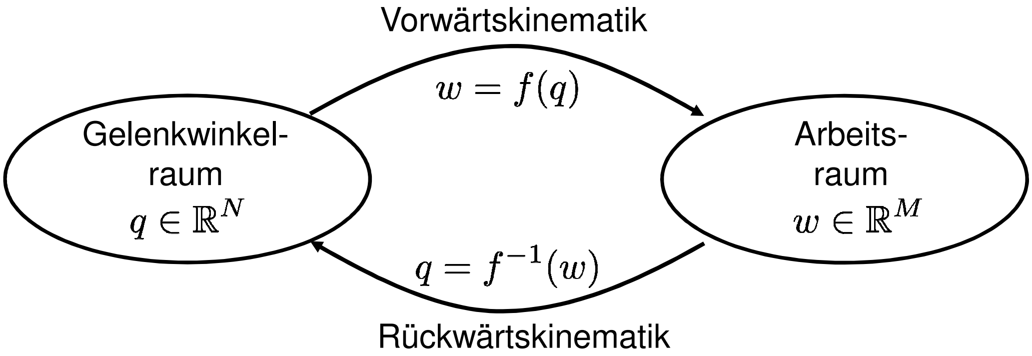
Vorwärtskinematik - Rückwärtskinematik



Beispiele: 2D: RR-Roboter: $q = [q_1, q_2]$ $w = [x, y, \varphi]$

RRR-Roboter: $q = [q_1, q_2, q_3]$ $w = [x, y, \varphi]$

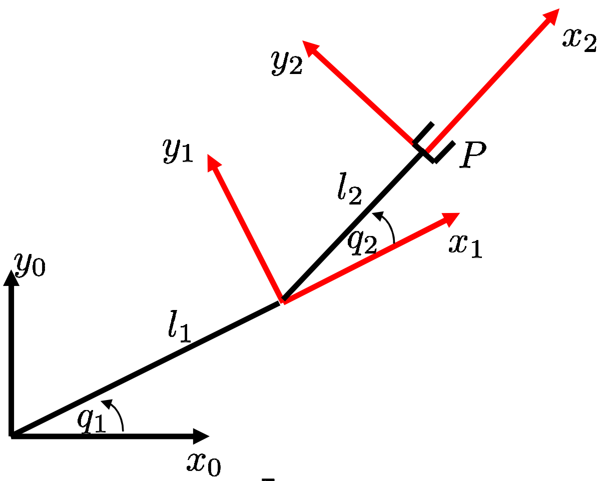
3D: Roboter mit Standardkinematik

$q = [q_1 ..., q_6]$ $w = [x, y, z, rx, ry, rz]$

$w = [x, y, z, A, B, C]$

Beispiel 2D RR

Möglichkeit 1 für Wahl der Koordinatensysteme



$$
{}^0T_1 = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & \cos q_1 l_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & \sin q_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$ {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} {}^{1}R_2 & {}^{1}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & \cos q_2 l_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & \sin q_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

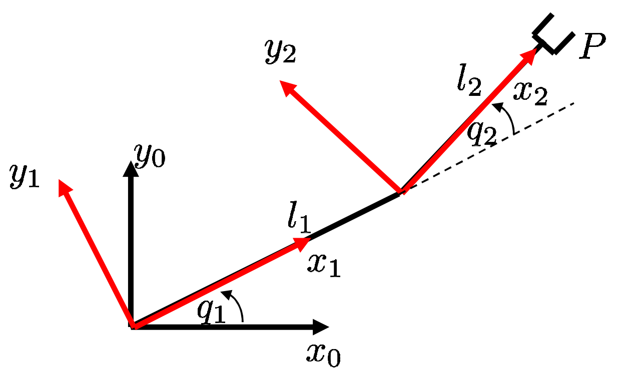
$$ {}^{0}T_2 = {}^{0}T_1 \, {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2)l_2 + \cos q_1 l_1 \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & \sin(q_1+q_2)l_2 + \sin q_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Punkt P im Koordinatensystem {0}

$$ {}^{0}\tilde{p} = {}^{0}T_2 \, {}^{2}\tilde{p} = {}^{0}T_2 \, {}^{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2)l_2 + \cos q_1 l_1 \\ \sin(q_1+q_2)l_2 + \sin q_1 l_1 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Beispiel 2D RR

Möglichkeit 2 für Wahl der Koordinatensysteme



$$ {}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} {}^{0}R_1 & {}^{0}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

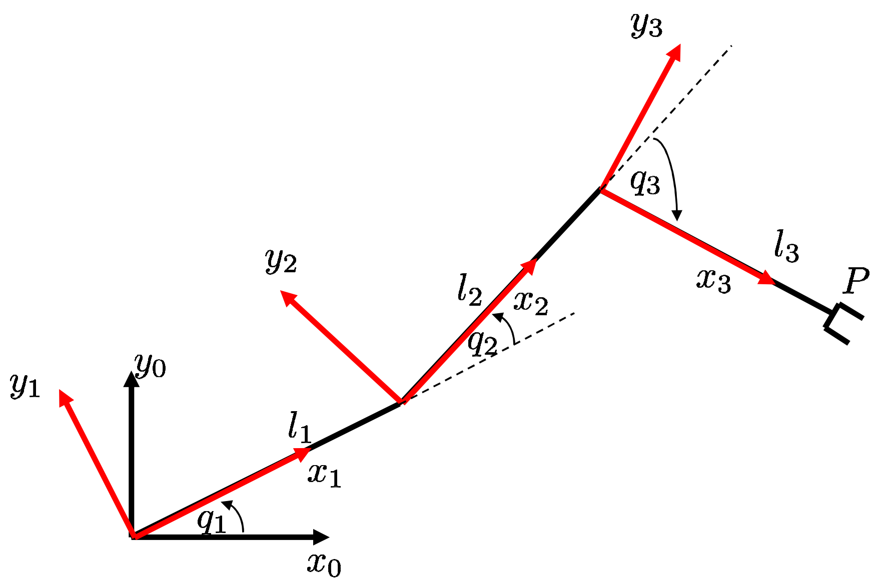
$$
{}^1T_2 = \begin{bmatrix} {}^1R_2 & {}^1t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & l_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0T_2 = {}^0T_1\, {}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & \cos q_1 l_1 \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & \sin q_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Punkt P im Koordinatensystem {0}

$$
{}^0\tilde{p} = {}^0T_2\, {}^2\tilde{p} = {}^0T_2\, {}^2\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2)l_2 + \cos q_1 l_1 \\ \sin(q_1+q_2)l_2 + \sin q_1 l_1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Beispiel 2D RRR



gesucht: ${}^0\tilde{p}$

Beispiel 2D RRR

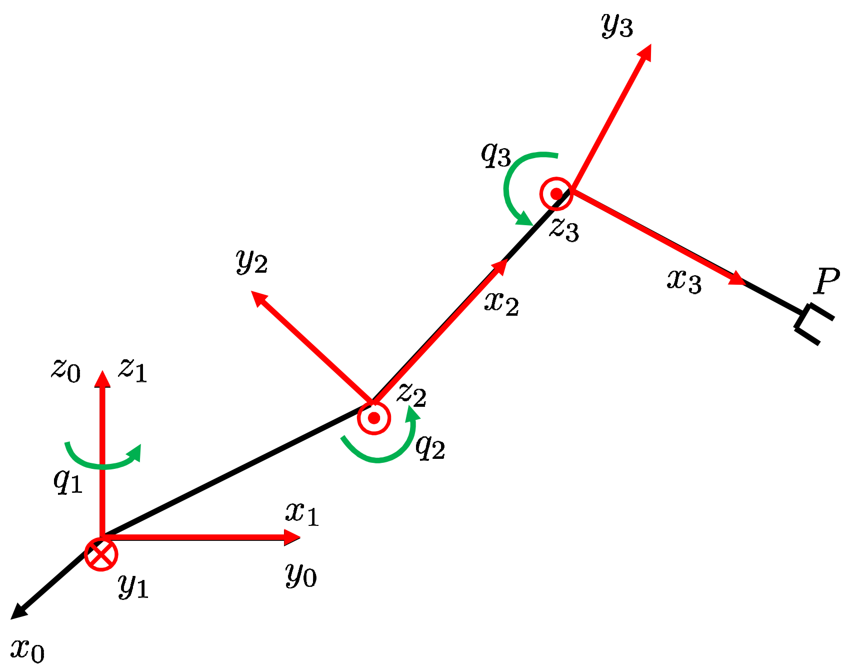
$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & l_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & l_2 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}\tilde{p} = {}^{0}T_1\,{}^{1}T_2\,{}^{2}T_3\,{}^{3}\tilde{p} = {}^{0}T_1\,{}^{1}T_2\,{}^{2}T_3\,{}^{3}\begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Beispiel 3D Standard Roboter (3 Achsen)



Beispiel 3D Standard Roboter (3 Achsen)

- z-Achsen sind Drehachsen
- Achse 2 und 3 sind parallel zueinander
- Achse 1 und 2 sind senkrecht zueinander

$$^{0}T_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90° & -\sin 90° \\ 0 & \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{1}T_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_{1,x} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_{1,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & l_{2,x} \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0\tilde{p} = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3\tilde{p} = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\;{}^3\begin{bmatrix} l_3, x \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denavit-Hartenberg-Parameter Vorgehensweise

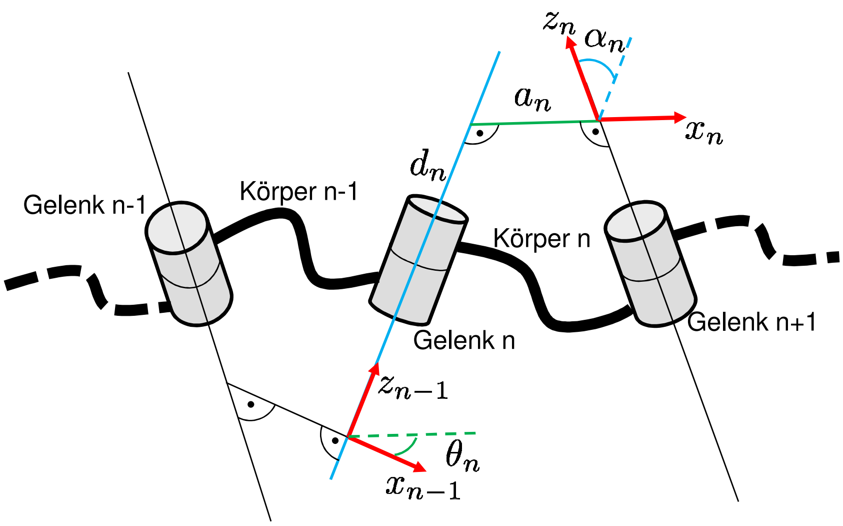
Festlegung von Geraden, Verbindungslinien und Koordinatensystemen um die kinematische Kette zu beschreiben

1. Durch jedes Gelenk geht eine Gerade

2. Verbindung zweier Geraden über Gemeinlot

Spezialfälle: Gelenkgeraden - schneiden sich
- sind parallel
- sind identisch

DH-Parameter (klassisch)



DH-Parameter (klassisch)

- z_{n-1} Achse geht in Bewegungsrichtung des n-ten Gelenks

- x_n Achse ist das Kreuzprodukt von z_{n-1} und z_n Achse (Gemeinlot)

$$x_n = z_{n-1} \times z_n$$

- y_n Achse ergibt sich aus Ergänzung zum Rechtssystem

Anmerkungen:

- Nulllage wird vom Hersteller festgelegt (jedes Gelenk kann einen Offset haben)

- manche Gelenke werden vom Hersteller mit negativer Drehrichtung definiert

DH-Parameter (klassisch)

Einzeltransformationen:

1. Gelenkwinkel θ_n
   Rotation um die z_{n-1} Achse damit x_{n-1} auf x_n Achse liegt

2. Gelenkabstand d_n
   Translation entlang z_{n-1} Achse bis Schnittpunkt von z_{n-1}und x_n Achse

3. Armlänge a_n
   Translation entlang x_n Achse bis zum Ursprung n System

4. Verwindung α_n
   Rotation um die x_n Achse damit z_{n-1} auf z_n Achse liegt

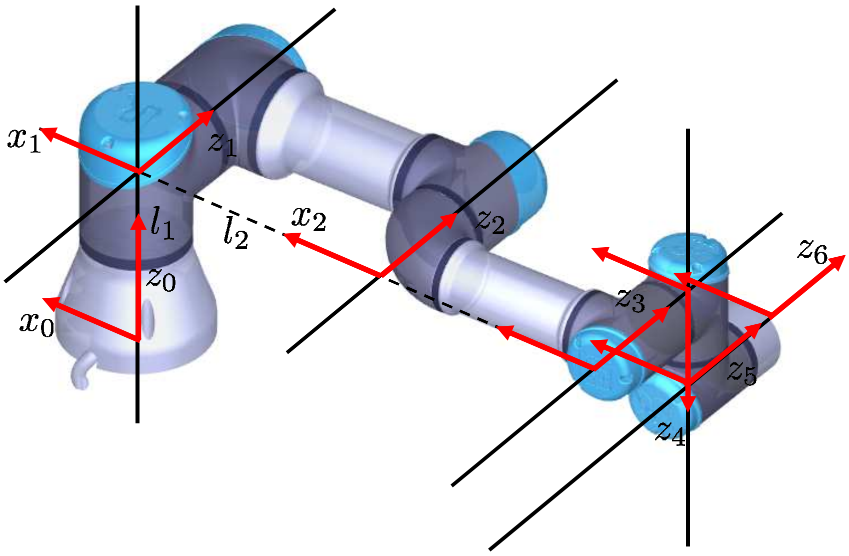
DH-Parameter (klassisch)

$$^{n-1}T_n = Rot(z_{n-1}, \theta_n) Trans(z_{n-1}, d_n) Trans(x_n, a_n) Rot(x_n, \alpha_n)$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_n & -s\theta_n & 0 & 0 \\ s\theta_n & c\theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_n & -s\alpha_n & 0 \\ 0 & s\alpha_n & c\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_n & -s\theta_n c\alpha_n & s\theta_n s\alpha_n & a_n c\theta_n \\ s\theta_n & c\theta_n c\alpha_n & -c\theta_n s\alpha_n & a_n s\theta_n \\ 0 & s\alpha_n & c\alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH-Parameter (klassisch)



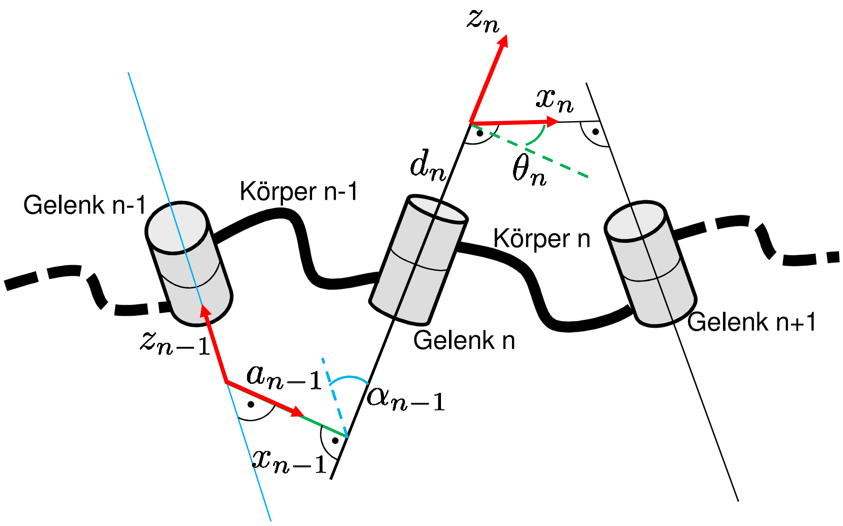
n	α_n	a_n	d_n	θ_n
1	90°	0	l1	q1
2	0	l2	0	q2
3	0	l3	0	q3
4	90°	0	l4	q4
5	-90°	0	l5	q5
6	0	0	l6	q6

DH Parameter für UR3 aus UR Steuerung

```
/home/ur/ursim-current/.urcontrol/urcontrol.conf.UR3

[DH]
a = [0.00000, -0.24365, -0.21325,  0.00000,  0.00000,  0.0000]
d = [0.1519,  0.00000,  0.00000,  0.11235,  0.08535,  0.0819]
alpha = [ 1.570796327, 0, 0, 1.570796327, -1.570796327, 0 ]
q_home_offset = [0, -1.570796327, 0, -1.570796327, 0, 0]
joint_direction = [1, 1, -1, 1, 1, 1]
```

modifizierte DH-Parameter



DH-Parameter (modifiziert)

- z_n Achse geht in Bewegungsrichtung des n-ten Gelenks

- x_n Achse ist das Kreuzprodukt von z_n und z_{n+1} Achse (Gemeinlot)

  $x_n = z_n \times z_{n+1}$

- y_n Achse ergibt sich aus Ergänzung zum Rechtssystem

DH-Parameter (modifiziert)

Einzeltransformationen:

1. Armlänge a_{n-1}
   Translation entlang x_{n-1} Achse bis Schnittpunkt von x_{n-1}und z_n Achse

2. Verwindung α_{n-1}
   Rotation um die x_{n-1} Achse damit z_{n-1} auf z_n Achse liegt

3. Gelenkabstand d_n
   Translation entlang z_n Achse bis zum Ursprung des n Systems

4. Gelenkwinkel θ_n
   Rotation um die z_n Achse damit x_{n-1} auf x_n Achse liegt

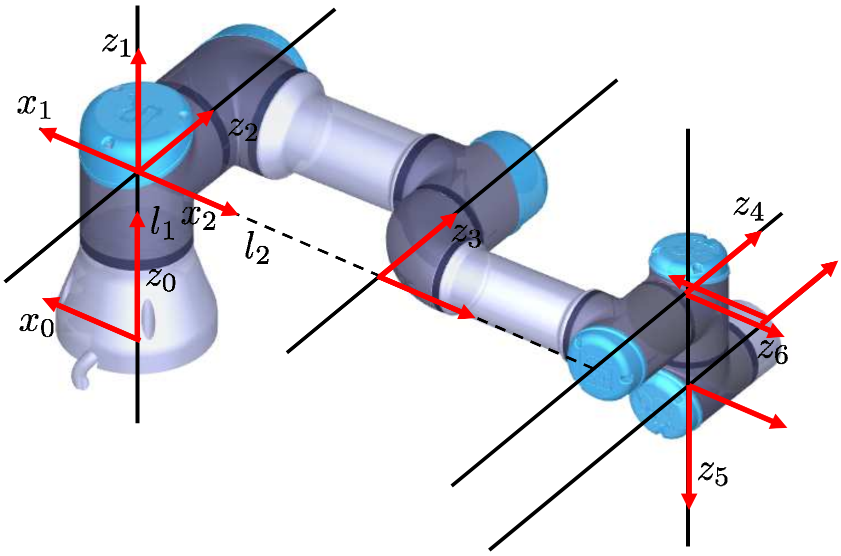
DH-Parameter (modifiziert)

$$^{n-1}T_n = Trans(x_{n-1}, a_{n-1})Rot(x_{n-1}, \alpha_{n-1})Trans(z_n, d_n)Rot(z_n, \theta_n)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{n-1} & -s\alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{n-1} & c\alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_n & -s\theta_n & 0 & 0 \\ s\theta_n & c\theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_n & -s\theta_n & 0 & a_{n-1} \\ s\theta_n c\alpha_{n-1} & c\theta_n c\alpha_{n-1} & -s\alpha_{n-1} & -d_n s\alpha_{n-1} \\ s\theta_n s\alpha_{n-1} & c\theta_n s\alpha_{n-1} & c\alpha_{n-1} & d_n c\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

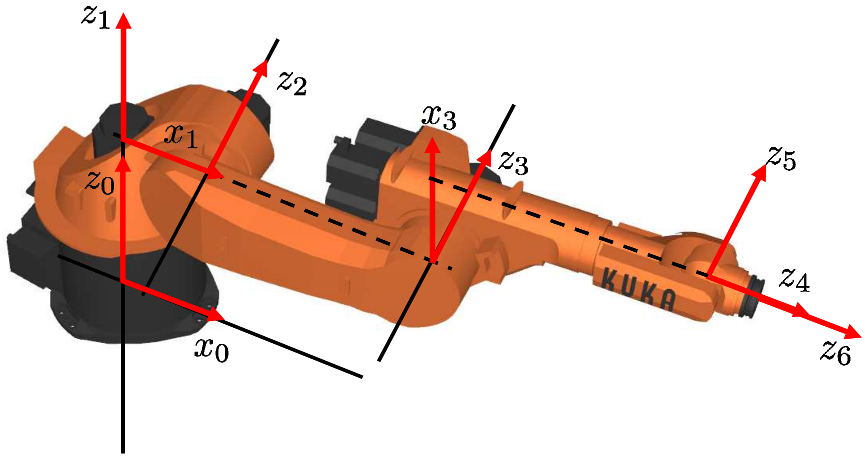
DH-Parameter (modifiziert)



n	α_{n-1}	a_{n-1}	d_n	θ_n
1	*0*	*0*	*l1*	*q1*
2	*90°*	*0*	*0*	*q2 +180°*
3	*0*	*l2*	*0*	*q3*
4	*0*	*l3*	*l4*	*q4*
5	*-90°*	*0*	*l5*	*q5*
6	*90°*	*0*	*l6*	*q6 +180°*

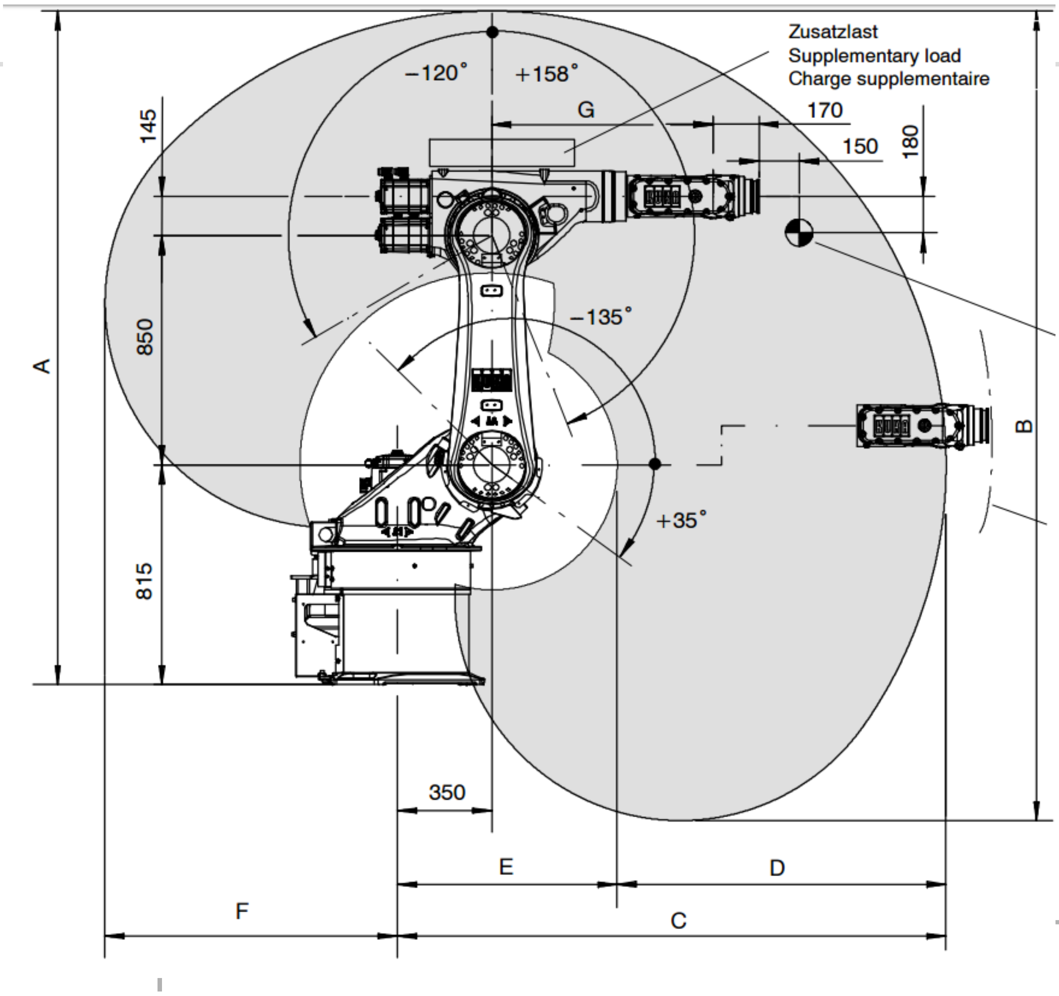
Nullstellung des Herstellers berücksichtigt

n	α_{n-1}	a_{n-1}	d_n	θ_n
1	*0*	*0*	*815*	*q1*
2	*-90°*	*350*	*0*	*q2*
3	*0*	*850*	*0*	*q3 -90°*
4	*-90°*	*145*	*820*	*q4*
5	*90°*	*0*	*0*	*q5*
6	*-90°*	*0*	*170*	*q6 +180°*



Nullstellung des Herstellers berücksichtigt

Achtung: bei KUKA ist Drehrichtung bei Achse 1, 4 und 6 negativ



	A	B	C	D	E	F	G
KR 30-3	2498	3003	2033	1218	815	1084	820
KR 60-3	2498	3003	2033	1218	815	1084	820
KR 60 L45-3	2695	3398	2233	1362	868	1283	1020
KR 60 L30-3	2894	3795	2429	1445	983	1480	1220