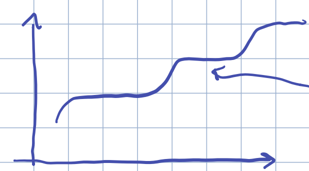
Funzione monotona non decrescente ?

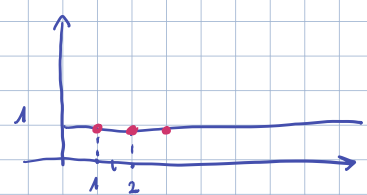
" " crescente ?

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$$

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$



può essere anche costante in alcuni tratti



$f(n) = 1$

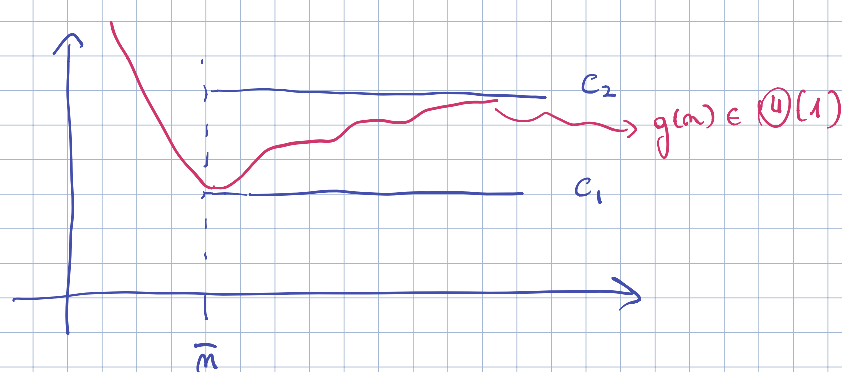
$g(n) = 5$

funzioni costanti

$\Theta(5)$? $= \{ g(n) \mid \exists\, c_1 > 0,\ c_2 > 0\ \exists\, \bar{n}\ \forall n \geq \bar{n} \quad c_1 \cdot 5 \leq g(n) \leq c_2 \cdot 5 \}$

$\Theta(1)$? $= \{ g(n) \mid \quad \ldots \quad c_1 \cdot 1 \leq g(n) \leq c_2 \cdot 1 \}$

$\Theta(1) = \Theta(5) = \Theta(8)$



$\Theta(1)$ costo delle operazioni di base del modello di calcolo

Risoluzione di Equazioni Ricorsive di Complessità

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{costo nel caso base} \quad n \le 1 \\ \underbrace{2 \cdot T(n/2)}_{\text{costo delle ch. ric.}} + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{costo oltre alle ch. ric.}} & n > 1 \end{cases}$$

costo in tempo su input di dim. n

$$T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$$

Metodi

1) Per Sostituzione
   - Indovino la soluzione ⇐ come? con 2) o 3)
   - Dimostro per induzione che è corretta

2) Per Iterazione

3) Con l'Albero delle chiamate ricorsive

-- anche Telescoping, Sostituzione di Variabili

2) e 3) sono analoghe

2) in riga

3) in colonna

Esempio

$$T(n) = \begin{cases} \cancel{\Theta(1)}^{\,c} & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + \cancel{\Theta(1)}^{\,d} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Eliminare la notazione asintotica

Iterazione

$$T(n) \underset{n>1}{=} T(n-1) + d \underset{n-1>1}{=} T(n-2) + d + d =$$

$$= T(n-3) + d + d + d = \dots =$$

$$= \underset{n-(n-1)}{T(1)} + \underbrace{d + d + \dots + d}_{n-1} = c + d(n-1)$$

$$= \Theta(n)$$

Albero di ric.

dim.		costo
n	$\rightsquigarrow$	d
$n-1$	$\rightsquigarrow$	d
$n-2$	$\rightsquigarrow$	d
$n-3$	$\rightsquigarrow$	d
$\vdots$		
2	$\rightsquigarrow$	d
1	$\rightsquigarrow$	c

$$d \cdot (n-1) + c = \Theta(n)$$

$$\cancel{d \cdot n + c - d}$$

polinomio in n di grado 1

```
Proc (n) {
    if (n>1) {
        Proc (n-1)
        Print ("ciao")
    }
}
```

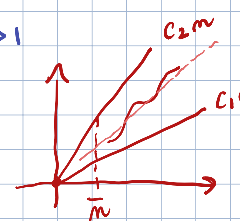
$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n=1 \\ T(n-1) + \Theta(1) & n>1 \end{cases}$$

Esercizio

Scrivere una procedura ricorsiva per la ricerca del massimo in un vettore

Esempio

$$T(n) = \begin{cases} \overset{c}{\cancel{\Theta(1)}} & \text{se } n=1 \\ T(n-1) + \overset{dn}{\cancel{\Theta(n)}} & \text{se } n>1 \end{cases}$$



Iterazione

$$T(n) = T(n-1) + d\cdot n = \underbrace{T(n-2) + d\cdot(n-1)}_{T(n-1)} + d\cdot n =$$

$$= T(n-3) + d(n-2) + d(n-1) + d n = \ldots$$

$$= T(\underset{n-(n-1)}{\underset{\parallel}{1}}) + d\cdot(n-(n-2)) + d(n-(n-3)) + \ldots + d(n-1) + dn$$

$$= c + d\cdot 2 + d\cdot 3 + \ldots + d\cdot n$$

$$= c + d\sum_{i=2}^{n} i = c + d\left(\frac{(n+1)\cdot n}{2} - 1\right) = \Theta(n^2)$$

Albero Ch. Ric.

n	$d \cdot n$
$n-1$	$d \cdot (n-1)$
$n-2$	...
⋮	
2	$d \cdot 2$
1	c

$\Theta(n^2)$

Dimostro per Sostituzione che la soluzione è corretta

$$T(n) = \begin{cases} \overset{d}{\cancel{\Theta(1)}} & n = 1 \\ T(n-1) + \overset{d \cdot n}{\cancel{\Theta(n)}} & n > 1 \end{cases}$$

$T(n) = \Theta(n^2)$

dimostro per induzione su n applicando def Θ

$T(n) = \Theta(n^2)$ sse $T(n) = O(n^2)$ ① e $T(n) = \Omega(n^2)$ ②

per esercizio

①

F) $T(n) \underset{\in}{=} O(n^2)$

F.eq) $\exists\, c > 0\ \exists\, \bar{n} > 0\ \forall\, n \geq \bar{n}\ \ T(n) \leq c \cdot n^2$

Per ind su n

BASE (vuol dire trovare $\bar{n}$ t.c. $T(\bar{n}) \le c(\bar{n})^2$)

$\bar{n} = 1$

$T(1) = a(1) \le c \cdot (1)^2$ $\qquad \boxed{a \le c}$

PASSO Ind

Hp Ind) Se $n < m$ $\qquad T(n) \le c \cdot n^2$

Ts) Se $n = m$ $\qquad T(m) \le c \cdot m^2$

$$T(m) = T(m-1) + b \cdot m \le c(m-1)^2 + b \cdot m \overset{?}{\le}$$

Hp Ind

$T(m-1) \le c(m-1)^2$

$\overset{?}{\le} c\, m^2$

$$c(m-1)^2 + bm \le c \cdot m^2$$

$$\cancel{cm^2} + c - 2cm + bm - \cancel{cm^2} \le 0$$

$$2cm \ge b \cdot m + c \qquad \boxed{c \ge b}$$

$$cm + cm \ge b \cdot m + c$$

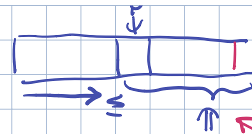
```
SelectionSort (A, p) {
    if (p < A.length) {
        i ← MinSearch (A, p, A.length)
        swap (A, i, p)
        SelectionSort (A, p+1)
    }
}
```

$\Theta(1)$ ⇝ if $(p < A.length)$

$\Theta(n)$ ⇝ $i \leftarrow$ MinSearch$(A, p, A.length)$

$\Theta(1)$ ⇝ swap(A, i, p)

$T(n-1)$ ⇝ SelectionSort$(A, p+1)$



A.length − p + 1

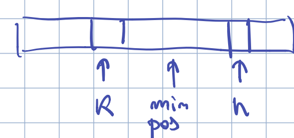
n

$$T(n) = \begin{cases} \overset{a}{\cancel{\Theta(1)}} & n = 1 \\ T(n-1) + \overset{b \cdot n}{\cancel{\Theta(n)}} & n > 1 \end{cases}$$

$\leq$

```
MinSearch (A, k, h) {
    min ← A[k]
    min_pos ← k
    for (i ← k+1 to h) {
        if (A[i] < min) {
            min ← A[i]
            min_pos ← i
        }
    }
    return min_pos
}
```

$n = h - k + 1$



$\Theta(n) + \Theta(1)$

$\parallel$

$\Theta(n)$

$\Theta(n)$

```
Swap (A, k, h) {
    ...
}
```

⇝ $\Theta(1)$

Cosa succede se faccio InsertionSort ricorsivo?

$$T(n) = c \cdot n + d \cdot \log_3 n \cdot \log n - d \cdot \log 3 \cdot \sum_{i=0}^{\log_3 n} i$$

$$= \Theta(n) + \Theta((\log n)^2) - \Theta((\log n)^2)$$

$$= \Theta(n) + \Theta((\log n)^2) = \Theta(n)$$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(\log n) & n > 1 \end{cases}$$