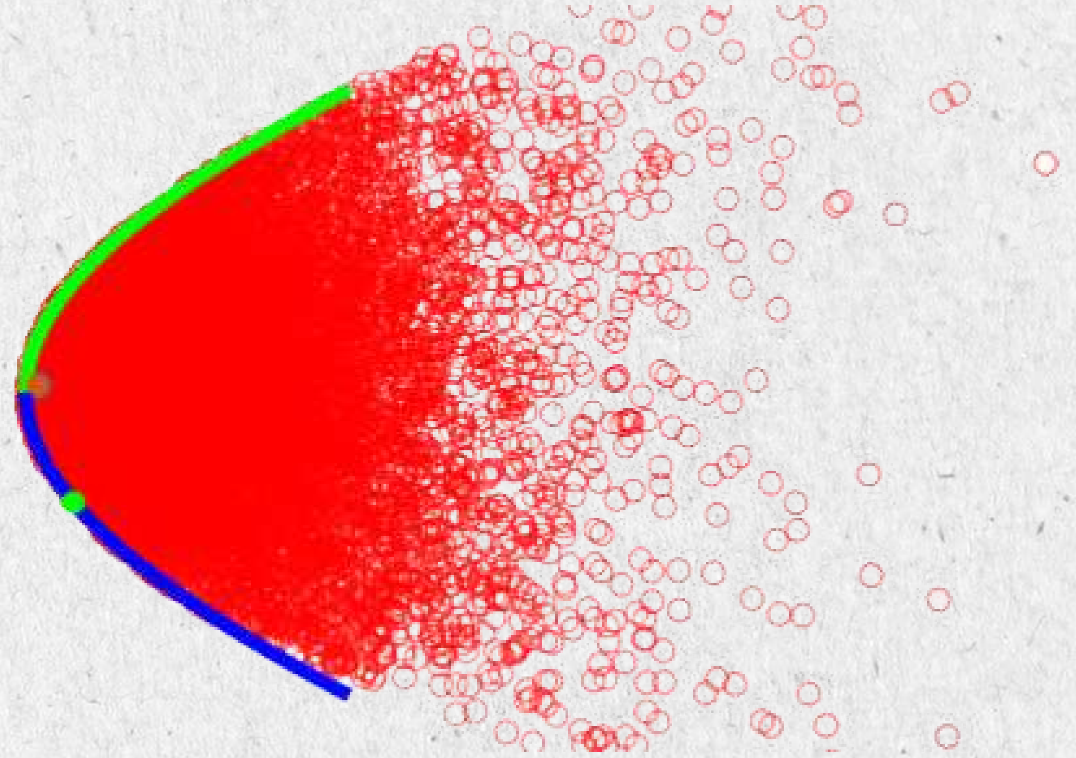
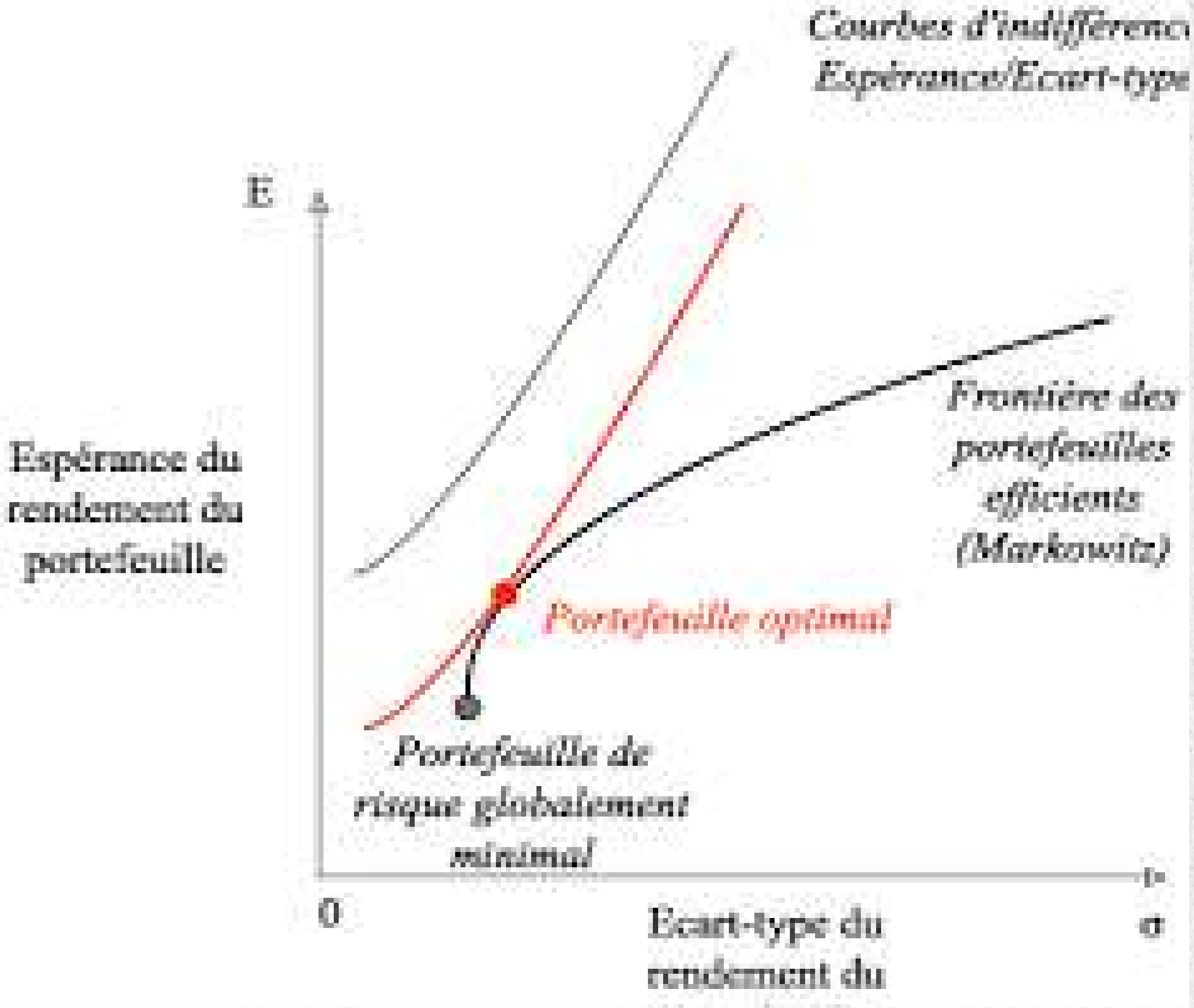
Optimisation de protefeuille de Markowitz

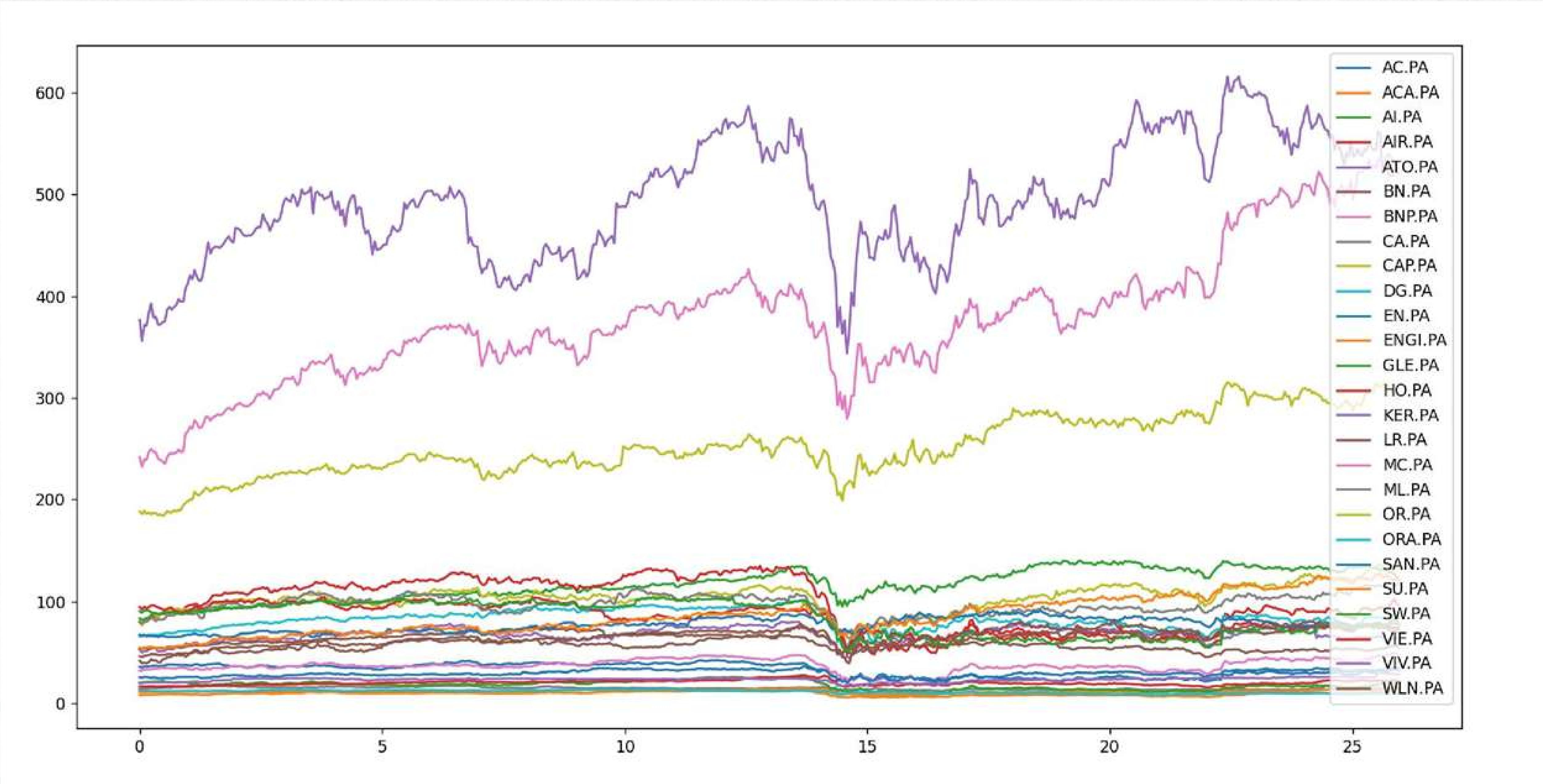


Abdelrhman El Masry, Trevor Hounkponou, Dylan Jocktane,Houtmen El Morabit, Abdellah Lbaze

Portefeuille de Markowitz



Idée de départ



Hypothèses d'information, risque et rendement

Espérance et variance

Selon le modèle :

- **le rendement d'un portefeuille est une combinaison linéaire de celui des actifs qui le composent, pondérés par leur poids dans le portefeuille. ;**
-
- **la volatilité du portefeuille est une fonction de la corrélation entre les actifs qui le composent. Cette fonction n'est pas linéaire.**

$$\mathrm{E}(R_p) = \sum_i w_i \, \mathrm{E}(R_i)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$$

Plan

1. Probleme d'optimisation et méthode de résolution théorique
2. Frontiere efficiente
3. Algorithme d'optimisation
4. Résolution numérique

1 Probleme d'optimisation et méthode de résolution théorique

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) = 0 \end{cases}$$

- On introduit le Lagrangien : $\forall (x.\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad L(x.\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$

- **On résout le système suivant**

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) = 0 \end{cases}$$

conditions de Kuhn-Tucker

Application de la méthode pour la minimisation du risque :

$$\begin{cases} \min_{X_1,\dots,X_n} \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases}$$

on écrit le lagrangien :

$$L(X_0, \dots, X_n, h) = \Sigma_{i=1}^{n} \Gamma_{i,j} X_i X_j + h \Sigma_{i=1}^{n} X_i$$

Les conditions de Kunh-Tucker :

$$\begin{cases} \forall i \in [1, \dots, n] \quad \frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases} \Rightarrow X = \frac{\Gamma^{-1} U}{U^T \Gamma^{-1} U}$$

Application de la méthode pour la minimisation du risque avec contrainte sur la rentabilité :

$$\begin{cases} \min_{X_1,\dots X_n} \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^{n} X_i E_i \geq R_0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases}$$

on écrit le lagrangien :

$$L(X_1, ..., X_n, h) = \Sigma_{i=1,j=1}^{n} \Gamma_{i,j} X_i X_j + h(\Sigma_{i=1}^{n} X_i - 1) + \mu(\Sigma_{i=1}^{n} E_i X i - R0)$$

Les conditions de Kunh-Tucker :

$$\begin{cases} 2\Sigma_{j=1}^{n} \Gamma_{i,j} X_j + hU_i + \mu E_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i E_i \geq R_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\mu = 0$: $$X = \frac{\Gamma^{-1} U}{U^T \Gamma^{-1} U}$$

$\mu \neq 0$: $$X_i = \alpha \frac{\Sigma_{j=1}^{n} E_i}{A} - (1-\alpha) \frac{\Sigma_{j=1}^{n} U_J}{B}$$

$$A = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} E_j U_i, \quad B = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} U_j U_i, \quad \alpha = \frac{A(R_0 B - A)}{CB - A^2} \quad C = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1} E_j E_i,$$

Application de la méthode pour la maximisation de la rentabilité avec contraintes sur le risque :

$$\begin{cases} \max_{X_1,\dots,X_n} \sum_{i=1}^{n} X_i E_i \\ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} X_i X_j = \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases}$$

on écrit le lagrangien :

$$L = \sum_{i=1}^{n} X_i E_i + \lambda\left(\sum_{i,j} \Gamma_{i,j} X_i X_j - \sigma^2\right) + \mu\left(\sum_{i} X_i - 1\right)$$

Les condition de Kunh-Tucker :

$$\begin{cases} \forall i \in [1, \dots, n] \quad \frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \\ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} X_i X_j = \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$X = \frac{-1}{2\lambda} \Gamma^{-1} (\mu U + E)$$

$$\mu = \frac{E - A\sigma^2 U}{(1+\sigma^2)U} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{2}(-A - \mu B)$$

Sharp-Ratio

un investisseur placera de l’argent dans un actif risqué seulement si la rentabilité attendu est supérieure à celle qu’il obtiendrait en plaçant cet argent dans un actif sans risque.

$$\frac{\sum X_i E_i - r_f}{\sqrt{\sum_{ij} \Gamma_{ij} X_i X_j}}$$

C'est un rapport entre la rentabilité et le risque.

Plus le ratio de Sharpe est élevé, meilleure est la rentabilité de l’actif.

$$\left\{ \begin{array}{c} \min \sum_{ij}^{N} \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^{n} X_i E_i + r_f \cdot X_0 \geq R_0 \\ \sum_{i=1}^{N} X_i + X_0 = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \max_{X_1,\dots X_N} \frac{\sum X_i E_i - r_f}{\sqrt{\sum_{ij} \Gamma_{ij} X_i X_j}} \\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \end{array} \right.$$

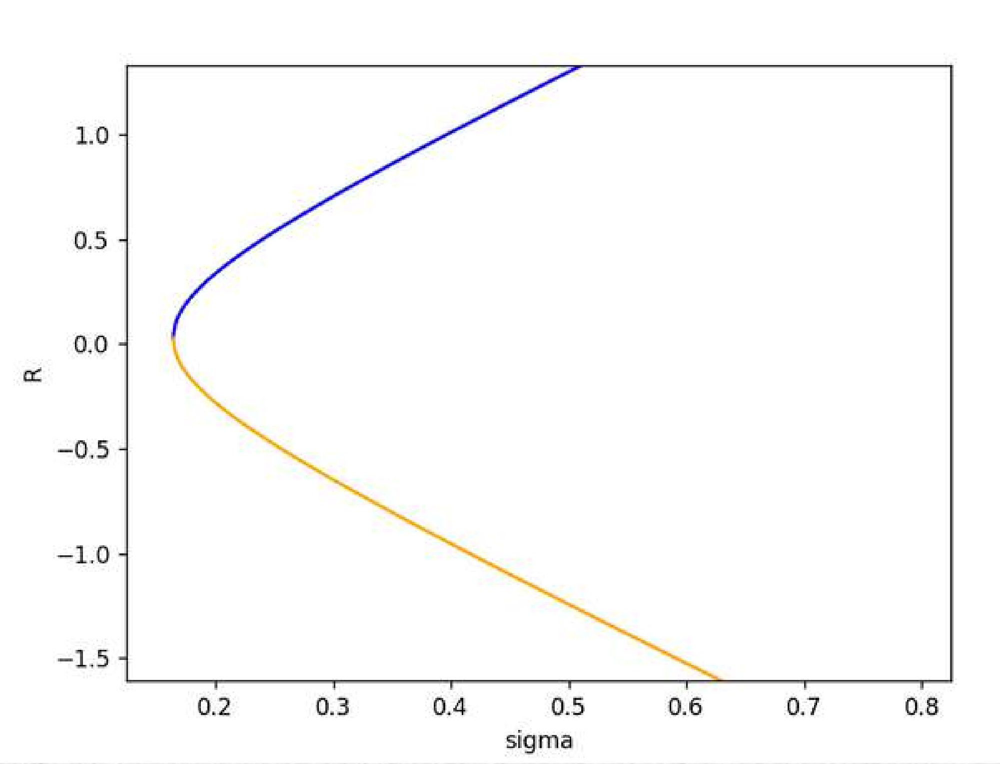
Définition

Chaque actif possède un couple rendement risque qu'il est possible de représenter graphiquement. Pour chaque rendement il existe un portefeuille qui minimise le risque et inversement. L'ensemble de ces portefeuilles est appelé frontière efficiente.

Pour un portefeuille efficient aucun autre n'est meilleur au sens des critères que sont la moyenne et la variance.

On obtient l'équation en l'absence de l'actif sans rique :

$$R = \frac{A}{B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{\sigma^2 B - 1}\sqrt{BC - A^2}$$



Absence de l'actif sans risque

-Avec le graphique on déduit que pour un niveau Ro de rendement souhaité, le portefeuille optimal est donné par :

-A/B > Ro

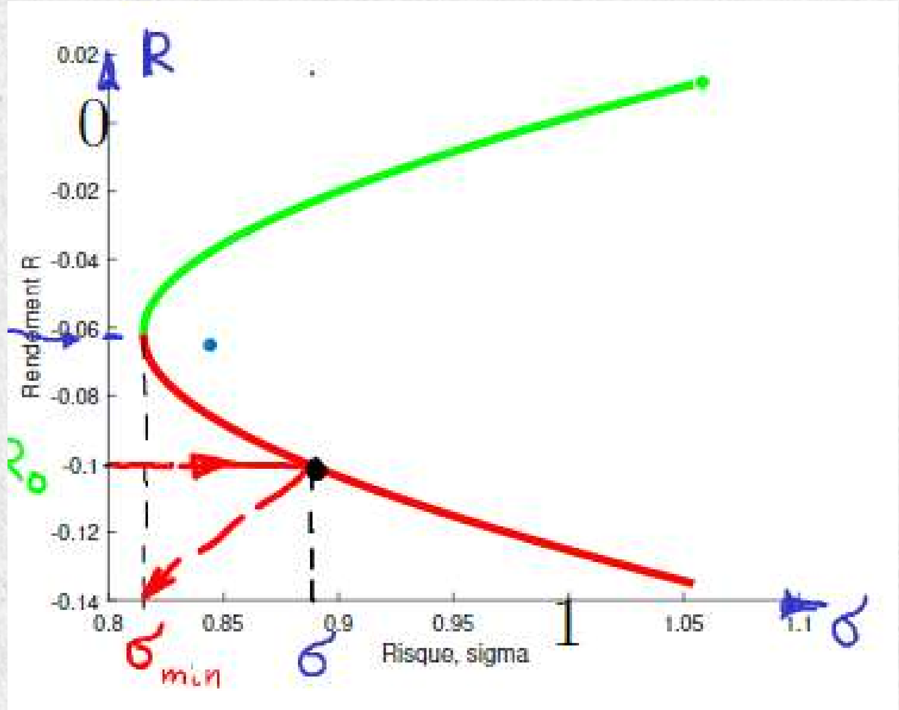
La solution dans ce cas est donné par

$$X = \frac{\Gamma^{-1}U}{U^T\Gamma^{-1}U}$$

$$C = \sum_{ij} \Gamma^{-1}_{ij} E_j E_i,$$

$$A = \sum_{ij} \Gamma^{-1}_{ij} E_j U_i,$$

$$B = \sum_{ij} \Gamma^{-1}_{ij} U_j U_i,$$

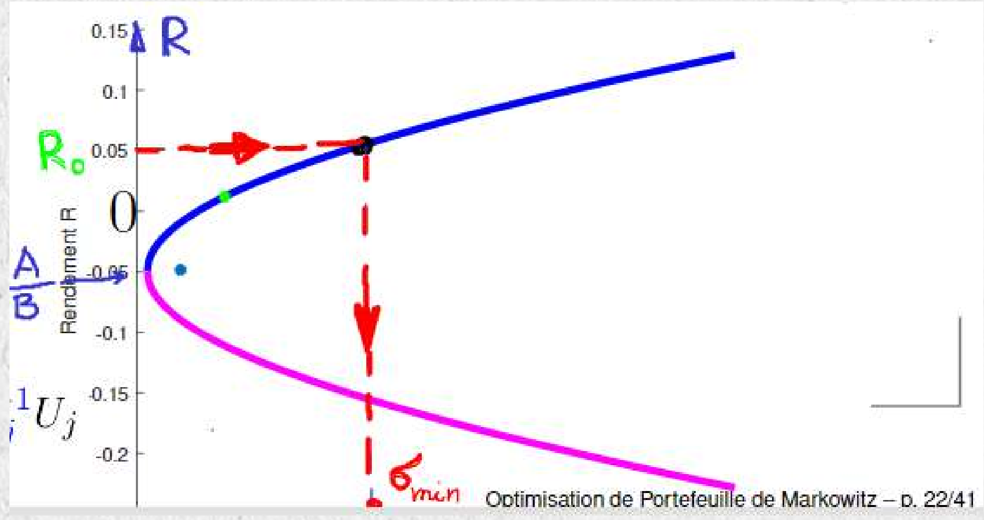


$$R = \frac{A}{B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{\sigma^2 B - 1}\sqrt{BC - A^2}$$

A/B <Ro

$$\alpha = \frac{A(R_0 B - A)}{CB - A^2}$$

$$X_i = \alpha \frac{\Sigma_{j=1}^n E_i}{A} - (1-\alpha)\frac{\Sigma_{j=1}^n U_J}{B}$$

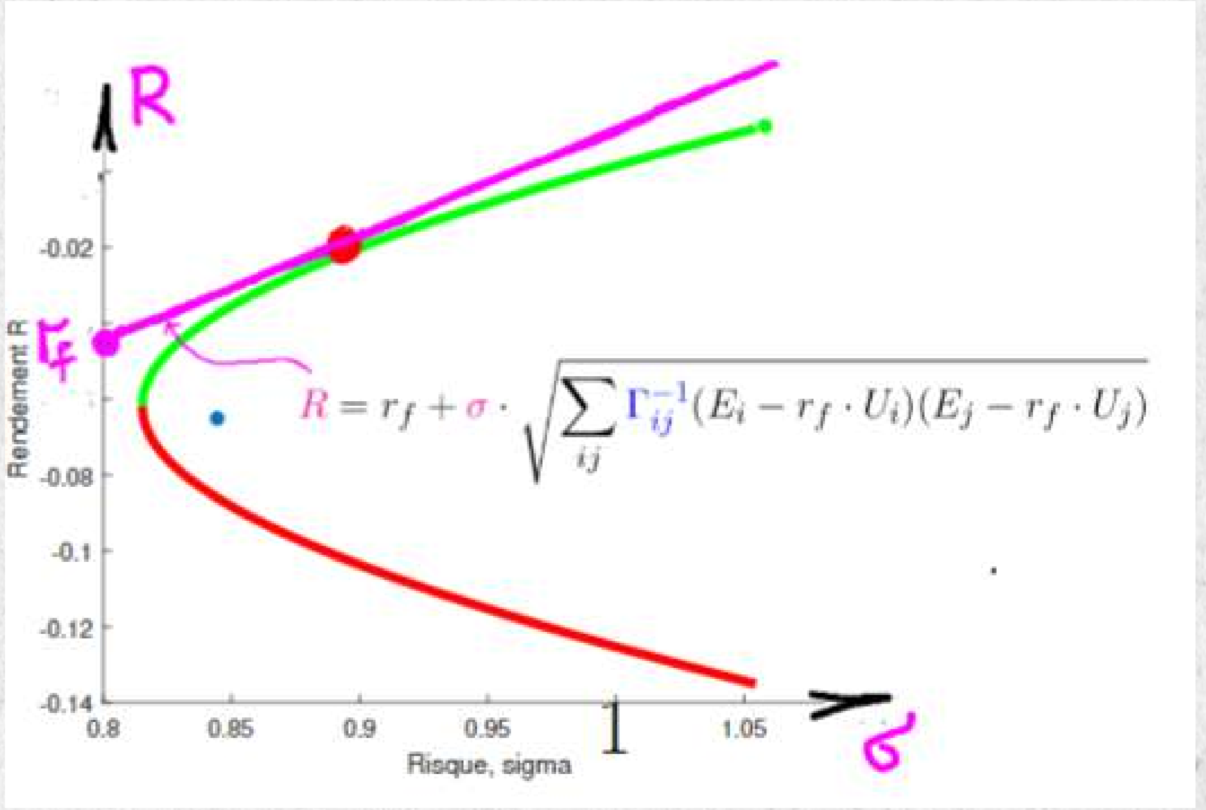


Presence de l'actif sans risque

- Dans le problème 4 on démontre que les investisseurs répartissent leur richesse entre l'actif sans risque et un même fond risqué reproduisant l’indice de marché déterminé par répartition des actifs risqués. On rappelle la solution de ce problème

$$X_i = \alpha \cdot \sum_{ij} \Gamma_{ij}^{-1}(E_j - r_f U_j) \qquad \alpha = \frac{R_0 - rf}{(E - r_f U)^T \Gamma^{-1} (E - r_f U)}$$

Dans ce cas la tangente à la frontière efficiente au point correspondant au portefeuille optimaleest donné par l'expression :



$$R_f = r_f + \sigma \sqrt{\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^{-1}(E_i - r_f U_i)(E_j - r_f U_j)}$$

Optimisation avec l'algorithme de Lagrange - Newton

Méthode de Newton :

Idée : On souhaite trouver le minimum local de la fonction f.

On part d'un point r_0 et on construit une suite de point r_k

$$r_{k+1} = r_k + t_k * d_k$$

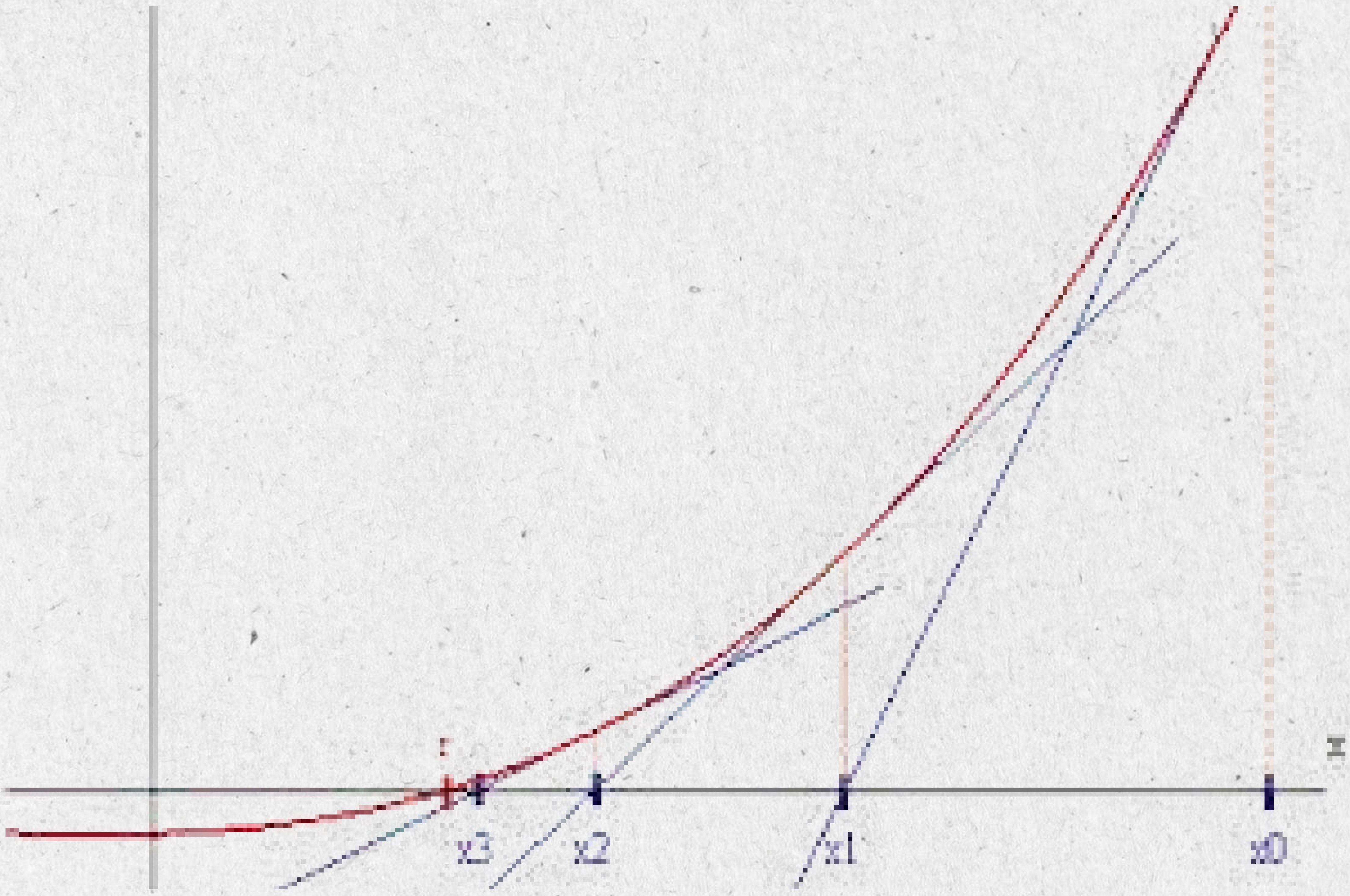
d_k : direction de la descente

t_k : le pas

$$\lim_{k\to\infty} r_k = r_{min}$$

Optimisation avec l'algorithme de Lagrange - Newton

Un graphique pour mieux comprendre :



Optimisation avec l'algorithme de Lagrange - Newton

On cherche les multiplicateurs de Lagrange tels que :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \xi_k$$

ξ_k : direction de descente dans l'espace de multiplicateurs de Lagrange

- les multiplicateurs de Lagrange pour transformer les contraintes du problème en une fonction objectif modifiée,
- la méthode de Newton pour trouver un point d'optimum de cette fonction objectif modifiée.

Optimisation avec l'algorithme de Lagrange - Newton

Présentation de l'algorithme :

- On fixe : $r_0 = (1/3. 1/3. 1/3)$ point de départ de notre algorithme.
- On fixe : $\varepsilon = 0.0001$ qui fixera la condtion d'arrêt et la précision.
- On pose : $d_k = -H(r_k)^{-1}\nabla f(r_k)$
- Tant que : $||d_k|| > \varepsilon$
  - ▶ $r_{k+1} = r_k + d_k$
  - ▶ $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \xi_k$

  (avec λ_k les multiplcateurs de lagranges et ξ_k la direction de la descente)
- Retourner **r**

Optimisation avec l'algorithme de Lagrange - Newton

Exemple d'une résolution d'un problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \\ x+y=1 \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{L(x,y,}\lambda) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \lambda(x+y-1)$$

$$\mathrm{h(x,y) = x+y\text{-}1}$$

$$\nabla_x \nabla_x \, \mathrm{L}(\mathrm{x}_k, \lambda_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \mathrm{h}(\mathrm{x}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Optimisation avec l'algorithme de Lagrange - Newton

Ce que l'on doit trouver :

$$\begin{pmatrix} d_k \\ \xi_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \nabla_x L(x_k, \lambda_k) & [\nabla h(x_k)]^T \\ \nabla h(x_k) & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} [\nabla_x L(x_k, \lambda_k)]^T \\ h(x_k) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \xi_k \qquad x_{k+1} = x_k + d_k$$

L'intérêt l'algorithme de Lagrange - Newton

- L'algorithme de Newton permet généralement une convergence rapide vers un point d'optimum

- Les avantages de l'algorithme Lagrange-Newton dans le contexte de l'optimisation de portefeuille sont notamment sa capacité à gérer efficacement les **nombreuses** contraintes et **nombreuses** variables

- La sensibilité aux conditions initiales et la possibilité de convergence vers des points d'optimum locaux plutôt que globaux

Optimisation avec l'algorithme de Lagrange - Newton

Mise en pratique :

$$(P) : min \ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij} \, r^i \, r^j$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.05 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$r(1)$	$r(2)$	$r(3)$
[1.30718954	0.98039216	1.04575163]

Optimisation avec l'algorithme d'Usawa

$$\begin{cases} min \quad f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \\ \qquad Qx - c = 0 \end{cases}$$

- Choisir $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$
- Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- Choisir un pas $\rho > 0$
- Tant que le critère d'arret n'est pas satisfait ($||Qx_k - c|| > \varepsilon$) :
- Calculer x_{k+1} par la résolution du sous-problème :

$$min_x \ \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + \langle \lambda_k, Qx - c\rangle$$

- Calculer $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Qx_{k+1} - c)$
- Fin Tant que

Afin de résoudre numériquement le sous problème sans contrainte associé , on utilise les algorithmes de newton , la méthode de la descente du gradient et la méthode du gradient à pas conjugué

Optimisation avec l'algorithme d'Usawa

Mise en Pratique avec la methode de la descente du gradient :

$$\begin{cases} min \ \sum_{ij}^{n} \Gamma_{ij}\, r^i\, r^j \\ \sum_{i=1}^{n} r^i E^i = R_0 \\ \sum_{i=1}^{n} r^i = 1 \end{cases}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.05 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad i, j = 1,2,3.$$

$r(1)$	$r(2)$	$r(3)$
0.39898372	0.40224567	0.1758935

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

$$\begin{cases} \min_{X_1,\ldots X_n} \sum_{ij}^n \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^n X_i = 1 \end{cases}$$

AI.PA	5.75	OR.PA	9.06
BN.PA	18.55	ORA.PA	13.71
CA.PA	9.11	SAN.PA	29.76
CAP.PA	2.91	SW.PA	0.57
HO.PA	1.09	VIV.PA	6.23
ML.PA	2.39	WLN.PA	0.87

$$\begin{cases} \min_{X_1,\ldots X_n} \sum_{ij}^n \Gamma_{ij} X_i X_j \\ \sum_{i=1}^n X_i E_i \geq R_0 \\ \sum_{i=1}^n X_i = 1 \end{cases}$$

AI.PA	2.92	OR.PA	3.06
ATO.PA	0.4	ORA.PA	22.01
BN.PA	20.49	SAN.PA	31.22
CA.PA	9.58	SW.PA	0.41
CAP.PA	1.38	VIV.PA	3.42
HO.PA	5.11		

Est ce que la méthode de Markowitz est optimale ?

Conclusion