Examenul naţional de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=3+4\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)^2=3+4\sqrt{3}-\left(7+4\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=3+4\sqrt{3}-7-4\sqrt{3}=-4$, care este număr întreg	**2p**
2.	$f(a)=g(a)\Leftrightarrow 2a+3=4a^2+2a\Leftrightarrow a^2=\frac{3}{4}$	**3p**
	$a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
3.	$2^{x^2+4x+2}=2^6\cdot 2^x\Leftrightarrow x^2+4x+2=6+x\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$	**3p**
	$x=-4$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $\sqrt{a^2-2a+1}\geq 3$ sunt -2 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$MQ \parallel NP\Rightarrow m_{MQ}=m_{NP}$, deci $m_{MQ}=4$	**3p**
	Ecuația dreptei MQ este $y-3=4(x-2)$, deci $y=4x-5$	**2p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R$ și, cum $R=5$, obținem $\sin A=\frac{BC}{10}$, $\sin B=\frac{AC}{10}$ și $\sin C=\frac{AB}{10}$	**3p**
	$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\frac{BC}{10}\cdot\frac{AC}{10}\cdot\frac{AB}{10}=\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{1000}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1,0)\right)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-1-(-1)=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b)\right)=\begin{vmatrix}a & a-2\\ b+1 & b-1\end{vmatrix}=2(b-a+1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
	$a\in(-\infty,0)$ și $b\in(0,+\infty)\Rightarrow b-a+1>1\Rightarrow\det\left(A(a,b)\right)\neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	**3p**
c)	$A(1,3)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $\det\left(A(1,3)\right)=6$, deci $A(1,3)$ este inversabilă și $\left(A(1,3)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\left(A(1,3)\right)^{-1}\cdot A(2,1)$ și, cum $A(2,1)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, obținem $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1\circ(-1)=3\cdot 1\cdot(-1)-(1+(-1))+\frac{2}{3}=$	**2p**
	$=-3+\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}$	**3p**
b)	$x\circ y=3xy-x-y+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=3x\left(y-\frac{1}{3}\right)-\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=$	**3p**
	$=\left(y-\frac{1}{3}\right)(3x-1)+\frac{1}{3}=3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x\circ\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{3}\circ y=\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$1\circ\frac{1}{\sqrt{2}}\circ\frac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}=\left(\left(1\circ\frac{1}{\sqrt{2}}\circ\frac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\circ\frac{1}{3}\right)\circ\frac{1}{\sqrt{10}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}=$ $=\frac{1}{3}\circ\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}\right)=\frac{1}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1'-\frac{1'\cdot(x^2+1)-1\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$	**2p**
	$=-\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)=1\Rightarrow y=1$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f, deci panta asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este egală cu 0	**3p**
	Panta dreptei de ecuație $y=2021$ este egală cu 0, deci asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f și dreapta de ecuație $y=2021$ sunt paralele, deoarece au pante egale	**2p**
c)	$f''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x\in\mathbb{R}$ și $f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sau $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	$f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $f''(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ și $f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$, deci $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ sunt punctele de inflexiune ale funcției f	**3p**
2.a)	$\int_1^2\frac{f(x)}{\sin x}dx=\int_1^2\frac{e^x\sin x}{\sin x}dx=\int_1^2 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\vert_1^2=e^2-e=e(e-1)$	**3p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x dx=e^x\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\sin x)'dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x dx=e^{\frac{\pi}{2}}-e^x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x dx=$	**3p**
	$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$	**2p**

c)	$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x-\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{e^x \sin x}dx=-e^{-\frac{\pi}{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx=-\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}\cdot \ln\lvert\sin x\rvert\Big\vert_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=$	**3p**
	$=-\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}\left(\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)-\ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)=-\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}\left(\ln 1-\ln\frac{1}{2}\right)=-\frac{\ln 2}{\sqrt{e^{\pi}}}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=-3$	**2p**
	$b_5=b_1q^4=(-1)(-3)^4=-81$, deci $\lvert b_5\rvert=81$	**3p**
2.	$-2x^2+7x+9>0 \Leftrightarrow (2x-9)(x+1)<0$	**2p**
	$x\in\left(-1,\frac{9}{2}\right)$	**3p**
3.	$\log_3\frac{x-1}{6-x}=-2 \Rightarrow \frac{x-1}{6-x}=\frac{1}{9}$	**3p**
	$x=\frac{3}{2}$, care convine	**2p**
4.	$\frac{n(n-1)}{2}-n=5 \Leftrightarrow n^2-3n-10=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=5$	**2p**
5.	Distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu $0 \Rightarrow A\in d$	**2p**
	$-1=(m-1)\cdot 3-2m \Leftrightarrow m=2$	**3p**
6.	$\cos(\pi-2x)=-\cos 2x=1-2\cos^2 x=1-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=$	**3p**
	$=1-2\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&-2&1\\2&2&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&-2&1\\2&2&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6-2+2-4+1-6=-3$	**3p**
b)	$B(a)=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}8&3-2a&-1\\5-a&a^2+a+1&-2-a\\4+a&-a^2-a+2&-1+a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $B(a)$ are două elemente egale cu 0 dacă $a=-2$ sau $a=1$	**3p**
c)	Pentru $a=1$, sistemul devine $\begin{cases}3x+y-z=1\\x-y+z=3\\2x+y-z=2\end{cases}$ și adunând primele două ecuații ale sistemului obținem $3x+y-z+x-y+z=4$, deci $x=1$	**3p**
	Adunând a doua și a treia ecuație din sistem, obținem $x-y+z+2x+y-z=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$, deci sistemul nu are soluții	**2p**

2.a)	$(-3)*3=\frac{1}{2}\cdot(-3)+\frac{1}{2}\cdot 3-(-3)\cdot 3=$	**3p**
	$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+9=9$	**2p**
b)	$x*y=\frac{1}{4}-xy+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}=$	**2p**
	$=\frac{1}{4}-x\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$\frac{1}{4}-\left(2^x-\frac{1}{2}\right)\left(4^{x-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{2}$ sau $4^{x-1}=\frac{1}{2}$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(-1+3x^{-1}-4x^{-\frac{3}{2}}\right)'=3\cdot(-1)x^{-2}-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=$	**3p**
	$=-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^2\sqrt{x}}=\frac{-3x+6\sqrt{x}}{x^3}=\frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right)=-1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot f'(x)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot 3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot 3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{-4^x\cdot 3\sqrt{x}}{x^3\left(\sqrt{x}+2\right)}=-6$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(\ln x+2e^x-2x+2021\right)'=\frac{1}{x}+2e^x-2=$	**3p**
	$=\frac{1+2xe^x-2x}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=F(e)-F(1)=$	**3p**
	$=2e^e-4e+3$	**2p**
c)	$\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2\left(2xe^x-2x+1\right)dx=\left((2x-2)e^x-x^2+x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=2e^2-4+2=2e^2-2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)=\sqrt{10}^2-\sqrt{6}^2=$	**2p**
	$=10-6=4=2^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**3p**
2.	$f(-x)=\frac{(-x)^{2021}}{(-x)^2+1}=\frac{-x^{2021}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=-\frac{x^{2021}}{x^2+1}=-f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția f este impară	**2p**
3.	$2^{2x}-6\cdot 2^x-16=0\Leftrightarrow\left(2^x-8\right)\left(2^x+2\right)=0$	**3p**
	Cum $2^x>0$, pentru orice număr real, obținem $2^x=8$, deci $x=3$	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$ este $C_5^2=$	**3p**
	$=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$	**2p**
5.	$m_{AB}=5$ și, cum $d\parallel AB$, obținem $m_d=5$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y-2=5(x+2)$, deci $y=5x+12$	**2p**
6.	$\sin A=\frac{1}{2}$, $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{2AC}{\sqrt{2}}=2BC$, deci $AC=BC\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}4 & 1 & m\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\end{vmatrix}=0-3m+2-(-4m)-12-0=$	**3p**
	$=-3m+4m-10=m-10$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$A(9)=\begin{pmatrix}4 & 1 & 9\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $\det(A(9))=-1$	**2p**
	$A^{-1}(9)=\begin{pmatrix}3 & 27 & 19\\ -2 & -18 & -13\\ -1 & -10 & -7\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$m\neq 10\Rightarrow\det(A(m))\neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat și $(a,b,c)=(2,1,0)$	**3p**
	Cum $\log_2 a=\log_2 2=1$ și $b+c=1+0=1$, obținem $\log_2 a=b+c$	**2p**

2.a)	$x*3=7(x-3)(3-3)+3=$ $=0+3=3$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
b)	$x*x=7(x-3)^2+3$, $x*x*x=49(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x $49(x-3)^3+3=-46 \Leftrightarrow (x-3)^3=-1$, deci $x=2$	**2p** **3p**
c)	$f(x)*f(y)=7(f(x)-3)(f(y)-3)+3=7\left(\frac{5^x}{7}+3-3\right)\left(\frac{5^y}{7}+3-3\right)+3=$ $=7\cdot\frac{5^x}{7}\cdot\frac{5^y}{7}+3=\frac{5^{x+y}}{7}+3=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-x\cdot\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}=$ $=\dfrac{x^2+2x+2-x(x+1)}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}=\dfrac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=1$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,-2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-2,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-2,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, $f(-2)=-\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ și, cum f este continuă, obținem $\operatorname{Im} f=\left[-\sqrt{2},1\right)$	**2p** **3p**
2.a)	$F'(x)=2-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{2x^2(x+2)-(x+2)-4x^2}{x^2(x+2)}=$ $=\dfrac{2x^3-x-2}{x^2(x+2)}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p** **3p**
b)	$\int_1^2(x+2)f(x)\,dx=\int_1^2\dfrac{2x^3-x-2}{x^2}\,dx=\int_1^2\left(2x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx=\left.\left(x^2-\ln x+\dfrac{2}{x}\right)\right\|_1^2=$ $=4-\ln 2+\dfrac{2}{2}-1+\ln 1-2=2-\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$\int_2^m f(x)\,dx=F(x)\Big\|_2^m=F(m)-F(2)=2m+\dfrac{1}{m}-\dfrac{9}{2}+4\ln\dfrac{4}{m+2}$ $2m+\dfrac{1}{m}-\dfrac{9}{2}+4\ln\dfrac{4}{m+2}=2m+\dfrac{1}{m}-\dfrac{17}{2}$, deci $\ln\dfrac{4}{m+2}=-1\Rightarrow m=4e-2$, care convine	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=\frac{(2a_1+6r)\cdot 7}{2}=\frac{(2\cdot(-5)+6\cdot 8)\cdot 7}{2}=$	**3p**
	$=133$	**2p**
2.	$\Delta=1-4a(-a-1)=(2a+1)^2$	**2p**
	$\Delta>0\Rightarrow a\neq-\frac{1}{2}$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=x\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=3$	**2p**
4.	$5A_3^2-3C_5^3=5\cdot\frac{3!}{(3-2)!}-3\cdot\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}=$	**2p**
	$=5\cdot 6-3\cdot\frac{4\cdot 5}{2}=30-30=0$	**3p**
5.	$\frac{2}{5}=\frac{m}{-m^2-1}\Leftrightarrow 2m^2+5m+2=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=-\frac{1}{2}$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC\cdot\sin C}{2}\Rightarrow 15=\frac{6\cdot 10\cdot\sin C}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $AB>BC>AC$, unghiul C are măsura cea mai mare dintre unghiurile ΔABC, deci unghiul C are măsura de $150°$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=-1+1=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
	$M(a,b)\cdot M(x,y)=(aI_2+bA)(xI_2+yA)=axI_2+ayA+bxA+ybA\cdot A=axI_2+(ay+bx)A=$ $=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y	**3p**
c)	$B=xI_2+2yA+yI_2+2xA=M(x+y,2(x+y))$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Cum $C=M(2xy,\sqrt{2}(x+y))$, obținem că $x+y=2xy=0$, deci $x=y=0\Rightarrow x^2+y^2=0$	**3p**
2.a)	$(1*2)\circ(1*3)=(2+2+4+2)\circ(3+2+6+2)=10\circ 13=10+13+2=25$	**3p**
	$1*(2\circ 3)=1*(2+3+2)=1*7=7+2+14+2=25$, deci $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ 3)$	**2p**

b)	$x\circ(-2)=(-2)\circ x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-2$	**2p**
	$x*e=x*(-2)=-2x+2x+(-4)+2=-2=e$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$n*(-n)=2-n^2$, $n\circ(-n)=2$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$2-n^2\geq 2\Leftrightarrow n^2\leq 0$, deci $n=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(x-1+\sqrt{x^2-x+1}\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x\ln(x+1)\right)=0$ și $f(0)=0$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, de unde obținem că f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$ și $f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$	**2p**
c)	Dacă $a\in(-\infty,0)$, atunci panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este $f'(a)=1+\frac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}}$	**2p**
	Cum $f'(a)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-a+1}=1-2a\Leftrightarrow 4a^2-4a+4=4a^2-4a+1$, ceea ce este imposibil, obținem că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul A **nu** este paralelă cu axa Ox	**3p**
2.a)	$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	**2p**
b)	$\int\limits_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)dx=f(x)\Big\vert_{\frac{1}{4}}^{4}=f(4)-f\left(\frac{1}{4}\right)=$	**3p**
	$=\frac{15}{4}+3=\frac{27}{4}$	**2p**
c)	$\int\limits_{m}^{1} f^2(x)\cdot g(x)dx=\int\limits_{m}^{1} f^2(x)\cdot f'(x)dx=\frac{1}{3}f^3(x)\Big\vert_{m}^{1}=\frac{1}{3}\left(f^3(1)-f^3(m)\right)$	**3p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(m)=0$, deci $m=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(\lg 100-\lg 40)\cdot\dfrac{1}{(\lg 5-\lg 2)(\lg 5+\lg 2)}=$	**2p**
	$=\lg\dfrac{100}{40}\cdot\dfrac{1}{\lg\dfrac{5}{2}\cdot\lg 10}=\lg\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\lg\dfrac{5}{2}}=1$	**3p**
2.	$2x=m^2-1\Leftrightarrow x=\dfrac{m^2-1}{2}$	**2p**
	Soluția ecuației este un număr real strict mai mic decât $0\Leftrightarrow m^2-1<0$, deci $m\in(-1,1)$	**3p**
3.	$2^{x^2+x}=2^{4x}\Leftrightarrow x^2+x=4x\Leftrightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică inegalitatea $(n+1)!-n!\le n+2$ sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{10}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AO}=6\vec{i}-6\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=x_C\vec{i}+(y_C-2)\vec{j}$, deci $6\vec{i}-6\vec{j}=2x_C\vec{i}+2(y_C-2)\vec{j}$	**3p**
	Coordonatele punctului C sunt $x_C=3$, $y_C=-1$	**2p**
6.	Triunghiul este dreptunghic, deci $a^2+1=2(a+2)$, de unde obținem $a^2-2a-3=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=3$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&0&1\\4&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(4))=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&1\\4&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+2+0-0-1-0=1$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(1)-A(a+1)=\begin{pmatrix}1+\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}\\2&1&2\\a+2&1&a+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&\sqrt{a+1}\\1&0&1\\a+1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1}\\1&1&1\\1&0&a+1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\det(A(a)\cdot A(1)-A(a+1))=\begin{vmatrix}\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1}\\1&1&1\\1&0&a+1\end{vmatrix}=\sqrt{a+1}-1>0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$B(n)=\begin{pmatrix} 1+1+\ldots+1 & 0 & 1+2+\ldots+n \\ 1+1+\ldots+1 & 0 & 1+1+\ldots+1 \\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 & 1+1+\ldots+1 & 1+1+\ldots+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ n & 0 & n \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & n & n \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Pentru orice număr natural n, $n\ge 2$, $\det(B(n))=\frac{n^3(n-1)}{2}\ne 0$, deci matricea $B(n)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**3p**
2.a)	$\sqrt{3}\circ 2=\sqrt{3}(\sqrt{3}\cdot 2+4)-3(\sqrt{3}+2)=$	**2p**
	$=6+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6=\sqrt{3}$	**3p**
b)	$x\circ y=\sqrt{3}xy-3x-3y+4\sqrt{3}=\sqrt{3}xy-3x-3y+3\sqrt{3}+\sqrt{3}=$	**2p**
	$=\sqrt{3}x(y-\sqrt{3})-3(y-\sqrt{3})+\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3})+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ\sqrt{3}=\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\circ y=\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$3^1\circ 3^{\frac{1}{2}}\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}=(3^1\circ\sqrt{3})\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}=\sqrt{3}\circ\left(3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}\right)=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x-\operatorname{arctg}x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{5x}{x^2+x+4}=0$ și $f(0)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, deci f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(x)=x-\operatorname{arctg}x\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$	**3p**
	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$, deci funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$	**2p**
c)	f este crescătoare pe $(-\infty,0)$ și continuă în $x=0$, deci $f(x)\le f(0)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,+\infty)$, $f(x)\le 1\Leftrightarrow\frac{5x}{x^2+x+4}\le 1\Leftrightarrow x^2-4x+4\ge 0\Leftrightarrow(x-2)^2\ge 0$, deci $f(x)\le 1$, pentru orice număr real $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f(x)\le 1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_1^5 x(x+2)f(x)dx=\int_1^5(x+1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right\|_1^5=$	**3p**
	$=\frac{25}{2}+5-\left(\frac{1}{2}+1\right)=16$	**2p**
b)	$\int_1^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{2x+2}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)\Big\|_1^3=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(\ln 15-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 5$	**2p**

c)	$F'(x)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F''(x)=\frac{x^2+2x-(x+1)(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2}=-\frac{x^2+2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este concavă	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x=\log_6(8\cdot 27)=3$, $y=\sqrt{144}=12$	**2p**
	Media geometrică a numerelor x și y este $\sqrt{xy}=\sqrt{3\cdot 12}=6$	**3p**
2.	Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta>0$, deci $4-4a>0$	**3p**
	$a\in(-\infty,1)$	**2p**
3.	$2-x^2=2x-1 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=1$	**2p**
4.	$A_5^2=4\cdot 5$, $C_6^2=3\cdot 5$ și $A_4^2=3\cdot 4$	**3p**
	$A_5^2\cdot C_6^2\cdot A_4^2=4^2\cdot 3^2\cdot 5^2=60^2$	**2p**
5.	$m_{AB}=-\dfrac{a+4}{3}$, $m_{BC}=4-a$, unde a este număr real	**2p**
	A, B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB}=m_{BC} \Leftrightarrow a+4=3a-12$, deci $a=8$	**3p**
6.	$MP=20$, deci semiperimetrul ΔMNP este $p=24$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{MN\cdot NP}{2}=96 \Rightarrow r=\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta MNP}}{p}=\dfrac{96}{24}=4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&-1\\1&1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-4+2+(-2)-4-(-1)-(-4)=-3$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^3-4a$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a+2)\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$	**3p**
c)	Dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului cu $x_0=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{z_0}{3}$, atunci $\begin{cases}ax_0+4x_0+3x_0=1\\2x_0+8x_0-3ax_0=1\\x_0+2ax_0-3x_0=0\end{cases}$, unde a este număr real, deci $\begin{cases}x_0(a+7)=1\\x_0(10-3a)=1\\2x_0(a-1)=0\end{cases}$	**2p**
	$x_0(a+7)=1$, deci $x_0\neq 0$ și, cum $2x_0(a-1)=0$, obținem că $a=1$; $x_0(a+7)=1\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{8}$ și $x_0(10-3a)=1\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{7}$, ceea ce este imposibil	**3p**

2.a)	$2021*(-2021)=\sqrt[3]{2021^3+(-2021)^3-27}=\sqrt[3]{2021^3-2021^3-27}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{-27}=-3$	**2p**
b)	$x*e=x\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^3+e^3-27}=x\Leftrightarrow x^3+e^3-27=x^3$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow e=3$	**3p**
	Cum $3*x=\sqrt[3]{3^3+x^3-27}=\sqrt[3]{x^3}=x$, pentru orice număr real x, obținem că $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$f(x)*f(y)=\sqrt[3]{f^3(x)+f^3(y)-27}=\sqrt[3]{(x+27)+(y+27)-27}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{x+y+27}=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3x^2(x^6+7)-6x^5(x^3+3)}{(x^6+7)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-3x^2(x^6+6x^3-7)}{(x^6+7)^2}=\dfrac{-3x^2(x^3-1)(x^3+7)}{(x^6+7)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3}{x^6+7}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3}{x^6+7}=0$	**2p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ la graficul funcției f, iar graficul funcției f nu admite asimptote verticale	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{7}$, $x=0$ sau $x=1$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\sqrt[3]{7}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt[3]{7}\right]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[-\sqrt[3]{7},1\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\sqrt[3]{7},1\right]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
	$f\left(-\sqrt[3]{7}\right)=-\dfrac{1}{14}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $-\dfrac{1}{14}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$, pentru orice număr real x, de unde obținem $-\dfrac{4}{7}\le f(x)-f(y)\le\dfrac{4}{7}$, deci $\lvert f(x)-f(y)\rvert\le\dfrac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{e^{3x}f(x)}{2x+1}dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1(2x+1)e^{-x}dx=\int_0^1(2x+1)\left(-e^{-x}\right)'dx=-(2x+1)e^{-x}\Big\vert_0^1+\int_0^1 2e^{-x}dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{3}{e}+1-2e^{-x}\Big\vert_0^1=-\dfrac{3}{e}+1-\dfrac{2}{e}+2=\dfrac{3e-5}{e}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x(x+2)}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(-\frac{2}{x}\right)'e^{-\frac{2}{x}}dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2e}-\dfrac{1}{2e^2}=\dfrac{e-1}{2e^2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow r = 3$	**2p**
	$a_{2021} = a_1 + 2020r = 6062$	**3p**
2.	$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = -x + 3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 2$ și $y = 1$	**2p**
3.	$3^{\frac{x+2}{2}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2} = 3$	**3p**
	$x = 4$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A care sunt divizori ai numărului 48 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 8, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(m-4) + 2m = 4m - 8$, unde m este număr real	**3p**
	$4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$	**2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 9 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 63$, deci $BC = 3\sqrt{7}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 3\sqrt{7} + 9 = 3\left(\sqrt{7} + 3\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(-1)\right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -4 + 1 + (-1) - (-2) - (-1) - 2 = -3$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6a^2 - a + 2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$	**3p**
c)	Cum a este număr întreg, obținem că $\det\left(A(a)\right) \neq 0$, deci $\left(1, y_0, z_0\right)$ este unica soluție a sistemului de ecuații	**2p**
	$1 = \frac{3a}{-6a^2 - a + 2} \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0$ și, cum a este număr întreg , obținem $a = -1$	**3p**
2.a)	$x \circ 0 = x + 5 \cdot x \cdot 0 + 0 = x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0 \circ x = 0 + 5 \cdot 0 \cdot x + x = x$, pentru orice număr real x, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

b)	$x \circ y = 5xy + x + y + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 5x\left(y + \frac{1}{5}\right) + \left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} =$	**3p**
	$= \left(y + \frac{1}{5}\right)(5x+1) - \frac{1}{5} = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x \circ \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}$ și $\left(-\frac{1}{5}\right) \circ y = -\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$q = \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \left(-\frac{1}{4}\right)\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \left(-\frac{1}{6}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \left(\left(-\frac{1}{6}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)\right) = -\frac{1}{5}$, deci $[q] = -1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (x+1)' \cdot \ln x + (x+1) \cdot (\ln x)' =$	**2p**
	$= 1 \cdot \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in (0,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(1) = 2$, $f(1) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = 2x - 2$	**3p**
c)	$f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1,+\infty) \Rightarrow f$ este convexă pe $[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$g(x) = x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, deci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{x^4}{4} + x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**3p**
	Cum $G(0) = 2021$, obținem $c = 2021$, deci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{x^4}{4} + x + 2021$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg} x\right)\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{x^n+1}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$, pentru orice $x \in [0,1]$ și pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, deci $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 1dx$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**
	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x \Big\vert_0^1 = \frac{\pi}{4}$ și $\int_0^1 1dx = x\Big\vert_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=2$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$b_1=1$, deci $b_1+b_2+b_3=7$	**3p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+3=0$	**2p**
	Cum $\Delta>0$, graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte distincte pentru care produsul absciselor este egal cu $x_1x_2=\frac{3}{1}=3$	**3p**
3.	$4(x+2)=(1-x)^2 \Rightarrow x^2-6x-7=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine; $x=7$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra sutelor poate fi aleasă în 4 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifrele zecilor şi unităţilor se pot alege în câte 5 moduri, deci există $4\cdot 5\cdot 5=100$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+(a+2)\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}-3\vec{j}$	**2p**
	$\frac{a}{-2}=\frac{a+2}{-3} \Leftrightarrow a=4$	**3p**
6.	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=$	**3p**
	$=2\sin x\cos\frac{\pi}{3}=2\sin x\cdot\frac{1}{2}=\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det A(0)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0\cdot 3-1\cdot 2=-2$	**3p**
b)	$\det A(a)=\begin{vmatrix}a & a+1\\ a+2 & a+3\end{vmatrix}=a^2+3a-a^2-3a-2=-2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det A(a)\neq 0 \Rightarrow A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$(A(a))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{a+3}{2} & \frac{a+1}{2}\\ \frac{a+2}{2} & -\frac{a}{2}\end{pmatrix}$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	$X=(A(a))^{-1}A(b)=\begin{pmatrix}a-b+1 & a-b\\ b-a & b-a+1\end{pmatrix}$ şi, cum a şi b sunt numere întregi, obţinem că X are toate elementele numere întregi	**3p**

2.a)	$a = 2 \circ 4 = \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} =$	**2p**
	$= 1 + 4 = 5$, care este număr întreg	**3p**
b)	$x \circ y = \frac{2x^2 + 2y^2}{xy}$, pentru orice $x, y \in A$	**2p**
	$x \circ y - 4 = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4xy}{xy} = \frac{2(x-y)^2}{xy} \geq 0$, deci $x \circ y \geq 4$, pentru orice $x, y \in A$	**3p**
c)	Dacă legea de compoziție „$\circ$” ar admite element neutru, atunci ar exista $e \in A$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, pentru orice $x \in A \Rightarrow e \circ e = e$, de unde obținem $e = \frac{2e}{e} + \frac{2e}{e}$, deci $e = 4$	**3p**
	Cum $2 \circ 4 \neq 2$, obținem că $e = 4$ nu convine, deci legea de compoziție „$\circ$” nu admite element neutru	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} =$	**2p**
	$= \frac{-x^2 - 2x - 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2 (x+1)^2}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$	**3p**
b)	Graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul $A(0, f(0))$, $f(0) = -2$ și $f'(0) = 0$	**3p**
	Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -2$	**2p**
c)	$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 (x+4) f(x)\, dx = \int_0^2 (x+2)\, dx = \frac{x^2}{2}\Big\vert_0^2 + 2x\Big\vert_0^2 =$	**3p**
	$= 2 - 0 + 4 - 0 = 6$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+4}\right) dx = \left(x - 2\ln(x+4)\right)\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - 2\ln 5 + 2\ln 4 = 1 - 2\ln\frac{5}{4}$	**2p**
c)	$\frac{x+2}{x+4} \leq 1$ și $e^{-x} > 0$, deci $f(x) e^{-x} \leq e^{-x}$, pentru orice $x \in [0, n]$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\int_0^n f(x) e^{-x}\, dx \leq \int_0^n e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big\vert_0^n = 1 - e^{-n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{5+11}{2}=$	**3p**
	$=8$	**2p**
2.	$a^2+1=(a+1)^2+1\Leftrightarrow a^2+1=a^2+2a+2\Leftrightarrow 2a+1=0$	**3p**
	$a=-\frac{1}{2}$	**2p**
3.	$x^2-x+13=x^2+2x+1\Leftrightarrow 3x=12$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $2\cdot 3=6$ cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	**1p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_{OC}=\frac{a}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	$OC\perp AB\Leftrightarrow m_{AB}\cdot m_{OC}=-1\Leftrightarrow\frac{a}{3}=-1$, de unde obținem $a=-3$	**3p**
6.	$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=$	**2p**
	$=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}=\cos x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}6&-2\\10&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}6&-2\\10&-3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6\cdot(-3)-10\cdot(-2)=2$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}(1+5x)(1+5y)-20xy & -2y(1+5x)-2x(1-4y)\\10x(1+5y)+10y(1-4x) & -20xy+(1-4x)(1-4y)\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+5x+5y+5xy & -2x-2y-2xy\\10x+10y+10xy & 1-4x-4y-4xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5(x+y+xy) & -2(x+y+xy)\\10(x+y+xy) & 1-4(x+y+xy)\end{pmatrix}=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$\left(A(m)\right)^{-1}=A(n)\Leftrightarrow A(m)A(n)=I_2\Leftrightarrow A(m+n+mn)=A(0)\Leftrightarrow m+n+mn=0$, unde m şi n sunt numere întregi, $m\neq-1$ şi $n\neq-1$	**3p**
	$mn+m+n+1=1\Leftrightarrow(m+1)(n+1)=1$ și, cum m şi n sunt numere întregi, obținem $m=n=-2$ sau $m=n=0$, deci perechile sunt $(-2,-2)$ și $(0,0)$, care convin	**2p**
2.a)	$1\circ 0=1\cdot 0+1+2\cdot a\cdot 0=$	**3p**
	$=0+1+0=1$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$x\circ 1>4\Leftrightarrow x+x+2a>4\Leftrightarrow 2x>4-2a\Leftrightarrow x>2-a\Leftrightarrow x\in(2-a,+\infty)$	**3p**
	$2-a=3$, deci $a=-1$	**2p**
c)	Legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă $\Leftrightarrow (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, pentru orice numere reale x, y şi $z\Leftrightarrow (xy+x+2ay)z+xy+x+2ay+2az=x(yz+y+2az)+x+2a(yz+y+2az)$	**2p**
	Obținem $xz+2az=2axz+4a^2z\Leftrightarrow z(x+2a)(1-2a)=0$, pentru orice numere reale x și z, deci $a=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1-x}{e^x}\right)=1$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f(x)=x\Leftrightarrow x=0$	**2p**
	Cum $f(0)=0$ și $f'(0)=1$, tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$ are ecuaţia $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, deci este dreapta de ecuație $y=x$	**3p**
2.a)	$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big\|_0^{\pi}=$	**3p**
	$=-\cos\pi+\cos 0=-(-1)+1=2$	**2p**
b)	$\int_0^{\pi}xf(x)dx=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi}x(\cos x)'dx=-x\cos x\Big\|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=$	**3p**
	$=-\pi\cos\pi+\sin x\Big\|_0^{\pi}=-\pi\cdot(-1)+0-0=\pi$	**2p**
c)	$\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(f(x)-f^2(x)\right)dx=\int_0^1\sin x(1-\sin x)dx$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$, $\sin x(1-\sin x)\geq 0\Rightarrow\int_0^1\sin x(1-\sin x)dx\geq 0$, deci $\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1 f^2(x)dx$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=1-2i+1+\frac{1}{2}i=2-\frac{3}{2}i$	**2p**
	$z_1z_2=(1-2i)\left(1+\frac{1}{2}i\right)=1+\frac{1}{2}i-2i-i^2=2-\frac{3}{2}i$, deci $z_1+z_2=z_1z_2$	**3p**
2.	$(f\circ f)(x)=f(f(x))=2(2x+m)+m=4x+3m$, $2f(x-1)=2(2(x-1)+m)=4x-4+2m$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x+3m=4x-4+2m \Leftrightarrow m=-4$	**2p**
3.	$5\cdot5^x\cdot2^x=50\cdot7^{x-1}\Leftrightarrow 5^x\cdot2^x=10\cdot7^{x-1}\Leftrightarrow 10^{x-1}=7^{x-1}$	**3p**
	$x-1=0$, deci $x=1$	**2p**
4.	$f(2)$ poate fi aleasă în trei moduri și, pentru fiecare alegere a lui $f(2)$, numerele $f(0)$ și $f(4)$ pot fi alese în câte patru moduri	**3p**
	Există $3\cdot4\cdot4=48$ de funcții $f:\{0,2,4\}\to\{3,5,7,9\}$ cu proprietatea $f(2)\le 8$	**2p**
5.	$m_d\cdot m_{AB}=-1$ și, cum $m_{AB}=-1$, obținem $m_d=1$	**2p**
	$AC=BC\Rightarrow d$ este mediatoarea segmentului AB și, cum $M(0,2)$ este mijlocul segmentului AB, obținem că ecuația dreptei d este $y=x+2$	**3p**
6.	$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x=1\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-x\right)=1$	**2p**
	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, deci $x=\frac{\pi}{6}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}4^x & 0\\ 0 & 9^x\end{vmatrix}=4^x\cdot9^x-0\cdot0=$	**3p**
	$=2^{2x}\cdot3^{2x}=6^{2x}$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot B=\begin{pmatrix}-4^x & 4^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}$, $B\cdot A(x)=\begin{pmatrix}-4^x & 9^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}-4^x & 4^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4^x & 9^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}\Leftrightarrow 4^x=9^x$, de unde obținem $x=0$	**2p**
c)	Cum $A(1)\cdot X=X\cdot X\cdot X=X\cdot A(1)$, pentru $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Rightarrow\begin{pmatrix}4a & 4b\\ 9c & 9d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a & 9b\\ 4c & 9d\end{pmatrix}$, deci $b=0$ și $c=0$	**3p**

	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-2,2\}$ și $d \in \{-3,3\}$, deci orice matrice X cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are toate elementele numere întregi	**2p**
2.a)	$2 \circ 1 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 =$ $= 8 + 2 + 2 = 12$	**3p** **2p**
b)	$2c^2 + ca + 2a^2 = 2c^2 + cb + 2b^2 \Leftrightarrow c(a-b) + 2\left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(c + 2a + 2b) = 0$ Cum $2a + 2b + c \neq 0$, obținem $a - b = 0$, deci $a = b$	**3p** **2p**
c)	$2x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 5x^3 + 2 \Leftrightarrow 5x^3 - 5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x\left(x^2 - x - 1\right) = 0$ $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = 0$ sau $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + a(x+1)' =$ $= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + a = \ln x + 1 + a$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
b)	$f'(x) = \ln x + 2$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e^2}\right]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$	**2p** **3p**
c)	$f''(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, deci, pentru orice număr real a, funcția f este convexă	**2p** **3p**
2.a)	$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \left(2x + e^x\right)dx = \left(x^2 + e^x\right)\Big\|_{-1}^{0} =$ $= 0 + e^0 - 1 - e^{-1} = -\frac{1}{e}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 x f\left(x^2\right)dx = \int_0^1 \left(2x^3 + xe^{x^2}\right)dx = \int_0^1 2x^3\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2\right)' e^{x^2}\,dx = \frac{x^4}{2}\Big\|_0^1 + \frac{e^{x^2}}{2}\Big\|_0^1 =$ $= \frac{1}{2} + \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e}{2}$	**3p** **2p**
c)	$I_{n+1} = \int_0^2 x^{n+1}\left(f(x) - 2x\right)dx = \int_0^2 x^{n+1} e^x\,dx = x^{n+1}e^x\Big\|_0^2 - (n+1)\int_0^2 x^n e^x\,dx =$ $= 2^{n+1}e^2 - (n+1)I_n$, deci $I_{n+1} + (n+1)I_{n-1} = 2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul n	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_3^2 = b_2 b_4 \Rightarrow 3^2 = 6b_4$	**3p**
	$b_4 = \frac{3}{2}$	**2p**
2.	$(-a)^2 + 3(-a) - 4 + a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4$	**3p**
	$a = -2$ sau $a = 2$	**2p**
3.	$2^{x+1} = 2^4 \cdot 2^{-2x} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{4-2x} \Leftrightarrow x+1 = 4-2x$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au cifra unităţilor egală cu dublul cifrei zecilor sunt 12, 24, 36 și 48, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	**1p**
5.	$M(3,1)$ este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$M \in OC \Leftrightarrow C \in OM$ și, cum dreapta OM are ecuaţia $x - 3y = 0$, obţinem $a - 3(a+3) = 0$, deci $a = -\frac{9}{2}$	**3p**
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x - (-\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$B(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$	**3p**
b)	$A \cdot B(a,b) = \begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a şi b	**3p**
	$\det(A \cdot B(a,b)) = 2(a+1)(b+1) - 2(a+1)(b+1) = 0$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
c)	$B(a,b) \cdot A = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
	$\begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$ și $b = 0$	**3p**

2.a)	$3\circ 5=\|3-5\|+1=\|-2\|+1=$ $=2+1=3$	**3p** **2p**
b)	$a=(2\circ 3)\circ 4=2\circ 4=3$ $b=2\circ(3\circ 4)=2\circ 2=1$, deci $a-b=2$	**2p** **3p**
c)	Pentru $n=1$ şi m număr natural nenul, $m\circ n=m\circ 1=\|m-1\|+1=m-1+1=$ $=m$, deci există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (m,n) pentru care $m\circ n=m$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(\ln(x-1)-\ln(x+1))'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=$ $=\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=$ $=\ln\frac{1-0}{1+0}=\ln 1=0$	**3p** **2p**
c)	$x\in(1,+\infty)\Rightarrow x^2-1>0\Rightarrow f'(x)>0$, deci funcția f este crescătoare $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f nu este surjectivă	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 2f(x)dx=\int_0^1(2x+2)dx=\left.(x^2+2x)\right\|_0^1=$ $=1+2=3$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x(x+1)dx=\int_0^1(e^x)'(x+1)dx=\left.(x+1)e^x\right\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=$ $=2e-1-\left.e^x\right\|_0^1=2e-1-(e-1)=e$	**3p** **2p**
c)	$f(e^x)-e^{f(x)}=e^x+1-e^{x+1}=1-e^x(e-1)$, pentru orice $x\in[0,e]$ $e-1>1$ și $e^x\ge 1$, pentru orice $x\in[0,e]\Rightarrow 1-e^x(e-1)\le 0$, pentru orice $x\in[0,e]$, de unde obținem că $\int_0^e f(e^x)dx\le\int_0^e e^{f(x)}dx$	**2p** **3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice este $q=\frac{b_6}{b_5}=2$	**2p**
	$b_8=b_6q^2=6\cdot 4=24$	**3p**
2.	$f\left(\sqrt{3}\right)=3-\sqrt{3}-3=-\sqrt{3}$	**2p**
	$f\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)=f\left(-\sqrt{3}\right)=3+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}$	**3p**
3.	$\lg x^2=\lg(5x+6)\Rightarrow x^2-5x-6=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra sutelor, egală cu cifra unităţilor, poate fi aleasă în 9 moduri, iar, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 10 moduri, deci sunt 90 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{90}{900}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$BC \parallel Ox$ și $A\in Oy\Rightarrow AO\perp BC$, deci O este ortocentrul triunghiului $ABC \Leftrightarrow OC\perp AB$	**2p**
	Cum $m_{OC}=-\frac{2}{a}$ și $m_{AB}=5$, obținem că $-\frac{2}{a}\cdot 5=-1$, deci $a=10$	**3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow \sin C=\frac{6\sin B}{3\sqrt{6}}$ și, cum $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, obținem $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	Cum $C<\pi-\frac{\pi}{3}$, obținem $C=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=\begin{vmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=1+2=3$	**3p**
b)	$\det A(a)=1+a^2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$1+a^2>0$, pentru orice număr real $a\Rightarrow \det A(a)\neq 0$, deci $A(a)$ este inversabilă pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4I_2$	**3p**
	$A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=-4I_2\cdot A(1)=-4A(1)$, deci $k=-4$	**2p**

2.a)	$\frac{1}{3}\circ\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}+2=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+2=1$, care este număr întreg	**2p**
b)	$x\circ x=3x^2-4x+2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ x\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3x^2-4x+\frac{4}{3}\geq 0$ și, cum $\Delta=0$, obținem că $x\circ x\geq\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$x\circ 1=1\circ x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=1$	**2p**
	$x\circ x\circ x=1\Leftrightarrow 3^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^3+\frac{2}{3}=1\Leftrightarrow x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, de unde obținem $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$, deci graficul lui f nu admite asimptotă spre $+\infty$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $\frac{\sqrt{5}}{3}<\frac{\sqrt{5}}{2}$, obținem că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$	**2p**
2.a)	$\int_1^4 f^4(x)\,dx=\int_1^4 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^4=$	**3p**
	$=\frac{4^3-1^3}{3}=21$	**2p**
b)	$\int_0^1 f\left(e^x\right)dx=\int_0^1\sqrt{e^x}\,dx=\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}\,dx=\left.2e^{\frac{x}{2}}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=2e^{\frac{1}{2}}-2e^0=2\sqrt{e}-2$	**2p**
c)	$\int_1^4 e^{f(x)}dx=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^2 t\,e^t\,dt=$	**3p**
	$=\left.2(t-1)e^t\right\|_1^2=2e^2$	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=3+4\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ este întreg.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4x^2+2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+4x+2}=64\cdot 2^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\{-2,-1,1,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $\sqrt{a^2-2a+1}\geq 3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $MNPQ$ cu $M(2,3)$, $N(5,4)$ și $P(4,0)$. Determinați ecuația dreptei MQ.

5p **6**. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\dfrac{AB\cdot AC\cdot BC}{1000}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1,0)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $a\in(-\infty,0)$ și $b\in(0,+\infty)$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1,3)\cdot X=A(2,1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-(x+y)+\dfrac{2}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ(-1)=-\dfrac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1\circ\dfrac{1}{\sqrt{2}}\circ\dfrac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{\sqrt{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=2021$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x}dx=e(e-1)$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx=-\frac{\ln 2}{\sqrt{e^{\pi}}}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați modulul celui de-al cincilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = -1$ și $b_2 = 3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 7x + 9$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) > 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-1) = \log_3(6-x) - 2$.

5p **4.** Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $C_n^{n-2} - A_n^1 = 5$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3,-1)$, numărul real m și dreapta d de ecuație $y = (m-1)x - 2m$. Determinați numărul real m pentru care distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu 0.

5p **6.** Determinați $\cos(\pi - 2x)$, știind că x este număr real și $\cos x = \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - ay + z = 3 \\ 2x + ay - z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2)) = -3$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $B(a) = A(a)\cdot A(a)$ are două elemente egale cu 0.

5p **c)** Pentru $a = 1$, arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - xy$.

5p **a)** Arătați că $(-3)*3 = 9$.

5p **b)** Demonstrați că $x * y = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x * 4^{x-1} = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 4} \frac{4^x \cdot f'(x)}{x-4}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2xe^x-2x+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+2e^x-2x+2021$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e f(x)\,dx=2e^e-4e+3$.

5p **c)** Calculați $\int_1^2 x\,f(x)\,dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{10}-\sqrt{6}$, 2 și $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^{2021}}{x^2+1}$. Arătați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-3\cdot 2^{x+1}=16$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-2,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are măsura unghiului A de 30° și măsura unghiului B de 45°. Arătați că $AC=BC\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}4&1&m\\1&2&-1\\-2&-3&0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}4x+y+mz=9\\x+2y-z=4\\-2x-3y=-7\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-10$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați inversa matricei $A(9)$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, $m\neq 10$, dacă (a,b,c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a=b+c$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $x*3=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=-46$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{5^x}{7}+3$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3-x-2}{x^2(x+2)}$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2x+\dfrac{1}{x}-4\ln(x+2)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 (x+2) f(x)\, dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m > 2$, astfel încât $\int_2^m f(x)\, dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=-5$ și rația $r=8$.

5p **2.** Determinați valorile reale nenule ale lui a pentru care ecuația $ax^2-x-a-1=0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3x-\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=2x$.

5p **4.** Calculați $5A_3^2-3C_5^3$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{a}=2\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{b}=5\vec{i}-\left(m^2+1\right)\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB>BC$, $AC=6$, $BC=10$ și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a,b)=aI_2+bA$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a,b)\cdot M(x,y)=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B=M(x,2y)+M(y,2x)$ și $C=M\left(x\sqrt{2},1\right)\cdot M\left(y\sqrt{2},1\right)$ sunt egale, atunci $x^2+y^2=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=xy+2x+2y+2$ și $x\circ y=x+y+2$.

5p **a)** Arătați că $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ3)$.

5p **b)** Demonstrați că $x*e=e$, pentru orice număr real x, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*(-n)\ge n\circ(-n)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1+\sqrt{x^2-x+1}, & x\in(-\infty,0)\\ x\ln(x+1), & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1+x\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

5p **b)** Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m \in (0,1)$, pentru care $\int_{m}^{1} f^2(x) g(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(2-\lg 40)\cdot\dfrac{1}{\lg^2 5-\lg^2 2}=1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care soluția ecuației $2x-m^2+1=0$ este număr real strict mai mic decât 0.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2+x}=4^{2x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $(n+1)!-n!\le n+2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,6)$ și $B(0,2)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Determinați numerele reale a, $a>-2$, știind că a^2+1 și $a+2$ sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{a}\\ 1 & 0 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a)\cdot A(1)-A(a+1))>0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că matricea $B(n)=A(1^2)+A(2^2)+A(3^2)+\ldots+A(n^2)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{3}(xy+4)-3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3}\circ 2=\sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3})+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $3^1\circ 3^{\frac{1}{2}}\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-\operatorname{arctg} x, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{5x}{x^2+x+4}, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5 x(x+2)f(x)\,dx=16$.

5p **b)** Calculați $\int_1^3 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați media geometrică a numerelor $x=\log_6 8+\log_6 27$ și $y=\sqrt{2^2\cdot 3^3+6^2}$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+a$, unde a este număr real. Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $7^{2-x^2}=7^{2x-1}$.
5p	**4.** Arătați că produsul numerelor A_5^2, C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,\ a+1)$, $B(2,-3)$ și $C(3,\ 1-a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6**. Determinați raza cercului înscris în triunghiul MNP, dreptunghic în N, știind că $MN=12$ și $NP=16$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ 2 & 4 & -a\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=1\\ 2x+4y-az=1\\ x+ay-z=0\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
5p	**c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) astfel încât $x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{3}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3-27}$.
5p	**a)** Arătați că $2021*(-2021)=-3$.
5p	**b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
5p	**c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+27}$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+3}{x^6+7}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x^2\left(x^3-1\right)\left(x^3+7\right)}{\left(x^6+7\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\left\|f(x)-f(y)\right\|\le\frac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \dfrac{e^{3x}f(x)}{2x+1}\,dx=e-1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2 \dfrac{1}{x(x+2)}f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{e-1}{2e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_{2021} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=2$ și $a_3=8$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ cu dreapta d de ecuație $y=-x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3^{x+2}}=27$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al numărului 48.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-4)\vec{i}+2\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=6$, $AC=3$ și unghiul A de $120°$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a&1&1\\1&2a&1\\1&a&-1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2ax+y+z=0\\x+2ay+z=1\\x+ay-z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numărul întreg a, știind că există numerele reale y_0 și z_0 astfel încât $(1,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+5xy+y$.

5p **a)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $q=\left(-\frac{1}{2}\right)\circ\left(-\frac{1}{3}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2021}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,0)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^n+1}{x^2+1}$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Pentru $n=3$, se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x^2+1)f(x)$. Determinați primitiva G a funcției g pentru care $G(0)=2021$.

5p **b)** Pentru $n=1$, calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 2$ și $b_3 = 4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+3$. Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției f intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x+2}=1-x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-1,0)$ și $C(a,a+2)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere întregi și $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a)\cdot X = A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea $A=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}$.

5p **a)** Arătați că numărul $a = 2\circ 4$ este întreg.

5p **b)** Arătați că $x\circ y\geq 4$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$" **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul intersectează axa Oy.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x+1)}$.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x)\,dx=6$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătaţi că $\int_0^n f(x)e^{-x}\,dx < 1$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=5$ și $a_5=11$.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$. Determinaţi numărul real a știind că $f(a)=f(a+1)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-x+13}=x+1$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(-1,1)$ şi $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care dreptele OC și AB sunt perpendiculare.
5p	**6.** Arătaţi că, pentru orice număr real x, $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Determinaţi perechile de numere întregi (m,n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+2ay$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $1\circ 0=1$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a, știind că $x\circ 1>4$ dacă și numai dacă $x\in(3,+\infty)$.
5p	**c)** Arătaţi că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă dacă şi numai dacă $a=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.
5p	**a)** Arătați că $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=1$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x$ este tangentă la graficul funcției f.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^{\pi} f(x)dx=2$.
5p	**b)** Calculaţi $\int_0^{\pi} xf(x)dx$.
5p	**c)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1 f^2(x)dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z_1 = 1-2i$ și $z_2 = 1+\frac{1}{2}i$, unde $i^2=-1$, atunci $z_1+z_2 = z_1 z_2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, astfel încât $(f\circ f)(x)=2f(x-1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}\cdot 2^x = 50\cdot 7^{x-1}$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,2,4\}\to\{3,5,7,9\}$ cu proprietatea $f(2)\le 8$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(-2,4)$, $B(2,0)$ și C astfel încât $AC=BC$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x = \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x + 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}4^x & 0\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real și $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=6^{2x}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot B = B\cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X = A(1)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y = 2x^2+xy+2y^2$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 1 = 12$.

5p **b)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât $2a+2b+c\neq 0$. Știind că $c\circ a = c\circ b$, demonstrați că $a=b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ(x+1)=5x^3+2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x + a(x+1)$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\ln x + 1 + a$, $x\in(0,+\infty)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=1$, determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\frac{1}{e}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x f\left(x^2\right)dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^2 x^n\left(f(x)-2x\right)dx$. Demonstrați că $I_{n+1}+(n+1)I_n = 2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 6$ și $b_3 = 3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-4$. Determinați numerele reale a, pentru care $f(-a)+f(a)=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}=16\cdot 4^{-x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,-3)$ și $C(a,a+3)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OC trece prin mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ și $B(a,b)=\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1,2))=-1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A\cdot B(a,b))=0$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** Determinați numerele reale a şi b pentru care $A\cdot B(a,b)=B(a,b)\cdot A$.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=|x-y|+1$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 5=3$.

5p **b)** Calculați $a-b$, știind că $a=(2\circ 3)\circ 4$ și $b=2\circ(3\circ 4)$.

5p **c)** Arătați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m\circ n=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f **nu** este surjectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 2f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^e f\left(e^x\right)dx\leq\int_0^e e^{f(x)}dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_8 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=3$ și $b_6=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-3$. Arătați că $(f\circ f)(\sqrt{3})=\sqrt{3}$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2\lg x=\lg(5x+6)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităţilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(-1,-2)$ și $C(a,-2)$, unde a este număr real nenul, $a\neq -1$. Determinați numărul real a pentru care ortocentrul triunghiului ABC este O.

5p **6.** În triunghiul ABC, $AB=6$, $AC=3\sqrt{6}$ și $B=\frac{\pi}{3}$. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=3$.

5p **b)** Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg k pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=kA(1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=3xy-2x-2y+2$.

5p **a)** Arătați că numărul $\frac{1}{3}\circ\frac{1}{3}$ este întreg.

5p **b)** Arătați că $x\circ x\geq\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ x\circ x=e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 f^4(x)\,dx=21$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f\left(e^x\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)}dx = 2e^2$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_5^2=b_4b_6 \Rightarrow 36=18b_4$	**3p**
	$b_4=2$	**2p**
2.	$m^2+m-4=m \Leftrightarrow m^2-4=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$10^{2x+2}=10^{3x} \Leftrightarrow 2x+2=3x$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Cifra unităților, fiind pară, se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $3\cdot 4=12$ numere	**3p**
5.	$OA=4$, $OB=4$, $OC=4$	**3p**
	Centrul cercului circumscris ΔABC are coordonatele $x=0$, $y=0$	**2p**
6.	Cum $\operatorname{tg} x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**2p**
	$\sin 2x=\sin\frac{2\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-(-1)\cdot 3=$	**3p**
	$=-4+3=-1$	**2p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x+2 & 3\\ -1 & x-2\end{vmatrix}=x^2-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x))\neq 0$, deci $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**
c)	$A(a)\cdot A(b)=A(c) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}ab+2a+2b+1 & 3a+3b\\ -a-b & ab-2a-2b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+2 & 3\\ -1 & c-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow a+b=1$ și $c=ab+1$	**3p**
	$a^2+b^2+2c=a^2+b^2+2ab+2=(a+b)^2+2=1+2=3$	**2p**
2.a)	$0\circ 1=0\cdot\sqrt{1-1}+1\cdot\sqrt{1-0}=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$x\circ x=2x\sqrt{1-x^2}$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$2x\sqrt{1-x^2}=0$, deci $x=-1$, $x=0$ sau $x=1$, care convin	**3p**
c)	$x\circ\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{x^2}+1-x^2=x\lvert x\rvert+1-x^2$, pentru orice $x\in M$	**3p**
	Cum $\lvert x\rvert=x$ pentru orice $x\in[0,1]$, obținem $x\circ\sqrt{1-x^2}=x^2+1-x^2=1$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'-1'=$	**2p**
	$=e^x+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=e^x+\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=e-1$, $f'(1)=e+1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=(e+1)x-2$	**3p**
c)	$x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow\ln x\geq\ln\frac{1}{2}$, deci $f'(x)=e^x+\ln x+1\geq e^x+\ln\frac{e}{2}>e^x>0$, de unde obținem că f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$	**3p**
	Pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $e^x+x\ln x-1\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-1$, de unde obținem $e^x+x\ln x\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx=\int_0^1\left(x^2+2+x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x+\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+2+\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f	**3p**
	$x^2+x+2>0$, pentru orice număr real x, deci $F'(x)>0$, pentru orice număr real x, de unde obținem că F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x'\sqrt{x^2+2}\,dx=x\sqrt{x^2+2}\Big\vert_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-\int_0^1\left(\sqrt{x^2+2}-\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$, deci $\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right)\Big\vert_0^1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	**3p**
	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, de unde obținem $a=1$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=6$ și $b_6=18$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-4$. Determinaţi numerele reale m, știind că $f(m)=m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $100\cdot 10^{2x}=10^{3x}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(4,0)$ şi $C(0,4)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin 2x=1$, știind că $\operatorname{tg} x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=-1$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c, astfel încât $A(a)\cdot A(b)=A(c)$. Demonstrați că $a^2+b^2+2c=3$.

2. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 1=1$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ x=0$.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ\sqrt{1-x^2}=1$, pentru orice $x\in[0,1]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x\ln x-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^x+x\ln x\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx=\frac{17}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=3$, unde q este rația progresiei geometrice	**3p**
	$b_3=2\cdot 3^2=18$	**2p**
2.	$g(7)=0$	**2p**
	$(f\circ g)(7)=f(g(7))=f(0)=7$	**3p**
3.	$2x-1=(x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine, $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)>0$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
5.	Mijlocul segmentului AC este punctul $M(2,3)$ și $m_{BM}=1$	**3p**
	$m_{BD}=1$, deci $m_{BD}=m_{BM}$, de unde obținem că punctele B, D şi M sunt coliniare	**2p**
6.	$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=2 \Leftrightarrow 1-\sin 2x=2 \Leftrightarrow \sin 2x=-1$	**3p**
	Cum $x\in(0,\pi)$, obținem $2x=\dfrac{3\pi}{2}$, deci $x=\dfrac{3\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -6 & -5\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & 6\\ -6 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}1+2^m+2^n & 2^m+2^n\\ -2^m-2^n & 1-2^m-2^n\end{pmatrix}$, $A(m+n)=\begin{pmatrix}1+2^{m+n} & 2^{m+n}\\ -2^{m+n} & 1-2^{m+n}\end{pmatrix}$, unde m și n sunt numere naturale	**2p**
	$A(m)\cdot A(n)=A(m+n) \Leftrightarrow 2^{m+n}=2^m+2^n \Leftrightarrow (2^m-1)(2^n-1)=1$ și, cum m şi n sunt numere naturale, obţinem $m=n=1$	**3p**
2.a)	$(-1)*(-1)=(-1)^2+(-1)^2+(-1)+(-1)=$	**3p**
	$=1+1-1-1=0$	**2p**

b)	$x*y=x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+2y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x^2*x^2\le 4\Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\le 4\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$, de unde obținem $x^2+\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}$	**3p**
	$x\in[-1,1]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x+4-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}=2(x+2)-\frac{1}{2(x+2)}=\frac{4(x+2)^2-1}{2(x+2)}=$	**3p**
	$=\frac{(2(x+2)-1)(2(x+2)+1)}{2(x+2)}=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{2x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+2}}{2}=0$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(-2,-\frac{3}{2}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-2,-\frac{3}{2}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$	**3p**
	Pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, $f(x)\ge f\left(-\frac{3}{2}\right)$, deci $x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)\ge-\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$, de unde obținem $x^2+4x+\frac{15}{4}\ge\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^3(x^2+1)f(x)dx=\int_0^3(x^2+1+2)dx=\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+9=18$	**2p**
b)	$\int_1^3 xf(x)dx=\int_1^3\left(x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_1^3+\ln(x^2+1)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{9-1}{2}+\ln 10-\ln 2=4+\ln 5$	**2p**
c)	F este o primitivă a funcției f și f este continuă, deci, pentru orice număr real x, $F(x+1)-F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$	**2p**
	$f(t)=1+\frac{2}{t^2+1}>1$, pentru orice număr real t, deci $\int_x^{x+1}f(t)dt\ge\int_x^{x+1}1dt=x+1-x=1$, de unde obținem că $F(x+1)\ge F(x)+1$, pentru orice număr real x	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 2$ și $b_2 = 6$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+7$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-7$. Calculaţi $(f\circ g)(7)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)>0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ și $D(5,6)$. Demonstraţi că punctele B, D și mijlocul segmentului AC sunt coliniare.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, ştiind că $(\sin x-\cos x)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a & 2^a\\ -2^a & 1-2^a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.

5p **c)** Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$. Arătați că $m=n=1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2+y^2+x+y$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*(-1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2*x^2\leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că $x^2+4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3 (x^2+1)f(x)\,dx=18$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx=4+\ln 5$.

5p **c)** Demonstraţi că $F(x+1)\geq F(x)+1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(4-i)+3i(1+i)=12-3i+3i+3i^2=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
2.	$f(2)=0$	**2p**
	$f(f(2))=f(0)=-4$	**3p**
3.	$x^2-2x+4=3\Rightarrow x^2-2x+1=0$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{OA}=2$, $m_{OB}=\dfrac{a}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	$m_{OA}=m_{OB}\Leftrightarrow a=6$	**3p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{3\pi}{4}=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}4&4\\-2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}4&4\\-2&-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-8-(-8)=0$	**3p**
b)	$\det(A(x,y))=\begin{vmatrix}x+3y&4y\\-2y&x-3y\end{vmatrix}=x^2-y^2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$A(x,y)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x,y))\neq 0\Leftrightarrow x^2-y^2\neq 0$, deci $\lvert x\rvert\neq\lvert y\rvert$	**3p**
c)	$A(m,n)\cdot A(-m,n)=\begin{pmatrix}m+3n&4n\\-2n&m-3n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m+3n&4n\\-2n&-m-3n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n^2-m^2&0\\0&n^2-m^2\end{pmatrix}$, pentru orice numere întregi m și n	**3p**
	$\begin{pmatrix}n^2-m^2&0\\0&n^2-m^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow n^2-m^2=1\Leftrightarrow(n-m)(n+m)=1$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem perechile $(0,1)$ sau $(0,-1)$	**2p**

2.a)	$2\circ 0=4^{2\cdot 0}-(1-2-0)=$ $=1-1+2=2$	**3p** **2p**
b)	$x\circ\frac{1}{x}=4^{x\cdot\frac{1}{x}}-1+x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}+3=x+\frac{1}{x}-2+5=$ $=\frac{x^2+1-2x}{x}+5=\frac{(x-1)^2}{x}+5\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$	**2p** **3p**
c)	m și n sunt numere naturale impare, deci $m\geq 1$ și $n\geq 1\Rightarrow mn\geq 1$, de unde obținem că 4^{mn} este număr natural par m și n sunt numere naturale impare, deci $m+n-1$ este număr natural impar, de unde obținem că $m\circ n=4^{mn}+m+n-1$ este număr natural impar	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3\cdot\frac{1}{x}=$ $=\frac{3(x^3-1)}{x}=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=1$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; pentru $x\in(0,1]$, obținem $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și pentru $x\in[1,+\infty)$, obținem $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$ $f(x)\geq f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $f(1)=1$, obținem că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^2 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^2=$ $=2-0=2$	**3p** **2p**
b)	$\int_{-1}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\int_{-1}^1\left(xe^x+e^x\right)dx=\int_{-1}^1\left(xe^x\right)'dx=\left.xe^x\right\|_{-1}^1=$ $=e+e^{-1}=\frac{e^2+1}{e}$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=(x+1)e^x$, deci $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și, cum $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$, obținem că $f(x)\geq f(-1)$, pentru orice număr real x $f(-1)=-\frac{1}{e}$, deci $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq-\frac{1}{e}\int_{-1-a}^{-1+a}dx=-\frac{1}{e}\left.x\right\|_{-1-a}^{-1+a}=-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p** **3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3(4-i)+3i(1+i)=9$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$. Calculați $(f\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-2x+4\right)=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y&4y\\-2y&x-3y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1,1)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

2. Pe mulțimea $A=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 0=2$.

5p **b)** Arătați că $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{-1}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 3+\log_2 12=\log_2 36=\log_2 6^2=$	**3p**
	$=2\log_2 6$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**
2.	$f(x)=x \Leftrightarrow x^2-x+1=x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$2x-1=2x+1$ sau $2x-1=-2x-1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4\cdot 5=20$ de numere care au cifra zecilor pară și cifra unităților impară, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{8}=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	$a=4$	**2p**
6.	$\cos B=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AB}{12}\Rightarrow AB=6\sqrt{3}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 12\cdot\dfrac{1}{2}=18\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-(-1)\cdot 4=$	**3p**
	$=-3+4=1$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2b-1 & 4b-4\\ 1-b & 3-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2b-3 & 4a+4b-8\\ -a-b+2 & -2a-2b+5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2(a+b-1)-1 & 4(a+b-1)-4\\ 1-(a+b-1) & 3-2(a+b-1)\end{pmatrix}=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(1+2+2^2+2^3+2^4-4)=A(27)$	**3p**
	$A(27)=A(32+(-n)-1)$, de unde obținem $n=4$	**2p**
2.a)	$1\circ 2=3\cdot 1^2-5\cdot 1\cdot 2+2\cdot 2^2=$	**3p**
	$=3-10+8=1$	**2p**
b)	$x\circ x=3x^2-5x^2+2x^2=$	**3p**
	$=-2x^2+2x^2=0$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}+2\cdot 3^{2x}=0\Leftrightarrow 3\cdot 2^{x}\left(2^{x}-3^{x}\right)-2\cdot 3^{x}\left(2^{x}-3^{x}\right)=0\Leftrightarrow\left(2^{x}-3^{x}\right)\left(3\cdot 2^{x}-2\cdot 3^{x}\right)=0$	**3p**
	$2^{x}=3^{x}$ sau $3^{x-1}=2^{x-1}$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(x^{2}+2x+2\right)'}{2\sqrt{x^{2}+2x+2}}-x'=$	**3p**
	$=\dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^{2}+2x+2}}-1=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^{2}+2x+2}}-1,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1)=2,\ f'(-1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right)$, adică $y=-x+1$	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $x^{2}+1\geq 2x$, obținem $f\left(x^{2}+1\right)\leq f(2x)$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f\left(x^{2}+1\right)=\sqrt{\left(x^{2}+1\right)^{2}+2\left(x^{2}+1\right)+2}-\left(x^{2}+1\right)$ și $f(2x)=\sqrt{(2x)^{2}+2\cdot 2x+2}-2x$, obținem $\sqrt{\left(x^{2}+1\right)^{2}+2\left(x^{2}+1\right)+2}-\sqrt{4x^{2}+4x+2}\leq(x-1)^{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_{0}^{1}\left(4-f^{2}(x)\right)dx=\int_{0}^{1}\left(4-\dfrac{4x^{2}}{x^{2}+1}\right)dx=4\int_{0}^{1}\dfrac{1}{x^{2}+1}dx=4\operatorname{arctg}x\Big\|_{0}^{1}=$	**3p**
	$=4\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0\right)=\pi$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_{0}^{1}\left\|f(x)\right\|dx=\int_{0}^{1}\dfrac{2x}{\sqrt{x^{2}+1}}dx=\int_{0}^{1}\dfrac{\left(x^{2}+1\right)'}{\sqrt{x^{2}+1}}dx=$	**3p**
	$=2\sqrt{x^{2}+1}\Big\|_{0}^{1}=2\left(\sqrt{2}-1\right)$	**2p**
c)	$\int_{1}^{2}\dfrac{f\left(x^{2}\right)}{x}dx=\int_{1}^{2}\dfrac{2x^{2}}{x\sqrt{x^{4}+1}}dx=\int_{1}^{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^{4}+1}}dx=\int_{1}^{2}\dfrac{\left(x^{2}\right)'}{\sqrt{\left(x^{2}\right)^{2}+1}}dx=$	**3p**
	$=\ln\left(x^{2}+\sqrt{x^{4}+1}\right)\Big\|_{1}^{2}=\ln\dfrac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numerele $\log_2 3$, $\log_2 6$ și $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$. Determinați numărul real x pentru care $f(x)=x$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\|2x-1\|=2x+1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară și cifra unităților impară.
5p	**5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=8\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** În triunghiul ABC dreptunghic în A, $BC=12$ și $B=\frac{\pi}{6}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x^2-5xy+2y^2$.
5p	**a)** Arătați că $1\circ 2=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x\circ 3^x=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\le(x-1)^2$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(4-f^2(x)\right)dx=\pi$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\frac{13}{z}=3+2i+\frac{13}{3+2i}=3+2i+\frac{13(3-2i)}{9-4i^2}=3+2i+\frac{13(3-2i)}{13}=$	**3p**
	$=3+2i+3-2i=6$	**2p**
2.	$f(g(a))=f(g(-a))\Leftrightarrow 3g(a)-5=3g(-a)-5\Leftrightarrow g(a)=g(-a)$	**3p**
	$a^2+a=a^2-a\Leftrightarrow a=0$	**2p**
3.	$3^{3x+5}=3^2\cdot 3^{x+1}\Leftrightarrow 3^{3x+5}=3^{x+3}$	**3p**
	$3x+5=x+3\Rightarrow x=-1$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor lui A este egal cu 2^4, deci sunt 16 cazuri posibile	**2p**
	Numărul submulțimilor lui A cu un număr impar de elemente este egal cu $C_4^1+C_4^3=8$, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$M(2,4)$ este mijlocul segmentului AB, deci $m_{CM}=-1$	**2p**
	$d \parallel CM\Rightarrow m_d=-1$, deci ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d(x-x_A)$, adică $y=-x+4$	**3p**
6.	$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B\Rightarrow 12=4+BC^2-2\cdot 2\cdot BC\cdot\frac{1}{2}$	**3p**
	$BC^2-2BC-8=0\Rightarrow BC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{vmatrix}=a(1+2x)(1-2x)+4ax^2=$	**3p**
	$=a(1-4x^2)+4ax^2=a$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 0 & -4(x+y)\\ 0 & a^2 & 0\\ x+y & 0 & 1-2(x+y)\end{pmatrix}$, $A(x+y)=\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 0 & -4(x+y)\\ 0 & a & 0\\ x+y & 0 & 1-2(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)\Rightarrow a^2=a$ și, cum a un număr real nenul, obținem $a=1$	**2p**
c)	$A(-2)\cdot A(2)=A(0)=I_3$, deci $A(-2)$ este inversa matricei $A(2)$	**2p**
	$X=A(-2)\cdot A(3)\Rightarrow X=A(1)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$0*2021=\log_2\left(2^0+2^{2021}-1\right)=\log_2\left(1+2^{2021}-1\right)=$	**3p**
	$=\log_2 2^{2021}=2021$	**2p**

b)	$x*e=x\Leftrightarrow\log_2\left(2^x+2^e-1\right)=x\Leftrightarrow 2^x+2^e-1=2^x$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, de unde obținem $2^e=1$, deci $e=0\in M$	**3p**
	Cum $0*x=\log_2\left(1+2^x-1\right)=x$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, obținem că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	**2p**
c)	$x*(x+1)*(x+2)=\log_2\left(2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2\right)$, $x\in M$	**3p**
	$\log_2\left(2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2\right)=\log_2 54\Rightarrow 7\cdot 2^x-2=54\Rightarrow 2^x=8$, deci $x=3$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}}\cdot\frac{(2x+1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ crescătoare pe $[-1,1]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(1)=\frac{\sqrt{6}}{2}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\frac{\sqrt{6}}{2}$, pentru orice număr real x, deci $\sqrt{2}\le f(x)+f(-x)\le\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)+2\ln x\right)dx=\int_1^3(2x+3-2\ln x+2\ln x)dx=\int_1^3(2x+3)dx=\left.\left(x^2+3x\right)\right\|_1^3=$	**3p**
	$=9+9-1-3=14$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(2x+3-f(x)\right)dx=2\int_1^e\ln x\,dx=\left.2x\ln x\right\|_1^e-2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=2e-2(e-1)=2$	**2p**
c)	$\int_0^1 x^2 f\left(x^3+1\right)dx=\frac{1}{3}\int_1^2 f(t)\,dt=\frac{1}{3}\left(\int_1^2(2t+3)\,dt-2\int_1^2\ln t\,dt\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\left.\left(t^2+3t-2t\ln t+2t\right)\right\|_1^2=\frac{1}{3}(4+6-4\ln 2+4-1-3-2)=\frac{4(2-\ln 2)}{3}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=3+2i$. Arătați că $z+\frac{13}{z}=6$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x$. Determinați numărul real a pentru care $(f\circ g)(a)=(f\circ g)(-a)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+5}=9\cdot 3^{x+1}$.
5p	**4.** Se consideră A, o mulțime cu 4 elemente. Calculați probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor lui A, aceasta să aibă un număr impar de elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$ și $C(0,6)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu mediana din vârful C a triunghiului ABC.
5p	**6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$ și $B=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(x))=a$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Pentru $a=1$, determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(3)$.
	2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^x+2^y-1\right)$.
5p	**a)** Arătați că $0*2021=2021$.
5p	**b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
5p	**c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*(x+1)*(x+2)=\log_2 54$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3-2\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)+2\ln x\right)dx=14$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e \left(2x+3-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 x^2 f\left(x^3+1\right)dx = \frac{4(2-\ln 2)}{3}$.