

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianța 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$8 - 6\sqrt{6} + 6(\sqrt{6} - 1) = 8 - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 6 =$ $= 8 - 6 = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(0) = m, (f \circ f)(0) = 4m$ $4m = 4$ , de unde obținem $m = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$3 \cdot 4^x + 4^x = 4$ , deci $4 \cdot 4^x = 4$ $x = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Deoarece cifra zecilor poate fi 1, 2, 3 sau 6, în mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4 \cdot 10 = 40$ de numere care au cifra zecilor divizor al numărului 6, deci sunt 40 de cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$a = 3a - 2$ $a = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$A = \frac{\pi}{2}$ $AC = AB \Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & -y-x & y^2+2xy+x^2 \\ 0 & 1 & -2y-2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & -(x+y) & (x+y)^2 \\ 0 & 1 & -2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$A(n) \cdot A(n+1) \cdot A(n+2) \cdot A(n+3) = A(4n+6)$ , pentru orice număr natural $n$ $4n+6 = 2n^2 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$1 * 0 = \frac{2 \cdot 1}{0+2} + \frac{2 \cdot 0}{1+2} =$ $= 1 + 0 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x * 0 = \frac{2x}{0+2} + \frac{2 \cdot 0}{x+2} = x, \text{ pentru orice } x \in M$ $0 * x = \frac{2 \cdot 0}{x+2} + \frac{2x}{0+2} = x, \text{ pentru orice } x \in M, \text{ deci } e = 0 \text{ este elementul neutru al legii de compoziție „*”}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$x * \frac{4}{x} = \frac{2x}{\frac{4}{x}+2} + \frac{\frac{8}{x}}{x+2} = \frac{x^2}{x+2} + \frac{8}{x(x+2)} = \frac{x^3+8}{x(x+2)}, \text{ pentru orice } x \in M, x \text{ nenul}$ $\frac{x^3+8}{x(x+2)} = x \text{ și, cum } x \in M, x \text{ nenul, obținem } x = 2$	<b>3p</b>  <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} =$ $= \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}, x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ; pentru orice $x \in (-\infty, 1]$ , $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 1]$ Pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, f(1) = 2 + \frac{1}{e-1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ Cum $f$ este continuă, $f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$ și $f$ este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$ , obținem că, pentru orice $m \in (1, 2]$ , ecuația $f(x) = m$ are soluție unică	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^5 (f(x) - \sqrt{x^2+9}) dx = \int_1^5 (3-x) dx = \left( 3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big _1^5 =$ $= 15 - \frac{25}{2} - 3 + \frac{1}{2} = 0$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^4 \frac{x}{f(x) + x - 3} dx = \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int_0^4 \frac{(x^2+9)'}{2\sqrt{x^2+9}} dx = \sqrt{x^2+9} \Big _0^4 =$ $= 5 - 3 = 2$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b>	$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{x^n}{3-x+\sqrt{x^2+9}} dx, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$ $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 3-x+\sqrt{x^2+9} \geq 3-x \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{3-x+\sqrt{x^2+9}} \leq \frac{x^n}{2}, \text{ deci } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n+1)},$ pentru orice număr natural nenul $n$ și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$ , obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	<b>2p</b>  <b>3p</b>

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $8 - 6\sqrt{6} + 6(\sqrt{6} - 1) = 2$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $(f \circ f)(0) = 4$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3 \cdot 2^{2x} + 4^x = 4$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 6.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră dreapta  $d$  de ecuație  $y = 3x - 2$  și punctul  $A(a, a)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$ , știind că punctul  $A$  aparține dreptei  $d$ .
- 5p 6. Se consideră triunghiul isoscel  $ABC$ , cu  $AB = 10$  și  $\cos A = 0$ . Arătați că aria triunghiului  $ABC$  este egală cu 50.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1)) = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $A(n) \cdot A(n+1) \cdot A(n+2) \cdot A(n+3) = A(2n^2)$ .
2. Pe mulțimea  $M = [0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{2x}{y+2} + \frac{2y}{x+2}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 0 = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $e = 0$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p c) Determinați  $x \in M$ ,  $x$  nenul, pentru care  $x * \frac{4}{x} = x$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + \frac{x}{e^x - x}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice  $m \in (1, 2]$ , ecuația  $f(x) = m$  are soluție unică.

- 
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - x + \sqrt{x^2 + 9}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^5 \left( f(x) - \sqrt{x^2 + 9} \right) dx = 0$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_0^4 \frac{x}{f(x) + x - 3} dx = 2$ .
- 5p c) Pentru fiecare număr natural nenul  $n$  se consideră numărul  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$ . Demonstrați că
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**  
**Matematică M\_mate-info**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$2i(3-i) - 6i = 6i - 2i^2 - 6i =$ $= -2 \cdot (-1) = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(-1) = 1 + m$ , $f(1) = 1 - m$ , unde $m$ este număr real $1 + m = 1 - m$ , de unde obținem $m = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$3^{3x-3} = 3^{2x}$ , de unde obținem $3x - 3 = 2x$ $x = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $3 \cdot 4 = 12$ numere cu cifrele mai mici sau egale cu 3, deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$B$ este mijlocul segmentului $AC$ $\frac{x_C + 3}{2} = 1$ și $\frac{y_C + 2}{2} = -1$ , de unde obținem $x_C = -1$ și $y_C = -4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ , $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2-x & 1 \\ 2-x & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$ $A(x-1) = \begin{pmatrix} x-1 & 2-x & 1 \\ 2-x & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1) \cdot A(x) - A(x-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$A(1) \cdot A(1) \cdot A(x) = A(1) \cdot (A(1) \cdot A(x)) = A(1) \cdot (A(x-1) + 2I_3) = A(x-2) + 2I_3 + 2A(1)$ , pentru orice număr real $x$ $A(x-2) + 2I_3 + 2A(1) = 3A(1) + 2I_3 \Rightarrow A(x-2) = A(1)$ , de unde obținem $x-2=1$ , deci $x=3$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>2.a)</b>	$1 * 3 = \frac{1 \cdot 3(1+3)}{1 \cdot 3 + 1} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * 1 = \frac{x \cdot 1 \cdot (x+1)}{x \cdot 1 + 1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$ , pentru orice $x \in M$	<b>2p</b>
	$1 * x = \frac{1 \cdot x \cdot (1+x)}{1 \cdot x + 1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$ , pentru orice $x \in M$ , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$\frac{1}{m} * \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn(mn+1)}$ ; $\frac{1}{16} \cdot (m * n) = \frac{1}{16} \cdot \frac{mn(m+n)}{mn+1}$ , pentru orice numere naturale nenule $m$ și $n$	<b>3p</b>
	$m^2 n^2 = 16$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale nenule, cu $m \leq n$ , obținem perechile $(1, 4)$ și $(2, 2)$	<b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{(2x-3)e^x - (x^2-3x+1)e^x}{(e^x)^2} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{-x^2+5x-4}{e^x} = \frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$	<b>3p</b>
	Dreapta de ecuație $y = 0$ , adică axa $Ox$ , este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui $f$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 4$ ; pentru orice $x \in (-\infty, 1)$ , $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ , pentru orice $x \in (1, 4)$ , $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, 4)$ și pentru orice $x \in (4, +\infty)$ , $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(4, +\infty)$	<b>3p</b>
	Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , $f(4) = \frac{5}{e^4} < 1$ și funcția $f$ este continuă, obținem că ecuația $f(x) = n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul $n$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{4}{2} - 0 = 2$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^{\sqrt{5}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{5}} (x^2+4)' \sqrt{x^2+4} dx = \frac{1}{3} (x^2+4) \sqrt{x^2+4} \Big _0^{\sqrt{5}} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{3} (27-8) = \frac{19}{3}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{x^2(x^2+4)} dx = \int_1^2 \frac{x^{n-2}}{x^2+4} dx$ , pentru orice număr natural $n$ , $n \geq 2$	<b>2p</b>
	$I_{n+2} + 4I_n = \int_1^2 \frac{x^{n-2}(x^2+4)}{x^2+4} dx = \frac{x^{n-1}}{n-1} \Big _1^2 = \frac{2^{n-1}-1}{n-1}$ , deci $\frac{2^{n-1}-1}{n-1} = \frac{3}{n-1}$ , de unde obținem $2^{n-1} = 4$ , deci $n = 3$ , care convine	<b>3p</b>

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Varianta 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $2i(3-i) - 6i = 2$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - mx$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(-1) = f(1)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $27^{x-1} = 9^x$ .
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 3.
- 5p** 5. În sistemul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,2)$  și  $B(1,-1)$ . Determinați coordonatele punctului  $C$  pentru care  $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ .
- 5p** 6. Se consideră expresia  $E(x) = \sin 2x - 2 \operatorname{tg} x \cdot \sin \frac{2x}{3}$ , unde  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x & 1 \\ 1-x & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = 2$ .
- 5p** b) Arătați că  $A(1) \cdot A(x) - A(x-1) = 2I_3$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A(1) \cdot A(1) \cdot A(x) = 3A(1) + 2I_3$ .
2. Pe mulțimea  $M = [0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{xy(x+y)}{xy+1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $1 * 3 = 3$ .
- 5p** b) Arătați că  $e = 1$  este elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale nenule, cu  $m \leq n$ , pentru care  $\frac{1}{m} * \frac{1}{n} = \frac{1}{16} \cdot (m * n)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{e^x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Arătați că axa  $Ox$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația  $f(x) = n$  are soluție unică, pentru orice număr natural nenul  $n$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2$ .

**5p**   **b)** Arătați că  $\int_0^{\sqrt{5}} f(x) dx = \frac{19}{3}$ .

**5p**   **c)** Pentru fiecare număr natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , se consideră numărul  $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)} dx$ . Determinați numărul natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , pentru care  $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$ .



Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(6 - 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 3(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 3 = (\sqrt{3})^2$ , deci numerele $6 - 2\sqrt{3}$ , $\sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	3p 2p
2.	Axa $Ox$ este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$ $m = -2$ sau $m = 2$	3p 2p
3.	$25 \cdot 5^x - 5^x = 24$ , deci $5^x = 1$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte are 81 de elemente, deci sunt 81 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte sunt $3 \cdot 9 = 27$ de numere care au cifra zecilor multiplu de 3, deci sunt 27 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{3}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ , deci $3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ și, cum $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$ , obținem $\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ Vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari, deci dreptele $MD$ și $AB$ sunt paralele	3p 2p
6.	Unghiul $C$ are măsura egală cu $90^\circ$ , deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $C$ $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și, cum $AC = 3$ , obținem $AB = 2\sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot i \cdot (-1) + 0 + 0 - (-2) \cdot i \cdot 1 - 0 - 0 = -i + 2i = i$	3p 2p
b)	Cum $B \cdot B = -I_3$ , $A(z_1) \cdot A(z_2) = (aI_3 + bB)(cI_3 + dB) = acI_3 + adB + bcB + bdB \cdot B = (ac - bd)I_3 + (ad + bc)B = A(z_1 z_2)$ , pentru orice $z_1 = a + ib$ și $z_2 = c + id$ , cu $a, b, c$ și $d$ numere reale	3p 2p
c)	$A(1+i) \cdot A(2+i) \cdot A(3+i) \cdot A(1-i) \cdot A(2-i) \cdot A(3-i) = A((1+i)(2+i)(3+i)(1-i)(2-i)(3-i)) = A((1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(3+i)(3-i)) = A(2 \cdot 5 \cdot 10) = 100I_3$ , deci $n = 100$	2p 3p

Probă scrisă la matematică *M\_mate-info*

Model

Barem de evaluare și de notare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

<b>2.a)</b>	$x * y = \log_2 \left( 2^x (2^y - 2) - 2^{y+1} + 4 + 2 \right) =$ $= \log_2 \left( 2^x (2^y - 2) - 2(2^y - 2) + 2 \right) = \log_2 \left( (2^x - 2)(2^y - 2) + 2 \right)$ , pentru orice $x, y \in M$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * e = x$ pentru orice $x \in M$ , unde $e$ este elementul neutru al legii de compoziție, deci $(2^x - 2)(2^e - 3) = 0$ pentru orice $x \in M$ , de unde obținem $e = \log_2 3 \in M$ Cum $(\log_2 3) * x = x$ pentru orice $x \in M$ , obținem că $e = \log_2 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x * x * x = \log_2 \left( (2^x - 2)^3 + 2 \right)$ , pentru orice $x \in M$ $(x * x * x) - 3x = \log_2 \left( \frac{(2^x - 2)^3 + 2}{2^{3x}} \right) = \log_2 \left( 1 - \frac{6(2^x - 1)^2}{2^{3x}} \right) < 0$ , pentru orice $x \in M$ , de unde obținem că $x * x * x < 3x$ , pentru orice $x \in M$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (x^3 + 3x + 1)'e^{-x} + (x^3 + 3x + 1)(e^{-x})' = (3x^2 + 3)e^{-x} - (x^3 + 3x + 1)e^{-x} =$ $= (-x^3 + 3x^2 - 3x + 2)e^{-x} = (2 - x)(x^2 - x + 1)e^{-x}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x) - e^{-x}}{f(x) + e^{-x}} \right)^{f(x)e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 + 3x}{x^3 + 3x + 2} \right)^{x^3 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-2}{x^3 + 3x + 2} \right)^{\frac{x^3 + 3x + 2}{-2} \cdot \frac{-2(x^3 + 3x + 1)}{x^3 + 3x + 2}} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(x^3 + 3x + 1)}{x^3 + 3x + 2}} = e^{-2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$g(x) =  x^3 + 3x  = \begin{cases} -x^3 - 3x, & x \in (-\infty, 0) \\ x^3 + 3x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ $g$ este continuă și, cum pentru orice $x \in (-\infty, 0)$ , $g'(x) = -3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ , obținem că funcția $g$ are un singur punct de extrem	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)} dx = \int_4^6 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _4^6 =$ $= 18 - 8 = 10$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$F$ este o primitivă a lui $f$ , deci $F'(x) = f(x) = x \ln(x-1)$ , de unde obținem că $F'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (2, +\infty)$ , deci $F$ este strict crescătoare pe $(2, +\infty)$ Cum $2 < \sqrt{7} < 3$ , obținem că $F(\sqrt{7}) < F(3)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_3^5 f(x) dx = \int_3^5 \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right)' \ln(x-1) dx = \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x-1) \Big _3^5 - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} dx =$ $= 12 \ln 4 - 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _3^5 = 20 \ln 2 - 5 = 5(4 \ln 2 - 1)$ , de unde obținem $m = 5$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Model**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că numerele  $6 - 3\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$  și  $2 + \sqrt{3}$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + mx + 1$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numerele reale  $m$  pentru care axa  $Ox$  este tangentă graficului funcției  $f$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x+2} = 5^x + 24$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 3.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul  $ABC$ , punctul  $D$  mijlocul laturii  $AC$  și punctul  $M$  astfel încât  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Arătați că dreptele  $MD$  și  $AB$  sunt paralele.
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii  $AB$  a triunghiului  $ABC$ , în care  $AC = 3$  și măsurile unghiurilor  $A$  și  $B$  sunt de  $30^\circ$ , respectiv  $60^\circ$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  și  $A(z) = aI_3 + bB$ , unde  $z = a + ib$ , cu  $a$  și  $b$  numere reale și  $i^2 = -1$ .
- 5p** a) Arătați că  $\det B = i$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $A(z_1) \cdot A(z_2) = A(z_1 z_2)$ , pentru orice numere complexe  $z_1$  și  $z_2$ .
- 5p** c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $A(1+i) \cdot A(2+i) \cdot A(3+i) \cdot A(1-i) \cdot A(2-i) \cdot A(3-i) = nI_3$ .
2. Pe  $M = [1, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \log_2(2^{x+y} - 2^{x+1} - 2^{y+1} + 6)$ .
- 5p** a) Arătați că  $x * y = \log_2((2^x - 2)(2^y - 2) + 2)$ , pentru orice  $x, y \in M$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Arătați că  $x * x * x < 3x$ , pentru orice  $x \in M$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^3 + 3x + 1)e^{-x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = (2 - x)(x^2 - x + 1)e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x) - e^{-x}}{f(x) + e^{-x}} \right)^{f(x)e^x} = e^{-2}$ .
- 5p** c) Demonstrați că funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \left| \frac{f(x)}{e^{-x}} - 1 \right|$  are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcția  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln(x-1)$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)} dx = 10$ .
- 5p b) Demonstrați că  $F(\sqrt{7}) < F(3)$ , pentru orice primitivă  $F$  a funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $m$ , știind că  $\int_3^5 f(x) dx = m(4 \ln 2 - 1)$ .

**Examenul național de bacalaureat 2022**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$(z_1 + i)(z_2 - 1) = (1 - 2i + i)(2 + i - 1) = (1 - i)(1 + i) =$ $= 1 - i^2 = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.</b>	$\Delta < 0$ și, cum $\Delta = 16 - 4m$ , obținem $16 - 4m < 0$ $m \in (4, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$1 + \log_2(x - 2) = \log_2 x$ , deci $\log_2 \frac{x}{x-2} = 1$ , de unde obținem $\frac{x}{x-2} = 2$ $x = 4$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numărul $n$ din mulțimea $A$ are exact doi multipli în mulțimea $A$ dacă $2n \leq 99 < 3n$ , de unde obținem că numerele din mulțimea $A$ care au exact doi multipli în mulțimea $A$ sunt 34, 35, 36, ..., 49, deci sunt 16 cazuri favorabile și $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$P(0,1)$ , unde $P$ este mijlocul segmentului $AM$ Segmentele $AM$ și $BN$ au același mijloc, de unde obținem $N(-3,1)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$A + B = \pi - C$ , deci $\sin C + \cos C = 1$ $\sin^2 C + 2\sin C \cos C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin 2C = 0$ și, cum $C \in (0, \pi)$ , obținem $C = \frac{\pi}{2}$ , deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 =$ $= 1 + 6 - 3 - 1 + 3 - 6 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$ $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^3 B(1)$ , pentru orice număr real $a$	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>c)</b>	$\det(A(a)) = 0$ ; cum $\det(A(a)) = -a^2 + 3a - 2$ , obținem $a = 1$ , pentru care sistemul este incompatibil, deci nu convine, sau $a = 2$ , pentru care sistemul are o infinitate de soluții Dacă $a = 2$ , soluția sistemului este $(x_0, y_0, z_0) = (\alpha - 1, -\alpha + 1, \alpha)$ și, cum $\alpha$ este număr real, obținem $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 = (\alpha - 1)(-\alpha + 1) + \alpha(-\alpha + 1) + \alpha(\alpha - 1) = -(\alpha - 1)^2 \leq 0$ , pentru orice soluție $(x_0, y_0, z_0)$ a sistemului de ecuații, cu $x_0, y_0$ și $z_0$ numere reale	<b>2p</b>          <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$(-1) * 2 = \frac{-1+2}{4 \cdot  -1 \cdot 2  + 1} =$ $= \frac{1}{4 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{9}$	<b>3p</b>     <b>2p</b>
<b>b)</b>	$z * 0 = \frac{z+0}{4 \cdot  z \cdot 0  + 1} = z$ , pentru orice număr complex $z$ $0 * z = \frac{0+z}{4 \cdot  0 \cdot z  + 1} = z$ , pentru orice număr complex $z$ , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”	<b>2p</b>     <b>3p</b>
<b>c)</b>	$z * z = \frac{2z}{4 \cdot  z ^2 + 1}$ , pentru orice număr complex $z$ $\left  \frac{2z}{4 \cdot  z ^2 + 1} \right  =  z $ și $z$ este număr complex nenul, deci $4 \cdot  z ^2 + 1 = 2$ , de unde obținem $ z  = \frac{1}{2}$ și, de exemplu, numerele distincte nenule $\frac{1}{2}$ , $-\frac{1}{2}$ și $\frac{i}{2}$ verifică egalitatea dată	<b>2p</b>          <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16}} \cdot x - \sqrt{x^4+16}}{x^2} = \frac{2x^4 - x^4 - 16}{x^2 \sqrt{x^4+16}} =$ $= \frac{x^4 - 16}{x^2 \sqrt{x^4+16}} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4+16}}, x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b>          <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+16}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{16}{x^4}} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+16} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x(\sqrt{x^4+16} + x^2)} = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	<b>2p</b>          <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ; $f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (0, 2)$ și $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (2, +\infty)$ $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = 2f(x)$ , deci $g$ este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ și $g$ este strict crescătoare pe $(2, +\infty)$ și, cum $g$ este continuă, $g(2) = 4\sqrt{2}$ , $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , obținem că ecuația $g(x) = m$ are exact două soluții pentru $m \in (4\sqrt{2}, +\infty)$	<b>2p</b>                      <b>3p</b>

<b>2.a)</b>	$\int_0^3 e^x f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 = 12$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$G$ este primitivă a funcției $g \Rightarrow G'(x) = g(x)$ , deci $G''(x) = g'(x) =$ $= \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ , deci funcția $G$ este convexă	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^1 \frac{x^3}{e^x f(x)} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + x - x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)' \cdot \left( \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx =$ $= \frac{1}{2} \left( \frac{2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3} - 2\sqrt{x^2 + 1} \right) \Big _0^1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$ $\frac{2 - \sqrt{2}}{3} = \frac{a - \sqrt{2}}{3}, \text{ de unde obținem } a = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- |    |  |
|----|--|
| 5p | 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 2 + i$ . Arătați că $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$ .  |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2 + 4x + m$ , unde $m$ este număr real. Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care $f(x) > 0$ , pentru orice număr real $x$ . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 2 \log_2 \sqrt{x-2} = \log_2 x$ .  |
| 5p | 4. Se consideră mulțimea $A$ , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A$ , acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea $A$ .                          |
| 5p | 5. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-2, -2)$ , $B(3, 1)$ și $M(2, 4)$ . Determinați coordonatele punctului $N$ , știind că patrulaterul $ABMN$ este paralelogram.                             |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul $ABC$ , în care $\sin(A+B) + \cos C = 1$ . Arătați că triunghiul $ABC$ este dreptunghic.  |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

- |    |   |
|----|---|
|    | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$ , unde $a$ este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1)) = 0$ .  |
| 5p | b) Arătați că $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = a^3 B(1)$ , pentru orice număr real $a$ , unde $B(a) = A(a) - A(0)$ .   |
| 5p | c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \leq 0$ , pentru orice soluție $(x_0, y_0, z_0)$ a sistemului de ecuații, cu $x_0, y_0$ și $z_0$ numere reale.               |
|    | 2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \frac{z_1 + z_2}{4 \cdot  z_1 z_2  + 1}$ .  |
| 5p | a) Arătați că $(-1) * 2 = \frac{1}{9}$ .  |
| 5p | b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.   |
| 5p | c) Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $ z * z  =  z $ .  |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

- |    |   |
|----|---|
|    | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}$ . |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}}$ , $x \in (0, +\infty)$ .         |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ .                      |



- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui  $m$  pentru care ecuația  $f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = m$  are exact două soluții.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^3 e^x f(x) dx = 12$ .
- 5p** b) Arătați că orice primitivă  $G$  a funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  este convexă.
- 5p** c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}} dx = \frac{a - \sqrt{2}}{3}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$5(1+2i) - 2i(5-i) = 5+10i-10i+2i^2 =$ $= 5+2 \cdot (-1) = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(a) = a^2 - 2a - 3$ , deci $a^2 - 2a - 3 = 1 + a^2$ $-2a = 4$ , de unde obținem $a = -2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$2x^2 + 1 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ $x = -2$ sau $x = 2$ , care convin	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 20 de numere care au cifrele impare și distincte, deci sunt 20 de cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram, deci segmentele $AC$ și $BD$ au același mijloc Mijlocul segmentului $AC$ are coordonatele $(3,1)$ , de unde obținem $D(5,-4)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$\sin B = \frac{AC}{BC}$ , $\sin C = \frac{AB}{BC}$ , deci $AC = 2AB$ Cum $AB^2 + AC^2 = 100$ , obținem $AB = 2\sqrt{5}$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1) = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$A(x) - I_3 = \begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ x & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$ $(A(x) - I_3)(A(x) - I_3) = \begin{pmatrix} x^2 - x^2 & -x^2 + x^2 & 0 \\ x^2 - x^2 & -x^2 + x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$A(x) \cdot A(x) = 2A(x) - I_3$ , pentru orice număr real $x$ $2A(x) - I_3 = xA(x) - (x-1)I_3 \Leftrightarrow (x-2)(A(x) - I_3) = O_3$ , de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>2.a)</b>	$0 * 2 = (0 + 2)^2 - 2(0 - 2) - 3 =$ $= 4 + 4 - 3 = 5$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * (x + 1) = 4x^2 + 4x$ , pentru orice număr real $x$ $4x^2 + 4x = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ , de unde obținem $x = -2$ sau $x = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$(m + n)^2 - 2(m - n) - 3 = 2mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 - 2m + 2n - 3 = 0$ $(m - 1)^2 + (n + 1)^2 = 5$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem perechile $(0, 1)$ , $(2, 1)$ și $(3, 0)$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (2x - 5)\sqrt{x} + (x^2 - 5x + 10) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$ $= \frac{5x^2 - 15x + 10}{2\sqrt{x}} = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$ $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in (0, 1]$ , deci $f$ este crescătoare pe $(0, 1]$ , $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [1, 2]$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[1, 2]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [2, +\infty)$ , deci $f$ este crescătoare pe $[2, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x^2 \sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2} \right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-5x + 10}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{5}} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 10}{5x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 \left( f(x) - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^2 (x + e^x) dx = \left( \frac{x^2}{2} + e^x \right) \Big _0^2 =$ $= 2 + e^2 - 1 = e^2 + 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_{-1}^1 e^x (f(x) - x - e^x) dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) \Big _{-1}^1 =$ $= \ln(e + 1) - \ln \frac{1 + e}{e} = \ln e = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \int_0^1 x(e^x + e^{-x} + 1) dx = \int_0^1 x(e^x - e^{-x} + x)' dx = x(e^x - e^{-x} + x) \Big _0^1 -$ $-\int_0^1 (e^x - e^{-x} + x) dx = e - \frac{1}{e} + 1 - \left( e^x + e^{-x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{e}$ $\frac{5}{2} - \frac{2}{e} = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$ , de unde obținem $m = 5$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $5(1+2i) - 2i(5-i) = 3$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 1 + a^2$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(2x^2 + 1) = 2$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,0)$ ,  $B(1,6)$  și  $C(4,2)$ . Determinați coordonatele punctului  $D$ , știind că  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , astfel încât  $BC = 10$  și  $\sin B = 2 \sin C$ . Arătați că lungimea laturii  $AB$  este egală cu  $2\sqrt{5}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = 1$ .
- 5p** b) Arătați că  $(A(x) - I_3)(A(x) - I_3) = O_3$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $A(x) \cdot A(x) = xA(x) - (x-1)I_3$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (x+y)^2 - 2(x-y) - 3$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 * 2 = 5$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * (x+1) = 8$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $m * n = 2mn$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 5x + 10)\sqrt{x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p** c) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{e}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^x + \frac{1}{e^x + 1}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^2 \left( f(x) - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = e^2 + 1$ .

5p b) Arătați că  $\int_{-1}^1 e^x (f(x) - x - e^x) dx = 1$ .

5p c) Determinați numărul real  $m$  pentru care  $\int_0^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$ .