

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

# Vertex Cover Problem

Δημήτρης Δήμου

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών  
Πανεπιστήμιο Πατρών

*mijuomij@gmail.com*

8 Ιουλίου 2016

# Περιεχόμενα

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

## Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

## Εφαρμογές

## Αναφορές

- 1 Set Cover Problem**
  - Διατύπωση
  - NP-πληρότητα
  - Λύσεις
- 2 Vertex cover problem**
  - Διατύπωση
  - NP-πληρότητα
  - Λύσεις
- 3 Ειδικές περιπτώσεις**
  - Bigraphs
  - Tree graphs
  - Δυσκά προβλήματα
- 4 Εφαρμογές**

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

# Set Cover Problem

# Διατύπωση

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυϊκά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

Set cover:

Δεδομένου ενός σύμπαντος  $U$  αποτελούμενο από  $n$  στοιχεία κι ενός συνόλου από υποσύνολα του  $U$ ,  $S = \{S_1, \dots, S_k\}$  τέτοια ώστε η ένωσή τους να είναι το σύνολο  $U$ , βρες το ελάχιστο υποσύνολο του  $S$  που καλύπτει όλα τα στοιχεία του  $U$ .

Παράδειγμα:

Έστω το σύμπαν  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  και η συλλογή από υποσύνολα του  $S = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$ . Η ένωση των στοιχείων του  $S$  καλύπτει το  $U$ . Η ελάχιστη συλλογή υποσυνόλων του  $S$  που καλύπτει το  $U$  είναι τα :  $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ .

# NP-πληρότητα

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

Το set cover decision problem είναι ένα από τα 21 NP-πλήρης προβλήματα του Karp. Αυτό σημαίνει ότι ανήκει στην κλάση NP και στην κλάση NP-hard. Αυτό οδήγησε στην ανάπτυξη διάφορων προσεγγιστικών αλγορίθμων για την επίλυση του προβλήματος αυτού.

# Πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

Το minimum set cover problem μπορεί να διατυπωθεί ως το ακόλουθο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού

$$\min \left\{ \sum_{S \in \mathcal{S}} x_S \right\}$$

subject to

$$\sum_{S: e \in S} x_S \geq 1, \quad \forall e \in \mathcal{U}$$

$$x_S \in \{0, 1\}$$

# Χαλάρωση προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

$$\min \left\{ \sum_{S \in \mathcal{S}} x_S \right\}$$

subject to

$$\sum_{S: e \in S} x_S \geq 1, \quad \forall e \in \mathcal{U}$$

$$x_S \in [0, 1]$$

integrality gap: το πολύ  $\log(n)$   
approximation factor:  $\log(n)$

# Άπληστος αλγόριθμος

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

Αλγόριθμος:

- 1  $C \leftarrow \emptyset$
- 2 While  $C \neq \mathcal{U}$  do
  - 1 Find the set whose cost effectiveness is smallest, say  $S_i$ .  
Let  $a = \frac{c(S_i)}{|S_i - C|}$ .  
Pick  $S_i$  and  $\forall e \in S_i - C$ , set  $price(e) = a$ .
  - 2  $C \leftarrow S_i \cup C$
- 3 Output  $C$



# Hitting Set

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

## Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

## Εφαρμογές

## Αναφορές

Αν σε έναν διμερή γράφο το ένα σύνολο κόμβων  $U$  αντιπροσωπεύει τα υποσύνολα  $S$  του σύμπαντος, το άλλο σύνολο κόμβων  $V$  αντιπροσωπεύει τα στοιχεία του σύμπαντος και οι ακμές αντιπροσωπεύουν την συμπερίληψη ενός στοιχείου σε ένα σύνολο τότε βρίσκουμε τον ελάχιστο αριθμό κόμβων του συνόλου  $U$  που καλύπτει όλους τους κόμβους του συνόλου  $V$ .

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

# Vertex cover problem

# Διατύπωση

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

Το vertex cover  $V'$  ενός μη κατευθυντικού γράφου  $G = (V, E)$  είναι ένα υποσύνολο του  $V$  τέτοιο ώστε:

$$\forall uv \in E \Rightarrow u \in V' \vee v \in V'$$

Ένα τέτοιο σύνολο λέμε ό τι καλύπτει τις ακμές του  $G$ . Το ελάχιστο vertex cover ενός γράφου  $G$  είναι το σύνολο  $V'$  με τον μικρότερο αριθμό στοιχείων.

# Παραδείγματα

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

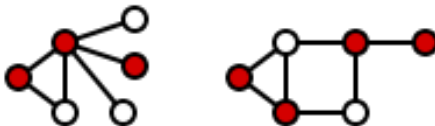
### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

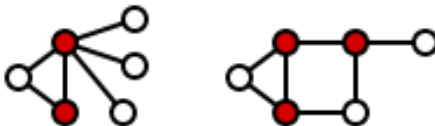
### Εφαρμογές

### Αναφορές

Σχήμα : Vertex cover



Σχήμα : Minimum vertex cover



# NP-πληρότητα

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

## Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

## Εφαρμογές

## Αναφορές

Και αυτό το πρόβλημα είναι NP-πλήρες και μπορεί να αναχθεί από το 3-SAT ή το Clique πρόβλημα. Με εξαντλητική αναζήτηση η λύση δίνεται σε χρόνο  $2^k n^{O(1)}$  το οποίο κάνει το πρόβλημα fixed-parameter tractable.

# Πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

## Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

## Εφαρμογές

## Αναφορές

Το minimum vertex cover problem μπορεί να διατυπωθεί ως το ακόλουθο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού

$$\min \left\{ \sum_{u \in V} c(u) x_u \right\}$$

subject to

$$x_u + x_v \geq 1, \quad \forall (u, v) \in E$$

$$x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V$$

# Χαλάρωση προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

$$\min \left\{ \sum_{u \in V} c(v) x_v \right\}$$

subject to

$$x_u + x_v \geq 1, \quad \forall (u, v) \in E$$

$$x_v \in [0, 1], \quad \forall v \in V$$

# Integrality gap

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

Integrality gap:

$$\sup_I \frac{OPT(I)}{OPT_f(I)}$$

Το integrality gap του παραπάνω προβλήματος είναι 2  
οπότε η χαλάρωση του δίνει έναν factor-2 προσεγγιστικό  
αλγόριθμο.



# Half-integrality

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

Κάθε λύση ακραίου σημείου είναι half-integral δηλαδή  
$$x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \quad \forall x_v \in V' \text{ [Vaz03].}$$

# Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

## Αλγόριθμος:

- 1  $V' \leftarrow \emptyset$
- 2  $E' \leftarrow E$
- 3 While  $E' \neq \emptyset$  do
  - α') let  $(u, v)$  be an arbitrary edge of  $E'$
  - β')  $V' \leftarrow V' \cup \{u, v\}$
  - γ') remove from  $E'$  every edge incident on either  $u$  or  $v$
- 4 Output  $V'$

# Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

Ο αλγόριθμος αυτός τρέχει σε χρόνο  $O(|V| + |E|)$  [Cor+09].  
Όσον αφορά τον παράγοντα προσέγγισης του αλγορίθμου φαίνεται εύκολα ότι για το σύνολο των ακμών που επιλέγονται στο βήμα  $\alpha'$ ) ισχύει

$$|V^*| \geq |A|$$

αφού το σύνολο δεν περιέχει προσκείμενες ακμές και επειδή το σύνολο  $V'$  που επιστρέφει ο αλγόριθμος περιέχει και τις δυο κορυφές των ακμών που επιλέγει έχουμε

$$|V'| = 2|A|$$

οπότε

$$|V'| \leq 2|V^*|$$

# Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Διυικά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

Έχουν αναπτυχθεί και άλλοι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι με καλύτερο παράγοντα προσέγγισης, όπως  $2 - \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{\log |V|}}\right)$  [Kar09] αλλά δεν έχει βρεθεί καλύτερος αλγόριθμος σταθερού προσεγγιστικού παράγοντα. Το minimum vertex cover πρόβλημα είναι *APX*—πλήρης δηλαδή δεν μπορεί να προσεγγιστεί αυθαίρετα καλά αν δεν ισχύει  $P = NP$ . Οι Dinur και Safra απέδειξαν ότι το πρόβλημα δε μπορεί να προσεγγιστεί με παράγοντα μικρότερο του 1.3606 για έναν αρκετά μεγάλο γράφο αν δεν ισχύει  $P = NP$ , επίσης αν ισχύει η εικασία unique games τότε το πρόβλημα δεν μπορεί να προσεγγιστεί με σταθερό παράγοντα μικρότερο του 2.

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

**Ειδικές  
περιπτώσεις**

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

# Ειδικές περιπτώσεις

# Εισαγωγικές έννοιες

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Διμερείς γράφοι

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

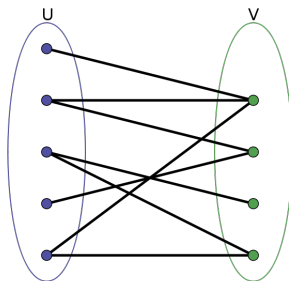
Bigraphs

Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

Σχήμα : Bigraph example



# Εισαγωγικές έννοιες

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

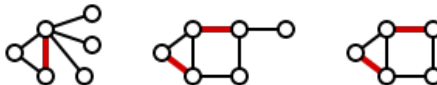
Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

Εφαρμογές

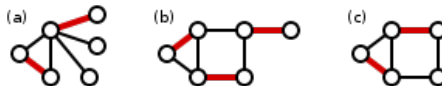
Αναφορές

## Matching

Σχήμα : Matching example



Σχήμα : Maximum matching example



# Θεώρημα Konig

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

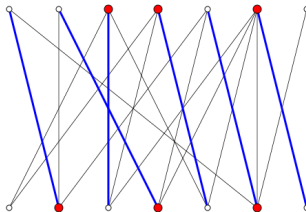
Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

Για κάθε διμερή γράφο  $G = (V, E)$  ισχύει  $\nu(G) = \tau(G)$  όπου  
 $\nu(G) :=$  maximum size of a matching in  $G$ ,  
 $\tau(G) :=$  minimum size of a vertex cover in  $G$ .

Σχήμα : Maximum matching - minimum vertex cover example





# Απόδειξη

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

Έστω ένας διμερής γράφος  $G = (L, R, E)$  και ένα μέγιστο ταίριασμα  $M$ . Τότε επειδή κανένας κόμβος ενός vertex cover δεν μπορεί να καλύπτει περισσότερες από δύο ακμές του συνόλου  $M$  (διαφορετικά δεν θα ήταν ταίριασμα), ένα vertex cover μεγέθους  $|M|$  θα είναι το ελάχιστο vertex cover. Για να δημιουργήσουμε ένα τέτοιο vertex cover, έστω  $U$  το σύνολο των μη ταιριασμένων κόμβων του  $L$ , και  $Z$  το σύνολο των ακμών που είτε είναι στο  $U$  είτε συνδέονται με αυτό μέσω εναλλακτικών μονοπατιών (alternating paths). Τότε το σύνολο  $V' = (L \setminus Z) \cup (R \cap Z)$  είναι ένα vertex cover.

# Vertex Cover από Matching

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές

Οπότε χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Hopcroft-Karp, ο οποίος βρίσκει ένα μέγιστο ταίριασμα σε ένα διμερή γράφο σε χρόνο  $O(|E|\sqrt{|V|})$ , μπορούμε έπειτα να υπολογίσουμε το σύνολο  $V'$  αποδοτικά. Επίσης για όλους τους γράφους ισχύει

$$\max_{\text{matching } M} |M| \leq \min_{\text{vertex cover } U} |U| \leq 2 \cdot \left( \max_{\text{matching } M} |M| \right)$$



# Clique

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

## Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs

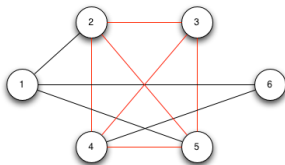
Δυσκά προβλήματα

## Εφαρμογές

## Αναφορές

Ένα clique ενός μη κατευθυντικού γράφου  $G = (V, E)$  είναι ένα υποσύνολο των ακμών  $C \subseteq V$  τέτοιο ώστε όλοι οι κόμβοι του να είναι γειτονικοί ανά δύο. Αν υπάρχει ένα clique  $C$  στον  $\overline{G}$  τότε το  $V \setminus C$  είναι ένα vertex cover του  $G$ .

Σχήμα : Clique example



# Independent set

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

## Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

## Ειδικές περιπτώσεις

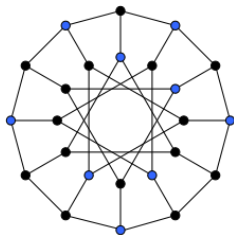
Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

## Εφαρμογές

## Αναφορές

Το independent set ενός γράφου είναι ένα σύνολο των κόμβων του οι οποίοι δεν είναι γειτονικοί ανά δύο. Για κάθε independent set ενός γράφου το συμπλήρωμα του είναι ένα vertex cover για αυτόν τον γράφο.

Σχήμα : Independent set example



Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσικά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

# Εφαρμογές

# Εφαρμογές

Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

Set Cover  
Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Vertex cover  
problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

Ειδικές  
περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

Εφαρμογές

Αναφορές

- 1 Στο οδικό δίκτυο μια πόλης
- 2 Φύλαξη κτιρίων
- 3 Δυναμική ανίχνευση race conditions
- 4 Εξάλειψη συγκρούσεων (υπολογιστική βιοχημεία)

# Βιβλιογραφία I

## Vertex Cover

Δημήτρης  
Δήμου

### Set Cover Problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Vertex cover problem

Διατύπωση  
NP-πληρότητα  
Λύσεις

### Ειδικές περιπτώσεις

Bigraphs  
Tree graphs  
Δυσκά προβλήματα

### Εφαρμογές

### Αναφορές



Thomas H. Cormen κ.ά. *Introduction to Algorithms*. 3rd. MIT Press, 2009.



George Karakostas. "A better approximation ratio for the vertex cover problem". Στο: *ACM Transactions on Algorithms* (2009).



Vijay V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer, 2003.