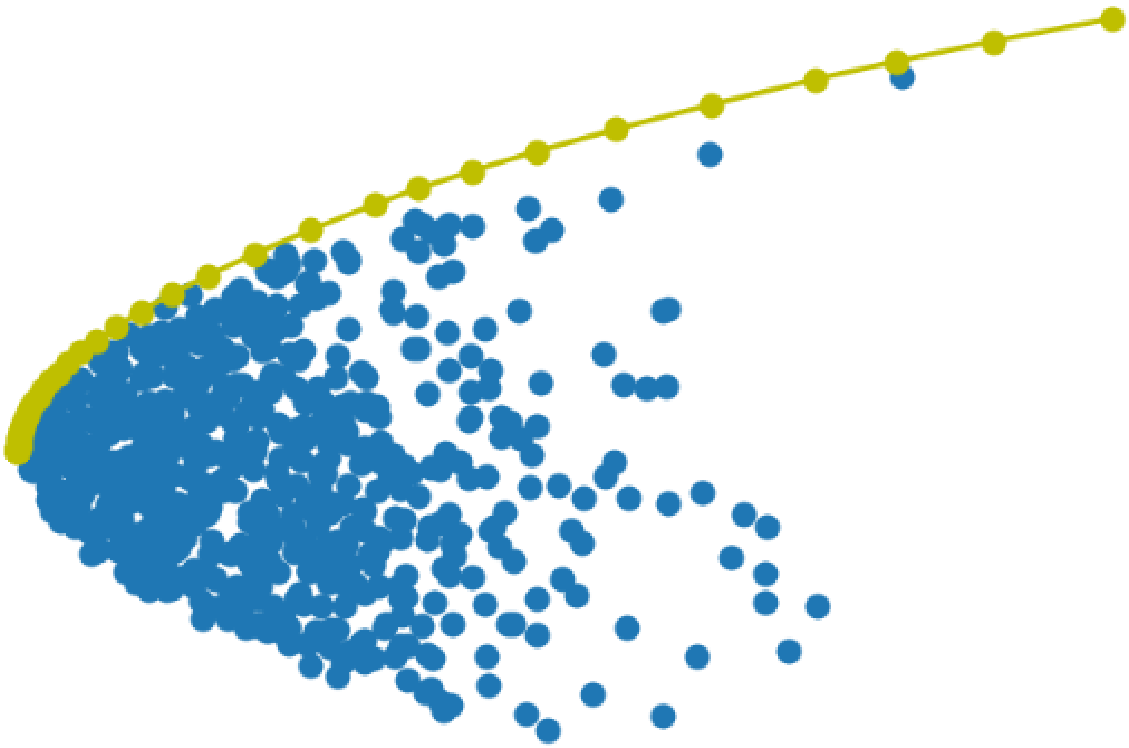
# OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE DE MARKOWITZ



**Abdelrhman El Masry, Dylan Jocktane, Houtmen El Morabit, Trevor Hounkponou, Abdellah Lbaze**

# SOMMAIRE

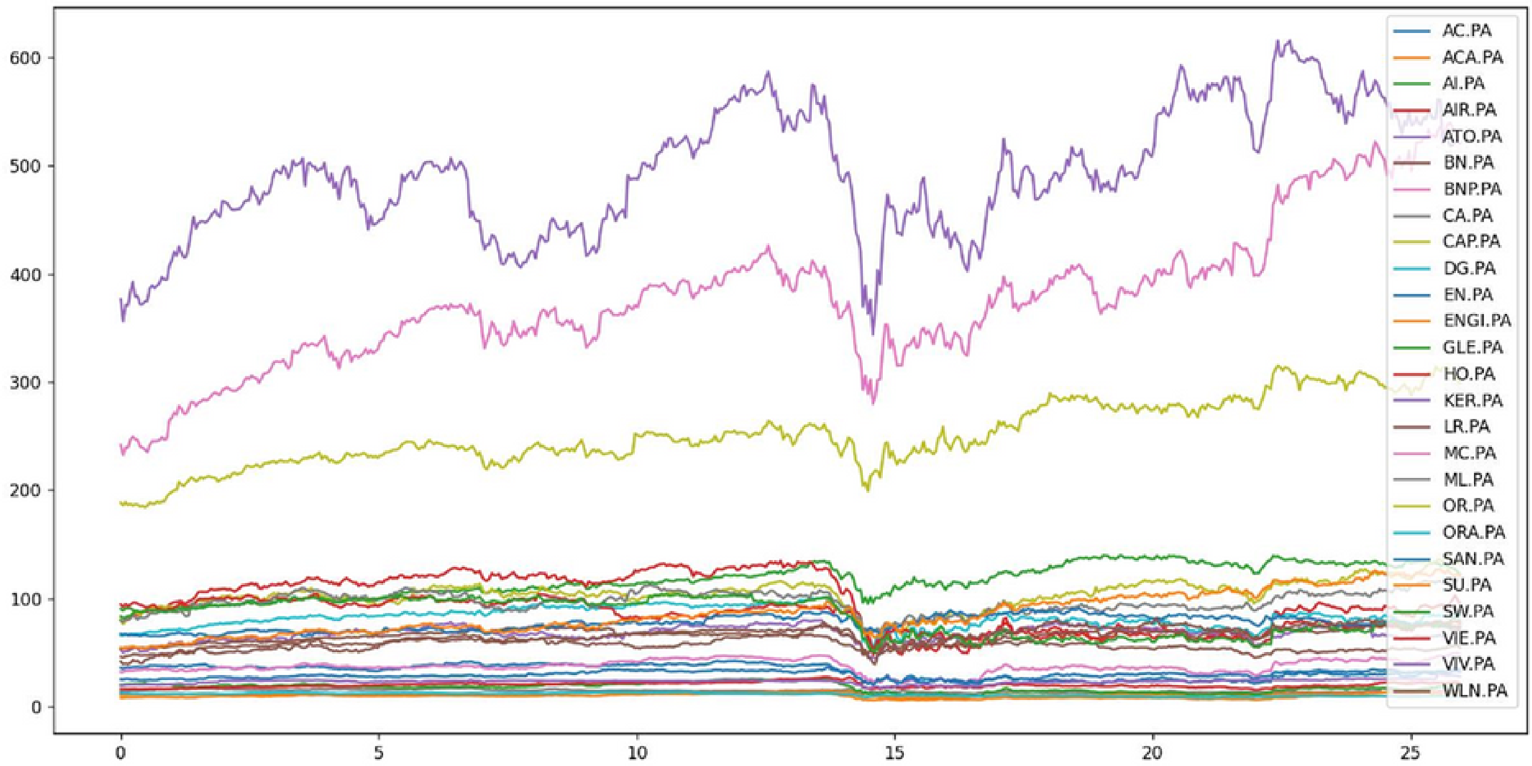
# I. INTRODUCTION

La théorie moderne du portefeuille a été élaborée par Markowitz et a valu à son inventeur le prix Nobel d'économie en 1990. L'objectif de cette théorie est d'nanalyser les propriétés des portefuiles en termes de couple rentabilité-risque et de mesurer les effets de la diversification sur  le risque du portefeuille

Ce projet a pour objectif d'explorer différentes méthodes d'optimisation dans le but de créer des portefeuilles rentables tout en minimisant le risque ou au moins en le controlant en s'appuyant sur la celèbre méthode d'optimisation de Matkowtiz.

Cette dernière, s'érigeant en une théorie majeure en finance et en économie, permet à l'investisseur d'élaborer des portefeuilles optimaux en maximisant le rendement, tout en réduisant le risque. Toutefois, la création de ces portefeuilles peut se révéler complexe et laborieuse. C'est la raison pour laquelle, dans le cadre de ce projet, nous examinerons différentes méthodes d'optimisation susceptibles de résoudre cette problématique.

Tout au long de ce projet nous étudierons des actifs, certains seront simulés selon le modèle de Black & Scholes et d’autres actifs seront ceux du CAC40 pour des valeurs prises entre 2019 et 2021.



# II. RÉSOLUTION DE PROBLÈME D'OPTIMISATION

***N° 01 -***

### 1.I.1 Résoudre le problème 1

- Minimisation du risque sous une seule contrainte égalité :

$$\begin{cases} \min_{X_1,\dots X_n} \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases}$$

a) Ecrire le Lagrangien
b) Ecrire les équations de Lagrange et les conditions Kuhn- Tucker.
c) Résoudre le systèmes des équations et trouver la repartition $X_i$ des actifs

On écrit le lagrangien correspondant à ce problème :

$$L(X_0, \dots, X_n, h) = \Sigma_{i=1}^{n} \Gamma_{i,j} X_i X_j + h \Sigma_{i=1}^{n} X_i$$

On écrit les équation de lagrange et de Kuhn - Tucker :

$$\begin{cases} \forall i \in [1, \dots, n] \quad \frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases}$$

$$2\Gamma X + hU = 0 \Rightarrow X = -\frac{1}{2} h \Gamma^{-1} U$$

Or $\quad XU = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\Gamma^{-1}U = -\frac{1}{2} h U^T \Gamma^{-1} U$

d'où $\quad \boxed{X = \frac{\Gamma^{-1} U}{U^T \Gamma^{-} \, U}}$

## II. RÉSOLUTION DE PROBLÈME D'OPTIMISATION

### *N° 02 -*

**1.I.2 Résoudre le problème 2**

- Minimisation du risque sous une contrainte egalité et nonegalité :

$$\begin{cases} \min_{X_1,\dots X_n} \sum_{ij}^n \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^n X_i E_i \geq R_0 \\ \sum_{i=1}^n X_i = 1 \end{cases}$$

a) Ecrire le Lagrangien
b) Ecrire les l'équations de Lagrange et les conditions Kuhn- Tucker.
d) Résoudre le systèmes des équations et trouver la repartition $X_i$ des actifs.
c) Consulter l'article " Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory."

On écrit le lagrangien correspondant à ce problème :

$$L(X_1, \dots, X_n, h) = \Sigma_{i=1,j=1}^n \Gamma_{i,j} X_i X_j + h(\Sigma_{i=1}^n X_i - 1) + \mu(\Sigma_{i=1}^n E_i X i - R0)$$

On écrit les équation de lagrange et de Kuhn - Tucker :

$$\begin{cases} \forall i \in [1, \dots, n] \quad \frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n X_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n X_i E_i \geq R_0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\Sigma_{j=1}^n \Gamma_{i,j} X_j + hU_i + \mu E_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n X_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n X_i E_i \geq R_0 \end{cases}$$

**On distingue 2 cas :**

**si $\mu$ = 0 :**

$$\boxed{X = \frac{\Gamma^{-1} U}{U^T \Gamma^{-1} U}}$$

## *N° 02 - (suite)*

si $\mu \neq 0$ :

$$2\Gamma X + hU + \mu E = 0 \Longleftrightarrow \boxed{X = -\frac{1}{2}X\Gamma^{-1}U - \frac{1}{2}\mu\Gamma^{-1}E}$$

or, $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i E_i \geq R_0 \end{cases}$$

donc, $$\begin{cases} -\frac{1}{2}h\Sigma_{i,j}^{n}\Gamma_{i,j}^{-1}U_iU_j - \frac{1}{2}\mu\Sigma_{i,j}^{n}\Gamma_{i,j}^{-1}E_jU_i = 1 \\ -\frac{1}{2}h\Sigma_{i,j}^{n}\Gamma_{i,j}^{-1}E_iU_j - \frac{1}{2}\mu\Sigma_{i,j}^{n}\Gamma_{i,j}^{-1}E_jE_i = R_0 \end{cases}$$

On pose alors :

$$A = \sum_{ij}\Gamma_{ij}^{-1}E_jU_i, \quad B = \sum_{ij}\Gamma_{ij}^{-1}U_jU_i, \quad C = \sum_{ij}\Gamma_{ij}^{-1}E_jE_i, \quad U = ones(1, N)$$

d'où :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}hB - \frac{1}{2}\mu A = 1 \\ -\frac{1}{2}hA - \frac{1}{2}\mu C = R_0 \end{cases}$$

On pose :

$$\alpha = \frac{A(R_0 B - A)}{CB - A^2}$$

$$\Rightarrow X_i = \frac{R_0 B - A}{CB - A^2}\Sigma_{j=1}^{n} E_i - \frac{R_0 A - C}{BC - A^2}\Sigma_{j=1}^{n} U_J$$

$$\Rightarrow \boxed{X_i = \alpha\frac{\Sigma_{j=1}^{n} E_i}{A} - (1-\alpha)\frac{\Sigma_{j=1}^{n} U_J}{B}}$$

# II. RÉSOLUTION DE PROBLÈME D'OPTIMISATION

## *N° 03 -*

### 1.I.3 Résoudre le problème 3

- Maximiser le return sous les contraintes egalités :

$$\begin{cases} \max_{X_1,\ldots X_n} \sum_{i=1}^{n} X_i E_i \\ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij}\, X_i\, X_j = \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases}$$

a) Ecrire le Lagrangien
b) Ecrire les l'équations de Lagrange et les conditions Kuhn- Tucker.
d) Résoudre le système des équations et trouver la repartition $X_i$ des actifs.
c) Conculter l'article " Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory."

On écrit le lagrangien correspondant à ce problème :

$$L = \sum_{i=1}^{n} X_i E_i + \lambda\left(\sum_{i,j} \Gamma_{i,j} X_i X_j - \sigma^2\right) + \mu\left(\sum_{i} X_i - 1\right)$$

On écrit les équation de lagrange et de Kuhn - Tucker :

$$\begin{cases} \forall i \in [1, \ldots, n] \quad \frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \\ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij}\, X_i\, X_j = \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases}$$

on a alors :

- $\frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \quad \Rightarrow E + 2\lambda \Gamma X + \mu U = 0$

  $\Rightarrow \boxed{X = \frac{-1}{2\lambda}\Gamma^{-1}(\mu U + E)}$
- $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \quad \Rightarrow XU = 1$

  $\Rightarrow \frac{-1}{2\lambda} U^t \Gamma^{-1}(\mu U + E) = 1$

$$\mu = \frac{E - A\sigma^2 U}{(1 + B\sigma^2)U}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{(A\sigma^2 U - E)B}{(1 + B\sigma^2)U} - A\right)$$

On pose : A$= U^t \Gamma^{-1} U$ et B$= U^t \Gamma^{-1} E$
On obtient :

$$\frac{-\mu B}{2\lambda} - \frac{A}{2\lambda} = 1 \qquad \text{avec } \mu = \frac{E - A\sigma^2 U}{(1+\sigma^2)U} \text{ et } \lambda = \frac{1}{2}(-A - \mu B)$$

$$-\mu B - A = 2\lambda$$

### 1.I.5 Tracer la Frontière efficiente de Markowitz

• Chaque actif possède un couple rendement/risque $(R, \sigma)$,

$$\sigma^2 = \sum_{ij}^{N} \Gamma_{ij} X_i X_j$$

qu'il est possible de représenter graphiquement. Pour chaque rendement $(R)$, il existe un portefeuille qui minimise le risque $\sigma$. À l'inverse, pour chaque niveau de risque, on peut trouver un portefeuille maximisant le rendement attendu. L'ensemble de ces portefeuilles est appelé frontière efficiente.

• Pour un Portefeuille efficient aucun autre n'est meilleur au sens des critères que sont la moyenne $(R)$ et la variance $\sigma$.

a) Montrer que l' équation de frontière efficiente est

$$\frac{\sigma^2}{(\frac{1}{\sqrt{B}})^2} - \frac{(R - \frac{A}{B})^2}{(\frac{\sqrt{BC-A^2}}{B})^2} = 1$$

soit

$$R = \frac{A}{B} \pm \frac{A}{B}\sqrt{\sigma^2 B - 1}\sqrt{BC - A^2}$$

b) Tracer la frontière efficiente théorique

$$\sigma \to R.$$

Marquer sur la frontière les solutions de chaque problème calculés pour les Cas 1, Cas 2 et Cas 3.

On a :

— A=$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} E_j U_i$

— B=$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} U_j U_i$

— C=$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} E_j E_i$

$\sigma^2 = \sum_i \sum_j \Gamma X_i X_j = {}^tX\Gamma X$ Or :$X = \alpha\frac{\Gamma^{-1}E}{A} + (1-\alpha)\frac{\Gamma^{-1}U}{B}$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= (\frac{\alpha}{A}\,{}^tE({}^t\Gamma^{-1}) + \frac{(1-\alpha)}{B}\,{}^tU\,{}^t(\Gamma^{-1}))\Gamma(\frac{\alpha\Gamma^{-1}E}{A} + (1-\alpha)\frac{\Gamma^{-1}U}{B}) \\
&= (\frac{\alpha}{A}\,{}^tE({}^t\Gamma^{-1}) + \frac{(1-\alpha)}{B}\,{}^tU\,{}^t(\Gamma^{-1}))(\frac{\alpha E}{A} + (1-\alpha)\frac{U}{B}) \\
&= \frac{\alpha^2}{A^2}\,{}^tE\,{}^t(\Gamma^{-1})E + \frac{\alpha(1-\alpha)}{AB}\,{}^tE\,{}^t(\Gamma^{-1})U + \frac{\alpha(1-\alpha)}{AB}\,{}^tU\,{}^t(\Gamma^{-1})E + \frac{(1-\alpha)^2}{B^2}\,{}^tU\,{}^t(\Gamma^{-1})U
\end{aligned}$$

Or

${}^tU\,{}^t(\Gamma^{-1})E = {}^t(\Gamma^{-1}U)E = {}^tE\,{}^t\Gamma^{-1}u = A$

Donc :

## II. RÉSOLUTION DE PROBLÈME D'OPTIMISATION

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\alpha^2}{A^2}C + \frac{2\alpha(1-\alpha)}{B} + \frac{(1-\alpha)^2}{B} \\
&= \frac{(R_0^2B^2 - 2R_0BA + A^2)C + 2A(R_0B - A)(C - R_0A) + B(R_0^2A^2 - 2R_0AC + C^2)}{(BC - A^2)} \\
&= \frac{CR_0^2B^2 - 2R_0BAC - R_0^2A^2B - A^2C + CR_0A^2 + BC^2}{(BC - A^2)} \\
&= \frac{C + R_0^2B - 2R_0A}{(BC - A^2)}
\end{aligned}$$

on trouve alors :

$$-2R_0A + R_0^2B + C - \sigma^2(BC - A^2) = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned}
\sigma &= (-2A)^2 - 4B(\sigma^2(BC - A^2) - C) \\
&= 4(A^2 + B(\sigma^2(BC - A^2) - C))
\end{aligned}$$

On trouve :

$$\boxed{R = \frac{A}{B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{\sigma^2 B - 1}\sqrt{BC - A^2}}$$

## II. RÉSOLUTION DE PROBLÈME D'OPTIMISATION

# *N° 04 :*

$$\begin{cases} \min \sum_{ij}^{N} \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^{n} X_i E_i + r_f \cdot X_0 \geq R_0 \\ \sum_{i=1}^{N} X_i + X_0 = 1 \end{cases}$$

On écrit le lagrangien correspondant à ce problème :

$$L = \sum_{i,j} \Gamma_{i,j} X_i X_j + \lambda(\sum_i X_i + X_0 - 1) + \mu(\sum_i X_i E_i + r_f X_0 - R_0)$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X_0} = \mu r_f + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_i} = 2\sum_j \Gamma_{i,j} X_j + \mu E_i + \lambda = 0 \\ \mu(\sum_i E_i + r_f X_0 - R_0) = 0 \end{cases}$$

**si $\mu$ = 0 alors $\lambda$ = 0 et** $X_0 = 1$

si $\mu \neq 0$ :

$$2\Gamma X - \mu E + \lambda U = 0$$

$$2\Gamma X - \mu E - \mu r_f U = 0$$

$$\Rightarrow X = \frac{\mu}{2}\Gamma^{-1]}(E - r_f U)$$

**On remplace dans l'équation :**

$$\Sigma_i X_i + X_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mu U^T \Gamma^{-1}(E - r_f U) = 2(1 - X_0) \\ \mu U^T \Gamma^{-1}(E - r_f U) = 2(R_0 - r_f X_0) \end{matrix}$$

**On pose :**

$$A = U^T \Gamma^{-1}(E - r_f U)$$

$$B = E^T \Gamma^{-1}(E - r_f U)$$

# N° 04 (suite) :

On obtient :

$$\begin{cases} \mu A + 2X_0 = 2 \\ \mu B + 2r_f X_0 = 2R_0 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle :

$$M \begin{pmatrix} \mu \\ X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2R_0 \end{pmatrix}$$ **Avec :** $$M = \begin{pmatrix} A & 2 \\ B & 2r_f X_0 \end{pmatrix}$$

- $det(M) = 2(Ar_f - B)$
- $M^{-1} = \frac{1}{2(Ar_f - B} \begin{pmatrix} 2r_f & -4 \\ -B & A \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mu \\ X_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(Ar_f - B} \begin{pmatrix} 4(r_f - R_0) \\ -2B + 2R_0 A \end{pmatrix}$$

D'où : $$X = \frac{(r_f - R_0)\Gamma^{-1}(E - r_f U}{E^T\Gamma^{-1}(E - r_f U) - U^T\Gamma^{-1}(E - r_f U)r_f}$$

**Donc :** $$\boxed{X_i = \alpha \cdot \sum_{ii} \Gamma_{ij}^{-1}(E_j - r_f U_j)}$$ **Avec :** $$\alpha = \frac{R_0 - rf}{(E - r_f U)^T\Gamma^{-1}(E - r_f U)}$$

# N° 05 -

### 1.I.6 Etudier le problème 5. Optimisation avec Sharpe Ratio.

- Portefeuille contient un actif sans risque avec le taux d'interêt $r_f$.
- Maximisation du Sharpe Ratio sous contraintes egalités :

$$\begin{cases} \max_{X_1,\dots X_N} \frac{\sum X_i E_i - r_f}{\sqrt{\sum_{ij} \Gamma_{ij} X_i X_j}} \\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \end{cases}$$

Montrer que les problèmes 4 et 5 sont équavalentes.
Pour cela faire le changement de variable.

on pose : $t = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i - r_f}$ et $\xi_i = tX_i$

On calcule alors :

$$\max_{X_1,\dots X_N} \frac{\sum X_i E_i - r_f}{\sqrt{\sum_{ij} \Gamma_{ij} X_i X_j}} = max_{X_i,\dots,X_n} \frac{1}{t\sqrt{\sum_{i,j} \Gamma_{i,j} \frac{\xi_i}{t} \frac{\xi_j}{t}}}$$

$$= max_{X_i,\dots,X_n} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i,j} \Gamma_{i,j} \xi_i \xi_j}}$$

$$max_{X_i,\dots,X_n} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i,j} \Gamma_{i,j} \xi_i \xi_j}} \Longleftrightarrow min_{X_i,\dots,X_n} \sum_{i,j} \Gamma_{i,j} \xi_i \xi_j$$

$$\Longleftrightarrow min_{X_i,\dots,X_n} \sum_{i,j} \Gamma_{i,j} X_i X_j$$

Finalement : $\max_{X_1,\dots X_N} \frac{\sum X_i E_i - r_f}{\sqrt{\sum_{ij} \Gamma_{ij} X_i X_j}} \Longleftrightarrow \boxed{min_{X_i,\dots,X_n} \sum_{i,j} \Gamma_{i,j} X_i X_j}$

# III.TRACÉ DE LA FRONTIÈRE EFFICIENTE

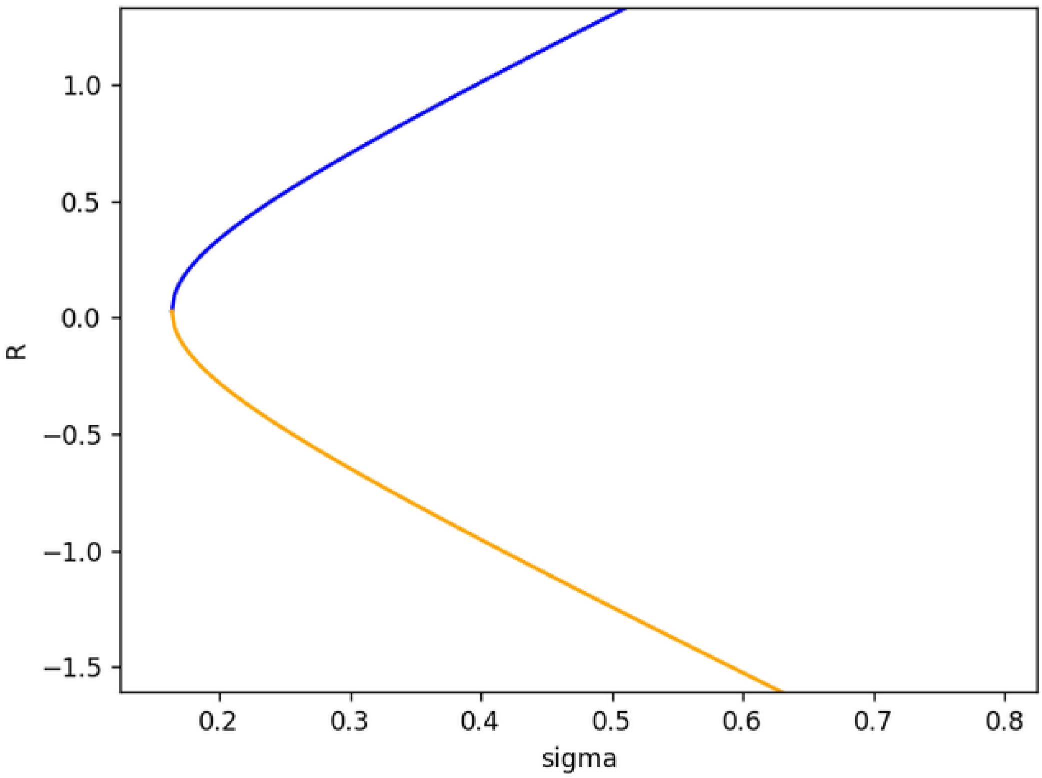
On sait que l'équation de la frontière efficiente s'écrit :

$$R = \frac{A}{B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{\sigma^2 B - 1}\sqrt{BC - A^2}$$

Avec :

$$A = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} E_j U_i$$
$$B = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} U_j U_i$$
$$C = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} E_j E_i$$

On calcule donc Rp et Rm pour des valeurs de sigma et on trace les 2 courbes : (pour les actifs du CAC40)



# IV. ALGORITHME DE LAGRANGE-NEWTON

## *1. Toy-Model sans contraintes*

$$(P) : min \ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} \, r^i \, r^j$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.05 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- On fixe : $r_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ point de départ de notre algorithme.
- On fixe : $\varepsilon = 0.0001$ qui fixera la condtion d'arrêt et la précision.
- On pose : $d_k = -H(r_k)^{-1} \nabla f(r_k)$
- Tant que : $||d_k|| > \varepsilon$
  - ▶ $r_{k+1} = r_k + d_k$
- Retourner **r**

On obtient alors les valeurs permetant de minimiser le risque (P) :

| $r(1)$ | $r(2)$ | $r(3)$ |
|---|---|---|

```
[1.30718954 0.98039216 1.04575163]
```

Comme il n'y a pas de contraintes, la condition :
r(1) + r(2) + r(3) = 1 n'est pas respectée.

## 2. Toy-Model avec contraintes

$$(PC): \begin{cases} min \ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} \, r^i \, r^j \\ \sum_{i=1}^{n} r^i E^i = R_0 \\ \sum_{i=1}^{n} r^i = 1 \end{cases}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.05 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- On fixe : $r_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ point de départ de notre algorithme.
- On fixe : $\varepsilon = 0.0001$ qui fixera la condtion d'arrêt et la précision.
- On pose : $d_k = -H(r_k)^{-1} \nabla f(r_k)$
- Tant que : $||d_k|| > \varepsilon$
  - $r_{k+1} = r_k + d_k$
  - $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \xi_k$

  (avec $\lambda_k$ les multiplcateurs de lagranges et $\xi_k$ la direction de la descente)
- Retourner $\mathbf{r}$

On obtient alors les valeurs permetant de minimiser le risque sous contraintes (PC) :

| $r(1)$ | $r(2)$ | $r(3)$ | $\lambda$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|
| [ 0.285 | 0.53 | 0.185 | 0.04775 | -0.3585 ] |

## IV. ALGORITHME DE LAGRANGE-NEWTON

### 3.Généralisation et application au données du CAC40

$$(PO): \begin{cases} min \ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} \, r^i \, r^j \\ \sum_{i=1}^{n} r^i E^i = R_0 \\ \sum_{i=1}^{n} r^i = 1 \end{cases}$$

- On fixe : $r_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ point de départ de notre algorithme.
- On fixe : $\varepsilon = 0.0001$ qui fixera la condtion d'arrêt et la précision.
- On pose : $d_k = -H(r_k)^{-1} \nabla f(r_k)$
- Tant que : $||d_k|| > \varepsilon$
  - $r_{k+1} = r_k + d_k$
  - $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \xi_k$

  (avec $\lambda_k$ les multiplcateurs de lagranges et $\xi_k$ la direction de la descente)
- Retourner **r**

# V. ALGORITHME DE USAWA

$$\begin{cases} min \quad f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \\ Qx - c = 0 \end{cases}$$

- Choisir $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$
- Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- Choisir un pas $\rho > 0$
- Tant que le critère d'arret n'est pas satisfait ( $||Qx_k - c|| > \varepsilon$) :
- Calculer $x_{k+1}$ par la résolution du sous-problème :
  $$min_x \ \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + \langle \lambda_k, Qx - c\rangle$$
- Calculer $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Qx_{k+1} - c)$
- Fin Tant que

Nous allons utiliser cette algorythme avec
le produit scalaire cannonique de Mn(R)
afin de resoudre :

$$\begin{cases} min \ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij}\, r^i\, r^j \\ \sum_{i=1}^{n} r^i E^i = R_0 \\ \sum_{i=1}^{n} r^i = 1 \end{cases}$$

Appliqué avec les données du toy_model

On obtient alors les valeurs permetant de minimiser le risque avec les contraintes :

| $r(1)$ | $r(2)$ | $r(3)$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|
| 0.39898372 | 0.40224567 | 0.1758935 | [0.02545487 -0.44777075] |

# VI. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Dans cette partie nous donnerons un exemple de résolution d'un problème d'optimisation en utilisant l'algorithme de Lagrange-Newton afin d'optimiser un portefeuille.

Les actifs concernés ici sont les actifs du CAC40 étudiés entre 2019 et 2021.

En utilisant la fonction scipy.optimize.minimize en python (en précisant l'algorithme d'optimisation : Lagrange-Newton)

On parvient, par exemple, à résoudre les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \min_{X_1,\dots X_n} \sum_{ij}^n \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^n X_i = 1 \end{cases}$$

La distribution optimal ici est donc la suivante (valeur en %) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| AI.PA | 5.75 | OR.PA | 9.06 |
| BN.PA | 18.55 | ORA.PA | 13.71 |
| CA.PA | 9.11 | SAN.PA | 29.76 |
| CAP.PA | 2.91 | SW.PA | 0.57 |
| HO.PA | 1.09 | VIV.PA | 6.23 |
| ML.PA | 2.39 | WLN.PA | 0.87 |

*Les actifs n'étant pas affichés sont affectés d'une valeur de 0%*

$$\begin{cases} \min_{X_1,\dots X_n} \sum_{ij}^n \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^n X_i E_i \geq R_0 \\ \sum_{i=1}^n X_i = 1 \end{cases}$$

La distribution optimal ici est donc la suivante (valeur en %) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| AI.PA | 2.92 | OR.PA | 3.06 |
| ATO.PA | 0.4 | ORA.PA | 22.01 |
| BN.PA | 20.49 | SAN.PA | 31.22 |
| CA.PA | 9.58 | SW.PA | 0.41 |
| CAP.PA | 1.38 | VIV.PA | 3.42 |
| HO.PA | 5.11 | | |

*Les actifs n'étant pas affichés sont affectés d'une valeur de 0%*

# VII.CONCLUSION

L'optimisation du protefeuille de Markowitz est méthode qui permet une gestion optimal, En s'appuyant sur cette theorie, il est possible d'obtenir un portefeuille optimal dans le sens où l'on peut maximiser le gain avec des contraintes sur le risques ou inversement.

De plus, bien que la theorie soit une partie importante il va de soit que pour traiter un grand nombre de données et d'actifs (comme pour le CAC40) il faut être en mesure de programmer les differentes méthode d'optimisation étudier en théorie.

Notre projet sur l'optimisation d'un portefeuille de Markowitz nous a permis de mieux comprendre les principes de base de la théorie du portefeuille. Nous avons déterminé les différentes solutions analytiques pour le probleme d'optimisation de portefeuille de Markowitz.

Nous avons ensuite calculé la frontière efficiente théorique en traçant la courbe qui représente les combinaisons optimales de rendement et de risque pour différents portefeuilles.

Ensuite, nous avons utilisé plusieurs algorithmes d'optimisation pour résoudre le problème d'optimisation de Markowitz. Nous avons appliqué les méthodes de Lagrange, Newton et Usawa, ainsi que des bibliothèques d'optimisation de Python pour trouver les portefeuilles optimaux qui minimisent le risque tout en maximisant le rendement.

Grâce à ces travaux , nous avons été en mesure de construire des portefeuilles optimaux pour des model fictif mais aussi pour des modèles réel comme celui du Cac 40 . Ce projet nous a permis d'acquérir une compréhension approfondie des principes de base de la théorie du portefeuille et de l'optimisation de portefeuille, ainsi que des compétences en analyse de données et en programmation en Python.