Examen partiel 2 - Vendredi 5 mai 2017 - Durée : 60 min

Aucun document, pas de téléphone, pas de calculatrice.

Nom : Prénom : Signature :

Exercice 1 :	Exercice 2 :	Total /20 :

Exercice 1 (ARMA(1,1), ≃ 10 pts)

On considère le processus ARMA(1,1) suivant :

$$X_t = aX_{t-1} + Z_t + bZ_{t-1}$$

où $|a| < 1$, $|b| < 1$, $a + b \neq 0$ et Z_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2.

On note B l'opérateur retard tel que $X_{t-j} = B^j X_t$ pour tout $j \geq 0$.

1. Rappeler la définition du bruit blanc Z_t.

2. Montrer qu'il existe deux polynômes $\phi(B)$ et $\theta(B)$ tel que $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$.

3. Montrer que $\dfrac{1}{\phi(B)}\theta(B) = 1+(a+b)B+(a+b)aB^2+(a+b)a^2B^3+\ldots = 1+(a+b)\sum_{j=0}^{\infty} a^j B^{j+1}$.

4. En déduire le développement en moyenne mobile infinie de X_t.

5. Calculer $E(X_t)$ pour tout t à partir du développement en moyenne mobile infinie.

6. Montrer, en utilisant la représentation en moyenne mobile infinie, que la variance γ_0 du processus est

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{1 + b^2 + 2ab}{1 - a^2}.$$

Exercice 2 (Régression logistique, $\simeq$ 10 pts)
Un sondage international réalisé en 2004 rapportait le faible taux d'approbation de la politique du Président des États-Unis d'Amérique, George W. Bush, dans les pays traditionnellement alliés des États-Unis : 40% au Canada, 30% au Royaume-Uni, 20% en Espagne et 10% en Allemagne (les chiffres réels ont été modifiés pour faciliter les calculs).

Notons Y la variable aléatoire binaire indiquant l'approbation d'une personne à la politique de G. W. Bush (1=approuve, 0=désapprouve), X_1 la variable indiquant si la personne est Canadienne (1=Canadienne, 0=autre), X_2 la variable indiquant si la personne est Britannique (1=Britannique, 0=autre), X_3 la variable indiquant si la personne est Espagnole (1=Espagnole, 0=autre). On note $X = (X_1, X_2, X_3)$ le vecteur décrivant la nationalité d'une personne.

Nous voulons utiliser un modèle de régression logistique pour modéliser le lien entre la variable Y et la nationalité X d'une personne.

1. Donner toutes les valeurs possibles du vecteur X.

2. Notons $P(X) = \Pr(Y = 1|X)$ la probabilité d'approuver la politique de G. W. Bush pour une personne de nationalité décrite par X. Décrire le modèle mathématique entre $P(X)$ et X sous la forme $\text{logit}(P(X)) = \cdots$ où vous définirez la fonction "logit".

3. Quelle est l'inverse de la fonction "logit(u)" pour $u \in]0,1[$? Prouver le résultat annoncé.

4. Calculer $\text{logit}(P(X))$ pour chaque valeur de X identifiée à la question 1.

5. En utilisant les résultats du sondage, calculer les valeurs des paramètres inconnus, puis écrire le modèle de régression logistique final. Pour vous aider dans vos calculs, nous vous rappelons certaines valeurs (approchées) du logarithme :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\ln(x)$	-2.3	-1.6	-1.2	-0.9	-0.7	-0.5	-0.4	-0.2	-0.1