CLUBUL MATEMATICIENILOR

art
educațional

Marius Perianu
Ioan Balica

Matematică

Clasa a VII-a

Semestrul al II-lea

avizat
M.E.N.

Marius Perianu
Ioan Balica

Matematică

Clasa a VII-a

II

art
educațional

Lucrarea a fost realizată în conformitate cu noua programă școlară pentru disciplina Matematică, clasele a V-a – a VIII-a, aprobată prin O.M. nr. 3393/28.02.2017.

Prezentul auxiliar a fost avizat de Ministerul Educației și Cercetării prin Ordinul nr. 5318 din 21.11.2019 și se regăsește la poziția nr. 24 din anexa Ordinului.

Referenți științifici: prof. dr. Livia Harabagiu
prof. gr. I Mircea Popescu
prof. gr. I Liviu Adrian Stroie
prof. Cristian Heuberger

Redactor: Irina Munteanu
Tehnoredactor: Florin Paraschiv

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
PERIANU, MARIUS
Matematică: clasa a VII-a / Marius Perianu, Ioan Balica. – București: Art Educațional, 2020
2 vol.
ISBN 978-606-003-279-3
Semestrul 2. – 2020. – ISBN 978-606-003-340-0

I. Balica, Ioan

51

Pentru comenzi vă puteți adresa Departamentului Difuzare
C.P. 12, O.P. 63, sector 1, București
Telefoane: 0744 634 719; 0751 281 774; 021 796 73 83; 021 796 73 80
Fax: 021 369 31 99
www.art-educational.ro

Cuprins

Algebră

Geometrie

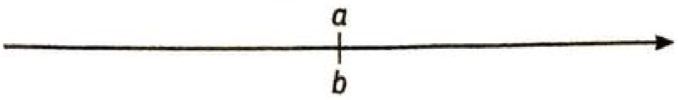
Algebră

I

Ecuații și sisteme de ecuații liniare

I.1 Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Numerele reale a și b sunt egale dacă se reprezintă în același punct pe axa numerelor.



Exemple

1 Dacă $a = 2$ și $b=\sqrt{4}$, atunci $a = b$, deoarece $\sqrt{4}=2$.

2 Dacă $a=\frac{\sqrt{12}}{2}$ și $b=\sqrt{3}$, atunci $a = b$, deoarece $\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Proprietățile relației de egalitate pe mulțimea numerelor reale

1 **Reflexivitatea:** $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2 **Simetria:** dacă $x = y$, atunci $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3 **Tranzitivitatea:** dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Egalitatea se păstrează dacă adunăm sau scădem din ambii membri ai unei egalități același termen sau dacă înmulțim/împărțim o egalitate printr-un factor nenul. Cu alte cuvinte, au loc următoarele echivalențe, numite **proprietăți de compatibilitate**, între relația de egalitate și operațiile cu numere reale:

$$a = b \Leftrightarrow a + x = b + x,\ \forall\, a, b, x \in \mathbb{R};$$
$$a = b \Leftrightarrow a - x = b - x,\ \forall\, a, b, x \in \mathbb{R};$$
$$a = b \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x,\ \forall\, a, b, x \in \mathbb{R}, x \neq 0;$$
$$a = b \Leftrightarrow a : x = b : x,\ \forall\, a, b, x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

De asemenea, dacă se adună/se scad/se înmulțesc/se împart două egalități membru cu membru, se obține tot o egalitate. Altfel spus,

$$\text{dacă } \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}, \text{ atunci } \begin{cases} a+c=b+d \\ a-c=b-d \end{cases} \text{ și } \begin{cases} a\cdot c=b\cdot d \\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}\ (c,d\neq 0) \end{cases}.$$

Exemplu. Dacă a, b și c sunt numere reale, astfel încât $a + 3b = 4$ și $b - 2c = 1$, determinați valoarea expresiei $a + 2b + 2c$.

Rezolvare. Scăzând cele două egalități, obținem egalitatea $(a + 3b) - (b - 2c) = 4 - 1$, care este echivalentă cu $a + 2b + 2c = 3$.

Exersare

1 Stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a $\sqrt{9}=3$; b $\sqrt{16}=8$; c $5^2 = 10$; d $\frac{3}{4}=0{,}75$; e $2{,}1^2 = 4{,}41$.

2 Se consideră numerele reale a și b, astfel încât $a + b = 3$. Înmulțiți ambii membri ai egalității cu 3. Ce egalitate se obține?

3 Se consideră numerele reale a și b, astfel încât $a - b = 1$. Scrieți egalitățile ce se obțin pornind de la egalitatea dată, dacă se înmulțesc ambii membri ai egalității cu:
a 2; b 3; c 7; d -2; e -5; f -10.

4 Se consideră numerele reale a și b, astfel încât $2a + 3b = 7$. Scrieți egalitățile ce se obțin pornind de la egalitatea dată, dacă se înmulțesc ambii membri ai egalității cu:
a 4; b -1; c $2,5$; d $-1,2$; e $\frac{5}{6}$; f $-\frac{2}{3}$.

5 Se consideră numerele reale a și b, astfel încât $2a + 2b = 12$. Determinați:
a $a + b$; b $3a + 3b$; c $11a + 11b$; d $-a - b$; e $-4a - 4b$.

6 Se consideră numerele reale a, b și c, astfel încât $a + b = 3$, $b + c = 4$ și $c + a = 5$.
a Calculați valoarea expresiei $a + b + c$. b Determinați numerele a, b și c.

Indicație: a Se adună cele trei egalități.

7 Se consideră numerele reale $a=\sqrt{48}$, $b = 1,(6)$, $c=2\sqrt{12}$ și $d=\frac{5}{3}$.
a Arătați că $a = c$ și $b = d$.
b Fără a efectua calculele, stabiliți dacă următoarea egalitate este adevărată sau falsă: $a + b - 4 = c + d - 4$.

Consolidare

8 Se consideră egalitatea $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$. Scrieți trei egalități echivalente cu această egalitate.

Indicație: Se adună sau se înmulțesc ambii membri ai egalității cu același număr real nenul.

9 Se consideră egalitatea $0,(3)\sqrt{2}=\sqrt{\frac{2}{9}}$. Scrieți trei egalități echivalente cu această egalitate.

10 Precizați ce proprietăți ale egalității s-au aplicat pentru a obține echivalențele:
a $4(x + 3) = 20 \Leftrightarrow x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 2$;
b $5x - 6 = 7x + 2 \Leftrightarrow -6 = 2x + 2 \Leftrightarrow -8 = 2x \Leftrightarrow -4 = x \Leftrightarrow x = -4$;
c $x(3x-5)=(\sqrt{3}x-5)(\sqrt{3}x+5) \Leftrightarrow 3x^2-5x=3x^2-25 \Leftrightarrow -5x=-25 \Leftrightarrow x=5$;
d $-4x(x + 1) - x(x + 2) = x + 2 \Leftrightarrow -x = x + 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

11 Numerele reale a, b, c verifică relația $2a - 1,5b + 0,25c = 3,5$. Calculați valoarea expresiei $E=4a-3b+\frac{c}{2}$.

12 Numerele reale a, b, c verifică relația $\frac{a}{5}-\frac{b}{7}+\frac{c}{11}=3,14$. Calculați valoarea expresiei $E=3a-\frac{65}{91}\cdot b+\left(\frac{\sqrt{5c}}{\sqrt{11}}\right)^2-a:\frac{1}{2}$.

Aprofundare

13 Se știe că $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$. Arătați că $x + y = 3$.

14 Se știe că $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 0$. Calculați $(a + b)^{100} + b^{100}$.

15 Se știe că $(a - 1)^2 + (b - 2)^2 = -(c - 3)^2$. Arătați că $(a + b)^3 = c^3$.

16 Se consideră triunghiul ABC de laturi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Arătați că dacă $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$, atunci triunghiul este echilateral.

17 Se dau numerele reale a, b, c astfel încât $a + 3b = 7$ și $2b - 5c = 9$. Determinați:

a $a + 5b - 5c$; **b** $a + b + 5c$; **c** $2a + 6b$;
d $3a + 7b + 5c$; **e** $2a + 10b - 10c$; **f** $2a + 15c$.

18 Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 3$, astfel încât $a + b + 2c = 4$ și $3a - 2b + c = 7$. Arătați că:

a $4a - b + 3c = 11$; **b** $11a - 4b + 7c = 29$; **c** $a + c = 3$;
d $a - b = 2$; **e** $\frac{a+b+2c}{2a-3b-c} = \frac{4}{3}$; **f** $\frac{5a+12b+8c}{17a-3b+2c-12} = \frac{3}{4}$.

Probleme de șapte stele

19 Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x(x^2 - 2x + 5) = 10$. Arătați că $x = 2$.

20 Fie numerele reale x, y astfel încât $x(y^2 + 2) = y(x^2 + 2)$. Arătați că, dacă $x \neq y$, atunci $xy = 2$.

21 Fie numerele reale a, b, c, oricare două diferite între ele. Demonstrați că:

a $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$;

b $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$;

c $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$.

I.2 Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente

O ecuație de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numește *ecuație de gradul I cu o necunoscută*. Numerele reale a și b se numesc *coeficienți* (a este coeficientul necunoscutei, iar b se numește și termen liber), iar x se numește *necunoscută* sau *variabilă*.

Se numește *soluție* a ecuației $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziția $ax_0 + b = 0$ este adevărată.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează *mulțimea soluțiilor* ecuației date și se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea M (sau că se rezolvă în mulțimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M = \mathbb{R}$.

Exemple

1 Ecuația $2x - 6 = 0$ are soluția $x_0 = 3$, deoarece $2 \cdot 3 - 6 = 0$ și $3 \in \mathbb{R}$.

2 Ecuația $3x + 9 = 0$, $x \in \mathbb{N}$, nu are soluții, deoarece propoziția $3x_0 + 9 = 0$ este adevărată doar dacă $x_0 = -3$, iar $-3 \notin \mathbb{N}$. Se observă că ecuația $3x + 9 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$, are soluția $x_0 = -3$.

Pentru a rezolva o ecuație, adică pentru a afla soluțiile sale, putem folosi proprietățile relației de egalitate, obținând egalități echivalente. În general, vom încerca să ajungem la o egalitate de forma $x = a$, care este cea mai simplă ecuație și care are doar soluția $x_0 = a$.

Două ecuații definite pe aceeași mulțime se numesc *echivalente* dacă au aceleași soluții. În mod evident, două ecuații echivalente au aceeași mulțime a soluțiilor.

Pentru a obține ecuații echivalente cu o ecuație dată, putem aplica următoarele reguli:
- trecem termeni dintr-un membru în celălalt cu semn schimbat;
- adunăm/scădem același număr din ambii membri ai ecuației;
- înmulțim/împărțim ambii membri ai ecuației cu un factor nenul.

Pentru rezolvarea ecuației $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se parcurg următorii pași:
- scădem pe b din ambii membri ai ecuației și obținem $ax = -b$;
- cum $a \neq 0$, înmulțim ambii membrii cu $\frac{1}{a}$ și obținem $x = -\frac{b}{a}$;
- întrucât $-\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$, soluția ecuației este numărul $-\frac{b}{a}$ și scriem $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple: 1 $2x + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x = -18 \,|:2 \Leftrightarrow x = -9 \Rightarrow S = \{-9\}$.

2 $\sqrt{3}x - 12 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 12 \,|:\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3} \Rightarrow S = \{4\sqrt{3}\}$.

3 $(3-\sqrt{5})x - 4 = 0 \Leftrightarrow (3-\sqrt{5})x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3-\sqrt{5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} \Leftrightarrow x = \dfrac{4(3+\sqrt{5})}{4} \Leftrightarrow x = 3+\sqrt{5} \Leftrightarrow S = \{3+\sqrt{5}\}$.

Exersare

1 Precizați care dintre următoarele relații sunt ecuații:
a $x-4=0$;
b $y+1=0$;
c $a-4=0$;
d $2\cdot4+1=9$;
e $x-3<2$;
f $2x+5=-1$.

2 Completați tabelul, conform modelului:

Ecuația	$x+5=0$	$2x-3=0$	$3y=0$	$4a+1=0$	$-2+x=0$	$\sqrt{2}x+\sqrt{2}=0$
Necunoscuta	x	x	y	a	x	x
Coeficientul necunoscutei	1					
Termenul liber	5					

3 Scrieți ecuația $ax+b=0$ pentru:
a $a=2, b=3$;
b $a=3, b=-1$;
c $a=-1, b=1$;
d $a=1, b=0$;
e $a=2{,}3;\ b=1{,}3$;
f $a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{2}$;
g $a=\sqrt{3}, b=-1$;
f $a=\frac{\sqrt{5}}{2}, b=0$.

4 Dați două exemple de:
a ecuații cu coeficientul necunoscutei egal cu 4;
b ecuații cu termenul liber egal cu –1;
c ecuații cu coeficienții egali;
d ecuații cu coeficienții exprimați prin numere reale opuse.

5 Verificați dacă:
a numărul 2 este soluție a ecuației $2x-4=0$;
b numărul –1 este soluție a ecuației $3x-3=0$;
c numărul 2,5 este soluție a ecuației $3x-7{,}5=0$;
d numărul $\frac{1}{2}$ este soluție a ecuației $-4x+2=0$.

6 Precizați care dintre ecuațiile următoare admit soluția -3:
a $x+3=0$;
b $3x+9=0$;
c $-7x-21=0$;
d $-x+3=0$;
e $12x-4=0$;
f $|-5|\cdot x+15=0$;
g $(\sqrt{2}+1)x-3+2\sqrt{2}=0$;
h $-4x+12=0$;
i $\sqrt{2}x+\sqrt{18}=0$.

Rezolvare: Numărul real $x_0=-3$ este soluție pentru o ecuație dacă, înlocuind necunoscuta x cu –3 *în ecuație*, obținem o propoziție adevărată. Ca urmare:
b $3\cdot(-3)+9=0$ este propoziție adevărată, deci ecuația dată admite soluția $x_0=-3$;
e $12\cdot(-3)-4=0$ este propoziție falsă, deci ecuația nu admite soluția $x_0=-3$.

7 Arătați că ecuațiile următoare au soluția –2:
a $2x+4=0$;
b $-1+3x=4x+1$;
c $5x-3=x-11$;
d $10(x-3)+2=4(8x+4)$;
e $2{,}5x+2=3(1{,}5x+2)$;
f $3x+5+4x=-9$;
g $(5-\sqrt{7})x+10=\sqrt{28}$;
h $\frac{2x+7}{3}=1+\frac{x+2}{2}$;
i $\frac{2x+3}{x+3}=\frac{2x+5}{x+1}$.

8 Rezolvați ecuațiile, apoi faceți proba soluției găsite:
a $10x=40$;
b $-7x=21$;
c $16x=48$;
d $9x+27=0$;
e $-3x+15=0$;
f $3=-2x+7$;
g $22x+44=0$;
h $11x+29=95$;
i $-18+6x=6$;
j $-x+7=-23$;
k $4(x-7)=0$;
l $-3(x+6)=6$.

9 Rezolvați ecuațiile, apoi faceți proba soluției găsite:

a $-6+3x=0$; b $-3x+3=0$; c $-9x+18=0$;

d $5x-20=0$; e $\sqrt{5}x+\sqrt{20}=0$; f $\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$;

g $\sqrt{2}x-\sqrt{18}+2\sqrt{2}=0$; h $(5-\sqrt{7})x-5+\sqrt{7}=0$; i $x\sqrt{2}-\sqrt{3}=0$.

10 Rezolvați ecuațiile:

a $2x-7=13$; b $-7+6x=4x+15$; c $5x-11=x-3$;

d $2{,}5x-4{,}7=3(1{,}5x+2)$; e $3x-5+4x=18$; f $8x+20=3x$;

g $10(x-3)=4(6x+7)-2$; h $(2+\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}=0$; i $\sqrt{3}x+4=1-2\sqrt{3}x$.

11 Determinați soluțiile ecuațiilor:

a $7x+4+2(x-5)=8(x+1)$; b $2(x+3)-5(2x+1)=12x-19$;

c $3(2x+3)+2(3x+2)=9x+4$; d $5(x-2)-2x+3(x+1)=6+7x$;

e $-3x+5+6(-x+1)=-4(x+6)$; f $6(x+2)-2(2x+3)+4x=36$.

12 Stabiliți dacă următoarele ecuații sunt echivalente:

a $3-2x=-7$, $x\in\mathbb{R}$ și $11(x-4)=3^2+2$, $x\in\mathbb{R}$;

b $6+5x=2(-3+x)$, $x\in\mathbb{Z}$, și $x+18=2(-1-x)+8$, $x\in\mathbb{Z}$;

c $7x-5(x-1)=10x-3$, $x\in\mathbb{R}$, și $4x-3(2-x)=4$, $x\in\mathbb{R}$;

d $13x+41=5(2x+7)+3$, $x\in\mathbb{R}$, și $9(x-2)+14=-2(3-4x)+1$, $x\in\mathbb{R}$.

13 Rezolvați ecuațiile:

a $3(x+5)-6(x-2)=4(x+2)-5(x-4)+1$; b $2(2x+7)+3(x-1)=6(x-3)+18$;

c $15(x-1)+4(2-3x)=11-2(x+4)$; d $2x+5+3(3x-1)=8(1-7x)+2+3x$;

e $10(3-x)+6(x+3)=19+7(2x-1)$.

Consolidare

14 Rezolvați ecuațiile:

a $-13x+4=21+4x$; b $7x-16=16+5x$;

c $0{,}3x-0{,}6=0{,}1x+0{,}8$; d $x\cdot\sqrt{(-1)^2}+x\cdot\sqrt{(-2)^2}+x\cdot\sqrt{(-3)^2}=6$;

e $(4x-3)\cdot(-3)=6x+27$; f $(1^2-x)+(2^2-x)+(3^3-x)=50$;

g $5(x-3)+11=2x+2$; h $11(1-x)+7x=15$;

i $6(x+2)-8=3x+14$; j $7x-9=2(3x+1)$;

k $5(x-0{,}4)=19-2x$; l $23x-41=7(x+3)+2$;

m $44-13x=100-2(8x-5)$; n $3(x-2)+2(x-3)=4x-12$.

15 Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care enunțurile de mai jos devin propoziții adevărate:

a Ecuația $2x+a=0$ are soluția -5. b Ecuația $-ax+12=0$ are soluția 1.

c Ecuația $ax+a+1=0$ are soluția 2. d Ecuația $3x-a+2=0$ are soluția $\frac{1}{3}$.

e Ecuația $a^2x+9=0$ are soluția -1. f Ecuația $a^2x-32=0$ are soluția 4.

16 Determinați numărul real m pentru care:

a ecuația $2x+m=4x+3$ are soluția -2;

b ecuația $2mx+5(x-1)=7x+1-3m$ are soluția 1;

c ecuația $m(x+2)+3(x-1)=mx-3$ are soluția 0;

d ecuația $2x-m(x+3)=7mx+12$ are soluția 5;

e ecuația $-3x+4(mx-1)=6x+2-7(m+2)$ are soluția 3;

f ecuația $3(m-1)(x+2)-2(2m-1)(2x+1)=7x+3mx-5$ are soluția -3.

17 Determinați valorile $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

a $-2-4(3-x)=4-3(x-1)$ și $m-x(m+1)=1$;

b $2(3x-4)-4m=x(m+1)$ și $x-5(x-1)=x\cdot(-1)^{2011}$;

c $3-x=2(x-5m)+m$ și $2(3x-2m)+3=5(x+1)$;

d $x-3(2x-5)=5(x-1)$ și $m(x-1)=m$;

e $mx-1+2(-mx+1)=x-m$ și $3x+4-2(x-1)=4(x-3)+3(6-x)$.

18 Rezolvați următoarele ecuații:

a $5(3x-2)+3x-6(8x-13)=16(9-2x)-78$;

b $2(3x+4)-5(2x-3)-2=7(2x-4)+2(8-5x)+3x$;

c $2(3x-4)+5(6x-7)-3x=9(x+10)+11(x+12)+8$;

d $3(6x-5)-2(4x+3)+13=-2(-4x+9)+2x-5(3x-2)$.

19 Determinați soluțiile ecuațiilor:

a $6x+3+2(x-4)=7(x+2)$;

b $2(2x+1)-3(3x-5)=4x-19$;

c $4(3x-5)+3(4x-7)=10x-13$;

d $5(2x-1)-3x+6(x+2)=15+9x$;

e $-2x+4+5(-x+2)=-3(2x-7)$;

f $5(2x+1)-2(3x+2)+3x=13-5x$.

20 Rezolvați următoarele ecuații:

a $5(2x-1)+3(x-1)-6(7x-12)=15(8-x)-84$;

b $2(3x+4)-3x-2=6(2x-3)+2(3-4x)+5(2x-3)$;

c $4(9x-4)+2(2x-7)-7x=3(3x-10)+5(x-22)-4$;

d $2(5x-4)-(3x+2)+11=-3(-5x+10)+3x-6(4x-3)$.

21 Rezolvați următoarele ecuații:

a $\frac{2x-4}{7}=\frac{2-x}{3}$;

b $\frac{2x+5}{3}=\frac{x-5}{4}$;

c $\frac{1}{2}+\frac{2x-5}{4}=x$;

d $\frac{7x-5}{3}-\frac{4x+1}{2}=0$;

e $1+\frac{3x-2}{4}=\frac{2x+5}{2}$;

f $\frac{5x-7}{8}-\frac{x-1}{4}=\frac{11-x}{2}$;

g $\frac{x}{5}-\frac{3-x}{10}=\frac{x+3}{2}$;

h $\frac{4x-6}{12}=\frac{x+1}{4}-\frac{x}{6}$;

i $\frac{2x+3}{7}-\frac{x}{2}=\frac{3x-6}{14}$.

22 Aflați soluțiile ecuațiilor:

a $\frac{x+3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2x+7}{10}=1$;

b $\frac{11x-4}{4}+\frac{1-x}{2}=6-x$;

c $\frac{x-4}{6}-\frac{x}{5}+\frac{3}{2}=\frac{2x-1}{10}$;

d $\frac{x+2}{3}-\frac{2x+3}{4}+\frac{5}{3}=1\frac{5}{6}+\frac{7x-11}{12}$;

e $\frac{1-x}{3}+\frac{1+3x}{4}=2x-1$;

f $\frac{7x-12}{5}+\frac{19-6x}{7}=\frac{x}{2}+\frac{x-1}{5}$.

23 Rezolvați următoarele ecuații:

a $\frac{x+3}{4}+\frac{2x+1}{3}=\frac{x-3}{6}+\frac{3x+1}{12}$;

b $\frac{5x-1}{8}-\frac{x+2}{2}+3=\frac{3x-7}{4}-\frac{x}{2}$;

c $\frac{3x-7}{20}-\frac{1}{10}=\frac{2-x}{5}+\frac{x-3}{4}$;

d $\frac{11}{16}+\frac{x-3}{4}=\frac{3-2x}{8}+\frac{1}{2}$;

e $\frac{2}{5}(x-3)+\frac{4x+6}{15}=\frac{2x+7}{10}-1\frac{1}{30}$;

f $\frac{4x-3}{14}-\frac{2x+3}{7}=\frac{x-1}{2}+\frac{5}{14}$.

24 Rezolvați ecuațiile:

a $\frac{x}{2}+\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{4}+\frac{4x-3}{5}=\frac{x}{5}+\frac{2x+1}{4}+\frac{3x+2}{3}+\frac{4x+3}{2}$;

b $\frac{2x-3}{4}+\frac{3x+4}{5}+3\cdot\frac{x+1}{2}=2\cdot\frac{3x+2}{5}+x+\frac{3-7x}{4}$;

c $\frac{3x+11}{4}+2\cdot\left(\frac{2x-7}{5}+\frac{3x-1}{2}\right)=\frac{9(x+4)}{10}-\frac{2(x+3)}{5}+\frac{5x+1}{10}$;

d $\frac{3x+8}{12}-\frac{2x+3}{15}+\frac{1}{6}=2\left(\frac{x+5}{3}-\frac{9+2x}{5}\right)+\frac{1}{5}-\frac{3x+2}{20}$;

e $\frac{x-5}{2}-\frac{x-4}{3}+\frac{x-3}{4}=\frac{5-x}{4}+\frac{4-x}{3}+\frac{3-x}{2}$; f $1-x+\frac{2-x}{2}+\frac{3-x}{3}=\frac{4+x}{4}+\frac{5+x}{5}+\frac{6-x}{6}$.

25 Determinați soluțiile ecuațiilor:

a $x\sqrt{2}+x\sqrt{8}+x\sqrt{32}=\sqrt{4}+\sqrt{16}+\sqrt{64}$; b $\sqrt{5}(x+4)+2\sqrt{5}(x-2)=\sqrt{15}$;

c $x(2\sqrt{2}-\sqrt{3})+2x(\sqrt{3}-\sqrt{2})=6+\sqrt{3}$; d $x\sqrt{2}+2x(\sqrt{8}-3)=20-6x$;

e $2x(2+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)(x+2)=2x+6$; f $2(x+\sqrt{2}-\sqrt{5})+3=x(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

Aprofundare

26 Determinați soluțiile ecuațiilor:

a $\frac{3x+10}{4}-\frac{7x+5}{2}=2\left[\frac{9x-4}{3}-3\left(\frac{x}{2}+\frac{7x-6}{4}\right)\right]$;

b $\frac{x+1}{2}-\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2x-5}{3}-\frac{x+3}{9}\right)\right]=\frac{2x-7}{3}-\frac{3x-5}{2}$;

c $2\cdot\left[2x-5\cdot\left(\frac{3x+1}{4}-\frac{2x+1}{3}\right)\right]=(x+1)\cdot\left(\frac{x+1}{2}-\frac{2x+1}{4}\right)$;

d $3\cdot\left\{1+\frac{2}{3}\cdot\left[2+3\cdot\left(2x-\frac{5x+1}{3}\right)\right]-\frac{x}{2}\right\}=\frac{4x+25}{6}$;

e $\left[x-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2x+3}{4}-\frac{3x-2}{5}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}=\frac{x+5}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x-3}{5}+\frac{13-x}{2}\right)$;

f $2x-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{6x-7}{4}-\frac{5x-2}{3}\right)=\frac{3x}{2}-\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]$.

27 Rezolvați ecuațiile:

a $2x(4+2\sqrt{3})-\sqrt{3}(5x+3\sqrt{3})=2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-x)+2(4x-9)$;

b $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})\cdot x+2x(\sqrt{5}+\sqrt{3})=\sqrt{125}+2x\sqrt{5}$;

c $2-\sqrt{3}+2x(2-\sqrt{3})=4(x-\sqrt{3})+\sqrt{27}$;

d $x\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+x(1+\sqrt{2})+x(3+2\sqrt{2})=5(3+\sqrt{2})-2(3+2\sqrt{2})$;

e $\sqrt{5}-2+x(\sqrt{5}-2)=x(2+\sqrt{5})-(\sqrt{5}+2)$;

f $\sqrt{3}(\sqrt{2}x+1)+\sqrt{2}(\sqrt{3}x+1)=2x(\sqrt{6}+1)-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

28 Rezolvați ecuațiile:

a $|x|=1$; b $|x|=8$; c $|-x|=2$; d $|x|=0$; e $|x|=-1$;

f $|-x|=-1$; g $|x|=-2$; h $-|x|=-3$; i $-|x|=5$.

29 Rezolvați ecuațiile:

a $|x-2|=5$; b $|x+3|=3$; c $|-x+2|=1$; d $|2x+4|=8$; e $|3x-7|=5$;

f $|-x+4|=11$; g $|-2x-6|=12$; h $|12-x|=-24$; i $-|5x+10|=-20$.

30 Rezolvați ecuațiile:

a $\left|\frac{x-2}{3}\right|=4$; b $\left|\frac{x+1}{5}\right|=1$; c $\left|\frac{2x+1}{3}\right|=5$; d $\left|\frac{x}{2}+1\right|=\frac{3}{2}$; e $\left|\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right|=3$;

f $\left|\frac{1-x}{3}+2\right|=\frac{1}{6}$; g $\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{8}}{3}\right|=\sqrt{2}$; h $\left|\frac{\sqrt{27}x}{3}+\sqrt{12}\right|=2\sqrt{3}$; i $\left|\sqrt{5}+\frac{x}{\sqrt{5}}\right|=\sqrt{45}$.

31 Rezolvați ecuațiile:

a $||x-2|-1|=1$; b $||x-5|-8|=4$; c $||2x+3|+1|=5$; d $||6-x|+2|=4$; e $||-3x-2|-2|=7$;

f $|6-|x-2||=3$; g $|2+|2x-3||=4$; h $|13-|2x+1||=10$; i $|9-|-2-3x||=1$.

32 Rezolvați ecuațiile: a $|x-2|=3$; b $||x-2|-2|=3$; c $|||x-2|-2|-2|=3$.

33 Rezolvați ecuațiile:

a $(x-1)+2(x-2)+3(x-3)+4(x-4)=100$; b $(x-1)+(x-2)+(x-3)+\ldots+(x-11)=0$;

c $x+2x+3x+\ldots+10x=550$; d $(1-x)+(1-2x)+(1-3x)+\ldots+(1-10x)=65$.

34 Rezolvați următoarele ecuații:

a $1\cdot x+2\cdot x+3\cdot x+\ldots+2020\cdot x=1010\cdot 2021$;

b $1\cdot x-2\cdot x+3\cdot x-\ldots-2020x+2021x=2022$;

c $x+1+\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{x+3}{3}+\ldots+\dfrac{x+2020}{2020}+\dfrac{x+2021}{2021}=2021$;

d $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{6}+\dfrac{x}{12}+\ldots+\dfrac{x}{2019\cdot 2020}+\dfrac{x}{2020\cdot 2021}=2020$.

35 Rezolvați ecuațiile:

a $0{,}1x+0{,}01x+0{,}001x+0{,}0001x=2^2-0{,}667$;

b $x+2x+3x+\ldots+20x=100x-[(-1)^1+(-2)^2+(-3)^3+(-4)^4]$;

c $\dfrac{x+1}{1\cdot 3}+\dfrac{x+1}{3\cdot 5}+\dfrac{x+1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{x+1}{2019\cdot 2021}=\dfrac{1010}{2021}$;

d $\dfrac{x}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{x}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{x}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}=4004$.

36 Determinați pentru ce valori ale numărului real m ecuațiile $2mx+m+2=0$ și $2mx+2m+1=0$ au aceeași soluție.

37 Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Determinați valorile numărului real nenul m pentru care ecuațiile $(2a+m)x=bx+m$ și $(2b+m)x=ax-m$ sunt echivalente.

38 Aflați soluțiile următoarelor ecuații:

a $\dfrac{x+a}{a}-\dfrac{x+b}{b}=1$, unde $a,b\in\mathbb{R},\ a,b\neq 0$; b $a^2b-\dfrac{a+x}{b}=ab^2-\dfrac{b+x}{a}$, unde $a,b\in\mathbb{R},\ a,b\neq 0$;

c $\dfrac{x+a}{a-b}+\dfrac{x+a}{a+b}=\dfrac{x+b}{a-b}+\dfrac{2(x+b)}{a+b}$, unde $a,b\in\mathbb{R},\ a\neq\pm b$;

d $\dfrac{x-1}{a+b-c}=\dfrac{x+1}{a-b+c}$, unde $a,b,c>0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi.

Probleme de șapte stele

39 Fie $a,b,c>0$. Rezolvați ecuația $\dfrac{x-a-b}{ab}+\dfrac{x-b-c}{bc}+\dfrac{x-c-a}{ca}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$.

40 Fie $a, b, c, d\in\mathbb{R}^*$. Demonstrați că ecuațiile $ax+b=0$ și $cx+d=0$ sunt echivalente dacă și numai dacă $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

41 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația:

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+x}=\frac{400}{201}.$$

42 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\sqrt{1}+\sqrt{1+3}+\sqrt{1+3+5}+\ldots+\sqrt{1+3+5+\ldots+(2x+1)}=201\cdot 10055.$$

Teste de evaluare

Testul 1

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a $2x+1=-5$; -3 b $0{,}5x-1{,}3=2{,}7$; 8 c $\sqrt{3}x=2\sqrt{6}$. $2\sqrt{2}$

(2p) 2 Rezolvați ecuația $2(x+1)-3(2-x)=x+3(2x+1)$. $-\frac{7}{2}$

(1p) 3 Arătați că $a=-1$ este soluție a ecuației $3+2x-(x-8)=-3x+7$. (adevărat)

(1p) 4 Rezolvați ecuația $3(2x-1)+3(x+1)-2(x-5)=15(8-x)$. 5

(1p) 5 Determinați valorile numărului real m pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$$-2x+3(x-3)+\frac{x-1}{2}=\frac{x+1}{3}-\frac{x+3}{6} \text{ și } mx-10+3x=2(m-x)+5.$$

(1p) 6 Rezolvați ecuația $|3x+5|=8$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a $5x-2=-7$; -1 b $4-2{,}3x=-0{,}6$; c $\sqrt{2}+2x=\sqrt{18}$.

(2p) 2 Rezolvați ecuația $3(x-3)-2(1-x)=2x-2(x+4)+7$.

(1p) 3 Arătați că $a=-2$ este soluție a ecuației $(-2x-1)-4x+6=-2x^2+9-8x$.

(1p) 4 Rezolvați ecuația $\frac{4x-5}{14}=\frac{3}{14}+\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{7}$.

(1p) 5 Determinați valorile numărului real m pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$$\frac{2x-1}{3}+3x-4=\frac{1-2x}{4}-\frac{5}{12} \text{ și } 2+mx-3x=x(3m-2)+4.$$

(1p) 6 Rezolvați ecuația $\left|\frac{3x+1}{2}\right|=10$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a $3x+4=10$; b $0{,}2x+3{,}5=-0{,}7$; c $\sqrt{5}x+1=\sqrt{20}+1$.

(2p) 2 Rezolvați ecuația $2(2x+1)-3(3x-5)=4(x-5)-8$.

(1p) 3 Arătați că $a=3$ este soluție a ecuației $\frac{5x+1}{2}+\frac{x+1}{4}=\sqrt{5}x-\sqrt{45}+\sqrt{81}$.

(1p) 4 Rezolvați ecuația $\frac{4x-12}{5}+\frac{17-6x}{7}=\frac{x}{2}+\frac{-2x-1}{5}-\frac{2}{7}$.

(1p) 5 Determinați valorile numărului real m pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$1+\frac{3x+1}{4}=2x+\frac{x-1}{3}$ și $mx+2x-1=x(2m-3)+m+2$.

(1p) 6 Rezolvați ecuația $||3x+2|+1|=6$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P

Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: ...Ivan Roxana...

Clasa a VII-a: B

Tema I.2. Ecuații de forma $ax+b=0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

Ecuații echivalente

(1,5p) 1 Completați pe fișă spațiile punctate cu răspunsul corect.

a Soluția ecuației $x+2=10$ este ...8... .

b Soluția ecuației $3x+4=-5$ este ...−3... .

c Soluția ecuației $\frac{x}{6}=\frac{2}{3}$ este ...4... .

$3x+4=-5$
$3x=-5-4$
$3x=-9$
$x=-9:3$
$x=-3$

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

a Mulțimea soluțiilor ecuației $3(2x+1)-3x=0$ este $S=\{1\}$. A F

b 0 este soluție a ecuației $\frac{x-2}{2}=\frac{x-3}{3}$. A F

c Ecuația $3(x+1)-4x=1-x$ nu are soluții reale. A F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Soluția ecuației $2x=(3+1)^2$	1 2
b Soluția ecuației $3(x+2)=27$	2 0
c Soluția ecuației $2x+3=3x+2$	3 8
d Soluția ecuației $\frac{x+2}{4}=\frac{x+3}{5}$	4 7
	5 1.

ex. 2

a) $3(2x+1)-3x=0$
$6x+3-3x=0$
$3x+3=0$
$3x=0-3$
$x=-3:3$
$\boxed{x=-1}$

b) $\frac{x-2}{2}=\frac{x-3}{3} \Rightarrow 3(x-2)=2(x-3)$
$3x-6=2x-6$
$1x-6=-6$
$1x=-6+6$
$1x=0$
$\boxed{x=0}$

c) $3(x+1)-4x=1-x$
$3x+3-4x=1-1x$
$1x+1x+3=1$
$2x+3=1$
$2x=1-3$
$2x=-2$
$x=-2:2$
$\boxed{x=-1}$

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2 p) **4** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale următoarele ecuații:

a $2(x+3)-3(x-1)=3x-2(2+x)$;

b $|2x-7|=9$.

a) $2x+6-3x+3=3x-4+2x$

$-1x+6-3=3x-4+2x$

$-1x+3=3x-4+2x$

$-1x-3x+2x+3=-4$

$-6x+3=-4$

$-6x=-4-3$

$-6x=-7$

$x=-7:(-6)$

$x=$

gresit

R: $x=\frac{13}{2}$

b)

(2 p) **5** Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a $\frac{2(x-2)}{5}+\frac{4x+14}{15}=\frac{2}{5}+\frac{2x+7}{10}-\frac{1}{2}$;

b $\frac{\sqrt{2}x+3}{3}-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{3x}{\sqrt{18}}=\frac{9-\sqrt{2}x}{6}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

I.3 Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

Ecuația de gradul întâi cu două necunoscute

Definiție. O ecuație de forma $ax+by+c=0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a^2+b^2 \neq 0$, și $x, y \in \mathbb{R}$, se numește *ecuație de gradul I cu două necunoscute.*

Exemple: 1 $2x+5y+8=0$, unde $x,y \in \mathbb{R}$.

2 $-1{,}2x+y-0{,}1=0$, unde $x,y \in \mathbb{R}$.

3 $\sqrt{3}x+\frac{1}{2}y-\sqrt{5}=0$, unde $x,y \in \mathbb{R}$.

O soluție a unei astfel de ecuații este o pereche de numere reale (α, β) cu proprietatea că $a\alpha+b\beta+c=0$. (1) *A rezolva* o ecuație de tipul $ax+by+c=0$ înseamnă *a determina mulțimea S a soluțiilor acelei ecuații.*

Dacă $b \neq 0$, atunci egalitatea (1) devine $\beta=-\frac{a}{b}\cdot\alpha-\frac{c}{b}$. Cum $\alpha \in \mathbb{R}$ este oarecare, deducem că o ecuație de gradul I cu două necunoscute are *o infinitate de soluții.*

Obținem $S=\left\{\left(\alpha,-\frac{a}{b}\cdot\alpha-\frac{c}{b}\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

Un *sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute* are forma

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}, \text{ unde } a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{R} \text{ și } x,y \in \mathbb{R}. \ (1)$$

O pereche de numere reale (x_0, y_0) se numește *soluție a sistemului* (1) dacă este soluție pentru fiecare ecuație a sistemului. *A rezolva* sistemul (1) înseamnă a determina mulțimea *S* a soluțiilor sistemului.

Două sisteme se numesc *echivalente* dacă au aceeași mulțime de soluții.

Metodele uzuale de rezolvare a sistemelor de forma (1) sunt: metoda *reducerii* și metoda *substituției*.

Exersare

1 Precizați care dintre următoarele relații sunt ecuații cu două necunoscute:

a $2x-4y+1=0$, $x,y \in \mathbb{R}$;

b $-x-y+7=0$, $x,y \in \mathbb{R}$;

c $3a+b-2=0$, $a,b \in \mathbb{R}$;

d $2{,}5a-4{,}7b=0$, $a,b \in \mathbb{R}$;

e $2x-15=4$, $x \in \mathbb{R}$;

f $\sqrt{2}-\sqrt{5}y+1=0$, $y \in \mathbb{R}$.

2 Dați trei exemple de ecuații cu două necunoscute.

3 Pentru ecuațiile de forma $ax+by+c=0$, unde $a,b,c,x,y \in \mathbb{R}$, completați tabelul, conform modelului:

Ecuația	a	b	c
$x-1{,}2y+\sqrt{3}=0$	1	$-1{,}2$	$\sqrt{3}$
$3x+4y+1=0$			
$5x+2y-8=0$			
$1{,}3x+y+1=0$			
$\sqrt{2}x-y=0$			

4 Pentru ecuațiile de forma $ax+by+c=0$, unde $a,b,c,x,y \in \mathbb{R}$, completați tabelul, conform modelului:

a	b	c	Ecuația
2	1,3	-1	$2x+1{,}3y-1=0$
4	-2	6	
-1	-3	0	
4,1	0,6	-2	
$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	3	

5 Verificați dacă perechea $(2;1)$ este soluție a ecuației:

a $x-y-1=0$, $x,y \in \mathbb{R}$; b $-2x-y+4=0$, $x,y \in \mathbb{R}$;

c $2a+b-5=0$, $a,b \in \mathbb{R}$; d $3{,}5a-6b=0$, $a,b \in \mathbb{R}$.

6 Verificați dacă ecuația $x-2y-3=0$, $x,y \in \mathbb{R}$, are ca soluție perechea de numere:

a $(3;0)$; b $(1;1)$; c $(-1;2)$; d $(5;1)$; e $(-3;-3)$.

7 Se consideră ecuația $x+y-2=0$.
a Scrieți două perechi de numere reale care să fie soluții ale ecuației date.
b Scrieți două perechi de numere reale care să nu fie soluții ale ecuației date.

8 Se consideră ecuația $3x+2y+5=0$.
a Scrieți două perechi de numere reale care să fie soluții ale ecuației date.
b Scrieți două perechi de numere reale care să nu fie soluții ale ecuației date.

9 Dați două exemple de sisteme de două ecuații cu două necunoscute.

10 Verificați dacă perechea $(1;-2)$ este soluție a sistemului:

a $\begin{cases} x-y=3 \\ 4x+y=2 \end{cases}$; b $\begin{cases} x+y=3 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$; c $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$; d $\begin{cases} 4x-3y=10 \\ -x+5y=-11 \end{cases}$.

11 Verificați dacă perechea $(2;-2)$ este soluție a sistemului:

a $\begin{cases} 4x+3=5-3y \\ x-y=0 \end{cases}$; b $\begin{cases} 3x+3y=0 \\ 5x-y=12 \end{cases}$; c $\begin{cases} 5x+y=7 \\ 3x-y=8 \end{cases}$; d $\begin{cases} 7x-y=16 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$.

12 Rezolvați prin metoda substituției următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+y=7 \end{cases}$; b $\begin{cases} x+y=6 \\ x+4y=21 \end{cases}$; c $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ x-y=0 \end{cases}$; d $\begin{cases} 2x+y=12 \\ x-3y=-1 \end{cases}$.

13 Rezolvați prin metoda substituției următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$; b $\begin{cases} -x+y=4 \\ 5x+2y=8 \end{cases}$; c $\begin{cases} -3x+4y=-6 \\ 2x+y=4 \end{cases}$; d $\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ 3x+y=12 \end{cases}$.

14 Rezolvați prin metoda reducerii următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$; b $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$; c $\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x+y=11 \end{cases}$; d $\begin{cases} -x+2y=4 \\ x+3y=16 \end{cases}$.

15 Rezolvați prin metoda reducerii următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$; b $\begin{cases} 3x+4y=6 \\ x-4y=-14 \end{cases}$; c $\begin{cases} 4x+y=-5 \\ 4x-2y=-2 \end{cases}$; d $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 3x-4y=-6 \end{cases}$.

Consolidare

16 Rezolvați prin metoda substituției următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} 4x+2y=2 \\ 3x+y=0 \end{cases}$; b $\begin{cases} -x+5y=-8 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$; c $\begin{cases} 3x-y=13 \\ -x+5y=-9 \end{cases}$;

d $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 4x-y=-5 \end{cases}$; e $\begin{cases} 4x+5y=-12 \\ x+3y=-10 \end{cases}$; f $\begin{cases} 6x+y=-11 \\ x+4y=-21 \end{cases}$.

17 Rezolvați prin metoda reducerii următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} x+2y=10 \\ 3x+2y=18 \end{cases}$; b $\begin{cases} 3x+5y=-8 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$; c $\begin{cases} 2x+7y=3 \\ 4x+3y=-5 \end{cases}$;

d $\begin{cases} 5x+6y=3 \\ 4x-2y=-18 \end{cases}$; e $\begin{cases} -8x+3y=-16 \\ 2x+5y=4 \end{cases}$; f $\begin{cases} 5x-9y=37 \\ 2x+3y=-5 \end{cases}$.

18 Stabiliți care dintre următoarele sisteme de ecuații sunt echivalente:

a $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$; b $\begin{cases} 3x+2y=14 \\ -x+4y=14 \end{cases}$; c $\begin{cases} 5x+y=14 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$; d $\begin{cases} -2x+y=1 \\ x-2y=-5 \end{cases}$.

19 Stabiliți care dintre următoarele sisteme de ecuații sunt echivalente:

a $\begin{cases} 3x+y=-11 \\ x-4y=5 \end{cases}$; b $\begin{cases} x+7y=3 \\ 5x-2y=-22 \end{cases}$; c $\begin{cases} 4x+2y=-16 \\ x+5y=-13 \end{cases}$; d $\begin{cases} -3x+3y=15 \\ 2x+3y=-5 \end{cases}$.

20 Rezolvați prin metoda substituției următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} 2x+3y=5+2y \\ 4x+2y=7+x \end{cases}$; b $\begin{cases} 3(x-1)+y=-5 \\ 2x+2(y+1)=6 \end{cases}$; c $\begin{cases} x+2=16-4y \\ -3x=4y-34 \end{cases}$;

d $\begin{cases} 4(x+5)-2=5(y+3) \\ -x+2(y+4)=11 \end{cases}$; e $\begin{cases} 2(x+4)=-3(y-5) \\ x=2(y+1)-16 \end{cases}$; f $\begin{cases} 2y=4-3x \\ -3x=y+1 \end{cases}$.

21 Rezolvați prin metoda reducerii următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} 3(x+2)+2y=y-5 \\ 2x+2(y-6)=3x-6 \end{cases}$; b $\begin{cases} 3x-2(x+y)=6 \\ 2(x-y)+4y=0 \end{cases}$; c $\begin{cases} 3(x+3)=2(y+5) \\ 5(x+1)=4(y+1) \end{cases}$;

d $\begin{cases} 6(x-4)+2y=3(y-4) \\ 4(x+2y)=5(y+6) \end{cases}$; e $\begin{cases} -3(x+y)-8=y+2 \\ 2(x+4)-2=-3y \end{cases}$; f $\begin{cases} 5(x-4)+8=9y+10 \\ 4(y+2)+7=3x-1 \end{cases}$.

22 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} 4(x-2)+5y=10 \\ 5(x+3)-2y=54 \end{cases}$; b $\begin{cases} 3(x-4)+1=4y \\ 4(x+2)+2y=-14 \end{cases}$; c $\begin{cases} 5x+8=3(5-y) \\ 4(x+2)=2(y-2) \end{cases}$;

d $\begin{cases} 2(2x-1)+3y=-11 \\ 4x+3(1-3y)=30 \end{cases}$; e $\begin{cases} 2(x+2y)-8=x+2 \\ 3(1-2x)-4y=-17 \end{cases}$; f $\begin{cases} 3(2x-y)=x-y \\ x+5y=4(x+y)-1 \end{cases}$.

23 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3} \\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{y+1}{7} \end{cases}$; b $\begin{cases} \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2} \\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{2} \end{cases}$; c $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2} \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{8} \end{cases}$;

d $\begin{cases} \dfrac{4-x}{5}=\dfrac{y+12}{10} \\ \dfrac{y+1}{3}=\dfrac{-x}{6} \end{cases}$; e $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1=\dfrac{y+2}{2} \\ 2x+3y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$; f $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+y=\dfrac{y}{3} \\ 4x+6y=1 \end{cases}$.

24 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} \dfrac{3x}{5}+\dfrac{y}{2}=2 \\ -7x+4y=-43 \end{cases}$; b $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+3y=1 \\ -x-2y=-4 \end{cases}$; c $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{2}y=-3 \\ x+4y=-5 \end{cases}$;

d $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=4 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$; e $\begin{cases} -\dfrac{2x}{5}+y=0 \\ 3x-\dfrac{5y}{2}=10 \end{cases}$; f $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{3}=-4 \\ 2x-\dfrac{2y}{3}=0 \end{cases}$.

25 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+3y=7 \\ \dfrac{2x-y}{4}+4y=8 \end{cases}$; b $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{5}=2y+3 \\ \dfrac{3x+2y}{7}=x-2 \end{cases}$; c $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{3}=4 \\ \dfrac{x-y}{2}=2y-3 \end{cases}$;

d $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+8}{5} \\ \dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-1}{4} \end{cases}$; e $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7}+\dfrac{y+4}{4}=2 \\ \dfrac{x-5}{3}-\dfrac{y-6}{2}=3 \end{cases}$; f $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y-2x}{10} \\ \dfrac{x-2y}{7}=\dfrac{y-10}{2} \end{cases}$.

Aprofundare

26 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} 2(x+2y)-3(x+3y)=7 \\ 3(2x+y)-2(3x-2y)=-14 \end{cases}$; b $\begin{cases} 5(3y-x)-3(2x+5y)=-22 \\ 4(5x+3y)+2(x+6y)=44 \end{cases}$;

c $\begin{cases} 4(x+3y)-2(2x-4y)=5(y+3) \\ 7(-x+2y)+3(y+2)=5(5-x) \end{cases}$; d $\begin{cases} -2(-x+4y)+3(2x-5y)=3(x-11) \\ 5(-y-x)+4(x-1)=3(x+1)-4 \end{cases}$.

27 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} 3(x+y+1)-2(x-5-y)=24 \\ 5(-2x-3y+4)+4(1+3x+2y)=12 \end{cases}$; b $\begin{cases} 2(1-x-y)-4(2x-y)=-34 \\ 7(2x+y+3)+5(x+2y+1)=32 \end{cases}$;

c $\begin{cases} 13x-6(4x-7y+5)=5x-8(y+5)-4 \\ 9(y-3x)-6(y+2)=3-10(x+8) \end{cases}$; d $\begin{cases} 6(x+3-y)-7(-x+1)=11(x+3) \\ 15(2-x-3y)+4(2+3y)=4+5x \end{cases}$.

28 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} x+3[3x+2(y-2)]=-8 \\ 3x-2[4y+5(x-3)]=31 \end{cases}$; b $\begin{cases} y+5[3x-2(y-1)]=15(3-y)-2 \\ 4x-3[5(2y+3)+4x]=4y-1 \end{cases}$;

c $\begin{cases} 4[1-2(x+3y)]+3x=10(x-1)-2y \\ 3[2+3(x-1)]-2[3(y-2)]=7(x-1) \end{cases}$; d $\begin{cases} 2[1-3(2x+5y)]-6(y-3)=y-7x \\ 24+3[x+4y-3(3x-2y)]=-18x \end{cases}$.

29 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}2y=2 \\ 1{,}5x-2{,}2y=-8 \end{cases}$; b $\begin{cases} 0{,}3x-0{,}6y=-1{,}5 \\ 1{,}4x+2{,}5y=8{,}9 \end{cases}$; c $\begin{cases} 0{,}(3)x+0{,}(2)y=4 \\ -1{,}(3)x+y=1 \end{cases}$;

d $\begin{cases} 0{,}4x-\dfrac{2}{3}y=-0{,}8 \\ 0{,}1(6)x+2y=3{,}08(3) \end{cases}$; e $\begin{cases} 2{,}3x-3{,}2y=5{,}5 \\ 2{,}(3)x-3{,}(2)y=5{,}(5) \end{cases}$; f $\begin{cases} 0{,}5(x+y)=0{,}75(x-y) \\ \dfrac{3}{5}x+3y=x+y \end{cases}$.

30 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} x+\sqrt{2}y=3 \\ 4x-2\sqrt{2}y=12 \end{cases}$; b $\begin{cases} \sqrt{3}x+y=1-2\sqrt{3} \\ \sqrt{12}x-2y=-\sqrt{48}-2 \end{cases}$; c $\begin{cases} \sqrt{5}x+5y=-25 \\ \sqrt{20}x-3y=15 \end{cases}$;

d $\begin{cases} \sqrt{2}x+3y=8 \\ -\sqrt{50}x+6y=2 \end{cases}$; e $\begin{cases} \dfrac{6}{\sqrt{3}}x-5y=11 \\ 1{,}(3)\sqrt{3}x+4y=0 \end{cases}$; f $\begin{cases} 3x+\sqrt{24}y=6 \\ 4x-\sqrt{54}y=-26 \end{cases}$.

31 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} \sqrt{2}x+(\sqrt{3}+2)y=2(y+2)+1 \\ (\sqrt{8}+2)x-\sqrt{12}y=2(2+x)-6 \end{cases}$; b $\begin{cases} (\sqrt{20}+4)x+\sqrt{27}y=4(x+1)-3 \\ \sqrt{80}x-(\sqrt{48}-5)y=5(6+y)+2 \end{cases}$;

c $\begin{cases} \sqrt{54}x+(\sqrt{3}-2)y=2(\sqrt{3}+3y+1) \\ (2\sqrt{24}-3)x+4y=2+3(10-x) \end{cases}$; d $\begin{cases} x(2\sqrt{28}-5)+6y=4(14-y) \\ \sqrt{63}x+y(\sqrt{112}-1)=\sqrt{7}(5x-1) \end{cases}$.

32 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} \left|\sqrt{2}-3\right|x+\left|\sqrt{3}-1\right|y=x(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}y \\ \left|\sqrt{2}-2\right|x-\left|\sqrt{3}-3\right|y=\sqrt{3}y-\sqrt{2}x-4 \end{cases}$; b $\begin{cases} \left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right|x+\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|y=2 \\ \left|\sqrt{27}-3\sqrt{5}\right|x-\left|4\sqrt{3}+\sqrt{20}\right|y=3-5\sqrt{15} \end{cases}$.

33 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} |x|+|y|=5 \\ |x|-|y|=1 \end{cases}$; b $\begin{cases} 2|x|+3|y|=21 \\ 3|x|-4|y|=6 \end{cases}$; c $\begin{cases} 5|x|+3|y|=20 \\ -6|x|+5|y|=-24 \end{cases}$;

d $\begin{cases} |x+1|+5y=-3 \\ 2|x+1|-4y=22 \end{cases}$; e $\begin{cases} 3|x-1|+2|y+2|=21 \\ 4|x-1|+5|y+2|=35 \end{cases}$; f $\begin{cases} 3|2x+1|+|1-y|=12 \\ 4|2x+1|-3|1-y|=3 \end{cases}$.

34 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a $\begin{cases} |2x+3|-|4y|=-1 \\ 3|2x+3|+|6y|=33 \end{cases}$; b $\begin{cases} |x|+3|y-1|=5 \\ 2|x|-|y-1|=3 \end{cases}$;

c $\begin{cases} 3x+|2y-5|=7 \\ -x+|6y-15|=1 \end{cases}$; d $\begin{cases} |x-11|-2|y+5|=-2 \\ |3x-33|+|7y+35|=7 \end{cases}$.

35 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații, unde $x, y \neq 0$:

a $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{y}=2 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{21}{y}=-1 \end{cases}$; **b** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15} \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$; **c** $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{4}{y}=2\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{7}{x}+\dfrac{5}{y}=3\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

36 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații, unde $x+y \neq 0$, $x-y \neq 0$, $2x-y \neq 0$:

a $\begin{cases} \dfrac{7}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=\dfrac{13}{9} \\ \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}=\dfrac{13}{21} \end{cases}$; **b** $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{4}{2x-y}=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{5}{x+y}-\dfrac{7}{2x-y}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$; **c** $\begin{cases} \dfrac{5}{2x-y}+\dfrac{6}{x-y}=3 \\ \dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{y-x}=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

37 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații, unde $3x+y \neq 0$, $2x-y \neq 0$:

a $\begin{cases} x+2x+3x+\ldots+50x-2y=0 \\ x-2x+3x-4x+\ldots+49x-50x+8y=0 \end{cases}$; **b** $\begin{cases} \dfrac{7x-y+1}{3x+y}=\dfrac{11}{10} \\ 6x+y=16 \end{cases}$;

c $\begin{cases} y+\dfrac{1}{2x-y}=3x-1 \\ 9x-\dfrac{5}{y-2x}=11+3y \end{cases}$; **d** $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2}+\dfrac{5}{y^2+1}=2 \\ 3\left(\dfrac{3x-y}{2}\right)-\dfrac{10}{y^2+1}=1 \end{cases}$.

Probleme de șapte stele

38 **a** Demonstrați că $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

b Rezolvați sistemul: $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\dfrac{x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{x}{\sqrt{25}+\sqrt{24}}+3y=26+3\sqrt{3} \\ 15x-\sqrt{3}y=72-2\sqrt{3} \end{cases}$.

39 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații, știind că a și b sunt numere reale:

a $\begin{cases} ax+y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$; **b** $\begin{cases} ax+by=11 \\ x-2y=3 \end{cases}$.

40 **a** Arătați că, dacă $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $|a-b^2|+a^2+a=0$, atunci $a=b=0$.

b Determinați numerele reale x și y care verifică relația

$$|(2x-y)^2-3x-2y+7|+(3x+2y-7)^2+3x+2y=7.$$

I.4 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare

Multe dintre problemele cu conținut practic sau aplicativ se pot rezolva atât aritmetic, cât și introducând o necunoscută și obținând o ecuație a cărei soluție conduce la soluția problemei. Ecuația atașată problemei poartă numele de *model matematic* al problemei.

Etapele de rezolvare a problemelor folosind modelul matematic:

a Evidențierea datelor *cunoscute* și a datelor *necunoscute* și notarea cu o literă a necunoscutei (de obicei x);

b stabilirea mulțimii în care poate lua valori necunoscuta;

c scrierea, cu ajutorul necunoscutei, a relațiilor date în enunțul problemei și obținerea unui model matematic (ecuație);

d rezolvarea modelului matematic (inclusiv proba rezolvării);

e interpretarea rezultatului, formularea și probarea răspunsului la problemă.

Exemple

1 Într-o curte sunt 7 porci și mai multe păsări. Aflați numărul păsărilor știind că numărul total al picioarelor porcilor și păsărilor este 110.

a Datele *cunoscute*: numărul porcilor: 7 și numărul total alpicioarelor: 110. Datele *necunoscute*: numărul păsărilor, pe care îl notăm cu x.

b Cum numărul păsărilor este natural, rezultă $x \in \mathbb{N}$.

c Modelul matematic este relația care dă numărul total al picioarelor, și anume: $7 \cdot 4 + 2 \cdot x = 110$.

d Rezolvarea modelului matematic: $28 + 2x = 110 \Leftrightarrow 2x = 82 \Leftrightarrow x = 41 \in \mathbb{N}$.
Proba: $7 \cdot 4 + 41 \cdot 2 = 110 \Leftrightarrow 28 + 82 = 110 \Leftrightarrow 110 = 110$ (A).

e În curte sunt 41 de păsări. Proba: $7 \cdot 4 + 41 \cdot 2 = 110$ (A), deci problema este corect rezolvată.

2 Andrei are în bibliotecă 306 cărți, așezate pe trei rafturi. Pe raftul de sus sunt cu 10 cărți mai multe decât pe cel de jos și cu 16 mai puține decât pe cel din mijloc. Aflați câte cărți sunt pe fiecare raft.

a Datele *cunoscute*: numărul total de cărți: 306. Datele *necunoscute*: numărul de cărți de pe fiecare raft. Notăm numărul cărților de pe raftul de sus cu x. Pe raftul de jos sunt $x - 10$ cărți, iar pe cel din mijloc sunt $x + 16$ cărți.

b Cum numărul de cărți este natural, rezultă $x \in \mathbb{N}$.

c Modelul matematic este relația care dă numărul total de cărți, și anume: $x + (x + 16) + (x - 10) = 306$.

d Rezolvarea modelului matematic: $3x + 6 = 306 \Leftrightarrow 3x = 300 \Leftrightarrow x = 100 \in \mathbb{N}$.
Proba: $100 + (100 + 16) + (100 - 10) = 306 \Leftrightarrow 306 = 306$ (A).

e Andrei are 100 de cărți pe raftul de sus, $100 - 10 = 90$ de cărți pe raftul de jos și $100 + 16 = 116$ cărți pe raftul din mijloc. Proba: $100 + 90 + 116 = 306$ (A), deci problema este corect rezolvată.

Exersare

1 Suma dintre un număr și 15 este 28. Care este numărul considerat?

2 Diferența dintre un număr și sfertul lui este 48. Care este numărul?

3 Mă gândesc la un număr. Dacă dublul numărului se adună cu 47, se obține 257. La ce număr m-am gândit?

4 Suma a trei numere consecutive este 90. Care este numărul cel mai mare?

5 Suma dintre dublul și triplul unui număr este 200. Cât este numărul?

6 Suma dintre un număr și triplul lui este 2048. Aflați numărul.

7 Suma a două numere este 77, iar diferența lor este 13. Aflați numerele.

8 Suma a două numere este 80, iar diferența dintre dublul primului număr și triplul celui de-al doilea este 35. Determinați numerele.

9 Triplul cărui număr natural mărit cu 11 dă un număr cu 77 mai mare decât numărul?

10 Suma a trei numere pare consecutive este 408. Aflați numerele.

11 Determinați patru numere întregi impare, consecutive, știind că suma lor este 800.

12 Determinați un număr natural știind că dacă îl înmulțim cu 2 și apoi îl înmulțim cu 5, prin adunarea rezultatelor obținem numărul 70.

13 La un magazin s-a produs o reducere de prețuri de 20%. Un tricou costă după reducere 64 de lei. Ce preț avea tricoul înainte de reducere?

14 Prețul unui telefon mobil crește cu 10%, ajungând să coste 1320 de lei. Care a fost prețul telefonului înainte de mărire?

15 Aflați două numere naturale știind că suma lor este 102, iar împărțind numărul mare la cel mic obținem câtul 2 și restul 12.

Consolidare

16 După ce a parcurs 6 kilometri din lungimea unui traseu, un turist constată că mai are de parcurs 40% din lungimea traseului. Câți kilometri are traseul?

17 Andrei și Mihai cântăresc împreună 76 de kilograme, Mihai și Rareș cântăresc împreună 78 de kilograme, iar Andrei și Rareș cântăresc împreună 82 de kilograme. Câte kilograme cântărește fiecare?

18 În trei lăzi sunt 458 de cărți. În prima ladă sunt cu 70 de cărți mai multe decât în a doua, iar în a treia sunt de două ori mai multe cărți decât în a doua. Aflați numărul de cărți din fiecare ladă.

19 Aflați două numere naturale știind că, dacă la primul număr adunăm 36, rezultatul obținut este egal cu al doilea număr, iar dacă adunăm 62 la al doilea număr, rezultatul obținut este de trei ori mai mare decât primul număr.

20 Andrei și Mihai au împreună 194 de lei. Știind că Mihai are cu 24 de lei mai mult decât Andrei, câți lei are fiecare?

21 Dublul unui număr a fost mărit cu 3, iar rezultatul a fost mărit de 4 ori. Produsul obținut, micșorat cu 5, a fost micșorat de 9 ori, obținându-se 15. Care a fost numărul inițial?

22 Suma a două numere este 306, iar diferența lor este un sfert din numărul mai mic. Aflați cele două numere.

23 Diferența a două numere este egală cu 40. Aflați numerele, știind că jumătate din primul reprezintă două treimi din celălalt.

24 Într-un bloc sunt apartamente cu două și trei camere, în total 45 de apartamente. Știind că în total sunt 105 camere, aflați:

a numărul apartamentelor cu două camere;

b cât la sută reprezintă numărul apartamentelor cu trei camere din numărul celor cu două camere.

25 Tudor cumpără 9 cărți de literatură și matematică, plătind în total 190 de lei. Cartea de literatură costă 25 de lei, iar cea de matematică, 18 lei. Câte cărți de matematică a cumpărat Tudor?

26 Raluca a cumpărat 5 kilograme de mere și 4 kilograme de portocale, plătind în total 35,5 lei. În același timp, Ema a cumpărat, de la același magazin, 3 kilograme de mere și 5 kilograme de portocale, plătind în total 33 de lei. Cât costă un kilogram de mere și cât costă un kilogram de portocale?

27 În curtea bunicilor lui Paul sunt găini și oi. În total sunt 32 de capete și 88 de picioare. Câte găini și câte oi au bunicii lui Paul?

28 Raportul a două numere este $\frac{3}{4}$. Adunând un sfert din suma numerelor cu 30, se obține 310. Care sunt cele două numere?

29 Suma a trei numere este 290. Aflați numerele, știind că al doilea este cu 30 mai mare decât sfertul primului număr, iar al treilea este dublul primului număr.

30 Media aritmetică a trei numere este 24. Al doilea număr este cu 50% mai mare decât primul, iar al treilea număr este cu o treime mai mare decât al doilea. Care sunt cele trei numere?

31 Vlad pleacă într-o excursie de trei zile. În prima zi el cheltuiește un sfert din banii pe care îi avea la el, a doua zi o treime din rest și încă 70 de lei, iar în ultima zi restul banilor pe care îi mai avea, adică 180 de lei. Câți bani a avut Vlad în excursie?

32 Câtul a două numere este 6. Dacă măresc primul număr cu 4, iar pe al doilea îl micșorez de 4 ori, câtul devine 26. Aflați numerele.

33 Suma a două numere este 306, iar diferența lor este un sfert din numărul mai mic. Aflați cele două numere.

34 Un camion plin cu marfă cântărește 3500 de kilograme. Umplut pe jumătate, cântărește 2950 de kilograme. Cât cântărește camionul gol?

35 După două creșteri consecutive de prețuri, prima de 10%, a doua de 12%, un telefon mobil costă 739,2 lei. Cât a costat telefonul înainte de cele două creșteri?

36 Ana constată că, după ce a cheltuit 30% din suma de bani pe care o avea și încă 270 de lei, i-a mai rămas un sfert din suma pe care a avut-o inițial. Ce sumă a avut inițial Ana?

37 Tatăl este cu 25 de ani mai mare decât fiul său. În urmă cu 9 ani, vârsta tatălui era de șase ori mai mare decât vârsta fiului. Ce vârstă are fiecare?

38 Suma vârstelor Paulei și a mamei ei este de 52 de ani. În urmă cu 2 ani, vârsta Paulei era o treime din vârsta mamei.

a Câți ani au cele două acum? **b** Peste câți ani vârsta mamei va fi dublul vârstei Paulei?

39 La un concurs de matematică se dau de rezolvat 40 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect, un elev primește 2 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit, elevului i se scad 0,5 puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

a Alex a dat 28 de răspunsuri corecte și 12 greșite. Ce punctaj a primit?

b Câte răspunsuri greșite a dat Vlad, dacă punctajul lui este 75?

40 La un concurs se acordă 10 puncte pentru o problemă rezolvată corect și se scad 5 puncte pentru o problemă rezolvată greșit. Un elev a avut de rezolvat 20 de probleme și a primit 110 puncte. Câte probleme a rezolvat corect și câte a greșit?

41 David are 300 de lei, în bancnote de 10 lei și de 5 lei. Dacă are în total 37 de bancnote, aflați câte bancnote de 5 lei are David.

42 Suma a trei numere este 607. Dacă adunăm, pe rând, fiecare dintre aceste trei numere cu un același număr, obținem 435, 147 și respectiv 55. Care sunt cele 3 numere?

43 Determinați două numere naturale a căror diferență este 130, știind că împărțind numărul mai mare la triplul numărului mai mic obținem câtul 2 și restul 5.

44 Într-o clasă numărul fetelor este de 3 ori mai mic decât al băieților. Dacă pleacă 4 băieți și 4 fete, atunci numărul băieților va fi de 5 ori mai mare decât cel al fetelor. Câți băieți și câte fete sunt în clasă?

45 Dacă elevii dintr-o sală de clasă s-ar așeza câte 3 într-o bancă, ar rămâne 5 bănci libere și un elev ar sta singur în bancă. Dacă s-ar așeza câte 2 elevi într-o bancă, ar rămâne o bancă liberă. Câte bănci și câți elevi sunt în sala de clasă?

46 Dacă elevii dintr-o sală de clasă s-ar așeza câte 3 într-o bancă, ar rămâne 5 bănci libere. Dacă s-ar așeza câte 2 elevi într-o bancă, un elev ar rămâne în picioare. Câte bănci și câți elevi sunt în sala de clasă?

47 În laboratorul de biologie, dacă elevii unei clase se așază câte 4 la un microscop, atunci un microscop ar rămâne liber, iar la un alt microscop ar sta doar doi elevi. Dacă se așază câte 3 elevi la un microscop, atunci un elev nu ar avea loc. Câte microscoape sunt în laboratorul de biologie?

48 Pe mesele dintr-o cofetărie s-au pus trandafiri în vaze. Dacă se pun câte 3 flori într-o vază, rămân 3 trandafiri fără vază. Dacă se pun câte 5 flori, rămân 5 vaze fără flori. Câte flori sunt și câte vaze?

49 Un colecționar cumpără un tablou pe care îl plătește cu bancnote de 50 de lei și 200 de lei. Dacă bancnotele de 50 de lei sunt mai puține cu 5 decât cele de 200 de lei, iar valoarea bancnotelor de 200 de lei este cu 2050 mai mare decât cea a bancnotelor de 50 de lei, aflați cât a costat tabloul.

50 Determinați vârstele a doi prieteni, Andrei și Ionuț, știind că peste 2 ani vârsta lui Andrei va fi de 5 ori mai mare decât diferența vârstelor lor, diferență care este jumătatea vârstei de acum a lui Ionuț.

51 De ziua ta ai servit colegii cu câte 6 bomboane și ție ți-au mai rămas 4. Dacă ați fi luat fiecare câte 5 bomboane, ar fi rămas 13. Câte bomboane ai avut și câți colegi ai?

52 Determinați vârstele a două surori, Corina și Cristina, știind că acum 3 ani vârsta Corinei era de 3 ori mai mare decât diferența vârstelor lor, iar peste 5 ani, suma vârstelor lor va fi de 3 ori mai mare decât vârsta actuală a Cristinei. (Vârsta Corinei este mai mare decât cea a Cristinei.)

53 În curte sunt 63 de rațe, curci și găini. Știind că sunt de trei ori mai multe găini decât curci și de două ori mai multe curci decât rațe, aflați câte păsări de fiecare fel sunt în curte.

54 Un copil merge la grădina zoologică, unde atenția îi este atrasă de urși, păuni și rațe sălbatice. El observă că aceste animale au în total 63 de capete și 132 picioare. Știind că rațele sunt de 4 ori mai multe decât păunii, aflați câte animale din fiecare fel sunt la acea grădină zoologică.

55 Într-o pungă erau bile roșii, galbene și albastre. Aflați câte bile de fiecare fel erau, știind că 32 nu erau albastre, 32 nu erau galbene, și 32 nu erau roșii.

Probleme de șapte stele

56 În ograda bunicului sunt găini, rațe și purceluși. Dacă ar fi numai găini și purceluși, ar avea 210 picioare, dacă ar fi numai rațe și purceluși, ar avea 230 picioare, iar dacă ar fi numai rațe și găini ar avea 120 de picioare. Câte rațe, găini și purceluși are bunicul?

57 În trei cutii sunt creioane: în prima cutie sunt cu 8 creioane mai multe decât în celelalte la un loc, iar în a doua cu 8 mai puține decât în a treia cutie. Dacă în a doua cutie ar fi cu 9 creioane mai puține, atunci în aceasta ar fi de 6 ori mai puține creioane decât în celelalte două la un loc. Câte creioane sunt în fiecare cutie?

58 Aflați suma a trei numere naturale știind că dacă îl împărțim pe primul la al doilea sau pe al doilea la al treilea, obținem câtul 3 și restul 2 și că diferența dintre primul număr și al treilea număr este 328.

59 Suma a două numere este 56. Dacă împarți primul număr la 4, iar pe al doilea la 2, obții două numere a căror sumă este 19. Află cele două numere.

60 Un pix, o carte și un joc costă în total 63 de lei. Pixul costă cu 5 lei mai puțin decât cartea, iar cartea și pixul costă împreună cu 7 lei mai mult decât jocul. Determinați prețul fiecărui obiect.

61 Se consideră un șir format din 2011 numere întregi consecutive. Știind că suma tuturor numerelor este egală cu 24132, aflați câte numere negative se află în șir.

62 111 susținători au unei echipe de fotbal s-au deplasat cu autoturisme de câte cinci locuri și motociclete de două locuri, în total 27 de vehicule, fiecare transportând numărul maxim de persoane admis. Aflați numărul autoturismelor și numărul motocicletelor folosite.

Testul 1

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a $12+x=20$; b $-3x+2=x-6$; c $\frac{x+3}{2}=\frac{x-3}{5}$.

(2p) 2 Scrieți două perechi de numere naturale care sunt soluții ale ecuației $2x+5y-10=0$.

(1p) 3 Rezolvați sistemul: $\begin{cases}-2x+3y=11\\ 7x+y=-4\end{cases}$.

(1p) 4 Într-un bloc sunt apartamente cu trei și patru camere, în total 48 de apartamente. Știind că în total sunt 162 de camere, aflați câte apartamente au trei camere și câte apartamente au patru camere.

(1p) 5 Suma a trei numere naturale este 30. Aflați numerele știind că al doilea este cu 6 mai mare decât primul, iar al treilea este un sfert din suma primelor două.

(1p) 6 Un produs s-a ieftinit cu 10 lei, apoi s-a mai ieftinit cu 20%. Aflați prețul inițial al produsului știind că, dacă ar dori să revină la acest preț, vânzătorul ar trebui să aplice o scumpire de 30%.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a $x\cdot\sqrt{5}=5$; b $7-4x=35$; c $0{,}2\cdot x+0{,}03=0{,}004$.

(2p) 2 Scrieți două perechi de numere întregi care sunt soluții ale ecuației $x-3y=-4$.

(1p) 3 Rezolvați sistemul: $\begin{cases}3x+2(y+1)=7\\ 2(x-5)+3y=-10\end{cases}$.

(1p) 4 În curtea unui fermier sunt vaci și gâște, în total 38 de capete și 104 picioare. Câte vaci și câte gâște sunt în curtea fermierului?

(1p) 5 Aflați un număr știind că, dacă s-ar mări cu 48, atunci jumătatea ar deveni cu 15 mai mare decât treimea lui.

(1p) 6 Primul dintre cei doi copii ai unui părinte s-a născut când tatăl avea 26 de ani. Aflați câți ani are celălalt copil, știind că vârsta sa în urmă cu un an era o noime din vârsta tatălui, iar peste un an va fi jumătate din vârsta fratelui său.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P

Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: Ivan Roxana Ivan Roxana

Clasa a VII-a: B

A 2

Temele I.3 – I.4. Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și a sistemelor de ecuații liniare

(1,5p) 1 Completați pe fișă spațiile punctate cu răspunsul corect.

a Suma dintre un număr natural și dublul lui este 12. Numărul este ....

b Jumătatea unui număr întreg este 15. Numărul considerat este egal cu ....

c Suma dintre un număr natural și succesorul lui este egală cu 21. Produsul celor două numere este egal cu ....

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

a Produsul a două numere naturale consecutive poate fi egal cu 11. A F

b Suma a două numere naturale impare este divizibilă cu 2. A F

c Dacă adunăm jumătatea unui număr natural cu o treime din el și cu o șesime din el, obținem dublul numărului respectiv. A F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Ultima cifră a produsului a cinci numere naturale consecutive	1 1
b Singurul număr natural care este și prim și par, în același timp	2 2
c Numărul natural care este egal cu inversul său	3 4
d Cel mai mare rest care poate fi obținut prin împărțirea unui număr natural la 4.	4 3
	5 0

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Rezolvați sistemele de ecuații: a $\begin{cases} 4x+y=10 \\ x-6y=15 \end{cases}$; b $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-y}{3}=3 \\ \dfrac{x-y+5}{2}=2y+4 \end{cases}$.

(2p) 5 Suma a două numere naturale este 70. Dacă se împarte numărul mare la cel mic, se obține câtul 4 și restul 10. Să se afle cele două numere.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

I.5 Probleme cu caracter aplicativ

1 Cristina, Răzvan și Oana au împreună 164 de lei. Dacă Răzvan ar mai avea 4 lei, el ar avea jumătate din cât au Oana și Cristina împreună. Dacă Răzvan ar mai avea 16 lei, ar avea de două ori diferența dintre sumele Oanei și Cristinei. Câți lei are fiecare?

2 O bancă oferă pentru depozitele pe un an o dobândă de 10%. Calculați suma minimă (în lei, fără submultipli ai leului) pe care trebuie să o depună un client astfel încât peste doi ani să poată retrage 10000 de lei.

3 Într-o sală de spectacole sunt tot atâtea rânduri câte locuri sunt pe un rând. La niciun spectacol nu rămân bilete nevândute. Directorul sălii a decis scumpirea cu 50% a biletelor pentru locurile din primele două rânduri. În acest fel, încasările de la fiecare spectacol au crescut cu 6,25%. Aflați câte locuri are sala.

4 Camera copiilor are dimensiunile de 4 metri lungime și 3,5 metri lățime. Acolo există două paturi suprapuse, cu lungimea de 2 metri și lățimea de 12 decimetri, și un dulap lat de 40 de centimetri și lung de 1 metru. Mama dorește să pună mochetă în toată camera, dar nu și sub obiectele menționate. Dacă prețul mochetei este de 20 lei/m^2, aflați ce sumă de bani îi este necesară mamei.

5 Distanța dintre casa lui Răzvan și școala la care învață este de 500 de metri. Într-o săptămână Răzvan se îmbolnăvește și trebuie să absenteze de la școală. Aflați câte zile a absentat Răzvan de la școală, dacă în săptămâna respectivă a parcurs 2 kilometri de acasă la școală și invers.

6 Un fermier dorește să înființeze o livadă de formă dreptunghiulară, cu suprafața de 9000 m^2 (considerând dreptunghiul determinat de locul de plantare al pomilor din colțurile livezii), în care să planteze 240 de pruni, 120 de meri și 40 de gutui, pe 25 de rânduri și astfel încât pe fiecare rând distanța dintre doi pomi să fie egală cu distanța dintre rânduri. Aflați cât trebuie să fie distanța dintre rânduri.

7 Casa lui Florin se află pe drumul dintre orașele Vaslui și Bârlad. Dacă Florin merge în Bârlad, parcurge o distanță de 3 ori mai mare decât până în Vaslui. Dacă merge în Vaslui, parcurge cu 12 kilometri mai puțini decât până în Bârlad. Ce distanță este între cele două orașe?

8 Două coșuri cu pește cântăresc împreună 10 kilograme. Primul coș valorează 36 de lei, iar al doilea, 54 de lei. Aflați câte kilograme de pește se află în fiecare coș, știind că în cele două coșuri calitatea peștelui este aceeași.

9 La o școală se primesc de trei ori mai multe caiete decât cărți. După ce fiecare copil a primit 2 cărți și 5 caiete, rămân neîmpărțite 23 de cărți și 90 de caiete. Câți copii primesc caiete și cărți?

10 Pentru o lucrare, Andrei și Bogdan primesc o sumă de bani. Andrei a primit cu 250 de lei mai puțin decât Bogdan. $\frac{2}{5}$ din suma primită de Bogdan este cât $\frac{4}{9}$ din suma primită de Andrei. Aflați câți bani au primit fiecare.

I.6 Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1 Produsul a două numere este 36. Dacă se mărește primul număr cu 7, produsul devine 99. Aflați numerele.

2 Aflați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 = \frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \ldots + \frac{350}{2401} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{343}\right)$.

3 Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{x+1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}}}+1\right) = x$.

4 Rezolvați ecuația $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+x} = \frac{200}{101}$.

5 Rezolvați ecuația $x^2 = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{48\cdot 98} + \frac{1}{49\cdot 100}$.

6 Suma a două numere naturale este 824. Dacă ambele numere se împart la 4, se obțin 2 numere a căror diferență este 108. Aflați cele 2 numere.

7 a Să se demonstreze că $\frac{x+n}{n+1} \geq \frac{n+3}{2x+n+1}$, pentru orice $x, n \in \mathbb{N}^*$.

b Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \ldots + \frac{x+2009}{2010} = \frac{5}{2x+3} + \frac{6}{2x+4} + \ldots + \frac{2013}{2x+2011}.$$

8 O cantitate de pește a fost repartizată la trei magazine astfel: primul magazin a primit $\frac{2}{3}$ din întreaga cantitate, al doilea a primit 0,3 din ce a rămas, iar al treilea restul. Aflați cantitățile repartizate la fiecare magazin, știind că primul a primit cu 143 kilograme de pește mai mult decât al treilea.

9 Să se determine numerele reale *a*, *b*, *c* știind că $a + \frac{1}{bc} = 2b$, $b + \frac{1}{ac} = 2c$ și $c + \frac{1}{ab} = 2a$.

10 Aflați numărul natural $n = \overline{abc}$ care este soluție a ecuației $n^2 = 1+3+5+\ldots+\overline{cba}$.

11 Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2020^2} + \frac{1}{2021^2}} = x + \frac{2020}{2021}$.

12 Aflați cel mai mic element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-2021| + |x-2021| \neq 2\cdot|x|\}$.

13 Fie $a, b, c > 0$. Să se demonstreze că $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} > 1$.

14 Demonstrați că, pentru oricare numere reale *a*, *b*, *c* și *d*, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2} + \sqrt{c^2-cd+d^2} + \sqrt{d^2-da+a^2} \geq a+b+c+d.$$

15 Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\frac{a+2b}{2a+3b+4c} = \frac{b+2c}{2b+3c+4a} = \frac{c+2a}{2c+3a+4b}$. Arătați că:

$$\frac{\sqrt{2ab}}{2a+3b+4c} + \frac{\sqrt{2bc}}{2b+3c+4a} + \frac{\sqrt{2ca}}{2c+3a+4b} < \frac{1}{2}.$$

16 Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}, x \geq 4, y \geq 9, z \geq 16$, arătați că:

$$2\sqrt{x-4}+3\sqrt{y-9}+4\sqrt{z-16} \leq \frac{x+y+z}{2}$$

și precizați în ce caz are loc egalitatea.

17 Demonstrați că $(x+2)(2y+3)(3z+4) \geq 96\sqrt{xyz}$, pentru orice numere reale pozitive x, y, z.

18 Fie numerele $a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{2009}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010}$

și $b=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots-\frac{2009}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010}$.

Arătați că $a<1$ și $b<\frac{1}{2^{2009}}$.

19 Arătați că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, au loc inegalitățile:

a $\frac{1}{3}<\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}+\ldots+\frac{1}{3k}<\frac{1}{2}$;

b $\frac{7}{12}<\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}+\ldots+\frac{1}{4k}<\frac{5}{6}$.

20 Fie $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$. Să se arate că $x<\frac{1}{10}$.

21 Fie $A=\frac{1}{502}+\frac{1}{503}+\ldots+\frac{1}{1003}$ și $B=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}$. Comparați numerele A și B.

22 a Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, au loc relațiile:

$$n(n-1)<n^2<n(n+1) \text{ și } \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

b Fie numărul $a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}$. Demonstrați că $0,2<\sqrt{\frac{a}{11}}<0,3$.

23 Arătați că $\sqrt{2x}+\sqrt{2x+2008}+\sqrt{2x+2009}<3x+2010$ pentru orice $x \geq 0$.

24 Arătați că $\frac{3}{4}<\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{35}}<1$.

II

Elemente de organizare a datelor


35%
15%
25%
25%
9%
5%
22%
15%
25%
5%
15%
40%
40%
20%
99%
3%
22%
22%

II.1 Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea punctelor în plan cu ajutorul sistemului de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan

Produsul cartezian al mulțimilor nevide A și B este mulțimea perechilor ordonate (a, b), unde $a \in A$ și $b \in B$: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$.
Într-o pereche ordonată, contează ordinea scrierii elementelor, adică, în general, avem $(a,b) \neq (b,a)$ și $A \times B \neq B \times A$. De fapt, perechile ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.

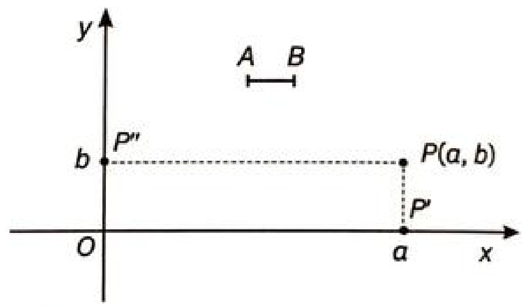
Regula produsului. Dacă mulțimile A și B sunt finite (au un număr finit de elemente), iar $\text{card}A = m$ și $\text{card}B = n$, atunci $\text{card}(A \times B) = mn$.

Exemple

1 Dacă $A = \{1,3,5\}$, $B = \{0,4\}$, atunci $A \times B = \{(1,0),(1,4),(3,0),(3,4),(5,0),(5,4)\}$.

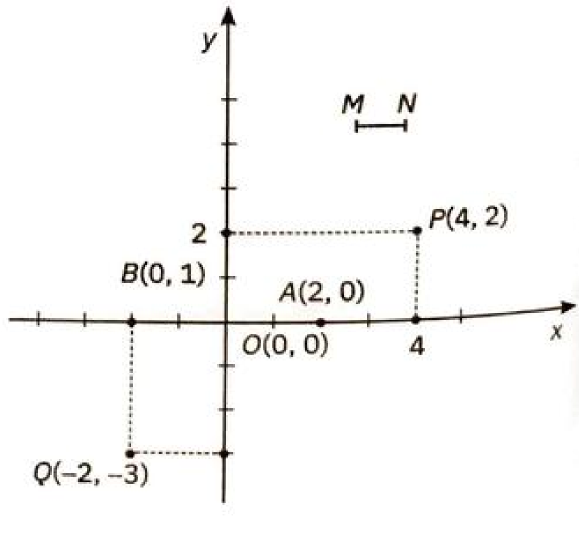
2 Dacă într-o clasă de 25 de elevi sunt 15 băieți și 10 fete, atunci numărul perechilor distincte băiat – fată din clasă este 150. Într-adevăr, notând cu B mulțimea băieților și cu F mulțimea fetelor, orice pereche (băiat, fată) este element al produsului cartezian $B \times F$, iar $\text{card}(B \times F) = \text{card}B \cdot \text{card}F = 15 \cdot 10 = 150$.

Axe ortogonale. Prin *sistem de axe ortogonale* înțelegem figura formată din două axe ale numerelor care sunt perpendiculare și care au un punct de intersecție numit origine.



În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu: *originea O*, *unitatea de măsură [AB]*, axa Ox, numită *axa absciselor*, și axa Oy, numită *axa ordonatelor*. Un astfel de sistem se mai numește și *sistem (reper) cartezian*. Planul în care se reprezintă un sistem cartezian este împărțit de acesta în patru cadrane.

Asociem fiecărei perechi (a, b) de numere reale un punct în plan obținut astfel: pe axa Ox reprezentăm punctul P', de coordonată a, iar pe axa Oy, punctul P'' de coordonată b. Prin punctul P' ducem o paralelă la axa ordonatelor, iar prin punctul P'' ducem o paralelă la axa absciselor. Intersecția celor două paralele este punctul P căutat, pe care îl notăm $P(a, b)$ și citim: *punctul P de abscisă a și ordonată b*.



Punctele de forma $M(0, x)$ se află pe axa Oy și se numesc puncte de abscisă 0.

Punctele de forma $N(x, 0)$ se află pe axa Ox și se numesc puncte de ordonată 0.

În figura alăturată sunt reprezentate, în sistemul ortogonal de axe xOy, punctele $A(2, 0)$, $B(0, 1)$, $P(4, 2)$ și $Q(-2, -3)$. MN este unitatea de măsură.

Două puncte $A(a, b)$ și $M(m, n)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor Oy dacă au aceeași abscisă, adică $a = m$. De exemplu, punctele $A(3, 11)$ și $B(3, -2)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa Oy deoarece au abscisele egale.

Două puncte $B(c, d)$ și $N(p, r)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa absciselor dacă au aceeași ordonată, adică $d = r$. De exemplu, punctele $A(-5, 4)$, $B(0, 4)$, $C(11, 4)$ sunt situate pe o dreaptă d paralelă cu axa absciselor, dusă la 4 unități deasupra acesteia.

Distanța dintre două puncte. Fie punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ reprezentate în sistemul ortogonal de axe xOy. Aplicând teorema lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză este segmentul AB, iar catetele sunt paralele cu axele de coordonate, obținem:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple

1 Distanța dintre punctele $A(1, 2)$ și $B(3, 4)$ este $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

2 Știind că $A(a,1)$ și $B(0,5)$, determinați numerele reale a pentru care $AB = 5$.

$AB = \sqrt{(0-a)^2 + (5-1)^2} \Leftrightarrow a^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a \in \{-3,3\}$.

Mijlocul unui segment. Pentru oricare două puncte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, coordonatele mijlocului M al segmentului AB sunt $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Exemple

1 Mijlocul segmentului AB, unde $A(1, 2)$ și $B(3, 4)$, este punctul $M(2, 3)$, deoarece $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$.

2 Determinați coordonatele simetricului punctului $A(1,2)$ față de punctul $M(3,4)$.
Simetricul lui A față de M este punctul $A'(a,b)$, cu proprietatea că M este mijlocul segmentului $[AA']$. Atunci $x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$, de unde se obține $a = 5$ și $b = 6$, deci $A'(5,6)$.

Exersare

1 Se consideră mulțimile $A = \{1,3\}$ și $B = \{2,5\}$.

a Determinați produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.

b Determinați produsele carteziene $A \times A$ și $B \times B$.

c Determinați $\text{card}(A \times B)$ și $\text{card}(B \times A)$.

2 Se consideră mulțimile $A = \{-1,0,2\}$ și $B = \{0,3\}$.

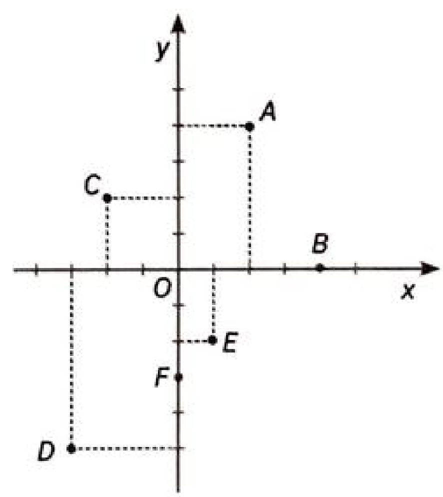
a Determinați produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.

b Determinați $\text{card}(A \times B)$ și $\text{card}(B \times A)$.

3 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele:
$A(1;2)$, $B(-2;3)$, $C(2;-1)$, $D(-3;-2)$, $E(3;0)$, $F(0;4)$.

4 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele:
$A(2;4)$, $B(3;-2)$, $C(-4;3)$, $D(-2;-2)$, $E(-1;0)$, $F(0;-2)$.

5 Determinați coordonatele punctelor A, B, C, D, E și F din figura alăturată.



6 Se consideră punctele $A(1;3)$, $B(-2;1)$, $C(3;-1)$.

a Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.

b Calculați distanțele AB, AC și BC.

c Determinați coordonatele mijloacelor segmentelor AB, AC și BC.

7 Se consideră punctele $A(0;3)$, $B(-4;0)$, $C(4;0)$.

a Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.

b Calculați perimetrul triunghiului ABC.

c Calculați aria triunghiului ABC.

8 Fie punctele $A(-3, 3)$, $B(2, 5)$, $C(4, -3)$, $D(0, 2)$, $E(-2, 0)$.

a Reprezentați punctele A, B, C, D, E într-un sistem de axe ortogonale.

b Calculați distanțele AB, CD și CE.

c Reprezentați punctele următoare și scrieți coordonatele lor:

i punctul M, simetricul lui C față de dreapta Ox;

ii punctul N, simetricul lui C față de dreapta Oy;

iii punctul P, simetricul lui C față de punctul O.

9 Reprezentați un reper cartezian xOy în care luați unitatea de măsură de 1 centimetru și reprezentați punctele: $A(2,5; 3)$, $B(-2; 4,5)$, $C(-3, -2)$, $D(0; 4,5)$, $E(5, 0)$.

10 Fie punctele $A(0, 4)$, $B(3, 5)$, $C(3, 0)$, $D(-3, 7)$, $M(-2, -5)$, $N(2, 5)$. Calculați distanțele AB, CD și MN.

11 Fie punctele $A(-2, 3)$, $B(0, 4)$, $C(2, -3)$.

a Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.

b Reprezentați în același sistem de axe ortogonale punctele M și N, simetricele față de B ale punctelor A, respectiv B.

12 Pentru punctele de coordonate indicate mai jos, calculați distanțele AB, BC și AC și apoi verificați dacă are loc relația $AB + BC = AC$:

a $A(2, 5)$, $B(1, 3)$, $C(-3, 2)$;

b $A(4, 7)$, $B(0, 4)$, $C\left(-2, \sqrt{4}\right)$.

13 Se dau punctele: $A(-3, 27)$, $B(-2, 22)$, $C(10, -7)$, $D(\sqrt{5};\sqrt{2})$, $E(-5\sqrt{3}, 4)$, $F\left(-3, -\frac{3}{7}\right)$, $G\left(6\sqrt{8}, -\sqrt{7}\right)$, $M(9, 9)$, $N(-1, 4)$, $P\left(3\frac{5}{8}, 44\right)$. Realizați într-un tabel în care să arătați cărui cadran îi aparține fiecare punct.

14 Determinați numerele reale a, b, c, d pentru care punctele:

a $A(5,a)$, $B(-3,b-2)$, $C(c+1,3c-2)$, $D(\sqrt{2},d-\sqrt{2})$ aparțin axei absciselor;

b $A(a,1)$, $B(3-b,1)$, $C(15+3c,8)$, $D(8-d\sqrt{2},7)$ aparțin axei ordonatelor.

15 În sistemul de axe ortogonale din figura 1, determinați:

a coordonatele punctelor M, N, P;

b produsul cartezian $A \times B$, unde A este mulțimea formată din abscisele punctelor M, N, P, iar B este mulțimea formată din ordonatele punctelor M, N, P.

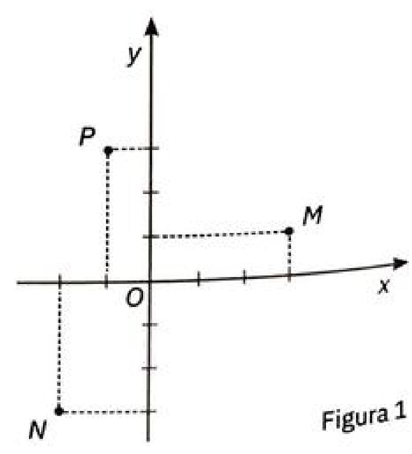


Figura 1

16 Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $A \times B$ este dată în figura 2. Determinați mulțimile A și B.

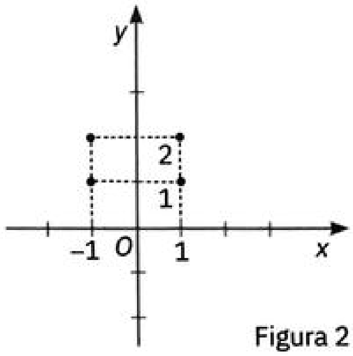


Figura 2

17 Reprezentarea geometrică geometrică a produsului cartezian $A \times B$ este dată în figura 3. Determinați mulțimile A și B.

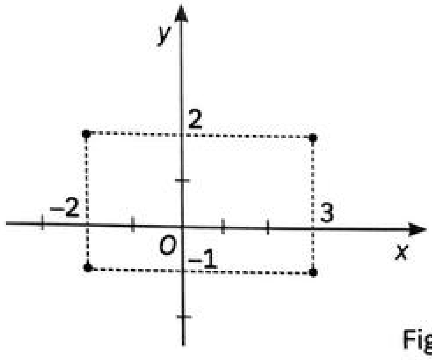


Figura 3

Consolidare

18 Mulțimea A are 4 elemente, iar mulțimea B are 6 elemente. Câte elemente are mulțimea $A \times B$? Dar mulțimea $B \times A$?

19 Mulțimea A are 15 elemente, iar mulțimea B are 20 de elemente. Câte elemente are mulțimea $A \times B$? Dar mulțimea $B \times A$?

20 Bisectoarea cadranelor I și III se numește prima bisectoare și oricare punct al său are coordonatele egale.

a Care dintre următoarele puncte se află pe prima bisectoare: $A(3, 3)$, $M(-4, 4)$, $B(-1, -1)$, $C(7, -7)$, $D\left(11, \frac{3}{5}\right)$, $E(-6, 8)$, $F(|-12|, 12)$, $G\left(-\frac{3}{11}, \left|-\frac{3}{11}\right|\right)$?

b Determinați numerele reale a,b,c,d,e,f astfel încât punctele $A(5, a)$, $B(2b, 6)$, $C(4\sqrt{2}, c)$, $D(-11, d+3)$, $E(2-\sqrt{3}, e+5)$ și $F(|f|, 5)$ să fie pe prima bisectoare.

21 Bisectoarea cadranelor II și IV se numește a doua bisectoare și oricare punct al său are coordonatele opuse.

a Care dintre următoarele puncte se găsesc pe a doua bisectoare: $A(-5, 5)$, $B(-5, -5)$, $C(-7, |-7|)$, $D(11, -5)$, $E\left(\frac{3}{7}, -\frac{3}{7}\right)$?

b Aflați numerele reale a,b,c,d,e astfel încât punctele $A(17, a)$, $B(-11, b+2)$, $C(2, c+1)$, $D\left(\frac{d}{11}, -\frac{5}{11}\right)$, $E\left(\frac{e-\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{27}{4}}\right)$ să fie pe a doua bisectoare.

22 Verificați dacă următoarele puncte sunt coliniare:

a $A(-1,2)$, $B(-3,0)$ și $C(4,7)$;

b $A(5, 3)$, $B(1, -3)$ și $C(3, 0)$.

c $A(2, 7)$, $B(-3, 0)$ și $C(4, 11)$;

Rezolvare: Punctele A, B și C sunt coliniare dacă are loc una dintre relațiile: $AB+BC=AC$ sau $AC+CB=AB$ sau $BA+AC=BC$.

a Avem: $AB=\sqrt{[-3-(-1)]^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{(-3-4)^2+7^2}=7\sqrt{2}$ și $AC=\sqrt{(-1-4)^2+(2-7)^2}=5\sqrt{2}$. Așadar $AB < AC < BC$ și, întrucât $AC + AB = BC$, rezultă că punctele A, B și C sunt coliniare, iar $A \in (BC)$.

23 Stabiliți care dintre punctele $A(8, 5)$, $B(0, -1)$, $C(7, -2)$, $D(1, 5)$, $E(1, 6)$, $F(-2, 1)$ se află pe cercul C de centru $M(4, 2)$ și rază $r = 5$.

Rezolvare: Punctul A este situat pe cercul de centru M și rază r dacă $MA = r$.
Întrucât $AM = \sqrt{(8-4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5 = r$, rezultă $A \in \mathcal{C}(M, r)$.
Cum $MD = \sqrt{(1-4)^2+(5-2)^2} = 3\sqrt{2} \neq 5$, rezultă că $D \notin \mathcal{C}(M, r)$.

24 Calculați lungimile laturilor triunghiului ABC și stabiliți dacă este isoscel, știind că $A(-2, 1)$, $B(3, 5)$ și $C(7, 0)$.

25 Arătați că punctele $A(-1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(0, -2)$, $D(-5, -2)$ sunt vârfurile unui romb.

26 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $A(-5, 3)$, $B(2, 3)$, $C(4, 3)$ și verificați dacă punctele sunt coliniare.

27 Fie punctele $A(-2, 5)$, $B(4, 4)$, $C(3, -2)$ vârfurile triunghiului ABC.
a Verificați dacă triunghiul este isoscel.
b Calculați perimetrul triunghiului ABC.

28 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $A(7, -5)$ și $B(3, 11)$. Calculând distanțele AB, AM, MB, stabiliți dacă $M(5, 3)$ este mijlocul segmentului AB.

Aprofundare

29 Scrieți coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele:

a $A(-3,4)$ și $B(7,12)$;

b $C\left(2-\sqrt{3},-\frac{4}{5}\right)$ și $D\left(\sqrt{3},-\frac{11}{5}\right)$;

c $E(-3,-4+\sqrt{5})$ și $F(17,4+\sqrt{5})$.

30 Fie punctele $A(5, -1)$ și $M(2, 4)$. Determinați coordonatele punctului B știind că M este mijlocul segmentului AB.

31 Fie $B\left(4+\sqrt{2}, \frac{5}{2}\right)$. Determinați coordonatele punctului A știind că $P\left(-3,\frac{11}{2}\right)$ este mijlocul segmentului AB.

32 Fie punctele $A(6, 4)$, $B(4, -4)$, $C(-2, 0)$, $M(5, 0)$, $N(1, -2)$, $P(2, 2)$ reprezentate într-un sistem de axe ortogonale. Justificați următoarele afirmații:

a $PM = \frac{BC}{2}$; **b** $MN \parallel AC$;

c $BCPM$ este trapez; **d** $A_{ABC} = 4 \cdot A_{MNP}$.

33 Fie $A(x;2)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui x, astfel încât $OA = 2\sqrt{5}$, unde O este intersecția sistemului de axe ortogonale.

34 Fie $B(3;y)$, unde $y \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui y, astfel încât $OB = 3\sqrt{5}$, unde O este intersecția sistemului de axe ortogonale.

35 Fie $C(a;2)$ și $D(3;3)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui a, astfel încât $CD = \sqrt{26}$.

36 Într-un sistem de axe ortogonale construiți un pătrat cu perimetrul egal cu 12, asfel încât vârfurile pătratului să aibă coordonatele numere întregi și un vârf să aibă ambele coordonate negative.

37 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctul $A(3, -2)$. Desenați trei pătrate care să aibă perimetrul egal cu 8 și unul dinte vârfuri în A, apoi scrieți coordonatele celorlalte vârfuri.

38 Trapezul dreptunghic $ABCD$ ($\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$) are vârful $A(2,-3)$ și $x_B > x_A$. Reprezentați trapezul într-un sistem de axe ortogonal și scrieți coordonatele celorlalte vârfuri ale trapezului știind că $AB \parallel Ox$, $AB = 4$, $AD = 5$ și $CD = 7$.

39 Se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(-2, 2)$ și $C(-1, -3)$. Determinați coordonatele centrelor paralelogramelor care au trei dintre vârfuri punctele A, B, C.

II.2 Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor

Fie A și B două mulțimi nevide. Se spune că există o *dependență funcțională* de la mulțimea A la mulțimea B dacă oricărui element al mulțimii A i se asociază un unic element din mulțimea B.

În sensul de mai sus, modul (regula) prin care fiecărui element $a \in A$ i se asociază un element $b \in B$ se numește *lege de corespondență* sau *relație funcțională* de la mulțimea A la mulțimea B.

O regulă care stabilește o corespondență $x \to y$ între elementele mulțimilor A și B ($x \in A$ și $y \in B$) este o relație (dependență) funcțională de la A la B dacă:

a fiecărui element $x \in A$ i se asociază un element $y \in B$;

b dacă $x \to y$ și $x \to z$, atunci $y = z$.

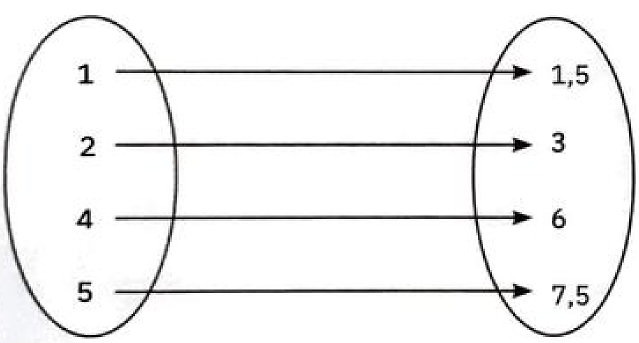
O dependență funcțională de la mulțimea A la mulțimea B se poate reprezenta printr-un tabel, printr-o diagramă sau printr-un grafic.

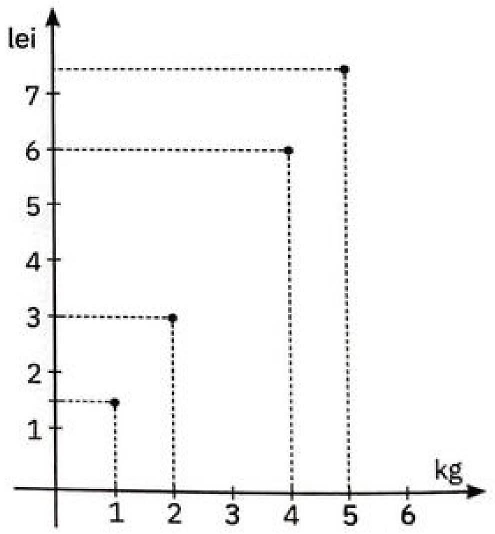
Exemple

1 Un kilogram de cartofi costă 1,5 lei. Atunci 2 kilograme de cartofi costă 3 lei, 4 kilograme costă 6 lei, 5 kilograme costă 7,5 lei. Putem scrie aceste date într-un tabel de forma:

masa în kilograme	1	2	4	5
suma plătită în lei	1,5	3	6	7,5

Notând cu x masa cantității de cartofi și cu y suma plătită, relația funcțională este $y = 1{,}5x$, unde $x \in \{1, 2, 4, 5\}$. Aceleași date se pot reprezenta și prin diagrame sau folosind un grafic:





2 Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 30 de metri.

a Exprimați lungimea dreptunghiului în funcție de lățime.

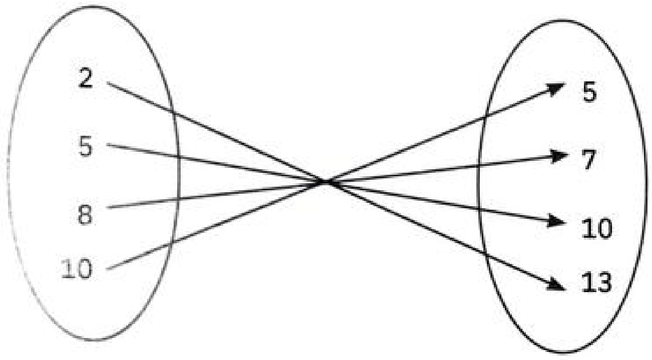
b Calculați lungimea dreptunghiului în cazurile când lățimea ia valorile: 2 centimetri, 5 centimetri, 8 centimetri, 10 centimetri și scrieți datele într-un tabel, prin diagrame, folosind graficul.

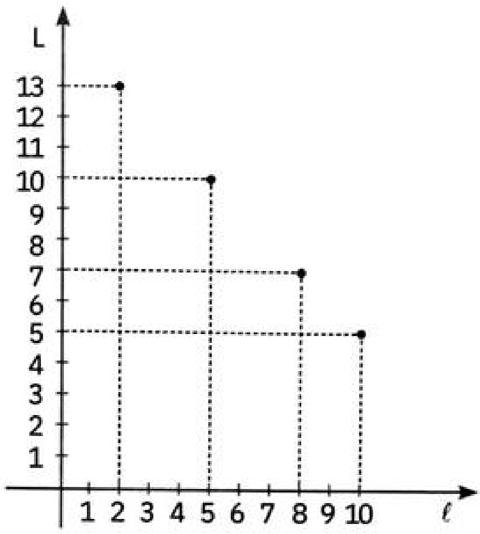
Rezolvare:

a Cu notațiile consacrate, avem $2L + 2l = P \Leftrightarrow 2L = 30 - 2l \Leftrightarrow L = 15 - l$.

b Pentru $l = 2$ rezultă $L = 13$; pentru $l = 5$ rezultă $L = 10$; pentru $l = 8$ rezultă $L = 7$, iar pentru $l = 10$ rezultă $L = 5$. Tabelul, diagrama și graficul sunt prezentate în continuare.

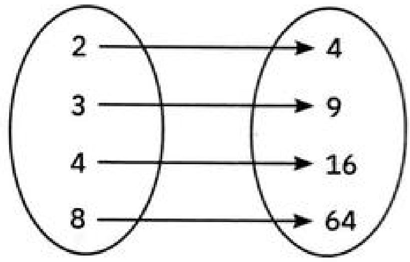
lățimea	2	5	8	10
lungimea	13	10	7	5





3 Formula de calcul a ariei pătratului $\mathcal{A}=l^2$ este o dependență funcțională.

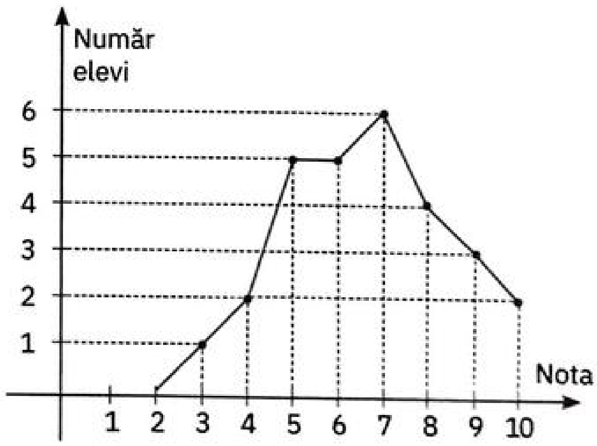
lungimea laturii	2	3	4	8
aria pătratului	4	9	16	64



4 Elevii clasei a VII-a A obțin următoarele rezultate la un test la matematică:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	–	–	1	2	5	5	6	4	3	2

Aceste rezultate pot fi reprezentate printr-o diagramă sau printr-un grafic.
Analizând rezultatele obținute de elevi, observăm că nota 3 apare o dată, notele 4 și 10 apar de două ori etc. Numărul care arată de câte ori apare o notă în rezultatele clasei se numește *frecvență*. Unind prin segmente rezultatele, se obține un poligon numit *poligonul frecvențelor*.



Exersare

1 În tabelul următor este prezentată repartiția elevilor unei clase în funcție de mediile obținute la matematică pe semestrul I:

Media	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	4	5	7	6	4	12

a Numărul elevilor din această clasă care au obținut pe semestrul I media 9 este egal cu ... .

b Numărul elevilor din această clasă care au obținut pe semestrul I media mai mare decât 7 este egal cu ... .

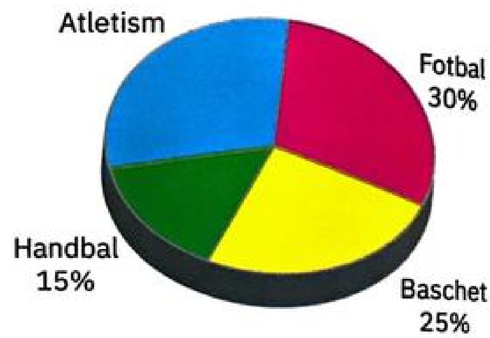
c Numărul elevilor din această clasă care au obținut pe semestrul I, cel puțin media 7 și cel mult media 9, este egal cu ... .

2 În tabelul următor sunt prezentate măsurătorile efectuate la o stație meteorologică, la aceeași oră, în fiecare zi a unei săptămâni din luna mai:

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (°C)	15	16	14	9	12	15	17

a Cea mai mică temperatură măsurată în acea săptămână a fost de ... °C.
b Diferența dintre cea mai mare și cea mai mică temperatură a fost de ... °C.
c Temperatura medie înregistrată în acea săptămână a fost de ... °C.

3 În diagrama alăturată este reprezentată repartiția celor 500 de elevi ai unui club sportiv, după sportul la care sunt înscriși:
a Procentul elevilor care sunt înscriși la atletism este ...%.
b Numărul elevilor înscriși la baschet este ... .
c Numărul elevilor înscriși la atletism este ... .



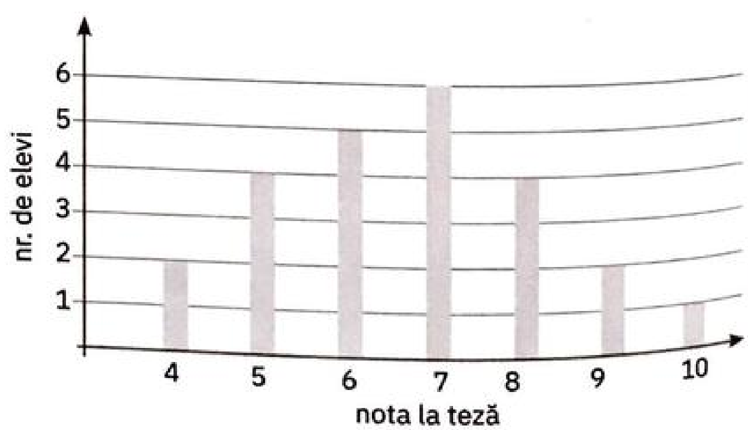
4 Un kilogram de mere costă 3 lei. Știind acest lucru, determinați ce sumă de bani ar trebui să plătească Tudor, dacă ar dori să cumpere 2 kilograme, 4 kilograme, 6 kilograme, 10 kilograme, respectiv 18 kilograme de mere. Completați rezultatele în tabelul următor:

Masa (în kilograme)	1	2	4	6	10	18
Prețul (lei)	3					

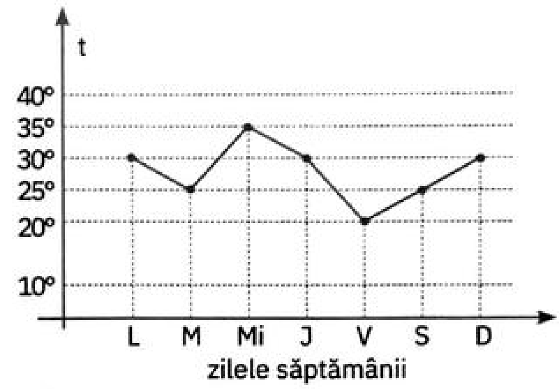
5 Două creioane costă 5 lei. Știind acest lucru, determinați ce sumă de bani ar trebui să plătească Andra, dacă ar dori să cumpere 1, 5, 8, 10, respectiv 15 creioane de acest tip. Completați rezultatele în tabelul următor:

Cantitatea (nr. bucăți)	1	2	5	8	10	15
Prețul (lei)		5				

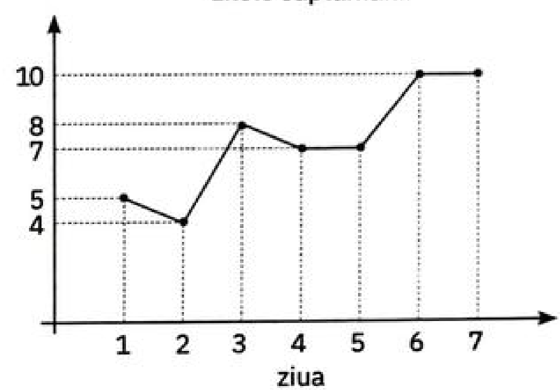
6 În graficul alăturat sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase la teza la matematică, în semestrul I:
a Conform graficului, câți elevi au obținut nota 9?
b Câți elevi au obținut note peste 7?
c Câți elevi au obținut nota cel puțin 6 și cel mult 9? Câți elevi au obținut o notă mai mare sau egală cu 6 și mai mică sau egală cu 9?
d Care a fost media clasei la teză?



7 Figura alăturată reprezintă graficul evoluției temperaturilor maxime într-o săptămână de vară:
a Care a fost cea mai călduroasă zi?
b Câte grade s-au înregistrat sâmbătă?
c Cu câte grade a scăzut temperatura de miercuri până vineri?



8 Graficul alăturat reprezintă numărul de kilometri parcurși de un grup de turiști, pe parcursul a 7 zile:
a Câți kilometri a parcurs grupul în prima zi?
b În ce zi s-au parcurs 8 kilometri?
c Care este ziua în care s-au parcurs cei mai puțini kilometri?



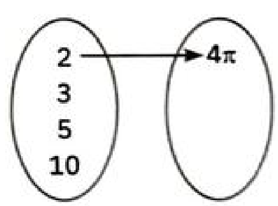
9 Completați tabelul următor, conform modelului:

Lungimea laturii pătratului (cm)	2	3		6			15	
Perimetrul pătratului (cm)	8		20			40		
Aria pătratului (cm^2)	4				64			900

10 Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile A = {Austria, Franța, Germania, România, Serbia, Ungaria} și B = {Berlin, Belgrad, București, Budapesta, Paris, Viena}. Reprezentați apoi dependența printr-o diagramă.

11 Se consideră dependența funcțională $y \to x$, de la mulțimea $A=\{0,1,3\}$ la mulțimea $B=\{0,1,2,3,4,5\}$, dată prin regula $y=x+2$. Reprezentați dependența dată printr-un tabel, printr-o diagramă și printr-un grafic.

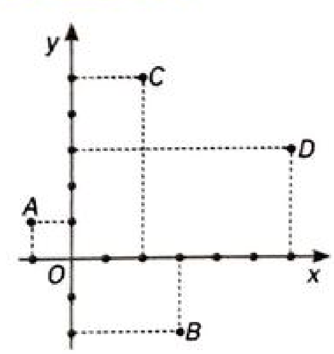
12 Reprezentați prin diagrame dependența funcțională dintre raza r a unui cerc și aria sa pentru valorile razei date în prima mulțime ca în modelul dat.



13 Se consideră mulțimile $A=\{-2,1,5\}$ și $B=\{0,1,2,3,4,5\}$. Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile A și B și realizați reprezentarea grafică a acesteia.

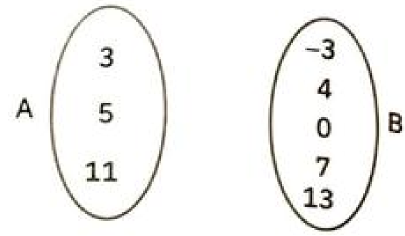
Consolidare

14 În figura alăturată se află reprezentarea grafică a unei dependențe funcționale. Reprezentați dependența dată sub formă de tabel.



15 Fie dependența funcțională $x \to y$, de la mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ la $\mathbb{R}$, dată prin regula $y=x^2+1$. Determinați mulțimea valorilor pe care le poate lua y și reprezentați dependența funcțională prin tabel, prin diagramă și prin grafic.

16 Realizați prin săgeți o dependență funcțională între mulțimile A și B din imaginea alăturată:

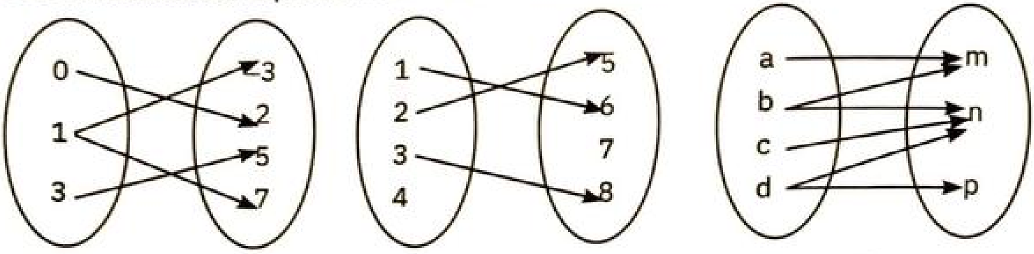


17 Completați tabelul de mai jos și indicați dependența funcțională:

aria pătratului	1	4	16	25	36	81
lungimea laturii						

18 Fie mulțimea $A=\{5,11,13,20\}$. Prezentați în două moduri (reprezentare grafică, tabel sau diagramă) dependența funcțională $x \to y$ dintre mulțimea A și $\mathbb{Z}$, dată prin regula $y=2x-13$.

19 Explicați de ce următoarele reprezentări nu sunt dependențe funcționale:



a b c

20 Reprezentați grafic deplasarea realizată de un camion știind că pleacă de la ora 8:00 și merge 3 ore cu viteza medie de 40 km/h, staționează 2 ore și apoi mai merge încă 2 ore cu viteza medie de 60 km/h. Pe grafic, punctul de plecare va fi kilometrul 0.

21 Determinați ce elemente trebuie să conțină mulțimea B pentru a putea stabili o relație funcțională $x \to y$, dată prin $y=2x+1$, de la mulțimea $A=\{-1,1,3,5,7\}$ la B. Reprezentați dependența dată printr-un tabel și printr-o diagramă.

22 Fie mulțimea $A=\{5,11,13,20\}$. Prezentați în două moduri (reprezentare grafică, tabel sau diagramă) dependența funcțională $x \to y$ dintre mulțimea A și $\mathbb{Z}$, dată prin regula $y=2x-13$.

Aprofundare

23 Între mulțimile $A=\{-3,-1,0\}$ și $B=\{1,2,10\}$ există o dependență funcțională. Determinați o regulă de forma $y=E(x)$ prin care se poate stabili dependența între cele două mulțimi.

24 Se dau mulțimile $A=\{-3,-1,0,1,5\}$, $B=\{-3,1,3,5,13\}$ și $C=\{-1,0,2,4\}$. Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile A și B, între mulțimile A și C, și una între B și C. Exprimați regulile dependențelor funcționale sub forma $y=E(x)$ și realizați reprezentarea grafică a acestora.

25 Fie A și B două mulțimi finite, având a, respectiv b elemente. Demonstrați că numărul relațiilor funcționale de la A la B este b^a.

26 Fie $A=\{a,b\}$ și $B=\{x,y,z\}$. Definiți prin tabel toate dependențele funcționale ce se pot defini de la mulțimea A la mulțimea B.

Probleme de șapte stele

27 Găsiți o regulă de stabilire a unei dependențe funcționale de la mulțimea numerelor întregi la mulțimea numerelor naturale și reprezentați-o printr-un tabel.

28 Găsiți o regulă de stabilire a unei dependențe funcționale de la mulțimea numerelor naturale la mulțimea numerelor naturale nenule și reprezentați-o printr-un tabel.

29 Găsiți o regulă de stabilire a unei dependențe funcționale de la mulțimea numerelor raționale la mulțimea numerelor întregi.

Teste de evaluare

Testul 1

(3p) 1 a Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(2,1)$, $B(-1,-3)$, $C(0,-3)$ și $D(4,0)$.
b Calculați distanțele AB, AC și CD.
c Determinați coordonatele mijlocului M al segmentului AC.

(2p) 2 Fie punctele $A(1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(2,1)$, care sunt vârfurile triunghiului ABC.
a Verificați dacă triunghiul este isoscel.
b Calculați perimetrul triunghiului ABC.

(1p) 3 Se consideră mulțimile $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ și $B=\{0,1,2,3,4\}$.
Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile A și B și realizați reprezentarea grafică a acesteia.

(1p) 4 Fie punctele $A(3, -3)$ și $M(2, -4)$. Determinați coordonatele punctului B știind că M este mijlocul segmentului AB.

(1p) 5 Între mulțimile $A=\{-2,-1,0,1\}$ și $B=\{1,2,5\}$ există o dependență funcțională. Determinați o regulă de forma $y=E(x)$ prin care se poate stabili dependența.

(1p) 6 Verificați dacă punctele $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ și $C(2, 3)$ sunt coliniare.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 a Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(3,2)$, $B(-3,-1)$, $C(2,0)$ și $D(0,-3)$.
b Calculați distanțele AB, BC și CD.
c Determinați coordonatele mijlocului M al segmentului AB.

(2p) 2 Fie punctele $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(1, -1)$, care sunt vârfurile triunghiului ABC.
a Verificați dacă triunghiul este isoscel.
b Calculați perimetrul triunghiului ABC.

(1p) 3 Se consideră mulțimile $A=\{-3,-1,0,2,4\}$ și $B=\{0,1,2,3,4\}$.
Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile A și B și realizați reprezentarea grafică a acesteia.

(1p) 4 Fie punctele $A(4, -2)$ și $M(-3,1)$. Determinați coordonatele punctului B știind că M este mijlocul segmentului AB.

(1p) 5 Între mulțimile $A=\{0,1,4,9\}$ și $B=\{-1,0,1,2\}$ există o dependență funcțională. Determinați o regulă de forma $y=E(x)$ prin care se poate stabili dependența.

(1p) 6 Verificați dacă punctele $A(1,2)$, $B(2,1)$ și $C(4, -1)$ sunt coliniare.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(3p) 1 a Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(-3,3)$, $B(5,-1)$, $C(0,4)$ și $D(4,0)$.

b Calculați distanțele AB, OB și CD, unde O este originea sistemului.

c Determinați coordonatele mijlocului M al segmentului OD.

(2p) 2 Fie punctele $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(0,4)$, care sunt vârfurile triunghiului ABC.

a Verificați dacă triunghiul este dreptunghic.

b Calculați aria triunghiului ABC.

(1p) 3 Se consideră mulțimile $A=\{-2,-1,3,4\}$ și $B=\{-1;-0,5;0,25;0,(3)\}$.
Stabiliți o dependență funcțională între mulțimile A și B și realizați reprezentarea grafică a acesteia.

(1p) 4 Fie punctele $O(0,0)$, $A(4,-3)$ și $B(2,-5)$, care sunt vârfurile triunghiului OAB. Determinați lungimea medianei duse din O pe AB.

(1p) 5 Între mulțimile $A=\{0,1,4,9,16\}$ și $B=\{1,2,3,4,5\}$ există o dependență funcțională. Determinați o regulă de forma $y=E(x)$ prin care se poate stabili dependența.

(1p) 6 Stabiliți dacă punctele $A(2,4)$, $B(3,3)$ și $C(0,1)$ sunt coliniare.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P

Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: ....

Clasa a VII-a:

Tema II.2. Reprezentarea punctelor în plan cu ajutorul sistemului de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice

(1,5p) 1 Completați pe fișă spațiile punctate cu răspunsul corect.

a Distanța dintre punctele $O(0;0)$ și $A(3;4)$ este $OA = \ldots$.

b Dacă P este mijlocul segmentului AB, unde $A(1;3)$ și $B(-3;3)$, atunci $P(\ldots;\ldots)$.

c Un exemplu de punct care aparține cadranului II al sistemului de axe ortogonale xOy este punctul $M(\ldots;\ldots)$.

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

a Distanța dintre punctele $M(0;2)$ și $N(2;0)$ este $MN = 2$. **A** **F**

b Punctul $A(-3;0)$ se află pe axa absciselor. **A** **F**

c Dacă $B(-4;0)$ și $C(4;0)$, atunci $BC = 0$. **A** **F**

(2p) 3 Fie dependența funcțională $x \to y$ de la mulțimea A la mulțimea B, dată prin regula $y = 2x - 1$. Uniți prin săgeți fiecare mulțime din coloana **A** cu mulțimea corespunzătoare din coloana **B**, conform regulii $y = 2x - 1$:

A	B
a $A = \{-3, -2, -1, 0\}$	1 $B = \{-2, -1, 0, 1\}$
b $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$	2 $B = \{-7, -5, -3, -1\}$
c $A = \{-2, 0, 2, 4\}$	3 $B = \{-4, -3, 0, 7\}$
d $A = \left\{-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}, 4\right\}$	4 $B = \{-5, -1, 3, 7\}$
	5 $B = \{-4, -1, 0, 6\}$

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Se consideră punctele $A(0;-2), B(0,-4)$ și $C(-\sqrt{3};-3)$

a Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.

b Stabiliți natura triunghiului ABC, apoi calculați aria lui.

(2p) 5 Între mulțimile $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ și $B=\{0,1,4\}$ există o dependență funcțională. Determinați o regulă de forma $y=E(x)$ prin care se poate stabili dependența și apoi reprezentați această dependență într-un tabel.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

II.3 Probleme cu caracter aplicativ

1 Pe harta militară a unui poligon de artilerie a fost fixat un reper cartezian cu originea în punctul de observare O. Pe această hartă, unitatea de măsură corespunde unei distanțe din teren de 400 de metri. Știind că pe hartă punctul de tragere este $T(-12{,}5)$ și că cele două ținte sunt $A(-3{,}18)$ și $B(9{,}14)$, aflați:

a Distanțele (rotunjite în metri) de la punctul de tragere până la fiecare țintă.

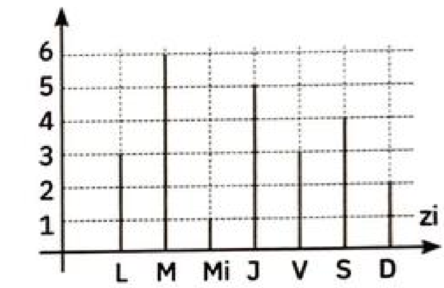
b La ce distanță față de punctul de observare se află un soldat care se găsește la mijlocul distanței dintre cele două ținte.

2 În figura alăturată, un elev a reprezentat cheltuielile sale zilnice pe parcursul unei săptămâni.

a În care zi a cheltuit cel mai puțin?

b În care trei zile consecutive a cheltuit cel mai mult?

c Care este media zilnică a cheltuielilor?

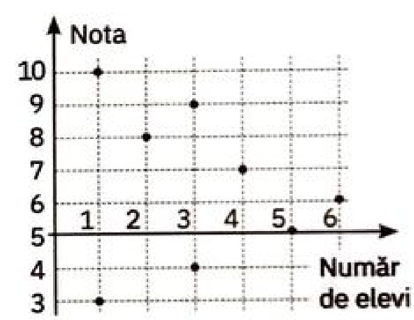


3 În graficul alăturat s-a reprezentat situația notelor obținute la teză de către elevii unei clase a VII-a. De exemplu, nota 7 a fost obținută de un număr de 4 elevi. Aflați:

a diferența dintre nota cea mai mare și nota cea mai mică;

b procentul din numărul elevilor clasei reprezentat de elevii cu note mai mari sau egale cu 7;

c media notelor obținute de clasa a VII-a.



4 Elevii clasei a VII-a B obțin următoarele rezultate la un test la matematică:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	–	–	1	3	4	5	5	3	4	3

a Câți elevi sunt în clasa a VII-a B?

b Care este media clasei la test?

c Care este procentul elevilor cu note mai mari sau egale cu 5?

5 Tudor și Alex au plecat de acasă cu bicicleta la ora 9.00. Au mers o oră cu viteza de 4 km/h, apoi s-au oprit să se odihnească 30 de minute. Au mai mers o oră și jumătate cu viteza de 3 km/h, apoi s-au oprit din nou pentru 30 de minute. Odihniți, au pornit spre casă cu viteza de 4,25 km/h.

a Câți kilometri a parcurs fiecare și la ce oră au ajuns acasă?

b Reprezentați, într-un grafic, deplasarea lui Tudor.

Geometrie

III

Asemănarea triunghiurilor

III.1 Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

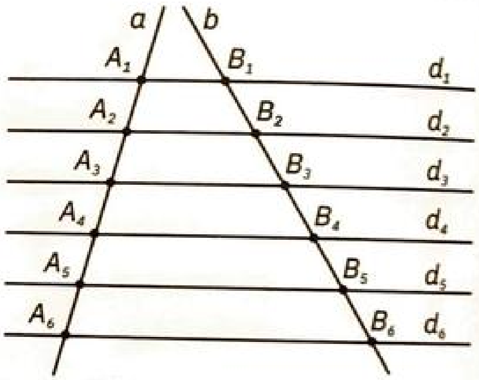
Definiție. Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor, exprimate cu aceeași unitate de măsură.

Exemplu. $AB = 35$ cm, $CD = 1{,}4$ dm, $\frac{AB}{CD} = \frac{35 \text{ cm}}{1{,}4 \text{ dm}} = \frac{35}{14} = \frac{5}{2}$.

Definiție. Patru segmente se numesc *proporționale* dacă se poate forma o proporție cu lungimile acestora.

Exemplu. Fie segmentele: $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 0{,}5$ cm, $DE = 1$ cm.
Atunci $\frac{AB}{BC} = 2$, $\frac{DE}{CD} = 2$ și $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD}$, deci segmentele date sunt proporționale.

Teorema paralelelor echidistante. Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.
În figura alăturată, din $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots$ și $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$, rezultă $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$



Exersare

1 Desenați segmentele AB și CD, știind că $AB = 2$ cm și $CD = 4$ cm. Calculați apoi valoarea rapoartelor:
a $\frac{AB}{CD}$; b $\frac{CD}{AB}$; c $\frac{AB}{AB}$; d $\frac{AB+CD}{AB}$.

2 Desenați segmentele AB, CD, EF, știind că: $AB = 3$ cm, $CD = 2$ cm, $EF = 0{,}5$ dm. Calculați apoi valoarea rapoartelor:
a $\frac{AB}{CD}$; b $\frac{AB}{EF}$; c $\frac{CD}{EF}$; d $\frac{EF}{CD}$.

3 a Două segmente AB și CD sunt congruente. Cât este $\frac{AB}{CD}$? Dar $\frac{CD}{AB}$?
b Cât este raportul dintre diametrul unui cerc și raza cercului?

4 Se consideră segmentele AB și CD. Dacă $\frac{AB}{CD} = 2$ și $AB + CD = 12$ cm, aflați AB și CD.

5 Fie A, B, C puncte coliniare, în această ordine, cu $AB = 10$ cm, $BC = 4$ cm. Calculați $\frac{AC}{AB} + \frac{AB}{BC}$.

6 În triunghiul ABC, segmentul MN este linie mijlocie, $M \in AB$, $N \in AC$. Calculați valoarea rapoartelor:

a $\frac{AM}{MB}$; b $\frac{AN}{AC}$; c $\frac{AB}{MB}$; d $\frac{MN}{BC}$.

7 Fie punctele M și N situate pe segmentul AB, astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{5}$ și $\frac{AN}{AB}=\frac{3}{7}$. Determinați:

a $\frac{AM}{AB}$; b $\frac{AN}{NB}$; c $\frac{AM}{AN}$; d $\frac{MN}{AM}$.

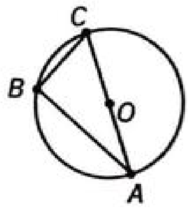
8 Dacă A, B, C sunt puncte coliniare, $AB = 24$ cm și $\frac{BC}{AB}=\frac{5}{6}$, aflați AC.

9 Fie punctele C și D pe segmentul AB astfel încât $\frac{AC}{CB}=\frac{7}{9}$ și $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{5}$. Aflați valoarea rapoartelor:

a $\frac{AD}{BC}$; b $\frac{AC}{BD}$; c $\frac{AC}{AD}$; d $\frac{DC}{BC}$; e $\frac{DC}{AB}$.

Consolidare

10 În figura alăturată, AC este diametru, coarda AB are lungimea de 4 cm, iar raza cercului are lungimea egală cu 2,5 cm.



a Aflați valoarea raportului $\frac{AB}{AC}$.

b Aflați valoarea raportului $\frac{BC}{AC}$.

11 Se dă segmentul AB de lungime 18 cm.
Construiți punctele M și P pe dreapta AB, astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{3}=\frac{AP}{PB}$.

12 Dacă punctul A aparține segmentului MN și $\frac{AM}{AN}=\frac{4}{5}$, calculați:

a $\frac{AN}{AM}$; b $\frac{AN}{MN}$; c $\frac{MN}{AN}$; d $\frac{AM}{MN}$.

13 Se știe că $AB = 24$ cm și C aparține segmentului AB, astfel încât $\frac{CA}{CB}=\frac{1}{2}$. Calculați CA și CB.

14 Laturile unui triunghi sunt proporționale cu numerele 2, 5 și 4. Calculați perimetrul triunghiului știind că cea mai mare latură are 15 cm.

15 Calculați raportul segmentelor AB și CD, știind că:

a $AB = 2$ dm, $CD = 0{,}3$ m; b $AB = 13$ mm, $CD = 0{,}04$ cm;
c $AB = 0{,}(3)$ hm, $CD = 0{,}(3)$ km; d $AB = 1{,}(3)$ dam, $CD = 2{,}1(3)$ dam.

16 Fie AB un segment împărțit în 15 părți congruente. Notăm cu C, D și respectiv E al 3-lea, al 7-lea, respectiv al 14-lea punct de diviziune. Calculați rapoartele:

a $\frac{AD}{AB}$; b $\frac{AC}{AB}$; c $\frac{AE}{AB}$; d $\frac{CD}{AB}$;
e $\frac{DE}{AB}$; f $\frac{CD}{DE}$; g $\frac{DE}{CE}$; h $\frac{CE}{DE}$.

17 Stabiliți dacă segmentele AB, BC, CD, DE sunt proporționale, știind că:

a $AB = 4$ cm; $BC = 1{,}6$ dm; $CD = 80$ mm și $DE = 2$ cm;

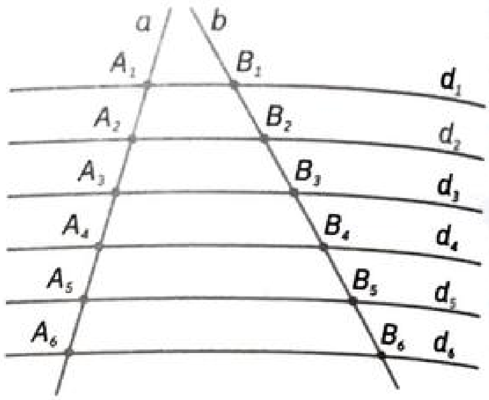
b $AB = 0{,}(3)$ cm; $BC = 5$ cm și $\frac{CD}{DE}=15$;

c $AB = 0{,}(6)$ dm; $BC = 1{,}(6)$ dm și $CD = 40\%\ DE$.

18 Fie segmentul AB de lungime 45 cm și M aparține dreptei AB. Calculați lungimile AM și MB, dacă:

a $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{7}$; b $\frac{AM}{MB}=\frac{5}{4}$.

19 În figura alăturată, $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \parallel d_6$
și $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$.
Dacă $B_1B_4 = 12$ cm, calculați B_1B_2, B_2B_4, B_3B_6 și B_1B_6.



Aprofundare

20 În triunghiul ABC, cu $AB = 24$ cm, considerăm mediana CD, $CD = 36$ cm. Dacă punctele M, N, P aparțin segmentului BC, astfel încât $BM = MN = NP = PC$ și punctele M', N', P' aparțin segmentului CD, astfel încât $MM' \parallel NN' \parallel PP' \parallel AB$, calculați lungimile NN', PP', MM', DN', $M'C$.

21 În triunghiul ABC, segmentul AM este mediană, $M \in BC$. Perpendiculara în A pe AM intersectează paralelele prin B și C la AM în punctele N și P. Demonstrați că $AN = AP$.

22 Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Pe latura AB se iau punctele M_1, M_2, M_3, M_4, astfel încât $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4B$. Fie $M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel M_3N_3 \parallel M_4N_4 \parallel AC$ ($N_1, N_2, N_3, N_4 \in BC$). Dacă $BN_3 = 24$ cm, calculați lungimea segmentului BC.

Probleme de șapte stele

23 În triunghiul ABC, segmentele BM și CN sunt mediane, $M \in AC$, $N \in AB$, iar $BM \cap CN = \{G\}$. Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor BG, respectiv CG, arătați că $MNPQ$ este paralelogram.

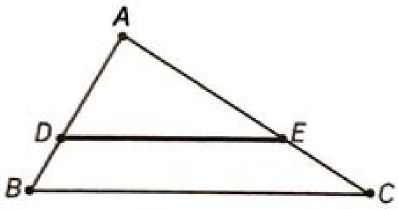
24 Fie segmentul AB și punctele M, N situate pe segmentul AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$ și $\frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}$. Dacă P este mijlocul segmentului AB, aflați $\frac{AP}{PM}$ și $\frac{AN}{NP}$.

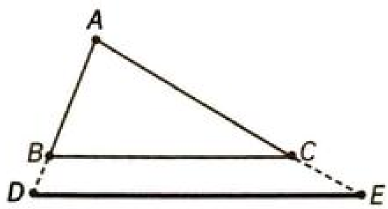
25 Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D, E, F, în această ordine, astfel încât B este mijlocul segmentului AC, C este mijlocul segmentului AD, D este mijlocul segmentului BE și E este mijlocul segmentului CF. Arătați că $\frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} \geq \frac{BF}{AF}$.

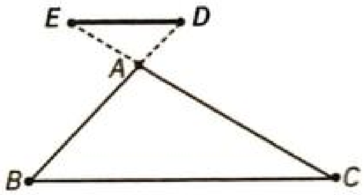
Teorema lui Thales

Teorema lui Thales. O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile acestora segmente proporționale.
Pentru figurile de mai jos, din $DE \parallel BC$, aplicând teorema lui Thales, rezultă

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \quad \text{sau} \quad \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE} \quad \text{sau} \quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$







Reciproca teoremei lui Thales. Fie triunghiul ABC și punctele $D \in AB$, $E \in AC$, aflate în același semiplan determinat de paralela prin A la BC.
Dacă $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, atunci $DE \parallel BC$.

Observație. În condițiile de mai sus, dacă $\frac{AD}{AB} \neq \frac{AE}{AC}$, atunci $DE \nparallel BC$.

Aplicații ale teoremei lui Thales

1 **Teorema paralelelor neechidistante.** Mai multe drepte paralele determină pe două secante oarecare segmente proporționale. Pentru figura 1, dacă: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots$ și a, b sunt două secante, atunci

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_4}{B_3B_4}=\ldots .$$

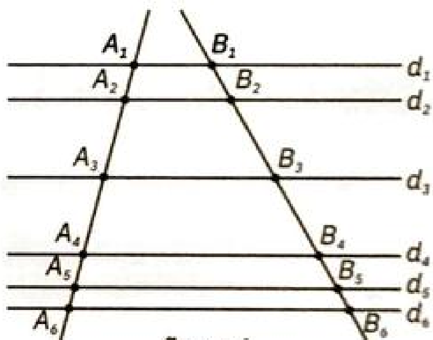


figura 1

2 **Teorema bisectoarei.** Într-un triunghi, bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu celelalte două laturi.

În figura 2, avem $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$, iar în figura 3 $\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}$, unde semidreapta AE este bisectoarea unghiului exterior unghiului BAC a unui triunghi ABC în care $AB \neq AC$.

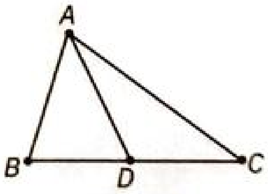


figura 2

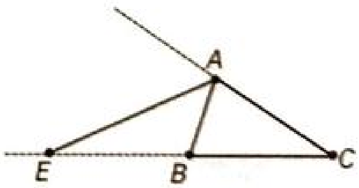
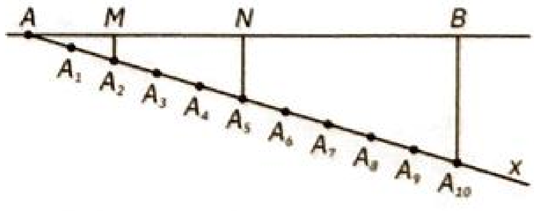
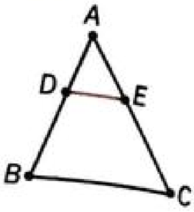


figura 3

3 **Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date.** De exemplu, pentru a împărți un segment AB în părți proporționale cu numerele 2, 3 și 5 procedăm astfel. Considerăm semidreapta Ax și pe ea, cu ajutorul compasului construim 10 segmente congruente ($2+3+5=10$). $AA_2=2u$, $A_2A_5=3u$, $A_5A_{10}=5u$. Unim A_{10} cu B și apoi ducem $A_5N \parallel A_{10}B$ și $A_2M \parallel A_{10}B$. Cu ajutorul teoremei paralelelor neechidistante obținem $\frac{AM}{2}=\frac{MN}{3}=\frac{NB}{5}$.



1 În figura alăturată, $DE \parallel BC$, $AD = 2$ cm, $DB = 3$ cm și $AE = 4$ cm. Calculați AB, EC și AC.



2 În triunghiul ABC, punctele M și N aparțin laturilor AB, respectiv AC, astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ și $MN \parallel BC$.

a Calculați valorile următoarelor rapoarte: $\frac{AM}{MB}; \frac{AN}{AC}; \frac{AN}{NC}; \frac{NC}{AC}$.

b Dacă $AB = 15$ și $AN = 8$ cm, determinați: AM, MB, AC, NC.

3 Se consideră triunghiul ABC, iar pe laturile AB și BC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $DE \parallel AC$.

a Dacă $DB = 4$ cm, $AB = 10$ cm și $BC = 15$ cm, calculați BE, AD și EC.

b Dacă $EC = 3$ cm, $BE = 12$ cm și $AD = 6$ cm, calculați DB, AB și BC.

c Dacă $BE = 7$ cm, $AD = 10$ cm și $AB = 24$ cm, calculați DB, EC și BC.

d Dacă $BD = 8$ cm, $AD = 6$ cm și $BE = 4$ cm, calculați AB, EC și BC.

4 În triunghiul ABC, punctele D și E aparțin laturilor AB, respectiv BC, astfel încât $DE \parallel AC$.

a Dacă $BD = 16$ cm, $AB = 28$ cm și $EC = 9$ cm, calculați AD, BE și BC.

b Dacă $AD = 6$ cm, $AB = 16$ cm și $EC = 18$ cm, calculați BD, BE și BC.

c Dacă $AB = 35$ cm, $BD = 20$ cm și $BE = 8$ cm, calculați AD, EC și BC.

d Dacă $AB = 24$ cm, $AD = 18$ cm, $EC = 12$ cm, calculați BD, BE și BC.

5 În triunghiul ABC, punctele E și F aparțin laturilor AB, respectiv AC. Dacă $EF \parallel BC$ și:

a $AB = 18$ cm, $AC = 36$ cm, $AE = 12$ cm, calculați AF, EB și FC;

b $AC = 16$ cm, $AF = 6$ cm, $EB = 5$ cm, calculați AB, AE, FC;

c $AC = 20$ cm, $EB = 9$ cm, $FC = 6$ cm, calculați AF, AE, AB;

d $AB = 27$ cm, $AE = 15$ cm, $FC = 16$ cm, calculați EB, AF, AC.

6 În triunghiul ABC, punctele D și E aparțin laturilor AB, respectiv AC. Dacă $DE \parallel BC$ și:

a $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm și $AD = 8$ cm, calculați AE, DB și EC;

b $AB = 30$ cm, $AD = 24$ cm și $AE = 8$ cm, calculați AC, DB și EC;

c $AC = 12$ cm, $AE = 8$ cm și $DB = 9$ cm, calculați AB, AD, EC;

d $EC = 15$ cm, $AD = 16$ cm și $DB = 12$ cm, calculați AB, AC și AE.

7 Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele D și E, $D \in AB$, $E \in AC$. Verificați dacă $DE \parallel BC$ în cazurile următoare:

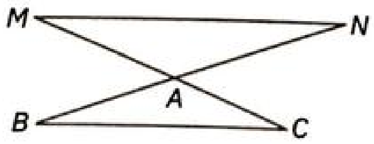
a $AB = 20$ cm, $BD = 11$ cm, $AC = 46$ cm și $AE = 18$ cm;

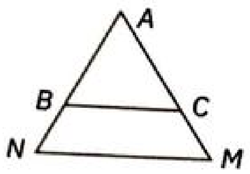
b $AD = 12$ cm, $BD = 16$ cm, $AE = 30$ cm și $AC = 70$ cm;

c $AC = 40$ cm, $EC = 24$ cm, $AD = 20$ cm și $BD = 36$ cm;

d $AB = 28$ cm, $AC = 42$ cm, $AD = 8$ cm și $AE = 12$ cm.

8 În figurile de mai jos avem $MN \parallel BC$, $AB = 8$ cm, $AN = 10$ cm și $AM = 12$ cm. Calculați AC și MC pentru fiecare figură.





9 Se consideră triunghiul ABC, Punctul M aparține dreptei AB și $MN \parallel BC$, $N \in AC$. Calculați:

a AC, dacă M aparține laturii AB, $AN + AC = 24$ cm, $AB = 14$ cm, $MB = 10$ cm;

b AN, știind că B aparține semidreptei AM, $\frac{AB}{AM} = \frac{3}{8}$ și $NC = 15$ cm.

10 În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, se consideră punctele E și F pe laturile AD, respectiv BC, astfel încât $\frac{AE}{ED} = \frac{3}{5}$ și $EF \parallel AB$. Știind că $BC = 16$ cm, calculați FC și BF.

11 Se dă un trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 20$ cm și $DC = 15$ cm. Calculați lungimea liniei mijlocii a trapezului și lungimea segmentului de pe linia mijlocie cuprins între diagonale.

12 Într-un trapez, linia mijlocie are lungimea de 27 de centimetri, iar segmentul care unește mijloacele diagonalelor este de 8 centimetri. Calculați lungimile bazelor trapezului.

13 Un trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, are $AB = 26$ cm și linia mijlocie $MN = 18$ cm, $M \in AD$, $N \in BC$.
a Calculați lungimea bazei mici a trapezului.
b Dacă P și Q sunt două puncte, $P \in AB$, $Q \in DC$, și $PQ \cap MN = \{R\}$, arătați că R este mijlocul segmentului PQ.

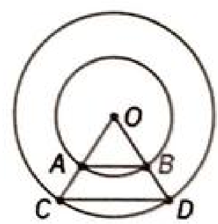
14 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel DC$, notăm cu $\{O\} = AC \cap BD$ și $\{M\} = AD \cap BC$. Demonstrați că $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$ și $\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC}$.

15 În trapezul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $BD = 35$ cm, iar $\frac{CO}{OA} = \frac{3}{4}$. Calculați lungimile segmentelor OD și OB.

16 În triunghiul ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Stabiliți dacă $DE \parallel BC$ în fiecare dintre situațiile:
a $AD = 6$ cm, $AE = 3$ cm, $DB = 0{,}8$ dm, $EC = 40$ mm;
b $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$, $AE = 6$ cm, $EC = 4$ cm;
c $DB = 30\%\, AB$, $EC = \frac{1}{3}AC$.

17 Fie punctele M și N situate pe laturile AC, respectiv BC ale triunghiului dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$. Dacă $\sphericalangle C = 30°$, $MN \parallel AB$, $MN = 6$ cm și $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}$, calculați lungimile NC, BC și AB.

Consolidare



18 Cercurile din figura alăturată sunt concentrice. Punctele O, A și C, respectiv O, B și D sunt coliniare. Demonstrați că segmentele AB și CD, coarde în cele două cercuri, sunt paralele.

19 Fie $ABCD$ un dreptunghi. Punctul M aparține laturii AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$. Dacă $MN \parallel AC$, unde N aparține segmentului BD, iar $MN \cap BC = \{P\}$, calculați $\frac{BP}{PC}$ și $\frac{BN}{BD}$.

20 Fie $MNPQ$ patrulater convex, $MP \cap NQ = \{O\}$. Dacă $OR \parallel NP$, $R \in MN$, și $OS \parallel PQ$, $S \in MQ$, demonstrați că $SR \parallel QN$.

21 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel DC$, $AB > DC$, se prelungesc laturile neparalele AD și BC. Fie $\{M\} = AD \cap BC$. Calculați lungimile segmentelor:
a CM, dacă $AD = 18$ cm, $BC = 6$ cm și $DM = 15$ cm;
b MD, dacă $AD = 3{,}6$ cm și $\frac{BC}{MC} = \frac{3}{4} : 1{,}25$;
c BC, dacă $BC - CM = 7{,}2$ dm și $\frac{AD}{DM} = \frac{17}{5}$.

22 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = BC = DC$, $\sphericalangle B = 60°$ și $AB = 16$ cm.

a Calculați lungimea bazei mici a trapezului, CD.

b Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, calculați $\frac{MC}{CB}$.

23 Se dă trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Pe laturile AD și BC se consideră punctele E și F, astfel încât $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Arătați că $EF \parallel CD$.

24 În triunghiul ABC, M și N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AC. Fie $AM \cap BN = \{G\}$, $MG = 4$ cm și $BM = 6$ cm. Paralela prin G la AB intersectează segmentul BM în P. Aflați lungimile segmentelor BP și PM.

25 În rombul $ABCD$, considerăm $E \in (BC)$, $F \in AC$ și $G \in AB$, astfel încât $EF \parallel AB$ și $EG \parallel AC$. Demonstrați că $\frac{CF}{CA} + \frac{BG}{AB} = 1$.

26 În paralelogramul $ABCD$, considerăm punctele M pe diagonala AC, $N \in AD$ și $P \in DC$, astfel încât $MN \parallel AB$ și $MP \parallel BC$. Demonstrați că $\frac{ND}{AD} + \frac{DP}{DC} = 1$.

27 Fie triunghiul ABC cu $AB = 0,(6) \cdot BC$ și $AC = 20$ cm. Dacă semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC, $D \in AC$, calculați AD și DC.

28 Fie triunghiul ABC și semidreapta BD bisectoarea interioară a unghiului B, $D \in AC$. Aflați:

a AD și DC, știind că $AB = 15$ cm; $BC = 24$ cm și $AC = 26$ cm;

b BC, știind că $\frac{AD}{DC} = \frac{7}{6}$ și $AB = 21$ cm.

29 În triunghiul ABC, fie semidreapta AD bisectoarea unghiului A, $D \in BC$, și $DE \parallel AB$, $E \in AC$. Dacă $AC = 12$ cm și $AB = 8$ cm, calculați lungimea segmentelor AE, DE și CE.

30 În triunghiul ABC, E este mijlocul laturii AB, semidreapta EF este bisectoarea $\sphericalangle AEC$, $F \in AC$, iar semidreapta EG este bisectoarea $\sphericalangle CEB$, $G \in BC$. Arătați că $FG \parallel AB$.

31 În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului BC, $E \in AB$, $F \in AC$, astfel încât $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BDE$ și $\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle FDC$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor AE, respectiv AF. Arătați că: $\frac{AM}{AN} = \frac{ME}{NF} = \frac{EB}{FC}$.

32 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, se cunosc $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm. AM este mediană, $M \in BC$, iar semidreapta BD este bisectoarea unghiului B, $D \in AC$. Dacă $AM \cap BD = \{N\}$, calculați $\frac{AD}{DC}$ și $\frac{AN}{AM}$.

33 În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii BC și D este simetricul lui A față de M. Semidreapta CN este bisectoarea unghiului ACB, $N \in AB$, și $BE \parallel NC$, $E \in CD$, $AD \cap BE = \{F\}$, $CN \cap AD = \{P\}$. Demonstrați că:

a $AP = FD$;

b $\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{EC}$.

34 Se consideră segmentul AB cu lungimea de 12 cm. Împărțiți segmentul AB în trei părți proporționale cu trei segmente de lungimi 2 cm, 3 cm, respectiv 4 cm.

35 În triunghiul ABC, AM este mediană, $M \in BC$. Pe latura AB se consideră punctul N. Paralela prin N la AM intersectează dreptele AC și BC în P, respectiv Q. Arătați că $\frac{AN}{AP}=\frac{AB}{AC}$.

36 Se consideră triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, și C' simetricul lui C față de A. Dacă $AM \perp BC'$, $M \in BC'$ și $N \in BC'$, astfel încât $\frac{BN}{NC'}=\frac{1}{3}$, iar $AN \cap BC=\{P\}$, demonstrați că $AN = NP$.

37 Se dă triunghiul ABC, $D \in AC$ (A este situat între D și C), $E \in AB$ (A este situat între B și E), $F \in BC$, astfel încât $DB \parallel AF$ și $AF \parallel EC$.

a Arătați că $\frac{DA}{DC}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{EB}{EA}=1$.

b Stabiliți dacă $DE \parallel BC$.

38 Fie $ABCD$ un patrulater convex. Dacă G_1 este centrul de greutate al triunghiului ABD, iar G_2 este centrul de greutate al triunghiului BCD, arătați că $G_1G_2 \parallel AC$.

Aprofundare

39 În patrulaterul $ABCD$, cu $AD \nparallel BC$, paralela prin B la AD intersectează diagonala AC în M, iar paralela prin A la BC intersectează diagonala BD în N. Arătați că $MN \parallel CD$.

40 În triunghiul ABC dreptunghic, $\sphericalangle A=90°$, $\sphericalangle B=45°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $DM \parallel AC$, $M \in AB$. Fie BN bisectoarea unghiului ABC, $N \in AC$, și AQ bisectoarea unghiului CAD, $Q \in BC$, iar $BN \cap AD = \{P\}$. Arătați că:

a $PQ \parallel AC$;

b $\frac{QC}{QD}=\frac{NC}{NA}$.

41 În trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$), se știe că $\sphericalangle B=45°$ și $AB=3CD$. Fie $CM \perp AB, DN \perp AB$, $M,N \in AB$. Dacă $CM=DN=6$ cm, atunci:

a calculați lungimile bazelor trapezului;

b dacă $CB \cap DN=\{P\}$ și $AP \cap CD=\{Q\}$, calculați $\frac{PQ}{PA}$.

42 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC = DB$, $\sphericalangle B=60°$, $BC=12$ cm, iar $AC \perp BC$.

a Calculați lungimile bazelor trapezului.

b Dacă CM și BN sunt mediane în triunghiul ABC, $M \in AB$, $N \in AC$, $BN \cap AD=\{P\}$, iar $BN \cap CM=\{G\}$, calculați $\frac{BG}{BP}$.

c Dacă $DQ \parallel BP$, $Q \in NC$, arătați că $AN=2NQ$.

43 Demonstrați că într-un trapez isoscel ortodiagonal linia mijlocie este congruentă cu înălțimea trapezului.

44 Fie paralelogramul $ABCD$ și M mijlocul laturii AB. Paralela dusă prin O la DM, unde O este centrul paralelogramului, intersectează AD în P și AB în Q.

a Aflați raportul $\frac{PQ}{OQ}$.

b Aflați raportul $\frac{\mathcal{A}_{SAM}}{\mathcal{A}_{ABCD}}$, unde $AC \cap DM=\{S\}$.

45 În triunghiul ABC, semidreptele BD și CE ($D \in AC$, $E \in AB$) sunt bisectoare care se intersectează în punctul I. Dacă $\mathcal{A}_{ABD}=\mathcal{A}_{ACE}$, atunci $AI \perp ED$.

46 Fie triunghiul ABC în care AO este mediană, G este centrul de greutate al triunghiului ABC, iar $GD \parallel AB$ și $GE \parallel AC$, unde D și E sunt pe latura BC.

a Dacă H este simetricul punctului G față de O, arătați că $GEHD$ este paralelogram.

b Dacă $DG \cap AE = \{M\}$ și $DG \cap BH = \{N\}$, arătați că $MN = 2DG$.

47 Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $\sphericalangle DAB < \sphericalangle ADC$. Perpendiculara din punctul B pe dreapta AC intersectează segmentul DC în punctul F. Perpendiculara în punctul F pe dreapta DC intersectează segmentele AC și AB în punctele P, respectiv E. Dacă $BP \cap AD = \{Q\}$, demonstrați că $AC \perp EQ$.

48 În triunghiul ABC, punctele M și N sunt situate pe laturile BC, respectiv AC. Fie $AM \cap BN = \{P\}$. Arătați că, dacă $AP \cdot NC = 2AN \cdot PM$, atunci M este mijlocul laturii BC.

49 În triunghiul ABC se consideră punctele D și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EA}$. Arătați că mijloacele segmentelor AB, AC și DE sunt coliniare.

50 În triunghiul ABC se consideră punctele P și E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $PE \parallel BC$ și $3AP = 2AB$. Fie M mijlocul laturii AC și $PE \cap BM = \{S\}$. Arătați că S este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Testul 1

(3p) 1 Se consideră segmentul AB și punctul M situat în interiorul segmentului AB, astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{3}$. Calculați rapoartele:

a $\frac{MB}{MA}$; b $\frac{AM}{AB}$; c $\frac{AB}{MB}$.

(3p) 2 Un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, are $AB = 18$ cm și $CD = 6$ cm.

a Calculați lungimea liniei mijlocii a trapezului.

b Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $\frac{OD}{OB}=\frac{1}{3}$, iar $AC = 16$ cm, calculați AO și OC.

(3p) 3 În triunghiul ABC, AD bisectoarea $\widehat{ABC}$, $D \in (BC)$, $AB = 9$ cm, $AC = 15$ cm și $BC = 20$ cm. Aflați BD și CD.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 Se consideră segmentul AB de lungime 48 cm și punctul M situat în interiorul segmentului AB. Calculați AM și MB dacă $\frac{AM}{MB}=\frac{3}{5}$.

(3p) 2 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = DC = BC$, $\sphericalangle B = 60°$ și $CD = 4$ cm.

a Calculați AB.

b Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, calculați $\frac{MD}{MA}$.

(3p) 3 Se consideră triunghiul ABC, în care AD este bisectoarea unghiului A, $D \in BC$. Se știe că $AB = 9$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 10$ cm.

a Aflați BD și CD.

b Dacă $DE \parallel AB$, $E \in AC$, calculați perimetrul patrulaterului $ABDE$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(3p) **1** Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele M și N, $M \in AB$, $N \in AC$, astfel încât $MN \parallel BC$. Dacă $AB = 9$ cm, $AM = 3$ cm și $NC = 4$ cm, calculați MB, AN și AC.

(3p) **2** În triunghiul ABC, punctele M, N și P aparțin laturilor AB, AC, respectiv BC, astfel încât $MN \parallel BC$ și $NP \parallel AB$.

a Arătați că $MNPB$ este paralelogram.

b Arătați că $\frac{AM}{AB} + \frac{PC}{BC} = 1$.

(3p) **3** Fie $ABCD$ un dreptunghi. Pe laturile AB și BC se consideră punctele M și N, astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ și $\frac{BN}{NC} = 3$.

a Arătați că $MN \parallel AC$.

b Dacă $MN \cap DB = \{P\}$, calculați $\frac{BP}{PD}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(3p) **1** Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele M și N, $M \in AB$, $N \in AC$. Verificați dacă $MN \parallel BC$, știind că: $AB = 18$ cm, $AM = 8$ cm, $AC = 24$ cm și $NC = 10$ cm.

(3p) **2** Fie $ABCD$ un dreptunghi. Punctul M aparține laturii AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$. Fie $MN \parallel BD$, $N \in AD$. Se știe că $ND = 9$ cm.

a Arătați că $\frac{AM}{DC} = \frac{AN}{BC}$.

b Calculați AN și AD.

(3p) **3** În triunghiul ABC, punctele P, Q și R aparțin laturilor AB, AC, respectiv BC, astfel încât $PQ \parallel BC$ și $QR \parallel AB$.

a Arătați că $\frac{AP}{PB} = \frac{BR}{RC}$.

b Arătați că $\frac{AP}{AB} \cdot \frac{BC}{BR} = 1$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P

Fișă pentru portofoliul individual

G1

Numele și prenumele: ....

Clasa a VII-a:

Tema III.1. Segmente proporționale. Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales. Aplicații

(2p) 1 Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a Raportul a două segmente congruente este egal cu ... .

b O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor segmente ... .

c Dacă M este mijlocul segmentului AB, valoarea raportului $\dfrac{AB}{AM}$ este ... .

d Segmentele $AB = 0{,}6$ dm, $AC = 120$ mm sunt respectiv proporționale cu $MN = 0{,}05$ dam și $MP = x$ cm. Atunci $x =$ ... .

(2p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

a Dacă $AB = 15$ cm, iar $CD = 5$ m, atunci $\dfrac{AB}{CD} = 3$. **A** **F**

b În orice triunghi, bisectoarea unui unghi împarte latura opusă în două segmente congruente. **A** **F**

c O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină, pe celelalte două laturi sau pe prelungirile acestora, segmente congruente. **A** **F**

d Mai multe drepte paralele determină pe două secante oarecare segmente proporționale. **A** **F**

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**, ținând cont de condițiile indicate în problemă.

În triunghiul ABC, $D \in AB$ și $E \in AC$, astfel încât $DE \parallel BC$. Se cunosc $AB = 15$ cm, $DB = 5$ cm și $AE = 8$ cm. Atunci:

A	B
a Lungimea segmentului AD	1 12 cm
b Lungimea segmentului EC	2 10 cm
c Lungimea segmentului AC	3 2
d Valoarea raportului $\dfrac{DB}{EC}$	4 1,25
	5 4 cm

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 În triunghiul ABC, AE este bisectoarea interioară a unghiului A. Dacă $BE = 8$ cm, $CE = 10$ cm, iar $\mathcal{P}_{ABC} = 45$ cm, calculați AB și AC.

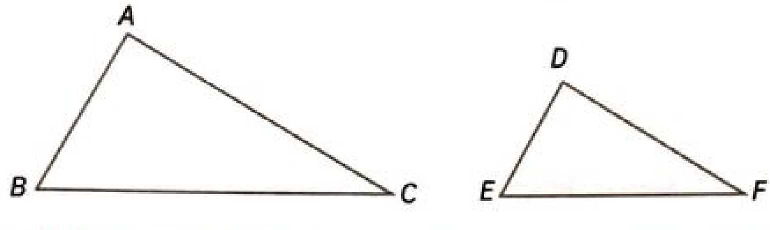
(1p) 5 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Fie $OM \parallel AD$, $M \in AB$, și $ON \parallel CD$, $N \in BC$. Demonstrați că $MN \parallel AC$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Triunghiuri asemenea.
Teorema fundamentală a asemănării

Definiție. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile corespondente congruente și laturile corespondente proporționale.

$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$ și $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$, unde k se numește raport de asemănare.



Teorema fundamentală a asemănării. O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile acestora) un triunghi asemenea cu cel dat.

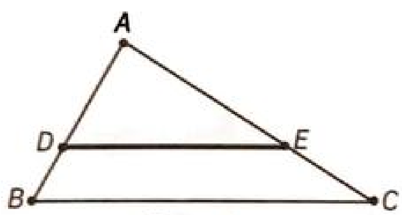


figura 1

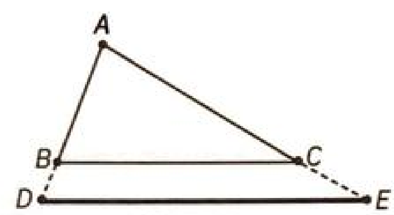


figura 2

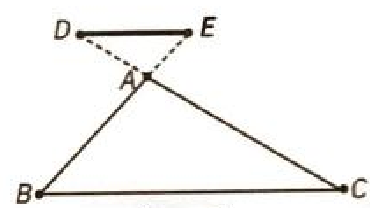


figura 3

Avem: $DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$; (figura 1); $DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$; (figura 2);
$DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ACB$ (figura 3).

Exersare

1 Se știe că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Completați spațiile punctate:
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle \ldots$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle \ldots$, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{\ldots} = \frac{AC}{\ldots}$.

2 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm și raportul de asemănare este $k = 2$, calculați lungimile DE și EF.

3 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm și raportul de asemănare este $k = \frac{2}{5}$, calculați lungimile DE și DF.

4 Dacă $\Delta CDE \sim \Delta MNP$, $CD = 4$ cm, $DE = 6$ cm și raportul de asemănare $k = 2$, calculați lungimile MN și NP.

5 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 6$ cm, $MN = 4$ cm, $MP = 2$ cm și $NP = 6$ cm, calculați AC și BC.

6 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $PQ = 6$ cm, $QR = 8$ cm, $PR = 10$ cm și $P_{ABC} = 48$ cm, determinați lungimile laturilor triunghiului ABC.

7 Dacă $\Delta ACB \sim \Delta DMP$, $\sphericalangle A = 35°$ și $\sphericalangle C = 73°$, determinați $\sphericalangle D$, $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle P$.

8 Dacă $\Delta ABD \sim \Delta CMN$, $\sphericalangle C = 39°$ și $\sphericalangle D = 48°$, determinați măsurile unghiurilor A, B, M și N.

9 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 25$ cm, $AC = 30$ cm, $MP = 18$ cm și $\sphericalangle A = 75°$, determinați MN și $\sphericalangle M$.

10 Se dă triunghiul ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, și $DE \parallel BC$.
a Dacă $AD = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $DE = 5$ cm și $BC = 10$ cm, calculați AB, BD, AE, EC.
b Dacă $AB = 18$ cm, $DB = 12$ cm, $DE = 4$ cm și $AE = 9$ cm, calculați AD, BC, AC și EC.
c Dacă $AD = 5$ cm, $AB = 15$ cm, $AC = 18$ cm și $BC = 12$ cm, calculați AE, DE, DB și EC.
d Dacă $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm, $AC = 15$ cm și $BC = 18$ cm, calculați AB, AE, EC și DE.
e Dacă $AC = 14$ cm, $AD = 2{,}5$ cm, $DE = 4$ cm și $BC = 16$ cm, calculați AE, AB, DB și EC.

11 Fie triunghiul ABC, cu $AB = 12$ cm, $AC = 9$ cm și $BC = 12$ cm. Pe latura AB se consideră punctul D, iar pe latura AC se consideră punctul E, astfel încât $AD = 4$ cm și $AE = 3$ cm.
a Stabiliți dacă $DE \parallel BC$.
b Calculați DE.

12 Fie triunghiul MNP cu $MN = 15$ cm, $MP = 20$ cm și $NP = 13{,}5$ cm. Pe latura MN se consideră punctul A astfel încât $\frac{MA}{AN} = \frac{2}{3}$, iar pe latura MP se consideră punctul B astfel încât $AB \parallel NP$.
a Demonstrați că $ABPN$ este trapez.
b Calculați $P_{\Delta MAB}$ și P_{ABPN}.

13 Triunghiul ABC are $AB = 15$ cm, $AC = 21$ cm și $BC = 18$ cm. Pe latura AB se consideră punctul D astfel încât $DB = 2AD$, iar pe latura BC se consideră punctul E astfel încât $BC = 3EC$. Calculați perimetrul triunghiului BED.

14 Triunghiul echilateral ABC are perimetrul egal cu 18 cm. Pe latura AC se consideră punctul M astfel încât $AM = 2$ cm. Prin M se construiește paralela la BC, care intersectează AB în N. Calculați perimetrul patrulaterului $BCMN$.

Consolidare

15 În triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), AD este înălțime, $D \in BC$, DE este înălțime în triunghiul ADC, $E \in AC$.
a Demonstrați că $DE \parallel AB$.
b Dacă $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm și $BD = 6$ cm, calculați DE.

16 a Dacă $\Delta ABC \sim \Delta ACB$, stabiliți natura ΔABC.
b Dacă $\Delta ABC \sim \Delta CAB$, stabiliți natura ΔABC.

17 În triunghiul ABC se cunosc $AB = 8$ cm, $AC = 20$ cm și $BC = 16$ cm. Pe latura AB se consideră punctul D astfel încât $AD = 5$ cm. Se construiește $DE \parallel AC$, $E \in BC$, și apoi $EF \parallel AB$, $F \in AC$. Stabiliți natura patrulaterului $ADEF$ și apoi calculați perimetrul său.

18 În figura 1, AM și BN sunt mediane în triunghiul ABC, iar $GP \parallel BC$.
Se știe că $BC = 12$ cm și $AM = 9$ cm.
a Calculați GP.
b Dacă, în plus, $AC = 30$ cm, calculați NP.

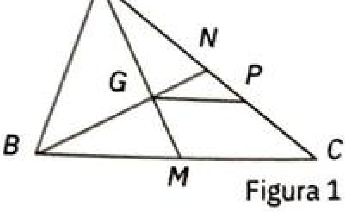


Figura 1

19 În figura 2, AA' este bisectoarea unghiului BAC, iar $A'D \parallel AC$ și $A'E \parallel AB$, $D \in AB$, $E \in AC$.
Se știe că $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm și $BC = 15$ cm.
a Stabiliți natura patrulaterului $ADA'E$.
b Calculați perimetrul patrulaterului $ADA'E$.

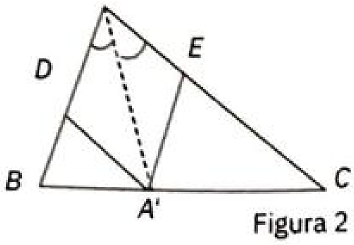


Figura 2

20 În figura 3, triunghiul ABC este isoscel ($AB = AC$), AD este înălțime, iar BE și CF sunt mediane, $FC \cap AD = \{G\}$, $H \in AC$.
Știind că $AB = 12$ cm și $GH \parallel BC$, calculați EH.

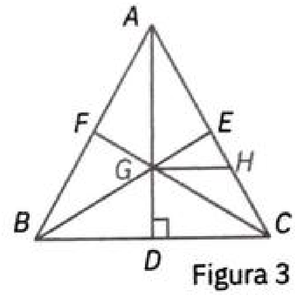


Figura 3

21 În figura 4, triunghiul ABC este dreptunghic în A, AA' este bisectoarea unghiului A, iar $A'M \parallel AB$ și $A'N \parallel AC$.
Se știe că $AB = 21$ cm și $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$.

a Demonstrați că $AMA'N$ este pătrat.
b Calculați perimetrul lui $AMA'N$.

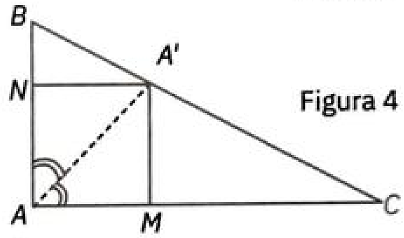


Figura 4

22 Trapezul $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB = 12$ cm, $CD = 20$ cm, $AD = 8$ cm și $BC = 12$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, calculați perimetrul triunghiului EAB.

23 Trapezul $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB = 15$ cm, $CD = 10$ cm, $AD = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, calculați perimetrul triunghiului EDC.

24 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AB = 7$ cm, $CD = 9$ cm și $AC = 8$ cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, calculați AO și OC.

25 În trapezul $MNPQ$, $MN \parallel PQ$, avem $MN = 15$ cm, $PQ = 25$ cm, $MP = 20$ cm și $NQ = 24$ cm. Dacă $MP \cap NQ = \{O\}$, calculați MO, OP, NO și OQ.

26 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AB = 21$ cm, $CD = 28$ cm, $BD = 28$ cm și $AC = 35$ cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, calculați AO, OC, BO și OD.

27 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AB = 20$ cm, $CD = 13$ cm și $AD = 7$ cm. Dacă $E \in AD$ și $F \in BC$ astfel încât $EF \parallel CD$, iar $AE = 3$ cm, calculați EF.

28 În trapezul $MNPQ$, avem $MN \parallel PQ$, $MN = 24$ cm și $PQ = 16$ cm. Dacă $MP \cap NQ = \{O\}$ și $OR \parallel MN$, $R \in QM$, calculați OR.

29 În figura 5, $D \in AC$, $DE \parallel AB$ și $DF \parallel BC$.

a Demonstrați că $\frac{AF}{AB} = \frac{BE}{BC}$.
b Demonstrați că $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{BC} = 1$.

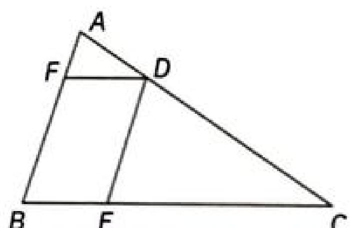


Figura 5

30 În figura 6, $ABCD$ este paralelogram. Se dau $AD = 10$ cm, $M \in AD$, $AM = 6$ cm. Dacă $AC \cap BM = \{P\}$ și $BM \cap CD = \{N\}$, calculați:
$\frac{AB}{ND}, \frac{AB}{NC}, \frac{BP}{PN}, \frac{AP}{AC}, \frac{BP}{MN}$.

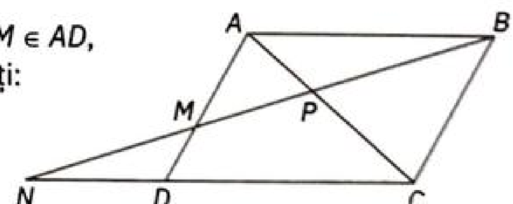


Figura 6

31 În figura 7, $ABCD$ este trapez, $AC \cap BD = \{O\}$, iar $EF \parallel AB$, $O \in EF$.

a Demonstrați că $\frac{OE}{AB} + \frac{OE}{CD} = 1$.
b Demonstrați că $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$.

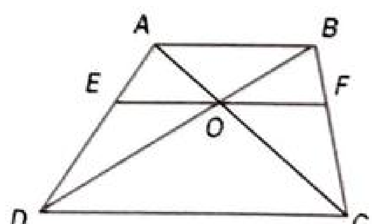


Figura 7

32 În figura 8, $ABCD$ este paralelogram. M este mijlocul laturii BC, $AC \cap BD = \{O\}$, iar $ON \parallel DM$, $N \in AD$. Calculați valoarea raportului $\dfrac{AN}{ND}$.

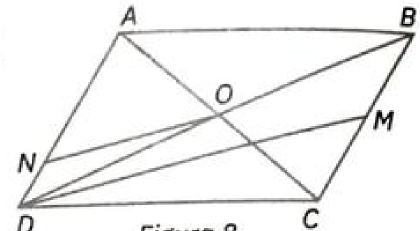


Figura 8

33 În figura 9, cele două cercuri sunt tangente exterioare. Tangenta comună exterioară a celor două cercuri, AB, intersectează OO' în punctul M. Dacă $OA = 6$ cm, iar $O'B = 2$ cm, calculați OM.

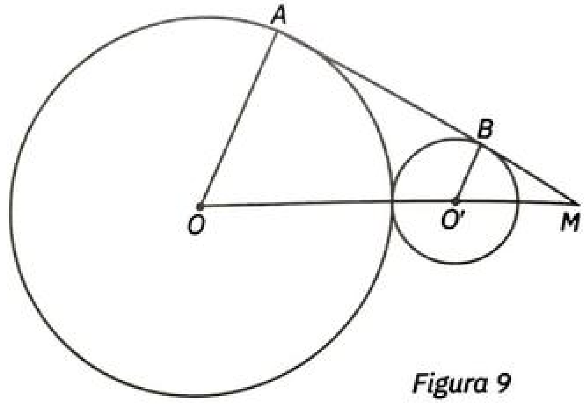


Figura 9

34 În pătratul $ABCD$, punctul M este mijlocul laturii AB. Fie $AC \cap MD = \{N\}$, iar $BD \cap MC = \{P\}$.

a Demonstrați că $\Delta MNP \sim \Delta MDC$.

b Demonstrați că $DC = 3NP$.

35 În trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$), pe latura AD se consideră punctul E astfel încât $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{2}{3}$, iar pe latura BC se consideră punctul F astfel încât $EF \parallel AB$. Știind că $AB = 14$ cm, $AD = 10$ cm și $EF = 18$ cm, calculați perimetrul și aria trapezului $ABCD$.

36 Pe latura AB a paralelogramului $ABCD$ se consideră un punct E.
Dacă $CE \cap AD = \{F\}$ și $CE \cap BD = \{G\}$, demonstrați că:

a $\dfrac{BC}{DF} = \dfrac{CE}{CF}$; **b** $\dfrac{CG}{GF} = \dfrac{CE}{CF}$.

37 Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 120°$. Fie AA' bisectoarea unghiului BAC, $A' \in BC$.
Demonstrați că $\dfrac{A'A}{AB} + \dfrac{A'A}{AC} = 1$.

Aprofundare

38 În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$) avem $AB = 12$ cm și $CD = 15$ cm. Diagonala AC este bisectoarea unghiului BCD. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, calculați EC.

39 În triunghiul echilateral ABC, AD și BE sunt înălțimi, $D \in BC$, $E \in AC$, iar $AD \cap BE = \{G\}$. Se construiește $GM \parallel BC$, $M \in AB$, și $GN \parallel AC$, $N \in AB$. Dacă $\mathcal{P}_{ABC} = 45$ cm, calculați AM și MN.

40 În triunghiul ABC, AD este mediană, $D \in BC$. Pe latura AC se consideră punctul E. Dacă $AD \cap BE = \{F\}$, arătați că $AF \cdot EC = 2AE \cdot FD$.

41 În patrulaterul convex $ABCD$ se cunosc $AB = 15$ cm, $BC = 25$ cm, $CD = 24$ cm și $AD = 16$ cm. Fie BB' bisectoarea unghiului ABC, $B' \in AC$, iar $B'E \parallel CD$, $E \in AD$, și $B'F \parallel AD$, $F \in CD$. Calculați $B'E$ și $B'F$.

42 Fie trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Paralela prin O la bazele trapezului intersectează laturile AD și BC în M, respectiv N. Demonstrați că $MN = \dfrac{2\,AB \cdot CD}{AB + CD}$.

43 (Teorema lui Menelaus). Se consideră triunghiul ABC și d o dreaptă care intersectează laturile AB, AC și prelungirea lui BC în punctele M, P, respectiv N. Atunci $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$.

44 (Teorema lui Ceva). Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P pe laturile AB, BC și respectiv AC, astfel încât dreptele AN, BP și CM să fie concurente. Atunci $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$.

Probleme de șapte stele

45 Fie $ABCD$ un patrulater și d o dreaptă ce nu conține niciunul din vârfurile acestuia. Dacă $d \cap AB = \{M\}$, $d \cap BC = \{N\}$, $d \cap CD = \{P\}$ și $d \cap DA = \{Q\}$, atunci are loc relația $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$.

46 O dreaptă paralelă cu latura BC a triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul P și latura AC în punctul Q. Fie F mijlocul laturii AC, iar R intersecția lui PQ cu FB. Să se demonstreze că suma $PQ + PR$ este constantă.

47 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic având bazele $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm și $AD \perp AB$, iar $MN \parallel AB$, $M \in AD$, $N \in BC$. Determinați lungimea segmentului MN, știind că $\frac{\mathcal{A}_{MNCD}}{\mathcal{A}_{ABNM}} = \frac{1}{4}$.

III.4 Criterii de asemănare a triunghiurilor. Aproximarea în practică a distanțelor folosind asemănarea

Teorema 1 (Criteriul U.U.). Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două perechi de unghiuri corespondente congruente.

Teorema 2 (Criteriul L.U.L.). Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două perechi de laturi corespondente proporționale și unghiurile dintre ele congruente.

Teorema 3 (Criteriul L.L.L.). Două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile corespondente proporționale.

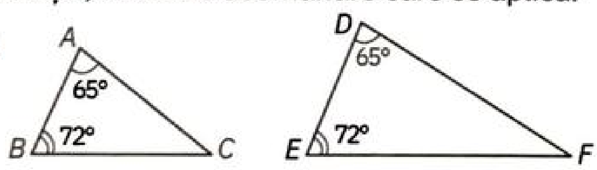
Observația 1. Raportul înălțimilor, al medianelor și al bisectoarelor ce pornesc din vârfurile corespondente, precum și raportul perimetrelor a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.

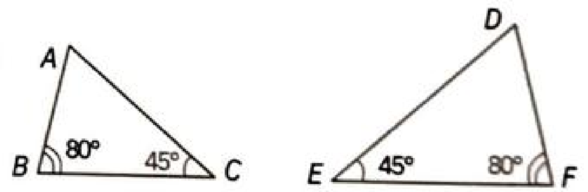
Observația 2. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

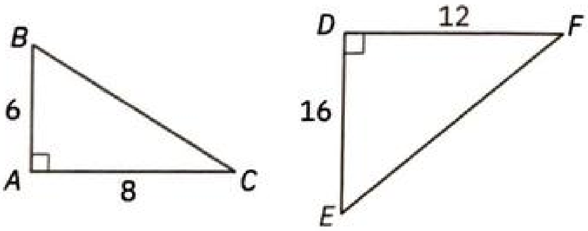
Exersare

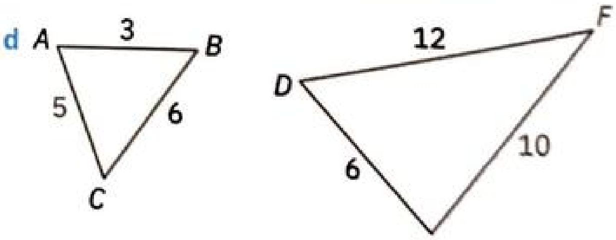
1 Desenați triunghiurile ehilaterale *ABC* și *DEF* dacă se cunosc $AB = 4$ cm și $DE = 2$ cm.
   a Arătați că triunghiurile *ABC* și *DEF* sunt asemenea.
   b Desenați, cu aproximație, folosind doar rigla negradată, un triunghi *MNP* asemenea cu triunghiul *ABC*, astfel încât latura triunghiului *MNP* să fie de două ori mai mare decât latura triunghiului *ABC*.

2 Se consideră perechile de triunghiuri asemenea din figurile următoare. Precizați, în fiecare situație, cazul de asemănare care se aplică.

a


b


c


d


3 a Decupați dintr-o coală de hârtie, fără a face măsurători, un triunghi asemenea cu triunghiul *ABC* de la problema 2 a, ale cărui laturi să aibă lungimea de trei ori mai mare decât laturile triunghiului *ABC*.
   b Măsurați laturile triunghiului *ABC* și laturile triunghiului decupat și comparați rezultatele obținute cu cele ale colegilor.

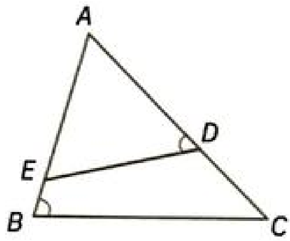
4 a Decupați dintr-o coală de hârtie, fără a face măsurători, un triunghi asemenea cu triunghiul *DEF* de la problema 2 b, ale cărui laturi să aibă lungimea de două ori mai mare decât laturile triunghiului *DEF*.
   b Măsurați laturile triunghiului *DEF* și laturile triunghiului decupat și comparați rezultatele obținute cu cele ale colegilor.

5 Stabiliți dacă triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea, în fiecare dintre următoarele situații:
a $\sphericalangle A=35^\circ$, $\sphericalangle B=60^\circ$, $\sphericalangle M=35^\circ$, $\sphericalangle P=85^\circ$;
b $\sphericalangle B=62^\circ$, $\sphericalangle C=71^\circ$, $\sphericalangle M=46^\circ$, $\sphericalangle N=62^\circ$;
c $\sphericalangle A=37^\circ30'$, $\sphericalangle C=50^\circ$, $\sphericalangle N=112^\circ30'$, $\sphericalangle P=50^\circ$;
d $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}$, $\sphericalangle B=56^\circ$, $\sphericalangle M=28^\circ$, $\sphericalangle P=96^\circ$;
e $AB=MN$, $AC=0{,}5$ dm, $PM=5$ cm, $\sphericalangle M=40^\circ$, $\sphericalangle B=\sphericalangle P=70^\circ$.

6 Stabiliți dacă triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea, în fiecare dintre următoarele situații:
a $AB=\frac{3}{5}\cdot MN$, $AC=0{,}6\cdot MP$ și $BC=60\%\cdot NP$;
b $\sphericalangle A=0{,}(6)\cdot 90^\circ$, $\sphericalangle B=70^\circ$, $\sphericalangle P=80^\circ$ și $\sphericalangle M=0{,}(3)\cdot 180^\circ$;
c $\sphericalangle N\equiv\sphericalangle B$, $\frac{AB}{2}=\frac{MN}{3}$ și $\frac{BC}{10}=\frac{NP}{15}$;
d $AB=6$ cm, $BC=8$ cm, $AC=10$ cm, $MN=3$ cm, $NP=5$ cm, $MP=2$ cm;
e $AB=5$ cm, $BC=8$ cm, $AC=6{,}2$ cm, $MN=2{,}5$ cm, $NP=4$ cm, $MP=3{,}1$ cm.

7 Se consideră triunghiurile asemenea ABC și DEF. Dacă $AB=6$ cm, $BC=8$ cm, $EF=12$ cm și $DF=15$ cm, calculați AC și DE.

8 În figura alăturată, $D\in AC$, $E\in AB$, astfel încât $\sphericalangle ADE\equiv\sphericalangle ABC$.
a Demonstrați că $\Delta ADE\sim\Delta ABC$;
b Dacă $AB=10$ cm, $AC=12$ cm, $BC=15$ cm și $DE=9$ cm, calculați AE și AD.



9 Se consideră triunghiurile isoscele ABC ($AB=AC$) și MNP ($MN=MP$). Dacă $\sphericalangle A=78^\circ$ și $\sphericalangle N=51^\circ$, demonstrați că $\Delta ABC\sim\Delta MNP$.

10 Demonstrați că oricare două triunghiuri echilaterale sunt asemenea.

11 În triunghiul ABC, MN este linie mijlocie, $M\in AB$, $N\in AC$.
a Demonstrați că $\Delta AMN\sim\Delta ABC$. b Calculați $\frac{\mathcal{A}_{AMN}}{\mathcal{A}_{ABC}}$.

12 Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. Se cunosc $AB=12$ cm, $AC=10$ cm și $BC=11$ cm, $AB>DE$, iar raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu 3. Calculați perimetrul triunghiului DEF.

13 În triunghiul ABC, punctele D, E, F, G, M și N sunt mijloacele segmentelor AB, AC, AD, AE, DB, respectiv EC. Se știe că $DE=6$ cm.
a Arătați că $FG\parallel DE\parallel MN$. b Calculați BC, MN și FG.

14 În triunghiul ABC, se cunosc $AB=4$ cm, $AC=6$ cm și $BC=8$ cm. Prelungim laturile BA și CA cu segmentele AD, respectiv AE, unde $AD=2$ cm și $AE=3$ cm.
a Demonstrați că $\Delta ADE\sim\Delta ABC$. b Calculați DE.

15 Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. Se știe că $AB=2DE$.
a Calculați raportul de asemănare al celor două triunghiuri;
b Știind că $\mathcal{A}_{ABC}=8\text{ cm}^2$, calculați aria triunghiului DEF.

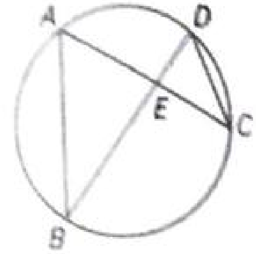
16 Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea și $\mathcal{A}_{ABC}=36\text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{DEF}=4\text{ cm}^2$. Aflați valoarea raportului de asemănare al celor două triunghiuri.

17 Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele D și E, astfel încât $DE\parallel BC$. Se cunosc $AD=5$ cm, $DB=6$ cm, $AE=x+2$ cm și $EC=x+4$ cm, unde $x>0$.
a Arătați că $\frac{DE}{BC}=\frac{5}{11}$. b Calculați valoarea lui x.

18 În figura alăturată, punctele A, B, C și D aparțin cercului, iar $AB = 6$ cm, $AE = 4$ cm și $DE = 3$ cm.

a Arătați că $\Delta AEB \sim \Delta DEC$.

b Calculați DC.



Consolidare

19 În triunghiul ABC se consideră punctul D pe latura AB. Se construiesc $DE \parallel AC$ și $DF \parallel BC$ ($E \in BC$, $F \in AC$). Arătați că:

a $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DB}$; b $\Delta BED \sim \Delta BCA$; c $\frac{AF}{FC} = \frac{CE}{EB}$.

20 În triunghiul ascuțitunghic ABC, AM și BN sunt mediane, iar AD este înălțime ($N \in AC$, $D, M \in BC$). Se dau $BC = 18$ cm și $AD = 12$ cm.

a Calculați aria triunghiului ABC.

b Calculați aria triunghiului ABM.

c Calculați aria triunghiului CMN.

21 În triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$) se știe că $\sphericalangle C = 30^\circ$. Pe latura AC se consideră punctul D astfel încât $DC = 2AD$. Arătați că semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC.

22 În triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$) se știe că $\sphericalangle B = 30^\circ$, iar AM este mediană, $M \in BC$. Pe latura AB se consideră punctul N, astfel încât $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$. Fie P mijlocul segmentului CN.

a Arătați că $BN = 2MP$.

b Arătați că $APMN$ este romb.

23 Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $AD \perp BC$. Demonstrați că:

a $\Delta ABD \sim \Delta CBA$;

b $\Delta ABD \sim \Delta CAD$;

c $\Delta ADC \sim \Delta BAC$.

24 În triunghiul ABC, $AB = AC$, $\sphericalangle B = 72^\circ$ și semidreapta BD este bisectoarea unghiului B, unde $D \in AC$. Demonstrați că:

a ΔBDC este isoscel;

b $\Delta ABC \sim \Delta BDC$.

25 În triunghiul ABC, semidreapta AD este bisectoarea unghiului A, $D \in BC$. Se știe că $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm și $BC = 9$ cm.

a Calculați BD și DC.

b Determinați raportul ariilor triunghiurilor ADB și ADC.

26 În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), AM este mediană, $M \in BC$. Latura AB se prelungește cu AN, astfel încât $AN = AB$, iar $MN \cap AC = \{P\}$.

a Arătați că $AM \parallel NC$.

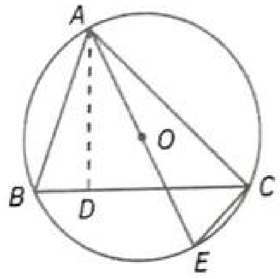
b Arătați că $PC = 2AP$.

27 În triunghiul ABC se consideră punctul D pe latura AB. Se construiesc $DE \parallel AC$ și $DF \parallel BC$ ($E \in BC$, $F \in AC$).

a Arătați că $\Delta ADF \sim \Delta DBE$.

b Arătați că $\frac{AF}{AC} + \frac{BE}{BC} = 1$.

28 Pe laturile AB și AC ale unui triunghi se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $AD \cdot AB = AE \cdot AC$. Demonstrați că $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ABC$.



29 În figura alăturată, punctele A, B, E și C aparțin cercului de centru O, $AD \perp BC$, iar AE este diametru.

a Arătați că $\Delta ABD \sim \Delta AEC$.

b Arătați că $AB \cdot AC = AE \cdot AD$.

30 Fie M un punct pe latura BC a paralelogramului $ABCD$. Dacă $AM \cap DC = \{N\}$ și $DM \cap AB = \{P\}$, demonstrați că:

a $\Delta ABM \sim \Delta NCM$;

b $\Delta CDM \sim \Delta BPM$;

c $CD^2 = CN \cdot BP$.

31 Fie triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$. Mediatoarea laturii AB intersectează pe BC în M. Demonstrați că $AC^2 = AM \cdot BC$.

32 Fie trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm, $AC = 10$ cm și $BD = 15$ cm, calculați AO, OC, BO și OD.

33 În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Se știe că triunghiul OCD este isoscel ($OD = OC$) și $OC = 2OA$.

a Arătați că trapezul $ABCD$ este isoscel.

b Calculați raportul lungimilor segmentelor AB și CD.

34 În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Se dau $BD = 15$ cm, $CD = 18$ cm, iar $\frac{CO}{CA} = \frac{3}{5}$. Aflați lungimile segmentelor BO, OD și AB.

35 În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, notăm $AD \cap BC = \{P\}$. Se dau $AB = 9$ cm, $DC = 15$ cm, $AD = 8$ cm și $PB = 6$ cm.

a Calculați perimetrul triunghiului PAB.

b Calculați raportul $\frac{\mathcal{A}_{PAB}}{\mathcal{A}_{ABCD}}$.

36 În dreptunghiul $ABCD$, punctul M este mijlocul laturii AB. Notăm $CM \cap AD = \{N\}$ și $CM \cap BD = \{P\}$. Fie $AQ \parallel CM$, $Q \in BD$.

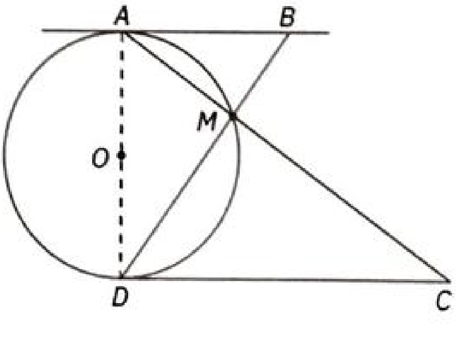
a Arătați că AQ este linie mijlocie în triunghiul DNP.

b Arătați că $AQ^2 = MP \cdot PN$.

37 Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Pe latura BC se consideră punctul M și se notează $AM \cap CD = \{N\}$ și $DM \cap AB = \{P\}$.

a Arătați că $\Delta ABM \sim \Delta NCM$.

b Arătați că $BP \cdot CN + BC^2 = BD^2$.



38 În figura alăturată, AD este diametru, dreptele AB și DC sunt tangente cercului, iar AC și BD se intersectează în punctul M. (M aparține cercului cu centrul în O și raza $R = OA$.)

a Arătați că $\Delta ABD \sim \Delta DAC$.

b Arătați că $AB \cdot DC = 4R^2$.

39 Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele EAB și FBC ($\sphericalangle E = \sphericalangle F = 90^\circ$).
a Arătați că punctele E, B, F sunt coliniare.
b Arătați că $\Delta ABE \sim \Delta ACB$.
c Arătați că $ACFE$ este dreptunghi.

40 Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice ABM și BCN ($\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBN = 90^\circ$). Se știe că $BM = BN = BD$.
a Arătați că $\Delta MBN \sim \Delta ABC$.
b Arătați că $AM = CN$.
c Arătați că $ACNM$ este trapez isoscel.

41 Pe dreapta d se consideră punctele A, B și C (în această ordine), astfel încât $AB = 4$ cm și $BC = 6$ cm. Prin B se duce perpendiculara pe d, pe care se alege punctul D. O paralelă la d intersectează segmentele DA, DB și DC în punctele E, F, respectiv G. Se știe că $DF = 4$ cm și $FB = 2EF$ (lungimile lui FB și EF fiind exprimate în centimetri, prin numere naturale).
a Calculați EF.
b Arătați că FG este linie mijlocie în triunghiul DBC.
c Calculați ariile triunghiurilor DEG și DAC.

42 În triunghiul ABC, AM și BN sunt mediane (M se află pe segmentul BC, N, pe segmentul AC), iar $AM \cap BN = \{G\}$. Se știe că aria triunghiului ABC este egală cu 90 cm^2.
a Arătați că $\Delta MNG \sim \Delta ABG$.
b Calculați aria triunghiului ABG.
c Calculați aria triunghiului MNG.

43 În triunghiul ascuțitunghic ABC, AD este înălțime, $D \in BC$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele E și F, iar pe latura BC, punctele G și H, astfel încât patrulaterul $EFGH$ să fie pătrat. Dacă $BC = 6$ cm și $AD = 3$ cm, calculați EF.

Aprofundare

44 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Fie $E \in AB$ astfel încât B este situat între A și E, $BD = BE$ și $\sphericalangle AED = 30^\circ$. Dacă $ED \cap AC = \{F\}$, demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta AFE$.

45 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$, iar semidreapta BD, cu $D \in AC$, este bisectoarea unghiului ABC. Fie M mijlocul laturii BC și N mijlocul segmentului BD. Arătați că N este ortocentrul triunghiului ABM.

46 Dacă $ABCD$ este un trapez dreptunghic ortodiagonal, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90^\circ$, demonstrați că $AD^2 = AB \cdot CD$.

47 În paralelogramul $ABCD$ se consideră punctele E și F mijloacele laturile AB, respectiv AD. Dacă $CF \cap DE = \{G\}$, calculați valoarea raportului $\frac{FG}{GC}$.

48 Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$. Punctele M și N aparțin laturilor AD, respectiv BC, astfel încât $MN \parallel AB$. Demonstrați că $DC \cdot MA + AB \cdot MD = MN \cdot AD$.

49 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Prin O se construiește o paralelă la AB, care intersectează AD și BC în punctele M, respectiv N. Demonstrați că O este mijlocul segmentului MN.

50 În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AC \cap BD = \{O\}$, iar $AD \cap BC = \{P\}$. Dacă $PO \cap AB = \{M\}$ și $PO \cap CD = \{N\}$, arătați că punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD.

Probleme de șapte stele

51 În triunghiul ABC, semidreapta AD este bisectoare, $D \in BC$. Arătați că $AD^2 < AB \cdot AC$.

52 Prin mijlocul M al medianei AD corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC se duce paralela d la AC, care intersectează pe AB în N. Paralela la AD prin B intersectează pe d în P. Determinați raportul ariilor triunghiurilor BNP și ABC.

53 Fie $ABCD$ un pătrat și d o dreaptă care trece prin vârful A. Dacă $d \cap BD = \{P\}$, $d \cap BC = \{Q\}$ și $d \cap CD = \{R\}$, arătați că $AP^2 = PQ \cdot PR$.

54 Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$. Punctele D și E aparțin laturii BC, astfel încât $AB^2 = BD \cdot BC$ și $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle ABC$. Să se arate că:
a $AC^2 = CE \cdot BC$; **b** ΔADE este isoscel; **c** $AD^2 = BD \cdot CE$.

55 Pe diagonala BD a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul E și, pe latura BC, punctul F, astfel încât A, E și F să fie coliniare. Dacă $BC \cdot BF = BD \cdot BE$, arătați că $BC^2 = BD \cdot DE$ și $AB^2 = AE \cdot AF$.

Teste de evaluare

Testul 1

(3p) 1 În triunghiul ABC considerăm punctul M pe latura AB și $MN \parallel BC$, $N \in AC$. Dacă $AM = 6$ cm, $MB = 3$ cm, $BC = 15$ cm și $AC = 12$ cm, calculați $\mathcal{P}_{AMN}$.

(3p) 2 Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $AB = 10$ cm, $CD = 25$ cm, $AC = 35$ cm și $BD = 42$ cm, aflați lungimile segmentelor AO, CO, BO, DO.

(3p) 3 În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii BC. Pe laturile AC și BC se consideră punctele N, respectiv E, astfel încât $NE \parallel AM$. Fie $NE \cap AB = \{P\}$. Demonstrați că: $\frac{AN}{AP} = \frac{AC}{AB}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 Stabiliți dacă triunghiurile ΔABC și ΔMNP sunt asemenea știind că: $\hat{A} = 72°$, $\hat{C} = 2 \cdot \hat{B}$, $\hat{N} = \hat{P}$ și $\hat{M} = 36°$.

(3p) 2 În trapezul $ABCD$ cu bazele $AB \parallel CD$, avem $AB = 45$ cm, $CD = 15$ cm, $AD = 12$ cm, $BC = 20$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, calculați perimetrul triunghiului MDC.

(3p) 3 În triunghiul ABC considerăm punctul M pe latura AB și construim $MN \parallel AC$ și $MP \parallel BC$, $N \in BC$, $P \in AC$. Demonstrați că $\frac{MN}{AC} + \frac{MP}{BC} = 1$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(3p) 1 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, iar $AB = 18$ cm, $AC = 10$ cm, $BC = 20$ cm și $MP = 60$ cm, calculați MN și NP.

(3p) 2 Fie pătratul $ABCD$ cu $AB = 25$ cm. Punctul M este situat pe latura AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$. Știind că $MN \parallel AD$, $N \in AC$ și $NP \parallel DC$, $P \in BC$, aflați aria patrulaterului $MNPB$.

(3p) 3 Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $MO \parallel AB$, $M \in AD$. Demonstrați că: $\frac{1}{MO} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P

Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: ....

Clasa a VII-a:

Tema III.2. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării. Criterii de asemănare

(2p) 1 Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a Două triunghiuri asemenea au unghiurile corespondente .... și laturile corespondente ....

b Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu .... raportului de asemănare.

c Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ și $\sphericalangle B = 35°$, atunci $\sphericalangle E = ...°$.

d Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 15$ cm, $BC = 12$ cm, $EF = 8$ cm, atunci $DE = ...$ cm.

(2p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

a Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, atunci $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle EDF$. A F

b Dacă $\Delta ABC \sim \Delta CAB$, atunci ΔABC este echilateral. A F

c Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, atunci $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$. A F

d Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, atunci $AB \cdot BC = DE \cdot EF$. A F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**, ținând cont de condițiile indicate în problemă.

În triunghiul *ABC*, punctele *M* și *N* aparțin laturilor *AB*, respectiv *AC*, astfel încât $MN \parallel BC$. Se cunosc $AB = 10$ cm, $AM = 4$ cm, $NC = 12$ cm și $BC = 25$ cm. Atunci:

A	B
a Lungimea segmentului *MB* este	1 20 cm
b Lungimea segmentului *AN* este	2 10 cm
c Lungimea segmentului *AC* este	3 6 cm
d Lungimea segmentului *MN* este	4 15 cm
	5 8 cm

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $AM = 3$ cm, $AN = 4$ cm. Dacă $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 12$ cm, demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta ANM$ și apoi calculați MN.

(1p) 5 În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$, $AC \perp BD$. Dacă $AB = 4$ cm și $CD = 9$ cm, calculați aria trapezului $ABCD$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Probleme cu caracter aplicativ

1 În figura 1 sunt reprezentate două trambuline, BC și DE, fixate pe un stâlp AD. Cele două trambuline sunt situate deasupra unui bazin de înot. Se știe că $AB = 4$ m, $BC = 1{,}5$ m, $BD = 6$ m, iar $BC \parallel DE$. Calculați lungimea trambulinei DE, știind că punctele A, C și E sunt coliniare.

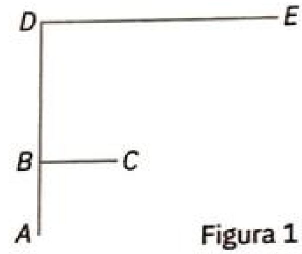


Figura 1

2 În figura 2, ABC și CDE reprezintă două parcele de pământ. Se știe că $AB = 12$ m, $AC = 6$ m, $BC = 9$ m, iar $CE = 2$ m și $AB \parallel DE$. Cele două parcele se împrejmuiesc cu gard.

a Calculați lungimea gardului ce înconjoară parcela ABC.

b Calculați lungimea gardului ce înconjoară parcela CDE.

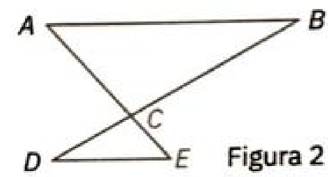


Figura 2

3 În figura 3 este reprezentat traseul pe care îl parcurge un agent de pază într-o incintă. Agentul pornește din punctul A și trece în ordine prin punctele B, C, D, trece din nou prin punctul B, apoi prin E și ajunge înapoi în punctul A. Aflați lungimea unui astfel de traseu, știind că $CD \parallel AE$, $AC \cap DE = \{B\}$, iar $AB = 6$ m, $BC = 9$ m, $CD = 12$ m, $BE = 10$ m.

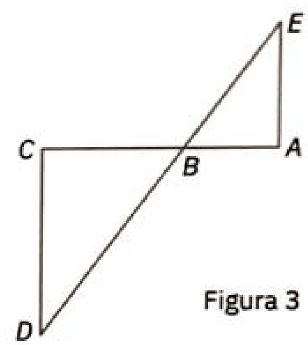


Figura 3

4 În figura 4 sunt reprezentate două parcele de pământ, ABC și DCE. Dacă $AB = 8$ m, $BC = 12$ m, $CD = 6$ m, $CE = 9$ m, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DCE}$, iar parcela ABC are aria de 24 m^2, aflați aria parcelei DCE.

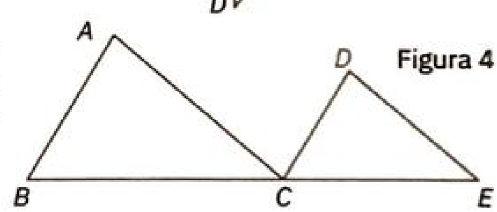


Figura 4

5 În figura 5, ABC reprezintă un teren agricol. Pe teren se plantează meri, pe rândurile M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 și M_4N_4. Dacă $AN_1 = 3$ m, $BC = 12$ m, $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4B = 2$ m, iar $M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel M_3N_3 \parallel M_4N_4 \parallel BC$, calculați lungimea gardului ce înconjoară terenul ABC.

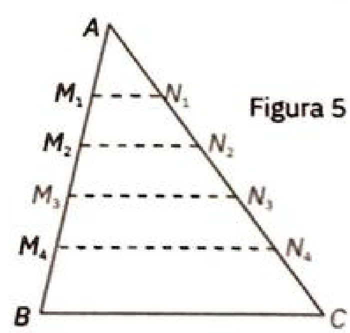


Figura 5

6 În figura 6 este reprezentată schița a două locuri de joacă, ABD, pentru copii mai mici, și BCD, pentru copii mai mari. Se știe că $ABCD$ este trapez dreptunghic, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, iar $DB \perp BC$. Dacă $AB = 9$ m și $AD = 12$ m, aflați ariile celor două camere ABD și BDC.

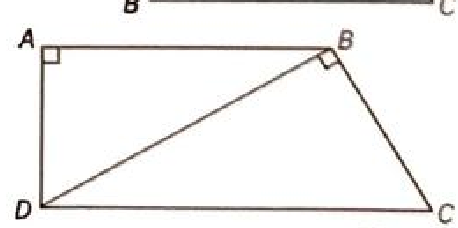


Figura 6

7 În figura 7, ABC, CDE și ACE sunt trei parcele de pământ. $ABDE$ este dreptunghi, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CED$, $AB = 40$ m și $CD = 50$ m.

a Arătați că $AC \perp CE$.

b Aflați BD.

c Aflați aria parcelei ACE.

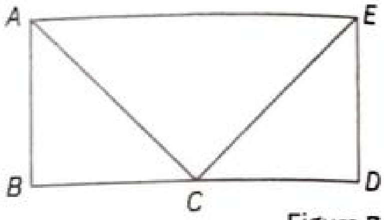


Figura 7

8 În figura 8 sunt reprezentate schematic pozițiile locuințelor a cinci copii: Mihai, Adi, Rareș, Dana și Corina. Folosind distanțele prezentate în figură, arătați că străzile Lunii și Unirii sunt paralele.

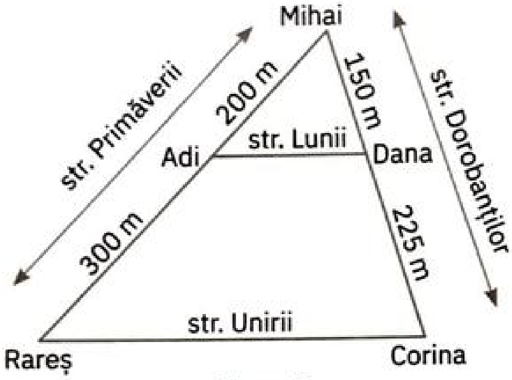


Figura 8

III.6 Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1 Se consideră triunghiul ABC în care $\sphericalangle ABC = 70°$. Punctele M și N aparțin laturilor AB, respectiv AC, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ și $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{5}$. Aflați $\frac{NA}{NC}$ și $\sphericalangle AMN$.

2 Se dă triunghiul ABC. Punctele D și E sunt situate pe segmentele AB și respectiv AC, astfel încât $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{CA}$. Fie M și N mijloacele laturilor AB și AC. Arătați că mijlocul segmentului DE aparține segmentului MN.

3 Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC. Fie P un punct oarecare al segmentului MN. Arătați că există punctele $D \in AB$ și $E \in AC$, astfel încât P să fie mijlocul segmentului DE.

4 În paralelogramul $ABCD$, bisectoarea unghiului ADC intersectează latura AB în E, iar bisectoarea unghiului DEB trece prin C. Se știe că $\sphericalangle BCE = 15°$.

a Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$.

b Dacă $N \in DE$, $DN = \frac{1}{4}DE$, $M \in AE$, $ME = \frac{1}{3}AE$, aflați valoarea raportului $\frac{DP}{PM}$, unde $DM \cap AN = \{P\}$.

5 Fie ABC un triunghi isoscel, având $AB = AC = 15$ cm, iar $BC = 12$ cm. Punctul $E \in AB$ astfel încât $AE = 5$ cm, $G \in BC$ și $GC = 8$ cm. Demonstrați că $GE \parallel AM$, unde AM este înălțime în triunghiul ABC, $M \in BC$.

6 Se dă triunghiul ABC cu $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 5$ cm. Prelungim latura AB cu segmentul $BD = 6$ cm și latura AC cu segmentul $CE = 3$ cm.

a Calculați lungimea segmentului DE.

b Dacă $BC \cap DE = \{M\}$, calculați perimetrul triunghiului MCE.

7 Prin punctul E situat pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ se duce o paralelă la BD care intersectează dreptele AB, BC, CD, DA în punctele M, N, P, Q. Arătați că:

a $MQ + PN = \text{constant}$.

b $AM \cdot CN = AQ \cdot CP$.

8 În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AD = DC = BC = 3$ cm și $\sphericalangle B = 60°$.

a Aflați perimetrul trapezului.

b Arătați că, dacă $AC \cap BD = \{O\}$, atunci $BD = 3DO$.

9 Se consideră triunghiul ABC și $D \in AB$, $E \in AC$, astfel încât $DB = \frac{5}{7}AB$ și fie $\{M\} = CD \cap BE$. Dacă $DM = \frac{2}{9}DC$, demonstrați că $DE \parallel BC$.

10 Se dau pătratele $ABCD$ și $BEFG$ de aceeași parte a dreptei AB, cu $B \in AE$ și $AE = 16$ cm. Dacă $BQ \perp CE$, $Q \in CE$, $CP \perp BF$, $P \in BE$ și $\frac{PQ}{QF} = \frac{3}{5}$, determinați lungimile AB și BE.

11 Fie $ABCD$ un trapez ($AB \parallel CD$), E este mijlocul lui AB, F mijlocul lui CD, $AF \cap DE = \{P\}$ și $BF \cap CE = \{Q\}$.

a Arătați că $PQ \parallel AB$.

b Arătați că $PQ = \frac{AB \cdot CD}{AB + CD}$.

12 Printr-un punct P al laturii BC al triunghiului ABC se duce paralela la mediana AD a triunghiului ($D \in BC$), care intersectează dreapta AB în M și dreapta AC în N. Arătați că:

a $AM \cdot AC = AN \cdot AB$;

b $MP + NP = 2 \cdot AD$.

13 Fie D un punct în interiorul triunghiului ABC. Prin D se duce EF paralelă cu AB, GH paralelă cu BC, MN paralelă cu AC, unde $E, N \in BC$, $H, F \in CA$, $M, G \in AB$. Arătați că $\frac{EF}{AB} + \frac{GH}{BC} + \frac{MN}{AC} = 2$.

14 Fie $ABCD$ un patrulater convex, astfel încât bisectoarea unghiului A este paralelă cu BC. Bisectoarea unghiului A intersectează pe BD în E și pe DC în F. Arătați că:

a $\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{FC}$;

b $\frac{CD}{DF} - \frac{AB}{AD} = 1$.

15 Se dă paralelogramul $ABCD$. Dreapta d intersectează dreptele AB, BC, CD și DA respectiv în punctele M, N, P și Q.

a Arătați că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$.

b Dacă O este centrul de simetrie al paralelogramului și $QM = MN = PN$, aflați cât la sută din aria paralelogramului reprezintă aria triunghiului DOM.

16 Pe catetele AB și AC ale unui triunghi dreptunghic ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ și $ACFG$. Dreapta CD intersectează pe AB în H, iar dreapta BF intersectează pe AC în K. Arătați că

a $AH = AK$;

b $AH^2 = BH \cdot CK$.

17 Considerăm ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC$. Fie D mijlocul laturii BC, M mijlocul segmentului AD și N piciorul perpendicularei din D pe BM. Arătați că $\sphericalangle ANC = 90^\circ$.

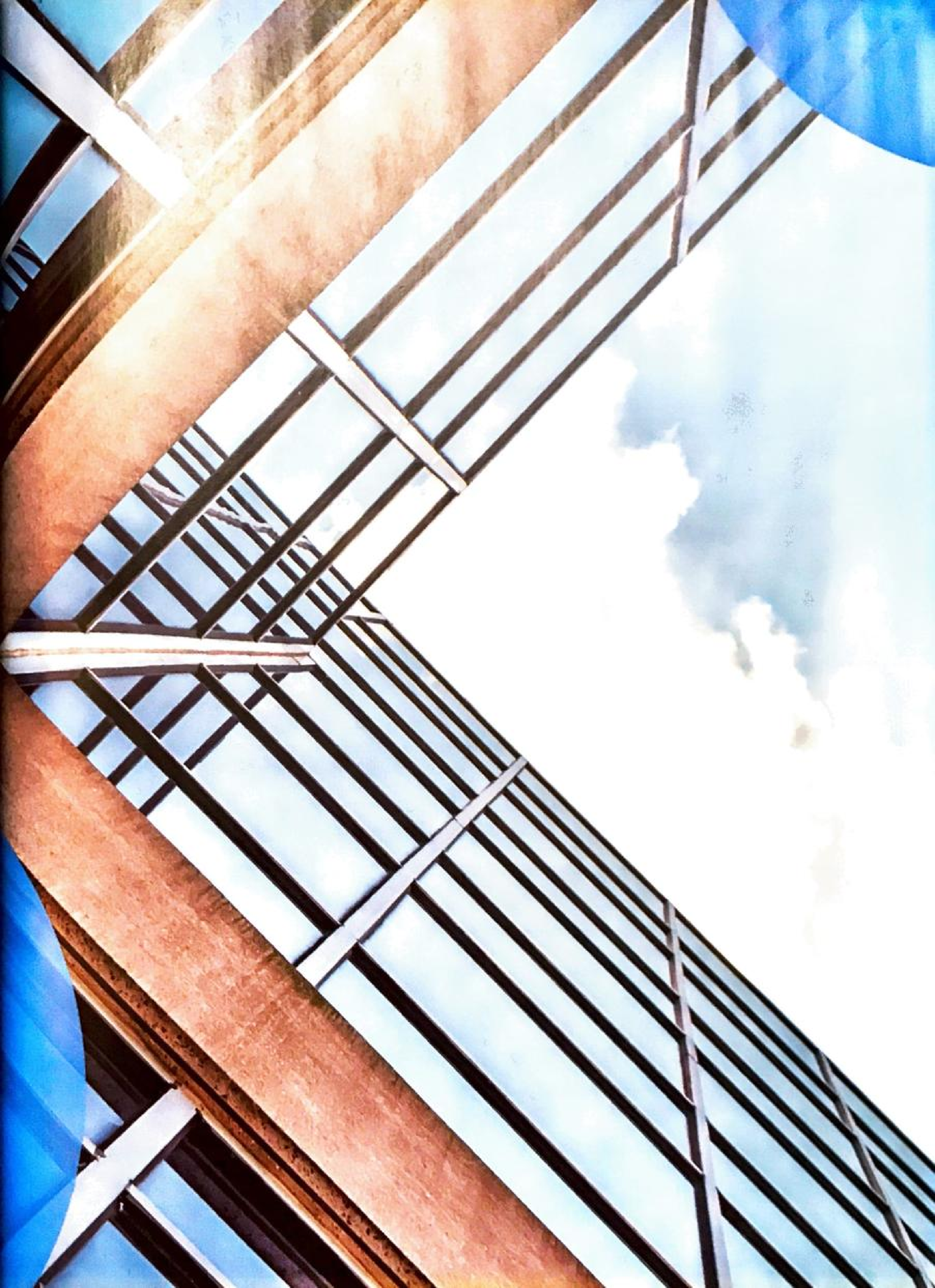
18 Se consideră dreptunghiul $ABCD$ de centru O și punctul $M \in BD$, $M \neq O$. Fie E simetricul lui C față de M, F piciorul perpendicularei din E pe AB și G piciorul perpendicularei din E pe AD. Arătați că:

a $AE \parallel BD$ și $FG \parallel AC$;

b punctele F, G și M sunt coliniare.

IV

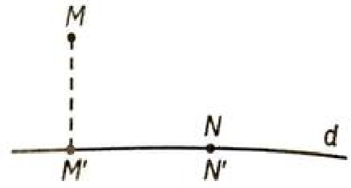
Relații metrice în triunghiul dreptunghic



IV.1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii

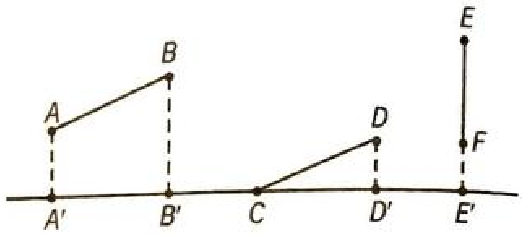
Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

În figura alăturată avem: $pr_d M = M'$, $M \notin d$, și $pr_d N = N' = N$, $N \in d$.



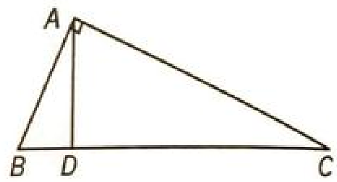
Teoremă. Proiecția unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.

Observație. Dacă proiecția segmentului $[AB]$ pe dreapta d este segmentul $[A'B']$, atunci proiecția mijlocului segmentului $[AB]$ este mijlocul segmentului $[A'B']$.



Teorema înălțimii. Într-un triunghi dreptunghic lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Cu notațiile din figură, avem $AD^2 = BD \cdot DC$.



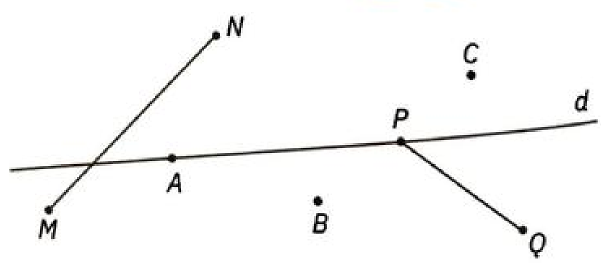
Lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei: $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$.

Reciproca teoremei înălțimii. Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$ și $AD^2 = DC \cdot DB$. Atunci $\sphericalangle BAC = 90°$.

Demonstrație. Din $AD^2 = DC \cdot DB$ rezultă $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DB}{AD}$ și, cum $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDA = 90°$, rezultă $\Delta ADC \sim \Delta BDA$, deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DCA$. Dar $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD = 90°$, de unde rezultă că $\sphericalangle DCA + \sphericalangle ABD = 90°$, adică $\sphericalangle BAC = 90°$.

Exersare

1 Reproduceți desenul alăturat și construiți proiecțiile ortogonale ale punctelor A, B, C respectiv ale segmentelor MN și PQ pe dreapta d.



2 Proiectați vârfurile triunghiului ABC pe dreapta d, unde:
a $d \parallel AB$; **b** $d \perp BC$; **c** $d = AC$.

3 Fie triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a $pr_{BC} A = D$; **b** $pr_{AB}[BC] = [AB]$;
c $pr_{BC}[AD] = [DC]$; **d** $pr_{BC}[AC] = [DC]$;
e $pr_{AC}[AB] = [AC]$; **f** $pr_{BC}[AB] = [BD]$.

4 Considerăm triunghiul ABC și punctele M, N, P situate pe latura AC, astfel încât $AM = MN = NP = PC$. Dacă A', M', N', P' sunt proiecțiile punctelor A, M, N, și, respectiv P pe dreapta BC, determinați valorile rapoartelor $\frac{A'M'}{M'N'}, \frac{P'C}{P'N'}, \frac{A'N'}{CN'}, \frac{M'N'}{M'C}, \frac{A'C}{M'P'}$.

5 Fie triunghiul MNP, $\sphericalangle M = 90°$.
a Stabiliți proiecțiile catetelor pe ipotenuză.
b Dacă $NP = 35$ cm, determinați lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză știind că acestea sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 0,(3).

6 Fie triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
a Dacă $BD = 20$ cm și $DC = 5$ cm, calculați AD.
b Dacă $BD = 8$ cm și $AD = 12$ cm, calculați DC.
c Dacă $AD = 6$ cm și $DC = 9$ cm, calculați BD.
d Dacă $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm, calculați AD.
e Dacă $AD = 0{,}5$ m și $BC = 20$ dm, calculați $AB \cdot AC$.
f Dacă $BC = 35$ cm și $CD = 4BD$, calculați BD, DC, AD.

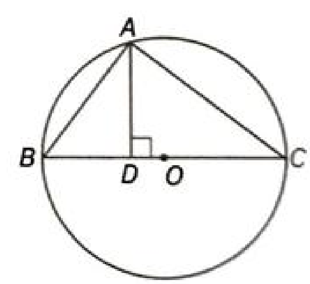
7 Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză au lungimile de 9 cm și 25 cm. Aflați lungimea înălțimii din vârful unghiului drept.

8 Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este de 34 cm, iar lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt direct proporționale cu numerele 0,(6) și 0,75. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

Consolidare

9 Într-un triunghi dreptunghic, lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză este de 4 cm, iar lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este de 6 cm. Calculați lungimea ipotenuzei.

10 Într-un triunghi dreptunghic lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză este de 3 ori mai mare decât lungimea proiecției celeilalte catete pe ipotenuză. Dacă ipotenuza are 24 cm, calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.



11 În figura alăturată, BC este diametru în cercul de centru O și rază 6 cm, iar $AD \perp BC$. Dacă $BD = \frac{2}{3}BO$, calculați AD și aria triunghiului ABC.

12 În dreptunghiul $ABCD$ se construiește perpendiculara $AM \perp BD$, $M \in BD$. Dacă $BM = 8$ cm și $DM = 2$ cm, calculați AM și aria dreptunghiului $ABCD$.

13 În rombul $ABCD$ se consideră $AC \cap BD = \{O\}$ și $OE \perp AB$, $E \in AB$. Dacă $AE = 3{,}6$ cm și $EB = 6{,}4$ cm, calculați OE și aria rombului $ABCD$.

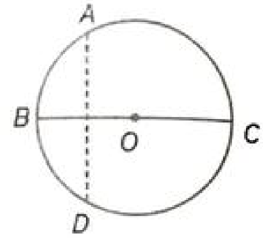
14 În triunghiul DEF, cu $\sphericalangle E = 90°$ și $EA \perp DF$ ($A \in DF$), se dau $DF = 10$ cm și $AD = 3AE$. Determinați lungimile segmentelor AD, AF și AE.

15 Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AD = BC$. Dacă $BD \perp BC$, $AB = 6$ cm și $DC = 12$ cm, determinați lungimea înălțimii trapezului.

16 Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$ și $DB \perp BC$. Dacă lungimea liniei mijlocii a trapezului este triplul bazei mici și $DC = 25$ cm, determinați lungimea înălțimii trapezului.

17 În triunghiul ABC se consideră înălțimea dusă din A, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $AD = 2\sqrt{6}$ cm, $BD = 4$ cm și $CD = 6$ cm, arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

18 În figura alăturată, BC este diametru în cercul de centru O și rază 4 cm. Punctele A și D aparțin aceluiași cerc, astfel încât BC este mediatoarea segmentului AD, iar distanța de la O la AD este de 2 centimetri. Calculați AD și aria patrulaterului $ABDC$.



Aprofundare

19 În triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $\frac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{ADC}} = \frac{9}{16}$ și $BC = 25$ cm, calculați AD.

20 Se dă triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $\mathcal{A}_{ADB} \cdot \mathcal{A}_{ADC} = 5184 \text{ cm}^2$ și $BC = 25$ cm, calculați AD și aria triunghiului ABC.

21 Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și $BC = 20$ cm. Dacă măsura unghiului dintre înălțimea și mediana duse din A este de 30°, calculați lungimea înălțimii duse din A și aria triunghiului ABC.

22 În rombul $ABCD$ se consideră $DM \perp AB$, unde M este situat pe latura AB. Dacă $AM = 4{,}2$ cm și $MB = 10{,}8$ cm, calculați DM și aria rombului $ABCD$.

23 Înălțimea rombului $ABCD$ are lungimea de 8 cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, iar proiecția segmentului OA pe AB are lungimea de 8 cm, calculați perimetrul și aria rombului $ABCD$.

Probleme de șapte stele

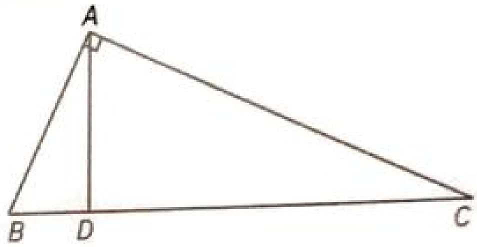
24 Se consideră triunghiul ABC și $BP \perp AC$, cu P situat pe latura AC. Dacă $BP = 6$ cm, $AC = 13$ cm, iar $2\sqrt{AP} = 3\sqrt{PC}$, stabiliți natura triunghiului ABC.

25 Stabiliți dacă următoarea afirmație este adevărată: „Dacă într-un triunghi dreptunghic ABC există un punct D pe ipotenuza BC, astfel încât $AD^2 = BD \cdot DC$, atunci punctul D este piciorul înălțimii din A."

26 Fie trapezul isoscel $ABCD$, unde $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Proiecția lui C pe AB este E. Arătați că centrul de greutate al triunghiului ABC aparține segmentului ED.

IV.2 Teorema catetei

Teorema catetei. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea fiecărei catete este media geometrică a lungimii ipotenuzei și a lungimii proiecției acelei catete pe ipotenuză.



Cu notațiile din figura alăturată avem:

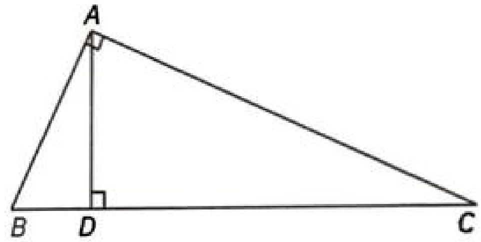
$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ și } AC^2 = BC \cdot CD.$$

Reciproce ale teoremei catetei

R1 În triunghiul ABC, dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, și are loc una dintre egalitățile $AB^2 = BC \cdot BD$ sau $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $\sphericalangle BAC = 90°$.

R2 În triunghiul ABC, dacă $D \in BC$ este un punct astfel încât $AB^2 = BC \cdot BD$ și $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $\sphericalangle BAC = 90°$.

Exersare



1 Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
  a Dacă $BD = 9$ cm și $DC = 16$ cm, calculați AB și AC.
  b Dacă $BD = 2$ cm și $BC = 6$ cm, calculați AB și AC.
  c Dacă $DC = 5$ cm și $BC = 15$ cm, calculați AB și AC.

2 Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
  a Dacă $AB = 9$ cm și $BD = 3$ cm, calculați BC, DC și AC.
  b Dacă $AC = 8$ cm și $BC = 16$ cm, calculați CD, BD și AB.
  c Dacă $BD = 21$ cm și $BC = 84$ cm, calculați DC, AB și AC.

3 Într-un triunghi dreptunghic, cu ipotenuza de lungime 18 cm, proiecția unei catete pe ipotenuză este de 8 cm. Determinați lungimea celeilalte catete.

4 Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză au lungimile 8 cm și 32 cm. Calculați perimetrul triunghiului.

5 În triunghiul MNP, $\sphericalangle M = 90°$, lungimea catetei MN este de 8 cm și $\sphericalangle N = 60°$. Determinați:
  a lungimea segmentului NP;
  b lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;
  c lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei;
  d lungimea segmentului MP.

6 Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
  a Dacă $BD = \frac{1}{4}BC$ și $AB = 12$ cm, calculați BC și AC.
  b Dacă $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{4}$ și $AC = 6$ cm, calculați BC și AB.
  c Dacă $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{7}$ și $BC = 18$ cm, calculați BD, DC, AB, AC.

7 În triunghiul dreptunghic ABC, mediana relativă la ipotenuză, AM, este de 5 cm și $\sphericalangle MAB = 60°$. Calculați $\frac{DB}{DC}$, unde D este proiecția punctului A pe BC.

Consolidare

8 În triunghiul dreptunghic isoscel ABC, $\sphericalangle A = 90°$, ipotenuza BC are lungimea de 8 cm. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

9 În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), se consideră $AD \perp BC$, $D \in BC$, și $DM \perp AB$, $M \in AB$. Dacă $BC = 30$ cm și $BM = 9$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC și lungimea înălțimii AD.

10 În dreptunghiul $ABCD$, $AB > BC$ și $BM \perp AC$, $M \in AC$. Dacă $CM = 3$ cm și $AM = 9$ cm, calculați perimetrul și aria dreptunghiului $ABCD$.

11 În rombul $ABCD$ se consideră $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $AC = 24$ cm și proiecția segmentului OA pe AB are lungimea de 9,6 cm, calculați perimetrul și aria rombului $ABCD$.

12 În trapezul $ABCD$, $\sphericalangle A = 90°$, bazele CD și AB sunt proporționale cu numerele 3 și 5. Știind că $AC \perp BC$ și $AD = 4\sqrt{6}$ cm, calculați perimetrul trapezului.

13 Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \parallel CD$. Dacă $AC \perp CB$, $AC = 12$ cm și $AB = 16$ cm, calculați perimetrul și aria trapezului.

14 Triunghiul ABC este dreptunghic. Notăm cu M mijlocul ipotenuzei BC și cu D proiecția punctului A pe BC. Dacă $AM = 10$ cm și $DM = 6$ cm, calculați perimetrul triunghiului.

Aprofundare

15 Într-un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), catetele au lungimile de 6 cm și 8 cm.a) Calculați perimetrul și aria triunghiului ABC. b) Calculați lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Rezolvare: Se construiește $AD \perp BC$, $D \in BC$. Aplicând teorema catetei rezultă că $AB^2 = BD \cdot BC$, $AC^2 = CD \cdot BC$, de unde, însumând, se obține $AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + CD)$, adică $100 = BC^2$. Continuați rezolvarea.

16 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$, se știe că înălțimea $AD = 12$ cm și $\frac{DB}{DC} = \frac{9}{16}$. Determinați perimetrul triunghiului.

17 Demonstrați că într-un triunghi dreptunghic pătratele lungimilor catetelor sunt respectiv proporționale cu lungimile proiecțiilor lor pe ipotenuză.

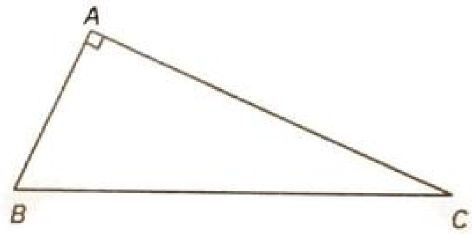
Probleme de șapte stele

18 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă M, N sunt proiecțiile punctului D pe AC și respectiv pe AB, arătați că $\frac{MC}{MA} = \frac{NA}{NB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$.

19 În dreptunghiul $ABCD$, perpendiculara din A pe BD intersectează dreapta BC în E. Arătați că $AB^2 = BE \cdot BC$.

20 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $CD = BC = 6$ cm, iar $BD \perp AD$. Fie O intersecția diagonalelor și P mijlocul lui BD.
a Arătați că $AB = 2CD$.
b Dacă E și F sunt proiecțiile punctelor D și respectiv C pe AB și $FB = 2AE$, calculați AD și BD.

Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora



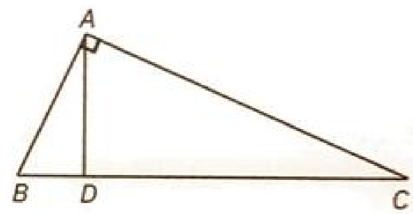
Teorema lui Pitagora. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.

Pentru figura alăturată: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Reciproca teoremei lui Pitagora. Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii celei de a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Observație. Dacă în triunghiul ABC avem $AB^2 + AC^2 < BC^2$, atunci $\sphericalangle A > 90°$, iar dacă $AB^2 + AC^2 > BC^2$, atunci $\sphericalangle A < 90°$.

Teorema lui Pitagora generalizată



Fie triunghiul ABC și $D = \text{pr}_{BC}A$.
Dacă $\sphericalangle C < 90°$, atunci $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$.
Dacă $\sphericalangle C > 90°$, atunci $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$.

Demonstrație. Dacă $\sphericalangle C < 90°$, atunci $BD = |BC - CD|$.

În triunghiul ABD, cu $\sphericalangle D = 90°$, avem $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + |BC - CD|^2$.

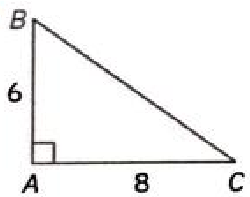
Rezultă $AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$ și, deoarece $AD^2 + CD^2 = AC^2$, rezultă $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$.

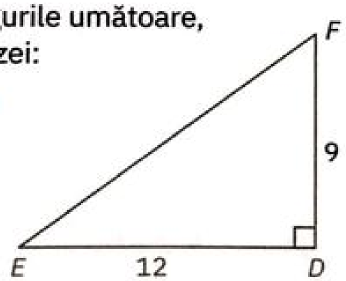
Dacă $\sphericalangle C > 90°$, atunci $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC + CD)^2$, de unde rezultă $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$.

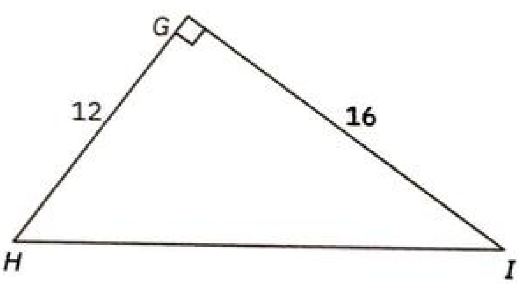
Se observă că dacă $\sphericalangle C = 90°$, atunci $C = D$, adică $2 \cdot BC \cdot CD = 0$. Se obține astfel teorema lui Pitagora: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Exersare

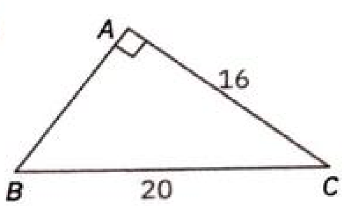
1 Pentru fiecare dintre figurile umătoare, aflați lungimea ipotenuzei:

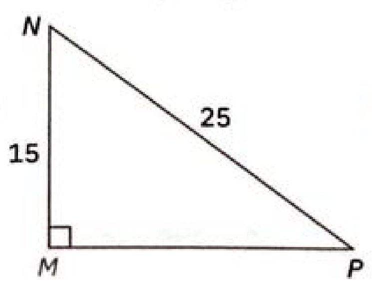
a 

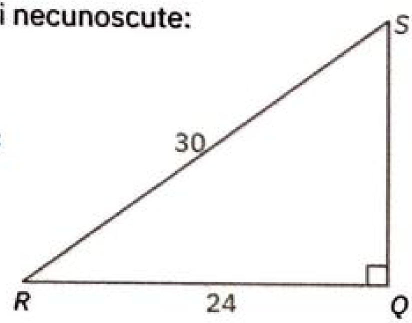
b 

c 

2 Pentru fiecare dintre figurile umătoare, aflați lungimea catetei necunoscute:

a 

b 

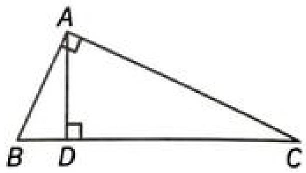
c 

3 Determinați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ale cărui catete au lungimile de:
a 3 și 4; b 15 și 20; c 18 și 24; d 24 și 32;
e 10 și $10\sqrt{3}$; f $5\sqrt{3}$ și $5\sqrt{2}$; g $2\sqrt{2}$ și $2\sqrt{7}$; h $2\sqrt{6}$ și 5.

4 Fie triunghiul MNP cu $\sphericalangle N = 90°$ și $MN = NP$.
a Dacă $MP = 18$ cm, calculați MN. b Dacă $MP = 4\sqrt{2}$ cm, calculați NP.
c Dacă $MN = 8$ cm, calculați MP. d Dacă $NP = 10\sqrt{2}$ cm, calculați MP.

5 Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle C = 90°$.
a Dacă $AC = 5$ cm și $BC = 12$ cm, calculați AB.
b Dacă $AB = 20$ cm și $AC = 16$ cm, calculați BC.
c Dacă $BC = 40$ cm și $AB = 41$ cm, calculați AC.

6 În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$, iar AD este înălțime. Completați tabelul:



	AB	AC	BC	AD	BD	CD
a	15 cm	20 cm				
b	18 cm		30 cm			
c		12 dm		6 dm		
d					4 m	6 m

7 Determinați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel cu cateta de:
a 12 cm; b 20 cm; c $9\sqrt{2}$ cm; d x cm.

8 Determinați lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de:
a 8 cm; b 18 cm; c $15\sqrt{2}$ cm; d x cm.

9 Determinați lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu latura de:
a 4 cm; b 12 cm; c $6\sqrt{3}$ cm; d x cm.

10 Determinați:
a lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de $18\sqrt{2}$ cm;
b lungimea laturii unui pătrat cu diagonala de 20 cm;
c lungimea laturii unui triunghi echilateral cu înălțimea de $3\sqrt{6}$ cm.

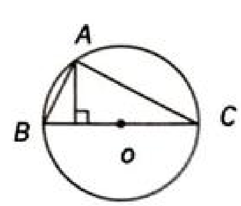
11 Dimensiunile unui dreptunghi sunt 6 cm și 8 cm. Aflați lungimile diagonalelor.

12 Diagonala unui pătrat are lungimea $12\sqrt{2}$ cm. Determinați perimetrul pătratului.

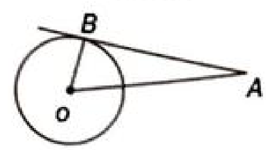
13 Un romb are diagonalele de 6 cm și 8 cm. Aflați lungimea laturii rombului.

14 Rombul $ABCD$ are $AB = 25$ cm și $AC = 40$ cm. Calculați BD și aria rombului.

15 În figura alăturată, punctele A, B și C aparțin cercului cu centrul în O, iar BC este diametru. Se cunosc $AB = 10$ cm și $AC = 24$ cm. Câți centimetri are raza cercului?



16 În figura alăturată, dreapta AB este tangentă cercului de centru O. Se știe că raza cercului are lungimea de 12 cm.
Calculați perimetrul triunghiului AOB, dacă:
a $AB = 16$ cm; b $\sphericalangle OAB = 30°$.



17 Fie M un punct exterior unui cerc de centru O și rază 7 dm. Se constuiește tangenta MT, $T \in \mathcal{C}(O,7)$. Știind că $MT = 24$ dm, calculați perimetrul și aria triunghiului MTO.

18 În triunghiul echilateral ABC, cu $AB = 24$ cm, pe laturile BC și AC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $BD = DC$ și $DE \perp AC$. Determinați lungimile EC, AE, AD și DE.

19 Fie M mijlocul ipotenuzei BC a triunghiului ABC. Dacă $\sphericalangle AMC = 120°$, $AM = 6$ cm, și $AD \perp BC$ ($D \in BC$), determinați lungimile segmentelor BC, AB, AC și AD.

20 Un dreptunghi are lungimea de trei ori mai mare decât lățimea și perimetrul egal cu 32 cm. Determinați lungimile diagonalelor.

21 Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$ în care $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$ și $AC = 10$ cm.

22 Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și $BC = 3$ cm. Dacă punctele P și Q aparțin laturilor AB, respectiv CD, astfel încât $AP = 4$ cm și $CQ = 2$ cm, calculați lungimea segmentului PQ.

23 Înălțimile unui triunghi echilateral au lungimea de $2\sqrt{3}$ cm. Aflați lungimile laturilor.

24 Diagonalele unui dreptunghi au lungimile egale cu 6 cm și fac un unghi de 60°. Determinați lungimile laturilor dreptunghiului.

25 Dimensiunile unui dreptunghi sunt $\sqrt{3}$ cm și 3 cm. Aflați măsura unghiului ascuțit dintre diagonale.

26 În triunghiul dreptunghic ABC, fie M mijlocul ipotenuzei BC. Dacă $\sphericalangle B = 60°$ și $AM = 10$ cm, calculați lungimea înălțimii AD.

27 În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC = 10$ cm și $BC = 16$ cm, aflați lungimea înălțimii duse din A pe BC.

28 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $AB = 6$ cm și $BC = 10$ cm, aflați lungimea bisectoarei unghiului B.

29 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Determinați lungimea medianei BM, știind că $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm.

30 În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se notează cu M mijlocul ipotenuzei BC. Dacă P și Q sunt proiecțiile punctului M pe AB și respectiv AC, calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că $PQ = 5$ cm și $AB = 8$ cm.

31 Triunghiul ABC este dreptunghic în A și M este mijlocul catetei AC. Știind că $AB = 4$ cm și $BM = 5$ cm, determinați lungimea ipotenuzei.

32 Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi cu lungimile laturilor 3 cm, $3\sqrt{3}$ cm, 6 cm.

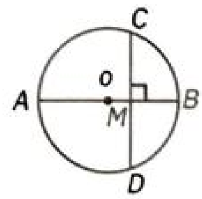
33 Lungimile laturilor unui triunghi sunt proporționale cu numerele 3, 4 și 5, iar perimetrul triunghiului este egal cu 48 cm. Arătați că triunghiul este dreptunghic și apoi calculați aria lui.

Consolidare

34 Punctele A și B sunt situate pe un cerc cu centrul O și având raza de lungime 10 cm. Determinați lungimea coardei AB dacă:

a $\widehat{AB} = 60°$; **b** $\widehat{AB} = 90°$; **c** $d(O, AB) = 6$ cm; **d** $\sphericalangle AOB = 120°$.

35 În figura alăturată, AB este diametru, iar coarda CD este perpendiculară pe AB și se află la distanța de 7 cm de centrul cercului. Știind că raza cercului are lungimea de 25 cm, aflați aria și perimetrul patrulaterului $ACBD$.



36 Fie AB un diametru în cercul de centru O și rază $16\sqrt{3}$ cm. Coarda CD intersectează diametrul într-un punct M. Calculați distanța de la O la CD, dacă:

a $CD \perp AB$ și $\sphericalangle CBD = 120°$; **b** $\sphericalangle AMD = 120°$ și $AM = 18\sqrt{3}$ cm.

37 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$ și $AB = 4$ cm. Calculați perimetrul și aria triunghiului, precum și lungimea înălțimii duse din A.

38 În triunghiul DEF, $EG \perp DF$, unde G aparține segmentului DF. Dacă $DE = 6$ cm, $DG = 4$ cm și $GF = 5$ cm, determinați $\sphericalangle DEF$ și lungimile EF și EG.

39 Fie $ABCD$ un romb cu latura de 8 cm și $\sphericalangle A = 60^\circ$. Determinați lungimile diagonalelor rombului.

40 În paralelogramul $MNPQ$ avem $MN \perp NQ$ și $\sphericalangle MQN = 30^\circ$. Dacă $NQ = 12\sqrt{3}$ cm, calculați MN, MQ și MP.

41 Într-un trapez dreptunghic, lungimile bazelor sunt 4 cm și 10 cm, iar înălțimea este de 8 cm. Calculați perimetrul și lungimile diagonalelor trapezului.

42 Într-un trapez isoscel lungimile bazelor sunt 11 cm și 21 cm, iar diagonala este de 20 cm. Calculați înălțimea și perimetrul trapezului.

43 Stabiliți în care dintre următoarele cazuri, triunghiul ABC este dreptunghic (indicați unghiul drept).

a $AB = 8$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 17$ cm.
b $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 2\sqrt{6}$ cm.
c $AB = 5\sqrt{2}$ cm, $BC = 3\sqrt{2}$ cm, $AC = 9$ cm.
d $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 3\sqrt{5}$ cm.
e $AB = 5\sqrt{3}$ cm, $BC = 3\sqrt{5}$ cm, $AC = 3\sqrt{15}$ cm.

44 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 24$ cm, $BC = 30$ cm și $AC = 18$ cm. Determinați lungimea înălțimii din A a triunghiului.

45 Determinați lungimea înălțimii unui trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) cu $AB = 32$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 7$ cm și $AD = 15$ cm.

46 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, fie $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $\frac{BD}{BC} = \frac{9}{25}$, iar perimetrul triunghiului ABC este egal cu 60 cm, aflați:
a lungimile catetelor și a ipotenuzei;
b lungimea înălțimii AD.

47 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, fie $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, iar perimetrul triunghiului ABC este egal cu 48 cm, aflați:
a lungimile catetelor și a ipotenuzei;
b lungimea înălțimii AD.

48 Raportul catetelor unui triunghi dreptunghic este $0{,}75$, iar mediana relativă la ipotenuză are lungimea de 10 cm. Calculați perimetrul triunghiului.

49 Fie triunghiul ABC, cu $AB = 6$ cm, $AC = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = 6\sqrt{3}$ cm. Dacă $AP \perp BC$, $P \in BC$, $M = \text{pr}_{AB}P$ și $N = \text{pr}_{AC}P$, aflați lungimea segmentului MN.

50 În triunghiul isoscel ABC se cunosc baza $BC = 16$ cm și mediana $BM = 15$ cm. Determinați lungimea înălțimii AD și perimetrul triunghiului.

Rezolvare: Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $BG = \frac{2}{3}BM = 10$ cm. Aplicăm T.P. în triunghiul BDG, $\sphericalangle D = 90^\circ$, și se obține $GD = 6$ cm. $AG = 2GD$...

51 În triunghiul isoscel ABC cu baza $BC = 4$ cm, medianele AM și BN fac un unghi de 30°. Calculați perimetrul triunghiului.

52 În triunghiul isoscel ABC, cu baza $BC = 20$ cm, bisectoarele unghiurilor B și C fac un unghi de 120°. Aflați lungimea înălțimii AD.

53 În triunghiul ABC, $BC = 10$ cm, $\sphericalangle BIC = 135^\circ$ și $\sphericalangle IBC = 15^\circ$, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

54 În triunghiul dreptunghic ABC, cu $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm, notăm cu M mijlocul ipotenuzei BC și cu D proiecția punctului A pe BC. Determinați lungimea segmentului DM.

55 În triunghiul dreptunghic ABC, notăm cu M mijlocul ipotenuzei BC și cu E piciorul bisectoarei unghiului A. Determinați lungimea segmentului ME dacă $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm.

56 În triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 15$ cm și $AC = 20$ cm, notăm cu D proiecția punctului A pe BC și cu E piciorul bisectoarei unghiului $\sphericalangle A$. Aflați lungimea segmentului DE.

57 Se dă pătratul $ABCD$ cu lungimea laturii de 18 cm. Pe BC și CD se iau punctele E, respectiv F astfel încât $BE = 6$ cm și $CF = 4$ cm. Arătați că triunghiul AEF este dreptunghic.

58 Triunghiul dreptunghic ABC are ipotenuza $BC = 12$ cm și cateta $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Dacă P este proiecția punctului C pe bisectoarea unghiului ABC, calculați lungimea segmentului BP.

59 Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \parallel CD$, în care $AB = 6$ cm, $CD = 12$ cm și distanța dintre baze este de 4 cm. Calculați perimetrul trapezului.

60 Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \parallel CD$, cu $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm și $CD = 24$ cm. Calculați lungimea înălțimii și lungimea diagonalelor.

61 În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, cu înălțimea de 4 cm, segmentul determinat de mijloacele diagonalelor are lungimea de 3 cm. Calculați perimetrul trapezului, știind că $AB = BC$.

62 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$. Dacă $AB = BC = 25$ cm și $CD = 40$ cm, calculați perimetrul și lungimile diagonalelor trapezului.

63 Fie cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, 10\text{cm})$ și $\mathcal{C}_2(O_2, 5\text{ cm})$. Determinați lungimea tangentei comune exterioare în cazurile:
a $O_1O_2 = 15\text{cm}$; b $O_1O_2 = 13\text{cm}$; c $O_1O_2 = 20\text{cm}$.

64 Fie T_1T_2 tangenta comună exterioară cercurilor $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, astfel încât $T_1 \in \mathcal{C}_1$ și $T_2 \in \mathcal{C}_2$. Notând $\{M\} = O_1O_2 \cap T_1T_2$, calculați distanța O_1O_2 știind că:

a $T_1T_2 = 16$ cm, $r_1 = 20$ cm și $r_2 = 8$ cm;

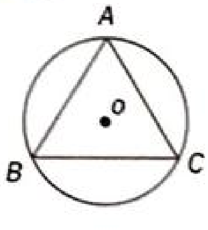
b $MT_1 = 8\sqrt{3}$ cm, $MT_2 = 6\sqrt{3}$ cm și $r_2 = 6$ cm;

c $r_1 = 16$ cm, $r_2 = 4$ cm și $m(\sphericalangle T_1MO_1) = 30°$.

65 Din punctul M, exterior cercului de centru O și rază 6 cm, se construiesc tangentele MA și MB la cerc. Știind că $OM = 10$ cm, determinați :

a aria și perimetrul patrulaterului $OAMB$; b lungimea coardei AB.

Aprofundare



66 În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se știe că $BC = 4\sqrt{13}$ cm și $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$. Determinați lungimile catetelor.

67 În triunghiul ABC, dreptunghic în A, înălțimea $AD = 12$ cm și $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Calculați lungimea ipotenuzei BC.

68 Raportul catetelor unui triunghi dreptunghic este $\frac{3}{4}$, iar perimetrul său, 24 cm. Aflați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

69 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $DB + 2DC = 34$ cm și $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$, calculați perimetrul triunghiului.

70 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $D \in AB$ astfel încât $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCD$. Dacă $AB = 24$ cm și $BC = 30$ cm, aflați lungimea segmentului CD.

71 Triunghiul dreptunghic ABC are ipotenuza $BC = 20$ cm și cateta $AB = 12$ cm. Calculați distanța de la C la bisectoarea unghiului ABC.

72 Triunghiul ascuțitunghic ABC este isoscel, cu baza $BC = 8$ cm. Știind că raza cercului circumscris triunghiului are lungimea de 5 cm, calculați perimetrul și aria triunghiului ABC.

Rezolvare: Construim înălțimea AD, $D \in BC$, care este și mediană. (Triunghiul ABC este isoscel de bază BC.) $BO = R$. Aplicăm T.P. în triunghiul OBD...

73 Laturile trapezului isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, sunt tangente la un cerc. Știind că $AB = 48$ cm și $CD = 12$ cm, determinați:
a raza cercului înscris în trapez; **b** aria și perimetrul trapezului.

74 În cercul $\mathcal{C}(O,r)$ se consideră diametrul AB și M un punct pe cerc. Dreapta AM intersectează în C tangenta în B la cerc. Arătați că $AB^2 = AM \cdot AC$.

75 Determinați un triunghi dreptunghic în care lungimile laturilor, înălțimii și proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt exprimate prin numere naturale.

76 Un triunghi dreptunghic, cu perimetrul de 36 cm, are lungimile laturilor proporționale cu trei numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor triunghiului.

77 Fie $ABCD$ un trapez isoscel, cu $AB \parallel CD$ și cu diagonalele perpendiculare. Dacă $AB = 2$ cm și $CD = 6$ cm, calculați:
a lungimea diagonalei; **b** lungimea înălțimii și perimetrul.

78 În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$), se cunosc înălțimea $AD = 4$ cm, $BC = 5$ cm și $AB = BC < CD$. Determinați perimetrul trapezului.

79 În triunghiul isoscel ABC cu baza BC, unghiul BAC este obtuz. Se cunosc $BC = 32$ cm și $d(A, BC) = 12$ cm. Perpendiculara în A pe latura AB intersectează latura BC în D. Calculați $\dfrac{DB}{DC}$.

80 Dacă patrulaterul $ABCD$ este ortodiagonal, arătați că $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

81 Patrulaterul $ABCD$ are unghiul A drept și diagonalele perpendiculare. Dacă $AB = 15$ cm, $AD = 20$ cm și $AC = 14$ cm, calculați perimetrul patrulaterului.

82 Demonstrați că într-un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$, au loc relațiile:
a $\dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$; **b** $\dfrac{DB}{DC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Probleme de șapte stele

83 Prin vârful A al triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$) se duce paralela la BC pe care se consideră un punct M. Demonstrați că: $MB^2 + MC^2 = 2(MA^2 + AB^2)$.

84 Fie AC cea mai lungă dintre diagonalele paralelogramului $ABCD$ și E, F proiecțiile punctului C pe AB, AD. Arătați că $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

85 Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC, care satisfac relația: $\dfrac{3b^2(a-c)^2 + 12ab^2c}{a^4 + 2a^3c - c^4 - 2ac^3} = 3$. Stabiliți natura triunghiului ABC.

Testul 1

(3p) 1 În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle A=90°$, $AB=9$ cm și $AC=12$ cm. Aflați BC și AD, unde $AD\perp BC$, $D\in BC$.

(3p) 2 În triunghiul ABC se cunosc $AB=4$ cm, $AC=2\sqrt{3}$ cm și $BC=2\sqrt{7}$ cm.

a Precizați natura triunghiului ABC.

b Dacă $AD\perp BC$, $D\in(BC)$, calculați AD, BD și DC.

(3p) 3 În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB\parallel CD$, $AB<CD$, $\sphericalangle A=90°$ și $DB\perp BC$, se cunosc $BC=2\sqrt{6}$ cm și $AD=2\sqrt{2}$ cm.

a Calculați lungimile bazelor AB și CD.

b Calculați lungimile diagonalelor trapezului $ABCD$.

c Determinați lungimea perpendicularei duse din A pe BD.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle A=90°$, $AB=6$ cm și $BC=10$ cm. Aflați AC și AD, unde $AD\perp BC$, $D\in BC$.

(3p) 2 În triunghiul ABC se cunosc $AB=3\sqrt{5}$ cm, $AC=3\sqrt{6}$ cm și $BC=3$ cm.

a Precizați natura triunghiului ABC.

b Dacă $BD\perp AC$, $D\in(AC)$, calculați BD, AD și DC.

(3p) 3 În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB\parallel CD$, $\sphericalangle C=60°$, se cunosc $BC=4\sqrt{2}$ cm și $AB=2\sqrt{2}$ cm.

a Calculați lungimea bazei mari, CD.

b Calculați lungimile diagonalelor trapezului $ABCD$.

c Determinați lungimea perpendicularei duse din D pe AC.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(3p) 1 În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle B = 90°$, $BD \perp AC$, $D \in AC$, $BC = 16$ cm și $DC = 12{,}8$ cm. Aflați perimetrul triunghiului ABC.

(3p) 2 În dreptunghiul $ABCD$ ($AB > BC$) se consideră $AE \perp BD$, $E \in BD$. Se știe că $DE = 2\sqrt{2}$ cm și $EB = 4\sqrt{2}$ cm.

a Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

b Calculați raportul dintre ariile triunghiurilor AED și AEB.

(3p) 3 În trapezul $ABCD$, $\sphericalangle A = 90°$, bazele CD și AB sunt proporționale cu numerele 4 și 6. Se știe că $AC \perp BC$ și $AD = 4\sqrt{2}$.

a Calculați lungimile bazelor AB și CD și aria trapezului $ABCD$.

b Calculați lungimile diagonalelor trapezului $ABCD$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(3p) 1 În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) se cunosc $AB = 15$ cm și $BC = 24$ cm. Calculați lungimile înălțimilor triunghiului ABC.

(3p) 2 În rombul $ABCD$ se consideră $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $BD = 18$ cm și proiecția lui OB pe AB are lungimea de 5,4 cm, calculați perimetrul și aria rombului $ABCD$.

(3p) 3 Fie $ABCD$ un trapez isoscel, cu $AB \parallel CD$ și cu diagonalele perpendiculare. Dacă $AB = 2$ cm și CD = 6 cm, calculați:

a lungimea înălțimii trapezului $ABCD$ și perimetrul acestuia.

b lungimea diagonalei trapezului $ABCD$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: ....

Clasa a VII-a:

Tema IV.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

(1,5p) 1 Completați pe fișă spațiile punctate cu răspunsul corect.

a Dacă un triunghi dreptunghic are catetele de lungimi 3 cm și 4 cm, atunci ipotenuza are lungimea egală cu .... cm.

b Un triunghi dreptunghic isoscel are lugimea ipotenuzei egală cu $4\sqrt{2}$ cm. Catetele triunghiului au lungimea de .... cm.

c Diagonala unui pătrat cu latura de 10 cm este egală cu .... cm.

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

a Proiecția unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.	A	F
b Triunghiul cu laturile de 4 dm, 5 dm și 6 dm este dreptunghic.	A	F
c Într-un triunghi dreptunghic isoscel mediana și înălțimea relative la ipotenuză au aceeași lungime.	A	F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Lungimea înălțimii triunghiului echilateral cu latura de 6 cm	1 $3\sqrt{3}$ cm
b Lungimea laturii unui romb cu diagonalele de 12 cm și 16 cm	2 $2\sqrt{3}$ cm
c Lungimea diagonalei unui dreptunghi cu lungimea de 16 cm și lățimea de 12 cm	3 $3\sqrt{2}$ cm
d Lungimea catetei triunghiului dreptunghic isoscel care are ipotenuza de 6 cm	4 10 cm
	5 20 cm

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 În triunghiul ABC se cunosc $AB = 6$ cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm și $BC = 2\sqrt{6}$ cm.

a Precizați natura triunghiului ABC.

b Dacă $CD \perp AB$, $D \in AB$, calculați CD, AD și DB.

(2p) 5 În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle C = 45°$, se cunosc $BC = 4\sqrt{2}$ cm și $DC = 10$ cm.

a Calculați lungimea bazei mici, AB.

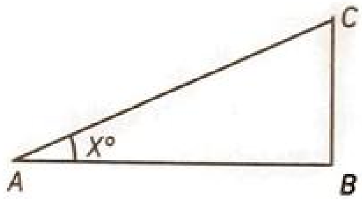
b Calculați lungimile diagonalelor trapezului $ABCD$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

IV.4 Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Pentru un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic oarecare, se definesc rapoartele sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, numite funcții trigonometrice.

Pentru figura alăturată acestea se scriu:



$$\sin x^\circ = \frac{BC}{AC},\quad \cos x^\circ = \frac{AB}{AC},$$

$$\operatorname{tg} x^\circ = \frac{BC}{AB},\quad \operatorname{ctg} x^\circ = \frac{AB}{BC}.$$

Se observă că:

$$\operatorname{tg} x^\circ = \frac{\sin x^\circ}{\cos x^\circ};\quad \operatorname{ctg} x^\circ = \frac{\cos x^\circ}{\sin x^\circ};\quad \sin^2 x^\circ + \cos^2 x^\circ = 1.$$

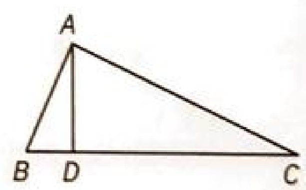
Relații între funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare

$\sin(90^\circ - x^\circ) = \cos x^\circ$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - x^\circ) = \sin x^\circ$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(90^\circ - x^\circ) = \operatorname{ctg} x^\circ$

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de 30°, 45°, 60°

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Teorema cosinusului



Fie triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle C) < 90^\circ$, și $D = \mathrm{pr}_{BC}A$.

Conform teoremei lui Pitagora generalizată, avem

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot CD.$$

Din triunghiul dreptunghic ACD rezultă $CD = AC\cos C$, deci are loc relația

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C. \quad (1)$$

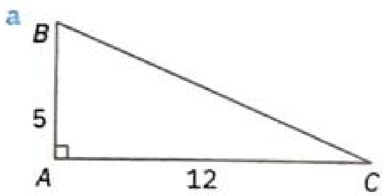
În mod asemănător, dacă $m(\sphericalangle C) > 90^\circ$, se demonstrează că:

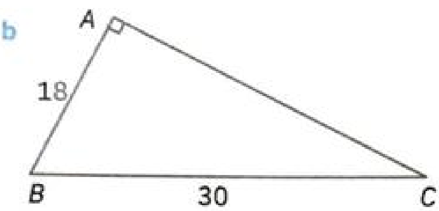
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot AC \cdot \cos(180^\circ - C) \quad (2)$$

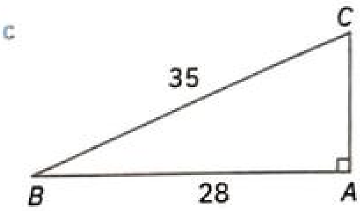
Egalitățile (1) respectiv (2) sunt cunoscute drept teorema cosinusului.

Exersare

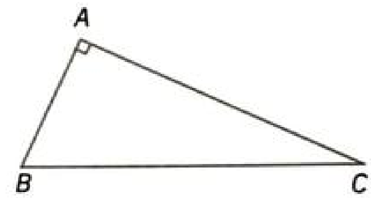
1 Se consideră triunghiul dreptunghic ABC în situațiile a – c. În fiecare situație, determinați lungimea laturii necunoscute, apoi calculați sin$B$, sin$C$, cos$B$, cos$C$, tg$B$, tg$C$, ctg$B$, ctg$C$:

a


b


c


2 În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în A. Completați tabelul:



	AB	AC	BC	$\sin B$	$\cos B$	$\text{tg}\, B$	$\text{ctg}\, B$	$\sin C$	$\cos C$	$\text{tg}\, C$	$\text{ctg}\, C$
a	6	8									
b	10		26								
c		7	25								
d	4		8								

3 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, avem $AB = 3\sqrt{2}$ cm și $AC = 3$ cm.

a Calculați BC și AD, unde $AD \perp BC$, $D \in BC$.

b Calculați sin$B$, cos$B$, tg$B$, ctg$B$.

4 Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$.

a Dacă $AB = 12$ cm și $BC = 20$ cm, calculați AC, sin$C$, cos$C$, tg$B$, ctg$B$.

b Dacă $AB = 5$ cm și $AC = 5\sqrt{3}$ cm, calculați BC, sin$B$, cos$B$, tg$C$, ctg$C$.

c Dacă $AC = 4$ cm și $BC = 2\sqrt{6}$ cm, calculați AB, sin$B$, sin$C$, tg$B$, tg$C$.

5 Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$.

a Dacă $BC = 25$ cm și $\sin C = \frac{3}{5}$, calculați AB, AC, cos$B$, tg$C$.

b Dacă $AB = 6$ cm și $\cos B = \frac{1}{2}$, calculați BC, AC, sin$C$, ctg$B$.

c Dacă $AC = 12$ cm și tg$C$ = 1,25, calculați AB, BC, sin B, cos$B$.

6 În triunghiul ABC, $\sphericalangle B = 90^\circ$, avem $BC = 5$ cm și $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați cos$C$, AC, AB, tg$C$, ctg$C$.

7 Fie triunghiul MNP, $\sphericalangle M = 90^\circ$, $MN = 8\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle MNP = 30^\circ$. Calculați:

a lungimea ipotenuzei și a înălțimii corespunzătoare ei;

b lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

8 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, avem $AB = 4$ cm și $AC = 4\sqrt{3}$ cm. Calculați BC și măsurile unghiurilor B și C.

9 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, avem $AB = 5\sqrt{2}$ cm și $BC = 10$ cm. Calculați AC și măsurile unghiurilor B și C.

10 Înălțimea trapezului dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $\sphericalangle A = 90^\circ$, este de 15 cm, iar $\operatorname{tg} C = 0{,}75$. Calculați BC.

11 În dreptunghiul $ABCD$, $AD = 9$ cm și $\sphericalangle ABD = 60^\circ$. Calculați:
a lungimea diagonalei dreptunghiului;
b măsura unghiului dintre diagonale;
c aria și perimetrul dreptunghiului.

12 În rombul $ABCD$, $BD = 12\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle ADC = 120^\circ$. Calculați AC și perimetrul rombului.

13 Perimetrul unui triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, este egal cu 60 cm, iar ipotenuza are lungimea de 25 cm. Calculați $\sin B + \sin C$.

14 Calculați:
a $4\sin 30^\circ - 6\cos 60^\circ + 5\operatorname{tg} 45^\circ$;
b $2\sin 60^\circ - 4\cos 30^\circ + 3\operatorname{tg} 60^\circ$.

15 Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $AB = 4$ cm. Calculați:
a $\sin B, \cos B, \operatorname{tg} B, \operatorname{ctg} B$;
b lungimile laturilor triunghiului.

16 Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $BC = 12$ cm. Aflați valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului C și lungimile catetelor.

17 Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $AC = 6$ cm. Calculați lungimea ipotenuzei și măsurile unghiurilor ascuțite.

18 Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 12$ cm și $BC = 24$ cm. Calculați perimetrul triunghiului și măsurile unghiurilor ascuțite.

19 În triunghiul ABC, dreptunghic în A, avem $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $AD = 8$ cm și $BD = 4$ cm, calculați $\sin B + \sin C$.

20 În triunghiul dreptunghic ABC, cu ipotenuza $BC = 12$ cm, avem $AD \perp BC$, $D \in BC$, și $\sphericalangle BAD = 30^\circ$. Aflați măsurile unghiurilor ascuțite și lungimile catetelor triunghiului ABC.

21 În triunghiul ABC, dreptunghic în A, avem înălțimea $AD = 6$ cm, $D \in BC$, și $\sphericalangle B = 60^\circ$. Calculați perimetrul triunghiului.

22 Triunghiul ABC este dreptunghic în A, AD este înălțime, $D \in BC$, și $\sphericalangle B = 30^\circ$. Dacă $BD = 6$ cm, calculați perimetrul și aria triunghiului ABC.

23 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $AC = 8$ cm și $\operatorname{tg} C = 1$, calculați perimetrul și aria triunghiului ABC.

24 Fie ABC un triunghi isoscel cu baza $BC = 6$ cm, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Determinați lungimea înălțimii AD și perimetrul triunghiului.

Consolidare

25 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Calculați perimetrul și aria triunghiului ABC dacă:

a $BC = 10$ cm și $\sin B = \frac{3}{5}$;
b $AC = 10$ cm și $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
c $AC = 24$ cm și $\cos C = \frac{12}{13}$;
d $AB = 2\sqrt{2}$ cm și $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

26 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Calculați perimetrul și aria triunghiului ABC dacă:

a $AB = 6$ cm și $\text{tg } B = 2$; b $AC = 18$ cm și $\text{tg } B = 0{,}75$;

c $AC = 7$ cm și $\text{ctg } C = \frac{7}{24}$; d $AB = 4\sqrt{6}$ cm și $\text{ctg } C = \frac{5\sqrt{6}}{12}$.

27 Triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, are cateta $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle BAD = 30°$, unde $AD \perp BC$, $D \in BC$.

a Calculați aria triunghiului ABC. b Aflați raportul $\frac{A_{ADB}}{A_{ADC}}$.

28 Triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, are $AD = 12$ cm, unde $AD \perp BC$, $D \in BC$, și $\cos C = \frac{3}{5}$.

a Calculați perimetrul triunghiului ABC.

b Calculați aria triunghiului ADB.

c Calculați $\sin(\sphericalangle BAD)$, $\cos(\sphericalangle BAD)$ și $\text{tg}(\sphericalangle CAD)$.

29 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, se cunosc $AC = 6$ cm și $\text{tg}C = 0{,}5$. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$.

a Calculați aria triunghiului ABC.

b Arătați că $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$.

c Calculați valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului DAC.

30 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $\text{tg}B = \frac{3}{4}$ și $BC = 15$ cm, calculați perimetrul triunghiului și funcțiile trigonometrice ale unghiului B.

31 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $\text{ctg}B = \frac{5}{12}$ și $BC = 26$ cm, calculați perimetrul triunghiului.

32 Fie triunghiul dreptunghic ABC și $D = pr_{BC}A$. Dacă $BD = 4\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle BAD = 60°$, aflați lungimile laturilor și măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului ABC.

33 În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC = 4\sqrt{5}$ cm și $\text{tg}B = \frac{1}{2}$. Calculați perimetrul triunghiului și $\cos B$.

34 În triunghiul isoscel ABC de bază $BC = 12$ cm se cunoaște $\text{tg}C = \frac{4}{3}$. Calculați perimetrul triunghiului și $\sin C$.

35 Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $DC = 9$ cm și $\text{tg}C = \frac{2}{3}$.

a Determinați lungimile laturilor triunghiului.

b Calculați $\sin B + \cos B$.

36 Dreptunghiul $ABCD$ are lungimea $AB = 40$ cm și $\cos(\sphericalangle BAM) = 0{,}8$, unde $BM \perp AC$, $M \in AC$.

a Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

b Calculați lungimea diagonalei AC.

c Calculați $\cos(\sphericalangle BCM)$ și $\text{tg}(\sphericalangle MBC)$.

37 Dreptunghiul $ABCD$ are lățimea $BC = 21$ cm și $\sin(\sphericalangle MBC) = \frac{3}{5}$, unde $BM \perp AC$, $M \in AC$.

a Calculați lungimea diagonalei AC.

b Calculați aria dreptunghiului $ABCD$.

c Calculați raportul $\frac{A_{BMC}}{A_{ABM}}$.

38 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Dacă $BC = 25$ cm, $\sin B + \sin C = \frac{7}{5}$ și $\sin B - \sin C = \frac{1}{5}$ aflați:

a perimetrul triunghiului;

b lungimile catetelor.

39 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $\text{tg}B + \text{tg}C = \frac{25}{12}$ și $AB = 24$ cm, calculați perimetrul triunghiului.

40 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $E \in AC$ astfel încât $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle CBE$. Dacă $\sphericalangle B = 60°$ și $BC = 10$ cm, calculați perimetrul triunghiului BCE.

41 Fie triunghiul ABC și A' piciorul perpendicularei dusă din A pe BC, $A' \in BC$. Dacă $\sphericalangle B = 60°$, $AB = 16$ cm și $A'C = 3 \cdot A'B$, calculați lungimile AA' și AC. Este triunghiul ABC dreptunghic?

42 Rombul $ABCD$ are latura $AB = 10$ cm. Dacă $\text{tg}\widehat{BAC} = \frac{3}{4}$, determinați lungimile diagonalelor.

43 Se dă trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB = AD = \sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle C = 60°$. Calculați perimetrul trapezului și lungimea diagonalei BD.

44 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, cu bazele $AB = 3$ cm și $CD = 7$ cm. Dacă $\sphericalangle C = 45°$, calculați perimetrul și lungimile diagonalelor trapezului.

Aprofundare

45 Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD, \{O\} = AC \cap BD$, $BC = AD = 5$ cm și $\frac{OA}{OC} = \frac{3}{7}$. Perimetrul trapezului este 30 cm. Calculați AC și $\text{ctg}B$.

46 În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $CD = 12$ cm și $\sphericalangle C = 60°$. Diagonala CA este bisectoarea unghiului BCD.
a Calculați perimetrul și aria trapezului.
b Calculați lungimile diagonalelor trapezului.

47 Trapezul isoscel $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $\sphericalangle C = 60°$ și $AD = AB = BC = 6$ cm.
a Calculați perimetrul și aria trapezului.
b Calculați lungimile diagonalelor trapezului.
c Arătați că triunghiul BDC este dreptunghic.

48 Trapezul isoscel $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $\sphericalangle C = 60°$ și diagonala BD perpendiculară pe latura BC. Se cunoaște $BC = 18$ cm.
a Calculați lungimea bazei mici, AB.
b Calculați aria trapezului.
c Calculați aria triunghiului ABD.

49 Trapezul isoscel $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 45°$, $AD = BC = 4\sqrt{2}$ cm și $CD = 8$ cm.
a Calculați aria trapezului.
b Calculați lungimile diagonalelor trapezului.
c Calculați lungimile segmentelor AO, BO, CO și DO, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

50 Considerăm triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 135°$, $AC = 8\sqrt{2}$ cm și $AB = AC \cdot \sqrt{2}$. Calculați lungimile înălțimilor triunghiului.

51 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 75°$ și $\sphericalangle B = 60°$. Dacă $AC = 5\sqrt{6}$, calculați perimetrul triunghiului.

52 În triunghiul ABC dreptunghic în A, notăm cu D proiecția punctului A pe BC. Dacă $BD = 9$ cm și $\sin C = \frac{3}{5}$, calculați perimetrul triunghiului și $\text{tg}\widehat{BAD}$.

53 În triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, notăm cu D proiecția punctului A pe BC. Știind că $CD = 36$ cm și $\text{tg}B = \frac{4}{3}$, calculați perimetrul triunghiului.

54 Fie *ABCD* un pătrat cu latura de 15 cm. În interiorul pătratului se consideră punctul *E* astfel încât $AE = 10$ cm și $\sphericalangle DAE = 60°$.

a Determinați lungimea segmentului *DE*.

b Dacă perpendiculara în *E* pe *AE* taie dreptele *AB* și *CD* în *M*, respectiv *N*, determinați lungimea segmentului *MN*.

55 În triunghiul *ABC*, cu $\sphericalangle A = 90°$, notăm cu *x* măsura unghiului ascuțit *B*. Arătați că:

a $\sin^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$; **b** $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = (\text{tg}x + \text{ctg}x)^2$.

56 Demonstrați că într-un triunghi dreptunghic *ABC*, cu $\sphericalangle A = 90°$, are loc relația: $a = b\cos C + c\cos B$, unde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

57 Dacă *x* este măsura unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic și $\sin x = \frac{3}{5}$, calculați $\cos x$ și $\text{tg}x$.

58 Arătați că $\cos 20° + \cos 50° - \sin 70° - \sin 40° = 0$.

59 Dacă *x* și *y* sunt măsurile unghiurilor ascuție ale unui triunghi dreptunghic și $x < y$, arătați că $\sin x < \sin y$ și $\cos x > \cos y$.

60 Calculați: $\text{tg}1° \cdot \text{tg}2° \cdot \text{tg}3° \cdot \ldots \cdot \text{tg}89°$.

61 Dacă *x* este măsura unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic și $\text{tg}x = \frac{1}{2}$, calculați $\frac{\sin x \cdot \cos x}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

62 Dacă *x* este măsura unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic și $\text{tg}x = \frac{3}{4}$, calculați $3\sin x + 5\cos x$.

Probleme de șapte stele

63 Fie *ABC* un triunghi dreptunghic în *A* și $D = pr_{BC}A$. Dacă $DC = 18$ cm și $\text{tg}\widehat{BAD} = \frac{1}{3}$, determinați lungimile laturilor triunghiului și valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului *C*.

64 Fie *ABC* un triunghi dreptunghic în *A*, cu $AB = 15$ cm și $AC = 20$ cm. Dacă $E \in BC$ astfel încât $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CAE}$ și $D = pr_{BC}A$, calculați $\text{tg}\widehat{DAE}$.

65 Bazele trapezului *ABCD* au lungimile $AB = 21$ cm și $CD = 7$ cm, iar laturile neparalele $AD = 15$ cm și $BC = 13$ cm.

a Calculați cos *A* și cos *B*.

b Calculați lungimile diagonalelor *BD* și *AC*.

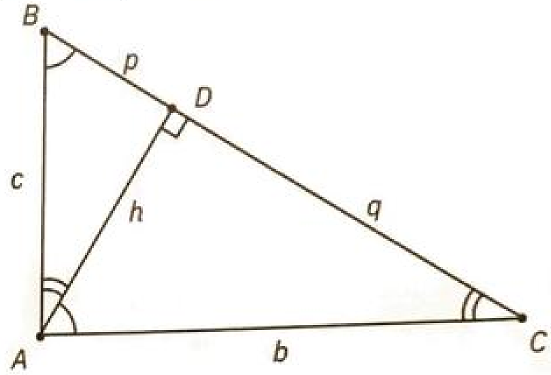
c Arătați că bisectoarea unghiului $\widehat{DAC}$ este perpendiculară pe diagonala *BD* a trapezului.

IV.5 Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Aproximarea în practică a distanțelor folosind relații metrice

Prin rezolvarea unui triunghi se înțelege determinarea lungimilor celor trei laturi și a măsurilor celor trei unghiuri ale triunghiului.

În cazul unui triunghi dreptunghic, pentru rezolvarea triunghiului este suficient să cunoaștem lungimile a două laturi ale triunghiului sau lungimea unei laturi și măsura unuia dintre unghiurile ascuțite (sau valoarea unei funcții trigonometrice a unghiului respectiv).

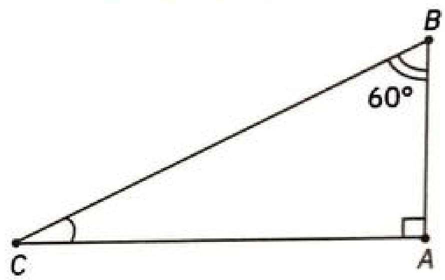
Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$, în care am construit înălțimea AD, $D \in BC$.



Notăm: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = h$, $BD = p$, $CD = q$

În general, triunghiul ABC se poate rezolva când se cunosc:
- oricare două dintre valorile a, b, c, h, p, q;
- una dintre valorile a, b, c, h, p, q și măsura a unuia dintre unghiurile B sau C (sau o funcție trigonometrică a acestui unghi).

Exersare



1 În triunghiul ABC din figura alăturată se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$ și $AB = 8$ cm. Rezolvați triunghiul ABC.

2 În triunghiul ABC se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ și $BC = 6$ cm. Rezolvați triunghiul ABC.

3 În triunghiul ABC se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 45°$ și $AB = 12$ cm. Rezolvați triunghiul ABC.

4 În triunghiul ABC se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 45°$ și $BC = 10\sqrt{2}$ cm. Rezolvați triunghiul ABC.

5 În triunghiul ABC se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Rezolvați triunghiul ABC.

6 În triunghiul ABC se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 9$ cm și $BC = 18$ cm. Rezolvați triunghiul ABC.

7 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Completați tabelul:

	AB	AC	BC	$\sphericalangle B$	$\sphericalangle C$
a	2	$2\sqrt{3}$			
b			$10\sqrt{3}$	30°	
c	20				45°
d		12			60°

8 În triunghiul ABC se cunosc: $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 60°$ și $AB = 3\sqrt{3}$ cm. Rezolvați triunghiul ABC.

9 Triunghiul ABC este dreptunghic în A, iar $AD \perp BC$, $D \in BC$. Rezolvați triunghiul ABC dacă:
a AB = 15 cm și AD = 12 cm;
b AC = 20 cm și CD = 16 cm;
c AD = 24 cm și DB = 18 cm;
d BD = 64 cm și CD = 36 cm.

10 Triunghiul ABC este dreptunghic în A, iar $AD \perp BC$, $D \in BC$. Rezolvați triunghiul ABC dacă:
a AD = 9 cm și $\sphericalangle C = 30°$;
b $CD = 4\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle B = 45°$;
c BD = 3 cm și $\sphericalangle B = 30°$;
d AD = 6 cm și $\sphericalangle BAD = 45°$.

Consolidare

11 Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$. Rezolvați triunghiul ABC dacă:
a $AB = 1$ cm și $\sin C = \frac{1}{3}$;
b $AC = 3\sqrt{2}$ cm și $\cos C = \frac{\sqrt{10}}{10}$;
c $AC = 16$ cm și $\text{tg}\, C = 2$;
d $AB = 4\sqrt{5}$ cm și $\text{ctg}\, B = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

12 Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$, iar AD este înălțime, $D \in BC$. Rezolvați triunghiul ABC dacă $AB = 15$ cm și $BD = 3\sqrt{5}$ cm.

13 Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$. Se cunosc $AB = 6$ cm și $\text{tg}B = \sqrt{2}$. Arătați că înălțimea dusă din vârful A are lungimea mai mică decât 5 cm.

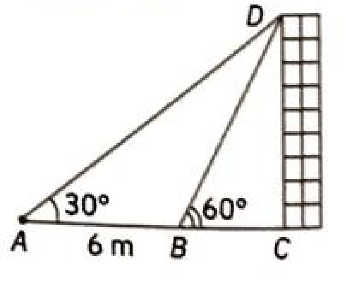
14 Triunghiul DEF este dreptunghic, $\sphericalangle D = 90°$. Se cunosc $DE = 12$ cm și $\text{tg}E = 1{,}5$. Arătați că perimetrul triunghiului este mai mic decât 51,66 cm. Se consideră cunoscut faptul că $3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}61$.

15 Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle B = 90°$. Se știe că $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ și $AC = \sqrt{30}$ m. Arătați că aria triunghiului este mai mare decât 7,32 m². Se consideră cunoscut faptul că $2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45$.

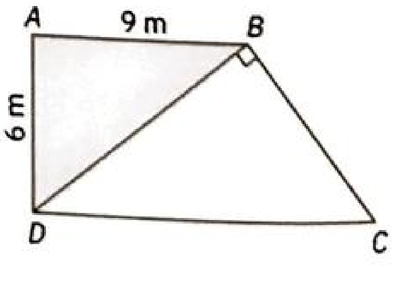
16 O grădină are forma unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de lungime $8\sqrt{5}$ dam și raportul catetelor 2.
a Arătați că aria suprafeței grădinii este egală cu 64 de ari.
b Se împrejmuiește grădina cu gard de sârmă. Arătați că lungimea gardului este mai mică decât 420 de metri. ($2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$)

Aprofundare

17 Vlad și Luca vor să măsoare înălțimea unui zid. Vlad este situat în punctul A, iar Luca în punctul B, ca în figura alăturată.
a Conform datelor din figură, arătați că semidreapta DB este bisectoarea unghiului ADC.
b Aflați înălțimea zidului, CD.



18 Curtea unei case are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$. Aceasta este împărțită în două zone: o zonă cu gazon (triunghiul dreptunghic ABD) și o zonă cu flori (triunghiul BCD dreptunghic în B). Se cunosc $AB = 9$ m și $AD = 6$ m.
a Calculați lungimea segmentului BD.
b Aflați aria zonei unde sunt plantate flori.



c Pentru o mai bună irigare a solului este săpat un mic șanț ce pornește din punctul A și merge în linie dreaptă spre mijlocul segmentului BC. Arătați că acest șanț are lungimea mai mică decât 12 m.

19 În triunghiul ascuțitunghic ABC se cunosc $\sphericalangle A = 60°$, $AB = 4$ cm și $AC = 6$ cm.
- **a** Calculați perimetrul și aria triunghiului ABC.
- **b** Aflați lungimea înălțimii duse din A pe BC.

20 În triunghiul ascuțitunghic ABC, înălțimea AD are lungimea de 12 cm, unde $D \in BC$. Dacă $\sin C = \frac{4}{5}$ și $\cos B = \frac{5}{13}$, calculați perimetrul și aria triunghiului ABC.

21 În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle A = 135°$, $\sphericalangle B = 30°$ și $BC = 6\sqrt{2}$ cm.
- **a** Aflați lungimea înălțimii duse din C pe AB.
- **b** Calculați perimetrul triunghiului ABC.

Probleme de șapte stele

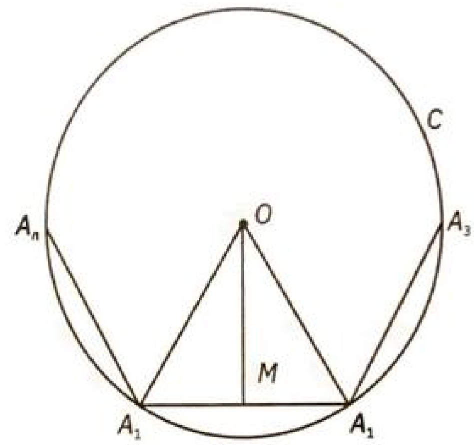
22 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, și M este mijlocul laturii BC. Paralelele la AM duse prin B și C intersectează perpendiculara prin A pe AM în B', respectiv C'.
- **a** Arătați că CA este bisectoarea unghiului MCC', iar BA este bisectoarea unghiului MBB';
- **b** Arătați că AB' este media geometrică a segmentelor BB' și CC'.

23 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 60°$, $AC = 3$ cm și $AB = 9$ cm. Aflați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

24 În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se cunosc $AC = x$ și $BC = 2x$. Se construiește un cerc cu centrul în A și raza AC, care intrersectează pe BC în D.
- **a** Calculați lungimile CD și BD.
- **b** Aflați raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ACD și ADB.

Calculul elementelor în poligoane regulate

Ne reamintim că un poligon convex cu toate laturile congruente și cu toate unghiurile congruente se numește *poligon regulat*.



Împărțind un cerc în $n \geq 3$ arce congruente și unind punctele de diviziune consecutive, se obține un poligon regulat cu n laturi.

Orice poligon regulat este înscris într-un cerc și este circumscris unui cerc, aceste două cercuri fiind concentrice. Centrul comun se numește *centrul poligonului*.

Distanța de la centrul poligonului regulat la fiecare dintre laturi se numește *apotemă* a poligonului. Raza cercului înscris în poligonul regulat este egală cu apotema poligonului.

Pentru un poligon regulat cu n laturi, folosim notațiile: u_n – măsura unui unghi, l_n – lungimea laturii, a_n – lungimea apotemei, P_n – perimetrul și A_n – aria.

Pentru un poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul $\mathcal{C}(O,R)$ avem:

$u_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$	$l_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$a_n = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$
$P_n = n\cdot l_n = 2nR\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$A_n = \dfrac{P_n\cdot a_n}{2} = nR^2\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{180^\circ}{n}$	

Poligoane regulate cu 3, 4 și 6 laturi

Triunghiul echilateral: $l_3 = R\sqrt{3}$; $a_3 = \dfrac{R}{2}$; $P_3 = 3l_3 = 3R\sqrt{3}$; $A_3 = \dfrac{l_3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Pătratul: $l_4 = R\sqrt{2}$; $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$; $P_4 = 4l_4 = 4R\sqrt{2}$; $A_4 = l_4^2 = 2R^2$.

Hexagonul regulat: $l_6 = R$; $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$; $P_6 = 6l_6 = 6R$; $A_6 = \dfrac{3l_6^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Exersare

1 Desenați un pătrat cu latura de 4 cm, apoi cercul circumscris pătratului. Calculați:
a perimetrul și aria pătratului; b apotema și raza cercului circumscris.

2 Desenați un triunghi echilateral cu latura de 3 cm, apoi cercul circumscris triunghiului. Calculați:
a perimetrul și aria triunghiului; b apotema și raza cercului circumscris.

3 Un hexagon regulat are latura de 6 cm. Aflați:
a perimetrul și aria hexagonului; b apotema și raza cercului circumscris.

4 Un cerc are raza egală cu 12 cm.

a Calculați lungimea laturii și a apotemei triunghiului echilateral înscris în cerc.

b Calculați lungimea laturii și a apotemei pătratului înscris în cerc.

c Calculați lungimea laturii și a apotemei hexagonului regulat înscris în cerc.

5 Completați tabelele de mai jos:

a

R	$2\sqrt{3}$				
l_3		6			
a_3				3,5	
P_3			36		
A_3					$3\sqrt{3}$

b

R					$\sqrt{18}$
l_4		$7\sqrt{2}$			
a_4			3		
P_4				$8\sqrt{3}$	
A_4	50				

c

R		8			
l_6					2,(3)
a_6	$4\sqrt{3}$				
P_6			15		
A_6				$\frac{27\sqrt{3}}{2}$	

6 Un triunghi echilateral și un pătrat au același perimetru. Pătratul are latura egală cu 6 cm.

a Determinați apotema, raza cercului circumscris pătratului și aria acestuia.

b Determinați latura, apotema și aria triunghiului echilateral.

Consolidare

7 Lungimea laturii unui hexagon este egală cu lungimea apotemei unui pătrat cu aria de 8 cm^2. Calculați perimetrul și aria hexagonului.

8 Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu perimetrul unui pătrat cu apotema de $6\sqrt{2}$ cm. Calculați apotema și aria triunghiului.

9 Un hexagon regulat este înscris în același cerc cu un triunghi echilateral care are latura $5\sqrt{6}$ cm. Calculați apotema și aria hexagonului.

10 Calculați aria hexagonului regulat *ABCDEF* în care $BD = 8\sqrt{3}$ cm.

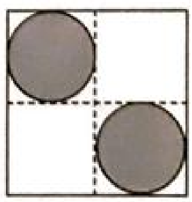
11 Determinați raza cercului în care este înscris un pătrat echivalent cu un triunghi echilateral de arie 36 cm^2.

12 În exteriorul triunghiului echilateral *ABC* se construiește pătratul *BCDE*, cu $BD = 6\sqrt{2}$ cm. Notăm cu *O* centrul cercului circumscris triunghiului *ABC*.

a Calculați aria poligonului *ABEDC*.

b Stabiliți poziția punctului *O* față de cercul circumscris pătratului *BCDE*.

c Comparați unghiurile $\sphericalangle OCE$ și $\sphericalangle EOC$.



13 Un biscuit are forma unui pătrat cu latura de 4 cm. Biscuitul este împărțit în patru zone identice, după cum se observă în figura alăturată. Discurile sunt înscrise în pătrate mici. Discurile reprezintă zonele unde biscuitul este acoperit cu ciocolată.

a Calculați aria zonei acoperite cu ciocolată.

b Arătați că distanța dintre cele două cercuri este mai mică decât 0,85 cm. $(1,41 < \sqrt{2} < 1,42)$

Aprofundare

14 Triunghiul echilateral ABC, de arie $36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, este circumscris cercului $\mathcal{C}(O,r)$, iar în cerc este înscris pătratul $MNPQ$. Determinați aria pătratului.

15 În hexagonul regulat $ABCDEF$, de latură 12 cm, se notează $\{M\} = AC \cap BF$, $\{N\} = BD \cap AC$, $\{P\} = BD \cap CE$, $\{Q\} = CE \cap DF$, $\{R\} = DF \cap EA$, $\{S\} = EA \cap FB$. Arătați că M, N, P, Q, R, S sunt vârfurile unui hexagon regulat și calculați aria și perimetrul său.

16 Două cercuri secante, de centre O_1 și O_2, au coarda comună AB. Știind că $AB = 12$ cm, și că AB este latura unui pătrat înscris în cercul de centru O_1 și latura unui triunghi echilateral înscris în cercul de centru O_2, aflați distanța O_1O_2.

17 Patrulaterul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, este înscris într-un cerc de rază 10 cm. Lungimea AB este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cerc, iar lungimea CD cu latura hexagonului regulat înscris în cerc. Aflați aria patrulaterului $ABCD$.

Probleme de șapte stele

18 Demonstrați că raportul dintre aria pătratului circumscris și aria pătratului înscris în același cerc este constant.

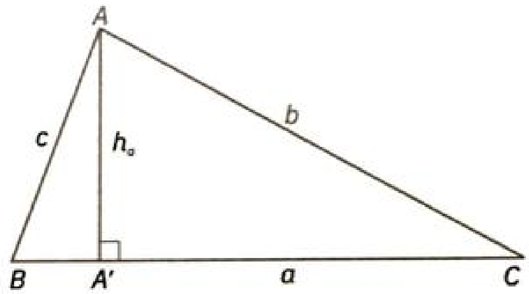
19 Pe laturile AB și AD ale pătratului $ABCD$ se construiesc în afară triunghiurile echilaterale ABE și ADF. Să se calculeze aria poligonului $BCDFE$ în funcție de raza R a cercului circumscris pătratului $ABCD$.

20 Se consideră un poligon regulat cu n laturi. În funcție de R, raza cercului circumscris poligonului și l_n, latura poligonului, să se calculeze l_{2n}, unde l_{2n} este latura poligonului regulat cu $2n$ laturi.

IV.7 Ariile poligoanelor studiate (opțional)

Aria triunghiului

Cu notațiile din figura alăturată, aria triunghiului se poate calcula cu formulele:



$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2},$$

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}=\frac{a\cdot c\cdot \sin B}{2}=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p=\frac{a+b+c}{2}$$

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, atunci $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{c_1\cdot c_2}{2}$, unde c_1, c_2 sunt catete.

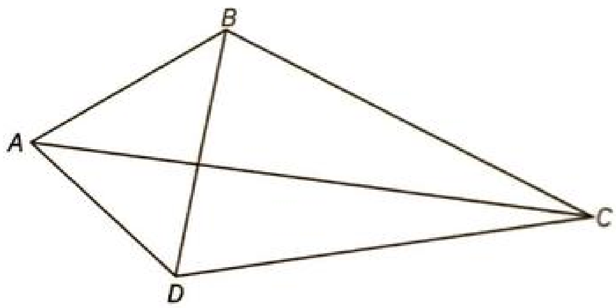
Dacă triunghiul ABC este echilateral, $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, unde l este latura triunghiului.

Dacă în triunghiul ABC, AM este mediană atunci $\mathcal{A}_{ABM}=\mathcal{A}_{ACM}$.

Dacă $\Delta ABC\sim\Delta MNP$ și $\frac{AB}{MN}=k$, atunci $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{MNP}}=k^2$.

Aria patrulaterului

Cu notațiile din figură, aria patrulaterului $ABCD$ se poate calcula cu formula:



$\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_{ABC}+\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{ABD}+\mathcal{A}_{BDC}$.

Dacă patrulaterul $ABCD$ este pătrat, atunci $\mathcal{A}_{ABCD}=AB^2=\frac{AC^2}{2}$.

Dacă $ABCD$ e dreptunghi, atunci $\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot BC=\frac{AC^2\cdot\sin(\widehat{AC,BD})}{2}$.

Dacă patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, atunci aria se calculează cu formula:

$$\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot d(C,AB)=AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{AC\cdot BD\cdot\sin(\widehat{AC,BD})}{2}.$$

Dacă $ABCD$ este romb, atunci $\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot d(C,AB)=AB^2\cdot\sin A=\frac{AC\cdot BD}{2}$.

Dacă patrulaterul $ABCD$ este trapez, cu $AB\parallel CD$ și $AE\perp CD$, $E\in CD$, atunci

$$\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{AE\cdot(AB+CD)}{2}.$$

Exersare

1 Calculați aria triunghiului ABC, dacă:

a $AB=8$ cm și $CF=6$ cm, unde $CF\perp AB$, $F\in AB$;

b $AB=6$ cm, $AC=10$ cm și $\sphericalangle A=30°$;

c $AB=5$ cm, $AC=8$ cm și $BC=7$ cm;

d $AB=AC=BC=6$ cm;

e $AB=2\sqrt{2}$ cm, $BC=3\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle B=90°$;

f $AB=8\sqrt{6}$ cm, $AC=BC$ și $\sphericalangle C=90°$;

g $AB=2{,}4$ cm, $AC=5$ cm și $\sphericalangle A=150°$.

2 Calculați lungimea laturii și lungimea înălțimii unui triunghi echilateral știind că aria sa este:

a $25\sqrt{3}$ cm^2; b $3\sqrt{3}$ cm^2; c $\frac{49\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

3 În triunghiul ABC, fie M și N mijloacele laturilor AC, respectiv BC.

a Dacă $\mathcal{A}_{MNC} = 8$ cm^2, determinați $\mathcal{A}_{ABC}$. b Dacă $\mathcal{A}_{ABC} = 36\sqrt{5}$ cm^2, determinați $\mathcal{A}_{BMN}$.

4 Fie triunghiul ABC cu $AB = 10$ cm și $AC = 12$ cm. Dacă $M \in BC$, $BM = MC$ și d$(M, AB) = 6$ cm, calculați:
a aria triunghiului ABC; b distanța de la M la AC.

5 Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și $M \in BC$, $BM = MC$. Dacă $GN \parallel AB$, $N \in BC$, și $\mathcal{A}_{GMN} = 20$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$.

6 Calculați aria paralelogramului $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, știind că:

a $AB = 8$ cm și $DE = 5$ cm, unde $DE \perp AB$, $E \in AB$; b $AD = 5\sqrt{2}$ cm și $CF = 3$ cm, unde $F = pr_{AD}C$;

c $AB = 7$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle ABC = 60°$; d $AC = 10$ cm, $BD = 12$ cm și $\sphericalangle COD = 45°$;

e $AB = 13$ cm, $BC = 10$ cm și $AC = 9$ cm; f $\mathcal{A}_{ABC} = 10\sqrt{5}$ cm^2.

7 Calculați aria dreptunghiului $ABCD$, știind că:

a $AB = 2\sqrt{3}$ cm și $BC = 6\sqrt{3}$ cm; b $AD = 30$ cm și $AC = 50$ cm;

c $\mathcal{A}_{BOC} = 8$ cm^2, $\{O\} = AC \cap BD$; d $AC = 16$ cm și $\sin(\sphericalangle ADB) = \frac{3}{4}$.

8 Calculați aria rombului $ABCD$, știind că:

a $AB = 10$ cm și $DE = 6$ cm, $E = pr_{AB}D$; b $AB = 2\sqrt{5}$ cm și $\sphericalangle ABC = 45°$;
c $AB = 18$ cm și $\sphericalangle ABC = 120°$; d $AC = 16$ cm și $BD = 12$ cm;
e $BD = 10$ cm și $\sphericalangle BAD = 60°$.

9 Calculați aria pătratului $ABCD$, știind că $\{O\} = AC \cap BD$ și:

a $AB = 10$ cm; b $AC = 2\sqrt{7}$ cm; c $\mathcal{A}_{ADO} = 60$ cm^2; d $\mathcal{A}_{DCE} = 32$ cm^2, $E \in AB$.

10 Fie rombul $ABCD$, cu $\sphericalangle A = 60°$. Dacă $P = pr_{AD}B$ și $Q = pr_{BC}D$, demonstrați că:

a $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{BPDQ}$; b $\mathcal{A}_{ABP} = \frac{1}{4} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$.

11 Aria dreptunghiului $ABCD$ este $132\sqrt{3}$ cm^2. Determinați aria dreptunghiului cu dimensiunile AM și AN, unde $M \in AB$, iar $N \in AD$ și $D \in AN$, astfel încât $AM = 0{,}75 \cdot AB$ și $AN = 1{,}(6) \cdot AD$.

12 Determinați lungimea laturii patrulaterului $ABCD$ în următoarele cazuri:
a $ABCD$ este pătrat cu aria 169 cm^2; b $ABCD$ este romb cu aria 96 cm^2 și $BD = 16$ cm;
c $ABCD$ este pătrat cu aria 288 cm^2; d $ABCD$ este romb cu aria $64\sqrt{2}$ cm^2 și $\sphericalangle BAD = 45°$.

13 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$.
Calculați aria trapezului dacă:

a $BC = 10\sqrt{2}$ cm, $DC = 14$ cm și $\sphericalangle C = 45°$; b $AB = 8$ cm, $DC = 18$ cm și $AC \perp BD$;

c $AC = 2\sqrt{7}$ cm, $BC = 6$ cm și $AC \perp BC$.

14 Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \parallel CD$. Calculați aria trapezului dacă:
a $AB = 7$ cm, $BC = 25$ cm și $CD = 37$ cm; b $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm și $AC = 8$ cm;

c $AB = BC = 10\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle C = 60°$.

15 Calculați aria trapezului $ABCD$, $AB \parallel CD$, dacă:
a $AB = 25$ cm, $BC = 21$ cm, $CD = 7$ cm și $AD = 15$ cm;
b $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm, $CD = 21$ cm și $AD = 12$ cm.

16 Calculați aria unui triunghi ABC cu $BC = 12$ cm și înălțimea $AD = 5$ cm.

17 Determinați înălțimea CF a unui triunghi ABC cu $AB = 10$ cm și $\mathcal{A}_{ABC} = 40\text{ cm}^2$.

18 Triunghiul ABC are aria 60 cm^2 și $d(A, BC) = 8$ cm. Aflați lungimea laturii BC.

19 Triunghiul ABC are laturile $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm și înălțimea $AD = 5$ cm. Determinați lungimea înălțimii CF.

20 Calculați aria unui triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor de 6 cm și 8 cm.

21 Calculați perimetrul unui triunghi dreptunghic isoscel cu aria de 18 cm^2.

22 Calculați aria unui triunghi echilateral, cu latura de 4 cm.

23 Aflați lungimea laturii unui triunghi echilateral cu aria de $225\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

24 Calculați aria unui triunghi isoscel ABC, cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm.

25 Fie triunghiul isoscel ABC, cu baza $BC = 8$ cm și aria de 12 cm^2. Calculați perimetrul triunghiului.

26 Calculați aria unui triunghi ABC, știind că:
a $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm și $\sphericalangle A = 30°$;
b $AB = 6$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle B = 60°$;
c $BC = 8$ cm, $AC = 12$ cm și $\sphericalangle C = 45°$.

27 Triunghiul ABC are laturile $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm și $\sphericalangle A = 60°$. Aflați aria, perimetrul și lungimea înălțimii din A a triunghiului.

28 Calculați aria unui triunghi cu lungimile laturilor de 3 cm, 6 cm și 7 cm.

29 Triunghiul ABC este dreptunghic și M este mijlocul ipotenuzei BC. Dacă $AB = 6$ cm și $AM = 5$ cm, calculați aria triunghiului.

30 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $AB = 12$ cm și $\sphericalangle B = 60°$, calculați aria și perimetrul triunghiului.

31 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $AC = 12$ cm și $\operatorname{tg}(\sphericalangle C) = \frac{3}{4}$, calculați aria și perimetrul triunghiului.

32 Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 20$ cm și $\cos B = \frac{3}{4}$. Calculați aria triunghiului.

33 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și D proiecția punctului A pe BC. Dacă $AC = 8\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle BAD = 30°$, calculați aria și perimetrul triunghiului.

34 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă D este proiecția punctului A pe BC, $\frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$ și $AC = 6\text{cm}$, aflați aria triunghiului.

35 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu perimetrul $12(2+\sqrt{2})$ cm. Dacă punctul E este situat pe latura AC, astfel încât $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle CBE$, $EA = 3\sqrt{2}$ cm și $EC = 9\sqrt{2}$ cm, calculați aria triunghiului BCE.

36 Calculați aria unui paralelogram $ABCD$, cu $AB = 10$ cm și $d(A, CD) = 6$ cm.

37 Determinați aria unui paralelogram $ABCD$, știind că $\mathcal{A}_{ABC} = 12\text{ cm}^2$.

38 Un paralelogram $ABCD$ are laturile $AB = 9$ cm, $BC = 10$ cm și diagonala $AC = 11$ cm. Calculați aria paralelogramului.

39 Calculați aria unui paralelogram $ABCD$, știind că $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm și $\sphericalangle BAD = 60°$.

40 Fie $ABCD$ un paralelogram și O punctul de intersecție al diagonalelor. Arătați că $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{DOA}$.

41 Fie $ABCD$ un paralelogram cu diagonalele $AC = 8$ cm, $BD = 12$ cm și cu $\sphericalangle BOC = 30^\circ$. Calculați aria paralelogramului.

42 Demonstrați că aria unui paralelogram $ABCD$ este egală cu $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin u$, unde u este măsura unghiului ascuțit format de diagonale.

43 Fie $ABCD$ un paralelogram cu aria de 96 cm^2. Dacă $AB = 16$ cm și $BC = 12$ cm, determinați măsurile unghiurilor paralelogramului.

44 Fie $ABCD$ un paralelogram, cu $AC = 12$ cm, $BD = 16$ cm și aria egală cu 48 cm^2. Determinați măsura unghiului ascuțit format de diagonale.

45 Fie $ABCD$ un paralelogram în care $AC \perp AD$. Dacă $AB = 10$ cm și $BC = 8$ cm, calculați aria paralelogramului.

46 Fie $ABCD$ un paralelogram în care $AC \perp AD$. Dacă $CD = 12$ cm și $\sphericalangle BCD = 120^\circ$, calculați aria paralelogramului.

47 Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = AC = 10$ cm și perimetrul de 44 cm. Calculați aria paralelogramului.

Consolidare

48 Fie ABC un triunghi isoscel cu baza $BC = 16$ cm și înălțimea $AD = 6$ cm. Calculați suma lungimilor înălțimilor triunghiului.

49 Fie ABC un triunghi dreptunghic, M mijlocul ipotenuzei BC și $D = pr_{BC}A$, $D \in MB$. Dacă $AB = 8$ cm și $\sphericalangle MAD = 30^\circ$, calculați lungimea segmentului MD și aria triunghiului ABC.

50 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, se consideră punctul D situat pe latura BC, astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$. Dacă $AB = 15$ cm, $\frac{DB}{DC} = \frac{3}{4}$, aflați perimetrul triunghiului și $d(A, BC)$.

51 Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $D = pr_{BC}A$. Dacă $\frac{DB}{DC} = \frac{9}{16}$ și $\mathcal{A}_{ABC} = 96$ cm^2, calculați perimetrul triunghiului.

52 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă perimetrul triunghiului este egal cu 60 cm și $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, calculați lungimile laturilor și aria triunghiului.

53 În triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, se dau înălțimea $AD = 8$ cm și $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{4}$. Calculați aria și perimetrul triunghiului ABC.

54 Triunghiul ABC are $\sphericalangle B = 45^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$ și înălțimea $AD = 4$ cm. Calculați aria triunghiului.

55 Arătați că mediana unui triunghi împarte suprafața triunghiului în două suprafețe triunghiulare echivalente.

56 Fie ABC un triunghi și $D \in BC, D \neq C$. Arătați că $\frac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{ADC}} = \frac{DB}{DC}$.

57 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu $BC = 10$ cm și $AC = 6$ cm. Pe latura AB se consideră punctul P, astfel încât $AP = 2$ cm. Determinați raportul $\frac{\mathcal{A}_{PBC}}{\mathcal{A}_{ABC}}$.

58 Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele P, respectiv Q astfel încât $\frac{AP}{AB} = p$ și $\frac{AQ}{AC} = q$. Arătați că $\frac{\mathcal{A}_{APQ}}{\mathcal{A}_{ABC}} = p \cdot q$.

59 Fie ABC un triunghi și punctul D pe latura BC, astfel încât $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DAC}$. Dacă $AB = 4$ cm și $AC = 6$ cm, calculați $\frac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{ADC}}$.

60 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $BC = 10$ cm și $\mathcal{A}_{ABC} = 24$ cm^2, calculați perimetrul triunghiului.

61 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $AB = 2\sqrt{5}$ cm și $\text{tg}B = \frac{1}{2}$, calculați aria triunghiului.

62 Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Dacă $BC = 20$ cm și $\text{tg}C = \frac{3}{4}$, calculați aria triunghiului.

63 Fie ABC un triunghi cu $\sphericalangle A = 75°$ și $\sphericalangle B = 45°$. Dacă $AC = \sqrt{6}$ cm, calculați aria triunghiului.

64 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, N mijlocul catetei AC și $D = pr_{BC}A$. Dacă $\frac{DB}{DC} = \frac{2}{3}$, calculați raportul $\frac{\mathcal{A}_{BND}}{\mathcal{A}_{ABC}}$.

65 În triunghiul ABC, se consideră mijlocul M al laturii AC și punctul $D \in BC$ astfel încât $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DAC}$. Dacă $AB = 4$ cm și $AC = 6$ cm, calculați $\frac{\mathcal{A}_{BMD}}{\mathcal{A}_{ABC}}$.

66 Fie ABC un triunghi, M mijlocul laturii BC și $E \in AC$ astfel încât $\widehat{EBA} \equiv \widehat{EBC}$. Dacă $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$, calculați $\frac{\mathcal{A}_{AEM}}{\mathcal{A}_{ABC}}$.

67 Calculați aria unui triunghi cu perimetrul de 40 cm și lungimile laturilor proporționale cu numerele 5, 6, 9.

68 Aflați aria pătratului cu diagonalele egale cu 4 cm.

69 Calculați aria unui dreptunghi $ABCD$, cu AB = 16 cm și AC = 20 cm.

70 Fie $ABCD$ un dreptunghi și $\{O\} = AC \cap BD$. Dacă AB = 12 cm și $\sphericalangle BOC = 60°$, calculați aria dreptunghiului.

71 Calculați aria unui romb cu latura de 4 cm și un unghi de 120°.

72 Fie $ABCD$ un pătrat cu latura de 4 cm. Dacă M este mijlocul laturii AB și N este mijlocul laturii BC, calculați aria triunghiului DMN.

73 Calculați aria unui romb cu diagonalele de 12 cm și 14 cm.

74 Calculați aria unui trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare și cu lungimea înălțimii de 10 cm.

75 Demonstrați că aria unui patrulater convex ortodiagonal este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor.

76 Rombul $ABCD$ are latura egală cu 25 cm și diagonala AC = 40 cm. Calculați aria rombului.

77 Fie $ABCD$ un romb cu latura de 5 cm. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu 18 cm și perimetrul triunghiului BCD este egal cu 16 cm. Calculați aria rombului.

Aprofundare

78 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, AB = 8 cm, BC = 5 cm și CD = 12 cm.

a Calculați aria trapezului.

b Calculați aria patrulaterului cu vârfurile în mijloacele laturilor trapezului.

79 Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu bazele $AB = 4$ cm, $CD = 12$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$ și $\sphericalangle C = 60^\circ$.
a Calculați aria trapezului. **b** Calculați aria triunghiului BOC.

80 Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \parallel CD$, în care $AB = BC = 10$ cm și $\frac{OA}{OC} = \frac{5}{11}$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Aflați aria trapezului.

81 Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu bazele $AB = 6$ cm și $CD = 12$ cm, în care $BD \perp BC$. Calculați aria trapezului.

82 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, construim înălțimea AD și proiecțiile E și F ale punctului D pe AB, respectiv AC.
a Calculați aria triunghiului, dacă $DE = 2$ cm și $DF = 2\sqrt{3}$ cm.
b Notând $DE = x$ și $DF = y$, arătați că aria triunghiului este $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{(x^2+y^2)^2}{2xy}$.

83 Determinați lungimea diagonalelor unui dreptunghi, cu aria de 48 cm^2 și perimetrul egal cu 28 cm.

84 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $D = pr_{BC}A$. Arătați că $\frac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{ADC}} = \text{tg}^2 C$.

85 Fie ABC un triunghi dreptunghic, M mijlocul ipotenuzei BC și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $\sphericalangle DAM = 60^\circ$, calculați raportul $\frac{\mathcal{A}_{AMD}}{\mathcal{A}_{ABC}}$.

86 Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $D = pr_{BC}A$. Dacă $DB = 3$ cm, $DC = 7$ cm și perimetrul triunghiului este egal cu 30 cm, aflați aria triunghiului ABC.

87 Triunghiul ABC are $\sphericalangle B = 30^\circ$ și $\sphericalangle C = 45^\circ$. Calculați aria triunghiului, știind că acesta are perimetrul egal cu $4(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ cm.

88 Calculați aria unui triunghi dreptunghic ABC, știind înălțimea $AD = 4$ cm și $\sphericalangle C = 15^\circ$.

89 Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătați că $\mathcal{A}_{GAB} = \mathcal{A}_{GBC} = \mathcal{A}_{GCA}$.

90 Un paralelogram $ABCD$ are aria de 120 cm^2 și perimetrul egal cu 44 cm. Dacă $\{O\} = AC \cap BD$ și $d(O, AB) = 5$ cm, determinați lungimile laturilor paralelogramului.

91 În paralelogramul $ABCD$ notăm cu M mijlocul laturii BC și cu N mijlocul laturii CD. Dacă $\{P\} = AM \cap BD$ și $\{Q\} = AN \cap BD$, calculați raportul $\frac{\mathcal{A}_{APQ}}{\mathcal{A}_{ABCD}}$.

92 Fie $ABCD$ un patrulater convex și $\{O\} = AC \cap BD$. Arătați că dacă are loc egalitatea $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{DOA}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Probleme de șapte stele

93 Fie $ABCD$ un pătrat cu latura de 16 cm și M, N mijloacele laturilor AB, BC. Dacă $P \in CD$, $\frac{PC}{PD} = \frac{1}{3}$ și NQ este bisectoarea unghiului MNP, $Q \in MP$, demonstrați că $\frac{\mathcal{A}_{MDP}}{\mathcal{A}_{PCBM}} < \frac{4 \cdot MQ}{5 \cdot QP}$.

94 Se consideră paralelogramul $ABCD$, M este mijlocul segmentului AB, $DM \cap BC = \{N\}$, iar E este simetricul punctului M față de B.
a Arătați că patrulaterul $ECMN$ este paralelogram.
b Calculați raportul dintre aria triunghiului BMN și aria trapezului $AECD$.

95 Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, iar $DA = d$. Arătați că $\mathcal{A}_{ABCD} \le \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$.

Teste de evaluare

Testul 1

(3p) 1 În triunghiul *ABC* se cunosc $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $AC = 3$ cm. Aflați $\sin C$.

(3p) 2 În triunghiul *ABC* se cunosc $AB = 10$ cm, $AC = 10\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle B = 60°$.

a Calculați lungimea laturii *BC*.

b Precizați natura triunghiului *ABC*.

(3p) 3 În triunghiul dreptunghic *ABC*, cu $\sphericalangle BAC = 90°$, se consideră înălțimea *AD*, $D \in BC$. Se cunosc $BC = 16$ cm și $CD = 4$ cm.

a Calculați aria triunghiului *ABC*.

b Calculați lungimea medianei din *B* a triunghiului *ABC*.

c Determinați lungimea bisectoarei din *C* a triunghiului *ABC*.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 În triunghiul *ABC* se cunosc $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 5$ cm și $BC = 13$ cm. Aflați $\operatorname{tg} B$.

(3p) 2 În triunghiul *ABC*, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 40$ cm, se consideră înălțimea $AD \perp BC$, $D \in BC$, astfel încât $\frac{CD}{AD} = \frac{3}{4}$.

a Calculați aria triunghiului *ABC*.

b Determinați $\sin B$.

(3p) 3 *ABCD* este un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AD = CD = 12$ cm și $AB = 24$ cm. Fie $\{E\} = AD \cap BC$.

a Aflați lungimea liniei mijlocii a trapezului.

b Calculați măsura unghiului $\sphericalangle BAE$.

c Determinați aria triunghiului *ABE*.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(3p) 1 Un triunghi echilateral are latura de lungime $5\sqrt{3}$ cm. Determinați lungimea înălțimii triunghiului.

(3p) 2 Aria unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 16 cm este $32\sqrt{3}\ cm^2$. Determinați lungimile catetelor.

(3p) 3 Pe laturile AB și AD ale pătratului $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice ABE și ADF, de ipotenuze BE și DF, astfel încât $AC = AE = AF$.

a Arătați că $BE = DF$.

b Demonstrați că $BDFE$ este trapez isoscel.

c Arătați că înălțimea trapezului are aceeași lungime ca linia sa mijlocie.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(3p) 1 În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Aflați lungimea înălțimii duse din unghiul drept.

(3p) 2 Diagonalele unui dreptunghi au lungimile egale cu 12 cm și fac un unghi de 60°. Aflați aria dreptunghiului.

(3p) 3 În triunghiul ABC, $BC = 20$ cm și înălțimea $AD = 12$ cm. Fie M mijlocul laturii BC și G centrul de greutate al triunghiului.

a Calculați aria triunghiului ABC.

b Calculați aria triunghiului ABM.

c Determinați aria triunghiului ABG.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 5

(3p) 1 În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle A = 75^\circ$, $\sphericalangle B = 45^\circ$ și $AC = 12\,\text{cm}$. Calculați lungimea laturii AB.

(3p) 2 Aflați aria unui trapez isoscel de baze 6 cm și 8 cm, care are un unghi de 60°.

(3p) 3 Fie AD înălțimea din A a triunghiului ABC ($D \in BC$). Triunghiul ADC este dreptunghic isoscel și $BD = \frac{1}{2}AB = 6$ cm.

a Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b Aflați lungimea segmentului AD.

c Determinați perimetrul triunghiului ADC.

d Calculați aria triunghiului ABC.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 6

(3p) 1 În triunghiul ABC se consideră înălțimea $AD \perp BC$, $D \in BC$. Știind că $AD = 12\,\text{cm}$, $\cos C = \frac{5}{13}$ și $\sin B = \frac{3}{5}$, calculați lungimea laturii BC.

(3p) 2 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 105^\circ$, $\sphericalangle B = 30^\circ$, iar înălțimea din A are lungimea $AD = 20\,\text{cm}$. Calculați aria triunghiului.

(3p) 3 În triunghiul ABC se cunosc $AB = 15\,\text{cm}$, $AC = 20\,\text{cm}$ și $BC = 25\,\text{cm}$.

a Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

b Calculați sinusul unghiurilor B și C.

c Determinați lungimea medianei din B a triunghiului.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 7

(3p) 1 Se dă triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A=90^\circ$, $AB=12$ cm și $\cos B=0,6$. Calculați perimetrul triunghiului.

(3p) 2 Aflați aria triunghiului ABC în care $AB=8$ cm, $BC=5$ cm, $\sphericalangle B=30^\circ$.

(3p) 3 În exteriorul rombului $ABCD$, cu $AB = 10$ cm și $\sphericalangle BAD=60^\circ$, se construiesc pătratele $ABEF$ și $BCMN$.

a Calculați aria rombului $ABCD$.

b Calculați măsura unghiului $\sphericalangle EBN$.

c Determinați aria poligonului $ADCMNEF$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 8

(3p) 1 În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle A=90^\circ$, $AB=4$ cm și $AC=3$ cm. Aflați $\cos B$.

(3p) 2 Un paralelogram are laturile de lungimi 4 cm și 3 cm și un unghi de 30°. Calculați aria paralelogramului.

(3p) 3 Fie $ABCD$ un pătrat de latură a și punctele $E \in BC, F \in CD$ astfel încât $FC=EC=\frac{1}{3}BC$.

a Calculați aria triunghiului AEF.

b Aflați distanța de la punctul E la latura AF.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P

Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: ....

Clasa a VII-a:

Tema IV.2. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic. Ariile poligoanelor studiate

(1,5p) 1 Completați pe fișă spațiile punctate cu răspunsul corect.

a Dacă un unghi are măsura egală cu 30°, atunci sinusul unghiului este egal cu ....

b Lungimea laturii pătratului care are aria egală cu $144\ cm^2$ este egală cu ...... cm.

c Aria triunghiului echilateral cu latura de 8 cm este egală cu ...... cm^2.

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

a $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ — A F

b Un triunghi echilateral are latura de 10 cm. Aria triunghiului este egală cu $25\sqrt{3}\ cm^2$. — A F

c Un dreptunghi are aria egală cu $65\ cm^2$, iar lățimea are lungimea de 5 cm. Lungimea dreptunghiului are 15 cm. — A F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Aria rombului cu latura de 4 cm și unul dintre ascuțite de 60°	1 $8\ cm^2$
b Aria triunghiului ce are două laturi de lungimi 8 cm și 4 cm,	2 $9\sqrt{3}\ cm^2$
iar măsura unghiului dintre ele de 45°	3 $8\sqrt{2}\ cm^2$
c Aria trapezului cu înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm și linia mijlocie de 3 cm	4 $9\ cm^2$
d Aria pătratului cu diagonala de $3\sqrt{2}$ cm	5 $8\sqrt{3}\ cm^2$

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$. Dacă $AB = 9$ cm și $BC = 15$ cm, calculați AC, $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} C$, $\operatorname{ctg} C$.

(2p) 5 Înălțimea trapezului dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $\sphericalangle A = 90°$, este de 8 cm, iar $\operatorname{tg} C = 1,(3)$. Se știe că $AB = BC$.

a Calculați BC.

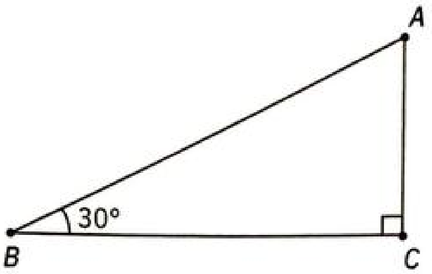
b Calculați aria trapezului $ABCD$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă un punct din oficiu.

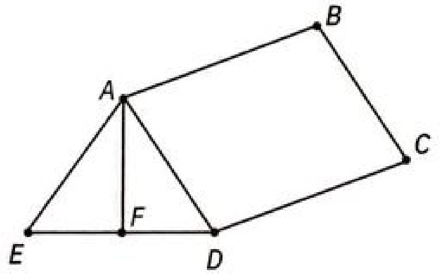
IV.8 Probleme cu caracter aplicativ

1 O tablă de oțel în formă de pătrat cu latura de 120 cm trebuie vopsită pe ambele părți. Calculați cantitatea de vopsea necesară, știind că pentru 45 cm^2 se consumă 3 g de vopsea.

2 Pe un deal se plantează doi pomi (reprezentați în figura de mai jos prin punctele *A* și *B*) care să aibă între ei o distanță de 6 m în plan orizontal, pentru extinderea rădăcinilor. La ce distanță trebuie săpate gropile, dacă panta dealului are o înclinare de 30° față de orizontală?

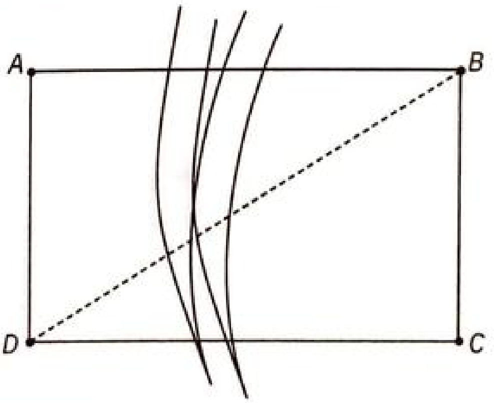


3 Aflați *câtă tablă este necesară* pentru confecționarea unui acoperiș cu două pante al unei hale dreptunghiulare cu lungimea $CD = 30$ m și lățimea $DE = 14{,}1$ m, știind că panta acoperișului este $\sphericalangle ADE = 45°$ și că pentru încheierea tablei se mai adaugă 5% din material. (Se va folosi valoarea $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$.)



4 Pentru îmbunătățirea producției agricole, un fermier apelează la noul tip de îngrășăminte chimice, care asigură, în condiții ideale, o recoltă de 360 kg la hectar. Aplicând îngrășământul pe o suprafață agricolă în formă de trapez isoscel, cu laturile $AB = 180$ m, $AD = BC = 340$ m și $CD = 500$ m, el obține o recoltă de 3213 kg. Aflați care este gradul de eficiență (randamentul) aplicării îngrășământului în condițiile de lucru ale fermierului.

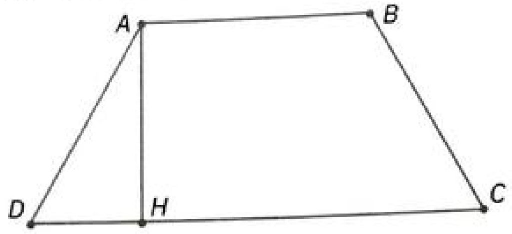
5 Un teren în formă de dreptunghi este parțial inundat, așa cum se vede în figura de mai jos. Prin măsurare directă, se găsește $AD = 120$ m. Întrucât latura *AB* este inaccesibilă, un topograf aflat în punctul *D* măsoară unghiul sub care se vede latura *BC* și obține $\sphericalangle BDC = 30°$.



a Calculați lungimea segmentului *AB*.

b Determinați aria terenului.

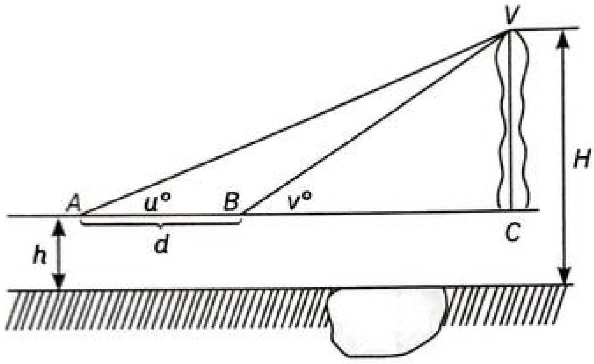
6 În figura de mai jos este reprezentat un teren agricol în formă de trapez isoscel. Se știe că $AB = AD = 2{,}5$ km și înălțimea AH egală cu jumătate din media aritmetică a celor două baze. Terenul este cultivat cu grâu de trei fermieri. Lotul celui de-al doilea fermier este de două ori mai mare decât cel al primului și cu 50 ha mai mic decât cel al celui de-al treilea fermier.



a Aflați suprafața deținută de fiecare fermier.

b Determinați ce cantitate de grâu se obține în total dacă la fiecare hectar cultivat primul fermier obține 1900 kg, cel de-al doilea 2,25 t, iar cel de-al treilea 2400 kg.

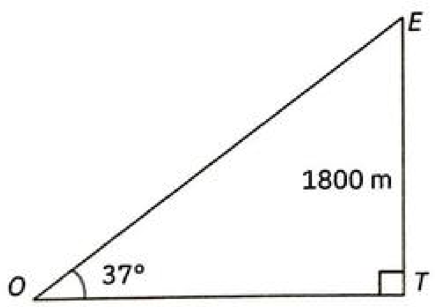
7 Pentru a determina înălțimea H a unui obiectiv inaccesibil (de exemplu, un copac aflat pe celălalt mal al unui râu decât observatorul), se fac următoarele măsurători: se determină (cu ajutorul unui instrument special, numit *teodolit*) măsurile unghiurilor $u°$ și $v°$, apoi, cu o ruletă, se măsoară distanța $AB=d$. Ocularul teodolitului se află la distanța h față de teren.



a Dacă $h=1{,}3$ m, $d=41{,}4$ m, $u°=15°$ și $v°=30°$, determinați H.

b Arătați că $d = (H - h)(\text{ctg}\,u° - \text{ctg}\,v°)$.

8 Un elicopter (E) se află la 1800 de metri deasupra unei ținte (T) a cărei poziție i-o semnalează turnul de control (O) de pe aeroport. În acel moment, unghiul sub care vede elicopterul un observator aflat la baza turnului de control este de 37°.



a Aflați distanța (în linie orizontală) de la aeroport la elicopter.

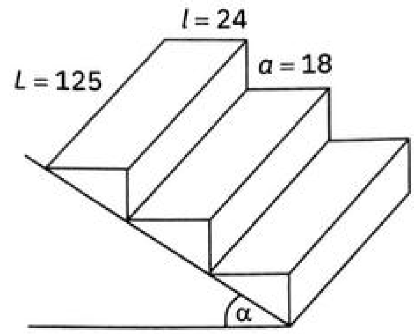
b Considerând că până la țintă se poate merge în linie dreaptă, determinați viteza medie cu care trebuie să se deplaseze un echipaj care pleacă de la turnul de control și vrea să ajungă la țintă în 2 minute.

c Sub ce unghi ar trebui să vadă elicopterul un echipaj aflat pe linia dreaptă între turnul de control și țintă, astfel încât echipajul să poată ajunge la țintă în 90 de secunde cu viteza găsită la punctul b? Se poate folosi valoarea aproximativă $\sin 37° = 0{,}6$.

9 O scară de piatră este formată din 10 trepte de lungime $L = 125$ cm, lățime $l = 24$ cm și înălțime $a = 18$ cm.

a Calculați ce suprafață trebuie să aibă un covor pentru a acoperi complet scara.

b Calculați sinusul unghiului pe care îl face scara cu direcția orizontală.



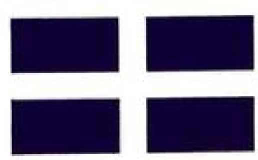
10 Lungimea pasului lui Alin este de 8 dm; el face 150 de pași pe minut. Alin parcurge diagonala pieței publice din orașul său, care are forma unui pătrat, în 40 de secunde.

a Calculați viteza lui Alin, exprimată în metri pe secundă.

b Determinați aria pieței.

c Pentru pavarea pieței se folosesc dale dreptunghiulare, de dimensiuni 25 cm × 80 cm. Calculați numărul de dale necesare, știind că pierderile sunt de 3%.

11 Un steag are forma din imaginea de mai jos. Benzile albe au lățimea egală cu 20% din lățimea steagului. Calculați câtă pânză albă și câtă albastră se consumă pentru confecționarea unui steag cu lungimea de 4 m și cu lățimea de 3 m.



IV.9 Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1 Se consideră triunghiul ABC și un punct M în interiorul triunghiului. Înălțimile triunghiului au lungimile $h_a \le h_b \le h_c$. Fie $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$, unde $D \in BC$, $E \in AC, F \in AB$.

a Dacă triunghiul ABC este echilateral, arătați că $MD + ME + MF = h_a$.

b Arătați că $\frac{MD}{h_a} + \frac{ME}{h_b} + \frac{MF}{h_c} = 1$.

c Demonstrați că $h_a \le MD + ME + MF \le h_c$.

2 Fie triunghiurile ABC și BCD, dreptunghice în B, respectiv C, $\sphericalangle A = 15°$, astfel încât $BC \equiv CD, BM \perp AC, MN \perp BD, M \in AC, N \in BD$, iar A și D sunt în semiplane diferite, determinate de dreapta BC.

a Aflați măsurile unghiurilor ABM și BMN.

b Ce fel de patrulater este $ABDC$?

c Dacă $BN = 2$ cm, aflați AC.

3 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și BE este bisectoarea unghiului CBA, $E \in AC$. Paralela dusă la AB prin E intersectează pe BC în D, iar paralela prin E la BC intersectează pe AB în H. Se notează $DH \cap AC = \{F\}$.

a Demonstrați că $BDEH$ este romb.

b Dacă $\sphericalangle C = 30°$ și $AB = 2$ cm, calculați distanța de la C la ortocentrul triunghiului FBC.

4 Se dă triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$, echivalent cu pătratul $ABEF$ cu diagonala de $4\sqrt{2}$ cm, construit în exteriorul triunghiului ABC. Determinați aria triunghiului ABC și lungimea înălțimii din vârful A.

5 Fie $ABCD$ un paralelogram, punctul O situat în interiorul triunghiului ABD și $OQ \parallel AD, Q \in CD$, $\{M\} = OQ \cap BD, OP \parallel AB, P \in BC, OP \cap BD = \{N\}$. Arătați că $\mathcal{A}_{OMN} = \mathcal{A}_{MQD} + \mathcal{A}_{BPN}$ dacă și numai dacă lungimile segmentelor MN, MD, NB sunt laturile unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza egală cu MN.

6 Un triunghi ABC are $\sphericalangle A = 60°$ și $2AB = 3AC$. Arătați că $2AB^2 = AC^2 + 2BC^2$.

7 Fie triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC = 18$ cm, $\sphericalangle A = 120°$. Punctul G aparține bisectoarei unghiului BAC, $D \in BC$ și $G \in AD$ astfel încât $GD = 1$ cm. Se construiește mediană CE, $E \in AB$ și $BG \cap CE = \{N\}$.

a Demonstrați că $CE = 3CN$.

b Arătați că $DNPQ$ este paralelogram, unde $AD \cap CE = \{Q\}$ și $BQ \cap AC = \{P\}$.

c Aflați perimetrul patrulaterului $DNPQ$.

8 Demonstrați că, dacă triunghiul ABC are $\sphericalangle A = 90°$, atunci lungimea înălțimii din A este mai mare decât raportul dintre produsul și suma lungimilor catetelor.

9 Într-un triunghi dreptunghic T, raportul catetelor este $\sqrt{2}$. Arătați că:

a Două dintre medianele triunghiului sunt perpendiculare.

b Există un triunghi T′, asemenea cu T, care are lungimile laturilor respectiv egale cu medianele lui T.

10 Fie triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Arătați că:

a $\frac{CD}{BD} = \frac{AC^2}{AB^2}$; b $AC^2 \cdot BD^2 + AB^2 \cdot CD^2 = AD^2 \cdot BC^2$.

11 Demonstrați că un triunghi dreptunghic este isoscel dacă și numai dacă $p = (1+\sqrt{2})h$, unde p este semiperimetrul, iar h este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

12 Fie $P \in (AB)$ și M mijlocul segmentului AB. De aceeași parte a dreptei AB se consideră punctele D și E astfel încât triunghiurile ADP și PEB să fie dreptunghice isoscele, cu unghiurile drepte în D și E. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului DME.

13 Determinați lungimile laturilor triunghiului dreptunghic ABC, în care catetele de lungimi b și c verifică egalitatea $\sqrt{(b-3\sqrt{2})^2+1} + \sqrt{(c-2\sqrt{3})^2+4} \leq 3$.

14 Dacă M este un punct în interiorul unui triunghi ABC astfel încât $\mathcal{A}_{MAB} = \mathcal{A}_{MBC} = \mathcal{A}_{MCA}$, arătați că M este centrul de greutate al triunghiului.

15 Fie ABC un triunghi, P un punct în semiplanul deschis determinat de A și BC și $\{A'\} = AP \cap BC$. Arătați că $\frac{\mathcal{A}_{PBC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{PA'}{AA'}$.

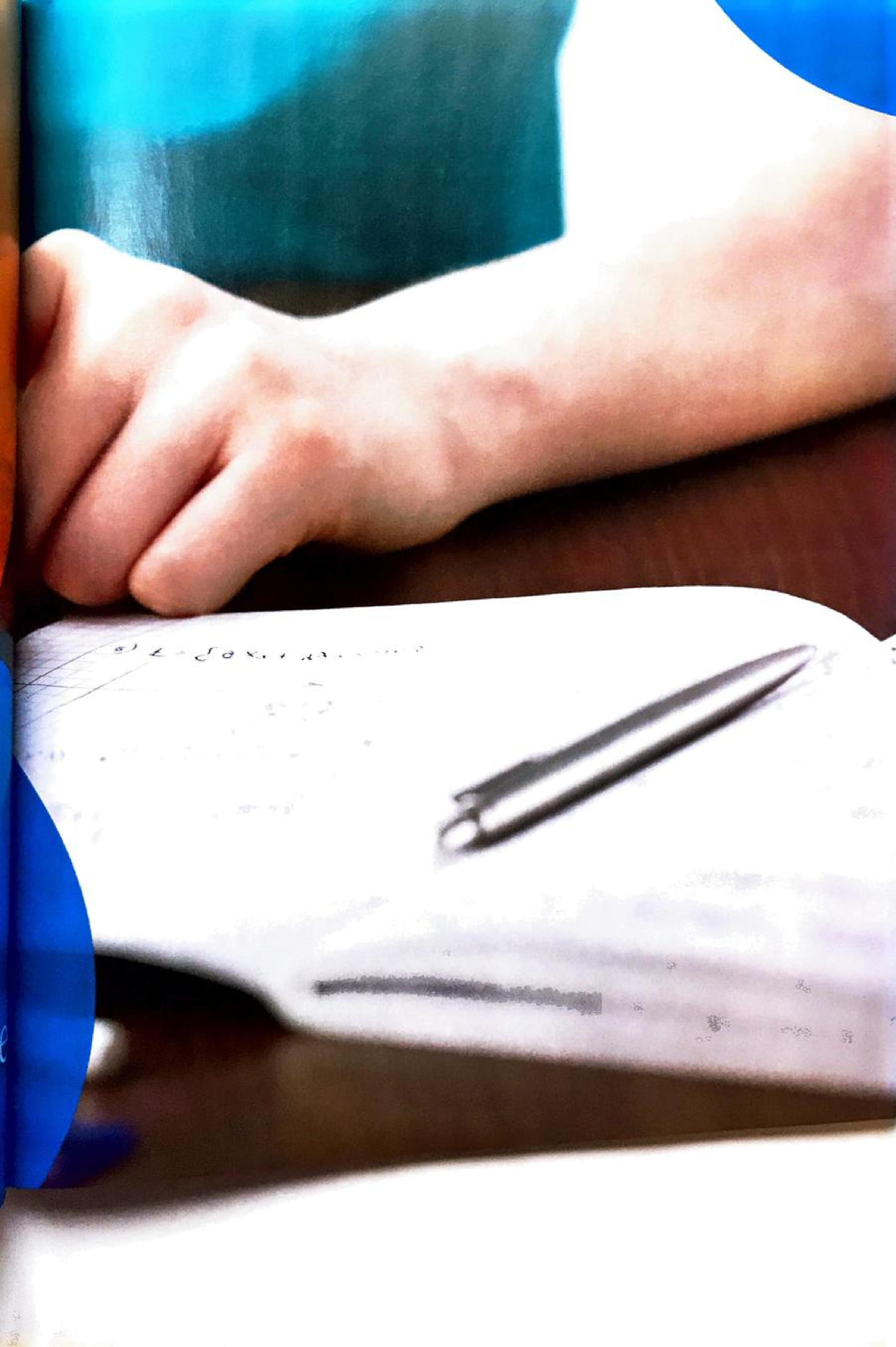
16 Fie ABC un triunghi și M un punct în interiorul său. Dacă $\{A'\} = AM \cap BC$, $\{B'\} = BM \cap CA$ și $\{C'\} = CM \cap AB$, arătați că $\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1$.

17 În interiorul triunghiului ABC considerăm un punct M prin care ducem paralele la laturile triunghiului: $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel CA$ și $C_1C_2 \parallel AB$, punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ fiind situate pe laturile triunghiului. Arătați că:

$$\frac{A_1A_2}{BC} + \frac{B_1B_2}{CA} + \frac{C_1C_2}{AB} = 2.$$

V

Subiecte pentru evaluările finale



V.1 Variante de subiecte pentru teză

Varianta 1

Subiectul I *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se va trece numai răspunsul.*

1 a Soluția ecuației $2x - 7 = 5$ este $x = \ldots\ldots$
b Un cerc are diametrul egal cu 10 cm. Lungimea cercului este egală cu .....π cm.
c Mulțimea soluțiilor ecuației $-2x + 3 = 11$ este .....

2 a Un număr irațional mai mare decât 5 este .....
b O soluție a ecuației $x^2 = 5$ este $x = \ldots\ldots$
c Dacă $A(1;2)$ și $B(-1;2)$, atunci $AB = \ldots\ldots$

3 a Dreptunghiul $ABCD$ are $AB = 3$ cm și $BC = 4$ cm. Atunci $BD = \ldots\ldots$ cm.
b Un triunghi dreptunghic are lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză egale cu 4 cm și respectiv 9 cm. Înălțimea triunghiului corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu ..... cm.
c Apotema unui triunghi echilateral este egală cu 6 cm. Raza cercului circumscris triunghiului este egală cu ..... cm.

Subiectul II *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se vor scrie rezolvările complete.*

4 a Rezolvați ecuația $\frac{x+3}{5}+\frac{x+4}{6}=\frac{x-1}{3}+\frac{7x-4}{6}, x \in \mathbb{R}$.
b Aflați ce sumă de bani avea o persoană știind că după ce a cheltuit 10 lei și încă 40% din rest, i-a mai rămas jumătate din suma inițială.

5 Rezolvați sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2(x+2y)-3(x+3y)=-8 \\ 3(2x+y)-2(3x-2y)=7 \end{cases}.$$

6 Dreptunghiul $ABCD$ are $AB = 4$ cm și $BD = 6$ cm. Perpendiculara din punctul A pe dreapta BD intersectează dreapta CD în punctul E.
a Calculați valoarea sinusului unghiului DBC și perimetrul dreptunghiului $ABCD$.
b Calculați lungimea segmentului DE.

Varianta 2

Subiectul I *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se va trece numai răspunsul.*

1 a Soluția ecuației $x \cdot (-3 + 7) = 40$ este $x = \ldots\ldots$
b Cel mai mare număr din mulțimea $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ este .....
c Un pătrat are aria egală cu 10 cm^2. Latura pătratului are lungimea egală cu ..... cm.

2 a Un exemplu de punct situat pe axa Ox a unui sistem de axe ortogonale este punctul de coordonate (.....; .....).
b Dacă $x + 3 = m$ și $m - 1 = 1$ atunci $x = \ldots\ldots$
c Mărind cu 12 un număr natural n, se obține un număr de trei ori mai mare decât numărul inițial. Atunci $n = \ldots\ldots$

3 a Valoarea sinusului unui unghi al unui triunghi echilateral este . . . . .
b Un cerc are lungimea egală cu 12π cm. Aria cercului este egală cu . . . . .π cm^2.
c Un triunghi isoscel are baza egală cu 8 cm, iar fiecare dintre cele două laturi congruente are lungimea de 5 cm. Atunci aria triunghiului este egală cu . . . . . cm^2.

Subiectul II *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se vor scrie rezolvările complete.*

4 a Calculați suma elementelor mulțimii $A=\left\{x \in \mathbb{R} \middle| (x-1)^2=3\right\}$.
b Triunghiul *ABC* are *AB* = 4 cm, *AC* = 8 cm și perimetrul egal cu $4(\sqrt{3}+3)$ cm. Aflați aria triunghiului *ACM*, unde *M* este mijlocul segmentului (*BC*).

5 Se consideră un șir format din cinci numere naturale consecutive.
a Arătați că diferența dintre suma ultimelor patru numere și suma primelor patru numere este aceeași, indiferent de șirul de numere considerat.
b Aflați cele cinci numere din șir știind că suma lor este egală cu 120.

6 Se consideră un triunghi isoscel *ABC* cu $\sphericalangle BAC=120°$ și *BC* = 6 cm.
a Arătați că $AC=2\sqrt{3}$ cm.
b Calculați distanța de la punctul *B* la dreapta *AC*.

Varianta 3

Subiectul I *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se va trece numai răspunsul.*

1 a Soluția ecuație $6x = 2$ este $x =$ . . . .
b Soluția ecuației $\sqrt{x}=4$ este $x =$ . . . .
c $\sin 45° =$ . . . .

2 a Dacă $A=\{1;3\}$ și $B=\{0;3\}$, atunci $A \times B=$ . . . .
b Soluția naturală a ecuației $2x^2=98$ este $x =$ . . . .
c Micșorând cu 4 un număr natural *n*, se obține un număr de două ori mai mic decât numărul inițial. Atunci $n =$ . . . .

3 a Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor de 4 cm și 5 cm. Calculând aria triunghiului, obținem . . . cm^2.
b Fie *ABC* un triunghi dreptunghic și *D* proiecția vârfului *A* pe ipotenuza *BC*. Dacă $\frac{DC}{AC}=\frac{1}{3}$, atunci $\frac{AC}{BC}=$ . . . .
c Dacă în triunghiul dreptunghic *ABC*, dreptunghic în A, avem *AB* = 6 cm și *AC* = 8 cm, atunci raza cercului circumscris triunghiului *ABC* este egală cu . . . cm.

Subiectul II *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se vor scrie rezolvările complete.*

4 a Rezolvați ecuația $1-x+\frac{2-x}{2}+\frac{3-x}{3}=-\frac{4-x}{4}-\frac{5-x}{5}-(6-x)$.
b Rombul *ABCD* are *AB* = *BD* = 6 cm. Aflați lungimea diagonalei *AC*.

5 Fie punctele *A*(5,3) și *B*(2,0) într-un sistem de axe ortogonale *xOy*.
a Calculați *AM*, unde *M* este mijlocul segmentului *AB*.
b Fie punctul *A'* simetricul punctului *A* față de axa ordonatelor. Calculați aria triunghiului *ABA'*.

6 Trapezul isoscel *ABCD* are baza mare *BC* = 18 cm, baza mică *AD* = 6 cm și unghiul *ABC* cu măsura de 45°.
a Calculați perimetrul trapezului.
b Fie *O* punctul de intersecție a diagonalelor trapezului. Aflați distanța de la *O* la *BC*.

Varianta 4

Subiectul I *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se va trece numai răspunsul.*

1 a Soluția ecuației $x+17=9\cdot17$ este $x=\dots$.
b Un număr irațional mai mic decât 4 este ... .
c Dacă ABC este un triunghi dreptunghic, cu $\sphericalangle C = 90°$, astfel încât $AB = 6$ cm și $AC = 4$ cm, atunci $BC = \dots\dots$ cm.

2 a Soluția ecuației $x + 2,3 = 4,17$ este $x = \dots$.
b O soluție a ecuației $2x^2 = 18$ este $x = \dots$.
c Dacă într-un sistem de axe ortogonale punctul M are coordonatele $x = -2$ și $y = 0$, atunci distanța de la M la originea sistemului de axe este egală cu ... .

3 a Diametrul unui cerc este cu 6 cm mai mare decât raza cercului. Atunci aria cercului este egală cu ... π cm².
b Valoarea tangentei unui unghi cu măsura de 45° este egală cu ... .
c Pătratul $ABCD$ are $AC = 3$ cm. Atunci aria pătratului este egală cu ... cm².

Subiectul II *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se vor scrie rezolvările complete.*

4 a Aflați aria triunghiului dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, știind că $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$ și $BC = 30$ cm.
b Determinați mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații: $\begin{cases}4x+2y=26\\2x+5y=33\end{cases}$.

5 a Rezolvați ecuația $\frac{9x-4}{4}+\frac{1-x}{2}=5-x$, $x\in\mathbb{R}$.
b La un magazin s-a produs o reducere de prețuri de 20%. Un tricou costă după reducere 80 de lei. Ce preț avea tricoul înainte de reducere?

6 Fie M mijlocul laturii CD a unui romb $ABCD$. Se știe că $AB = 10$ cm și $BD = 12$ cm.
a Calculația aria rombului $ABCD$.
b Calculați lungimea segmentului DE, unde E este punctul de intersecție a dreptelor AM și BD.

Varianta 5

Subiectul I *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se va trece numai răspunsul.*

1 a Soluția ecuației $x+\sqrt{2}=0$ este $x = \dots$.
b Soluția ecuației $8\cdot x = 0,16$ este $x = \dots$.
c O soluție a ecuației $x^2 = 6$ este $x = \dots$.

2 a $\sin30° = \cos\dots°$.
b Dacă $x = 3$ este soluție a ecuației $(m-1)x = 12$ atunci $m = \dots$.
c Dacă $A(1;0)$, $B(-1;0)$ și $C(0;1)$, atunci aria triunghiului ABC este ... .

3 a Un triunghi dreptunghic are proiecțiile catetelor pe ipotenuză de 5 cm și 20 cm. Înălțimea triunghiului corespunzătoare ipotenuzei este egală cu ... cm.
b Un pătrat are latura de 10 m. Diagonala pătratului are lungimea egală cu ... m .
c ABC este un triunghi dreptunghic, cu $\sphericalangle C = 90°$, pentru care $\sin(\sphericalangle B)=\frac{2}{3}$. Valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$ este egală cu ... .

Subiectul II *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se vor scrie rezolvările complete.*

4 a Dacă la dublul unui număr natural n adunăm sfertul lui, obținem un număr cu 25 mai mare decât numărul inițial. Aflați numărul n.

b Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel este cu 3 cm mai mare decât una dintre catetele sale. Calculați perimetrul triunghiului.

5 a Rezolvați sistemul de ecuații: $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{13}{3} \\ \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{2y-3}{6} \end{cases}$.

b După ce a parcurs 3 kilometri din lungimea unui traseu, un turist constată că mai are de parcurs 40% din lungimea traseului. Câți kilometri are traseul?

6 Fie D un punct ce aparține ipotenuzei AC a triunghiului dreptunghic ABC. Fie E punctul de intersecție al perpendicularei din D pe dreapta BC cu paralela prin B la AC. Se știe că $AB = 25$ cm, $BE = \dfrac{4}{5}DE$ și că aria patrulaterului $ABED$ este $250\sqrt{3}$ cm^2.

a Calculați distanța de la punctul B la dreapta ED.

b Calculați lungimea segmentului BC.

Varianta 6

Subiectul I *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se va trece numai răspunsul.*

1 a Soluția ecuației $3x=\sqrt{18}$ este $x = \ldots$.

b Soluția ecuației $x-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{30}{4}=2$ este $x = \ldots$.

c Simetricul punctului $A(1;3)$ față de punctul $B(2;2)$ este punctul $C(\ldots;\ldots)$.

2 a Dacă $A(-2;0)$, $B(0;3)$ și $C(4;0)$, atunci aria triunghiului ABC este $\ldots$.

b Dacă $|2-x|+|y+3|=0$, atunci $x+y=\ldots$.

c Dacă AB este diametrul unui cerc cu centrul în O atunci $\sphericalangle AOB = \ldots$.

3 a $\sin 30° = \ldots$.

b Triunghiul dreptunghic care are o catetă cu lungimea de 6 cm și ipotenuza de 10 cm are lungimea celeilalte catete egală cu ... cm.

c Dacă un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 18 cm, atunci lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu ..... cm.

Subiectul II *(4,5 puncte) Pe foaia de teză se vor scrie rezolvările complete.*

4 a Rezolvați sistemul de ecuații: $\begin{cases} 5(x-4)+2y=3(y-2) \\ 4(x-2y)=2(y+1) \end{cases}$.

b Un triunghi dreptunghic ABC are cateta $AB = 8$ cm și ipotenuza $BC = 20$ cm. Calculați distanța de la A la BC.

5 Un produs s-a scumpit cu 10% din prețul pe care l-a avut inițial. După un timp produsul s-a scumpit din nou cu 10% din noul preț, ajungând astfel să coste 13,31 lei.

a Calculați prețul inițial al produsului.

b Aflați cu ce procent din prețul inițial s-a mărit prețul produsului după cele două scumpiri.

6 Trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) are $AB = 24$ cm, $CD = 16$ cm și $AD = BC = 8$ cm.

a Calculați aria trapezului $ABCD$.

b Calculați raza cercului circumscris trapezului $ABCD$.

Varianta 1

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute.

Partea I *Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (45 puncte)*

5p 1 Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ este:

A $\frac{2}{3}$ **B** $\frac{3}{2}$ **C** 1 **D** $\frac{3}{11}$

5p 2 Rădăcina pătrată a numărului 64 este:

A 32 **B** 16 **C** 8 **D** 128

5p 3 Dacă $x - y = 9$ și $x + y = 15$, atunci x este egal cu:

A 9 **B** 10 **C** 11 **D** 12

5p 4 Suma a două numere naturale este 48. Dacă unul dintre numere este de două ori mai mare decât celălalt, atunci numărul mai mare este:

A 16 **B** 24 **C** 32 **D** 40

5p 5 Media geometrică a două numere este egală cu 6. Unul dintre numere este 12. Suma celor două numere este egală cu:

A 15 **B** 12 **C** 18 **D** 9

5p 6 Distanța dintre punctele $A(1,2)$ și $B(5,-1)$ este egală cu:

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5

5p 7 Dacă latura unui pătrat are lungimea de 6 cm, atunci aria pătratului este egală cu:

A 24 cm^2 **B** 36 cm^2 **C** 12 cm^2 **D** 18 cm^2

5p 8 În triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), se cunosc $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Atunci sinusul unghiului ABC este egal cu:

A $\frac{3}{4}$ **B** $\frac{3}{5}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{4}{3}$

5p 9 Pe laturile AB și BC ale unui triunghi ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $MN \parallel AC$, $AM = 6$ cm, $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm și $AC = 12$ cm. Atunci $MN + BN$ este egal cu:

A 12 cm **B** 9 cm **C** 6 cm **D** 10 cm

Partea a II-a *La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (45 puncte)*

9p 10 Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\frac{x+2}{3}+\frac{2x-4}{2}+3=\frac{2x+3}{6}+1\frac{2}{3}$.

9p 11 Se consideră numărul real $a=\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$. Arătați că $a^2=12$.

9p 12 După două creșteri consecutive de prețuri, prima de 10%, a doua de 15%, un calculator costă 1265 lei. Aflați prețul inițial al calculatorului.

13 În trapezul dreptunghic *ABCD*, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, se consideră $BE \perp CD$, unde $E \in (CD)$. Știind că $AB = 6$ cm, $CD = 10$ cm și $BD \perp BC$, determinați:

6p a lungimea înălțimii *BE*;

6p b perimetrul trapezului *ABCD*;

6p c aria trapezului *ABCD*, rotunjită la cel mai apropiat număr întreg.

Varianta 2

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute.

Partea I *Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (45 puncte)*

5p 1 Rezultatul calculului $\sqrt{20}+\sqrt{45}-3\sqrt{5}$ este:

A $\sqrt{5}$ B $\sqrt{40}$ C $2\sqrt{5}$ D 5

5p 2 Se consideră mulțimea $A=\left\{0,(5);\sqrt{0,(1)};\sqrt{2};-\frac{\sqrt{16}}{4};3,7\right\}$. Mulțimea $A\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ are un număr de elemente egal cu:

A 0 B 1 C 2 D 3

5p 3 Raționalizând fracția $\frac{10}{\sqrt{20}}$ se obține:

A $4\sqrt{5}$ B $2\sqrt{5}$ C $\sqrt{5}$ D $3\sqrt{5}$

5p 4 Soluția negativă a ecuației $(x+1)^2=16$ este:

A −3 B −5 C 3 D −4

5p 5 Probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară fața cu 4 puncte este:

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{4}{6}$ C $\frac{6}{4}$ D $\frac{1}{6}$

5p 6 Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 12 cm. Înălțimea triunghiului are lungimea egală cu:

A $2\sqrt{3}$ cm B $3\sqrt{2}$ cm C $4\sqrt{2}$ cm D $4\sqrt{3}$ cm

5p 7 Un trapez are bazele de lungimi 6 cm, respectiv 10 cm. Linia mijlocie a trapezului are lungimea egală cu:

A 16 cm B 12 cm C 9 cm D 8 cm

5p 8 Dacă *ABC* este un triunghi dreptunghic, $\sphericalangle B = 90°$, $AB = 6$ cm și $\sin C=\frac{3}{5}$, atunci perimetrul triunghiului *ABC* este egal cu:

A 18 cm B 24 cm C 20 cm D 22 cm

5p 9 Pe latura AB a unui dreptunghi $ABCD$ se consideră punctul E, astfel încât $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{4}$. Dacă $EF \parallel AC$, $F \in (BC)$, atunci $\frac{BF}{BC}$ este egal cu:

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{4}{5}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** $\frac{5}{4}$

Partea a II-a *La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (45 puncte)*

9p 10 Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\frac{2x+3}{9}-\frac{2}{3}\cdot(x+2)=\frac{2x-5}{18}+\frac{x}{6}$.

9p 11 Rezolvați următorul sistem de ecuații: $\begin{cases} 3(x-1)+4y=-8 \\ 2x+2(y+1)=-2 \end{cases}$.

9p 12 Suma a trei numere este 125. Dacă adunăm, pe rând, fiecare dintre aceste numere cu același număr, obținem 46, 61, respectiv 66. Care sunt cele trei numere?

13 În rombul $ABCD$ se cunosc $AB = 8$ cm și $\sphericalangle BAD = 60°$. Determinați:

6p a lungimea diagonalei BD;

6p b aria rombului $ABCD$;

6p c lungimea razei cercului înscris în romb.

Varianta 3

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute.

Partea I *Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (45 puncte)*

5p 1 Rezultatul calculului $2\sqrt{3}+\sqrt{27}$ este:

A $\sqrt{3}$ **B** $5\sqrt{3}$ **C** $2\sqrt{30}$ **D** 1

5p 2 Se consideră mulțimea $A=\left\{-\frac{1}{2};\sqrt{0,(4)};0,5;-\sqrt{2\frac{7}{9}};\sqrt{12}\right\}$. Mulțimea $A\cap\mathbb{Q}$ are un număr de elemente egal cu:

A 2 **B** 0 **C** 4 **D** 5

5p 3 Soluția naturală a ecuației $\left|x-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$ este:

A 0 **B** $2\sqrt{2}$ **C** -1 **D** 0

5p 4 Simetricul punctului $A(2;3)$ față de punctul $B(3;-1)$ este punctul:

A $A'(4;5)$ **B** $A'(4;-5)$ **C** $A'(-4;5)$ **D** $A'(-4;-5)$

5p 5 Numărul -2 este soluție a ecuației $ax + 1 = 3$ dacă a este egal cu:

A -2 **B** -1 **C** 3 **D** 0

5p 6 Aria unui trapez cu lungimea înălțimii de 6 cm și a liniei mijlocii de 10 cm este egală cu:

A 30 cm^2 **B** 20 cm^2 **C** 60 cm^2 **D** 10 cm^2

5p 7 Raza cercului circumscris unui triunghi echilateral cu latura de 12 cm are lungimea egală cu:

A $4\sqrt{3}$ cm **B** 6 cm **C** $6\sqrt{3}$ cm **D** $2\sqrt{3}$ cm

5p 8 Rezultatul calculului sin30° cos60° + sin60° cos30° este egal cu:

A $\sqrt{3}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** 1

5p 9 Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A, $AD \perp BC$, $D \in BC$, iar $BD = 3$ cm și $DC = 5$ cm, atunci aria triunghiului ABC este egală cu:

A $\frac{15}{2}$ cm² **B** 16 cm² **C** $4\sqrt{15}$ cm² **D** 8 cm²

Partea a II-a *La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (45 puncte)*

9p 10 Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\frac{x}{2-\sqrt{3}}-\frac{x}{2+\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$.

9p 11 Rezolvați următorul sistem de ecuații: $\begin{cases} 3x+4(y+2)=3 \\ 2(x+2)+2y=0 \end{cases}$.

9p 12 Calculați media geometrică a numerelor $a=\left|2\sqrt{6}-6\sqrt{2}\right|$ și $b=\sqrt{72}+\sqrt{24}$.

13 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, se știe că $AB+AC=\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ și $tgB=2\sqrt{2}$. Determinați:

6p a perimetrul triunghiului ABC;

6p b aria triunghiului ABC;

6p c lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.

Varianta 4

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute.

Partea I *Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (45 puncte)*

5p 1 Rezultatul calculului $\frac{2}{21}\cdot 5\frac{1}{4}-3:\frac{6}{11}$ este:

A $\frac{3}{21}$ **B** −5 **C** 2 **D** $\frac{2}{11}$

5p 2 Dacă $a=4\sqrt{3}$ și $b=5\sqrt{2}$, atunci:

A $a > b$ **B** $a = b$ **C** $a < b$ **D** $a + b = 0$

5p 3 Un exemplu de număr irațional cuprins între 2 și 3 este numărul:

A 2,2 **B** $\sqrt{2}$ **C** 2,(2) **D** $\sqrt{6}$

5p 4 Dacă $x + y = 5$ și $x - y = 3$, atunci x este egal cu:

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7

5p 5 Suma a două numere este 25, iar diferența lor este 13. Cel mai mare dintre numere este:

A 20 **B** 19 **C** 15 **D** 18

5p 6 Un cerc are lungimea egală cu 8π cm. Discul corespunzător are aria egală cu:

A 64π cm² **B** 8π cm² **C** 16π cm² **D** 32π cm²

5p **7** În triunghiul ABC, punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Atunci:

A $P_{AMN}=\dfrac{P_{ABC}}{2}$ **B** $P_{AMN}=\dfrac{P_{ABC}}{3}$ **C** $P_{AMN}=\dfrac{P_{ABC}}{4}$ **D** $P_{AMN}=P_{ABC}$

5p **8** Un romb $ABCD$ are $AC = 8$ cm și $BD = 6$ cm. Perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu:

A 20 cm **B** 18 cm **C** 36 cm **D** 40 cm

5p **9** În trapezul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar $BD = 28$ cm. Dacă $\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{3}{4}$, atunci OB este egal cu:

A 14 cm **B** 12 cm **C** 16 cm **D** 18 cm

Partea a II-a *La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (45 puncte)*

9p **10** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația:

$$3(x+5)-5(1-x)(1+x)=(x+3)^2+(2x-1)^2+13.$$

9p **11** Arătați că numărul $a=4\sqrt{5}\cdot\left(\dfrac{5}{4\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)-\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{7}+\dfrac{6}{\sqrt{6}}-\sqrt{6}\right)\cdot\dfrac{7}{\sqrt{6}}$ este natural.

9p **12** Un produs s-a ieftinit cu 10 lei, apoi s-a mai ieftinit cu 20%. Aflați prețul inițial al produsului, știind că, dacă ar dori să revină la acest preț, vânzătorul ar trebui să aplice o scumpire de 30%.

13 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 105°$, $\sphericalangle C = 45°$, iar $AD \perp BC$, $D \in BC$. Știind că $AD = 12$ cm, determinați:

6p **a** lungimea laturii BC;

6p **b** aria triunghiului ABC;

6p **c** perimetrul triunghiului ABC.

Varianta 5

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute.

Partea I *Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (45 puncte)*

5p **1** Rezultatul calculului $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ este:

A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **B** $\sqrt{3}$ **C** $\dfrac{11\sqrt{3}}{10}$ **D** 1

5p **2** Se consideră mulțimea $M=\left\{\dfrac{6}{3};-0,5;\dfrac{\sqrt{81}}{3};2\sqrt{3};0,3(1)\right\}$. Mulțimea $M\cap\mathbb{N}$ are un număr de elemente egal cu:

A 1 **B** 4 **C** 2 **D** 0

5p **3** Dacă $A(2;3)$ și $B(5;-1)$, atunci distanța dintre A și B este egală cu:

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5

5p **4** Soluția naturală a ecuației $(x + 1)^2 = 9$ este:

A −4 **B** 1 **C** 3 **D** 2

5p 5 Spre o parcare de trei locuri se îndreaptă trei mașini care au culorile roșu, albastru, respectiv negru. Probabilitatea ca ordinea lor în parcare să fie albastru, roșu, negru este:

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

5p 6 Perimetrul unui pătrat este 24 cm. Apotema pătratului are lungimea egală cu:

A 3 cm B 6 cm C $6\sqrt{2}$ cm D $3\sqrt{2}$ cm

5p 7 Aria trapezului isoscel cu un unghi de 60° și bazele de 6 cm, respectiv 8 cm, este egală cu:

A 9 cm^2 B 14 cm^2 C $7\sqrt{3}$ cm^2 D 7 cm^2

5p 8 În triunghiul ABC, $D \in AB$, $E \in AC$ și $DE \parallel BC$. Dacă $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm, $AC = 15$ cm și $BC = 18$ cm, atunci lungimea laturii DE este egală cu:

A 10 cm B 7,2 cm C 12 cm D 5,7 cm

5p 9 Înălțimea unui triunghi echilateral înscris într-un cerc de rază 8 cm are lungimea egală cu:

A 12 cm B 4 cm C $4\sqrt{3}$ cm D $8\sqrt{2}$ cm

Partea a II-a *La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (45 puncte)*

9p 10 Rezolvați următorul sistem de ecuații: $\begin{cases} 3(x+y)+4y=8 \\ 3x+2(x-y)=-14 \end{cases}$.

9p 11 Determinați media geometrică a numerelor reale x și y, știind că $\sqrt{(x-8\sqrt{2})^2}+\sqrt{(y-9\sqrt{2})^2} \le 0$.

9p 12 Un robinet umple singur un bazin în 3 ore, iar un al doilea umple singur același bazin în 6 ore. În câte ore pot umple bazinul cele două robinete curgând împreună?

13 În dreptunghiul $ABCD$ se cunosc $AC \cap BD = \{O\}$, $\sphericalangle BOC = 60°$, iar $BC = 4\sqrt{3}$ cm.

6p a Determinați lungimea laturii AB;

6p b Dacă M este mijlocul laturii AB și $N \in DC$, astfel încât $DN = 2$ cm, determinați MN.

6p c Dacă $MN \cap AC = \{P\}$, arătați că AP are lungimea mai mare de 5 cm.

Soluții

CAPITOLUL I. Ecuații și sisteme de ecuații liniare

I.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

1. a A; b F; c F; d A; e A. **2.** $3a+3b=9$. **3.** a $2a-2b=2$; b $3a-3b=3$; c $7a-7b=7$; d $-2a+2b=-2$; e $-5a+5b=-5$; f $-10a+10b=-10$. **4.** a $8a+12b=28$; b $-2a-3b=-7$; c $5a+7{,}5b=17{,}5$; d $-2{,}4a-3{,}6b=-8{,}4$; e $\frac{5}{3}a+\frac{5}{2}b=\frac{35}{6}$; f $-\frac{4}{3}a-2b=-\frac{14}{3}$. **5.** a 6; b 18; c 66; d -6; e -24. **6.** a 6; b $a=2, b=1, c=3$. **7.** a Calcul direct; b Se adună cele două egalități de la a, apoi se scade 4 din fiecare membru al egalității obținute. **8.** $4\sqrt{3}=2\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}+1=\sqrt{12}+1$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{12}}{3}$. **9.** Vezi exercițiul 8. **10.** a $4(x+3)=20 \overset{:4}{\Leftrightarrow} x+3=5 \overset{-3}{\Leftrightarrow} x=2$; b $5x-6=7x+2 \overset{-5x}{\Leftrightarrow} -6=2x+2 \overset{-2}{\Leftrightarrow} -8=2x \overset{:2}{\Leftrightarrow} -4=x \overset{(-1)}{\Leftrightarrow} x=-4$; c $3x^2-5x=3x^2-25 \overset{-3x^2}{\Leftrightarrow} -5x=-25 \overset{:(-5)}{\Leftrightarrow} x=5$; d $-x=x+2 \overset{-x}{\Leftrightarrow} -2x=2 \overset{:(-2)}{\Leftrightarrow} x=-1$. **11.** $E=7$. **12.** $E=a-\frac{5}{7}b+\frac{5}{11}c=5\left(\frac{a}{5}-\frac{b}{7}+\frac{c}{11}\right)=5\cdot 3{,}14=15{,}7$. **13.** Cum $(x-1)^2\geq 0$ și $(y-2)^2\geq 0$, egalitatea dată are loc doar dacă $(x-1)^2=0$ și $(y-2)^2=0$. Se obține $x=1$, $y=2$, deci $x+y=3$. **14.** $(a+2)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a=-2, b=1$. Deci $(a+b)^{100}+b^{100}=2$. **15.** $(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=0 \Leftrightarrow a=1, b=2, c=3$. Deci $(a+b)^3=c^3$. **16.** Egalitatea $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ este echivalentă cu $a-b=b-c=c-a=0$, adică $a=b=c$. **17.** a $(a+3b)+(2b-5c)=16$; b $(a+3b)-(2b-5c)=-2$; c $2(a+3b)=14$; d $3(a+3b)-(2b-5c)=12$; e $2(a+3b)+2(2b-5c)=32$; f $2(a+3b)-3(2b-5c)=-13$. **18.** a $(a+b+2c)+(3a-2b+c)$; b $2(a+b+2c)+3(3a-2b+c)$; c $\frac{2(a+b+2c)+(3a-2b+c)}{5}$; d $\frac{2(3a-2b+c)-(a+b+2c)}{5}$; e $\frac{a+b+2c}{(3a-2b+c)-(a+b+2c)}$; f Din relațiile date obținem $a=3-c$ și $b=1-c$. Relația de demonstrat devine $\frac{9(3-c)}{12(3-c)}=\frac{3}{4}$, adevărată pentru $c\neq 3$. **19.** $x^3-2x^2+5x-10=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+5)=0 \Leftrightarrow x=2$. **20.** $xy^2+2x=yx^2+2y \Leftrightarrow (y-x)(xy-2)=0 \overset{x\neq y}{\Leftrightarrow} xy=2$. **21.** a Aducem la numitorul comun $(a-b)(b-c)(c-a)$ prin amplificare cu $-(b-c)$, $-(c-a)$ respectiv $-(a-b)$; b Se pot face aceleași amplificări ca la punctul anterior. Altfel, se poate verifica mai ușor egalitatea echivalentă $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}=1-\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$; c Înmulțind cu abc se obține egalitatea echivalentă $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$ care se verifică precum cea de la punctul b.

I.2. Ecuații de forma $ax+b=0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente

1. a da; b da; c da; d nu; e nu; f da. **3.** a $2x+3=0$; b $3x-1=0$; c $-x+1=0$; d $x=0$; e $2{,}3x+1{,}3=0$; f $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}=0$; g $\sqrt{3}x-1=0$; h $\frac{\sqrt{5}}{2}x=0$. **4.** a $4x+3=0$, $4x-\sqrt{5}=0$; b $3x-1=0$, $\sqrt{2}x-1=0$; c $2x+2=0$, $-1{,}5x-1{,}5=0$; d $2{,}5x-2{,}5=0$, $\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$. **5.** a da; b nu; c da; d da. **6.** a da; b da; c da; d nu; e nu; f da; g nu; h nu; i da. **7.** Se înlocuiește x cu -2 și se obține de fiecare dată o propoziție adevărată. **8.** a 4; b -3; c 3; d -3; e 5; f 2; g -2; h 6; i 4; j 30; k 7; l -8. **9.** a 2; b 1; c 2; d 4; e -2; f 1; g 1; h 1; i $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **10.** a 10; b 11; c 2; d $-5{,}35$; e $\frac{23}{7}$; f -4; g -4; h $7-4\sqrt{3}$; i $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** a 14; b 1; c -3; d -13; e 7; f 5. **12.** a da; b da; c nu; d da. **13.** a -1; b -11; c 2; d $\frac{1}{8}$; e 2. **14.** a -1; b 16; c 7; d 1; e -1; f -6; g 2; h -1; i $\frac{10}{3}$; j 11; k 3; l 4; m 22; n 0. **15.** a 10; b 12; c $-\frac{1}{3}$; d 3; e 3;-3; f $-2\sqrt{2}$;$2\sqrt{2}$. **16.** a -1;

b $\frac{8}{5}$; c 0; d $-\frac{2}{43}$; e 1; f $-\frac{19}{26}$. 17. a $m=-2$; b $m=\frac{1}{17}$; c $m=-1$; d $m\in\mathbb{R}-\{0\}$; e $m=-1$. 18. a -1; b 3; c 21; d 0. 19. a 19; b 4; c 2; d 2; e -7; f 1. 20. a 2; b 3; c -6; d -1. 21. a 2; b -7; c $-\frac{3}{2}$; d $\frac{13}{2}$; e -8; f 7; g -9; h 3; i 2. 22. a -1; b 2; c 4; d $\frac{8}{9}$; e 1; f $\frac{36}{11}$. 23. a -3; b 29; c 1; d $\frac{15}{8}$; e 1; f -1. 24. a $-\frac{231}{59}$; b 0; c 1; d -2; e 4; f 0. 25. a $\sqrt{2}$; b $\frac{\sqrt{3}}{3}$; c $1+2\sqrt{3}$; d $2\sqrt{2}$; e $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$; f $\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}-3}{2-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$. 26. a $\frac{4}{3}$; b -2; c $-\frac{1}{5}$; d 5; e $\frac{31}{4}$; f $-\frac{15}{32}$. 27. a $3\sqrt{3}$; b 5; c $\frac{\sqrt{3}}{3}$; d $2\sqrt{2}-2$; e $\frac{\sqrt{5}}{2}$; f $\sqrt{3}$. 28. a 1;-1; b 8;-8; c 2;-2; d 0; e $\varnothing$; f $\varnothing$; g $\varnothing$;h 3;-3; i $\varnothing$. 29. a 7;-3; b 0;-6; c 1; 3; d 2; -6; e $4;\frac{2}{3}$; f -7; 15; g 3; -9; h $\varnothing$; i 2;-6. 30. a -10; 14; b -6; 4; c -8; 7; d -5;1; e $\frac{33}{4};-\frac{39}{4}$; f $\frac{13}{2};\frac{15}{2}$; g 5; -1; h 0; -4; i 10; -20. 31. a 0; 2; 4; b -7; 1; 9; 17 c $\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{2}$; d 4; 8; e $-\frac{11}{3};\frac{7}{3}$; f -7; -1; 5; 11; g $\frac{5}{2};\frac{1}{2}$; h -12; -2; 1; 11; i $-\frac{10}{3};\frac{8}{3};-4;2$. 32. a $x\in\{-1;5\}$; b $x\in\{-3;7\}$; c $x\in\{-5;9\}$. 33. a 13; b 6; c 10; d -1. 34. a 1; b 2; c 0; d 2021. 35. a 30; b $-\frac{116}{55}$; c 0; d 91. 36. $-\frac{m+2}{2m}=-\frac{2m+1}{2m}\Leftrightarrow m+2=2m+1\Leftrightarrow m=1$. 37. $m=-\frac{a+b}{2}$. 38. a $x=\frac{ab}{b-a}$ dacă $a\neq b$, iar pentru $a=b$ ecuația nu are soluții; b Pentru $a=b$ orice număr real x este soluție, iar pentru $a\neq b\Rightarrow x=a^2b^2-(a+b)$; c $x=2a-b$; d Pentru $b=c$ ecuația nu are soluții, iar pentru $b\neq c\Rightarrow x=\frac{a}{c-b}$. 39. $x=\frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$. 40. Soluția primei ecuații este $x=-\frac{b}{a}$, iar a celeilalte este $x=-\frac{d}{c}$; $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. 41. $\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{1}{\frac{x(x+1)}{2}}=\frac{2}{x(x+1)}=$ $=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$. Atunci ecuația dată este echivalentă cu $2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{400}{201}$, adică $\frac{2x}{x+1}=\frac{400}{201}$, de unde $x=200$. 42. Cum $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ este echivalentă cu $\sqrt{1^2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{3^2}+...+\sqrt{(x+1)^2}=201\cdot 10055$, adică $1+2+3+...+(x+1)=201\cdot 10055$, cea ce implică $\frac{(x+1)(x+2)}{2}=201\cdot 10055$, de unde $(x+1)(x+2)=402\cdot 10055=2010\cdot 2011$. Singura soluție naturală este $x=2009$.

Teste de evaluare

Testul 1. 1. a -3; b 8; c $2\sqrt{2}$. 2. $-\frac{7}{2}$. 3. Se înlocuiește x cu -1 și se obține o propoziție adevărată. 4. 5. 5. $x=7$; $m=-4$. 6. $x\in\left\{-\frac{13}{3};1\right\}$.

Testul 2. 1. a -1; b 2; c $\sqrt{2}$. 2. 2. 3. Se înlocuiește x cu -2 și se obține o propoziție adevărată. 4. -1. 5. $x=1$; $m=-\frac{3}{2}$. 6. $x\in\left\{-7;\frac{19}{3}\right\}$.

Testul 3. 1. a 2; b -21; c 2. 2. 5. 3. Se înlocuiește x cu 3 și se obține o propoziție adevărată. 4. $\frac{36}{11}$. 5. $x=1$; $m=1$. 6. $x\in\left\{-\frac{7}{3};1\right\}$.

I.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

1. a da; b da; c da; d da; e nu; f da. 2. $x-y+2=0$, $x,y\in\mathbb{R}$; $3x+2y+1=0$, $x,y\in\mathbb{R}$; $4a-\sqrt{3}b=0$, $a,b\in\mathbb{R}$. 5. a da; b nu; c da; d nu. 6. a da; b nu; c nu; d da; e da. 7. a $(1,1),(0,2)$; b $(1,2),(1,5)$. 8. a $(-1;-1),(0;-2,5)$; b $(1;1),(1;0)$. 10. a da; b nu; c nu; d da. 11. a nu; b da; c nu; d da. 12. a $S=\{(3,1)\}$; b $S=\{(1,5)\}$; c $S=\{(2,2)\}$; d $S=\{(5,2)\}$. 13. a $S=\{(-1,3)\}$; b $S=\{(0,4)\}$; c $S=\{(2,0)\}$; d $S=\{(3,3)\}$. 14. a $S=\{(3,2)\}$; b $S=\{(1,3)\}$; c $S=\{(2,5)\}$; d $S=\{(4,4)\}$. 15. a $S=\{(1,-1)\}$; b $S=\{(-2,3)\}$; c $S=\{(-1,-1)\}$; d $S=\{(2,3)\}$. 16. a $S=\{(-1,3)\}$; b $S=\{(-2,-2)\}$; c $S=\{(4,-1)\}$; d $S=\{(-2,-3)\}$; e $S=\{(2,-4)\}$; f $S=\{(-1,-5)\}$. 17. a $S=\{(4,3)\}$; b $S=\{(-1,-1)\}$; c $S=\{(-2,1)\}$; d $S=\{(-3,3)\}$; e $S=\{(2,0)\}$; f $S=\{(2,-3)\}$. 18. a și d, b și c. 19. a și c, b și d. 20. a $S=\{(3,-1)\}$; b $S=\{(-2,4)\}$; c $S=\{(10,1)\}$; d $S=\{(3,3)\}$; e $S=\{(-4,5)\}$; f $S=\{(-2,5)\}$. 21. a $S=\{(-4,1)\}$; b $S=\{(2,-2)\}$; c $S=\{(3,4)\}$; d $S=\{(3,6)\}$; e $S=\{(-6,2)\}$; f $S=\{(8,2)\}$. 22. a $S=\{(7,-2)\}$; b $S=\{(-3,-5)\}$; c $S=\{(-1,4)\}$; d $S=\{(0,-3)\}$;

e $S=\{(2,2)\}$; f $S=\{(2,5)\}$. 23. a $S=\{(4,6)\}$; b $S=\{(5,2)\}$; c $S=\{(-1,-2)\}$; d $S=\{(-2,0)\}$; e $S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$; f $S=\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$. 24. a $S=\{(5,-2)\}$; b $S=\{(4,0)\}$; c $S=\{(3,-2)\}$; d $S=\{(6,8)\}$; e $S=\{(5,2)\}$; f $S=\{(-1,-3)\}$.
25. a $S=\{(1,2)\}$; b $S=\{(3,-1)\}$; c $S=\{(4,2)\}$; d $S=\{(1,-3)\}$; e $S=\{(5,0)\}$; f $S=\{(-2,6)\}$. 26. a $S=\{(3,-2)\}$; b $S=\{(2,0)\}$; c $S=\{(-1,1)\}$; d $S=\{(-2,1)\}$. 27. a $S=\{(1,2)\}$; b $S=\{(3,-3)\}$; c $S=\{(4,1)\}$; d $S=\{(5,-2)\}$.
28. a $S=\{(1,-1)\}$; b $S=\{(3,-2)\}$; c $S=\{(-2,2)\}$; d $S=\{(4,0)\}$. 29. a $S=\{(2,5)\}$; b $S=\{(1,3)\}$; c $S=\{(6,9)\}$; d $S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$; e $S=\{(1,-1)\}$; f $S=\left\{\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$. 30. a $S=\{(3,0)\}$; b $S=\{(-2,1)\}$; c $S=\{(0,-5)\}$; d $S=\{(\sqrt{2},2)\}$; e $S=\{(\sqrt{3},-1)\}$; f $S=\{(-2,\sqrt{6})\}$. 31. a $S=\{(\sqrt{2},\sqrt{3})\}$; b $S=\{(\sqrt{5},-\sqrt{3})\}$; c $S=\{(\sqrt{6},2)\}$; d $S=\{(2\sqrt{7},\sqrt{7})\}$.
32. a $S=\{(1,2)\}$; b $S=\{(\sqrt{5},\sqrt{3})\}$. 33. a $S=\{(3,2);(3,-2);(-3,2);(-3,-2)\}$; b $S=\{(6,3);(6,-3);(-6,3);(-6,-3)\}$; c $S=\{(4,0);(-4,0)\}$; d $S=\{(6,-2);(-8,-2)\}$; e $S=\{(6,1);(6,-5);(-4,1);(-4,-5)\}$; f $S=\{(1,-2);(1,4);(-2,-2);(-2,4)\}$.
34. a $S=\{(2,2),(2,-2),(-5,2),(-5,-2)\}$; b $S=\{(-2,0),(-2,2),(2,0),(2,2)\}$; c $S=\{(2,2),(2,3)\}$; d $S=\{(11,-6),(11,-4)\}$.
35. a $S=\{(3,7)\}$; b $S=\{(5,3)\}$; c $S=\{(3,5)\}$. 36. a $S=\{(8,-1)\}$; b $S=\{(3,0)\}$; c $S=\{(2,-1)\}$. 37. a $S=\{(0,0)\}$; b $S=\{(2,4)\}$; c $S=\{(1,1)\}$; d $S=\left\{\left(\frac{4}{3},2\right),(0,-2)\right\}$. 38. b $S=\{(5,2+\sqrt{3})\}$. 39. a $S=\left\{\left(\frac{8}{a+2},\frac{10-3a}{a+2}\right)\right\}$, $a\in\mathbb{R}-\{-2\}$; b $S=\left\{\left(\frac{22+3b}{b+2a},\frac{11+3a}{b+2a}\right)\right\}$ $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq-2a$. 40. b $x=1$, $y=2$.

I.4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare

1. $x+15=28$; $x=13$. 2. 64. 3. $2x+47=257$; $x=105$. 4. 31. 5. 40. 6. $x+3x=2048$; $x=512$. 7. 45 și 32. 8. 55 și 25. 9. $3x+11=x+77$; $x=33$. 10. Notăm cu x numărul cel mic; $x+(x+2)+(x+4)=408$; $x=134$. Numerele sunt 134, 136, 138. 11. Dacă notăm cu x numărul cel mic, atunci $x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=800$; $x=197$. 12. $2x+5x=70$; $x=10$. 13. 80 lei. 14. 1200 lei. 15. 72 și 30. 16. 10 km. 17. Andrei 40 kg, Mihai 36 kg, Rareș 42 kg. 18. Notăm cu x numărul de cărți din a doua ladă; $(x+70)+x+2x=458$; $x=97$. 19. Fie x primul număr; $(x+36)+62=3x$; $x=49$. 20. Mihai are 109 lei, Andrei are 85 lei. 21. $((2x+3)\cdot4-5):9=15$; $x=16$. 22. Notăm cu x numărul mai mic; $(306-x)-x=\frac{x}{4}$; $x=136$. 23. 160 și 120. 24. a 30; b 50%. 25. 5 cărți. 26. 3,5 lei un kg de mere, 4,5 lei un kg de portocale. 27. 20 de găini și 12 oi. 28. 480 și 640. 29. 80, 50 și 160. 30. 16, 24 și 32. 31. 500 lei. 32. Fie x al doilea număr; $(6x+4):(x:4)=26$; $x=8$. 33. 170 și 136. 34. 2400 kg. 35. 600 lei. 36. 600 lei. 37. Tata are 39 de ani, fiul 14 ani. 38. a 38 ani și 14 ani; b peste 10 ani. 39. a 70 puncte; b 10 răspunsuri greșite. 40. 14 probleme rezolvate corect, 6 probleme greșite. 41. 14 bancnote. 42. Fie x numărul care se adună; $(435-x)+(147-x)+(55-x)=607$; $x=10$; Cele trei numere sunt 425, 137 și 45. 43. 155 și 25. 44. Notăm cu f numărul fetelor și cu b numărul băieților; $3f-4=5\cdot(f-4)$; $f=8$, $b=24$. 45. 28 de elevi și 15 bănci. 46. 33 de elevi și 16 bănci. 47. 7 microscoape. 48. Notăm cu x numărul vazelor; $3x+3=5(x-5)$; $x=14$. 49. Notăm cu x numărul bancnotelor de 50 lei; $(x+5)\cdot200=2050+x\cdot50$; $x=7$. Costul tabloului este egal cu 2750 de lei. 50. Notăm cu x vârsta lui Ionuț; $\left(5\cdot\frac{x}{2}-2\right)-x=\frac{x}{2}$; $x=2$. Ionuț are 2 ani, Andrei are 3 ani. 51. Notăm cu n numărul colegilor; $6n+4=5\cdot(n+1)+13$; $n=14$ colegi, 88 de bomboane. 52. Notăm cu x diferența vârstelor (aceasta este constantă în timp). În urmă cu 3 ani, vârsta Corinei era $3x$, iar cea a Cristinei, $3x-x=2x$. Exprimând în două moduri suma vârstelor fetelor peste 5 ani, obținem egalitatea $(3x+3+5)+(2x+3+5)=3\cdot(2x+3)$. Găsim $x=14$, de unde vârstele celor două fete în prezent: 17 ani – Cristina și 24 ani – Corina. 53. Fie r numărul rațelor; $r+(2\cdot r)+3\cdot(2\cdot r)=63$; $r=7$. 54. Notând cu p numărul păunilor, numărul rațelor va fi $4p$,iar numărul urșilor $163-(p+4p)=163-5p$. Atunci $(p+4p)\cdot2+(63-5p)\cdot4=132$; $p=12$. 55. 16 bile roșii, 16 bile galbene, 16 bile albastre. 56. Notând cu p numărul purcelușilor, numărul găinilor va fi $\frac{210-4p}{2}$, iar numărul rațelor $\frac{230-4p}{2}$. Numărul total al picioarelor rațelor și găinilor este $2\cdot\left(\frac{210-4p}{2}+\frac{230-4p}{2}\right)=120$; $p=40$. 57. Notăm cu x numărul de creioane din a doua cutie. În a treia cutie sunt $x+8$ creioane, iar în prima, $8+(x+(x+2))=2x+10$ creioane. Atunci $6(x-9)=(x+8)+(2x+16)$; $x=26$. 58. Notăm cu x al treilea număr. Al doilea număr este $3x+2$, iar primul este $3(3x+2)+2$. Atunci $3(3x+2)+2-x=328\Rightarrow x=40$. Se obține că suma celor trei numere este 530.

59. Notăm cu x primul număr. $\frac{x}{4}+\frac{56-x}{2}=19$; $x=36$. 60. Notând cu x prețul pixului, atunci prețul cărții este $x+5$. Exprimând în două moduri prețul jocului obținem ecuația $63-(x+(x+5))=(x+(x+5))-7$; $x=15$. 61. Fie x al 1006-lea termen al șirului. Atunci $2011\cdot x=24132 \Rightarrow x=12$. În șir sunt $1006-13=993$ numere negative. 62. Notăm cu x numărul autoturismelor: $5\cdot x+2\cdot(27-x)=111 \Rightarrow x=19$.

Teste de evaluare

Testul 1. 1. a $x=8$; b $x=2$; c $x=-7$. 2. $(0,2),(5,0)$. 3. $S=\{(-1,3)\}$. 4. 30 de apartamente cu 3 camere și 18 apartamente cu 4 camere. 5. Notăm cu x primul număr. $x+(x+6)+\frac{x+(x+6)}{4}=30$; $x=9$.
6. $\frac{130}{100}\cdot\left(\frac{80}{100}\cdot(x-10)\right)=x$; $x=260$ lei.

Testul 2. 1. a $x=\sqrt{5}$; b $x=-7$; c $x=-0{,}13$. 2. $(-1,1),(-4,0)$. 3. $S=\{(3,-2)\}$. 4. 14 vaci și 24 de gâște.
5. $\frac{x+48}{2}=\frac{x+48}{3}+15 \Rightarrow x=42$. 6. Fie x vârsta copilului cel mic.
Avem $9\cdot(x-1)+1=26+2\cdot(x+1)-1 \Rightarrow x=5$.

I.5. Probleme cu caracter aplicativ

1. Fie r suma deținută de Răzvan; $r+2(r+4)=164$. Deci, Cristina are 39 lei, Răzvan – 52 de lei, iar Oana – 73 de lei.
2. Dacă x este suma depusă, atunci $\frac{110}{100}\cdot\left(\frac{110}{100}\cdot x\right)\geq 10000 \Rightarrow x\geq 8264{,}4 \Rightarrow x=8265$ de lei. 3. Fie x numărul de rânduri; $\frac{50}{100}\cdot(2x)=\frac{6{,}25}{100}\cdot x^2 \Rightarrow x=16$. Sala are 256 de locuri. 4. 224 de lei. 5. Fie x numărul zilelor în care Răzvan a absentat; $(5-x)\cdot(500\cdot 2)=2000$; $x=3$. 6. Sunt 16 pomi/rând. Dacă x este distanța dintre rânduri, atunci $15\cdot 24\cdot x^2=9000\ \text{m}^2 \Rightarrow x=5$ m. 7. Fie x distanța în kilometri de la casa lui Florin până la Vaslui; $3x-x=12$; $x=6$. Distanța dintre cele două orașe este $x+3x=24$ km. 8. Cele 10 kg de pește valorează $36+54=90$ lei; $x\cdot 9=36 \Rightarrow x=4$ kg se află în primul coș. 9. Notăm cu x numărul cărților; $\frac{x-23}{2}=\frac{3x-90}{5}$; $x=65$. Numărul elevilor este 21. 10. Notăm cu x suma primită de Andrei; $\frac{2}{5}\cdot(x+250)x=\frac{4}{9}x$; $x=2250$.

I.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade și concursuri

1. Notăm cu x primul număr; $(x+7)\cdot\frac{36}{x}=99$; $x=4$. 2. $x^2=\left(\frac{8}{7}-1\right)+\left(\frac{9}{14}-1\right)+\ldots+\left(\frac{350}{2401}-1\right)=\frac{1}{7}\cdot 343=49 \Rightarrow x=7$ sau $x=-7$. 3. Evident, $x=0$ nu este soluție. Pentru $x\geq 1$, înmulțind cu $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}}}-1$ rezultă $x=x\cdot\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}}}-1\right)$, de unde $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}}}-1=1 \Rightarrow x=255$. 4. $\frac{1}{1+2+\ldots+k}=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$. Se obține $x=100$. 5. Folosind relația $\frac{1}{n(2n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ obținem $x^2=\frac{49}{100} \Rightarrow x=\frac{7}{10}$ sau $x=-\frac{7}{10}$. 6. Fie x unul dintre numere; $\frac{x}{4}-\frac{824-x}{4}=108$; $x=628$. 7. a $x+n\geq n+1$ și $2x+n+1\geq n+3$. b Folosim a, în care egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=1$.
8. $\frac{2}{3}x+0{,}3\cdot\left(x-\frac{2}{3}x\right)+\left(\frac{2}{3}x-143\right)=x$ unde x reprezintă cantitatea totală de pește. Cantitățile repartizate la fiecare magazin sunt 220 kg, 33 kg, respectiv 77 kg. 9. Fie $x=a+\frac{1}{bc}, y=b+\frac{1}{ac}, z=c+\frac{1}{ab}$. Atunci $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2 \Rightarrow x=2a,\ y=2b,\ z=2c \Rightarrow a=b=c=1$. 10. Se știe că $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$. Atunci, dacă $\overline{cba}=2k-1$, va rezulta că $(\overline{abc})^2=k^2 \Rightarrow \overline{abc}=k$, deci $\overline{cba}=2\cdot\overline{abc}-1$. Se obține $\overline{abc}=397$.
11. $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, pentru orice $k\in\{2,3,\ldots,2005\}$. Se obține $x=2020$.
12. $A=\{-2020,-2019,\ldots,2019,2020\}$. Cel mai mic element din A este -2020. 13. $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}>\frac{a}{a+b}>\frac{a}{a+b+c}$.

14. Se folosește inegalitatea $\sqrt{x^2-xy+y^2}\geq\frac{x+y}{2}$, adevărată pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$. **15.** Din șirul de rapoarte egale dat se obține că valoarea fiecărui raport este $\frac{1}{3}$. Atunci $\frac{a+2b}{2a+3b+4c}=\frac{1}{3}\Rightarrow a+3b=4c$, deci $a=4c-3b$. Analog, deducem $b+3c=4a$ și apoi $b+3c=4(4c-3b)\Leftrightarrow b=c$, deci $a=b=c$. Obținem $\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{1}{2}$, adevărat. Apoi se folosește inegalitatea $\frac{\sqrt{2ab}}{a+2b}\leq\frac{1}{2}$. **16.** $2\sqrt{x-4}=\sqrt{4(x-4)}\leq\frac{4+(x-4)}{2}=\frac{x}{2}$ și analoagele. Egalitatea are loc pentru $x=8$, $y=16$, $z=32$. **17.** Se aplică inegalitatea mediilor pentru fiecare factor din membrul stâng. **18.** Efectuând scăderile de la stânga spre dreapta se observă că $b=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2010}$. Evident, $b<\frac{1}{2^{2009}}$ și, cum $a+b=1$, rezultă că $a=1-b<1$. **19. a** $k\cdot\frac{1}{3k}<\frac{1}{2k+1}+\ldots+\frac{1}{3k}<k\cdot\frac{1}{2k+1}$; **b** Fie $S_1=\frac{1}{2k+1}+\ldots+\frac{1}{3k}$ și $S_2=\frac{1}{3k+1}+\ldots+\frac{1}{4k}$. Atunci $\frac{1}{3}<S_1<\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}<S_2<\frac{1}{3}$. **20.** $\frac{n^2}{(n+1)^2}<\frac{n^2}{(n+1)^2-1}\Rightarrow x^2<\frac{1^2}{1\cdot3}\cdot\frac{3^2}{3\cdot5}\cdot\ldots\cdot\frac{99^2}{99\cdot101}=$ $=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$. **21.** $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2006}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2006}\right)\Rightarrow B=\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+\ldots+\frac{1}{2006}$. $A>B$.
22. a Se efectuează calculele. **b** Din *a)* avem $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. Facem $n=2, n=3,\ldots, n=100$ și adunăm inegalitățile obținute. **23.** Pentru fiecare radical aplicăm inegalitatea $\sqrt{a}\leq\frac{1+a}{2}$. Observăm că egalitățile corespunzătoare nu pot avea loc simultan. **24.** Se folosește inegalitatea mediilor: $m_h(a,b)\leq m_g(a,b)\leq m_a(a,b)$ pentru $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, respectiv $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{5}$ și $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{7}$.

CAPITOLUL II. Elemente de organizare a datelor

II.1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea punctelor în plan cu ajutorul sistemului de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan

1. a $A\times B=\{(1;2),(1;5),(3,2),(3;5)\}$, $B\times A=\{(2;1),(2;3),(5,1),(5;3)\}$; **b** $A\times A=\{(1;1),(1;3),(3,1),(3;3)\}$, $B\times B=\{(2;2),(2;5),(5,2),(5;5)\}$; **c** $\text{card}(A\times B)=\text{card}(B\times A)=4$. **2. a** $A\times B=\{(-1;0),(-1;3),(0,0),(0;3),(2;0),(2;3)\}$, $B\times A=\{(0;-1),(0;0),(0,2),(3;-1),(3;0),(3;2)\}$; **c** $\text{card}(A\times B)=\text{card}(B\times A)=6$. **5.** $A(2;4)$, $B(4;0)$, $C(-2;2)$, $D(-3;-5)$, $E(1;-2)$, $F(0;-3)$. **6. b** $AB=\sqrt{13}$, $AC=2\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{29}$; **c** $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$, $N(2;1)$, $P\left(\frac{1}{2};0\right)$. **7. b** $P_{ABC}=18$; **c** $A_{ABC}=12$. **8. b** $AB=\sqrt{29}$, $CD=\sqrt{41}$, $CE=3\sqrt{5}$. **10.** $AB=\sqrt{10}$, $CD=\sqrt{85}$, $MN=2\sqrt{29}$. **12. a** $\sqrt{5}+\sqrt{17}\neq\sqrt{34}$; **b** $5+2\sqrt{2}\neq\sqrt{61}$. **13.** $D,M,P\in$Cadr.I; $A,B,E,N\in$Cadr.II; $F\in$Cadr.III; $C,G\in$Cadr.IV.
14. a $a=0; b=2; c=\frac{2}{3}; d=\sqrt{2}$; **b** $a=0; b=3; c=-5; d=4\sqrt{2}$. **15. a** $M(3;1), N(-2;-3), P(-1;3)$; **b** $A\times B=\{(3;1),(3;-3),(3,3),(-2;1),(-2;-3),(-2;3),(-1;1),(-1;-3),(-1;3)\}$. **16.** $A=\{-1,1\}, B=\{1,2\}$. **17.** $A=\{-2, 3\}$, $B=\{-1, 2\}$. **18.** 24 de elemente. **19.** 300 de elemente. **20. a** A, B, F; **b** $a=5; b=3; c=4\sqrt{2}; d=-14; E=-3-\sqrt{3}; f=5$ sau $f=-5$. **21. a** A, C, E; **b** $a=-17; b=9; c=-3; d=5; e=-2\sqrt{3}$. **22. a b** da, $AC+BC=AB$; **c** nu. **23.** $A,B,C,E\in\mathcal{C}(M,r)$; $D,F\notin\mathcal{C}(M,r)$. **24.** $AB=BC=\sqrt{41}\Rightarrow\triangle ABC$ este isoscel. **25.** $AB=BC=CD=DA=5$. **26.** A,B,C sunt coliniare, $AB+BC=AC$. **27. a** $AB=BC=\sqrt{37}$; **b** $P=\sqrt{37}\left(2+\sqrt{2}\right)$. **28.** M este mijlocul lui $[AB]$ deoarece $AM=MB$ și $AM+MB=AB$. **29. a** (2; 8); **b** $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$; **c** $\left(7;\sqrt{5}\right)$. **30.** $B(-1;9)$. **31.** $A\left(-10-\sqrt{2};\frac{17}{2}\right)$. **32. a** PM este linie mijlocie în triunghiul ABC; **b** MN este linie mijlocie în triunghiul ABC; **c** PM este linie mijlocie în triunghiul ABC; **d** $\triangle ABC\sim\triangle NPM$, raportul de asemănare fiind egal cu 2. **33.** $x\in\{-4;4\}$. **34.** $y\in\{-6;6\}$. **35.** $a\in\{-2;8\}$. **36.** Vârfurile pătratului au coordonatele $(0,0),(-3,0),(-3,-3),(0,-3)$. Soluția este unică. Dacă $[AB]$ este o latură a pătratului, $(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=9$, cu $x_B-x_A\in\mathbb{Z}$ și $y_B-y_A\in\mathbb{Z}$. Singurul mod de a-l scrie pe 9 ca o sumă de pătrate perfecte este $9=9+0$. **37.** Putem lua laturile pătratelor paralele cu axele de coordonate. **38.** $B(6,-3); D(2,2); C(9,2)$ sau $B(6,-3); D(2,-8); C(9,-8)$. **39.** Se pot forma 3 paralelograme, care vor avea centrele $O_1\left(-\frac{1}{2},2\right); O_2\left(0,-\frac{1}{2}\right); O_3\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

II.2. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor

1. a 4; b 22; c 17. 2. a 9; b 8; c 14. 3. a 30; b 125; c 150. 6. a 2; b 7; c 17; d 6,(6). 7. a miercuri; b 25; c 15. 8. a 5; b ziua 3; c ziua 2. 10. y = capitala lui x. 15. $\{1, 2, 5\}$. 17. $l = \sqrt{A}$. 19. a Elementului 1 din prima mulțime i se asociază două elemente din cea de-a doua mulțime; b Elementul 4 din prima mulțime nu are corespondent în cea de-a doua mulțime; c b și d au câte două corespondențe. 21. $B = \{-1, 3, 7, 11, 15\}$. 23. $y = x^2 + 1$. 24. $A \to B$, $y = 2x + 3$; $A \to C$, $y = |x| - 1$; $B \to C$, $y = \left|\frac{x-3}{2}\right| - 1$. 25. Să luăm un element oarecare din A. Există b moduri de a-i asocia un element din B. În fiecare din aceste cazuri, considerând un alt element din A, asocierea acestuia cu un element din B se poate face tot în b moduri, astfel că până în acest moment avem $b \cdot b$ cazuri posibile. Continuând cu celelalte elemente din A, vom obține un număr total de $\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{de\ a\ ori\ b} = b^a$ moduri de asociere. 27. $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $y = |x|$. 28. $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $y = x + 1$. 29. $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $y = [x]$.

Teste de evaluare

Testul 1. 1. b $AB = 5$, $AC = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$; c $M(1, -1)$. 2. a $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$; b $P = 2 + \sqrt{2}$. 3. $y = x^2$. 4. $B(1, -5)$. 5. $y = x^2 + 1$. 6. $AB = 2\sqrt{2}$, $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2}$; $AB + BC = AC$, deci A, B, C sunt coliniare.

Testul 2. 1. b $AB = 3\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{26}$, $CD = \sqrt{13}$; c $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$. 2. a $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{2}$; b $P = 2 + 2\sqrt{2}$. 3. $y = |x|$. 4. $B(-10, 4)$. 5. $y = \sqrt{x} - 1$. 6. $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $AC = 3\sqrt{2}$; $AB + BC = AC$, deci A, B, C sunt coliniare.

Testul 3. 1. b $AB = 4\sqrt{5}$, $OB = \sqrt{26}$, $CD = 4\sqrt{2}$; c $M(2, 0)$. 2. a $AB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{5}$. Cu reciproca teoremei lui Pitagora se arată că triunghiul ABC este dreptunghic în B. b $A = \frac{5}{2}$. 3. $y = \frac{1}{x}$. 4. Dacă M este mijlocul lui AB, atunci $M(3, -4)$, iar $OM = 5$. 5. $y = \sqrt{x} + 1$. 6. $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{13}$, deci A, B, C nu sunt coliniare.

II.3. Probleme cu caracter aplicativ

1. a $TA = 6325$ m, $TB = 9139$ m; b $S(3,16) \Rightarrow OS = 6512$ m. 2. a miercuri b (Marți, Miercuri, Joi) și (Joi, Vineri, Sâmbătă); c $3\frac{3}{7}$ lei. 3. a 7; b $\frac{10}{25} = 40\%$; c 6,28. 4. a 28; b 6,78; c 85,71%. 5. a Fiecare a parcurs 17 km; au ajuns acasă la 14.30.

CAPITOLUL III. Asemănarea triunghiurilor

III.1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

1. a 0,5; b 2; c 1; d 3. 2. a 1,5; b 0,6; c 0,4; d 2,5. 3. a 1; b 2. 4. $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm. 5. 3,9. 6. a 1; b $\frac{1}{2}$; c 2; d $\frac{1}{2}$. 7. a $\frac{2}{7}$; b $\frac{3}{4}$; c $\frac{2}{3}$; d $\frac{1}{2}$. 8. 4 cm sau 44 cm. 9. a $\frac{2}{3}$; b $\frac{7}{10}$; c $\frac{7}{6}$; d $\frac{1}{9}$; e $\frac{1}{16}$. 10. a 0,8; b $BC = 3$ cm (T.P. în tr. ABC); $\frac{BC}{AC} = 0{,}6$. 12. a $\frac{5}{4}$; b $\frac{5}{9}$; c $\frac{9}{5}$; d $\frac{4}{9}$. 13. $CA = 8$ cm; $CB = 16$ cm. 14. 33 cm. 15. a $\frac{2}{3}$; b $\frac{65}{2}$; c $\frac{1}{10}$; d $\frac{5}{8}$. 16. a $\frac{7}{15}$; b $\frac{1}{5}$; c $\frac{14}{15}$; d $\frac{4}{15}$; e $\frac{7}{15}$; f $\frac{4}{7}$; g $\frac{7}{11}$; h $\frac{11}{7}$. 17. a $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD}$; b $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{DE}$; c $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE}$. 18. a **Caz I:** M aparține segmentului AB; $AM = 10$ cm, $MB = 35$ cm; **Caz II:** M este situat pe dreapta AB, în exteriorul segmentului AB; $AM = 18$ cm, $MB = 63$ cm; b **Caz I:** $M \in [AB]$; $AM = 25$ cm, $MB = 20$ cm; **Caz II:** $M \in [AB - [AB]$; $AM = 225$ cm, $MB = 180$ cm. 19. $B_1B_2 = 4$ cm, $B_2B_4 = 8$ cm, $B_3B_6 = 12$ cm, $B_1B_6 = 20$ cm.

20. $NN' = 6$ cm; $PP' = 3$ cm; $MM' = 9$ cm; $DN' = 18$ cm; $M'C = 27$ cm. 21. Se aplică teorema paralelelor echidistante: $BN \parallel AM \parallel PC$, $BM = MC \Rightarrow AN = AP$. 22. $BC = 60$ cm. 23. MN și PQ sunt linii mijlocii în triunghiurile ABC, respectiv GBC. Rezultă că $MN \parallel PQ \parallel BC$ și $MN = PQ = \frac{BC}{2}$. Deci $MNPQ$ este paralelogram. 24. $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$, $\frac{AN}{AB} = \frac{2}{5}$, $PM = AM - AP = \frac{AB}{10}$, $\frac{AP}{PM} = 5$, $\frac{AN}{NP} = 4$. 25. Dacă $OA = x$, rezultă că $AB = x$, $BC = x$, $CD = 2x$, $DE = 3x$, $EF = 5x \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} = \frac{13}{12} > \frac{11}{12} = \frac{BF}{AF}$.

III.2. Teorema lui Thales

1. $AB = 5$ cm; $EC = 6$ cm; $AC = 10$ cm. 2. a $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$; $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{5}$; $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$; $\frac{NC}{AC} = \frac{3}{5}$. b $AM = 6$ cm; $MB = 9$ cm; $AC = 20$ cm; $NC = 12$ cm. 3. a $BE = 6$ cm; $AD = 6$ cm; $EC = 9$ cm; b $BC = 15$ cm; $BD = 24$ cm; $AB = 30$ cm; c $BD = 14$ cm; $EC = 5$ cm; $BC = 12$ cm; d $AB = 14$ cm; $EC = 3$ cm; $BC = 7$ cm. 4. a $AD = 12$ cm; $BE = 12$ cm; $BC = 21$ cm; b $BD = 10$ cm; $BE = 30$ cm; $BC = 48$ cm; c $AD = 15$ cm; $EC = 6$ cm; $BC = 14$ cm; d $BD = 6$ cm; $BE = 4$ cm; $BC = 16$ cm. 5. a $AF = 24$ cm; $EB = 6$ cm; $FC = 12$ cm; b $FC = 10$ cm; $AB = 8$ cm; $AE = 3$ cm; c $AF = 14$ cm; $AE = 21$ cm; $AB = 30$ cm; d $EB = 12$ cm; $AF = 20$ cm; $AC = 36$ cm. 6. a $AE = \frac{32}{3}$ cm; $DB = 4$cm; $EC = \frac{16}{3}$cm; b $AC = 10$ cm; $DB = 6$ cm; $EC = 2$ cm; c $AB = 27$ cm; $AD = 18$ cm; $EC = 4$ cm; d $AB = 28$ cm; $AC = 35$ cm; $AE = 20$ cm. 7. a $DE \nparallel BC$; b $DE \parallel BC$; c $DE \nparallel BC$; d $DE \parallel BC$. 8. a $AC = 9{,}6$ cm; $MC = 21{,}6$ cm; b $AC = 9{,}6$ cm; $MC = 2{,}4$ cm. 9. a $AC = \frac{56}{3}$ cm; b $AN = 24$ cm. 10. $FC = 10$ cm, $BF = 6$ cm. 11. Linia mijlocie are lungimea egală cu 17,5 cm, iar segmentul cuprins între diagonale are lungimea de 2,5 cm. 12. $B = 35$ cm; $b = 19$ cm. 13. a $CD = 10$ cm; b $CQ \parallel RN \parallel BP$, $CN \equiv NB \overset{T.P.E.}{\Rightarrow} QR \equiv RP$, deci R este mijlocul segmentului PQ. 14. Se aplică teorema lui Thales: $DC \parallel AB \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$; $DC \parallel AB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD}$. 15. $OD = 15$ cm; $OB = 20$ cm. 16. a $DE \parallel BC$; b $DE \nparallel BC$; c $DE \nparallel BC$. 17. $NC = 12$ cm; $BC = 20$ cm; $AB = 10$ cm. 18. $OA = OB$, $OC = OD$ (raze). Se aplică reciproca teoremei lui Thales în triunghiul OCD. 19. $NP \parallel AC \overset{T.Thales}{\Rightarrow} \frac{BP}{PC} = \frac{BN}{NO} = \frac{BM}{MA} = 4$, $\{O\} = AC \cap BD$; $\frac{BN}{NO} = 4 \Rightarrow \frac{BN}{BO} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{2}{5}$. 20. Avem $OR \parallel NP \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{MR}{RN} = \frac{MO}{OP}$ și $OS \parallel PQ \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{MO}{OP} = \frac{MS}{SQ}$, deci $\frac{MR}{RN} = \frac{MS}{SQ} \overset{RT.Th}{\Rightarrow} SR \parallel QN$. 21. a $MC = 5$ cm; b $MD = 6$ cm; c $BC = 10{,}2$ dm. 22. a $CD = 8$ cm; b DC este linie mijlocie în triunghiul $MAB \Rightarrow$ $\Rightarrow MC = CB \Rightarrow \frac{MC}{CB} = 1$. 23. Ducem $BM \parallel AD$, $M \in CD$ și $EN \parallel AB$, $N \in BM$. Rezultă că $ABMD$, $ABNE$ și $DENM$ sunt paralelograme. Deci $AE = BN$ și $ED = NM \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BN}{NM} = \frac{BF}{FC} \overset{R.Thales}{\Rightarrow} NF \parallel MC$. Din $EN \parallel CD$ și $NF \parallel MC \Rightarrow E, N, F$ sunt coliniare. 24. $GM = 4$ cm $\Rightarrow AG = 8$ cm, $AM = 12$ cm. $GP \parallel AB \overset{T.Thales}{\Rightarrow} \frac{MG}{MA} = \frac{MP}{MB} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{MP}{6} \Rightarrow MP = 2$ cm $\Rightarrow BP = 4$ cm. 25. În ΔBCA: $EF \parallel AB \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{CF}{AC} = \frac{CE}{BC}$. În ΔBCA: $EG \parallel AC \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{BE}{BC} = \frac{BG}{AB} \Rightarrow \frac{CF}{CA} + \frac{BG}{AB} = \frac{CE}{BC} + \frac{BE}{BC} = \frac{CE+BE}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$. 26. DE bisectoarea $\sphericalangle ADC \overset{T.bis}{\Rightarrow} \frac{DC}{DA} = \frac{CE}{EA}$ (1), DF bisectoarea $\sphericalangle BDA \overset{T.bis}{\Rightarrow} \frac{DB}{DA} = \frac{BF}{FA}$ (2). Dar D mijlocul lui $BC \Rightarrow DB = DC$ (3). Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{BF}{FA} \Rightarrow FE \parallel BC$. 27. BD bisectoarea $\sphericalangle ABC \overset{T.bis}{\Rightarrow} \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{5}{3} \Rightarrow CD = 12$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow AD = 8$ cm. 28. a BD bisectoarea $\sphericalangle ABC \overset{T.bis}{\Rightarrow} \frac{BC}{BA} = \frac{CD}{DA} \Rightarrow AD = 10$ cm; $DC = 16$ cm; b $BC = 18$ cm. 29. AD bisectoarea $\sphericalangle BAC \overset{T.bis}{\Rightarrow} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$. În ΔBCA: $DE \parallel AB \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{CD}{DB} = \frac{CE}{AE} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{5}{2} \Rightarrow AE = 4{,}8$ cm $\Rightarrow CE = 7{,}2$ cm; $DE \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle EDA$ (alt. int.); dar $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAE \Rightarrow \sphericalangle EDA \equiv \sphericalangle DAE \Rightarrow \Delta DEA$ este isoscel $\Rightarrow AE = DE = 4{,}8$ cm.

30. EF bisectoarea $\sphericalangle AEC \xRightarrow{T.bis} \frac{EA}{EC}=\frac{AF}{FC}$; EG bisectoarea $\sphericalangle CEB \xRightarrow{T.bis} \frac{EB}{EC}=\frac{BG}{GC}$. Dar $EA=EB \Rightarrow \frac{AF}{FC}=\frac{BG}{GC} \xRightarrow{RTTh} FG \parallel AB$.

31. Cu teorema bisectoarei în ΔDAB și ΔDAC, avem $\frac{DB}{DA}=\frac{BE}{EA}$ și $\frac{DC}{DA}=\frac{CF}{FA}$. Din $BD=DC \Rightarrow \frac{BE}{EA}=\frac{CF}{FA} \xRightarrow{RTTh} EF \parallel BC$. M, N sunt mijloacele segmentelor AE, respectiv $AF \Rightarrow MN$ linie mijlocie în $\Delta AEF \Rightarrow \frac{AM}{ME}=\frac{AN}{NF} \Rightarrow \frac{AM}{AN}=\frac{ME}{NF}$ (1). Avem $EF \parallel MN \parallel BC$ și considerăm secantele MB și $NC \Rightarrow \frac{ME}{EB}=\frac{NF}{FC} \Rightarrow \frac{ME}{NF}=\frac{EB}{FC}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{AM}{AN}=\frac{ME}{NF}=\frac{EB}{FC}$.

32. $\frac{AD}{DC}=\frac{4}{5}$; $\frac{AN}{AM}=\frac{8}{13}$. 33. $AM=MD$, $BM=MC \Rightarrow ABDC$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow NB \parallel CE$. Dar $NC \parallel BE \Rightarrow$ $\Rightarrow NBEC$ paralelogram, $\Delta APN \equiv \Delta DFE$ (U.L.U.) ($AN=ED$; $\sphericalangle PAN \equiv \sphericalangle EDF$; $\sphericalangle ANP \equiv \sphericalangle DEF$) $\Rightarrow AP \equiv FD$. **b** CN – bis $\sphericalangle BCA \xRightarrow{T.bis} \frac{AN}{NB}=\frac{AC}{BC}$. Dar $AN=DE$, $NB=CE \Rightarrow \frac{DE}{EC}=\frac{AC}{BC}$. 34. $\frac{8}{3}$ cm, 4 cm, $\frac{16}{3}$ cm.

35. $NQ \parallel AM \Rightarrow \frac{AN}{AB}=\frac{QM}{MB}$ (1); $PQ \parallel AM \Rightarrow \frac{AP}{AC}=\frac{MQ}{MC}$ (2). Dar $MB=MC$ (3). Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{AN}{AB}=\frac{AP}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{AP}=\frac{AB}{AC}$.

36. $\Delta BAC'$ isoscel, AM înălțime $\Rightarrow AM$ mediană $\Rightarrow C'M=MB \Rightarrow AM$ linie mijlocie în $\Delta C'BC \Rightarrow AM \parallel BC \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AN}{NP}=\frac{MN}{NB}$ (1). Dar $\frac{BN}{NC'}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{NM}=1 \Rightarrow BN=NM$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow AN=NP$.

37. **a** ΔBCD: $DB \parallel AF \xRightarrow{T.Th} \frac{DA}{DC}=\frac{FB}{BC}$; în ΔBCE: $CE \parallel AF \xRightarrow{T.Th} \frac{EB}{EA}=\frac{BC}{FC}$; atunci $\frac{DA}{DC}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{EB}{EA}=\frac{FB}{BC}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{BC}{FC}=1$.

b Din **a** $\Rightarrow DE \parallel BC \Leftrightarrow BCED$ paralelogram $\Leftrightarrow A$ este mijlocul diagonalelor $\Leftrightarrow AF$ este linie mijlocie în triunghiurile BCD și $BCE \Leftrightarrow F$ este mijlocul lui BC. Așadar $DE \parallel BC$ dacă și numai dacă F este mijlocul lui BC. 38. Fie M mijlocul lui BD. $\frac{MG_1}{G_1A}=\frac{MG_2}{G_2C}=\frac{1}{2} \xRightarrow{R.Thales} G_1G_2 \parallel AC$. 39. Fie $AC \cap BD=\{O\}$; $MB \parallel AD \xRightarrow{T.Th} \frac{OB}{OD}=\frac{OM}{OA} \Rightarrow OM\cdot OD=OB\cdot OA$; $BC \parallel AN \xRightarrow{T.Th} \frac{OC}{OA}=\frac{OB}{ON} \Rightarrow OA\cdot OB=OC\cdot ON$. Obținem $OM\cdot OD=OC\cdot ON \Rightarrow \frac{OM}{OC}=\frac{ON}{OD} \xRightarrow{R.Th} CD \parallel MN$. 40. **a** Fie $BN \cap AQ=\{S\}$; se arată că $\sphericalangle ASB=90°$. Atunci P este ortocentrul $\Delta AQB \Rightarrow QP \perp AB \Rightarrow QP \parallel AC$. **b** BS este bisectoare și înălțime în ΔBAQ, deci BN este mediatoarea segmentului AQ. Deoarece $P \in BN$, rezultă că PN este bisectoarea unghiului P al patrulaterului $APQN$. Cum AQ este bisectoarea unghiului PAN, se obține că $APQN$ este romb $\Rightarrow$ $\Rightarrow NQ \parallel AD \xRightarrow{T.Th} \frac{QC}{QD}=\frac{NC}{NA}$. 41. **a** $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow AN=NM=MB$. $\sphericalangle B=45° \Rightarrow \Delta CMB$, ΔDNA dr. isoscele $\Rightarrow$ $\Rightarrow AN=NM=MB=6$ cm $\Rightarrow AB=18$ cm, $CD=6$ cm; **b** ΔPNB drept. is. $\Rightarrow PN=NB=12$ cm $\Rightarrow \frac{PD}{PN}=\frac{1}{2}$ (DC l.m. în ΔPNB). $QD \parallel AN \xRightarrow{T.Th} \frac{PQ}{PA}=\frac{PD}{PN}=\frac{1}{2}$. 42. **a** $AC \perp BC \Rightarrow \Delta ACB$ este dreptunghic, $\sphericalangle A=90°$, $\sphericalangle B=60° \Rightarrow \sphericalangle CAB=30° \Rightarrow$ $\Rightarrow AB=2BC \Rightarrow AB=24$ cm. Trapezul este isoscel, având $AC \equiv BD$; $\sphericalangle DAB=60°$, $\sphericalangle CAB=30° \Rightarrow \sphericalangle DAC=30°=\sphericalangle DCA \Rightarrow \Delta DAC$ isoscel $\Rightarrow DA=DC=12$ cm. **b** Observăm că $DC \parallel AM$ și $DC=AM=12$ cm, deci $AMCD$ este paralelogram, de unde $MC \parallel AD \Rightarrow GM \parallel AD \Rightarrow \frac{BG}{BP}=\frac{BM}{BA}=\frac{1}{2}$. 43. Fie trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB>CD$, $BC=AD$, $AC \cap BD=\{O\}$, $AC \perp BD \Rightarrow \Delta AOB$, ΔDOC dreptunghice isoscele. Construim $MN \perp AB$, $O \in MN$, $M \in AB$, $N \in CD$. OM și ON sunt mediane în triunghiurile AOB și DOC, deci $MN=OM+ON=\frac{AB}{2}+\frac{DC}{2}=\frac{AB+DC}{2}=$ linia mijlocie. 44. **a** În ΔABD, S este centru de greutate $\Rightarrow \frac{DM}{SM}=3$. $PQ \parallel DM \Rightarrow \frac{PQ}{OQ}=\frac{DM}{SM}=3$; **b** Ducem prin S o perpendiculară pe AB care intersectează pe AB și DC în N, respectiv R. Avem $\frac{SN}{RN}=\frac{1}{3}$ și $AM=\frac{AB}{2}$. $\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot RN=3SN\cdot 2AM=12\mathcal{A}_{SAM} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{SAM}}{\mathcal{A}_{ABCD}}=\frac{1}{12}$. 45. $\frac{AE}{AB}=\frac{\mathcal{A}_{ACE}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{AD}{AC} \xRightarrow{R.Thales} ED \parallel AC \xRightarrow{T.Thales} \frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC} \xRightarrow{T.bis.} \frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BC} \Rightarrow$ $\Rightarrow AC=AB \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel. Cum AI este bisectoare, rezultă că AI este înălțime, deci $AI \perp BC$. Dar $ED \parallel BC$

și de aici $AI \perp ED$. **46.** **a** În ΔABO, $GD \parallel AB \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{OD}{OB}=\frac{OG}{OA}$. În ΔACO, $GE \parallel AC \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{OE}{OC}=\frac{OG}{OA}$. Dar $OB=OC \Rightarrow OD=OE \Rightarrow$ $\Rightarrow GHDE$ paralelogram; **b** O este mijlocul lui $DE \Rightarrow G$ este centrul de greutate al $\Delta ADE \Rightarrow DG=2GM$, iar D este centrul de greutate al $\Delta BGH \Rightarrow GD=2ND \Rightarrow 2GD=GD+\frac{2ND+2GM}{2}=MN$. **47.** $FC \parallel AB \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{FP}{PE}=\frac{CP}{PA}$; $AQ \parallel BC \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{BP}{PQ}=\frac{CP}{PA}$. Rezultă $\frac{FP}{PE}=\frac{BP}{PQ} \overset{R.T.Th}{\Rightarrow} EQ \parallel FB$. Dar $AC \perp BF \Rightarrow AC \perp EQ$. **48.** Relația dată este echivalentă cu $\frac{AP}{PM}=\frac{2AN}{NC}$ (1). Fie $MQ \parallel BN$, $Q \in AC$. În triunghiul AMQ aplicăm teorema lui Thales: $\frac{AP}{PM}=\frac{AN}{NQ}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $NC=2NQ$, deci Q este mijlocul lui NC. În triunghiul CBN, Q este mijlocul lui NC și $MQ \parallel BN$, adică MQ este linie mijlocie, de unde M este mijlocul lui BC. **49.** Fie P, Q, M mijloacele segmentelor AB, AC, DE. Construim $EF \parallel BC$, $F \in AB$ $\overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{BF}{FA}=\frac{CE}{EA}=\frac{AD}{DB} \Leftrightarrow \frac{BF+FA}{FA}=\frac{AD+DB}{DB} \Rightarrow FA=BD$, deci și $FP=PD$. În ΔDEF: MP linie mijlocie $\Leftrightarrow MP \parallel EF \parallel BC$ (1), iar în ΔABC: PQ linie mijlocie $\Leftrightarrow PQ \parallel BC$ (2). Din (1) și (2) rezultă că P, M, Q sunt coliniare.

50. Fie $AS \cap BC=\{N\}$ și $NF \parallel BM$. În ΔABN: $PS \parallel BN \Rightarrow \frac{AP}{AB}=\frac{AS}{AN}=\frac{2}{3}$. În ΔANF: $SM \parallel NF \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AS}{AN}=\frac{AM}{AF}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AC}{AF}=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{FC}{AC}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{FC}{2MC}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{FC}{MC}=\frac{1}{2}$. În ΔBMC: $MF=FC$ și $NF \parallel BM \Rightarrow NF$ linie mijlocie $\Rightarrow N$ mijlocul lui $BC \Rightarrow AN$ mediană $\Rightarrow S=$ centru de greutate.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** **a** 3; **b** $\frac{1}{4}$; **c** $\frac{4}{3}$. **2.** **a** 12 cm; **b** $AO=12$ cm, $OC=4$ cm. **3.** $BD=7{,}5$ cm, $CD=12{,}5$ cm.

Testul 2. **1.** $AM=18$ cm, $MB=30$ cm. **2.** **a** $AB=8$ cm; **b** $\frac{1}{2}$. **3.** **a** $BD=6$ cm, $CD=4$ cm; **b** $\mathcal{P}_{ABDE}=22{,}2$ cm.

Testul 3. **1.** $MB=6$ cm, $AN=2$ cm, $AC=6$ cm. **2.** **a** $MN \parallel BC$, $NP \parallel AB \Rightarrow MNPB$ paralelogram;
b $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ (1). $NP \parallel AB \Rightarrow \frac{PC}{BC}=\frac{NC}{AC}$ (2).
Din (1) și (2) rezultă că $\frac{AM}{AB}+\frac{PC}{BC}=\frac{AN+NC}{AC}=\frac{AC}{AC}=1$. **3.** **a** $\frac{AM}{AB}=\frac{NC}{BC} \Rightarrow MN \parallel AC$; **b** $\frac{3}{5}$.

Testul 4. **1.** $AN=AC-NC=14$ cm. $\frac{AM}{AB}=\frac{8}{18}$, iar $\frac{AN}{AC}=\frac{14}{24}$. Cum $\frac{8}{18} \neq \frac{14}{24}$, rezultă că $MN \nparallel BC$.
2. **a** $MN \parallel BD \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{ND}$. Cum $AB=DC$ și $AD=BC$, rezultă că $\frac{AM}{DC}=\frac{AN}{BC}$; **b** Din **a** rezultă că $\frac{AN}{ND}=\frac{2}{3}$ și, cum $ND=9$ cm, se obține $AN=6$ cm, iar $AD=15$ cm. **3.** **a** $PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ (1). $QR \parallel AB \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AQ}{QC}=\frac{BR}{RC}$ (2). Din (1) și (2) rezultă relația cerută; **b** În același mod ca și la punctul **a** se arată că $\frac{AP}{AB}=\frac{BR}{BC}$. Atunci $\frac{AP}{AB} \cdot \frac{BC}{BR}=\frac{BR}{BC} \cdot \frac{BC}{BR}=1$.

III.3. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării

1. $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$. **2.** $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{10}{DE}=\frac{12}{EF}=2 \Rightarrow DE=5$ cm și $EF=6$ cm. **3.** $DE=20$ cm și $DF=25$ cm. **4.** $\frac{CD}{MN}=\frac{DE}{NP}=\frac{CE}{MP}=2 \Rightarrow \frac{4}{MN}=\frac{6}{NP}=2 \Rightarrow MN=2$ cm și $NP=3$ cm. **5.** $\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MP}=\frac{BC}{NP} \Rightarrow \frac{6}{4}=\frac{AC}{2}=\frac{BC}{6} \Rightarrow AC=3$ cm, $BC=9$ cm. **6.** $P_{\Delta PQR}=24$ cm $\Rightarrow k=\frac{48}{24}=2 \Rightarrow \frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PR}=\frac{BC}{QR}=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 12$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 16$ cm. **7.** $\sphericalangle D = \sphericalangle A = 35^\circ$, $\sphericalangle M = \sphericalangle C = 73^\circ$, $\sphericalangle P = \sphericalangle B = 180^\circ - (73^\circ + 35^\circ) = 72^\circ$. **8.** $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 39^\circ$, $\sphericalangle N = \sphericalangle D = 48^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle M = 93^\circ$. **9.** $\sphericalangle M = \sphericalangle A = 75^\circ$. $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \Rightarrow MN = 15$ cm. **10. a** $DE \parallel BC \Rightarrow \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, $\frac{6}{AB} = \frac{AE}{8} = \frac{5}{10} \Rightarrow AE = 4$ cm, $AB = 12$ cm, $BD = 6$ cm, $EC = 4$ cm; **b** $AD = 6$ cm; $EC = 18$ cm, $AC = 27$ cm, $BC = 12$ cm; **c** $BD = 10$ cm, $AE = 6$ cm, $DE = 4$ cm, $EC = 12$ cm; **d** $AB = 10$ cm, $AE = 6$ cm, $DE = \frac{36}{5}$ cm, $EC = 9$ cm; **e** $AB = 10$ cm, $AE = 3{,}5$ cm, $DB = 7{,}5$ cm, $EC = 10{,}5$ cm. **11. a** $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE \parallel BC$; **b** $DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DE}{12} \Rightarrow DE = 4$ cm. **12. a** $AB \parallel NP$ (1), $NA \cap PB = \{M\} \Rightarrow \Rightarrow NA \nparallel BP$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow ABPN$ trapez; **b** $\frac{MA}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow MA = 2k$, $AN = 3k$, $k \in \mathbb{Q}_+^*$, $MA + AN = MN \Rightarrow 5k = 15$ cm $\Rightarrow \Rightarrow k = 3$ cm $\Rightarrow MA = 6$ cm, $AN = 9$ cm; $AB \parallel NP \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MP} = \frac{AB}{NP}$; $\frac{6}{15} = \frac{MB}{20} = \frac{AB}{13{,}5} \Rightarrow MB = 8$ cm, $AB = 5{,}4$ cm, $\mathcal{P}_{\Delta MAB} = 19{,}4$ cm; $\mathcal{P}_{ABPN} = 39{,}9$ cm. **13.** $DB = 2AD \Rightarrow AB = 3AD \Rightarrow AD = 5$ cm, $DB = 10$ cm; $BC = 3EC \Rightarrow \Rightarrow EC = 6$ cm, $BE = 12$ cm. Observăm că $\frac{BE}{BC} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ și $\frac{BD}{BA} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow DE \parallel AC \Rightarrow \Delta BED \sim \Delta BCA \Rightarrow \Rightarrow DE = 14$ cm; $\mathcal{P}_{\Delta BED} = 36$ cm. **14.** $AB = 6$ cm, $MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ACB \Rightarrow \Delta\ AMN$ echilateral $\Rightarrow MN = 2$ cm, $BN = 4$ cm, $MC = 4$ cm, $P_{BCMN} = 16$ cm. **15. a** DE înălțime $\Rightarrow DE \perp AC$. Dar $BA \perp AC$ pentru că ΔABC dreptunghic $\Rightarrow DE \parallel AB$; **b** $DC = 15 - 6 = 9$ cm, $DE \parallel AB \Rightarrow \Delta CED \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow DE = \frac{27}{5}$ cm $= 5{,}4$ cm. **16. a** $\Delta ABC \sim \Delta ACB \Rightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle C \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel; **b** $\Delta ABC \sim \Delta CAB \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle B \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral. **17.** Se demonstrează că $ADEF$ paralelogram. $DE \parallel AC \Rightarrow \Delta BED \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow DE = \frac{15}{2}$ cm $= 7{,}5$ cm; $P_{ADEF} = 25$ cm. **18. a** $AG = \frac{2}{3}AM = 6$ cm, $GP \parallel BC \Rightarrow \Delta AGP \sim \Delta AMC \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{GP}{MC} \Rightarrow GP = 4$ cm; **b** $\Delta NGP \sim \Delta NBC \Rightarrow \Rightarrow \frac{NG}{NB} = \frac{GP}{BC} = \frac{NP}{NC} \Rightarrow NP = 5$ cm. **19. a** $ADA'E$ romb; **b** $A'D = AD = AE = A'E = x$; $A'D \parallel AC \Rightarrow \Delta BA'D \sim \Delta BCA \Rightarrow \Rightarrow \frac{A'D}{AC} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{12 - x}{12} \Rightarrow x = \frac{36}{5} = 7{,}2$ cm $\Rightarrow P_{ADA'E} = 28{,}8$ cm. **20.** $EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = 6$, $GH \parallel BC \Rightarrow \Rightarrow \Delta EGH \sim \Delta EBC \Rightarrow \frac{EG}{EB} = \frac{EH}{EC}$; G centru de greutate $\Rightarrow EG = \frac{1}{3}EB \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{EH}{6} \Rightarrow EH = 2$ cm. **21. a** $A'N \parallel AC$, $A'M \parallel AB$, $AB \perp AC \Rightarrow AMA'N$ dreptunghi (1); AA' – bisectoarea $\sphericalangle NAM \Rightarrow AMA'N$ – romb (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow AMA'N$ pătrat. **b** $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = 28$ cm $\Rightarrow AN = NA' = x \Rightarrow BN = 21 - x$; $A'N \parallel AC \Rightarrow \Delta BNA' \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{BN}{BA} = \frac{NA'}{AC} \Rightarrow \frac{21 - x}{21} = \frac{x}{28} \Rightarrow \Rightarrow x = 12$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{\Delta AMA'N} = 48$ cm. **22.** $AB \parallel DC \Rightarrow \Delta EAB \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{CD}$; $\frac{EA}{EA + AD} = \frac{EB}{EB + BC} = \frac{12}{20} \Rightarrow \Rightarrow \frac{EA}{EA + 8} = \frac{EB}{EB + 12} = \frac{3}{5}$. Aplicând proporții derivate, obținem $\frac{EA}{8} = \frac{EB}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow EA = 12$ cm, $EB = 18$ cm; $\mathcal{P}_{\Delta EAB} = 42$ cm. **23.** $\mathcal{P}_{EDC} = 38$ cm. **24.** $AB \parallel CD \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{7}{9} \Rightarrow OA = 7k$, $OC = 9k$, unde $k \in \mathbb{Q}_+^*$. Dar $OA + OC = AC \Rightarrow 16k = 8 \Rightarrow k = 0{,}5$, deci $OA = 3{,}5$ cm și $OC = 4{,}5$ cm. **25.** $MO = 7{,}5$ cm, $OP = 12{,}5$ cm, $NO = 9$ cm, $OQ = 15$ cm. **26.** $AO = 15$ cm, $OC = 20$ cm, $BO = 12$ cm, $OD = 16$ cm. **27.** Fie $EF \cap AC = \{G\}$. Atunci $EG \parallel CD \Rightarrow \Delta AEG \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EG}{DC} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{EG}{13} \Rightarrow EG = \frac{39}{7}$ cm, $GF \parallel AB \Rightarrow \Rightarrow \Delta CGF \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CG}{CA} = \frac{GF}{AB}$; $\frac{AG}{AC} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{GC}{AC} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{GF}{20} = \frac{4}{7} \Rightarrow GF = \frac{80}{7}$, $EF = EG + GF = 17$ cm. **28.** $OR = \frac{48}{5}$ cm. **29. a** $FD \parallel BC$, $DE \parallel AB \Rightarrow BEDF$ paralelogram $\Rightarrow FD = BE$. $FD \parallel BC \Rightarrow \Delta AFD \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{FD}{BC}=\dfrac{BE}{BC}$. **b** $\Delta AFD \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{DF}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$ (1), $\Delta CED \sim \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{CD}{AC}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\dfrac{DE}{AB}+\dfrac{DF}{BC}=\dfrac{AD+CD}{AC}=\dfrac{AC}{AC}=1$. **30.** $\Delta ABM \sim \Delta DNM \Rightarrow \dfrac{AB}{DN}=\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{AB}{DN}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{AB}{DN+AB}=\dfrac{3}{2+3} \Rightarrow \dfrac{AB}{NC}=\dfrac{3}{5}$. $\Delta ABP \sim \Delta CNP \Rightarrow \dfrac{AB}{NC}=\dfrac{BP}{PN}=\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{3}{5}$, $AM \parallel BC \Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta CBP \Rightarrow \dfrac{AM}{BC}=\dfrac{MP}{BP} \Rightarrow MP=\dfrac{3}{5}BP$; $\dfrac{BM}{MN}=\dfrac{AB}{ND}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{BP+PM}{MN}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{BP+\frac{3}{5}BP}{MN}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{\frac{8}{5}BP}{MN}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{BP}{MN}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{16}$. **31. a** $OE \parallel AB \Rightarrow \Delta OED \sim \Delta BAD \Rightarrow \dfrac{OE}{AB}=\dfrac{DE}{AD}$ (1); $OE \parallel CD \Rightarrow \Delta AEO \sim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{OE}{CD}=\dfrac{AE}{AD}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \dfrac{OE}{AB}+\dfrac{OE}{CD}=\dfrac{DE+AE}{AD}=\dfrac{AD}{AD}=1$; **b** Ca la **a**, se arată că $\dfrac{OF}{AB}+\dfrac{OF}{CD}=1$. Atunci $\dfrac{OE}{AB}+\dfrac{OE}{CD}+\dfrac{OF}{AB}+\dfrac{OF}{CD}=1+1$, deci $\dfrac{EF}{AB}+\dfrac{EF}{CD}=2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}=\dfrac{2}{EF}$. **32.** $MC \parallel AD \Rightarrow \Delta MPC \sim \Delta DPA$, unde $AC \cap DM=\{P\} \Rightarrow \dfrac{MC}{AD}=\dfrac{CP}{PA} \Rightarrow \dfrac{CP}{PA}=\dfrac{1}{2}$ (deoarece M este mijlocul lui BC, $MC=\dfrac{1}{2}BC$) $\Rightarrow PA=2CP$. Dar $PA+PC=AC \Rightarrow 3PC=AC \Rightarrow PC=\dfrac{1}{3}AC$. Atunci $OP=OC-PC=\dfrac{1}{2}AC-\dfrac{1}{3}AC=\dfrac{1}{6}AC \Rightarrow \dfrac{AO}{OP}=3$; $NO \parallel DP \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{AN}{ND}=\dfrac{AO}{OP}=3$. **33.** $OM=12$ cm. **34. a** Se arată că triunghiurile MNP și MDC sunt isoscele. Unghiul M este comun. Deci triunghiurile sunt asemenea. **35.** $CD=24$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD}=58$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD}=95\sqrt{3}$ cm². **36. a** $AE \parallel DC \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{CE}{CF}=\dfrac{DA}{DF}=\dfrac{BC}{DF}$; **b** $BC \parallel DF \Rightarrow \Delta BCG \sim \Delta DFG \Rightarrow \dfrac{BC}{DF}=\dfrac{CG}{GF}$. Dar $\dfrac{BC}{DF}=\dfrac{CE}{CF}$ (din **a**) $\Rightarrow \dfrac{CG}{GF}=\dfrac{CE}{CF}$. **37.** Fie $A'D \parallel AB$, $D \in (AC)$. Atunci $\Delta CA'D \sim \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{A'D}{AB}=\dfrac{CD}{CA}$ (1). $\sphericalangle DA'A=\sphericalangle BAA'=60°$ (alterne interne) $\Rightarrow \Delta A'AD$ echilateral $\Rightarrow$ $\Rightarrow AA'=AD=A'D$. Înlocuind în (1), obținem $\dfrac{AA'}{AB}=\dfrac{AC-AD}{AC}$, adică $\dfrac{AA'}{AB}=\dfrac{AC}{AC}-\dfrac{AA'}{AC} \Rightarrow \dfrac{AA'}{AB}+\dfrac{AA'}{AC}=1$.

38. $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$ (alterne interne). Dar $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCA \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA \Rightarrow \Delta BAC$ isoscel $\Rightarrow BA=BC=12$ cm, $AB \parallel CD \Rightarrow \Delta EAB \sim \Delta EDC \Rightarrow \dfrac{AB}{DC}=\dfrac{EB}{EC}$, $\dfrac{12}{15}=\dfrac{EB}{EB+12} \Rightarrow \dfrac{4}{5-4}=\dfrac{EB}{EB+12-EB} \Rightarrow 4=\dfrac{EB}{12} \Rightarrow EB=48$ cm, $EC=EB+BC=60$ cm. **39.** $AB=15$ cm, AD și BE sunt și mediane pentru că ΔABC este echilateral $\Rightarrow G=$ centrul de greutate al $\Delta ABC \Rightarrow AG=\dfrac{2}{3}AD \Rightarrow \dfrac{AG}{AD}=\dfrac{2}{3}$, $GM \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AG}{AD} \Rightarrow \dfrac{AM}{15}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow AM=10$ cm $\Rightarrow BM=5$ cm, $BG=\dfrac{2}{3}BE \Rightarrow \dfrac{BG}{BE}=\dfrac{2}{3}$, $GN \parallel AC \Rightarrow \dfrac{BN}{BA}=\dfrac{BG}{BE}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow BN=10$ cm $\Rightarrow MN=BN-BM=5$ cm. **40.** Fie $DG \parallel BE$, $G \in AC$. Cum D este mijlocul lui BC, rezultă că DG este l.m. în $\Delta CEB \Rightarrow EG=GC$. În ΔADG aplicăm teorema lui Thales: $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{AE}{EG} \Leftrightarrow AF\cdot EG=AE\cdot FD$. Dar $EG=\dfrac{EC}{2}$ și, înlocuind în relația anterioară, obținem $AF\cdot EC=2AE\cdot FD$.

41. BB' bisectoarea $\sphericalangle ABC \overset{\text{T.bis.}}{\Rightarrow} \dfrac{AB'}{B'C}=\dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{AB'}{B'C}=\dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{AB'}{AC}=\dfrac{3}{8}$ și $\dfrac{CB'}{AC}=\dfrac{5}{8}$; $B'E \parallel DC \Rightarrow \Delta AB'E \sim \Delta ACD \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{B'E}{CD}=\dfrac{AB'}{AC}=\dfrac{3}{8} \Rightarrow B'E=9$ cm; $B'F \parallel AD \Rightarrow \Delta CB'F \sim \Delta CAD \Rightarrow \dfrac{B'F}{AD}=\dfrac{CB'}{CA}=\dfrac{5}{8} \Rightarrow B'F=10$ cm. **42.** $OM \parallel CD \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta AOM \sim \Delta ACD \Rightarrow \dfrac{OM}{CD}=\dfrac{AM}{AD}$ (1), $OM \parallel AB \Rightarrow \Delta DOM \sim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{OM}{AB}=\dfrac{DM}{AD}$ (2). Adunând relațiile (1) și (2), avem: $\dfrac{OM}{CD}+\dfrac{OM}{AB}=\dfrac{AM+DM}{AD}=\dfrac{AD}{AD}=1 \Rightarrow OM\left(\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}\right)=1 \Rightarrow OM=\dfrac{AB\cdot CD}{AB+CD}$. Analog se arată că $ON=\dfrac{AB\cdot CD}{AB+CD}$. Deci $MN=OM+ON=\dfrac{2AB\cdot CD}{AB+CD}$. **43.** Fie $CQ \parallel AB$, $Q \in PN$. $\Delta NCQ \sim \Delta NBM \Rightarrow \dfrac{CN}{BN}=\dfrac{CQ}{BM} \Rightarrow CQ=\dfrac{CN\cdot BM}{BN}$ (1). $\Delta PCQ \sim \Delta PAM$: $\dfrac{CP}{AP}=\dfrac{CQ}{AM} \Rightarrow CQ=\dfrac{CP\cdot AM}{AP}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\dfrac{CN\cdot BM}{BN}=\dfrac{CP\cdot AM}{AP}$, de unde $\dfrac{AM}{BM}\cdot\dfrac{BN}{CN}\cdot\dfrac{CP}{AP}=1$. **44.** Se aplică Teorema lui Menelaus în ΔPBC: $\dfrac{PQ}{BQ}\cdot\dfrac{BN}{CN}\cdot\dfrac{AC}{AP}=1$ (1) și în ΔABP: $\dfrac{BQ}{PQ}\cdot\dfrac{CP}{AC}\cdot\dfrac{AM}{BM}=1$ (2). Înmulțim relațiile (1) și (2) și obținem relația cerută. **45.** Fie $d \cap AC=\{R\}$. Se aplică T. lui Menelaus în ΔABC: $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CR}{RA}=1$ (1) și în ΔACD:

$\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RC}=1$ (2). Înmulțim relațiile (1) și (2) și obținem relația cerută. 46. În ΔABC: $PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{PQ}{BC}=\frac{AQ}{AC} \Rightarrow$ $\Rightarrow PQ=\frac{AQ\cdot BC}{AC}$. Cum $QR \parallel BC \Rightarrow \Delta QRF \sim \Delta CBF \Rightarrow \frac{QR}{BC}=\frac{QF}{CF} \Rightarrow QR=\frac{BC\cdot QF}{CF}=\frac{2BC\cdot QF}{AC}$.
Deci $PR=PQ+QR=\frac{BC(AQ+2QF)}{AC}=\frac{BC(AF+QF)}{AC} \Rightarrow PR+PQ=\frac{BC(AF+QF)}{AC}+\frac{AQ\cdot BC}{AC}=\frac{BC\cdot 2AF}{AC}=BC=\text{constant}$.
47. $\mathcal{A}_{MNCD}=\frac{(MN+CD)\cdot MD}{2}$, $\mathcal{A}_{ABNM}=\frac{(MN+AB)\cdot MA}{2} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{MNCD}}{\mathcal{A}_{ABMN}}=\frac{MN+CD}{MN+AB}\cdot\frac{MD}{MA}$ (1). Fie $AD\cap BC=\{E\}$. Din T.F.A. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta EDC \sim \Delta EMN \Rightarrow \frac{ED}{EM}=\frac{CD}{MN} \Rightarrow MD=EM\cdot\frac{MN-CD}{MN}$ (2). $\Delta EMN \sim \Delta EAB \Rightarrow \frac{EM}{EA}=\frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{EM}{MA}=\frac{MN}{AB-MN} \Rightarrow$ $\Rightarrow MA=EM\cdot\frac{AB-MN}{MN}$ (3). Din (1), (2) și (3): $\frac{\mathcal{A}_{MNCD}}{\mathcal{A}_{ABMN}}=\frac{(MN-CD)(MN+CD)}{(AB-MN)(AB+MN)}=\frac{MN^2-CD^2}{AB^2-MN^2} \Rightarrow \frac{MN^2-4}{64-MN^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow MN=4$ cm.

III.4. Criterii de asemănare a triunghiurilor. Aproximarea în practică a distanțelor folosind asemănarea

1. a Fiind triunghiuri echilaterale, au unghiurile egale cu 60°, deci sunt asemenea. (U.U.). 2. a Cazul U.U.; b Cazul U.U.; c Cazul L.U.L.; d Cazul L.L.L. 5. a Da; b Nu; c Nu; d Da; e Da. 6. a Da; b Nu; c Da; d Nu; e Da. 7. $DE=9$ cm, $AC=10$ cm. 8. a $\sphericalangle DAE=\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ADE=\sphericalangle ABC \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ADE \sim \Delta ABC$; b $AD=6$ cm, $AE=\frac{36}{5}=7{,}2$ cm. 9. $\sphericalangle A=78° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle B=\sphericalangle C=\frac{180°-78°}{2}=51°=\sphericalangle P=\sphericalangle N \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta MNP$. 10. Fiind triunghiuri echilaterale, au unghiurile egale cu 60°, deci sunt asemenea. (U.U.) 11. a $MN \parallel BC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta AMN \sim \Delta ABC$; b $\frac{MN}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{AMN}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. 12. $P_{DEF}=11$ cm.
13. a FG, DE și MN sunt linii mijlocii în ΔADE, ΔABC, respectiv în trapezul $BCED$; b $BC=12$ cm, $MN=9$ cm, $FG=3$ cm. 14. a $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \overset{R.Thales}{\Rightarrow} DE \parallel BC$; b $DE=4$ cm. 15. a 2; b $\mathcal{A}_{DEF}=2$ cm². 16. 3. 17. a $DE \parallel BC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{5}{11}$; b $x=8$. 18. a $\sphericalangle BAC=\sphericalangle BDC=\frac{\widehat{BC}}{2}$, $\sphericalangle AEB=\sphericalangle DEC$(op. la vârf)$\overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta AEB \sim \Delta DEC$; b $DC=4{,}5$ cm.
19. a $DF \parallel BC \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DB}$; b $DE \parallel AC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta BED \sim \Delta BCA$; c $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EB}$. 20. a $A_{ABC}=108$ cm²; b $A_{ABM}=54$ cm²; c $A_{ABC}=27$ cm². 21. a MP este linie mijlocie în $\Delta CBN \Rightarrow BN=2MP$; b $MP \parallel AN$, $MP=AN \Rightarrow APMN$ paralelogram (1). Se arată că ΔMNB este dreptunghic în M (mediana dusă din M este egală cu jumătate din ipotenuză), $\sphericalangle B=30°$ $\Rightarrow MN=\frac{BN}{2}=AN$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $APMN$ este romb. 22. Avem $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$ și $\frac{AD}{DC}=\frac{1}{2} \overset{R.T.bis}{\Rightarrow}$ BD este bis. $\widehat{ABC}$. 23. a $\sphericalangle ACB=90°-\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAD \Rightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACB \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ABD \sim \Delta CBA$; b $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DCA \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ABD \sim \Delta CAD$; c $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle ACB \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ADC \sim \Delta BAC$. 24. a $\widehat{DBC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=36°$, $\widehat{BDC}=180°-(36°+72°)=72° \Rightarrow \widehat{BDC} \equiv \widehat{BCD} \Rightarrow \Delta DBC$ isoscel; b $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DBC}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BDC} \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta BDC$.
25. a $BD=4$ cm, $CD=5$ cm; b $\frac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{ADC}}=\frac{4}{5}$. 26. a Se arată că AM este linie mijlocie în ΔBNC; b $AM \parallel NC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta PAM \sim \Delta PCN \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{AM}{NC}=\frac{1}{2}$. Deci $PC=2AP$. 27. a Rezultă conform cazului U.U.; b $\Delta ADF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{AD}{AB}$ (1). Din teorema lui Thales $\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{CE}{BC}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\frac{AF}{AC}+\frac{BE}{BC}=\frac{CE}{BC}+\frac{BE}{BC}=1$. 28. $AD\cdot AB=AE\cdot AC \Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$ și cum $\widehat{DAE} \equiv \widehat{CAB} \overset{L.U.L.}{\Rightarrow} \Delta AED \sim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{AED} \equiv \widehat{ABC}$. 29. a $\sphericalangle ABD=\sphericalangle AEC=\frac{\widehat{AC}}{2}$, $\sphericalangle ADB=\sphericalangle ACE=90° \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ABD \sim \Delta AEC$; b $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC} \Rightarrow AB\cdot AC=AE\cdot AD$. 30. a $CN \parallel AB \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta NCM$; b $CD \parallel BP \Rightarrow \Delta CDM \sim \Delta BPM$; c $\Delta CDM \sim \Delta BPM \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{BP}=\dfrac{CM}{MB}$ (1). $\Delta ABM \sim \Delta NCM \Rightarrow \dfrac{CN}{AB}=\dfrac{CM}{MB}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\dfrac{CD}{BP}=\dfrac{CN}{AB}$. Dar $AB=CD \Rightarrow \dfrac{CD}{BP}=\dfrac{CN}{CD} \Rightarrow$ $\Rightarrow CD^2=CN \cdot BP$. **31.** $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{BAM} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBA \Rightarrow \dfrac{AC}{AM}=\dfrac{BC}{AB} \Rightarrow AC^2=AM \cdot BC$. **32.** $AO=6$ cm, $OC=4$ cm, $BO=9$ cm, $OD=6$ cm. **33. a** Se arată că diagonalele sunt congruente; **b** $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{2}$. **34.** $BO=6$ cm, $OD=9$ cm, $AB=12$ cm. **35. a** $P_{PAB}=27$ cm; **b** $\dfrac{\mathcal{A}_{PAB}}{\mathcal{A}_{ABCD}}=\dfrac{9}{16}$. **36. a** $\Delta MAN \equiv \Delta MBC \Rightarrow AN=BC \Rightarrow AN=AD$ (1). $AQ \parallel NP$ (2). Din (1) și (2) rezultă că AQ este linie mijlocie în ΔDNP; **b** AQ l.m. în $\Delta DNP \Rightarrow \dfrac{AQ}{PN}=\dfrac{1}{2}$; MP l.m. în $\Delta BAQ \Rightarrow \dfrac{MP}{AQ}=\dfrac{1}{2}$. Deci $\dfrac{AQ}{PN}=\dfrac{MP}{AQ}$, de unde $AQ^2=MP \cdot PN$. **37. a** $AB \parallel CN \overset{U.L.U}{\Rightarrow} \Delta ABM \equiv \Delta NCM$; **b** $\Delta ABM \sim \Delta NCM \Rightarrow \dfrac{AB}{CN}=\dfrac{BM}{MC}$ (1); $\Delta PBM \sim \Delta DCM \Rightarrow \dfrac{PB}{CD}=\dfrac{BM}{MC}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\dfrac{AB}{CN}=\dfrac{BP}{CD}$. Dar $AB=CD$, deci $\dfrac{AB}{CN}=\dfrac{BP}{AB}$, de unde $AB^2=BP \cdot CN$. Folosind teorema lui Pitagora, obținem concluzia.

38. a $\sphericalangle ABD=\dfrac{\widehat{AD}-\widehat{AM}}{2}=\dfrac{\widehat{MD}}{2}=\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle DAB=\sphericalangle CDA=90° \overset{U.U}{\Rightarrow} \Delta ABD \sim \Delta DAC$; **b** $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AD}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC=AD^2$ și, cum $AD=2R$, rezultă egalitatea cerută. **39. a** $\widehat{EBF}=45°+90°+45°=180° \Rightarrow E, B, F$ sunt coliniare; **b** Evident, conform cazului U.U.; **c** $ACFE$ are toate unghiurile drepte. **40. a** Evident, conform cazului U.U.; **b** $\Delta ABM \equiv \Delta CBN$ (C.C.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow AM=CN$; **c** $\widehat{BMN}=\widehat{ACB}=45° \Rightarrow MN \parallel AC$; $AM \nparallel NC$, $AM=NC \Rightarrow ACNM$ trapez isoscel. **41. a** $EF=2$ cm; **b** $FB=4$ cm $\Rightarrow F$ este mijlocul lui DB. Dar $FG \parallel BC \Rightarrow FG$ este linie mijlocie; **c** $\mathcal{A}_{DEG}=10$ cm², $\mathcal{A}_{DAC}=40$ cm². **42. a** $MN \parallel AB \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta MNG \sim \Delta ABG$; **b** AM mediană, deci $\mathcal{A}_{ABM}=\mathcal{A}_{AMC}=\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC}=45$. Fie $BP \perp AG$. Cum $AG=\dfrac{2}{3}AM$, rezultă că $\mathcal{A}_{ABG}=\dfrac{AG \cdot BP}{2}=\dfrac{2}{3}\mathcal{A}_{ABG}=30$ cm²; **c** $\mathcal{A}_{MNG}=7{,}5$ cm². **43.** $EF=2$ cm. **44.** $\widehat{BDE}=30° \Rightarrow \widehat{ABD}=60° \Rightarrow \widehat{ACB}=30°$, deci triunghiurile sunt asemenea. **45.** ΔABM este echilateral, BN – bis. $\Rightarrow BN$ – înălțime (1). MN este linie mijlocie în $\Delta BDC \Rightarrow MN \parallel DC$, dar $DC \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$ (2). Din (1) și (2) rezultă că N este ortocentrul ΔABM. **46.** $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DBA} \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta BAD \Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DC}{AD} \Rightarrow AD^2=AB \cdot CD$. **47.** Fie $DE \cap BC=\{H\}$. EB este linie mijlocie în ΔHCD și $\Delta DGF \sim \Delta HGC$, deci $\dfrac{FG}{GC}=\dfrac{FD}{CH}=\dfrac{FD}{BC+BH}=\dfrac{FD}{2BC}=\dfrac{FD}{2AD}=\dfrac{1}{4}$. **48.** Notăm $MN \cap BD=\{P\}$, $\Delta DMP \sim \Delta DAB \Rightarrow \dfrac{MP}{AB}=\dfrac{MD}{AD} \Rightarrow MP=\dfrac{AB \cdot MD}{AD}$; $\Delta BPN \sim \Delta BDC \Rightarrow \dfrac{PN}{DC}=\dfrac{BP}{BD}$. Dar $\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{MA}{AD} \Rightarrow PN=\dfrac{MA \cdot DC}{AD}$, $MN=MP+PN=\dfrac{AB \cdot MD+MA \cdot DC}{AD} \Rightarrow MN \cdot AD=AB \cdot MD+MA \cdot DC$. **49.** $\dfrac{OM}{AB}=\dfrac{DO}{DB}=\dfrac{DM}{DA}$ și $\dfrac{ON}{AB}=\dfrac{CO}{CA}=\dfrac{CN}{CB}$. Dar $\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{CO}{CA}$, deci $\dfrac{OM}{AB}=\dfrac{ON}{AB}$ și $OM=ON$. **51.** Fie $E \in (AC)$ astfel încât $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC}$. Atunci $\Delta AED \sim \Delta ADB \Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2=AB \cdot AE < AB \cdot AC$.

52. Fie $MN \cap BC=\{Q\}$. MQ este l.m. în $\Delta DAC \Rightarrow QC=\dfrac{1}{4}BC \Rightarrow \dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{BN}{AB}=\dfrac{3}{4}$. $\mathcal{A}_{DMQ}=\dfrac{1}{4}\mathcal{A}_{ADC}=\dfrac{1}{8}\mathcal{A}_{ABC}$. $\dfrac{\mathcal{A}_{BNQ}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16} \Rightarrow \mathcal{A}_{BNMD}=\mathcal{A}_{BNQ}-\mathcal{A}_{DMQ}=\dfrac{7}{16}\mathcal{A}_{ABC} \Rightarrow \mathcal{A}_{AMN}=\mathcal{A}_{ABD}-\mathcal{A}_{BNMD}=\dfrac{1}{16}\mathcal{A}_{ABC}$. Conform T.F.A., $\Delta NPB \sim \Delta NAM \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{NPB}}{\mathcal{A}_{NAM}}=\left(\dfrac{BN}{AN}\right)^2=9 \Rightarrow \mathcal{A}_{NPB}=9 \cdot \mathcal{A}_{NAM}=\dfrac{9}{16}\mathcal{A}_{ABC}$. **53.** $\Delta APB \sim \Delta RPD$ (U.U.) $\Rightarrow \dfrac{PR}{AP}=\dfrac{DP}{PB}$ (1); $\Delta APB \sim \Delta QPB$ (U.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{DP}{PB}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \dfrac{PR}{AP}=\dfrac{AP}{PQ} \Rightarrow AP^2=PR \cdot PQ$. **54. a** $\Delta ABC \sim \Delta EAC$ (U.U.) $\Rightarrow \dfrac{AC}{CE}=\dfrac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2=CE \cdot BC$. **b** $\Delta ABC \sim \Delta EAC \Rightarrow \sphericalangle BAC=\sphericalangle AEC$ (1). $AB^2=BD \cdot BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BC}{AB} \overset{L.U.L.}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \sphericalangle BAC=\sphericalangle BDA$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\sphericalangle AEC=\sphericalangle BDA$, deci ΔAED este isoscel. **c** Din $\Delta ABC \sim \Delta EAC$ se obține relația cerută. **55.** $BC \cdot BF=BD \cdot BE \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{BC}{BE}=\dfrac{BD}{BF}$. Dar $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle EBF \Rightarrow \Delta BCD \sim \Delta BEF \Rightarrow \sphericalangle EFB \equiv \sphericalangle BDC$ și $\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle BCD$. $\Delta BEF \sim \Delta DEA \Rightarrow BC^2=BD \cdot DE$. $\Delta BEF \sim \Delta DAB \Rightarrow AB^2=AE \cdot AF$.

Teste de evaluare

Testul 1. 1. $\mathcal{P}_{AMN}=24$ cm. 2. $AO=10$ cm, $OC=25$ cm, $BO=12$ cm, $OD=30$ cm.
3. $\frac{AN}{AC}=\frac{ME}{MC}$, $\frac{AP}{AB}=\frac{ME}{MB}$, $MB=MC\Rightarrow\frac{AN}{AC}=\frac{AP}{AB}\Rightarrow\frac{AN}{AP}=\frac{AC}{AB}$.

Testul 2. 1. $\Delta ABC\sim\Delta NPM$. 2. $\mathcal{P}_{MDC}=31$ cm. 3. $\Delta BNM\sim\Delta BCA\Rightarrow\frac{BN}{BC}=\frac{BM}{BA}=\frac{MN}{AC}$; $\Delta AMP\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AP}{AC}=\frac{MP}{BC}$, de unde $\frac{MN}{AC}+\frac{MP}{BC}=\frac{BM}{AB}+\frac{AM}{AB}=1$.

Testul 3. 1. $MN=108$ cm, $NP=120$ cm. 2. $\mathcal{A}_{MNPB}=100\text{ cm}^2$. 3. $\Delta AMO\sim\Delta ADC\Rightarrow\frac{MO}{DC}=\frac{AM}{AD}$, $\Delta DMO\sim\Delta DAB\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{MO}{AB}=\frac{DM}{AD}$. Adunăm cele două relații și obținem $\frac{MO}{DC}+\frac{MO}{AB}=1$, de unde $\frac{1}{MO}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{DC}$.

III.5. Probleme cu caracter aplicativ

1. $\Delta ABC\sim\Delta ADE\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}\Rightarrow\frac{4}{10}=\frac{1{,}5}{DE}\Rightarrow DE=3{,}75$ m. 2. a $L_{gard}=27$ m; b $\Delta ABC\sim\Delta EDC\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow$ $\Rightarrow DE=4$ m, $CD=3$ m, $L_{gard}=9$ m. 3. $L_{tur}=60$ m. 4. $\Delta ABC\sim\Delta DCE\Rightarrow\frac{AB}{CD}=\frac{BC}{CE}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DCE}}=\left(\frac{4}{3}\right)^2\Rightarrow\mathcal{A}_{DCE}=13{,}5\text{ m}^2$.
6. $\widehat{BDC}\equiv\widehat{ABD}$ (alterne interne) $\Rightarrow\Delta ABD\sim\Delta BDC$ (U.U.) $\Rightarrow\frac{AB}{BD}=\frac{AD}{BC}=\frac{BD}{DC}$, de unde $BC=20$ m, $\mathcal{A}_{ABD}=\frac{AD\cdot AB}{2}=54\text{ m}^2$ și $\mathcal{A}_{BDC}=150\text{ m}^2$. 7. a $\sphericalangle ACB+\sphericalangle ECD=\sphericalangle CED+\sphericalangle ECD=90^\circ\Rightarrow\sphericalangle ACE=90^\circ$. b $\Delta ABC\sim\Delta CDE$ (U.U.) $\Rightarrow\frac{AB}{CD}=\frac{BC}{DE}$. Dar $DE=AB=40$ cm $\Rightarrow BC=32$ m $\Rightarrow BD=82$ m; c $\mathcal{A}_{ABCD}=40\cdot 82=3\,280\text{ m}^2$; $\mathcal{A}_{ABC}=640\text{ m}^2$; $\mathcal{A}_{CDE}=1\,000\text{ m}^2$, $\mathcal{A}_{ACE}=\mathcal{A}_{ABCD}-\mathcal{A}_{ABC}-\mathcal{A}_{CDE}=1640\text{ m}^2$.

III.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. a $\frac{2}{3}$; b 70°. 2. Fie $EF\parallel AD$, $F\in BC$. Atunci $\Delta CEF\sim\Delta CAB\Rightarrow\frac{EF}{AB}=\frac{CE}{CA}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow EF=AD$. $AEFD$ este paralelogram, deci DE și AF au același mijloc, P. Din reciproca teoremei lui Thales avem $NP\parallel BC$ și $NM\parallel BC$, deci $P\in MN$.
3. Fie $AP\cap BC=\{F\}\Rightarrow AP=PF$. Fie E intersecția paralelei prin F la AB cu AC și D intersecția dreptei EP cu AB. $\Delta PEF\equiv\Delta PDA\Rightarrow AD=EF$. 4. a Fie $\widehat{ADC}=2\alpha\Rightarrow\widehat{ADE}=\widehat{EDC}=\widehat{AED}=\alpha$ (alt. int.) $\Rightarrow\widehat{DEC}=\widehat{BEC}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow\alpha=50^\circ\Rightarrow\hat{A}=\hat{C}=80^\circ$, $\hat{B}=\hat{D}=100^\circ$; b Fie $T\in ED$ astfel încât $\frac{ET}{TD}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{ET}{TN}=\frac{1}{2}=\frac{EM}{MA}\overset{R.Th.}{\Rightarrow}MT\parallel AN\Rightarrow$ $\Rightarrow PN\parallel MT\overset{T.Th.}{\Rightarrow}\frac{DP}{PM}=\frac{DN}{NT}=\frac{1}{2}$. 5. ΔABC este isoscel, $AB=AC$, $AM\perp BC$, $M\in BC$. Rezultă că M este mijlocul lui BC, deci $BM=MC=\frac{BC}{2}=6$ cm. Cum $GC=8$ cm $\Rightarrow BG=4$ cm $\Rightarrow\frac{BG}{BM}=\frac{2}{3}\cdot BE=10$ cm $\Rightarrow\frac{BE}{BA}=\frac{2}{3}$. În ΔABM, $\frac{BG}{BM}=\frac{BE}{BA}=\frac{2}{3}\overset{R.Th.}{\Rightarrow}GE\parallel AM$. 6. a $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{1}{2}$, $\widehat{BAC}\equiv\widehat{EAD}\Rightarrow\Delta BAC\sim\Delta EAD\Rightarrow DE=12$ cm. b $\Delta BAC\sim\Delta EAD\Rightarrow$ $\Rightarrow\widehat{EMC}\equiv\widehat{BMD}$, $\widehat{MCE}\equiv\widehat{MDB}\overset{U.U.}{\Rightarrow}\Delta MEC\sim\Delta MBD\Rightarrow ME=8$ cm, $MC=10$ cm. $P_{MCE}=21$ cm. 7. a $\Delta AMQ\sim\Delta ABD\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{MQ}{BD}=\frac{AM}{AB}$; $\Delta BCD\sim\Delta NCP\Rightarrow\frac{PN}{BD}=\frac{CP}{DC}$. Dar $MB=PD$ și $AB=CD\Rightarrow AM+CP=2AB$; $\frac{MQ}{BD}+\frac{PN}{BD}=\frac{AM+CP}{AB}=2\Rightarrow$ $\Rightarrow MQ+PN=2BD=\text{const.}$; b $\frac{AM}{AQ}=\frac{AB}{AD}$, $\frac{CP}{CN}=\frac{CD}{BC}$. Dar $AB=CD$ și $AD=BC\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{AM}{AQ}=\frac{CP}{CN}\Rightarrow AM\cdot CN=AQ\cdot CP$. 8. a $ABCD$ trapez isoscel, $DD'\perp AB$, $CC'\perp AB\Rightarrow AD'=C'B$. În $\Delta CBC'$, $\hat{C'}=90^\circ$,

$\hat{C}=30^\circ \Rightarrow C'B=\frac{3}{2} \Rightarrow AB=\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}=6$ cm $\Rightarrow P_{ABCD}=15$ cm; **b** $\Delta DOC \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{DO}{OB}=\frac{DC}{AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow BO=2DO \Rightarrow$ $\Rightarrow BD=3DO$. **9.** În ΔADC aplicăm teorema lui Menelaus: $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DB}{BA}=1 \Rightarrow \frac{AE}{EC}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{7}=1 \Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{2}{5}$. Cum $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=\frac{2}{5} \overset{R.Th.}{\Rightarrow} DE \parallel BC$. **10.** $CP \parallel GE \Rightarrow \Delta BEG \sim \Delta BPC \Rightarrow \Delta BPC$ drept. isoscel; $\Delta BQE \sim \Delta CBE$ (U.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{BQ}{BC}=\frac{QE}{BE} \Rightarrow \frac{BQ}{QE}=\frac{BP}{EF}$; $\sphericalangle QBP \equiv \sphericalangle QEF \Rightarrow \Delta QBP \sim \Delta QEF$ (L.U.L.) $\Rightarrow \frac{BP}{EF}=\frac{PQ}{QF}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{3}{5}$. Dar $AB+BE=16$ cm $\Rightarrow$ $AB=6$ cm și $BE=10$ cm. **11. a** $DF \parallel AE \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta APE \sim \Delta FPD \Leftrightarrow \frac{AP}{PF}=\frac{PE}{PD}=\frac{AE}{FD}=\frac{AB}{CD}$ (1), $EB \parallel FC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta BQE \sim \Delta FQC \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{BQ}{QF}=\frac{EQ}{QC}=\frac{BE}{FC}=\frac{AB}{CD}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\frac{AP}{PF}=\frac{BQ}{QF} \overset{R.T.Th.}{\Rightarrow} PQ \parallel AB$. **b** În ΔABF: $PQ \parallel AB \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta PQF \sim \Delta ABF \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{PQ}{AB}=\frac{PF}{FA}$ (3). Din (1) $\Rightarrow \frac{PF}{AP}=\frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{PF}{AP+PF}=\frac{CD}{AB+CD} \Leftrightarrow \frac{PF}{AF}=\frac{CD}{AB+CD}$ (4). Din (3) și (4) rezultă că $\frac{PQ}{AB}=\frac{CD}{AB+CD} \Rightarrow PQ=\frac{AB\cdot CD}{AB+CD}$. **12. a** $MT \parallel AD \overset{Thales}{\Rightarrow} \frac{AM}{AB}=\frac{PD}{BD}$ (1); $AD \parallel NP \overset{Thales}{\Rightarrow} \frac{AN}{AC}=\frac{PD}{DC}$ (2). Cum $BD=DC$, din (1) și (2) rezultă $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, deci $AM\cdot AC=AN\cdot AB$. **b** $\frac{MP+NP}{AD}=\frac{MP}{AD}+\frac{NP}{AD}=\frac{BP}{BD}+\frac{PC}{CD}=\frac{2BP}{BC}+\frac{2PC}{BC}=\frac{2(BP+PC)}{BC}=2$, așadar $MP+NP=2AD$. **13.** $\frac{EF}{AB}=\frac{CE}{BC}$ și $\frac{MN}{AC}=\frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{EF}{AB}+\frac{MN}{AC}=\frac{CE+BN}{BC}$; $\frac{GH}{BC}=\frac{GD+DH}{BC}$. $BEDG$ și $CNDH$ paralelograme $\Rightarrow GD \equiv BE$ și $DH \equiv CN \Rightarrow \frac{EF}{AB}+\frac{MN}{AC}+\frac{GH}{BC}=\frac{CE+BN+BE+CN}{BC}=\frac{2BE+2EN+2CN}{BC}=\frac{2(BE+EC+CN)}{BC}=\frac{2BC}{BC}=2$.
14. a În $\Delta ABD \overset{T.bis.}{\Rightarrow} \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{EB}$. În $\Delta BDC \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{DE}{EB}=\frac{DF}{FC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{DF}{FC}$. **b** $\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{FC} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DB}=\frac{DF}{DC} \Rightarrow \frac{AD+AB}{AD}=\frac{DC}{DF} \Rightarrow$ $\Rightarrow 1+\frac{AB}{AD}=\frac{DC}{DF} \Rightarrow \frac{DC}{DF}-\frac{AB}{AD}=1$.

15. a $NB \parallel QA \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{MA}{MB}=\frac{QM}{MN}$; $NC \parallel DQ \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{PC}{PD}=\frac{PN}{QP}$; $MB \parallel PC \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{NB}{NC}=\frac{MN}{NP}$; $DP \parallel MA \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{QD}{AQ}=\frac{QP}{QM}$. Înmulțind cele patru relații, obținem: $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{QD}{QA}=1$. **b** $A_{\Delta DOM}=12{,}5\%\cdot A_{ABCD}$. **16.** $\Delta AHC \sim \Delta BHD \Rightarrow \frac{AH}{HB}=\frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{AC}{AB+AC} \Rightarrow$ $\Rightarrow AH=\frac{AB\cdot AC}{AB+AC}$ (1), $\Delta AKB \sim \Delta CKF \Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AK}{AC}=\frac{AB}{AC+AB} \Rightarrow AK=\frac{AC\cdot AB}{AC+AB}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow AH \equiv AK$. **b** $AH=\frac{HB\cdot AC}{AB}$ și $AK=\frac{KC\cdot AB}{AC} \Rightarrow AH^2=AH\cdot AK=\frac{HB\cdot AC}{AB}\cdot\frac{KC\cdot AB}{AC}=HB\cdot CK$. **17.** Fie P mijlocul lui $AC \Rightarrow PM \parallel DC$, $PM=\frac{DC}{2}=\frac{BD}{2}$. $\sphericalangle MPQ \equiv \sphericalangle BDN$, $PQ \perp BM$, $Q \in BM$, $\Delta MPQ \sim \Delta BDN \Rightarrow \frac{MP}{BD}=\frac{PQ}{ND}=\frac{1}{2} \Rightarrow PQ=\frac{ND}{2}$. Fie $PR \perp ND$, $R \in ND \Rightarrow$ $\Rightarrow PQ=NR=\frac{ND}{2} \Rightarrow \Delta PND$ isoscel, $PN=PD=\frac{AC}{2} \Rightarrow \Delta ANC$ dreptunghic, deci $\sphericalangle ANC=90^\circ$. **18. Cazul I:** M este pe segmentul OB (cazul în care M este pe segmentul OD se rezolvă analog). **a** ΔACE, OM linie mijlocie $\Rightarrow OM \parallel AE \Rightarrow$ $\Rightarrow AE \parallel BD$. $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle EAB$ (alt. int.); $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABD \Rightarrow \sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle GFA \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle GFA \Rightarrow GF \parallel AC$. **b** $\Delta EAF \sim \Delta DBA$ (U.U.); $\frac{OM}{OB}=\frac{2OM}{2OB}=\frac{AE}{DB} \Rightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{OM}{OB} \overset{R.T.Th.}{\Rightarrow} FM \parallel AQ\, GF \parallel AO \Rightarrow G, F, M$ coliniare. **Cazul al II-lea:** soluția este analoagă cu cea de la cazul I.

CAPITOLUL IV. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

IV.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii

3. a adevărat; **b** adevărat; **c** fals; **d** adevărat; **e** fals; **f** adevărat. **4.** 1, 1, 1, 0,(3), 2. **5. b** 14 cm, 21 cm. **6. a** 10 cm; **b** 18 cm; **c** 4 cm; **d** 4,8 cm; **e** 100 dm^2; **f** 7 cm, 28 cm, 14 cm. **7.** 15 cm. **8.** $p_1=16$ cm, $p_2=18$ cm, $h=12\sqrt{2}$ cm. **9.** 13 cm. **10.** $6\sqrt{3}$ cm. **11.** $AD=4\sqrt{2}$ cm, $A_{ABC}=24\sqrt{2}$ cm^2. **12.** $AM=4$ cm, $A_{ABCD}=40$ cm^2. **13.** $OE=4{,}8$ cm,

$A_{ABCD} = 96\text{ cm}^2$. **14.** Notând $AE = x$, avem $AD = 3x$ și $AF = 10 - 3x$. Din teorema înălțimii rezultă $x^2 = x(10-3x)$. Rezultă $AE = 3$ cm, $AD = 9$ cm, $AF = 1$ cm. **15.** $h = 3\sqrt{3}$ cm. **16.** $B = 5b$; $b = 5$ cm, $h = 10$ cm. **17.** Se aplică reciproca teoremei înălțimii. **18.** $AD = 4\sqrt{3}$ cm, $A_{ABDC} = 16\sqrt{3}\text{ cm}^2$. **19.** $AD = 12$ cm. **20.** $AD = 12$ cm, $A_{ABC} = 150\text{ cm}^2$. **21.** $AD = 5\sqrt{3}$ cm, $A_{ABC} = 50\sqrt{3}\text{ cm}^2$. **22.** Fie $OP \perp AB$, $P \in AB$, unde $AC \cap BD = \{O\}$. OP este linie mijlocie în $\Delta DMB \Rightarrow$ $\Rightarrow MP = PB = 5{,}4$ cm. Cu teorema înălțimii în ΔAOB rezultă $OP = 7{,}2$ cm. Deci $DM = 14{,}4$ cm, $A_{ABCD} = 216\text{ cm}^2$. **23.** $AB = 10$ cm, $P_{ABCD} = 40$ cm, $A_{ABCD} = 80\text{ cm}^2$. **24.** $AP = 9$ cm, $PC = 4$ cm. Se observă că $BP^2 = AP \cdot PC$, deci conform reciprocei teoremei înălțimii, ΔABC este dreptunghic în B. **25.** Afirmația este falsă. Contraexemplu: Fie ΔABC dreptunghic în A, neisoscel, D mijlocul lui BC. Atunci AD este mediană, deci $AD = \frac{BC}{2} = BD = DC$. Deci $AD^2 = BD \cdot DC$, dar D nu este piciorul înălțimii duse din A. **26.** Fie P mijlocul lui AB și F proiecția punctului D pe AB și $\{G\} = CP \cap DE$. Atunci $PE = \frac{DC}{2}$. Cum $\Delta PGE \sim \Delta CGD$, rezultă că $\frac{PG}{CG} = \frac{PE}{CD} = \frac{1}{2}$. Întrucât CP este mediană în triunghiul ABC, rezultă că G este centrul de greutate al ΔABC, deci $G \in DE$.

IV.2. Teorema catetei

1. **a** $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm; **b** $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 2\sqrt{6}$ cm; **c** $AB = 5\sqrt{6}$ cm, $AC = 5\sqrt{3}$ cm. **2.** **a** $BC = 27$ cm, $DC = 24$ cm, $AC = 18\sqrt{2}$ cm; **b** $CD = 4$ cm, $BD = 12$ cm, $AB = 8\sqrt{3}$ cm; **c** $DC = 63$ cm, $AB = 42$ cm, $AC = 42\sqrt{3}$ cm. **3.** $6\sqrt{5}$ cm. **4.** $8(5+3\sqrt{5})$ cm. **5.** **a** 16 cm; **b** 4 cm, 12 cm; **c** $h = 4\sqrt{3}$ cm; **d** $8\sqrt{3}$ cm. **6.** **a** 24 cm, $12\sqrt{3}$; **b** 12 cm, $6\sqrt{3}$ cm; **c** $BD = 4$ cm, $CD = 14$ cm, $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $AC = 6\sqrt{7}$ cm. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** $P_{ABC} = 8(\sqrt{2}+1)$ cm. **9.** $AD = 20$ cm, $P_{ABC} = 80$ cm. **10.** $P_{ABCD} = 12(\sqrt{3}+1)$ cm, $A_{ABCD} = 36\sqrt{3}\text{ cm}^2$. **11.** $P_{ABCD} = 60$ cm, $A_{ABCD} = 216\text{ cm}^2$. **12.** Dacă $CE \perp AB$, rezultă $AE = 3k$, $EB = 2k$ și $CE = k\sqrt{6} = AD = 4\sqrt{6}$. Obținem $DC = 12$ cm, $AB = 20$ cm, $BC = 4\sqrt{10}$ cm, $\mathcal{P} = 4(\sqrt{10}+\sqrt{6}+8)$ cm. **13.** Dacă $CE \perp AB$, avem $AE = 9$ cm, $EB = 7$ cm, $DC = 2$ cm, $BC = 4\sqrt{7}$ cm, $CE = 3\sqrt{7}$ cm. Avem $\mathcal{P} = 18 + 8\sqrt{7}$ cm și $\mathcal{A} = 27\sqrt{7}\text{ cm}^2$. **14.** $4(5+3\sqrt{5})$ cm. **15.** **a** $P_{ABC} = 24$ cm, $A_{ABC} = 24\text{ cm}^2$; **b** 3,6 cm și 6,4 cm. **16.** 60 cm. **17.** Se aplică teorema catetei. **18.** Avem: $\Delta CMD \sim \Delta DNB \Rightarrow \frac{MC}{ND} = \frac{MD}{NB} = \frac{DC}{DB}$. Cum $AMDN$ este dreptunghi, obținem $\frac{MC}{MA} = \frac{NA}{NB} = \frac{DC}{DB} = \frac{AC^2}{BC} \cdot \frac{BC}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$. **19.** Dacă $\{F\} = BD \cap AE$, atunci $AB^2 = FB \cdot BD$. Deoarece $\Delta BFE \sim \Delta BCD$, rezultă $\frac{FB}{BC} = \frac{BE}{BD}$, adică $FB \cdot BD = BE \cdot BC$. Prin urmare, $AB^2 = BE \cdot BC$. **20.** **a** $\Delta CDP \sim \Delta ABD$ (U.U), raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$. Rezultă că $AB = 2CD$. **b** $AE = 2$ cm, $EF = 6$ cm, $FB = 4$ cm. Se aplică teorema înălțimii în triunghiul ABD și se obține $AD = 2\sqrt{6}$ cm și $BD = 2\sqrt{30}$ cm.

IV.3. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

1. **a** 10; **b** 15; **c** 20. **2.** **a** 12; **b** 20; **c** 18. **3.** **a** 5; **b** 25; **c** 30; **d** 40; **e** 20; **f** $5\sqrt{5}$; **g** 6; **h** 7. **4.** **a** $9\sqrt{2}$; **b** 4 cm; **c** $8\sqrt{2}$; **d** 20 cm. **5.** **a** 13 cm; **b** 12 cm; **c** 9 cm. **7.** **a** $12\sqrt{2}$ cm; **b** $20\sqrt{2}$ cm; **c** 18 cm; **d** $x\sqrt{2}$ cm. **8.** **a** $8\sqrt{2}$ cm; **b** $18\sqrt{2}$ cm; **c** 30 cm; **d** $x\sqrt{2}$. **9.** **a** $2\sqrt{3}$ cm; **b** $6\sqrt{3}$ cm; **c** 9 cm; **d** $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ cm. **10.** **a** 18 cm; **b** $10\sqrt{2}$ cm; **c** $6\sqrt{2}$ cm. **11.** 10 cm. **12.** 48 cm. **13.** 5 cm. **14.** $BD = 30$ cm, $A_{ABCD} = 600\text{ cm}^2$. **15.** 13 cm. **16.** **a** 48 cm; **b** $12(\sqrt{3}+3)$ cm. **17.** $\mathcal{A}_{MTO} = 84\text{ dm}^2$; $\mathcal{P}_{MTO} = 56$ dm. **18.** $EC = 6$ cm; $AE = 18$ cm; $AD = 12\sqrt{3}$ cm; $DE = 6\sqrt{3}$ cm. **19.** $BC = 12$ cm; $AB = 6$ cm; $AC = 6\sqrt{3}$ cm; $AD = 3\sqrt{3}$ cm. **20.** $4\sqrt{10}$ cm. **21.** $BC = 8$ cm, $AB = 6$ cm, $\mathcal{P} = 28$ cm. **22.** 5 cm. **23.** 4 cm. **24.** 3 cm, $3\sqrt{3}$ cm. **25.** 60°. **26.** $5\sqrt{3}$ cm. **27.** 6 cm. **28.** $3\sqrt{5}$ cm. **29.** $2\sqrt{13}$ cm. **30.** 24 cm. **31.** $2\sqrt{13}$ cm. **32.** 90°, 60°, 30°. **33.** Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. **34.** **a** 10 cm; **b** $10\sqrt{2}$ cm; **c** 16 cm; **d** $10\sqrt{3}$ cm. **35.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 1\,200\text{ cm}^2$; $\mathcal{P}_{ABCD} = 140$ cm. **36.** **a** $8\sqrt{3}$ cm; **b** 3 cm.

37. $\mathcal{P} = 4(3+\sqrt{3})$ cm, $\mathcal{A} = 8\sqrt{3}$ cm^2, $h = 2\sqrt{3}$ cm. **38.** Cum $DE^2 = DG \cdot DF$, rezultă $\sphericalangle DEF = 90°$, $EF = 3\sqrt{5}$ cm și $EG = 2\sqrt{5}$ cm. **39.** Din triunghiul echilateral ABD rezultă $BD = 8$ cm. Din ΔAOB, unde $\{O\} = AC \cap BD$, obținem $AO = 4\sqrt{3}$ cm, rezultă $AC = 8\sqrt{3}$ cm. **40.** $MQ = 24$ cm, $MN = 12$ cm. Fie $\{O\} = MP \cap NQ$; atunci $MO = 6\sqrt{7}$ cm, $MP = 12\sqrt{7}$ cm. **41.** $\mathcal{P} = 32$ cm, $d_1 = 4\sqrt{5}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{41}$ cm. **42.** $h = 12$ cm, $\mathcal{P} = 58$ cm. **43.** **a** Da, $\sphericalangle B = 90°$. **b** Da, $\sphericalangle A = 90°$. **c** Nu. **d** Da. $\sphericalangle C = 90°$. **e** Nu. **44.** $\sphericalangle A = 90°$, $h_A = 14,4$ cm. **45.** Construim $CE \parallel AD$; triunghiul CEB este dreptunghic, cu $\sphericalangle C = 90°$; $h = 12$ cm. **46.** **a** $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm; **b** $AD = 12$ cm. **47.** **a** $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $BC = 20$ cm; **b** $AD = 9{,}6$ cm. **48.** 48 cm. **49.** Din $6^2 + (6\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{3})^2$ rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A. Din $AMPN$ dreptunghi rezultă $MN = AP = 2\sqrt{6}$ cm. **50.** 18 cm, $4(4+\sqrt{97})$ cm. **51.** $4(1+2\sqrt{7})$ cm. **52.** $10\sqrt{3}$ cm. **53.** $5(3+\sqrt{3})$ cm. **54.** 1,4 cm. **55.** $\frac{5}{7}$ cm. **56.** $\frac{12}{7}$ cm. **57.** $AF = 2\sqrt{130}$ cm, $AE = 6\sqrt{10}$ cm, $EF = 4\sqrt{10}$ cm; se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. **58.** $6\sqrt{3}$ cm. **59.** 28 cm. **60.** 8 cm, $2\sqrt{97}$ cm. **61.** 26 cm. **62.** 110 cm, $20\sqrt{5}$ cm, $5\sqrt{41}$ cm. **63.** **a** $10\sqrt{2}$ cm; **b** 12 cm; **c** $5\sqrt{15}$ cm. **64.** **a** 20 cm; **b** $r_1 = 8$ cm, $O_1O_2 = 4$ cm; **c** $MO_1 = 32$ cm, $MO_2 = 8$ cm, $O_1O_2 = 24$ cm. **65.** **a** $AM = BM = 8$ cm, $\mathcal{A}_{OAMB} = 48$ cm^2, $\mathcal{P}_{OAMB} = 28$ cm; **b** $AB = 9{,}6$ cm. **66.** $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm. **67.** 25 cm. **68.** 4,8 cm. **69.** 60 cm. **70.** $9\sqrt{5}$ cm. **71.** $4\sqrt{5}$ cm. **72.** $\mathcal{A}_{ABC} = 32$ cm^2, $\mathcal{P}_{ABC} = 8(\sqrt{5}+1)$ cm. **73.** **a** $AD + BC = AB + CD \Rightarrow AD = BC = 30$ cm. Fie $DH \perp AB$, $H \in AB$; $AH = 18$ cm și $DH = 24$ cm, de unde $R = 12$ cm; **b** $\mathcal{A} = 720$ cm^2, $\mathcal{P} = 120$ cm. **74.** Se aplică teorema catetei în triunghiul dreptunghic ABC. **75.** De exemplu, $AB = 15k$, $AC = 20k$, $BC = 25k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Există o infinitate de triunghiuri! **76.** Dacă $a > b > c$, atunci $\frac{c}{n} = \frac{b}{n+1} = \frac{a}{n+2} = \frac{c+b+a}{3n+3} = \frac{12}{n+1}$; se obține $n = 3$, $c = 9$, $b = 12$, $a = 15$. **77.** **a** $4\sqrt{2}$ cm; **b** 4 cm, $4(2+\sqrt{5})$ cm. **78.** 22 cm. **79.** $\frac{25}{7}$. **80.** Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile ABO, BCO, CDO, DAO. **81.** $35 + 2\sqrt{65} + \sqrt{85}$ cm. **82.** **a** $\frac{1}{AD^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$; **b** se exprimă BD și CD din teorema catetei. **83.** Notăm cu P, Q proiecțiile punctelor B, respectiv C pe AM. Unul dintre unghiurile $\widehat{MAB}$ și $\widehat{MAC}$ este obtuz, iar celălalt ascuțit. Să presupunem că $\widehat{MAB}$ este obtuz. Aplicând teorema lui Pitagora generalizată, obținem $MB^2 = AB^2 + MA^2 + 2AP \cdot MA$ și $MC^2 = AC^2 + MA^2 - 2AQ \cdot MA$. Ținând cont de faptul că $AB = AC$ și $AP = AQ$, prin adunarea celor două egalități rezultă concluzia. **84.** Aplicând teorema lui Pitagora generalizată obținem $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE$ și $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AD \cdot AF$. Adunând relațiile, obținem $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$. **85.** Se aduce relația la una mai simplă ținând cont că numitorul e nenul. După efectuarea calculelor și simplificări obținem $\frac{b^2}{a^2 - c^2} = 1$, de unde rezultă $a^2 = b^2 + c^2$, deci triunghiul este dreptunghic.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** $BC = 15$ cm, $AD = \frac{36}{5}$ cm. **2.** **a** Cu reciproca teoremei lui Pitagora se arată că ΔABC este dreptunghic în A; **b** $AD = \frac{4\sqrt{21}}{7}$ cm, $BD = \frac{8\sqrt{7}}{7}$ cm, $CD = \frac{6\sqrt{7}}{7}$ cm. **3.** **a** $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm; **b** $BD = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 2\sqrt{11}$ cm; **c** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

Testul 2. **1.** $AC = 8$ cm, $AD = \frac{24}{5}$ cm. **2.** **a** Cu reciproca teoremei lui Pitagora se arată că ΔABC este dreptunghic în B; **b** $BD = \frac{\sqrt{30}}{2}$ cm, $CD = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm, $AD = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm. **3.** **a** $CD = 6\sqrt{2}$ cm; **b** $BD = AC = 2\sqrt{14}$ cm; **c** $\frac{6\sqrt{42}}{7}$ cm.

Testul 3. **1.** $P_{ABC} = 48$ cm. **2.** **a** $P_{ABCD} = 4\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)$ cm; **b** $\frac{1}{2}$. **3.** **a** $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm, $A_{ABCD} = 40\sqrt{2}$ cm^2; **b** $AC = 4\sqrt{6}$ cm, $BD = 4\sqrt{11}$ cm.

Testul 4. 1. $h_A = 9$ cm, $h_B = h_C = \frac{72}{5}$ cm. 2. a $P_{ABCD} = 60$ cm, $A_{ABCD} = 216$ cm^2. 3. a $h = 4$ cm, $P_{ABCD} = 4(2+\sqrt{5})$ cm; b $AC = 4\sqrt{2}$ cm.

IV.4. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

1. a $BC = 13$ cm, $\sin B = \frac{12}{13}$, $\sin C = \frac{5}{13}$, $\cos B = \frac{5}{13}$, $\cos C = \frac{12}{13}$, $\text{tg}\, B = \frac{12}{5}$, $\text{tg}\, C = \frac{5}{12}$, $\text{ctg}\, B = \frac{5}{12}$, $\text{ctg}\, C = \frac{12}{5}$; b $AC = 24$ cm, $\sin B = \frac{4}{5} = \cos C$, $\sin C = \frac{3}{5} = \cos B$, $\text{tg}\, B = \frac{4}{3} = \text{ctg}\, C$, $\text{tg}\, C = \frac{3}{4} = \text{ctg}\, B$; c $AC = 21$ cm, $\sin B = \frac{3}{5} = \cos C$, $\sin C = \frac{4}{5} = \cos B$, $\text{tg}\, B = \frac{3}{4} = \text{ctg}\, C$, $\text{tg}\, C = \frac{4}{3} = \text{ctg}\, B$. 3. a $BC = 3\sqrt{3}$ cm, $AD = \sqrt{6}$ cm; b $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\text{tg}B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{ctg}\, B = \sqrt{2}$. 4. a $AC = 16$ cm, $\sin C = 0{,}6$, $\cos C = 0{,}8$, $\text{tg}\, B = \frac{4}{3}$, $\text{ctg}\, B = \frac{3}{4}$; b $BC = 10$ cm, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$, $\text{tg}\, C = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{ctg}\, C = \sqrt{3}$; c $AB = 2\sqrt{2}$ cm, $\sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{tg}\, B = \sqrt{2}$, $\text{tg}\, C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 5. a $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $\cos B = \frac{3}{5}$, $\text{tg}\, C = \frac{3}{4}$; b $BC = 12$ cm, $AC = 6\sqrt{3}$ cm, $\sin C = \frac{1}{2}$, $\text{ctg}\, B = \frac{\sqrt{3}}{3}$; c $AB = 15$ cm, $BC = 3\sqrt{41}$ cm, $\sin B = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos B = \frac{5}{\sqrt{41}}$. 6. $\cos C = \frac{1}{2}$, $AC = 10$ cm, $AB = 5\sqrt{3}$ cm, $\text{tg}\, C = \sqrt{3}$, $\text{ctg}\, C = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 7. a $NP = 16$ cm, $MR = \frac{8\sqrt{3} \cdot 8}{16} = 4\sqrt{3}$ cm, $R = \text{pr}_{NP}M$; b $RP = 4$ cm, $NR = 12$ cm. 8. $BC = 8$ cm, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 30°$. 9. $AC = 5\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45°$. 10. 25 cm. 11. a $6\sqrt{3}$ cm; b 60°; c $\mathcal{A} = 27\sqrt{3}$ cm^2, $\mathcal{P} = 6(3+\sqrt{3})$ cm. 12. $AC = 12\sqrt{6}$ cm, $\mathcal{P} = 48\sqrt{2}$ cm. 13. 1,4. 14. a 4; b $2\sqrt{3}$. 15. a $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$; b $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 8$ cm. 16. $\sin C = \frac{1}{2}$, $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}C = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{ctg}C = \sqrt{3}$, $AB = 6$ cm, $AC = 6\sqrt{3}$ cm. 17. 12 cm, $\sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle C = 60°$, $AB = 6$ cm, $AC = 6\sqrt{3}$ cm. 18. $12(3+\sqrt{3})$ cm; $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 30°$. 19. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 20. $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 30°$; $AB = 6$ cm, $AC = 6\sqrt{3}$ cm. 21. $12(1+\sqrt{3})$ cm. 22. $P_{ABC} = 4(\sqrt{3}+3)$ cm, $A_{ABC} = 8\sqrt{3}$ cm^2. 23. $P_{ABC} = 8(2+\sqrt{2})$ cm, $A_{ABC} = 32$ cm^2. 24. $\sqrt{3}$ cm, $6+4\sqrt{3}$ cm. 25. a $P_{ABC} = 24$ cm, $A_{ABC} = 24$ cm^2; b $P_{ABC} = 10(2+\sqrt{2})$ cm, $A_{ABC} = 50$ cm^2; c $P_{ABC} = 60$ cm, $A_{ABC} = 120$ cm^2; d $P_{ABC} = 2(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})$ cm, $A_{ABC} = 4\sqrt{2}$ cm^2. 26. a $P_{ABC} = 6(3+\sqrt{5})$ cm, $A_{ABC} = 36$ cm^2; b $P_{ABC} = 72$ cm, $A_{ABC} = 216$ cm^2; c $P_{ABC} = 56$ cm, $A_{ABC} = 84$ cm^2; d $P_{ABC} = 4(6+\sqrt{6})$ cm, $A_{ABC} = 20\sqrt{6}$ cm^2. 27. a $A_{ABC} = 54\sqrt{3}$ cm^2; b $\frac{1}{3}$. 28. a $P_{ABC} = 60$ cm; b $A_{ADB} = 96$ cm^2; c $\sin(\sphericalangle BAD) = \frac{4}{5}$, $\cos(\sphericalangle BAD) = \frac{3}{5}$, $\text{tg}(\sphericalangle CAD) = \frac{3}{4}$. 29. a $A_{ABC} = 9$ cm^2; b calcul direct; c $\sin(\sphericalangle DAC) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos(\sphericalangle DAC) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\text{tg}(\sphericalangle DAC) = 2$, $\text{ctg}(\sphericalangle DAC) = \frac{1}{2}$. 30. 36 cm; $\sin B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $\text{tg}B = \frac{3}{4}$, $\text{ctg}B = \frac{4}{3}$. 31. 60 cm. 32. $AB = 8$ cm, $BC = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm, $AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm; $\sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle C = 60°$. 33. $P = 8(2+\sqrt{5})$ cm, $\cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 34. $P = 32$ cm, $\sin C = \frac{4}{5}$. 35. a $AB = 2\sqrt{13}$ cm, $BC = 13$ cm, $CA = 3\sqrt{13}$ cm; b $\sin B + \sin C = \frac{5\sqrt{13}}{13}$. 36. a $P_{ABCD} = 140$ cm; b $AC = 50$ cm; c $\cos(\sphericalangle BCM) = \frac{3}{5}$, $\text{tg}(\sphericalangle MBC) = \frac{3}{4}$. 37. a $AC = 35$ cm; b $A_{ABCD} = 588$ cm^2; c $\frac{9}{16}$. 38. a 60 cm; b 15 cm, 20 cm. 39. 72 cm sau 96 cm. 40. $\frac{10(3+2\sqrt{3})}{3}$ cm. 41. $A'B = \frac{1}{2}AB = 8$ cm; $A'A = 8\sqrt{3}$, $A'C = 24$ cm; $AC = 16\sqrt{3}$ cm; $\sphericalangle A = 90°$. 42. $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. 43. $\mathcal{P} = 3(1+\sqrt{3})$ cm, $BD = \sqrt{6}$ cm. 44. $\mathcal{P} = 2(7+2\sqrt{2})$ cm, $AC = \sqrt{65}$ cm, $BD = 5$ cm. 45. $AC = \sqrt{109}$ cm, $\text{ctg}C = \frac{4}{3}$. 46. a $P_{ABCD} = 4(7+\sqrt{3})$ cm, $A_{ABCD} = 40\sqrt{3}$ cm^2; b $AC = 8\sqrt{3}$ cm, $BD = 4\sqrt{7}$ cm. 47. a $P_{ABCD} = 30$ cm, $A_{ABCD} = 27\sqrt{3}$ cm^2; b $AC = BD = 6\sqrt{3}$ cm; c Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. 48. a $AB = 18$ cm; b $A_{ABCD} = 243\sqrt{3}$ cm^2; c $A_{ABD} = 81\sqrt{3}$ cm^2. 49. a $A_{ABCD} = 48$ cm^2;

b $AC = BD = 4\sqrt{10}$ cm; c $AO = BO = \frac{8\sqrt{10}}{3}$ cm, $CO = DO = \frac{4\sqrt{10}}{3}$ cm. 50. Dacă $CM \perp AB$, din triunghiul ACM rezultă $AM = CM = 8$ cm. Din triunghiul BCM avem $BC = 8\sqrt{10}$ cm. Avem $\sin B = \frac{CM}{BC} = \frac{AN}{AB}$, unde $N = pr_{BC}A$, rezultă $AN = \frac{8\sqrt{10}}{5}$ cm. Dacă $BP \perp AC$, din triunghiul ABP rezultă $BP = 8\sqrt{2}$ cm. 51. Fie $D = pr_{BC}A$; avem $AD = DC = 5\sqrt{3}$ cm; $BD = 5$ cm, $AB = 10$ cm, $\mathcal{P} = 5(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})$ cm. 52. $\cos B = \sin C = \frac{3}{5}$, $\mathcal{P} = 60$ cm, $\mathrm{tg}(\sphericalangle BAD) = \frac{3}{4}$. 53. 135 cm. 54. a Dacă $EF \perp AD$, rezultă $AF = 5$ cm, $EF = 5\sqrt{3}$ cm. În triunghiul EFD, $\sphericalangle F = 90°$, rezultă $DE = 5\sqrt{7}$. b Fie $NP \perp AB$; în triunghiul MNP avem $\sphericalangle P = 90°$, $\sphericalangle M = 60°$; $MN = 10\sqrt{3}$ cm. 55. **Metoda I**: Calcul direct. Se exprimă funcțiile trigonometrice în funcție de laturi; **Metoda II**: a $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x(1+\mathrm{tg}^2 x)} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin^2 x$;
b $(\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$.
56. $b\cos C + c\cos B = b \cdot \frac{b}{a} + c \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2+c^2}{a} = a$. 57. $\cos x = \frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\,x = \frac{3}{4}$. 58. Se folosește egalitatea $\cos x = \sin(90° - x)$. 59. Se folosesc relațiile dintre unghiurile și laturile unui triunghi. 60. 1. 61. $\frac{1}{8}$. 62. 5,8. 63. $AB = 2\sqrt{10}$ cm, $BC = 20$ cm, $CA = 6\sqrt{10}$ cm, $\sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos C = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\mathrm{tg}C = \frac{1}{3}$. 64. $\frac{1}{7}$. 65. a Construim prin D și C paralele la laturile neparalele ale trapezului. Din triunghiurile formate determinăm $\cos A$ și $\cos B$ folosind teorema cosinusului; b $BD = 12\sqrt{2}$ cm, $AC = 20$ cm; c Notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Se arată că triunghiul AOD este isoscel.

IV.5. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Aproximarea în practică a distanțelor folosind relații metrice

1. $BC = 16$ cm, $AC = 8\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle C = 30°$. 2. $AC = 3$ cm, $AB = 3\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle C = 60°$. 3. $AC = 12$ cm, $BC = 12\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle C = 45°$. 4. $AB = AC = 10$ cm, $\sphericalangle B = 45°$. 5. $BC = 12$ cm, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 30°$. 6. $AC = 9\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 30°$. 7. a $BC = 4$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 30°$; b $AB = 15$, $AC = 5\sqrt{3}$, $\sphericalangle C = 60°$; c $AC = 20$, $BC = 20\sqrt{2}$, $\sphericalangle B = 45°$; d $AB = 12\sqrt{3}$, $BC = 24$, $\sphericalangle B = 30°$. 8. $AC = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $\sphericalangle B = 30°$. 9. a $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm, $\sin B = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{3}{5}$; b $AB = 15$ cm, $BC = 25$ cm, $\sin B = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{3}{5}$; c $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm, $BC = 50$ cm, $\sin B = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{3}{5}$; d $AB = 80$ cm, $AC = 60$ cm, $BC = 100$ cm, $\sin B = \frac{3}{5}$, $\sin C = \frac{4}{5}$. 10. a $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 18$ cm, $BC = 12\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle B = 60°$; b $AB = AC = 8$ cm, $BC = 8\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle C = 45°$; c $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 2$ cm, $BC = 4$ cm, $\sphericalangle C = 60°$; d $AB = AC = 6\sqrt{2}$, $BC = 12$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45°$. 11. a $AC = 2\sqrt{2}$ cm, $BC = 3$ cm, $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; b $AB = 9\sqrt{2}$ cm, $BC = 6\sqrt{5}$ cm, $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$; c $AB = 32$ cm, $BC = 16\sqrt{5}$ cm, $\mathrm{ctg}B = 2$; d $AC = 20$ cm, $BC = 4\sqrt{30}$ cm, $\mathrm{ctg}C = \sqrt{5}$. 12. $AC = 30$ cm, $BC = 15\sqrt{5}$ cm, $\mathrm{tg}B = 2 = \mathrm{ctg}C$. 13. $h = 2\sqrt{6}$ cm. Cum $2\sqrt{6} = \sqrt{24} < \sqrt{25} = 5$, rezultă că $h < 5$ cm. 14. $DF = 18$ cm, $EF = 6\sqrt{13}$ cm, $P_{DEF} = 6(5+\sqrt{13})$ cm. Cum $\sqrt{13} < 3{,}61$, rezultă că $P_{DEF} < 6(5+3{,}61)$ cm $= 51{,}66$ cm. 15. $AB = 3\sqrt{2}$ m, $BC = 2\sqrt{3}$ m, $A_{ABC} = 3\sqrt{6}$ m². Cum $\sqrt{6} > 2{,}44$, rezultă că $A_{ABC} > 3 \cdot 2{,}44$ m² $= 7{,}32$ m². 16. a Catetele au lungimile de 8 dam și 16 dam. $A = 64$ dam² $= 64$ ari; b $L_{gard} = 8(3+\sqrt{5})$ dam. Cum $\sqrt{5} < 2{,}24$, rezultă că $L_{gard} < 8(3+2{,}24)$ dam $= 41{,}92$ dam < 42 dam $= 420$ m. 17. a $\sphericalangle ADC = 60°$, $\sphericalangle BDC = 30°$. Rezultă că $\sphericalangle ADB = 30°$. b $CD = 3\sqrt{3}$ m. 18. a $BD = 3\sqrt{13}$ m; b 39 m²; c Dacă M este mijlocul lui BC, atunci $AM = \sqrt{130}$ m $< \sqrt{144}$ m $= 12$ m. 19. a $P_{ABC} = 2(5+\sqrt{7})$ cm, $A_{ABC} = 6\sqrt{3}$ cm²; b $h = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm. 20. $P_{ABC} = 42$ cm, $A_{ABC} = 84$ cm². 21. a $3\sqrt{2}$ cm; b $P_{ABC} = \left(6+3\sqrt{2}+3\sqrt{6}\right)$ cm. 22. a ΔMAC este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MCA$. Dar $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle ACC'$ (alt. int.). Rezultă că

$\sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle ACC' \Rightarrow CA$ este bis. $\sphericalangle MCC'$. Analog se arată că BA este bis. $\sphericalangle MBB'$; **b** $\Delta AC'C \sim \Delta BB'A$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{AC'}{BB'} = \frac{CC'}{AB'}$. Dar $AB' = AC'$. Rezultă apoi cerința. **23.** $R = \sqrt{21}$ cm. **24.** **a** Se arată că ΔADC este echilateral. Rezultă că $DC = AC = x$. Apoi $BD = x$; **b** Se folosește relația $r = \frac{S}{p}$, unde S este aria triunghiului, iar p este semiperimetrul.

IV.6. Calculul elementelor în poligoane regulate

1. **a** $P_4 = 16$ cm, $A_4 = 16$ cm^2; **b** $a_4 = 2$ cm, $R = 2\sqrt{2}$ cm. **2.** **a** $P_3 = 9$ cm, $A_3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2; **b** $a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $R = \sqrt{3}$ cm. **3.** **a** $P_6 = 36$ cm, $A_6 = 54\sqrt{3}$ cm^2; **b** $a_6 = 3\sqrt{3}$ cm, $R = 6$ cm. **4.** **a** $l_3 = 12\sqrt{3}$ cm, $a_3 = 6$ cm; **b** $l_4 = 12\sqrt{2}$ cm, $a_4 = 6\sqrt{2}$ cm; **c** $l_6 = 12$ cm, $a_6 = 6\sqrt{3}$ cm. **6.** **a** $a_4 = 3$ cm, $R = 3\sqrt{2}$ cm, $A_4 = 36$ cm^2; **b** $l_3 = 8$ cm, $a_3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm; $A_3 = 16\sqrt{3}$ cm^2. **7.** $l_6 = \sqrt{2}$ cm, $P_6 = 6\sqrt{2}$ cm, $A_6 = 3\sqrt{3}$ cm^2. **8.** $a_3 = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm, $A_3 = 128\sqrt{3}$ cm^2. **9.** $a_6 = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm, $A_6 = 75\sqrt{3}$ cm^2. **10.** $R = 8$ cm, $A_6 = 96\sqrt{3}$ cm^2. **11.** $l_4 = R\sqrt{2} = 6 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$ cm. **12.** **a** $AB = 6$ cm, $A_{ABEDC} = 9(4+\sqrt{3})$ cm^2. **b** Fie $\{Q\} = BD \cap CE$. Cum $m(\sphericalangle BOC) = 120°$ și $m(\sphericalangle BQC) = 90°$, rezultă că O se află în exteriorul cercului circumscris pătratului. **c** $d(O, DE) = 6+\sqrt{3}$ cm și $OE^2 = (6+\sqrt{3})^2 + 9 = 48 + 12\sqrt{3} < 72 = CE^2$, deci $OE < CE$, de unde $m(\sphericalangle OCE) < m(\sphericalangle EOC)$. **13.** **a** $A = 2\pi$ cm^2; **b** Diagonala unui pătrat mic este egală cu $2\sqrt{2}$ cm. Distanța dintre cele 2 cercuri este egală cu $2\sqrt{2} - 2\text{cm} < 2 \cdot 1{,}42 - 2\text{cm} = 0{,}84$ cm. **14.** $A = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB = 12$ cm; $r = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$ cm; $A_{MNPQ} = (r\sqrt{2})^2 = 24$ cm^2.
15. $\Delta MAB \sim \Delta MCF \Rightarrow MC = 2MA$, de unde rezultă că $MA = 4\sqrt{3}$ cm. Analog $CN = 4\sqrt{3}$ cm, deci $MN = 4\sqrt{3}$ cm. În mod asemănător, se arată că toate laturile hexagonului de vârfuri M, N, P, Q, R, S au lungimea $4\sqrt{3}$ cm. Apoi, avem: $\sphericalangle AMB = 180° - 2 \cdot \sphericalangle CAB = 120°$ și la fel și pentru celelalte.
16. $AB = r_1\sqrt{2} = r_2\sqrt{3} \Rightarrow r_1 = 6\sqrt{2}$ cm, $r_2 = 4\sqrt{3}$ cm. Notând $\{M\} = O_1O_2 \cap AB$, rezultă $MO_1 = a_4 = 6$ cm și $MO_2 = a_3 = 2\sqrt{3}$ cm, deci $O_1O_2 = 6 + 2\sqrt{3}$ cm. **17.** **Cazul I:** Centrul cercului se află în interiorul trapezului $ABCD$. Fie $OM \perp AB, ON \perp CD, M \in AB, N \in CD$. Avem $AB = 10\sqrt{3}$ cm și $CD = 10$ cm. Triunghiul OCD este echilateral și $ON = 5\sqrt{3}$ cm. În triunghiul OAM, cu teorema lui Pitagora obținem $OM = 5$ cm. Obținem $MN = 5(\sqrt{3}+1)$ cm și $A_{ABCD} = 50(2+\sqrt{3})$ cm^2. **Cazul al II-lea:** Centrul cercului se află în exteriorul trapezului $ABCD$. Obținem $MN = 5\left(\sqrt{3}-1\right)$ cm și $A_{ABCD} = 50$ cm^2. **18.** $l_4 = R\sqrt{2} \Rightarrow A_4 = 2R^2$, unde l_4 este latura pătratului înscris în cerc, iar A_4 aria acestuia. $L_4 = 2R \Rightarrow A_4' = 4R$, unde L_4 este pătratul circumscris cercului, iar A_4' este aria acestuia. Rezultă că $\frac{A_4'}{A_4} = 2$. **19.** $A_{BCDFE} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2}R^2$. **20.** $l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$.

IV.7. Ariile poligoanelor studiate (opțional)

1. **a** 24 cm^2; **b** 15 cm^2; **c** $10\sqrt{3}$ cm^2; **d** $9\sqrt{3}$ cm^2; **e** 6 cm^2; **f** 96 cm^2; **g** $\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30°$; 3 cm^2. **2.** **a** $l = 10$ cm, $h = 5\sqrt{3}$ cm; **b** $l = 2\sqrt{3}$ cm, $h = 3$ cm; **c** $l = 7\sqrt{2}$ cm, $h = \frac{7\sqrt{6}}{2}$ cm. **3.** **a** 32 cm^2; **b** $9\sqrt{5}$ cm^2. **4.** **a** $A_{ABM} = 30$ cm^2; $A_{ABC} = 60$ cm^2; **b** 5 cm. **5.** Din $\Delta GMN \sim \Delta AMB$ avem $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$; $A_{ABM} = 180$ cm^2 $A_{ABC} = 360$ cm^2. **6.** **a** 40 cm^2; **b** $15\sqrt{2}$ cm^2; **c** 21 cm^2; **d** $30\sqrt{2}$ cm^2; **e** $A_{ABC} = 12\sqrt{14}$ cm^2, $A_{ABCD} = 24\sqrt{14}$ cm^2, **f** $20\sqrt{5}$ cm^2. **7.** **a** 36 cm^2; **b** 1200 cm^2; **c** 32 cm^2; **d** $48\sqrt{7}$ cm^2. **8.** **a** 60 cm^2; **b** $10\sqrt{2}$ cm^2; **c** $162\sqrt{3}$ cm^2; **d** 96 cm^2; **e** $50\sqrt{3}$ cm^2. **9.** **a** 100 cm^2; **b** 14 cm^2; **c** 240 cm^2; **d** 64 cm^2. **10.** Din triunghiul ABD echilateral cu $AB = l$ rezultă $BP = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $PD = \frac{l}{2}$. $A_{ABCD} = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$, $A_{BPDQ} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, $A_{ABP} = \frac{l^2\sqrt{3}}{8}$. **11.** $A = \frac{3}{4}AB \cdot \frac{5}{3}AD = \frac{5}{4}AB \cdot AD = 165\sqrt{3}$ cm^2. **12.** **a** 13 cm; **b** 10 cm;

c $12\sqrt{2}$ cm; d $8\sqrt{2}$ cm. 13. a 90 cm²; b $h=\sqrt{8\cdot 18}=12$ cm, $\mathcal{A}=156$ cm². c Fie $CE\perp AB$ rezultă $CE=\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm, $DC=\frac{7}{2}$ cm, $\mathcal{A}=\frac{69\sqrt{7}}{8}$ cm². 14. a 440 cm²; b $\sphericalangle ACB=90°$, $h=4{,}8$ cm, $DC=2{,}8$ cm, $\mathcal{A}=30{,}72$ cm²; c $h=15$ cm, $DC=20\sqrt{3}$ cm, $\mathcal{A}=225\sqrt{3}$ cm². 15. a Dacă $CE\parallel AD$, $E\in AB$, rezultă $\mathcal{A}_{CEB}=54\sqrt{6}$ cm² și $h=6\sqrt{6}$ cm, $\mathcal{A}=96\sqrt{6}$ cm². b Dacă $BE\parallel AD$, $E\in CD$, rezultă triunghiul BEC dreptunghic în B, $h_{trapez}=7{,}2$ cm, $\mathcal{A}=97{,}2$ cm². 16. 30 cm². 17. 8 cm. 18. 15 cm. 19. 6 cm. 20. 24 cm². 21. $6(2+\sqrt{2})$ cm. 22. $4\sqrt{3}$ cm². 23. 30 cm. 24. 48 cm². 25. 18 cm. 26. a 10 cm²; b 18 cm²; c $24\sqrt{2}$ cm². 27. $6\sqrt{3}$ cm², $2(5+\sqrt{7})$ cm, $\frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm. 28. $4\sqrt{5}$ cm². 29. 24 cm². 30. $72\sqrt{3}$ cm², $12(3+\sqrt{3})$ cm. 31. 54 cm², 36 cm. 32. $\frac{200\sqrt{7}}{3}$ cm². 33. $32\sqrt{3}$ cm², $8(3+\sqrt{3})$ cm. 34. $6\sqrt{3}$ cm². 35. $27\sqrt{2}$ cm². 36. 60 cm². 37. $\mathcal{A}_{ABCD}=2\mathcal{A}_{ABC}=24$ cm². 38. $\mathcal{A}_{ABCD}=2\mathcal{A}_{ABC}=60\sqrt{2}$ cm². 39. $\mathcal{A}_{ABCD}=30\sqrt{3}$ cm². 41. $\mathcal{A}_{ABCD}=4\mathcal{A}_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin 30°=24$ cm². 42. Fie $\{O\}=AC\cap BD$. Dacă $u=\sphericalangle AOB$, $\mathcal{A}_{ABCD}=4\cdot\mathcal{A}_{AOB}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{2}\cdot\frac{BD}{2}\cdot$ $\cdot\sin u=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin u$. 43. 30°, 150° 44. 30°. 45. 48 cm². 46. $36\sqrt{3}$ cm². 47. 96 cm². 48. 25,2 cm. 49. $MD=4$ cm, $\mathcal{A}_{ABC}=32\sqrt{3}$ cm². 50. $\mathcal{P}=60$ cm, $d(A,BC)=12$ cm. 51. 48 cm. 52. 15 cm, 20 cm, 25 cm; $\mathcal{A}=150$ cm². 53. $\mathcal{A}=80$ cm², $\mathcal{P}=4(5+3\sqrt{5})$ cm. 54. $8(1+\sqrt{3})$ cm². 55. Dacă AD este mediana din A, atunci $\frac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{ADC}}=\frac{DB\cdot d(A,BC)}{DC\cdot d(A,BC)}=\frac{DB}{DC}=1$. 56. Ca la problema anterioară. 57. $\frac{3}{4}$. 58. $\frac{\mathcal{A}_{APQ}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{AP\cdot AQ\cdot\sin A}{AB\cdot AC\cdot\sin A}=\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}=pq$. 59. $\frac{2}{3}$. 60. 24 cm. 61. 5 cm². 62. 96 cm². 63. $\frac{3(3+\sqrt{3})}{4}$ cm². 64. $\frac{1}{5}$. 65. $\frac{1}{5}$. 66. $\frac{3}{14}$. 67. $40\sqrt{2}$ cm². 68. 8 cm². 69. 192 cm². 70. $48\sqrt{3}$ cm². 71. $8\sqrt{3}$ cm². 72. 6 cm². 73. 84 cm². 74. 100 cm². 75. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal. Dacă $\{O\}=AC\cap BD$, atunci $\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_{ABD}+\mathcal{A}_{CBD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot OA+\frac{1}{2}\cdot BD\cdot OC=\frac{1}{2}BD\cdot(OA+OC)=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$ 76. 600 cm². 77. 24 cm². 78. a 30 cm²; b 15 cm². 79. a $32\sqrt{3}$ cm²; b $6\sqrt{3}$ cm². 80. 128 cm². 81. $27\sqrt{3}$ cm². 82. a Cu teorema catetei în ADB și ADC găsim $AD^2=2\sqrt{3}\cdot AB$, $AD^2=2\cdot AC$. Din ΔADE, $\sphericalangle E=90°$, rezultă $AD^2=16$. Avem $AB=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm, $AC=\frac{16}{2}=8$ cm, $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm². b $AD^2=x^2+y^2$, $AD^2=y\cdot AB$, $AD^2=x\cdot AC$, $\mathcal{A}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{(AD^2)^2}{2xy}=\frac{(x^2+y^2)^2}{2xy}$. 83. 10 cm. 84. $\frac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{ADC}}=\frac{DB}{DC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\mathrm{tg}^2 C$. 85. Dacă $AM=x$, atunci $BC=2x$ și $DM=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, deci $\frac{\mathcal{A}_{AMD}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{DM}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. 86. Cu $AD=x$, atunci $AC^2-AB^2=(x^2+49)-(x^2+9)=40$ și $(AC+AB)(AC-AB)=40$. Cum $AC+AB=20$, avem $AC-AB=2$, deci $AB=9$ și $AC=11$. Se obține $\mathcal{A}_{ABC}=30\sqrt{2}$. 87. Dacă $D=\mathrm{pr}_{BC}A$ și $AD=x$, atunci $AB=2x$, $AC=x\sqrt{2}$ și $BC=x(1+\sqrt{3})$. Rezultă $x=4$ cm și $\mathcal{A}_{ABC}=8(1+\sqrt{3})$ cm². 88. Întrucât $AD=\frac{BC}{4}$, rezultă că $\mathcal{A}_{ABC}=2AD^2=32$ cm². 89. Dacă A' este mijlocul laturii BC și $S=\mathcal{A}_{ABC}$, atunci $\mathcal{A}_{AA'B}=\frac{S}{2}$ și $\frac{\mathcal{A}_{GAB}}{\mathcal{A}_{AA'B}}=\frac{AG}{AA'}=\frac{2}{3}$, de unde rezultă că $\mathcal{A}_{GAB}=\frac{S}{3}$. Analog, $\mathcal{A}_{GAC}=\mathcal{A}_{GBC}=\frac{S}{3}$. 90. $AB=12$ cm, $BC=10$ cm. 91. Întrucât P este centrul de greutate al ΔABC și Q este centrul de greutate al ΔACD, rezultă că $PQ=\frac{1}{3}BD$. Ca urmare, $\mathcal{A}_{APQ}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABD}=\frac{1}{6}\mathcal{A}_{ABCD}$.

92. Avem $\mathcal{A}_{AOB}=\mathcal{A}_{BOC}\Rightarrow\frac{1}{2}OA\cdot d(B,AC)=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot d(B,AC)\Rightarrow OA=OC$. Analog, se arată că O este mijlocul diagonalei BD. 93. $\mathcal{A}_{MDP}=\mathcal{A}_{PCBM}=96$ cm², $MN=8\sqrt{2}$ cm, $NP=4\sqrt{5}$ cm. Din triunghiul MNP, folosind teorema bisectoarei, rezultă $\frac{MQ}{QP}=\frac{MN}{NP}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$. Relația din enunț rezultă din faptul că $1<\frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}$. 94. a $\Delta AMD\equiv\Delta BMN$ (U.L.U), rezultă

că $AD = BN$, deci $BC = BN$. Dar $BM = BE$, deci diagonalele patrulaterului $ECMN$ se înjumătățesc, ceea ce înseamnă că $ECMN$ este paralelogram. **b** $\frac{A_{BMN}}{A_{AECD}} = \frac{1}{5}$. **95.** Exprimăm A_{ABCD} ca sumă a ariilor celor două triunghiuri care se formează ducând una dintre diagonale. Aria unui triunghi este cel mult egală cu semiprodusul laturilor. Deci $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} \le \frac{1}{2}(ab + cd)$ și $A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{BCD} \le \frac{1}{2}(ad + bc)$. Adunăm cele două relații și obținem $2A_{ABCD} \le \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da) = \frac{1}{2}(a + c)(b + d)$. Notăm $a + c = x$ și $b + d = y$. Folosim inegalitatea $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, și rezultă inegalitatea cerută.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** $BC = 3\sqrt{5}$ cm, $\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **2. a** Cu teorema lui Pitagora generalizată găsim $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC$. Se obține ecuația $(BC - 5)^2 = 225$, de unde $BC = 20$ cm. **b** Cu reciproca teoremei lui Pitagora se arată că triunghiul ABC este dreptunghic în A. **3. a** $32\sqrt{3}$ cm^2; **b** $4\sqrt{13}$ cm; **c** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm.

Testul 2. **1.** $AC = 12$ cm; $\text{tg}B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}$. **2. a** Avem $\frac{CD}{AD} = \text{tg}(\sphericalangle CAD) = \text{tg}(\sphericalangle ABC) = \frac{AC}{AB}$; se obține $AC = 30$ cm și $\mathcal{A}_{ABC} = 600$ cm^2. **b** $BC = 50$ cm, $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$. **3. a** Linia mijlocie este $\frac{1}{2}(AB + CD) = 18$ cm. **b** $DC \parallel AB \Rightarrow \Delta EDC \sim \Delta EAB \Rightarrow \frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{2}$, de unde $EA = EB = 24\text{cm} = AB$, adică triunghiul ABE este echilateral. **c** $\mathcal{A}[ABE] = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$ cm^2.

Testul 3. **1.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}$ cm. **2.** 8 cm, $8\sqrt{3}$ cm. **3. a** Avem $\Delta ABE \equiv \Delta ADF$ (cazul C.C.), de unde $BE = DF$. **b** Este suficient să arătăm că $BD \parallel EF$, relație care rezultă din reciproca teoremei lui Thales, ținând cont că $\frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AE}$. **c** Notând $AB = a$, rezultă $AE = AF = AC = BD = a\sqrt{2}$ și $EF = 2a$. Notând cu O și M mijloacele laturilor BD și EF, avem $OM \perp BD$, deci înălțimea trapezului este $OM = OA + AM = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{2a}{2} = \frac{a(2 + \sqrt{2})}{2} = \frac{EF + BD}{2}$, deci linia mijlocie a trapezului $BDFE$ are aceeași lungime cu înălțimea OM.

Testul 4. **1.** $BC = 10$ cm, $h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 4{,}8$ cm. **2.** $36\sqrt{3}$ cm^2. **3. a** $\mathcal{A}[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = 120$ cm^2. **b** $\mathcal{A}[ABM] = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BM = 60$ cm^2. **c** $\mathcal{A}[ABG] = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot d(B, AG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot AM \cdot d(B, AM) = \frac{2}{3}\mathcal{A}[ABM] = 40$ cm^2.

Testul 5. **1.** $\sphericalangle C = 60°$, $AB = 6\sqrt{6}$ cm. **2.** $7\sqrt{3}$ cm^2. **3. a** $\cos\widehat{ABD} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle B = 60°$. Cum $\sphericalangle C = 45°$ avem $\sphericalangle A = 75°$. **b** În triunghiul ABD, $\sin B = \frac{AD}{AB}$, de unde obținem $AD = 6\sqrt{3}$ cm. **c** $CD = AD = 6\sqrt{3}$ cm; $AC = AD\sqrt{2} = 6\sqrt{6}$ cm; $P[ADC] = 6\sqrt{3}(\sqrt{2} + 2)$cm; **d** $\mathcal{A}_{ABC} = 18\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$ cm^2.

Testul 6. **1.** $BD = 16$ cm, $CD = 5$ cm, $BC = 21$ cm. **2.** $200(\sqrt{3} + 1)$ cm^2. **3. a** Prin calcul se verifică relația $BC^2 = AB^2 + AC^2$. **b** $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$ și $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$. **c** Dacă M este mijlocul laturii AC, atunci $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = 5\sqrt{13}$ cm.

Testul 7. **1.** $BC = 20$ cm, $AC = 16$ cm, $\mathcal{P}_{ABC} = 48$ cm. **2.** 10 cm^2. **3. a** $\mathcal{A}[ABCD] = 2\mathcal{A}[ABD] = 2 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3}$cm^2. **b** $\widehat{EBN} = 360° - \widehat{ABE} - \widehat{NBC} - \widehat{ABC} = 60°$; **c** ΔEBN este echilateral, de latură 10, deci $\mathcal{A}[BEN] = 25\sqrt{3}$cm^2. Atunci: $\mathcal{A}[ADCMNEF] = \mathcal{A}[ABCD] + \mathcal{A}[ABEF] + \mathcal{A}[BCMN] + \mathcal{A}[BEN] = 25(8 + 3\sqrt{3})$cm^2.

Testul 8. 1. $BC = 5$ cm, $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} = 0{,}8$. 2. 6 cm^2.

3. a $\mathcal{A}[AEF] = \mathcal{A}[ABCD] - \mathcal{A}[CEF] - 2\mathcal{A}[ADF] = a^2 - \frac{a^2}{18} - \frac{2a^2}{3} = \frac{5a^2}{18}$. b $AF = \frac{a\sqrt{13}}{3} \Rightarrow d(E, AF) = \frac{2\mathcal{A}[AEF]}{AF} =$
$= \frac{5a\sqrt{13}}{39}$.

IV.8. Probleme cu caracter aplicativ

1. Aria pătratului este 14 400 cm^2, deci pentru vopsirea unei fețe se consumă 960 g de vopsea. Pentru vopsirea tablei este nevoie de 1,920 kg vopsea. 2. $AB = 4\sqrt{3} = 6{,}92$ m. 3. Avem $DE = AD\sqrt{2}$, de unde rezultă $AD = 10$ m. Aria acoperișului este $2\mathcal{A}_{ABCD} + 2\mathcal{A}_{ADE}$; se obține $\mathcal{A} = 700$ m^2. Cantitatea de tablă necesară este $700 + 5\% \cdot 700 = 735$ m^2. 4. Înălțimea trapezului care reprezintă terenul este 300 m, iar aria 102 000 m^2, adică 10,2 ha. În condiții ideale, fermierul ar fi trebuit să obțină 3 672 kg. Exprimat în procente, randamentul este $\frac{3213}{3672} \cdot 100 = 87{,}5\%$. 5. a $\operatorname{tg}(\sphericalangle BDC) = \frac{BC}{CD} \Rightarrow CD = 120\sqrt{3}$ m $\Rightarrow AB = 120\sqrt{3}$ m. b Aria terenului este $AB \cdot BC = 14400\sqrt{3}$ cm^2. 6. a Vom exprima lungimile în hm; atunci $AD = AB = 25$ hm. Notând $CD = b$, se obține $AH = \frac{b+25}{4}$ și $DH = \frac{b-25}{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ADH se obține $b = 55$ hm și $S_{ABCD} = 800$ ha. Dacă notăm cu s aria terenului deținut de primul fermier, atunci al doilea fermier are un teren cu aria $2s$, iar al treilea cu aria $2s + 50$. Avem $s + 2s + 2s + 50 = 800$, deci primul fermier are $s = 150$ ha, al doilea fermier are 300 ha, iar al treilea are 350 ha. b Primul fermier obține $150 \cdot 1{,}9 = 285$ t, al doilea fermier obține $300 \cdot 2{,}25 = 675$ t, iar al treilea fermier obține $350 \cdot 2{,}4 = 840$ t. În total, avem $285 + 675 + 840 = 1800$ t. 7. a Cu notațiile din figură, avem $\sphericalangle VBC = \sphericalangle VAB + \sphericalangle AVB$ și $\sphericalangle AVB = 15° = \sphericalangle VAB$. Triunghiul BAV este isoscel, deci $VB = d = 41{,}4$ m. Triunghiul dreptunghic VBC are unghiul B de 30°, deci $CV = \frac{1}{2}VB = 20{,}7$ m. Atunci $H = h + CV = 22$ m. b Din triunghiul dreptunghic CAV rezultă $\operatorname{ctg} u° = \frac{CA}{CV}$, deci $CA = CV \cdot \operatorname{ctg} u°$, iar din triunghiul dreptunghic CBV obținem $\operatorname{ctg} v° = \frac{CB}{CV}$, adică $CB = CV \cdot \operatorname{ctg} v°$. Atunci $d = AB = CA - CB = CV(\operatorname{ctg} u° - \operatorname{ctg} v°) = (H - h)(\operatorname{ctg} u° - \operatorname{ctg} v°)$.

8. a $\sin\widehat{TOE} = \frac{ET}{OE} \Rightarrow OE = \frac{1800}{\sin 37°} = 3000$ m, deci $OT = \sqrt{OE^2 - TE^2} = 2400$ m. b Viteza echipajului este $v = \frac{2400 \text{ m}}{2 \text{ min}} = \frac{2400 \text{ m}}{120 \text{ s}} = 20$ m/s $= 72$ km/h. c Fie P punctul în care ar trebui să se afle echipajul. Distanța de parcurs până la țintă ar fi $PT = v \cdot t = 20 \text{ m/s} \cdot 90\text{s} = 1800$ m, adică lungimea segementului TE, deci unghiul este $\widehat{EPT} = 45°$. 9. a Pe scară sunt 10 suprafețe „orizontale" și 10 suprafețe „verticale", deci suprafața covorului este $10 \cdot 125 \cdot 24 + 10 \cdot 125 \cdot 18 = 52500$ $cm^2 = 5{,}25$ m^2. b $\sin\alpha = \frac{a}{d}$, unde d este diagonala triunghiului dreptunghic de catete a și l. Obținem $d = \sqrt{a^2 + l^2} = 30$ cm și $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. 10. a 150 pași/min × 0,8 m = 120 m/min = 2 m/s. b Diagonala pieței are lungimea $d = 40\text{s} \cdot 2\text{m/s} = 80$ m, deci lungimea laturii pieței este $40\sqrt{2}$ m. Aria pieței este 3 200 m^2. c Aria unei dale este $25 \cdot 80 = 2000$ $cm^2 = 0{,}2$ m^2. Sunt necesare $16000 \cdot \frac{103}{100} = 16480$ de dale. 11. Fiecare dreptunghi albastru are lățimea de 1,2 m și lungimea de 1,7 m, deci are aria de 2,04 m^2. Ca urmare, aria pânzei albastre trebuie să fie de 8,16 m^2. Aria suprafeței steagului este 12 m^2, deci aria porțiunii albe este de 3,84 m^2.

IV.9. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. b $\frac{MD}{h_c}+\frac{ME}{h_b}+\frac{MF}{h_c}=\frac{MD\cdot BC}{h_c\cdot BC}+\frac{ME\cdot AC}{h_b\cdot AC}+\frac{MF\cdot AB}{h_c\cdot AB}=\frac{\mathcal{A}_{MBC}}{\mathcal{A}_{ABC}}+\frac{\mathcal{A}_{MAC}}{\mathcal{A}_{ABC}}+\frac{\mathcal{A}_{MAB}}{\mathcal{A}_{ABC}}=1$. De aici rezultă și concluzia pentru punctul a, în care $h_a=h_b=h_c$. c Avem $\frac{ME}{h_c}\le\frac{ME}{h_b}\le\frac{ME}{h_a}$, $\frac{MD}{h_c}\le\frac{MD}{h_a}$ și $\frac{MF}{h_c}\le\frac{MF}{h_a}$. Prin adunarea inegalităților obținem $\frac{MD}{h_c}+\frac{ME}{h_c}+\frac{MF}{h_c}\le\frac{MD}{h_a}+\frac{ME}{h_b}+\frac{MF}{h_c}\le\frac{MD}{h_a}+\frac{ME}{h_a}+\frac{MF}{h_a}$, de unde, ținând cont de relația $\frac{MD}{h_a}+\frac{ME}{h_b}+\frac{MF}{h_c}=1$, se obține $h_a\le MD+ME+MF\le h_c$. **2.** a În ΔBAM, dreptunghic în M, avem $\sphericalangle BAM=15°$, deci $\sphericalangle ABM=75°$. ΔBCD este dreptunghic isoscel de bază BD, de unde $\sphericalangle CBD=45°$ și $\sphericalangle MBN=60°$. Triunghiul ΔMBN este dreptunghic în N și $\sphericalangle BMN=30°$. b $\sphericalangle BCD=\sphericalangle CBA=90°$; rezultă $AB\parallel CD$, deci $ABDC$ este trapez. Patrulaterul $ABDC$ nu poate fi paralelogram deoarece $\sphericalangle CBD\ne\sphericalangle ACB$, deci AC și BD nu pot fi paralele. c $AC=16$. **3.** a Din $BD\parallel EH$ și $BH\parallel DE$ rezultă că $BDEH$ este paralelogram. Deoarece BE este bisectoarea unghiului ABC rezultă că $BDEH$ este romb. b Fie $\{O\}=BE\cap DH$. Atunci FO este mediană și înălțime în ΔFBE, deci FBE este triunghi isoscel de bază BE. Deoarece $\sphericalangle AEB=60°$, deducem că triunghiul FBE este echilateral, deci $\sphericalangle FBD=90°$. Atunci B este ortocentrul triunghiului FBC și distanța de la C la B este $BC=2AB=4$ cm. **4.** $AC=2AB=8$ cm, $\mathcal{A}_{ABC}=16\text{ cm}^2$, $AD=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ cm. **5.** Din $OP\parallel CD$ și $QO\parallel CB$ rezultă $\Delta DMQ\sim\Delta NMO\sim\Delta NBP$. Folosind faptul că raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare, avem: $\frac{\mathcal{A}_{DMQ}}{\mathcal{A}_{MON}}=\left(\frac{DM}{MN}\right)^2$ și $\frac{\mathcal{A}_{BNP}}{\mathcal{A}_{MON}}=\left(\frac{BN}{MN}\right)^2$, de unde $\frac{\mathcal{A}_{DMQ}+\mathcal{A}_{BNP}}{\mathcal{A}_{MON}}=\frac{DM^2+BN^2}{MN^2}$. Ca urmare, $\mathcal{A}_{DMQ}+\mathcal{A}_{BNP}=\mathcal{A}_{MON}$ dacă și numai dacă $DM^2+BN^2=MN^2$. **6.** Avem $AB=3k$, $AC=2k$, $k>0$. Din teorema cosinusului aplicată în triunghiul ABC rezultă $BC^2=7k^2$, de unde $AC^2+2BC^2=2AB^2=18k^2$. **7.** a Avem $AB=18$. Prin calcul rezultă $AD=9$, $QD=3$, $AD=9$. Din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul QDC cu transversala B-G-N rezultă că $NC=NQ$, adică N este mijlocul segmentului QC, deci $CE=3NC$. b Deoarece PN este linie mijlocie în triunghiul AQC, rezultă că $PN=\frac{AQ}{2}=QD$ și $PN\parallel AQ$. c Avem $PN=QD=3$. Din triunghiul AQP, cu teorema cosinusului, rezultă $QP^2=AQ^2+AP^2-2\cdot AP\cdot AQ\cdot\cos60°=63$, deci perimetrul este egal cu $6(1+\sqrt{7})$. **8.** Cum ABC este triunghi dreptunghic, avem $h=\frac{bc}{a}$ și, întrucât $a<b+c$, rezultă $h>\frac{bc}{b+c}$. **9.** a Cu notațiile consacrate, dacă $b=c\sqrt{2}$, atunci $a=c\sqrt{3}$; mediana din B are lungimea $\frac{c\sqrt{6}}{2}$, iar mediana din A lungimea $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Notând cu G centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă $AG=\frac{c\sqrt{3}}{3}$, $BG=\frac{c\sqrt{6}}{3}$, de unde $AG^2+BG^2=c^2=AB^2$, adică $AG\perp BG$. b Mediana din C are lungimea $\frac{3c}{2}$. Întrucât $\frac{a}{m_c}=\frac{b}{m_b}=\frac{c}{m_a}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, rezultă că triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul de laturi m_c, m_b, m_a. **10.** a Egalitatea dată se obține împărțind membru cu membru relațiile obținute din teorema catetei pentru AB și AC. b $AC^2\cdot BD^2+AB^2\cdot CD^2=\frac{AC^2\cdot AB^4+AB^2\cdot AC^4}{BC^2}=AC^2\cdot AB^2=BC^2\cdot AD^2$. **11.** Relația din enunț este echivalentă cu $\frac{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}{2}=\frac{(1+\sqrt{2})bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$, sau, mai departe, cu $(c-b)^2+(c+b)\sqrt{c^2+b^2}=2bc\sqrt{2}$. Dar $(c+b)\sqrt{c^2+b^2}\ge2bc\sqrt{2}$, deoarece $b+c\ge2\sqrt{bc}$ și $b^2+c^2\ge2bc$, cu egalitate dacă $b=c$, adică atunci când triunghiul este dreptunghic isoscel. **12.** Fie $AP=2x$, $BP=2y$; atunci $MD=\sqrt{x^2+y^2}$, $ME=\sqrt{x^2+y^2}$ și $DE=\sqrt{2(x^2+y^2)}$, de unde rezultă că triunghiul DME este dreptunghic isoscel, cu unghiul drept M. **13.** Cum $\sqrt{(b-3\sqrt{2})^2+1}+\sqrt{(c-2\sqrt{3})^2+4}\ge1+2=3$, ținând seama de ipoteză rezultă $b=3\sqrt{2}$ și $c=2\sqrt{3}$, iar din teorema lui Pitagora, $a=\sqrt{30}$.

14. Avem: $\frac{MA}{MA'}=\frac{\mathcal{A}_{MAB}}{\mathcal{A}_{MA'B}}=\frac{\mathcal{A}_{MAC}}{\mathcal{A}_{MA'C}}=\frac{\mathcal{A}_{MAB}+\mathcal{A}_{MAC}}{\mathcal{A}_{MA'B}+\mathcal{A}_{MA'C}}=\frac{2S}{3}:\frac{S}{3}=2$, unde $A'\in BC$, $S=\mathcal{A}_{ABC}$. Rezultă: $\mathcal{A}_{MA'B}=\frac{1}{2}\mathcal{A}_{MAB}=\frac{S}{6}$ și $\mathcal{A}_{MA'C}=\frac{1}{2}\mathcal{A}_{MAC}=\frac{S}{6}$. Ca urmare, $\mathcal{A}_{AA'B}=\mathcal{A}_{AA'C}$ și $\frac{A'B}{A'C}=\frac{\mathcal{A}_{AA'B}}{\mathcal{A}_{AA'C}}=1$, adică A' este mijlocul laturii BC. **15.** Dacă $D=\text{pr}_{BC}A$

și $Q = pr_{BC}P$, atunci $\Delta A'PQ \sim \Delta A'AD$, de unde rezultă $\frac{PA'}{AA'} = \frac{PQ}{AD}$ și atunci $\frac{\mathcal{A}_{PBC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot PQ}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD} = \frac{PQ}{AD} = \frac{PA'}{AA'}$.

16. În baza problemei anterioare, avem: $\frac{MA'}{AA'} = \frac{\mathcal{A}_{MBC}}{\mathcal{A}_{ABC}}$, $\frac{MB'}{BB'} = \frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}}$, $\frac{MC'}{CC'} = \frac{\mathcal{A}_{AMB}}{\mathcal{A}_{ABC}}$, $\frac{\mathcal{A}_{MBC}}{\mathcal{A}_{ABC}} + \frac{\mathcal{A}_{MCA}}{\mathcal{A}_{ABC}} + \frac{\mathcal{A}_{MBA}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1$.

17. Notând $\{A'\} = AM \cap BC$, $\{B'\} = BM \cap CA$ și $\{C'\} = CM \cap AB$, avem: $\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{AM}{AA'} = 1 - \frac{MA'}{AA'} = 1 - \frac{\mathcal{A}_{MBC}}{S}$, unde $S = \mathcal{A}_{ABC}$.

Analog se obține $\frac{B_1B_2}{CA} = 1 - \frac{\mathcal{A}_{MCA}}{S}$ și $\frac{C_1C_2}{AB} = 1 - \frac{\mathcal{A}_{MAB}}{S}$. Adunând membru cu membru cele trei egalități, rezultă:

$\frac{A_1A_2}{BC} + \frac{B_1B_2}{CA} + \frac{C_1C_2}{AB} = 2$.

CAPITOLUL V. Subiecte pentru evaluările finale

V.1. Variante de subiecte pentru teză

Varianta 1

I 1. a 6; **b** 10; **c** $\{-4\}$. **2. a** de ex. $\sqrt{26}$; **b** $\sqrt{5}$ sau $-\sqrt{5}$; **c** 2. **3. a** 5; **b** 6; **c** 12.

II 4. a $x = 2$; **b** 60 lei. **5.** $S = \{(3;1)\}$. **6. a** $P_{ABCD} = 4(2+\sqrt{5})$ cm; $\sin(\sphericalangle DBC) = \frac{2}{3}$; **b** $DE = 5$ cm.

Varianta 2

I 1. a 10; **b** -1; **c** $\sqrt{10}$. **2. a** de ex. $(3,0)$; **b** -1; **c** 6. **3. a** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b** 36; **c** 12 cm².

II 4. a $A = \{1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}\} \Rightarrow S = 2$; **b** $4\sqrt{3}$ cm². **5. a** Diferența este 4. **b** 22, 23, 24, 25, 26. **6. b** 3 cm.

Varianta 3

I 1. a $\frac{1}{3}$; **b** 16; **c** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2. a** $A \times B = \{(1;0),(1;3),(3;0),(3;3)\}$; **b** 7; **c** 8. **3. a** 10 cm²; **b** $\frac{1}{3}$; **c** 5.

II 4. a $x = \frac{660}{197}$; **b** $AC = 6\sqrt{3}$ cm. **5. a** $AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm; **b** $A_{ABA'} = 15$ cm². **6. a** $P_{ABCD} = 12(2+\sqrt{2})$ cm; **b** $\frac{9}{2}$ cm.

Varianta 4

I 1. a 136; **b** de ex. $\sqrt{15}$; **c** $2\sqrt{5}$. **2. a** 1,87; **b** 3 sau -3; **c** 2. **3. a** 36; **b** 1; **c** $\frac{9}{2}$.

II 4. a $A_{ABC} = 216$ cm²; **b** $S = \{(4,5)\}$. **5. a** $x = 2$; **b** $x = 100$ lei. **6. a** $A_{ABCD} = 96$ cm²; **b** E este centrul de greutate al triunghiului ADC. Rezultă că $DE = \frac{2}{3}DO = 4$ cm.

Varianta 5

I 1. a $-\sqrt{2}$; **b** 0,02; **c** $\pm\sqrt{6}$. **2. a** 60; **b** 5; **c** 1. **3. a** 10; **b** $10\sqrt{2}$; **c** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

II 4. a $n = 20$; **b** $P = 3(3\sqrt{2}+4)$ cm. **5. a** $S = \{(4;3)\}$; **b** 5 km. **6. a** $10\sqrt{3}$ cm; **b** $25\sqrt{3}$ cm.

Varianta 6

I 1. a $\sqrt{2}$; b 7; c $C(3;1)$. **2.** a 9; b −1; c 180°. **3.** a $\frac{1}{2}$; b 8; c 9.

II 4. a $S=\{(3;1)\}$; b $\frac{8\sqrt{21}}{5}$ cm. **5.** a 11 lei; b 21%. **6.** a $80\sqrt{3}$ cm²; b $R=\frac{8\sqrt{21}}{3}$ cm.

V.2. Variante de subiecte pentru evaluarea finală

Varianta 1

I 1. C. **2.** C. **3.** D. **4.** C. **5.** A. **6.** D. **7.** B. **8.** C. **9.** C. **II 10.** $x=\frac{1}{2}$. **11.** $a=2\sqrt{3}\Rightarrow a^2=12$. **12.** 1000 lei.

13. a $BE=2\sqrt{6}$ cm; b $\mathcal{P}_{ABCD}=16+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}$ cm; c $\mathcal{A}_{ABCD}=16\sqrt{6}$ cm²; $\mathcal{A}_{ABCD}=39$ cm².

Varianta 2

I 1. C. **2.** B. **3.** C. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** D. **8.** B. **9.** B. **II 10.** $x=-1$. **11.** $S=\{(-3;1)\}$. **12.** 30, 45, 50.

13. a $BD=8$ cm; b $\mathcal{A}_{ABCD}=32\sqrt{3}$ cm²; c $r=2\sqrt{3}$ cm.

Varianta 3

I 1. B. **2.** C. **3.** D. **4.** B. **5.** B. **6.** C. **7.** A. **8.** D. **9.** C. **II 10.** $x=2$. **11.** $S=\{(-3;1)\}$. **12.** $4\sqrt{3}$. **13.** a $\mathcal{P}_{ABC}=2\sqrt{3}(\sqrt{2}+2)$ cm;
b $\mathcal{A}_{ABC}=3\sqrt{2}$ cm²; c $r=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ cm.

Varianta 4

I 1. B. **2.** C. **3.** D. **4.** A. **5.** B. **6.** C. **7.** A. **8.** A. **9.** C. **II 10.** $x=13$. **11.** $a=5\Rightarrow a\in\mathbb{N}$. **12.** 260 lei.

13. a $BC=12(\sqrt{3}+1)$ cm; b $\mathcal{A}_{ABC}=72(\sqrt{3}+1)$ cm²; c $\mathcal{P}_{ABC}=12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ cm.

Varianta 5

I 1. C. **2.** C. **3.** D. **4.** D. **5.** A. **6.** A. **7.** C. **8.** B. **9.** A. **II 10.** $S=\{(-2;2)\}$. **11.** $m_g=12$. **12.** 2 ore. **13.** a $AB=12$ cm;
b $MN=8$ cm; c $AP=3\sqrt{3}$ cm; $3\sqrt{3}>5\Rightarrow AP>5$ cm.

Într-o prezentare grafică nouă,
Clubul Matematicienilor pune la dispoziția elevilor:

- o sinteză completă a teoriei, însoțită de exemple
- numeroase exerciții, foarte variate și grupate pe niveluri de dificultate
- probleme cu pronunțat caracter aplicativ
- subiecte pentru teză
- subiecte pentru concursuri și olimpiade școlare
- fișe de evaluare care pot fi detașate pentru a fi păstrate în portofoliul elevului
- soluții cu explicații detaliate

www.art-educational.ro
ISBN 978-606-003-340-0

traseul
albastru