Examen partiel 1 - Vendredi 31 mars 2017 - Durée : 60 min

Aucun document, pas de téléphone, pas de calculatrice.

Nom : Prénom : Signature :

Exercice 1 :	Exercice 2 :	Total /20 :

Exercice 1 (Test d'hypothèses, ≃ 8 pts)

Supposons que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n échantillons d'une distribution normale $f_{\sigma^2}(x)$ de moyenne nulle et de variance σ^2 :

$$f_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Nous souhaitons tester les hypothèses $\mathscr{H}_0 : \{\sigma^2 = \sigma_0^2\}$ contre $\mathscr{H}_1 : \{\sigma^2 = \sigma_1^2\}$ avec $\sigma_1 > \sigma_0 > 0$.

1. Calculer le test de Neyman-Pearson pour tester $\mathscr{H}_0$ contre $\mathscr{H}_1$. Simplifier l'expression du test jusqu'à obtenir une règle de décision de la forme : rejeter $\mathscr{H}_0$ si $T(x_1, \dots, x_n) > h$ où h est le seuil et $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

2. On peut montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\frac{T(x_1,\ldots,x_n)}{\sigma_j^2}-n\right)$$

suit (approximativement) la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ sous $\mathcal{H}_j$ lorsque n est suffisament grand. En supposant n grand, calculer le seuil h en fonction du niveau de l'erreur de type I exigé α et de la fonction de répartition de la loi normale $F(\cdot)$.

3. En supposant n grand, calculer l'erreur de type II du test en fonction de $F(\cdot)$.

Exercice 2 (Estimation, $\simeq$ 12 pts)
Soit $f_\theta(x)$ la distribution uniforme sur $[0,\theta]$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu, définie par

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ \frac{1}{\theta} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{si} \quad x > \theta. \end{cases} \tag{1}$$

La fonction de répartition $F_\theta(x)$ associée est

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ \frac{x}{\theta} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 & \text{si} \quad x > \theta. \end{cases} \tag{2}$$

1. Soient x_1 et x_2 deux échantillons issus de la distribution uniforme $f_\theta(x)$. Montrer que la fonction de vraisemblance $L(\theta; x_1, x_2)$ s'écrit :

$$L(\theta; x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} & \text{si} \quad \theta \geq M \ \text{ où } \ M = \max\{x_1, x_2\} \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad \theta < M. \end{cases} \tag{3}$$

2. Montrer que la fonction $\theta \mapsto \frac{1}{\theta^2}$ est une fonction décroissante de θ. Quel est le maximum de cette fonction sur un intervalle de la forme $[M; +\infty[$?

3. En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance est $\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2\}$.

4. Montrer que la fonction de répartition $F_{\hat{\theta}}(t)$ de l'estimateur $\hat{\theta}$ est

$$F_{\hat{\theta}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \frac{t^2}{\theta^2} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \theta, \\ 1 & \text{si} \quad t > \theta. \end{cases} \tag{4}$$

5. Quelle est la relation mathématique entre $F_{\hat{\theta}}(t)$ et la densité de probabilité $f_{\hat{\theta}}(t)$ de l'estimateur $\hat{\theta}$? En déduire $f_{\hat{\theta}}(t)$.

6. En déduire, après un petit calcul, $\mathbf{E}[\hat{\theta}]$.

7. L'estimateur est-il biaisé ? Si oui, quel est son biais ?