aus URSim mit RTDE

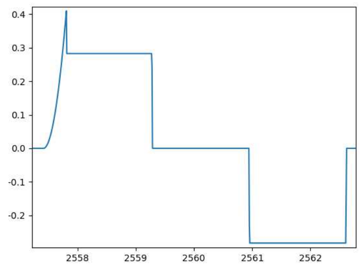
Gelenkwinkel Motor 1




Gelenkgeschwindigkeit Motor 1



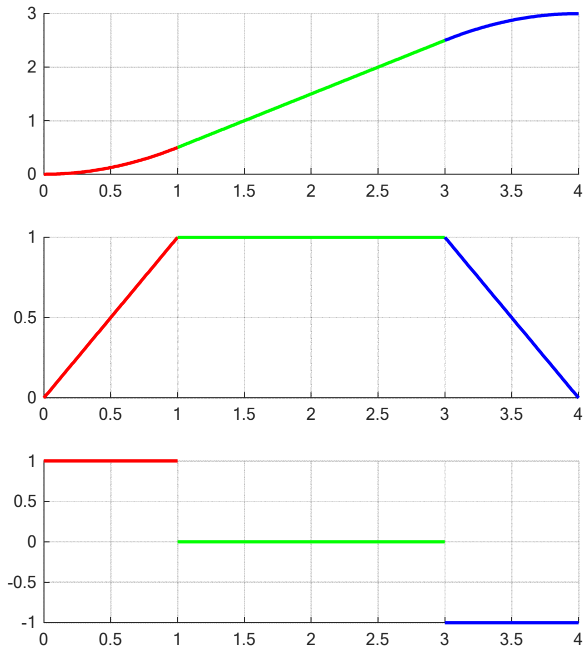

Gelenkbeschleunigung Motor 1








## 5. Ansatz: Linear mit Übergangsparabeln (Trapezförmiges Geschwindigkeitsprofil)



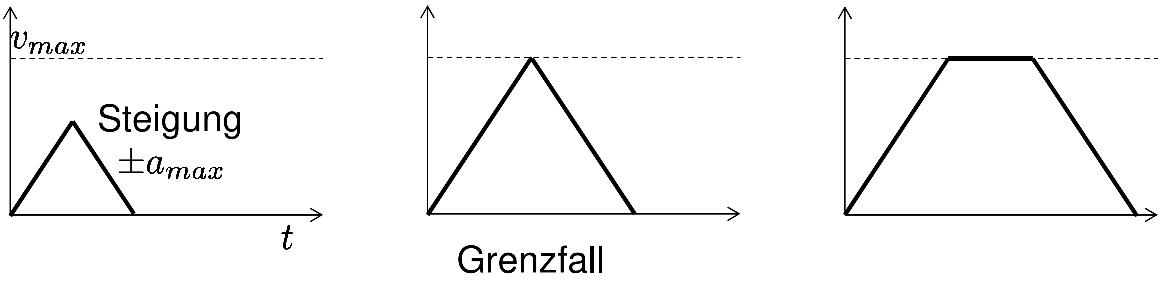
PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com



## 5.1 schnellstmögliche Trajektorie, Berechnung der Gesamtzeit

gegeben: max. Beschleunigung, max. Geschwindigkeit, Verfahrwinkel

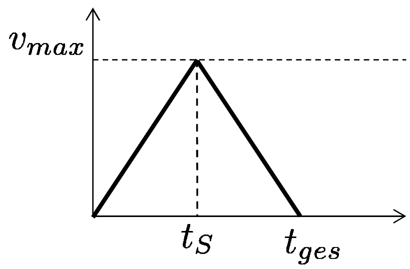
Fallunterscheidung: Trapezprofil - Dreiecksprofil








## Grenzfall: Dreiecksprofil




Schaltzeitpunkt $t_S = \frac{v_{max}}{a_{max}}$

Gesamtzeit $t_{ges} = 2t_S = 2\frac{v_{max}}{a_{max}}$

Winkel zum Schaltzeitpunkt

$$q_S = q(t_S) = \int_0^{t_S} v(t)dt = \int_0^{t_S} a_{max} t dt = \frac{1}{2} a_{max} t_S^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

Gesamtwinkel $q_{ges} = q(t_{ges}) = 2q_S = \frac{v_{max}^2}{a_{max}} = q_{grenz}$

v=1,047
a=1,396
q=0,78 rad
ca.45°

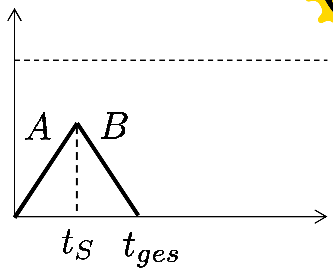
→ Fallunterscheidung: Dreiecksprofil $\Delta q <= q_{grenz} = \frac{v_{max}^2}{a_{max}}$

Trapezprofil $\Delta q > q_{grenz} = \frac{v_{max}^2}{a_{max}}$

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com



**Dreiecksprofil** mit $\Delta q <= q_{grenz}$




Geschwindigkeit im Abschnitt A $\quad v_A(t) = a_{max} t$

Winkel zum Schaltzeitpunkt

$$q_S = q(t_S) = \frac{1}{2} a_{max} t_S^2 = \frac{1}{2} \Delta q$$

Schaltzeitpunkt $\quad t_S = \sqrt{\frac{\Delta q}{a_{max}}}$

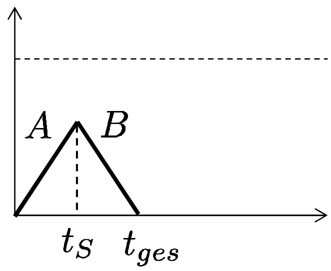
Geschwindigkeit zum Schaltzeitpunkt $\quad v_S = v(t_S) = \sqrt{\Delta q a_{max}}$

Winkelverlauf im Abschnitt A $\quad q_A(t) = \frac{1}{2} a_{max} t^2$





**Dreiecksprofil** mit $\Delta q < q_{grenz}$




Gesamtzeit $\quad t_{ges} = 2\sqrt{\frac{\Delta q}{a_{max}}}$

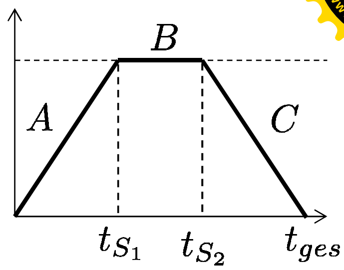
Geschwindigkeit im Abschnitt B

$$v_B(t) = v_S - a_{max}(t - t_S) = 2 v_S - a_{max} t$$
$$= 2\sqrt{\Delta q a_{max}} - a_{max} t$$

Winkelverlauf im Abschnitt B

$$q_B(t) = q_S + v_S (t - t_S) - \frac{1}{2} a_{max} (t - t_S)$$

**Trapezprofil** mit $\Delta q > q_{grenz}$




Geschwindigkeit im Abschnitt A $v_A(t) = a_{max} t$

Winkel zum Schaltzeitpunkt 1

$$q_{S1} = q(t_{S1}) = \frac{1}{2}\frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

Schaltzeitpunkt 1 $t_{S1} = \frac{v_{max}}{a_{max}}$

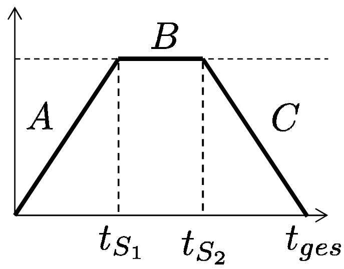
Geschwindigkeit zum Schaltzeitpunkt 1 $v_{S1} = v(t_{S1}) = v_{max}$

Winkelverlauf im Abschnitt A $q_A(t) = \frac{1}{2} a_{max} t^2$





**Trapezprofil** mit $\Delta q > q_{grenz}$




Geschwindigkeit im Abschnitt B $v_B(t) = v_{max}$

Winkeldifferenz im Abschnitt B

$$\Delta q_B = \Delta q - \frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

Zeitdifferenz im Abschnitt B

$$\Delta t_B = \frac{\Delta q_B}{v_{max}}$$

Schaltzeitpunkt 2 $t_{S_2} = t_{S_1} + \Delta t_B = \frac{\Delta q}{v_{max}}$

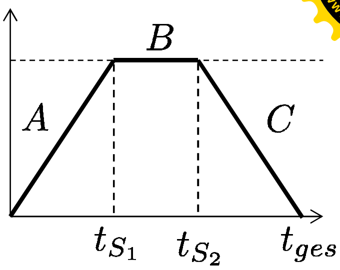
Winkelverlauf im Abschnitt B

$$q_B(t) = q_{S_1} + v_{max}(t - t_{S_1})$$

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com



**Trapezprofil** mit $\Delta q > q_{grenz}$




Winkel zum Schaltzeitpunkt 2

$$q_{S2} = q(t_{S2}) = \Delta q - \frac{1}{2}\frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

Geschwindigkeit im Abschnitt C

$$v_C(t) = v_{max} - a_{max}(t - t_{S_2}) = v_{max} + \frac{a_{max}}{v_{max}}\Delta q - a_{max}t$$

Winkelverlauf im Abschnitt C

$$q_C(t) = q_{S_2} + (v_{max} + \frac{a_{max}}{v_{max}}\Delta q)(t - t_{S_2}) - \frac{1}{2}a_{max}(t^2 - t_{S_2}^2)$$

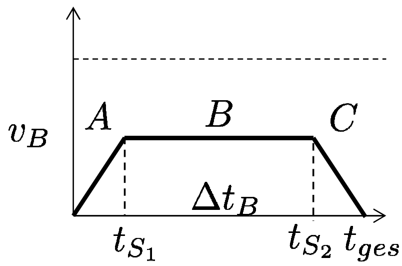
Gesamtzeit $t_{ges} = t_{S_1} + t_{S_2} = \frac{\Delta q}{v_{max}} + \frac{v_{max}}{a_{max}}$

delaq=90° t_ges=2,25s





## 5.2 Gesamtzeit gegeben, Berechnung der Geschwindigkeit bei maximaler Beschleunigung




Schaltzeitpunkt 1

$$t_{ges} = t_{S_1} + t_{S_2} = 2t_{S_1} + \Delta t_B$$

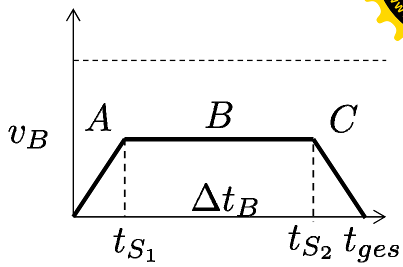
$$\Delta t_B = \frac{\Delta q_B}{v_B} = \frac{\Delta q - 2q_{S_1}}{v_B} = \frac{\Delta q - a_{max}t_{S_1}^2}{a_{max}t_{S_1}}$$

$$t_{ges} = 2t_{S_1} + \frac{\Delta q - a_{max}t_{S_1}^2}{a_{max}t_{S_1}} = t_{S_1} + \frac{\Delta q}{a_{max}t_{S_1}}$$

$$t_{S_1}^2 - t_{ges}t_{S_1} + \frac{\Delta q}{a_{max}} = 0$$

$$t_{S_1} = \frac{t_{ges}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t_{ges}^2 - 4\frac{\Delta q}{a_{max}}}$$

## 5.2 Gesamtzeit gegeben, Berechnung der Geschwindigkeit bei maximaler Beschleunigung




$$t_{S_2} = t_{ges} - t_{S_1}$$

$$q_{S_1} = \frac{1}{2} a_{max} t_{S_1}^2$$

$$\Delta q_B = \Delta q - 2 q_{S_1} = \Delta q - a_{max} t_{S_1}^2$$

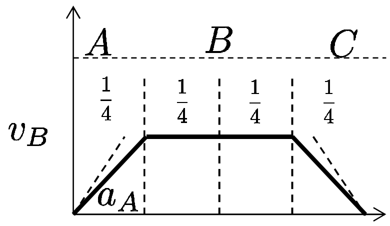
Geschwindigkeit im Abschnitt B $\quad v_B(t) = a_{max} t_{S_1}$

→ Ansatz 5.1 mit $\quad v_{max} = v_B$





## 5.3 Gesamtzeit gegeben, Berechnung der Geschwindigkeit und Beschleunigung




Beschleunigungsphase ist 25% der Gesamtzeit

$$t_{S_1} = \frac{1}{4} t_{ges}$$

$$v_B = a_A t_{S_1} = a_A \frac{1}{4} t_{ges}$$

$$q_{S_1} = \frac{1}{2} a_A t_{S_1}^2$$

$$q_{S_1} + \frac{\Delta q_B}{2} = q_{S_1} + t_{S_1} v_B = \frac{3}{32} a_A t_{ges}^2 \stackrel{!}{=} \frac{\Delta q}{2}$$

Beschleunigung $\quad a_A = \dfrac{16 \Delta q}{3 t_{ges}^2} \qquad$ Geschwindigkeit $\quad v_B = \dfrac{16 \Delta q}{12 t_{ges}}$

→ Ansatz 5.1 mit $\quad v_{max} = v_B \quad a_{max} = a_A$

## 5.4 Schaltzeitpunkte gegeben, Berechnung der Geschwindigkeit und Beschleunigung

gegeben Schaltzeitpunkt $t_{S_1}$

$$v_B = a_A t_{S_1}$$

$$q_{S_1} = \frac{1}{2} a_A t_{S_1}^2$$

$$q_{S_1} + \frac{\Delta q_B}{2} = q_{S_1} + \frac{t_{ges} - 2t_{S_1}}{2} v_B = \frac{1}{2} a_A t_{S_1}^2 + \frac{t_{ges} - 2t_{S_1}}{2} a_A t_{S_1}$$

$$= \frac{t_{ges} - t_{S_1}}{2} a_A t_{S_1} \stackrel{!}{=} \frac{\Delta q}{2}$$

Beschleunigung $a_A = \dfrac{\Delta q}{t_{ges} t_{S_1} - t_{S_1}^2}$ Geschwindigkeit $v_B = \dfrac{\Delta q}{t_{ges} - t_{S_1}}$

→ Ansatz 5.1 mit $v_{max} = v_B$ $a_{max} = a_A$





## 5.5 synchrone Bewegung

**Schnellstmögliche Bewegung**:

1. Führende Achse bestimmen = Achse mit der größten Gesamtzeit mit Ansatz 5.1 (Schaltzeitpunkte sind dadurch ebenfalls bekannt)

2. Folgeachsen mit Schaltzeitpunkten der Führungsachsen anpassen mit Ansatz 5.4

**Bewegung mit Angabe der Gesamtzeit:**

Alle Achsen anpassen mit Ansatz 5.3

**movej**(*q*, *a*=`1.4`, *v*=`1.05`, *t*=`0`, *r*=`0`)

Move to position (linear in joint-space)

When using this command, the robot must be at a standstill or come from a movej or movel with a blend. The speed and acceleration parameters control the trapezoid speed profile of the move. Alternatively, the `t` parameter can be used to set the time for this move. Time setting has priority over speed and acceleration settings.

**Parameters**

`q`: joint positions (q can also be specified as a pose, then inverse kinematics is used to calculate the corresponding joint positions)

`a`: joint acceleration of leading axis (rad/s^2)

`v`: joint speed of leading axis (rad/s)

`t`: time (S)

`r`: blend radius (m)

If a blend radius is set, the robot arm trajectory will be modified to avoid the robot stopping at the point.

However, if the blend region of this move overlaps with the blend radius of previous or following waypoints, this move will be skipped, and an 'Overlapping Blends' warning message will be generated.

**Example command:** `movej([0,1.57,-1.57,3.14,-1.57,1.57], a=1.4, v=1.05, t=0, r=0)`

- Example Parameters:
  - q = (0,1.57,-1.57,3.14,-1.57,1.57) → base is at 0 deg rotation, shoulder is at 90 deg rotation, elbow is at -90 deg rotation, wrist 1 is at 180 deg rotation, wrist 2 is at -90 deg rotation, wrist 3 is at 90 deg rotation. Note: joint positions (q can also be specified as a pose, then inverse kinematics is used to calculate the corresponding joint positions)
  - a = 1.4 → acceleration is 1.4 rad/s/s
  - v = 1.05 → velocity is 1.05 rad/s
  - t = 0 → the time (seconds) to make move is not specified. If it were specified the command would ignore the a and v values.
  - r = 0 → the blend radius is zero meters.