Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **<u>Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$	**3p**
	$\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$	**2p**
2.	$f(0)=2015$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=2015$	**2p**
3.	$x+2=4$	**2p**
	$x=2$, care verifică ecuația	**3p**
4.	$p-10\%\cdot p=99$, unde p este prețul obiectului înainte de reducere	**3p**
	$p=110$ lei	**2p**
5.	$MN=\sqrt{(4-2)^2+(1-1)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2\cdot 1-2\cdot 1=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $xA=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**2p**
c)	$\det(A+I_2)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$, $\det(A-I_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$	**3p**
	$\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=4+(-2)=2$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+1=$	**3p**
	$=1-2-2+1=-2$	**2p**
b)	$f(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+1=$	**3p**
	$=-1-2+2+1=0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=a\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)\Leftrightarrow\frac{2}{-1}=a\cdot(-2)\Leftrightarrow a=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\frac{1}{x}\right)'=$	**2p**
	$=1-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=-\frac{2}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-2\right)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(3)=5\Rightarrow c=-10$, deci $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x-10$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1 e^x\left(x^2+2\right)dx=e^x\left(x^2+2\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1 2xe^xdx=3e-2-\left(2xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 2e^xdx\right)=$	**3p**
	$=3e-2-2e+2e^x\Big\vert_0^1=3e-4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}=1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x+2015$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=2$.

5p **4.** După o reducere cu 10% un obiect costă 99 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de reducere.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,1)$ și $N(4,1)$. Determinați lungimea segmentului MN.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{4}{5}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

5p **c)** Arătați că $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+1$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=-2$.

5p **b)** Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-2)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(3)=5$.

5p **c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$, are aria egală cu $3e-4$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **<u>Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$	**3p**
	$\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{7}=2$	**2p**
2.	$f(a)=0 \Leftrightarrow a-2=0$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x+3=16$	**3p**
	$x=13$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 3 multipli de 15, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**2p**
5.	$x_M=4$	**2p**
	$y_M=4$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=5C$	**2p**
c)	$AB=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$AB+BA+4I_2=\begin{pmatrix}25 & 25\\ 25 & 25\end{pmatrix}=25\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=25C$	**2p**
2.a)	$5\circ(-4)=5\cdot(-4)+4\cdot 5+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-20+20-16+12=-4$	**2p**

b)	$x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 =$ $= x(y+4) + 4(y+4) - 4 = (x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$x \circ x = (x+4)^2 - 4$ $(x+4)^2 - 4 = x \Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$ și $x_2 = -3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(2x^3\right)' + \left(3x^2\right)' + 5' =$ $= 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x) - 2x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x(x+1)}{3x^2+5} =$ $= 2$	**2p** **3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = 0$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-1, 0]$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x) - 3x^2\right)dx = \int_1^2 4x^3 dx = x^4 \Big\|_1^2 =$ $= 16 - 1 = 15$	**3p** **2p**
b)	$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^4 + x^3 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ $F(1) = 2015 \Rightarrow c = 2013$, deci $F(x) = x^4 + x^3 + 2013$	**2p** **3p**
c)	$\int_1^n \dfrac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^n (4x+3)dx = 2x^2 \Big\|_1^n + 3x \Big\|_1^n = 2n^2 + 3n - 5$ $2n^2 + 3n - 5 = 9$ și cum n este număr natural, $n > 1$, obținem $n = 2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=4$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 15.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(4,6)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.
5p	**6.** Arătați că $\sin x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-2$.
5p	**b)** Arătați că $A+B=5C$.
5p	**c)** Demonstrați că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.
5p	**a)** Arătați că $5\circ(-4)=-4$.
5p	**b)** Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.
5p	**c)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcției f.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=15$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=2015$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural n, $n>1$, ştiind că $\int_1^n\frac{f(x)}{x^2}dx=9$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_g=\sqrt{16\cdot 9}=$	**3p**
	$=4\cdot 3=12$	**2p**
2.	$f(2)=2+m$	**2p**
	$2+m=0\Leftrightarrow m=-2$	**3p**
3.	$2x+1=5$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 4 multipli de 2, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{9}$	**2p**
5.	$x_M=2$	**3p**
	$y_M=3$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 3=$	**3p**
	$=1-6=-5$	**2p**
b)	$C(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A+C(-1)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A+C(-1)\right)=-16$	**3p**
	$\det B=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-16$, deci $\det\left(A+C(-1)\right)=\det B$	**2p**
c)	$C(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+2 & 3x+1\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $A\cdot C(x)=\begin{pmatrix}x+6 & 10\\ 2x+2 & 5\end{pmatrix}$, $C(x)\cdot A-A\cdot C(x)=\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+2\cdot 1^2-6\cdot 1+3=$	**3p**
	$=1+2-6+3=0$	**2p**
b)	Câtul este $X-1$	**3p**
	Restul este 0	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-6$, $x_1x_2x_3=-3$ $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=(x_1+x_2+x_3)+\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-2+\frac{-6}{-3}=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3=$ $=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x}=$ $=-3$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]$ $f(1)\le f(x)\le f(-1)$, deci $-1\le f(x)\le 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_2^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^3 2x\,dx=x^2\Big\vert_2^3=$ $=9-4=5$	**3p** **2p**
b)	$F'(x)=\left(x^2+\ln x+2015\right)'=$ $=2x+\frac{1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p** **3p**
c)	$V=\pi\int_1^2\left(f(x)-2x\right)^2dx=\pi\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=$ $=\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=\frac{\pi}{2}$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că media geometrică a numerelor $a=16$ și $b=9$ este egală cu 12.

5p **2.** Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=0$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1}=3^5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie multiplu de 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,3)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6**. Arătați că $\sin x=\frac{1}{2}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $C(x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A+C(-1)\right)=\det B$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $C(x)\cdot A-A\cdot C(x)=B$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2-6X+3$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+3X-3.

5p **c)** Demonstrați că $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}$.

5p **c)** Arătați că $-1\le f(x)\le 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_2^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=5$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2015$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0,5=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}-1=0$	**3p**
2.	$f(-1)=0$, $f(0)=0$ și $f(1)=2$	**3p**
	$f(-1)+f(0)+f(1)=2$	**2p**
3.	$3x+1=25$	**3p**
	$x=8$, care verifică ecuația	**2p**
4.	30% din 150 este $\frac{30}{100}\cdot 150=45$	**3p**
	Prețul după scumpire este $150+45=195$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(3-1)^2+(5-5)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	ΔABC este isoscel	**3p**
	$AB=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)-2\cdot(-1)=$	**3p**
	$=2-(-2)=4$	**2p**
b)	$M\cdot M=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $3M=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$M\cdot M+3M+4I_2=\begin{pmatrix}2-6+4 & -6+6+0\\ 3-3+0 & -1-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$M\cdot M\cdot M=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}$, $aM+bI_2=\begin{pmatrix}-2a+b & 2a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+b & 2a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=5$, $b=12$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3-5\cdot 1^2+5\cdot 1-1=$	**3p**
	$=1-5+5-1=0$	**2p**
b)	$f(a)=a^3-5a^2+5a-1$, $f(-a)=-a^3-5a^2-5a-1$	**2p**
	$f(a)+f(-a)+2=-10a^2\le 0$, pentru orice număr real a	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=5$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$, $x_1x_2x_3=1$	**3p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=5^2-2\cdot 5=15\cdot 1=15x_1x_2x_3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-6=$	**3p**
	$=6\left(x^2-1\right)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=-3$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=-3$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$	**3p**
	$f(2012)\leq f(2013)$ și $f(2014)\leq f(2015)$, deci $f(2012)+f(2014)\leq f(2013)+f(2015)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x)+4\right)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{x^3}{3}\right\vert_0^1=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^1 \left\vert g(x)\right\vert dx=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\left.\operatorname{arctg} x\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}dx=\int_1^a x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\vert_1^a=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}$	**3p**
	$\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}=12\Leftrightarrow a^2-25=0$ și, cum $a>1$, obținem $a=5$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{2}:0,5-1=0$.

5p **2.** Calculați $f(-1)+f(0)+f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+1}=5$.

5p **4.** Un obiect costă 150 lei. Calculați prețul obiectului după o scumpire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$ şi $B(3,5)$. Determinaţi distanța de la punctul A la punctul B.

5p **6**. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=5$ și $m(\sphericalangle B)=45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det M=4$.

5p **b)** Arătați că $M\cdot M+3M+4I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a și b astfel încât $M\cdot M\cdot M=aM+bI_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+5X-1$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Arătați că $f(a)+f(-a)+2\le 0$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=15x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(2012)+f(2014)\le f(2013)+f(2015)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)+4)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)+5}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}dx=12$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_a=\frac{10-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2}=$	**3p**
	$=\frac{10}{2}=5$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x_1=1$ și $x_2=3$	**2p**
3.	$\log_5\frac{2x-1}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3}=1$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 4 numere de o cifră multipli ai lui 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 10 numere de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	**2p**
5.	M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow x_M=\frac{2+6}{2}=4$	**3p**
	$y_M=4$	**2p**
6.	$\cos a=\frac{4}{5}$, $\cos b=\frac{5}{13}$	**2p**
	$\sin(a+b)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{63}{65}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2+2=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$p=1$	**2p**
c)	$A+B=\begin{pmatrix}2 & b-2\\ b+1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B)=-b^2+b$	**2p**
	$\det(A+B)=0 \Leftrightarrow b=0$ sau $b=1 \Leftrightarrow B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ sau $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$1\circ 2015=-1\cdot 2015+1+2015=$	**3p**
	$=1$	**2p**

b)	$x \circ y = -x(y-1)+(y-1)+1=$	**3p**
	$=-(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$(3^x-1)(5^x-1)=0$	**2p**
	$x=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x}{x^2+1}=$	**2p**
	$=\frac{3\cdot 1}{1^2+1}=\frac{3}{2}$	**3p**
b)	$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$	**2p**
	$=\frac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}=-\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=-1$ şi $x_2=1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$	**1p**
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[-1,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$	**1p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int_{-1}^{1} x^5 dx=\frac{x^6}{6}\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$	**2p**
b)	$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=e-0-e+1=1$	**2p**
c)	$g(x)=\frac{(x^5+x)-x}{x^3}=x^2 \Rightarrow V=\pi\int_1^2 x^4 dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\frac{31}{5}\pi$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi media aritmetică a numerelor $a=2\left(5-\sqrt{5}\right)$ şi $b=2\sqrt{5}$.

5p **2.** Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x-1)-\log_5 3=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(6,4)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6**. Arătaţi că $\sin(a+b)=\frac{63}{65}$, știind că $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a=\frac{3}{5}$ şi $\sin b=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale p pentru care $A\cdot A=pA$.

5p **c)** Determinaţi matricele $B=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}$, ştiind că $\det(A+B)=0$, unde b este un număr real.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie dată de $x\circ y=-xy+x+y$.

5p **a)** Calculaţi $1\circ 2015$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=-(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\circ 5^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x$.

5p **a)** Calculaţi $\int\limits_{-1}^{1} x^5 dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int\limits_{0}^{1}\left(f(x)-x^5\right)e^x dx=1$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=\frac{f(x)-x}{x^3}$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_2=3$	**3p**
	$a_1+a_2+a_3=1+3+5=9$	**2p**
2.	$x^2-x=2x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x_1=1$ și $x_2=2$	**2p**
3.	$3^{2-x}=3^{-2} \Leftrightarrow 2-x=-2$	**3p**
	$x=4$	**2p**
4.	$p-15\%\cdot p=34$, unde p este prețul obiectului înainte de ieftinire	**2p**
	$p=40$ de lei	**3p**
5.	$x_M=1$, $y_M=2$, unde punctul M este mijlocul laturii BC	**2p**
	$AM=2$	**3p**
6.	$\mathrm{tg}\,30°\,\mathrm{ctg}\,60°+\mathrm{tg}\,60°\,\mathrm{ctg}\,30°=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-6\cdot 1=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}15 & 30\\ 5 & 10\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}=5A$, de unde obținem $x=5$	**2p**
c)	$\det(A+aI_2)=\begin{vmatrix}3+a & 6\\ 1 & 2+a\end{vmatrix}=(3+a)(2+a)-6=a^2+5a$	**3p**
	$a^2+5a=0 \Leftrightarrow a_1=-5$ și $a_2=0$	**2p**
2.a)	$x*y=xy+2x+2y+4-2=$	**2p**
	$=x(y+2)+2(y+2)-2=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*(-2)=-2$ și $(-2)*y=-2$, pentru x și y numere reale	**3p**
	$(-2015)*(-2)*0*2*2015=((-2015)*(-2))*0*2*2015=(-2)*(0*2*2015)=-2$	**2p**
c)	$n*(-n)=(n+2)(-n+2)-2=2-n^2$	**2p**
	$2-n^2\in\mathbb{N}\Rightarrow n_1=0$ și $n_2=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$f(0)=-1$, $f'(0)=1$	**3p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x-1$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+2}=1$	**3p**
	Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
2.a)	$\int_0^1(f(x)+1)dx=\int_0^1 2xdx=x^2\Big\vert_0^1=$	**2p**
	$=1-0=1$	**3p**
b)	$F'(x)=(x^2-x+1)'=2x-1=$	**3p**
	$=f(x)$, pentru orice număr real x, deci F este o primitivă a funcţiei f	**2p**
c)	$\int_0^n F(x)dx=\int_0^n(x^2-x+1)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^n=\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n^2}{2}+n$	**2p**
	$\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n^2}{2}+n=\dfrac{n^3}{3}\Leftrightarrow n^2-2n=0$ și cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_3 = 5$.
5p	**2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2-x} = \frac{1}{9}$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 15%, prețul unui obiect este 34 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.
5p	**5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(-3,2)$ și $C(5,2)$. Calculați lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătați că $\operatorname{tg} 30° \operatorname{ctg} 60° + \operatorname{tg} 60° \operatorname{ctg} 30° = \frac{10}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați $\det A$.
5p	**b)** Determinați numărul real x, știind că $A \cdot A = xA$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A + aI_2) = 0$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = xy + 2x + 2y + 2$.
5p	**a)** Arătați că $x * y = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Calculați $(-2015) * (-2) * 0 * 2 * 2015$.
5p	**c)** Determinați numerele naturale n, știind că numărul $n * (-n)$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x \in (-2,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
	2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = x^2 - x + 1$.
5p	**a)** Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) + 1\right)dx$.
5p	**b)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcţiei f.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_0^n F(x)\,dx = \frac{n^3}{3}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{25}=5$	**2p**
	$m_a=\dfrac{3+5}{2}=4$	**3p**
2.	$g(-2)=1$	**2p**
	$(f\circ g)(-2)=f(1)=-1$	**3p**
3.	$2x^2+4=12$	**2p**
	$x_1=-2$ şi $x_2=2$, care verifică ecuaţia	**3p**
4.	Numerele cerute sunt 5, 15, 25, 35 şi 45	**3p**
	Sunt 5 numere care sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 10	**2p**
5.	$3+(m-1)-3=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
6.	$\cos B=\dfrac{5^2+6^2-5^2}{2\cdot 5\cdot 6}=$	**3p**
	$=\dfrac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(0)=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+2-2+6-0=6$	**3p**
b)	$D(m)=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ m & 1 & -1\\ 2 & 3 & m\end{vmatrix}=m^2+2m+3m+6=$	**3p**
	$=m(m+2)+3(m+2)=(m+2)(m+3)$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$(n^2-3n+2)(n^2-3n+3)=0$	**3p**
	$n_1=1$ şi $n_2=2$	**2p**
2.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $A(1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A(0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(-1)+A(1)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 6\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p**

b)	$A(a)\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 3a-6 & a+3\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}5 & 0\\ 3a-6 & a+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=2$	**2p**
c)	$\det\left(A(1)\right)=4\neq 0\Rightarrow\left(A(1)\right)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=4\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 3}\left(x+\frac{4}{x-2}\right)=3+4=$	**3p**
	$=7$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x(x-2)}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 2}\left((x-2)\left(x+\frac{4}{x-2}\right)\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x(x-2)+4\right)}{x-2}=$	**3p**
	$=4$	**2p**
2.a)	$f(0)+f(2)=-1+3=$	**3p**
	$=2$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(2x^2+x-1\right)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)=2$	**2p**
	Cum $f(1)=2$, obținem $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în punctul $x=1$	**1p**
c)	Dacă $x\in(1,+\infty)$, atunci $f(x)=x+1$ și $x+1\leq 0$ nu are soluții în intervalul $(1,+\infty)$	**2p**
	Dacă $x\in(-\infty,1]$, atunci $f(x)=2x^2+x-1$ și $2x^2+x-1\leq 0\Leftrightarrow x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați media aritmetică a numerelor $a=3$ și $b=\sqrt{25}$.

5p **2.** Calculați $(f\circ g)(-2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+4}=2\sqrt{3}$.

5p **4.** Determinați numărul elementelor care sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 10, din mulțimea $M=\{1,2,3,...,50\}$.

5p **5.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(3,m-1)$ este situat pe dreapta de ecuație $x+y-3=0$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=5$ și $BC=6$. Calculați $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(m)=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ m & 1 & -1\\ 2 & 3 & m\end{vmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $D(0)$.

5p **b)** Arătați că $D(m)=(m+2)(m+3)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $D\left(n^2-3n\right)=0$.

2. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ a & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(-1)+A(1)=2A(0)$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=5I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=4A(2)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{4}{x-2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\left((x-2)f(x)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x^2+x-1, & x\le 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Calculați $f(0)+f(2)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este continuă în $x=1$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\le 0$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
	$\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}=5$	**2p**
2.	$f(-2)=0$, $f(2)=0$	**2p**
	$f(-2)+f(2)=0$	**3p**
3.	$2x-1=9$	**3p**
	$x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 2 multipli de 5, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**2p**
5.	$MO=4$	**2p**
	$ON=4\Rightarrow \Delta MON$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{10\cdot 12}{2}=$	**3p**
	$=60$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=$	**3p**
	$=-9+10=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}-1+1 & 0\\ 0 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A-aI_2=\begin{pmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-aI_2)=\begin{vmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{vmatrix}=-9+a^2+10=$	**3p**
	$=a^2+1\geq 1$, pentru orice număr real a	**2p**
2.a)	$f(-5)=(-5)^3+5\cdot(-5)^2+(-5)+5=$	**3p**
	$=-125+125-5+5=0$	**2p**
b)	Câtul este $X-1$	**3p**
	Restul este $2X+10$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-5$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-5$	**3p**
	$\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{x_1x_2x_3}=\frac{(-5)^2-2\cdot 1}{-5}=-\frac{23}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-4x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-1\right)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=0$	**3p**
c)	$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$, $f'(x)\geq 0$, pentru $x\in[-1,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru $x\in[0,1]$	**2p**
	$f(-1)=f(1)=0$ și $f(0)=1\Rightarrow 0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx=\int_1^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^3=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{26}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=\frac{3x^2}{3}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$	**3p**
	$=x^2+\sqrt{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^2 x^2e^xdx=\left.x^2e^x\right\|_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=4e^2-e-2\left(\left.xe^x\right\|_1^2-\int_1^2 e^xdx\right)=$	**3p**
	$=4e^2-e-2\left(2e^2-e\right)+\left.2e^x\right\|_1^2=2e^2-e=e(2e-1)$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{10}=5$.

5p **2.** Calculați $f(-2)+f(2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1}=3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0), M(0,4)$ și $N(4,0)$. Arătați că triunghiul MON este isoscel.

5p **6**. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AB=10$ și $AC=12$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că $\det(A-aI_2)\geq 1$, pentru orice număr real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+X+5$.

5p **a)** Arătați că $f(-5)=0$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+6X+5.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=-\frac{23}{5}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx=\frac{26}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2015$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)-\sqrt{x}\right)e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, are aria egală cu $e(2e-1)$.