Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$\frac{3}{2}:\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=3$	**3p**
2.	$f(-1)=2$	**2p**
	$f(1)=2\Rightarrow f(-1)\cdot f(1)=4$	**3p**
3.	$2x+2=2$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Multiplii de 2 din mulțimea A sunt 22, 44, 66 și 88, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{9}$	**1p**
5.	$AO=\sqrt{5}$	**2p**
	$BO=\sqrt{5}\Rightarrow AO=BO$	**3p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\sin^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-3\cdot 3=$	**3p**
	$=1-9=-8$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 10\end{pmatrix}$, $2A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A-2A=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}=8\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=8I_2$	**2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}6 & 2+3x\\ 2 & 6+x\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2+3x & 6+x\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 3x\\ -3x & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A\cdot B-B\cdot A)=\begin{vmatrix}0 & 3x\\ -3x & 0\end{vmatrix}=9x^2\geq 0$, pentru orice număr real x	**3p**

2.a)	$f(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-1-2=$ $=2+3-1-2=2$	**3p** **2p**
b)	Câtul este $2X^2+X-2$ Restul este 0	**3p** **2p**
c)	$f=(X+1)\left(2X^2+X-2\right)$ $x_1=-1$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ și $x_3=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ sunt rădăcinile polinomului f	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-4x=$ $=4x\left(x^2-1\right)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{f(x)-x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{-2x^2+12}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{-2+\frac{12}{x^2}}=-\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
c)	$f(1)=11$, $f'(1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=11$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-2x+4\right)dx=\int_1^2\left(3x^2+2x-4-2x+4\right)dx=\int_1^2 3x^2dx=$ $=x^3\Big\|_1^2=8-1=7$	**2p** **3p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+x^2-4x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$ $F(1)=2017\Rightarrow c=2019$, deci $F(x)=x^3+x^2-4x+2019$	**3p** **2p**
c)	$\int_1^a f(x)dx=\left(x^3+x^2-4x\right)\Big\|_1^a=a^3+a^2-4a+2$ $a^3+a^2-4a+2=a^3-2\Leftrightarrow(a-2)^2=0$, deci $a=2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}=3$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Calculați $f(-1)\cdot f(1)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+2}=9$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{11,22,33,44,55,66,77,88,99\}$, acesta să fie multiplu de 2.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,-1)$. Arătați că $AO=OB$.
5p	**6.** Arătați că $\sin^2 45°-\cos^2 60°=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-8$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A-2A=8I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră polinomul $f=2X^3+3X^2-X-2$.
5p	**a)** Arătați că $f(1)=2$.
5p	**b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+1$.
5p	**c)** Determinați rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+12$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{f(x)-x^4}=-\frac{1}{2}$.
5p	**c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x-4$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x)-2x+4)\,dx=7$.
5p	**b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2017$.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^a f(x)\,dx=a^3-2$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$	**3p**
	$\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}=2$	**2p**
2.	$x_1+x_2=4$, $x_1x_2=3$	**2p**
	$\frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2}=\frac{4-1}{3}=1$	**3p**
3.	$2^{x+1}=2^3 \Leftrightarrow x+1=3$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Multiplii de 4 din mulțimea A sunt 4 și 8, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{9}$	**1p**
5.	$AB=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=5$, $AO=3$, $BO=4$	**3p**
	$P_{\Delta AOB}=AB+AO+BO=5+3+4=12$	**2p**
6.	$\sin 150°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\sin^2 150°+\sin^2 60°=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot 2=$	**3p**
	$=9-4=5$	**2p**
b)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}2 & a+1\\ a+1 & a^2+1\end{pmatrix}$	**2p**
	$2B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2a\end{pmatrix}$, deci $B\cdot B=2B \Leftrightarrow a=1$	**3p**
c)	$A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 3+2a\\ 5 & 2+3a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 5\\ 3+2a & 2+3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2a-2\\ 2-2a & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(A\cdot B-B\cdot A)=\begin{vmatrix}0 & 2a-2\\ 2-2a & 0\end{vmatrix}=(2a-2)^2\geq 0$, pentru orice număr real a	**2p**

2.a)	$1\circ 3=1\cdot 3-3\cdot 1-3\cdot 3+12=$ $=3-3-9+12=3$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=xy-3x-3y+9+3=$ $=x(y-3)-3(y-3)+3=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$x\circ x=(x-3)^2+3$, $(x\circ x)\circ x=(x-3)^3+3$ $(x-3)^3+3=3\Leftrightarrow x=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3\right)'+(6x)'+(2)'=$ $=3x^2+6=3\left(x^2+2\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\left(x^2+2\right)}{x+2}=$ $=\frac{3\left(0^2+2\right)}{0+2}=3$	**2p** **3p**
c)	$x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)>0$, deci f este crescătoare pe $[-1,1]$ Cum $f(-1)=-5$ și $f(1)=9$, obținem $-5\leq f(x)\leq 9$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x)+x)dx=\int_0^1\left(4x^3-x+x\right)dx=\int_0^1 4x^3dx=$ $=x^4\Big\vert_0^1=1$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1\left(4x^3-f(x)\right)e^x dx=\int_0^1\left(4x^3-4x^3+x\right)e^x dx=\int_0^1 xe^x dx=$ $=(x-1)e^x\Big\vert_0^1=1$	**2p** **3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^3\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^3\left(4x^3-x\right)dx=\left(x^4-\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_1^3=$ $=81-\frac{9}{2}-1+\frac{1}{2}=76$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}=2$.

5p **2.** Arătați că $\frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2}=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-4x+3=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+1}=8$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie multiplu de 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Calculați perimetrul triunghiului OAB.

5p **6**. Arătați că $\sin^2 150°+\sin^2 60°=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=5$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $B\cdot B=2B$.

5p **c)** Arătați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-3x-3y+12$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 3=3$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x\circ x)\circ x=3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3\left(x^2+2\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+2}=3$.

5p **c)** Demonstrați că $-5\leq f(x)\leq 9$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)+x\right)dx=1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(4x^3-f(x)\right)e^x dx=1$.

5p **c)** Determinaţi aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=3$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$	**3p**
	$\frac{15}{4}\cdot\frac{8}{15}=2$	**2p**
2.	$f(1)=5 \Leftrightarrow 1+m=5$	**3p**
	$m=4$	**2p**
3.	$x^2+x+1=1 \Leftrightarrow x^2+x=0$	**2p**
	$x=-1$ sau $x=0$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	Numerele din mulțimea A care verifică egalitatea dată sunt 2 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{9}$	**2p**
5.	$MN=4$, $NP=3$, $MP=5$	**3p**
	$P_{\Delta MNP}=4+3+5=12$	**2p**
6.	$\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\sin^2 120^\circ-\cos^2 30^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=1\cdot(-4)-3\cdot 3=$	**3p**
	$=-4-9=-13$	**2p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 8\\ -2 & -2\end{pmatrix}$	**2p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 8 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 10\\ -10 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 8\end{pmatrix}$, $B\cdot B-xI_2=\begin{pmatrix}8-x & 8\\ 8 & 8-x\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(B\cdot B-xI_2\right)=\begin{vmatrix}8-x & 8\\ 8 & 8-x\end{vmatrix}=x^2-16x$	**3p**
	$x^2-16x=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=16$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+3\cdot 1^2-1-3=$	**3p**
	$=1+3-1-3=0$	**2p**
b)	Câtul este X^2+5X+9	**3p**
	Restul este 15	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-1$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=9-2\cdot(-1)=11$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-6=$	**3p**
	$=6\left(x^2-1\right)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$	**2p**
	$=f'(1)=0$	**3p**
c)	$x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,1]$	**2p**
	Cum $f(-1)=8$ și $f(1)=0$, obținem $0\leq f(x)\leq 8$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(f(x)-5x)dx=\int_0^1\left(x^2+5x-5x\right)dx=\int_0^1 x^2\,dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+2017\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+\frac{5}{2}\cdot 2x=$	**3p**
	$=x^2+5x=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$g(x)=x+5\Rightarrow V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x^2+10x+25\right)dx=$	**3p**
	$=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+5x^2+25x\right)\right\|_1^2=\frac{127\pi}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(4-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{8}{15}=2$.
5p	**2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x+1}=1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să verifice egalitatea $(n-2)(n-4)=0$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,3)$, $N(4,3)$ și $P(4,0)$. Calculați perimetrul triunghiului MNP.
5p	**6**. Arătați că $\sin^2 120°-\cos^2 30°=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-13$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 10\\ -10 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B\cdot B-xI_2\right)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-X-3$.
5p	**a)** Arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-2$.
5p	**c)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+4$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$.
5p	**c)** Demonstrați că $0\le f(x)\le 8$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-5x\right)dx=\frac{1}{3}$.
5p	**b)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+2017$ este o primitivă a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ este egal cu $\frac{127\pi}{3}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$	**3p**
	$\frac{5}{6}:\frac{5}{6}=1$	**2p**
2.	$f(0)=3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=3$	**2p**
3.	$x^2+5=9\Rightarrow x^2-4=0$	**2p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care verifică ecuația	**3p**
4.	$p-10\%\cdot p=270$, unde p este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$p=300$ de lei	**2p**
5.	$M(3,3)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$OM=\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix}=1\cdot 8-2\cdot 4=$	**3p**
	$=8-8=0$	**2p**
b)	$A\cdot B+B\cdot A=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 48 & 24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}24 & 48\\ 6 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & 54\\ 54 & 36\end{pmatrix}$	**3p**
	$9(A+B)-(A\cdot B+B\cdot A)=9\begin{pmatrix}9 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}36 & 54\\ 54 & 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 0\\ 0 & 45\end{pmatrix}=45\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=45I_2$	**2p**
c)	$A+xI_2=\begin{pmatrix}1+x & 2\\ 4 & 8+x\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+xI_2)=\begin{vmatrix}1+x & 2\\ 4 & 8+x\end{vmatrix}=x^2+9x$	**3p**
	$x^2+9x=0\Leftrightarrow x=-9$ sau $x=0$	**2p**
2.a)	$f(2)=2^3-3\cdot 2^2-6\cdot 2+8=$	**3p**
	$=8-12-12+8=-8$	**2p**
b)	Câtul este X^2-2X-8	**3p**
	Restul este 0	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-6 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=3^2-2\cdot(-6)=21$	**3p**
	$(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2(x_1+x_2+x_3)+3=21+2\cdot 3+3=30$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-18x+12=$	**3p**
	$=6\left(x^2-3x+2\right)=6(x-1)(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2-12x-1}{6x^2-18x+12}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9-\frac{12}{x}-\frac{1}{x^2}}{6-\frac{18}{x}+\frac{12}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$	**3p**
c)	$f(1)=6$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=6$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)+2x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x+2x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=$	**2p**
	$=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_{-1}^{1}=\dfrac{1}{3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$	**3p**
b)	$\int_0^1 e^x\left(x^2-f(x)\right)dx=\int_0^1 2xe^x\,dx=\left.2xe^x\right\|_0^1-2\int_0^1 e^x\,dx=$	**3p**
	$=2e-\left.2e^x\right\|_0^1=2e-2e+2=2$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\|f(x)\|dx=\int_0^1\left(2x-x^2\right)dx=\left.x^2\right\|_0^1-\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{5}{6}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x^2+5\right)=\lg 9$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, prețul unui obiect este 270 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,5)$. Calculați distanța de la punctul $O(0,0)$ la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\operatorname{tg} x=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că $9(A+B)-(A\cdot B+B\cdot A)=45I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $\det\left(A+xI_2\right)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-6X+8$.

5p **a)** Arătați că $f(2)=-8$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-1$.

5p **c)** Demonstrați că $\left(x_1+1\right)^2+\left(x_2+1\right)^2+\left(x_3+1\right)^2=30$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-f(x)}{f'(x)}$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)+2x\right)dx=\frac{2}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int\limits_{0}^{1}e^x\left(x^2-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{2}{3}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}$	**2p**
	$\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=13-4\sqrt{3}\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}+13-4\sqrt{3}=20$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)=0$	**2p**
3.	$2^{3x}=2^{4x+2}\Leftrightarrow 3x=4x+2$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	$p+\frac{25}{100}\cdot p=250$, unde p este preţul obiectului înainte de scumpire	**2p**
	$p=200$ de lei	**3p**
5.	$AB=4$	**2p**
	$AC=4\Rightarrow AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\sin 60°=\cos 30°$	**2p**
	$\text{tg}\,45°=\text{ctg}\,45°\Rightarrow\sin 60°+\text{tg}\,45°=\cos 30°+\text{ctg}\,45°$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}3&2\\3&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(3)\right)=\begin{vmatrix}3&2\\3&3\end{vmatrix}=3\cdot3-3\cdot2=$	**3p**
	$=9-6=3$	**2p**
b)	$A(2017+x)+A(2017-x)=\begin{pmatrix}2017+x&2\\2017+x&2017+x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2017-x&2\\2017-x&2017-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4034&4\\4034&4034\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2017&2\\2017&2017\end{pmatrix}=2A(2017)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(2)+mA(1)=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m&2m\\m&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+m&2+2m\\2+m&2+m\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2)+mA(1)\right)=-m(m+2)$	**3p**
	$m(m+2)=0\Leftrightarrow m=-2$ sau $m=0$	**2p**
2.a)	$x*y=2xy+6x+6y+18-3=$	**2p**
	$=2x(y+3)+6(y+3)-3=2(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
b)	$7*98=2(7+3)(98+3)-3=2\cdot10\cdot101-3=$	**3p**
	$=2020-3=2017$	**2p**
c)	$2(x+3)(x+2+3)-3=3\Leftrightarrow x^2+8x+12=0$	**3p**
	$x=-6$ sau $x=-2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$	**2p**
	$f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)\Rightarrow f'(3)=0$, deci $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-2)}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)=1$, deci dreapta de ecuație $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^e (f(x)-\ln x)dx=\int_1^e 1dx=x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=e-1$	**2p**
b)	F este derivabilă și $F'(x)=(x\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\ln x+1=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_1^e f(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}F^2(e)-\frac{1}{2}F^2(1)=\frac{e^2}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=20$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x$. Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $8^x=4^{2x+1}$.

5p **4.** După o scumpire cu 25%, prețul unui obiect este 250 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$, $B(1,1)$ și $C(5,5)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Arătați că $\sin 60°+\operatorname{tg} 45°=\cos 30°+\operatorname{ctg} 45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 2 \\ x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(3)\right)=3$.

5p **b)** Arătați că $A(2017+x)+A(2017-x)=2A(2017)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $\det\left(A(2)+mA(1)\right)=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy+6x+6y+15$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Arătați că $7*98=2017$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*(x+2)=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\ln x$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^e \left(f(x)-\ln x\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că F este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\int_1^e f(x)F(x)dx=\dfrac{e^2}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1=(a_1+2r)-6$	**2p**
	$r=3$	**3p**
2.	$f(1)=3 \Leftrightarrow 2+m=3$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^x(1+3^2)=10 \Leftrightarrow 3^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	$p-\frac{15}{100}\cdot p=17$, unde p este prețul stiloului înainte de ieftinire	**2p**
	$p=20$ de lei	**3p**
5.	$m_d=-1$, $m_{d'}=a$	**2p**
	$(-1)\cdot a=-1 \Leftrightarrow a=1$	**3p**
6.	$\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4} \Rightarrow AB=20$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{20\cdot 15}{2}=150$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(0)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+6+2-0-18-2=-12$	**3p**
b)	$D(a)=6a+6(a+1)+2-2a-18-2(a+1)=8a-12$	**2p**
	$a^2-8a+12=0 \Leftrightarrow a=2$ sau $a=6$	**3p**
c)	$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ n+1 & n & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}D(n) \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\lvert D(n)\rvert=\lvert 2n-3\rvert$	**3p**
	$\lvert 2n-3\rvert=1$, de unde obținem $n=1$ sau $n=2$	**2p**
2.a)	$A(0)+A(2)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & -4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=2A(1)$	**2p**

b)	$A(1)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & x\\ 2 & x-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)\cdot A(x)+3A(1)=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 6 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$B=\begin{pmatrix}1-a & a\\ 2a & 1-2a\end{pmatrix}$, deci $\det B=\begin{vmatrix}1-a & a\\ 2a & 1-2a\end{vmatrix}=1-3a$	**3p**
	$1-3a=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$, deci matricea B este inversabilă pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+5}{x^2+x+2}=\frac{-1+5}{(-1)^2+(-1)+2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2x-1)f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)(x+5)}{x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+5}{x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
2.a)	$f(-2)=-7$	**2p**
	$f(5)=4\Rightarrow f(-2)\cdot f(5)=-28$	**3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(x^3+1\right)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\sqrt{3x+1}\right)=1$	**1p**
	Cum $f(0)=1$, obținem $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în punctul $x=0$	**3p**
c)	$f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și, cum funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, obținem că funcția f are semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty,-1)$ și $(-1,+\infty)$, și cum $f(-2)<0$ și $f(5)>0$, obținem $f(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,-1)$ și $f(x)>0$ pentru $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$(p+1)(q+1)<0\Rightarrow p\in(-\infty,-1)$ și $q\in(-1,+\infty)$ sau $p\in(-1,+\infty)$ și $q\in(-\infty,-1)$, de unde obținem că $f(p)$ și $f(q)$ au semne diferite, deci $f(p)\cdot f(q)<0$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = a_3 - 6$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care punctul $A(1,3)$ este situat pe graficul funcției f.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x + 3^{x+2} = 10$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 15%, prețul unui stilou este de 17 lei. Calculați prețul stiloului înainte de ieftinire.
5p	**5**. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=-x+3$. Determinați numărul real a, știind că dreapta d' de ecuație $y=ax-5$ este perpendiculară pe dreapta d.
5p	**6.** Calculaţi aria triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle A)=90°$, $\operatorname{tg} B=\frac{3}{4}$ și $AC=15$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a+1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $D(0)=-12$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $D(a)=a^2$.
5p	**c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(n+1,n)$, unde n este număr natural și $C(1,3)$. Determinați numerele naturale n, știind că punctele A, B și C sunt vârfurile unui triunghi care are aria egală cu 1.
	2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} -1 & x \\ 2 & x-3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $A(0)+A(2)=2A(1)$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(1)\cdot A(x)+3A(1)=O_2$, pentru orice număr real x, unde $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $B=I_2+aA(1)$ este inversabilă, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+5}{x^2+x+2}$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((2x-1)f(x)\right)$.
5p	**c)** Determinaţi ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x\in(-\infty,0] \\ \sqrt{3x+1}, & x\in(0,+\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $f(-2)\cdot f(5)=-28$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x=0$.

5p **c)** Arătați că, dacă p și q sunt numere reale astfel încât $(p+1)\cdot(q+1)<0$, atunci $f(p)\cdot f(q)<0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**3p**
	$\frac{7}{3}:\frac{7}{6}=\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{7}=2$	**2p**
2.	$x_1+x_2=5$, $x_1x_2=4$	**2p**
	$(x_1+x_2)^2-6x_1x_2=25-24=1$	**3p**
3.	$3x-5=4$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	$p-25\%\cdot p=600$, unde p este preţul televizorului înainte de ieftinire	**3p**
	$p=800$ de lei	**2p**
5.	$OM=\sqrt{(8-0)^2+(6-0)^2}=$	**3p**
	$=10$	**2p**
6.	$\sin 135°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\sin^2 135°+\sin^2 45°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-0\cdot 2=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
	$B-A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)(B-A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -8-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$\det A\neq 0$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$1*2=1+2-3=$	**3p**
	$=3-3=0$	**2p**

b)	$x^2+x-3=-1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=1$	**2p**
c)	$n*n*n*n=4n-9$	**2p**
	$4n-9<3 \Rightarrow n<3$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3\right)'+\left(2x^2\right)'+(x)'=$	**2p**
	$=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x(x+1)(3x+1)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=-\dfrac{1}{3}$	**1p**
	$x\in\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci funcția f este descrescătoare pe $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]$ și $x\in\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci funcția f este crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$	**2p**
	$f(x)\ge f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)$ și, cum $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}$, obținem $f(x)\ge-\dfrac{4}{27}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-x^2-1\right)dx=\int_0^1\left(x^2+x+1-x^2-1\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\|_0^1=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+2017\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2+\dfrac{1}{2}\cdot 2x+1=$	**3p**
	$=x^2+x+1=f(x),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^2\|f(x)\|dx=\int_0^2\left(x^2+x+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_0^2=\dfrac{20}{3}$	**3p**
	Cum n este număr natural, din $n^2-\dfrac{7}{3}=\dfrac{20}{3}$, obținem $n=3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(2+\frac{1}{3}\right):\frac{7}{6}=2$.
5p	**2.** Arătați că $\left(x_1+x_2\right)^2-6x_1x_2=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+4=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-5}=2$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 25%, prețul unui televizor este 600 de lei. Determinați prețul televizorului înainte de ieftinire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $M(8,6)$. Calculați distanța dintre punctele O și M.
5p	**6**. Arătați că $\sin^2 135°+\sin^2 45°=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=2$.
5p	**b)** Arătați că $(A+B)(B-A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A\cdot X=B$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-3$.
5p	**a)** Arătați că $1*2=0$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x^2\right)*x=-1$.
5p	**c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n*n*n*n<3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x^2+x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=(x+1)(3x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x f'(x)}=\frac{1}{3}$.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)\geq-\frac{4}{27}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-x^2-1\right)dx=\frac{1}{2}$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2017$ este o primitivă a funcției f.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ are aria egală cu $n^2-\frac{7}{3}$.