La recta real

La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario *O*, llamado el **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo *x* está representado por el punto sobre la recta a una distancia de *x* unidades a la derecha del origen, y cada número negativo –*x* está representado por el punto a *x* unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto *P* se llama coordenada de *P* y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real.** A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

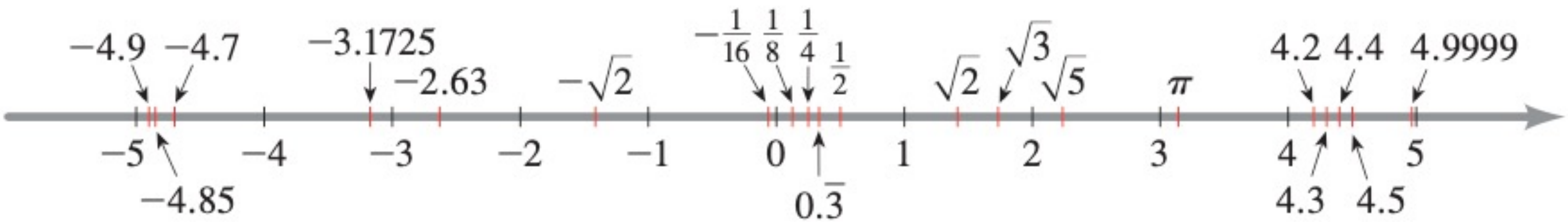


FIGURA 3 La recta real

La recta real (Continuación)

Los números reales son *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que ***b* es mayor que *a*** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee "*a* es menor o igual a *b*". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \leq 2$$

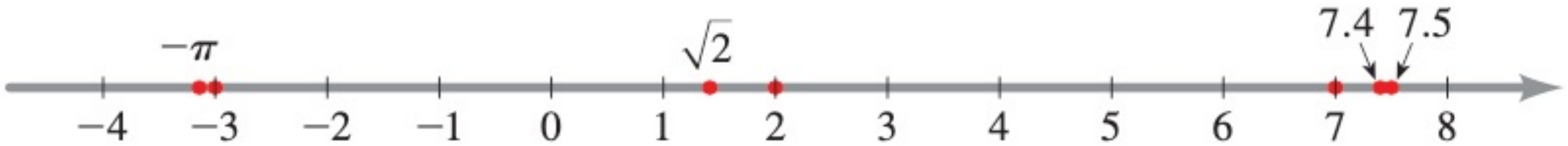


FIGURA 4

Notación de intervalos

FIGURA 5 El intervalo abierto (a, b)

FIGURA 6 El intervalo cerrado $[a, b]$

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Tipos de intervalos

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

Axiomas de Orden

1. Dado a y b, entonces $a \leq b$ o $b \leq a$.
2. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
3. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
4. Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.
5. Si $a \leq b$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \text{Si } c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc \\ \text{Si } c < 0 \Rightarrow ac \geq bc \end{cases}$$

Teorema *Sea* a, b *y* c *números reales, se tiene que*

(I). *Si* $a \leq b$, *entonces* $-b \leq -a$;

(II). *Si* $a \leq b$ *y* $c \leq 0$, *entonces* $bc \leq ac$;

(III). *Si* $0 \leq a$ *y* $0 \leq b$, *entonces* $0 \leq ab$;

(IV). $0 \leq a^2$;

(V). $0 < 1$;

(VI). *Si* $0 < a$, *entonces* $0 < a^{-1}$;

(VII). *Si* $0 < a < b$, *entonces* $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

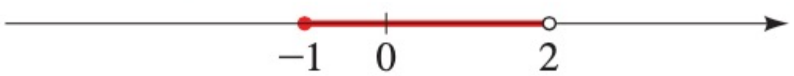
$2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Ejemplo 5

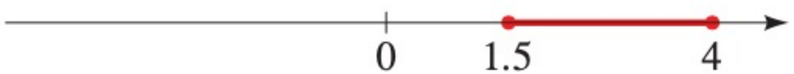
EJEMPLO 5 | Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

(a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$



(b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$



(c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$

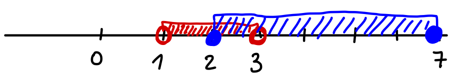
Ejemplo 6

EJEMPLO 6 | Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto.

(a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ **(b)** $(1, 3) \cup [2, 7]$

SOLUCIÓN



a) $= [2,3) = [2,3[$ (int.)

b) $= (1,7] =]1,7]$. (unión)

Completitud de los números reales

Completitud de $\mathbb{R}$

Definición 1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

(a). Si S contiene un elemento s_0 tal que $s \leq s_0$ para todo $s \in S$, entonces s_0 es un máximo, se escribe $s_0 = \max S$.

(b). Si S contiene un elemento m_0 tal que $m_0 \leq s$ para todo $s \in S$, entonces m_0 es un mínimo, se escribe $m_0 = \min S$.

Ejemplo 3 $\max\{1,2,3,4,5\} = 5$, $\min\{1,2,3,4,5\} = 1$.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *¿tiene máximo o mínimo?*

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$	$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$	$\mathbb{Q}$
mínimo : 1	No tiene mínimo	No tiene mínimo.
máximo No tiene.	No tiene máximo	No tiene máximo.

Observación 2 *Note que* $\max[a,b] = b$ *y a su vez,* $min[a,b] = a$*. Por otro lado,* $]a,b[$ *no tiene máximo, tampoco mínimo.*

Ejemplos:

a) $S = [-1, 2]$ máximo: 2
mínimo: -1

b) $S = [0, 4[$ máximo: No tiene
mínimo: 0

c) $S =]-\infty, 2]$ máximo: 2
mínimo: No Tiene.

Definición 2 *Se dice que un conjunto S es* ***acotado superiormente*** *si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq M$ para todo $s \in S$. Del mismo modo, se dice que S es* ***acotado inferiormente*** *si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $s \geq m$ para todo $s \in S$.*
Si S es acotado infereriormente y superiormente se dice que S es un conjunto **acotado** *y $S \subseteq [m, M]$.*

Note que podemos tener conjuntos que son acotados, pero que no tiene máximo y mínimo. Por ejemplo, $]\sqrt{2}, \pi[$.

Definición 3 *Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.*

(a). diremos $\sup S$ al menor de las cotas superiores de S.

(b). diremos $\text{ínf}\, S$ al mayor de las cotas inferiores.

Podemos destacar que si existe el máximo y el mínimo de un conjunto S, estos coinciden con el supremo y el ínfimo de dicho conjunto. También nos encontramos con conjuntos que no tiene máximo definido, pero si supremo.

Ejemplos:

a) Si $S = [0, 1]$

máximo : 1

mínimo : 0

Acotado superiormente : Si , por ejemplo $n = 1, 2, 3, \ldots$ (todo numero real $n \geq 1$)

Acotado inferiormente : Si , por ejemplo $n = 0, -1, -2, \ldots$ (Todo real $m \leq 0$)

Acotado : Si

Supremo : 1

Infimo : 0

b) Si $]1, 3]$

máximo : 3

mínimo : No Tiene

Acotado superiormente : Si

Acotado inferiormente : Si

Acotado : Si

Supremo : 3

Infimo : 1

c) $S =]-3, 2[$

máximo : No tiene

mínimo : No tiene

Acotado superiormente : Si

Acotado inferiormente : Si

Acotado : Si

Supremo : 2

Infimo : -3

d) $S = \left\{ \frac{n}{n+1} , n \in \mathbb{N} \right\}$

$= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots \right\}$

Notemos que el conjunto es creciente

$n_1 < n_2 \Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{n_1+1} < \frac{n_2}{n_2+1}}$

Como $n_1 + 1 > 0$
$n_2 + 1 > 0$ se puede mult. cruzado

$$n_1(n_2+1) < n_2(n_1+1)$$

$$n_1 n_2 + n_1 < n_2 \cdot n_1 + n_2$$

$$n_1 < n_2$$ ✓

$$S = \left\{ \frac{n}{n+1} , \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots \right\}$$

No para de crecer

Como el conjunto es creciente, el primero es el mínimo.

Mínimo $\frac{1}{2}$

Máximo No tiene

Acotado inferiormente. Sí

↳ $\inf\{S\} = \frac{1}{2}$.

Acotado superiormente. Si

↳ $\sup(S) = 1$.

$\boxed{\text{Acotado}}$

Tarea

Repetir el ejercicio anterior para el conjunto

$$S_1 = \left\{ \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \frac{2n}{3n-1} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$