CLUBUL MATEMATICIENILOR

art educațional

Marius Perianu
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VI-a

Semestrul I

Conform
cu noua programă

Într-o prezentare grafică nouă,
Clubul Matematicienilor pune la dispoziția elevilor:

- o sinteză completă a teoriei, însoțită de exemple
- numeroase exerciții, foarte variate și grupate pe niveluri de dificultate
- probleme cu pronunțat caracter aplicativ
- subiecte pentru teză
- subiecte pentru concursuri și olimpiade școlare
- fișe de evaluare care pot fi detașate pentru a fi păstrate în portofoliul elevului
- modele de teste interdisciplinare de tip PISA
- soluții cu explicații detaliate

www.art-educational.ro
ISBN 978-606-003-187-1

raseul
albastru

Prezentul auxiliar a fost avizat de Ministerul Educației Naționale prin Ordinul nr. 3530 din 04.04.2018 și se regăsește la poziția nr. 247 din anexa Ordinului.

Lucrarea a fost realizată în conformitate cu noua programă școlară pentru disciplina Matematică, clasele a V-a – a VIII-a, aprobată prin O.M. nr. 3393/28.02.2017.

Referenți științifici: prof. dr. Livia Harabagiu
prof. Dana Heuberger

Redactor: Irina Munteanu
Tehnoredactare: Crenguța Rontea

ISBN 978-606-003-186-4
Semestrul 1. - 2019. - ISBN 978-606-003-187-1

Pentru comenzi vă puteți adresa Departamentului Difuzare
C.P. 12, O.P. 63, sector 1, București
Telefoane: 0744 634 719; 0751 281 774; 021 796 73 83; 021 796 73 80
Fax: 021 369 31 99
www.art-educational.ro

Cuprins

Algebră

I. Mulțimi

II. Divizibilitatea numerelor naturale

III. Rapoarte și proporții

Geometrie

IV. Noțiuni geometrice fundamentale

V. Triunghiul

VI. Variante de subiecte pentru teză

Algebră

I Mulțimi

1.1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

O *mulțime* este o grupare de obiecte, simboluri etc., bine precizate și distincte, numite *elementele* mulțimii.
Mulțimile se notează de regulă cu litere mari: A, B, M, N, ..., iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

Mulțimea numerelor naturale

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale se numește *mulțimea numerelor naturale*. Se notează $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

Mulțimea numerelor naturale nenule

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale mai puțin 0 se numește *mulțimea numerelor naturale nenule*. Se notează $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

Relații între element și mulțime

Dacă M este o mulțime și x este un element al mulțimii M, se spune că *elementul x aparține mulțimii M* (pe scurt *x aparține lui M*) și se notează $x \in M$.
Dacă x nu este element al mulțimii M, se spune că *x nu aparține mulțimii M* și se notează $x \notin M$.

Exemplu: Dacă $M = \{1, 2, 3\}$, avem $1 \in M$, $2 \in M$ și $3 \in M$, dar $0 \notin M$, $5 \notin M$.

Mulțimea vidă. Mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează $\varnothing$ (de exemplu mulțimea elefanților de pe Lună).

Moduri de definire a mulțimilor

1 Enunțând o proprietate comună a elementelor acelei mulțimi.
Exemple: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $2 \cdot x + 3 \leq 18\}$, $B = \{x \mid x$ este cifră impară$\}$.

2 Prin enumerarea tuturor elementelor ei între acolade.
Exemple: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$.

3 Prin enumerarea tuturor elementelor în interiorul unei linii curbe închise (numită diagrama Venn-Euler).
Exemple:

Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimile cu un număr finit (limitat) de elemente se numesc *mulțimi finite*.
Mulțimile care nu au un număr finit de elemente (spunem că au un număr infinit de elemente) se numesc *mulțimi infinite*.

Exemple:

1 Mulțimea cifrelor din sistemul zecimal este finită.

2 Mulțimea oamenilor de pe globul pământesc este finită.

3 Mulțimea numerelor naturale este infinită.

4 Mulțimea numerelor naturale divizibile cu 7 este infinită.

Cardinalul unei mulțimi finite este numărul elementelor mulțimii. Cardinalul mulțimii finite M este un număr natural care se notează card M.
Observație. Notăm cardinalul unei mulțimi infinite cu simbolul $\aleph$, pe care îl citim *infinit*. ($\aleph$ nu este număr natural).

Exemple:
1 Mulțimea $M = \{2, 5, 7, 8\}$ are 4 elemente și scriem: card $M = 4$.
2 card $\mathbb{N}^* = \aleph$.

Exersare

1 Scrieți, prin enumerare și sub formă de diagramă, mulțimile literelor folosite în scrierea cuvintelor: *capacitate, matematică, perspicacitate, paralelipiped*.

2 Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ și $C = \{3, 5, 7, 9\}$. Pentru fiecare dintre elementele 0, 1, 2, 5, 6, 7, scrieți cărei mulțimi aparțin și căreia nu.

3 Este corect scrisă mulțimea $A = \{1 + 2, 2 + 3, 4 + 1, 7, 13\}$? Justificați.

4 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a $2 \in \{x \mid x \text{ divide } 16\}$; b $7 \in \{x \mid 2 \le x < 7\}$; c $21 \notin \{x \mid x = \overline{21c}\}$;
d $4^2 \in \{x \mid 2^3 < x < 2^5\}$; e $543 \in \{x \mid x \,\vdots\, 5\}$; f $10^3 \notin \{x \mid x \text{ se divide cu } 10\}$.

5 Determinați valoarea numărului natural x pentru care numărul natural 2 este element al mulțimii $A = \{2 \cdot x + 1, 2 \cdot x + 2, 2 \cdot x + 3\}$.

6 Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele:
a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \le 7\}$; d $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 11 \le x < 23\}$;
b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \le x \le 9\}$; e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 18 \text{ se împarte exact la } x\}$;
c $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 7 < x \le 14\}$; f $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ impar}, x < 13\}$.
Reprezentați cele 6 mulțimi utilizând diagrame Venn-Euler.

7 a Scrieți mulțimea numerelor naturale pare mai mici decât 14.
b Scrieți mulțimea numerelor naturale impare mai mici decât 11.
c Scrieți mulțimea numerelor naturale pare, de două cifre, divizibile cu 5.
d Scrieți mulțimea numerelor naturale, mai mici decât 123, divizibile cu 25.
e Scrieți mulțimea numerelor naturale de trei cifre, cu toate cifrele egale.

8 Fie mulțimile $A = \{2, 7, 11, 20\}$, $B = \{x \mid x$ este predecesor al lui m, unde $m \in A\}$, și $C = \{x \mid x$ este succesor al lui m, unde $m \in A\}$. Scrieți prin enumerare, apoi utilizând diagrame Venn-Euler elementele mulțimilor B și C.

9 Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \le 11\}$; $B = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \cdot y + 1 \ge 37\}$;
$C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 2^n < 2^{10}\}$; $D = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ și } 5^m + 3 > 130\}$.

10 Scrieți mulțimea A știind că are trei elemente și folosind informațiile următoare:
$7 \notin A, 5 \notin A, 4 \notin A, 2 \notin A, 1 \notin A, 0 \in A, 8 \notin A, 6 \notin A$.

11 Precizați mulțimile finite:

a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 13 \leq x \leq 31\}$;

b $B = \{2^0; 2^2; 2^4; 2^5\}$;

c $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 212\}$;

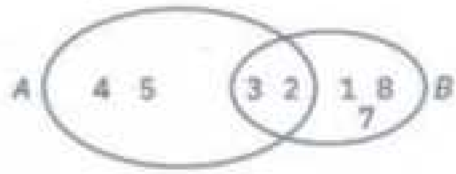
d $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 50\}$;

e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 100\}$;

f $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 100\}$.

12 Scrieți elementele mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$. Comparați cardinalul lor și reprezentați mulțimile folosind diagrame Venn-Euler.

13 Precizați elementele celor două mulțimi din reprezentarea de mai jos.



Consolidare

14 În locul spațiilor punctate puneți unul dintre semnele > sau < sau =, pentru ca următoarele mulțimi să verifice relația scrisă în dreptul fiecăreia:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2x + 1 \text{ ...... } 39\}$ card $A = 19$;

$B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 4n \text{ ...... } 56\}$ card $B = 1$;

$C = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ și } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \text{ ...... } m^2\}$ card $C = 6$.

15 Fie mulțimea $A = \{5, 9, 13, 17, ..., 201\}$. Determinați cardinalul mulțimii A și arătați că media aritmetică a elementelor din A nu aparține mulțimii A.

16 Fie mulțimea $A = \{15, 20, 25, ..., 85\}$.

a Scrieți elementele mulțimii A divizibile cu 10.

b Scrieți elementele mulțimii A divizibile cu 2.

c Determinați numărul de elemente al mulțimii A.

17 Scrieți mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x + 7 \leq 20\}$ prin enumerarea tuturor elementelor.

Rezolvă problema chiar aici:

18 Câte elemente are mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 7x + 3 = x + 28\}$?

19 Determinați numărul natural n știind că $11 \in \{3x + 5, 2n + 4\}$.

20 a Determinați $a \in \mathbb{N}$, astfel încât cardinalul mulțimii $\{a, 2a + 5, 3a + 1\}$ să fie 2.

b Determinați $a \in \mathbb{N}$, pentru care $\text{card}\{a, 3a, a + 1\} = 2$.

c Determinați $a \in \mathbb{N}$, astfel încât cardinalul mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \cdot x + a < 9\}$ să fie un element al mulțimii $\{4, 5\}$.

21 Aflați cardinalul mulțimii: $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ se scrie numai cu cifra 3 și } n < 401\}$.

22 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $2 \in \{1, 2, 3\}$;

b $2 \notin \{3, 4\}$;

c $2 \in \{12, 122, 1222\}$;

d $\{1, 2, 3, 4\}$ conține 3 pătrate perfecte;

e $\text{card}\{2, 3\} < \text{card}\{0, 1, 2\}$;

f $15 \notin \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$.

23 Scrieți în 3 moduri diferite mulțimile:

a mulțimea numerelor naturale impare cuprinse între 17 și 28.

b mulțimea numerelor naturale, mai mici decât 38, divizibile cu 3.

c mulțimea pătratelor perfecte mai mici decât 225 și mai mari decât 100.

d mulțimea tuturor cuburilor perfecte cuprinse între 7 și 130.

24 Scrieți mulțimea $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ punând în evidență o proprietate comună a elementelor sale.

25 Aflați elementele comune mulțimilor $A = \{13, 14, 15, ..., 73\}$ și $B = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = \overline{ba}\}$.

26 Fie $A = \{x \mid x = u(n^2), n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y \vdots 2\}$. Determinați elementele comune celor două mulțimi.

27 Enumerați elementele mulțimilor:

a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 10 < 3^x \leq 81\}$;

b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 16 \leq x^2 \leq 625\}$;

c $C = \{x = \overline{abc} \mid 80 < x < 600\}$;

d $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 7\}$;

e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 13 < 3x - 5 \leq 22\}$;

f $F = \{a = \overline{xy} \mid \overline{xy} \vdots 2, x \vdots 5\}$;

g $G = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5^x = 125 \text{ sau } 2^x = 1\}$;

h $H = \{x \mid x = 3^n, n \leq 4, n \in \mathbb{N}\}$.

28 a Se dau mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 7a + 2 \text{ și } a \in A\}$.
Determinați elementele mulțimii B.

b Se dau mulțimile $A = \{x \mid 25^{10} < 5^x \leq 125^7\}$ și $B = \{y \mid y = 3 \cdot x - 11 \text{ și } x \in A\}$. Determinați elementele mulțimilor A și B.

29 Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice:

a $A = \{p, i, c, o, r\}$;

b $B = \{1, 6, 11, ..., 501\}$;

c $C = \{1, 3, 6, 10, ..., 210\}$;

d $D = \{1, 2, 6, 24, 120, 720\}$;

e $E = \{1, 3, 7, 15, 31, 63\}$;

f $F = \{0, 1, 8, 81, 1024\}$;

g $G = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$;

h $H = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

30 Fie $A = \{0, 2, 4, 6\}$. Determinați elementele mulțimii $B = \{x \mid x = 3^a - 2^a, a \in A\}$.

31 Scrieți mulțimea A de numere naturale care sunt mai mici decât 71 și care împărțite la 10 dau restul mai mare decât 8.

Rezolvă problema chiar aici:

32 Fie n un număr natural. Considerăm mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^n \leq x \leq 2^{n+2}\}$.

a Determinați cardinalul mulțimii A.

b Determinați numărul n, știind că A are 97 de elemente.

Aprofundare

33 Numerele naturale impare consecutive sunt grupate astfel: $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \ldots$ etc. Determinați suma numerelor din a 8-a mulțime.

34 Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$. Aflați $\text{card}\{x \in A \mid x \,\vdots\, 2$ *sau* $x \,\vdots\, 5\}$.

35 Se dă șirul de mulțimi $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3, 4\}, A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, \ldots$.

a Scrieți elementele mulțimii A_4.

b Determinați mulțimea ce conține numărul natural 2010.

c Determinați cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii A_{2010}.

36 Fie mulțimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$. Arătați că printre oricare 9 elemente ale lui A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Probleme de șapte stele

37 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $5 \cdot x + 1 \in A$;

b dacă $7 \cdot x + 4 \in A$, atunci $x \in A$;

c $9 \in A$.

Arătați că numărul 6 aparține mulțimii A.

38 Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan următoarele proprietăți:

a mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ este formată din toate elementele mulțimilor A și B;

b fiecare mulțime are câte două elemente;

c dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

39 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $3x + 2 \in A$;

b dacă $x^2 + 1 \in A$, atunci $x \in A$;

c $1 \in A$.

Arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii A.

40 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $3 \cdot x \in A$ și $6 \cdot x + 4 \in A$;

b dacă $4 \cdot x + 2 \in A$, atunci $x \in A$;

c $11 \in A$.

Arătați că $2010 \in A$.

I.2. Relații între mulțimi. Submulțimi

Egalitatea. Două mulțimi A și B sunt egale, dacă sunt formate din aceleași elemente. Se notează $A = B$.
În acest caz, orice element care aparține lui A este și element al lui B și reciproc, orice element al lui B aparține și mulțimii A.
Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu aparține lui B sau invers, se spune că mulțimile A și B sunt diferite. Se notează $A \neq B$.

Exemplu: Fie $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$. Avem $A = B$ și $A \neq C$.

Incluziunea. Mulțimea A este inclusă în mulțimea B și se notează $A \subset B$, dacă orice element al mulțimii A aparține mulțimii B.
Se mai spune și că mulțimea B *include* mulțimea A și se notează $B \supset A$.
Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este și element al lui B, se spune că mulțimea A *nu este inclusă* în mulțimea B și se folosește notația $A \not\subset B$, sau, echivalent, se spune că B *nu include* pe A și se notează $B \not\supset A$.

Exemplu:
Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$.
Atunci $A \subset C$, $B \subset C$, $C \supset A$, $C \supset B$, $A \not\subset B$, $C \not\subset A$, $C \not\subset B$, $B \not\subset A$.

Observații:
1 Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime: $\varnothing \subset A$.
2 Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$.
3 Dacă A și B sunt două mulțimi, astfel încât $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$.
4 Dacă A, B și C sunt trei mulțimi, astfel încât $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.
Proprietățile 2, 3 și 4 exprimă faptul că relația de incluziune a mulțimilor este *reflexivă*, *antisimetrică* și respectiv *tranzitivă*.
Proprietatea 3 se folosește pentru a demonstra egalitatea a două mulțimi A și B prin *dublă incluziune* (sau *incluziune reciprocă*). Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$ atunci $A = B$.

Submulțimi. Dacă mulțimea A este inclusă în mulțimea B, adică $A \subset B$, se spune că mulțimea A este o *submulțime* a mulțimii B.

Exemplu: Mulțimile $U = \{1, 2\}$ și $V = \{1, 3, 5\}$ sunt submulțimi ale lui $M = \{1, 2, 3, 5\}$.

Observații:
1 Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi.
2 Numărul submulțimilor unei mulțimi A este egal cu $2^{\operatorname{card} A}$.
3 Mulțimea submulțimilor (părților) lui A se notează cu $\mathcal{P}(A)$.

Exemplu: Mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$ are $2^3 = 8$ submulțimi: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ și A.

Exersare

1 Se dau mulțimile: $A = \{1\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Scrieți, pentru fiecare două mulțimi, dacă una este inclusă în cealaltă sau nu.

2 Stabiliți dacă mulțimile A și B sunt egale, știind că $A = \{2, 4, 6, 9\}$, iar $B = \{2, 3, 6, 9\}$.

3 Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 1\}$, $C = \{2, 5, 8\}$, $D = \{1, 4, 2\}$, $E = \{3, 2, 1\}$, $F = \{8, 5, 2\}$, $G = \{4, 1, 2\}$, $H = \{5, 2, 8\}$. Scrieți perechile de mulțimi egale.

4 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $2 \in \{1, 2, 3\}$; b $2 \notin \{3, 4\}$; c $\{2\} \subset \{2, 3\}$; d $\varnothing = \{0\}$;

e $\varnothing \subset \{1, 2\}$; f $A \subset A$; g $\{2, 3\} \not\subset \{1, 2, 4\}$.

5 Câte submulțimi are mulțimea $A = \{2, 4, 6, 8\}$?

6 Găsiți numărul natural n pentru care $\{3n + 1, n + 4\} = \{6, 7\}$.

7 Scrieți toate submulțimile mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

a care nu conțin pe 3;
b care nu conțin nici pe 1, nici pe 5;
c care conțin pe 5;
d care conțin pe 2, dar nu conțin pe 3;
e care conțin pe 1, 2 și 3;
f care conțin pe 1 și 2, dar nu conțin pe 4.

Rezolvă problema chiar aici:

8 Câte numere pare conține mulțimea $P = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 2^4 < n < 3^3\}$?

Consolidare

9 Știind că mulțimea A are 32 de submulțimi, aflați numărul elementelor mulțimii A.

10 Determinați valorile numerelor naturale x, y, z, t pentru care:

a mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2x + 1, 2x, x\}$ sunt egale;

b mulțimile $A = \{5, 7, 9, 12\}$ și $B = \{4x + 1, 4x + 3, 4y + 1, 4z\}$ sunt egale;

c mulțimile $A = \{3, 7, 11, 15\}$ și $B = \{3x, x - 2, x + 2, 2x + 1\}$ sunt egale;

d mulțimile $A = \{4, 15, 25\}$ și $B = \{t^2, 3t, t - 1\}$ sunt egale.

11 Scrieți o submulțime formată din 4 elemente ale mulțimii numerelor naturale care împărțite la 7 dau restul 3.

12 Determinați mulțimile A, astfel încât $\{1, 2, 3\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Rezolvă problema chiar aici:

13 Determinați cardinalul mulțimii $A = \{2^{x+3}, 4^{x+1}, 8^{x+1} \mid x \in \mathbb{N}\}$.

14 Verificați, în fiecare caz, dacă mulțimile A și B sunt egale, unde:

a $A = \{x \mid x \text{ divide } 16, x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x = 2^n, 0 \leq n \leq 4\}$.

b $A = \{x \mid 7 < x < 40, x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{y \mid 40 \leq 5 \cdot y < 201, y \in \mathbb{N}\}$.

c $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (10^2)^{12x} : (10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^7)^x = 10\,000\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2x + 3x + \ldots + 10x = 110\}$.

Rezolvă problema chiar aici:

15 Se consideră mulțimile $M = \{14, 4a, 2b + 1\}$ și $P = \{20, 2b, 15\}$. Determinați numerele naturale a și b pentru care mulțimile M și P sunt egale.

16 Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x^2 \leq 124\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N}^* \mid y = x^2 - 1, x \in A\}$. Determinați elementele celor două mulțimi și precizați câte submulțimi are mulțimea B.

17 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 10\}$ și $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$; b $A \subset B$; c $C \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 3\}$;

d $\{6, 9, 12\} \subset C$; e $B \subset C$; f $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 32 \leq 2^x < 1024\}$;

g $\text{card}\, B = 9$; h $\varnothing \subset C$; i $A \subset \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq 2x + 1 \leq 13\}$.

18 Determinați numerele naturale x și y, astfel încât mulțimile: $A = \{2^x, 2^{x+y}, 2^{2-y}\}$ și $B = \{2^{x-2}, 2^{4-x}, 2^{x+y}\}$ să fie egale.

19 O mulțime A conține 21 elemente din mulțimea $\mathbb{N}$ și 20 elemente din mulțimea $\mathbb{N}^*$. Putem preciza un element al mulțimii A? Justificați răspunsul.

Aprofundare

20 Fie o mulțime formată din 10 numere naturale. Arătați că există o submulțime a sa cu suma elementelor divizibilă cu 10.

21 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

a Determinați numărul submulțimilor lui A, cu proprietatea că produsul elementelor fiecăreia este cel mult 15.

b Determinați numărul submulțimilor lui A cu trei elemente $\{a, b, c\}$ astfel încât $a + b = 2 \cdot c$.

Rezolvă problema chiar aici:

22 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Determinați numărul mulțimilor $B \subset A$, astfel încât $\{1, 2\} \subset B$.

Probleme de șapte stele

23 Se consideră mulțimea $A = \{5, 10, 15, ..., 2010\}$. Construim șirul de submulțimi ale mulțimii A. $A_1 = \{5, 10\}$, $A_2 = \{15, 20, 25\}$, $A_3 = \{30, 35, 40, 45\}$, ...

a Scrieți mulțimile A_{12} și A_{14}.

b Calculați suma elementelor mulțimii $A_{[illegible]}$.

24 Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 5, ..., 101\}$.

a Aflați numărul perechilor (a, b), $a, b \in A$, $a < b$, astfel încât $a + b = 100$.

b Dacă suma a 46 de elemente ale mulțimii A este 2010, atunci arătați că cel puțin două elemente sunt egale.

25 Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$.

a Determinați numărul submulțimilor mulțimii A formate din două elemente cu suma egală cu 2011.

b Determinați numărul submulțimilor mulțimii A formate din patru elemente, astfel încât suma a două elemente să fie egală cu suma celorlalte două elemente și să fie egală cu 2011.

Teste de evaluare

Testul 1

(1p) **1** Scrieţi toate submulţimile mulţimii $A = \{1, 4, 9\}$.

(1p) **2** **a** Determinaţi valorile lui x pentru care mulţimea $\{x, 3\}$ este o submulţime a mulţimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b Câte elemente are mulţimea multiplilor lui 15 mai mici decât 400?

(2p) **3** **a** Determinaţi cardinalul mulţimii $\{13, 15, 17, ..., 79\}$.

b Determinaţi cardinalul mulţimii divizorilor numărului 2^5.

(2p) **4** **a** Aflaţi numărul maxim de mulţimi diferite ce se formează cu numerele 1, 2, 3.

b Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinaţi numărul submulţimilor de două elemente ale mulţimii A, astfel încât suma elementelor fiecăreia să fie un număr par.

(1p) **5** Aflaţi mulţimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 4 \leq 12\}$ şi $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 2^3 < 3^y < 2^7\}$.

(2p) **6** Fie mulţimile $A = \{x \mid x = 5 \cdot n + 7, n \in \mathbb{N}\}$ şi $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
Determinaţi elementele mulţimilor $C = \{x \in A \mid x < 30\}$ şi $D = \{y \in B \mid 30 < y < 100\}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) **1** **a** Determinaţi mulţimea divizorilor numărului 75.

b Determinaţi mulţimea multiplilor lui 20, mai mici decât 150.

(1p) **2** Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a $15 \in \{0, 5, 10, ..., 100\}$; **b** $\{1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{N}$;

c $\mathbb{N}^* \subset \{1, 2, 3, ..., 2011\}$; **d** $\varnothing \in \mathbb{N}$.

(2p) **3** **a** Determinaţi elementele mulţimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x+2) \vdots 5, x = \overline{ab}\}$.

b Determinaţi elementele mulţimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 3, 1 \leq k \leq 5\}$ şi $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, 5^2 - 4 \leq y \leq 2^7 - 1\}$.

(2p) **4** Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}$. Determinaţi numărul submulţimilor $B \subset A$, ştiind că $\{1, 2\} \subset B \subset \{1, 2, ..., 81\}$.

(2p) **5** Determinaţi suma elementelor mulţimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 2^{100}\}$.

(1p) **6** Se dă mulţimea A cu proprietăţile:

a dacă $x \in A$, atunci $3x + 2 \in A$; **b** dacă $3x + 1 \in A$ atunci $x \in A$; **c** $19 \in A$.

Arătaţi că numărul 1700 aparţine mulţimii A.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(1p) **1** Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{0, 6\}$.

(1p) **2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $18 \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; b $0 \notin \mathbb{N}^*$;

c $\{6, 7, 8\} \subset \{1, 2, 3, ..., 23\}$; d $12 \in \mathbb{N}$.

(2p) **3** a Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 18 \vdots (x + 1)\}$.

b Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x \leq 13\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 9 \leq x < 18\}$.

Determinați elementele comune celor două mulțimi.

(2p) **4** Determinați elementele comune mulțimilor $A = \{x \mid x = n! + 4, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

(2p) **5** a Determinați numărul mulțimilor B știind că $\{1, 2\} \subset B \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinați numărul submulțimilor lui A cu proprietatea că suma elementelor fiecărei submulțimi este cel mult 6.

(1p) **6** Se dă mulțimea A cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$; b dacă $x + 1 \in A$, atunci $x \in A$; c $19 \in A$.

Arătați că numărul 2026 aparține mulțimii A.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(1p) **1** Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{7, 8, 9\}$.

(1p) **2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}^*$; b $1 \notin \mathbb{N}^*$;

c $\{1, 2, 3, ..., 23\} \subset \{6, 7, 8\}$; d $\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$.

(2p) **3** a Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \vdots (x + 1)\}$.

b Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 12\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 3^y < 81\}$.

Determinați elementele comune celor două mulțimi.

(2p) **4** Determinați elementele mulțimii $A = \{x \mid x = n^2 + 4, 2^n \leq n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 12\}$.

(2p) **5** a Determinați numărul mulțimilor B știind că: $\{1, 2, 3, 4\} \subset B \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinați numărul submulțimilor lui A cu proprietatea că produsul elementelor fiecărei submulțimi este cel mult 15.

(1p) **6** Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{xy5} = 5^{x+y}\}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P Fișă pentru portofoliul individual

A1

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Mulțimi. Relații între mulțimi. Submulțimi

(2p) 1 Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect. Numai un răspuns din cele patru este corect.

a Dintre numerele de mai jos, element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11\}$ este:

A 10; B 12; C 11; D 13.

b Mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 7\}$ este egală cu:

A $B = \{4, 5, 6\}$; B $B = \{5, 6\}$; C $B = \{567\}$; D $B = \{5, 6, 7\}$.

c Dacă $\{2, 4, 6, 8\} = \{a, b, c, 2\}$, atunci suma $a + b + c$ este egală cu:

A 10; B 18; C 14; D 12.

d Numărul submulțimilor mulțimii $C = \{0, 1, 2\}$ este egal cu:

A 8; B 3; C 7; D 4.

(2p) 2 Completați pe fișă spațiile punctate cu răspunsul corect.

a Dacă $\{2, a, b\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, cea mai mare valoare a diferenței $a - b$ este ....

b Valoarea de adevăr a propoziției „$30 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 10\}$" este ....

c Cardinalul mulțimii $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 5, 16 \leq x \leq 36\}$ este egal cu ....

d Dacă $\{1, 4, 7, 10, 13, 16\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3y + 1, y \leq n, n \in \mathbb{N}\}$, atunci n este egal cu ....

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a $\text{card}\{x \in \mathbb{N} \mid 24 \leq x < 51\}$ este	1 9
b Produsul elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 5, x \leq 126\}$ este	2 0
c Suma elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 2x + 1 < 17\}$ este	3 28
d Cel mai mic element al mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 > 18\}$ este	4 26
	5 27

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Fie A o mulțime de numere naturale cu proprietățile:

a $80 \in A$;

b dacă $7x+3 \in A$, atunci $x \in A$;

c dacă $x \in A$, atunci $\{7x+4, 7x+5\} \subset A$.

Arătați că 4001 și 4002 sunt elemente ale lui A.

(1p) 5 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 50\}$. Determinați numărul submulțimilor B ale lui A, știind că $\{1, 2, 3, ..., 46\} \subset B$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

I.3. Operații cu mulțimi

Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea notată $A \cup B$, formată din toate elementele celor două mulțimi, comune și necomune, luate o singură dată.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Exemplu: Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4\}$. Atunci $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

Intersecția a două mulțimi A și B este mulțimea notată $A \cap B$, formată din toate elementele comune celor două mulțimi, luate o singură dată.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Exemplu: Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4\}$. Atunci $A \cap B = \{2\}$.

Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc *mulțimi disjuncte*.

Diferența a două mulțimi A și B este mulțimea notată $A \setminus B$, formată din elementele mulțimii A care nu aparțin mulțimii B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Exemplu: Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4\}$. Avem $A \setminus B = \{1, 3\}$ și $B \setminus A = \{4\}$.

Proprietățile operațiilor de reuniune și intersecție

1 *Asociativitatea:* $(A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$ $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2 *Comutativitatea:* $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$.

3 *Distributivitatea:* *reuniunii față de intersecție:* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
intersecției față de reuniune: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4 *Principiul includerii și excluderii:* Pentru orice două mulțimi A și B avem:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B).$$

Observații:

1 Diferența mulțimilor nu este, în general, o operație comutativă:

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

2 Scrierea ca reuniune de mulțimi disjuncte: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Partiții. Fie A o mulțime nevidă. Un sistem $A_1, A_2, ..., A_n$ de submulțimi nevide, disjuncte două câte două, ale mulțimii A, astfel încât $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$ se numește *partiție* a mulțimii A.

Exemple:

1 Mulțimile $\{1\}$, $\{2, 3\}$ și $\{4, 5\}$ formează o partiție a mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2 Submulțimea numerelor pare și submulțimea numerelor impare formează o partiție a lui $\mathbb{N}$.

1 Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ și $C = \{3, 5, 7\}$. Calculați:

a $A \cap B$; d $A \cup B$; g $A \setminus B$;
b $A \cap C$; e $A \cup C$; h $A \setminus C$;
c $B \cap C$; f $B \cup C$; i $\varnothing \cap C$.

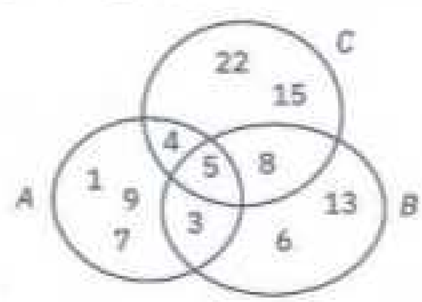
2 Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ și $C = \{1, 2, 3, 7, 12\}$. Aflați:

a $A \cup B$; b $A \cup C$; c $B \cup C$; d $A \cap B$;
e $A \cap C$; f $B \cap C$; g $A \cup B \cup C$; h $A \cap B \cap C$;
i $A \setminus B$; j $B \setminus C$; k $A \setminus C$; l $A \cup (B \cap C)$.

Rezolvă problema chiar aici:

3 Se dau mulțimile A, B, C reprezentate mai jos prin diagrame Venn-Euler. Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

a A, B și C;
b $E_1 = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$; $E_2 = \{x | x \in A \text{ sau } x \in C\}$; $E_3 = \{x | x \in B \text{ sau } x \in C\}$;
c $E_4 = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}$; $E_5 = \{x | x \in A \text{ și } x \in C\}$; $E_6 = \{x | x \in B \text{ și } x \in C\}$;
d $E_7 = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$; $E_8 = \{x | x \in B \text{ și } x \notin C\}$; $E_9 = \{x | x \in C \text{ și } x \notin A\}$;
e $E_{10} = \{x | x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C\}$; $E_{11} = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C\}$.



4 Definim $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, (numită *diferența simetrică* a mulțimilor A și B). Pentru mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4, 6\}$, determinați:

a $A \cup B$; c $A \setminus B$; e $A \Delta B$;
b $A \cap B$; d $B \setminus A$; f $A \Delta \{5, 6\}$.

5 Se consideră mulțimile $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{4, 6\}$. Efectuați:
a $(A \cup B) \cap C$; b $A \cup (B \cap C)$; c $A \setminus (B \cap C)$.

6 Se dau mulțimile: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{4, 6\}$. Efectuați:
a $(A \cup B) \cap C$; b $A \cup (B \cap C)$; c $C \setminus (A \cup B)$.

7 Fie $A = \{1, 2, a\}$ și $B = \{1, b, 3\}$. Dacă $A \cup B = A \cap B$, atunci determinați valoarea expresiei $a + b$.

8 a Arătați că mulțimile $A = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{5 \cdot n + 2 | n \in \mathbb{N}\}$ sunt disjuncte.

b Arătați că mulțimile $A = \{6 \cdot n + 2 | n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{3 \cdot n + 4 | n \in \mathbb{N}\}$ sunt disjuncte.

Rezolvare. Ultima cifră a numărului $5 \cdot n$ este 0 sau 5, ultima cifră a numărului $(5 \cdot n + 2)$ este 2 sau 7, deci mulțimea B are numai elemente, numere naturale, care se termină cu 2 sau 7. Cum un pătrat perfect se termină într-una dintre cifrele $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ cele două mulțimi nu au elemente comune, deci sunt disjuncte.

9 Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite, simultan, următoarele condiții:

a $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; b $A \setminus B = \{b, c, d\}$; c $A \cap B = \{a, e, f, g\}$.

Rezolvare. Din a treia condiție deducem că elementele a, e, f, g, se găsesc în ambele mulțimi. Din a doua condiție vedem că elementele b, c, d se găsesc în A, dar nu se găsesc în B, iar din prima condiție deducem că elementul h trebuie să se găsească în mulțimea B. Deci, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ și $B = \{a, e, f, g, h\}$.

10 Determinați mulțimile A și B, astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b $A \cap B = \{1, 2, 3\}$; c $A \setminus B = \{4, 6\}$.

11 Determinați mulțimile A și B știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b $A \cap B = \{2, 6, 7\}$; c $A \setminus B = \{1, 4\}$.

12 Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite, simultan condițiile:

a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$; b $2 \notin A$; c $A \cap B = \{1, 3\}$.

13 Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite, simultan relațiile:

a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; c $A \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$,

b $A \cap B = \{3, 4\}$; d $\{1, 2\} \cap B = \varnothing$.

14 Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile:

a $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; b $A \setminus B = \{b, c, d\}$; c $A \cap B = \{a, e, g\}$.

Consolidare

15 Fie $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y | y = 2p + 3, p \in \mathbb{N}\}$.

a Arătați că $A \cap B \neq \varnothing$.

b Dacă $x \in A$ și $y \in B$, aflați restul împărțirii numărului $2x + 3y$ la 6.

c Arătați că $2003 \in A \cap B$.

16 Mulțimea A are 70 de elemente, iar mulțimea B are 40 de elemente. Determinați numărul maxim și numărul minim de elemente ale mulțimii $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

17 O mulțime A are 70 elemente, iar o mulțime B are 60 elemente.

a Dacă $A \cup B$ are 89 elemente, câte elemente are $A \cap B$?

b Dacă $A \cap B$ are 47 de elemente, câte elemente are $A \cup B$?

18 Dacă mulțimea A are 4 elemente, mulțimea B are 6 elemente și $A \cap B$ are două elemente, determinați numărul elementelor mulțimii $A \cup B$.

19 Dacă $A \cap B$ are 3 elemente, $A \setminus B$ are 5 elemente și $B \setminus A$ are un element, determinați cardinalul mulțimii $A \cup B$.

20 Se dau mulțimile: $A=\{x \mid x=\overline{ab},\ a=3\cdot b\}$, $B=\{y \mid y=x:31,\ x\in A\}$ și $C=\{z \mid z=y^2-1,\ y\in B\}$. Determinați A, B și C și apoi calculați $(A\cap C)\cup(A\setminus C)$.

21 Pentru trei mulțimi oarecare arătați că sunt adevărate egalitățile:

a $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; c $A\cap(A\cup B)=A$;

b $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; d $A\cup(A\cap B)=A$.

22 Folosind definițiile operațiilor cu mulțimi completați spațiile punctate astfel încât să avem egalități:

a $\{x \mid x\in A$ sau $x\in B\}=$ ......; c $\{x \mid x\in A$ și $x\notin B\}=$ ......;

b $\{x \mid x\in A$ și $x\in B\}=$ ......; d $\{x \mid x\in B$ și $x\notin A\}=$ ....

23 Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan relațiile:

a $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; c $\{3, 9\}\cap B=\varnothing$;

b $B\setminus A=\{4, 5, 6, 7, 8\}$; d $A\cap B=\{1\}$.

24 Dacă card(A) = 36, card(B) = 52 și card($A\cup B$)= 74, aflați card($A\cap B$).

25 Determinați mulțimile M și N știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a $M\cup N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, c $M\cup\{3, 4, 5\}=\{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$,

b $M\cap N=\{4, 6, 9\}$, d $N\cup\{2, 4, 8\}=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Rezolvare:

Din $M\cap N=\{4, 6, 9\}\Rightarrow\{4, 6, 9\}\subset M$ și $\{4, 6, 9\}\subset N$.

Din $M\cup\{3, 4, 5\}=\{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}\Rightarrow\{1, 6, 8, 9\}\subset M$ și $2, 7\notin M$.

Din $N\cup\{2, 4, 8\}=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\Rightarrow\{5, 6, 7, 9\}\subset N$ și $1, 3\notin N$.

$M=\{4, 6, 9, 1, 8, 3\}$, $N=\{4, 6, 9, 5, 7, 2\}$.

26 Fie mulțimea $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determinați două submulțimi A și B ale lui E, care să îndeplinească simultan condițiile:

a $A\cap B=\{4, 6, 9\}$;

b $A\cup\{3, 4, 5\}=\{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;

c $B\cup\{4, 8\}=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

27 Determinați mulțimile X și Y știind că:

a $X\cup Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; b $\{3, 5\}\subset Y$; c $\{1\}\cap Y=\varnothing$;

d $\{2, 4\}\cap X\neq\varnothing$; e $X\cap Y=\varnothing$.

28 Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan relațiile:

a $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; b $A\setminus(A\cap B)=\{1, 2\}$;

c $B\setminus(A\cap B)=\{7, 8\}$.

29 Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan relațiile:

a $A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; b $A\cap B=\{3, 4\}$;

c suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B.

30 Determinați două mulțimi A și B , știind că sunt îndeplinite simultan relațiile:

a $A\cap B=\{1, 2, 3, 9\}$; b $A\setminus B=\{6, 7\}$;

c suma elementelor mulțimii B este un număr par.

31 Determinați două mulțimi A și B, știind că sunt îndeplinite simultan relațiile:
a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$; b $\text{card}\,A = \text{card}\,B = 2$; c dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

32 Fie mulțimile: $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \mid 36 \text{ și } 2 \mid n\}$ și $B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 25 \text{ și } n \,\vdots\, 4\}$.

a Scrieți mulțimile prin enumerarea elementelor.

b Calculați $A \cup B$; $A \setminus B$; $A \cap B$; $B \setminus A$.

c În mulțimea B modificați una dintre condiții, astfel încât să avem $\text{card}\,B = 13$.

33 Fie mulțimile: $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n = 3^a + 2^b$, unde $a \in \{1, 2\}, b \in \{0, 1, 2, 3\}\}$;
$B = \{m \mid m \in \mathbb{N}, m = 2 \cdot n - 5$, unde $n \in A\}$; $C = \{p \mid p \in \mathbb{N}, p = 5^2 + m - 17$, unde $m \in B\}$.

a Scrieți mulțimile prin enumerarea elementelor.

b Calculați $A \cap B$; $A \cup B \cup C$; $B - C$.

34 Fie mulțimile $M = \{12; n; 20\}$ și $N = \{5; y; 12\}$. Determinați numerele naturale x și y pentru care are loc egalitatea $M \cup N = M \cap N$.

Aprofundare

35 Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = 2 \cdot m + 1, m \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 3 \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

a Arătați că $15 \in A$, $16 \in B$, $2005 \in A \cap B$ și $2002 \in B \setminus A$.

b Scrieți cu ajutorul unei proprietăți caracteristice mulțimile $A \cap B$ și $B \setminus A$.

36 Din cei 30 de elevi ai unei clase, 20 participă la olimpiada de matematică, iar 16 la olimpiada de limba română. Știind că fiecare elev participă la cel puțin o olimpiadă, aflați:

a numărul elevilor care participă la ambele olimpiade;

b numărul elevilor care participă numai la olimpiada de matematică.

37 Într-o clasă a V-a sunt 28 de elevi. Dintre aceștia 16 joacă fotbal, 21 joacă tenis, iar 3 nu joacă nici fotbal, nici tenis. Câți elevi din clasă joacă atât fotbal cât și tenis?

38 Fiind date două mulțimi A și B , astfel încât $A \cap B = A \cup B$, arătați că $A = B$.

39 Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm mulțimea $A_n = \{n, n + 1, 5 \cdot n, 5 \cdot n + 1\}$.

a Determinați mulțimea A_4.

b Determinați n știind că suma elementelor mulțimii A_n este egală cu 1202.

c Arătați că $A_n \cap A_{5n} \neq \varnothing$.

40 Dați exemplu de trei mulțimi A, B, C care să îndeplinească simultan condițiile:
a $5 \in B$; b $6 \in A$; c $\{2, 3, 4\} \subset A \cap B$; d $C \cap B = \varnothing$; e $C \cap A = \{7, 1\}$.

Probleme de șapte stele

41 Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 2 \cdot 5^n, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 3 \cdot 2^n - 1, n \in \mathbb{N}\}$.
Determinați elementele mulțimii $A \cap B$.

42 Aflați numerele naturale a, b, c astfel încât $\{a, a + b, b + c\} = \{3, 5, 7\}$.

43 Fie mulțimile: $M = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, $A = \{x + 11 \cdot y \mid x, y \in M\}$ și $B = \{z + 22 \cdot t \mid z, t \in M\}$.
Determinați numărul elementelor mulțimilor A și $A \cap B$.

I.4. Mulțimi finite și mulțimi infinite

Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimile cu un număr finit (limitat) de elemente se numesc *mulțimi finite*.
Mulțimile care nu au un număr finit de elemente (spunem că au un număr infinit de elemente) se numesc *mulțimi infinite*.

Mulțimea divizorilor. Pentru un număr $a \in \mathbb{N}$, notăm cu D_a mulțimea tuturor divizorilor numărului a.

Exemple: 1 $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$; 2 $D_{23} = \{1, 23\}$.

Mulțimea multiplilor. Pentru un număr $a \in \mathbb{N}$, notăm cu M_a mulțimea tuturor multiplilor numărului a.

Exemple: 1 $M_7 = \{0, 7, 14, ..., 7k, ...\}, k \in \mathbb{N}$. 2 $M_6 = \{0, 6, 12, ..., 6k, ...\}, k \in \mathbb{N}$.

Observații:
1 Mulțimea divizorilor unui număr natural nenul este finită.
2 Mulțimea multiplilor unui număr natural nenul este infinită.
Pentru determinarea numărului multiplilor unui număr mai mici decât n, $n \in \mathbb{N}$ folosim *contorul de numărare*.

Exemplu: Determinați numărul multiplilor lui 15, mai mici decât 400. Deoarece $15 \cdot 0$ este cel mai mic multiplu al lui 15, iar $390 = 15 \cdot 26$ este cel mai mare multiplu al lui 15, mai mic decât 400 avem $26 + 1 = 27$ multipli.

Exersare

1 Care dintre următoarele mulțimi sunt finite?
$A = \{1, 2, 3\}$; B = {mulțimea cifrelor impare din baza zece};
$C = \{8, 7, 9, 6, 10, 5\}$; D = {mulțimea numerelor naturale}.

2 Care dintre următoarele mulțimi sunt infinite?
M = {mulțimea divizorilor lui 80}; N = {mulțimea multiplilor lui 8}; $P = \{5^0; 5^1; 5^2; 5^3; ...\}$.

3 Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
a Mulțimea divizorilor oricărui număr natural nenul este o mulțime ....
b Mulțimea multiplilor oricărui număr natural nenul este o mulțime ....
c Mulțimea divizorilor lui zero este o mulțime ....
d Mulțimea multiplilor lui zero este o mulțime ....

4 Scrieți mulțimea divizorilor numărului: a 3; b 9; c 14; d 18.

5 Fie D_{24} mulțimea divizorilor numărului 24. Subliniați afirmațiile adevărate:
a $6 \in D_{24}$; b $5 \in D_{24}$; c $8 \in D_{24}$; d $9 \notin D_{24}$; e $4 \in D_{24}$; f $12 \notin D_{24}$.

6 Scrieți elementele mulțimilor D_7; D_{18}; D_{21}; D_{33}. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:
a Toate mulțimile sunt finite.
b $D_7 \cup D_{18}$ este mulțime infinită.
c $D_{21} \setminus D_7$ este mulțime finită.
d $\mathbb{N}^* \setminus D_{35}$ este mulțime infinită.

7 Precizați care dintre mulțimile de mai jos sunt infinite:
a D_{20}; b M_3; c M_{17}; d D_{36}; e $\{0, 9, 99\}$; f $\{n = 2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

8 Precizați care dintre mulțimile de mai jos sunt finite:
a M_5; c D_{22}; e $M_3 \cap M_{17}$; g $M_{44} \cup M_{55}$;
b $M_4 \setminus M_{144}$; d $D_{100} \cap M_5$; f $D_{36} \setminus D_2$; h $D_{21} \cup D_{12}$.

9 Scrieți primii 5 multipli (în ordine crescătoare) ai numărului 8.

10 Fie M_6 mulțimea multiplilor numărului 6. Precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:
a $12 \in M_6$; b $4 \in M_6$; c $36 \in M_6$; d $49 \notin M_6$; e $72 \notin M_6$; f $6^{12} \in M_6$.

11 Câți multipli ai lui 15 se găsesc în mulțimea: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $43 < 2x + 3 \leq 78\}$?

12 Determinați mulțimea divizorilor numărului $A = 2^2 \cdot 5^3$.

Consolidare

13 Fie $A = D_{45}$ și $B = M_3$. Determinați elementele comune celor două mulțimi.

14 a Determinați toate numerele de două cifre care au divizori pătrate perfecte.
b Determinați toate numerele de două cifre care au divizori cuburi perfecte.

15 Care dintre următoarele mulțimi sunt finite?
a $A = \{1, 2, 3\}$;
b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $15 \leq x \leq 732\}$;
c $C = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n = 2 \cdot a + 1$ unde $a \in \mathbb{N}\}$;
d $D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$;
e $E = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și $n + 1 < 2010^{2011}\}$;
f $F = \{n \mid 21 \,\vdots\, n + 2\}$.

16 Care dintre următoarele mulțimi sunt infinite:
a $A = \{a \mid a = 5 \cdot n$, unde $n \in \mathbb{N}\}$;
b $B = \{1; 1 + 2; 1 + 2 + 3; 1 + 2 + 3 + 4; ...\}$;
c $C = \{c \mid c \in \mathbb{N}$ și $12^8 < c + 1 < 12^9\}$;
d $D = \{4; 44; 444; 4\,444; ...\}$.

17 Aflați singurul răspuns corect:
a Mulțimea $A = \{8, 88, 888, ...\}$ este:
A. finită; B. infinită C. nu putem stabili;
b Mulțimea $M = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și $5^2 - 3 \ldots 2n + 6\}$ este infinită dacă în locul punctelor punem semnul:
A =; B >; C <; D $\vdots$.
c Mulțimea M_k, $k \in \mathbb{N}$, este finită pentru k egal cu:
A 2; B 7; C 2011; D 0; E 444.
d Mulțimea D_k, $k \in \mathbb{N}$, are 5 elemente pentru k egal cu:
A 0; B 1; C 4; D 25; E 16.

18 Dați exemple de trei mulțimi A, B, C, astfel încât $\text{card}(A \cup B \cup C) = 5$.

19 Dați exemple de trei mulțimi A, B, C, având fiecare câte 2 elemente, astfel încât $\text{card}(A \cup B \cup C) = 3$.

20 Dați exemplu de două mulțimi infinite a căror intersecție să fie mulțimea vidă.

21 Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:
a $\text{card}\,A = \text{card}(A \cup B)$; b $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^2 - 4 < (5^2 - 2^2)x \leq 10^2 + 5\}$.

22 Scrieți mulțimea formată din divizori ai numărului 60 care se găsesc în mulțimea:
$B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 4 < n + 1 \leq 31\}$.

23 Scrieți mulțimile M_3 și M_7 și apoi mulțimea A formată din elementele comune (care se găsesc și în M_3 și în M_7). Comparați mulțimea A cu mulțimea M_{21}.

24 Subliniați afirmațiile adevărate:
a $D_{12} \subset D_{36}$; b $M_{24} \supset M_6$; c D_5 și M_5 au un singur element comun;
d $D_{14} \supset D_{28}$; e $M_3 \subset M_{21}$; f $D_{30} = D_{15}$.

25 Calculați:
a $\text{card}\,D_{12}$; b $\text{card}\,D_{18}$; c $\text{card}\,D_7$; d $\text{card}\,D_{30}$.

26 Dați 3 exemple de numere naturale n pentru care D_n are mai mult de 5 elemente.

27 Dați 3 exemple de numere naturale m pentru care M_m are cel puțin 4 elemente mai mici decât 60.

28 Determinați elementele comune mulțimilor D_{48} și M_6.

29 Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că $\text{card}\,D_n = 2$ și $n \leq 8$.

30 Dacă $a = 2^2 \cdot 3^3$ și $b = 3^2 \cdot 5^3$, atunci determinați numărul divizorilor lui $a \cdot b$.

Aprofundare

31 Dați exemple de 4 numere naturale pentru care D_n are numai două elemente.

32 Dați exemple de 4 numere naturale m pentru care D_m are exact trei elemente.

33 Fie numărul $a = 7^{2011}$. Câte elemente are mulțimea D_a?

34 Scrieți elementele mulțimilor divizorilor numerelor: 100, 7^5, 13^{29}.

35 Scrieți în spațiile punctate numerele naturale, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
a $\ldots \in D_{36}$; c $\ldots \in D_{2010}$; e $\ldots \notin D_{24}$; g $\ldots \notin M_{69}$;
b $\ldots \notin M_{18}$; d $\ldots \in M_{44}$; f $\ldots \in M_{130}$; h $\ldots \in D_{111}$.

36 Scrieți în spațiile punctate semnele $\subset$ ($\supset$) sau $\not\subset$ ($\not\supset$) astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
a $D_5 \ldots D_{30}$; c $D_{64} \ldots D_8$; e $D_9 \ldots M_9$; g $M_{12} \ldots M_{36}$;
b $M_5 \ldots M_{30}$; d $M_{48} \ldots M_7$; f $M_{17} \ldots D_{34}$; h $M_4 \ldots D_4$.

Probleme de șapte stele

37 a Câte elemente din M_{45} se găsesc cuprinse între numerele 200 și 2011?
b Câte elemente din M_{18} se găsesc cuprinse între numerele 200 și 2011?

38 Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 15 \cdot n + 7, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 2015 \cdot p + 3, p \in \mathbb{N}\}$.
Stabiliți dacă mulțimea $A \cap B$ este finită sau infinită.

Teste de evaluare

Testul 1

(1p) **1** Scrieți mulțimea divizorilor lui 15.

(2p) **2** Calculați:

a $\{1, 2, 3, 5, 8\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{1, 3, 5, 7\}$;

c $\{4, 8, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$; d $\{3, 4, 9\} \cup \{5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

(2p) **3** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $5 \in \{0, 1, 2\}$; b $\{1, 7, 9\} \subset \{0, 1, 6, 7, 8\}$; c $3 \notin \{4, 7, 11\}$;

d $\{0\} = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^*$; e $4 \in \{1, 2, 4\} \cap \{5, 6, 2, 1\}$; f $\{12, 13, 14\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \varnothing$.

(2p) **4** a Scrieți elementele mulțimii $D_{18} \cup D_{10}$.

b Dați un exemplu de mulțime infinită.

c Scrieți prin enumerare elementele mulțimii: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 6 \leq 2n + 4 < 40\}$.

(1p) **5** Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

a $A \cup B = \{m, n, a, b, c, d, x\}$; b $B \setminus A = \{m, d\}$; c $A \cap B = \{a, b, x\}$.

(1p) **6** Determinați numerele naturale x astfel încât mulțimile $A = \{3x, 6x + 2\}$ și $B = \{3x + 1, 3x + 2, 4x + 6\}$ să aibă un singur element comun.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) **1** Scrieți mulțimea multiplilor lui 5 care se scriu ca numere cu două cifre.

(2p) **2** Calculați:

a $\{3, 4, 7, 11\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b $\{7, 13, 8, 5\} \cap \{0, 2, 4, 6, 78\}$;

c $\{8, 3, 10, 5, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; d $\{0, 1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5\}$.

(2p) **3** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $12 \notin \{10, 11, 12\}$; d $\{2, 3, 6, 8\} \setminus \{5, 2, 1, 3\} = \{6, 8\}$;

b $\{1, 8, 10, 15\} \supset \{8, 1, 10\}$; e $6 \in \{2, 5, 6, 7\} \cap \{4, 1, 6, 8, 10\}$.

c $17 \in \{13, 15, 17, 19\}$; f $17 \in \{13, 14, 15, ..., 21\} \cap \{2, 4, 6, ..., 32\}$.

(2p) **4** a Scrieți elementele mulțimii $M_6 \cap D_{18}$.

b Dați exemplu de o mulțime finită.

c Scrieți prin enumerare elementele mulțimii $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < 2n + 1 \leq 33\}$.

(1p) **5** Determinați mulțimile M și P știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a $M \cup P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b $M \setminus P = \{4, 6\}$; c $M \cap P = \{1, 3, 5\}$.

(1p) **6** Există numere naturale x astfel încât mulțimile $C = \{4x + 1, 12, 27\}$ și $D = \{4x, 4x + 2, 2x + 7\}$ să aibă două elemente comune? Justificați răspunsul.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(1p) **1** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a $17 \in \{8, 10, 15, 17, 20\}$; b $\{2, 7, 10, 14, 16, 5\} \supset \{2, 4, 5, 7\}$;
c $8 \notin \{n \mid n \in \mathbb{N}, n = 2 \cdot a, a \in \mathbb{N}\}$; d $\{1, 3, 10\} \subset \{0, 1, 2, ..., 12, 13\}$.

(2p) **2** Determinați elementele mulțimilor:
a $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 5\}$; b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $13 < x^2 - 1 \leq 90\}$;
c $C = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2^a$, unde a este cifră pară în baza zece$\}$;
d $D = \{z \in \mathbb{N} \mid z$ se scrie numai cu cifra 7 și $z < 100\,000\}$.

(2p) **3** Fie mulțimea $A = \{x \mid x = \overline{ab}$ și $\overline{ab} \vdots 7\}$.
a Stabiliți dacă $84 \in A$.
b Care este cel mai mic element al mulțimii A?
c Câte elemente are mulțimea A?

(1p) **4** Determinați elementele mulțimilor A și B știind că
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $A \setminus B = \{2, 4, 5\}$ și $B \setminus A = \{1, 8\}$.

(2p) **5** Găsiți numărul natural x și mulțimea A știind că:
$A \cap \{2, 3, 4, 5, x\} = \{3, 5, 7\}$ și $A \subset \{2, 3, 5, 7\}$.

(1p) **6** Se dau mulțimile: $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{a, c, d, e, f\}$.
a Calculați: i $A \cup B$; ii $B \cap A$; iii $A \setminus B$.
b Dacă $(A \cap B) \cap \mathbb{N} = \{5, 6, 7\}$ și $a < d < c$, atunci calculați suma $a + c$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(1p) **1** Fie $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 1 \leq 16\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a $9 \in A$; b A este infinită; c $1^3 + 2^3 + 3 \in A$; d $\varnothing \not\subset A$.

(2p) **2** Într-o clasă sunt 27 de elevi. Într-o săptămână 19 elevi au fost la un spectacol, iar 16 în vizită la un muzeu. Știind că 2 elevi au fost bolnavi și nu au participat la nicio activitate, calculați câți elevi au fost și la spectacol și la muzeu.

(2p) **3** a Scrieți două mulțimi a căror reuniune este mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$.
b Dați exemplu de trei mulțimi a căror intersecție este mulțimea $\{1, 4, 9\}$.

(1p) **4** Determinați elementele mulțimilor E și F știind că E are mai multe elemente decât F, $E \cup F = \{a, b, c, d\}$ și $E \cap F = \{a, c\}$.

(2p) **5** Se dau mulțimile $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ și $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
Calculați: a $A \cap B$; b $A \cap B \cap C$; c $A \cup B$;
d $A \setminus B$; e $(A \cup B) \cap C$; f $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(1p) **6** Scrieți elemente mulțimilor:
a $A = \{$mulțimea multiplilor pari ai lui 3 mai mici decât 40$\}$;
b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3^a$ unde a este cifră impară mai mică decât 6$\}$;
c $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 3 = 8$ sau $2 \cdot x + 2 = 18$ sau $x + 1 \leq 6\}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P Fișă pentru portofoliul individual

A2

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Operații cu mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite

(2p) 1 Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect. Numai un răspuns din cele patru este corect.

a Precizați care dintre mulțimile de mai jos este mulțime finită:

A D_2; B M_7; C $M_3 \setminus M_2$; D $D_5 \cup M_6$.

b Dintre numerele de mai jos, element al mulțimii $M_2 \cap M_7$ este:

A 5; B 60; C 70; D 7.

c Dintre numerele de mai jos, element al mulțimii $D_{15} \cup D_{14}$ este:

A 5; B 8; C 4; D 6.

d Un element al mulțimii $\{1, 2, 3\} X \{3, 5\}$ este:

A 8; B (2,5); C (5,2); D 9.

(2p) 2 Completați pe fișă spațiile punctate cu răspunsul corect.

a Rezultatul calculului $\{2, 4, 6, 8\} \cap \{2, 6, 10\}$ este egal cu ....

b Rezultatul calculului $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6\}$ este egal cu ....

c Rezultatul calculului $\{2, 4, 6, 8\} \setminus \{2, 6, 10\}$ este egal cu ....

d Dintre mulțimile $A = D_7$ și $B = M_{20}$, finită este mulțimea ....

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Mulțimea $\{n \mid n = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}^*\}$ este	1 finită
b Mulțimea $\{n = \overline{abc} \mid n \in M_5\}$ este	2 7
c Suma elementelor mulțimii $D_4 \cap D_8$ este	3 infinită
d $\mathrm{card}(D_{20} \cap M_{10})$ este egal cu	4 1
	5 6

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Determinați mulțimile A și B știind că satisfac simultan condițiile:

a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b $A \cap B = \{3, 4\}$;

c $A \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$; d $\{1, 2\} \cap B = \varnothing$.

(1p) 5 Din cei 28 de elevi ai unei clase, 19 cunosc limba engleză și 16 cunosc limba franceză. Știind că fiecare elev al clasei cunoaște cel puțin o limbă străină din cele două, determinați numărul elevilor care cunosc doar limba engleză.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu

Test-model pentru Evaluarea Națională

Tema: Mulțimi

Biblioteca Județeană „Panait Istrati", Brăila

Biblioteca Județeană „Panait Istrati" din Brăila a evoluat în ultimii 15 ani de la nivelul de *bibliotecă tradițională*, caracterizată prin organizare spațială, colecții și împrumut de publicații la domiciliu și prin săli de lectură, la nivelul de *bibliotecă hibridă*. Acest tip de bibliotecă oferă, pe lângă serviciile tradiționale, și servicii care au la bază tehnologia informației și comunicațiilor: serviciile de informare și folosirea bibliotecii de la distanță.

Pentru a răspunde la cerințele 1 – 5, citește următorul text:

În tabelul de mai jos este prezentată o statistică privind numărul cărților împrumutate de un grup de elevi, pe parcursul a 10 zile:

Prenume elev	Dana	Mihnea	Cătălin	Rada	Dina	Andrei
Număr cărți împrumutate	7	8	5	6	7	4

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

1 Cardinalul mulțimii formată din prenumele elevilor care au împrumutat cărți este:

a 7; b 6; c 5; d 4.

2 Dacă A este mulțimea formată din numerele cărților împrumutate de grupul de elevi, atunci precizați valoarea de adevăr a fiecărei propoziții de mai jos:

a $4 \in A$; b $7 \in A$; c $\text{card}\,A = 6$; d $78 \notin A$.

3 Mulțimea formată din prenumele elevilor care au împrumutat mai mult de 5 cărți are:

a 2 elemente; b 3 elemente; c 4 elemente; d 5 elemente.

4 Reprezentați, utilizând o diagramă Venn-Euler, mulțimea formată din prenumele elevilor care au împrumutat mai puțin de 6 cărți.

5 Dacă C este mulțimea formată din numerele cărților împrumutate de grupul de elevi, atunci:

a $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 8\}$; b $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 9\}$;

c $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n + 2,\ 2 \leq n < 6\}$; d $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 9\}$.

Pentru a răspunde la cerințele 6 – 10, citește următorul text:

O parte dintre serviciile și facilitățile oferite de Ludoteca Bibliotecii Județene „Panait Istrati" din Brăila sunt: activități instructiv-educative și recreative, de grup sau individuale, spațiu de joacă pentru cei mici, vizionări de filme, audiții de povești, expoziții tematice. Mihnea, Dina, Cătălin și Dana participă la o activitate recreativă ce constă, printre altele, și în realizarea unei diagrame Venn-Euler care să conțină mulțimea literelor din prenumele fiecăruia.

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

6 Dacă $M = \{x | x$ este literă a cuvântului Mihnea$\}$ și $D = \{y | y$ este literă a cuvântului Dina$\}$, atunci mulțimea $M \cap D$ este:

a $\{i, n\}$; **b** $\{i, n, a\}$; **c** $\{a\}$; **d** $\{in, a\}$.

7 Dacă $A = \{x | x$ este literă a cuvântului Mihnea$\}$ și $B = \{y | y$ este literă a cuvântului Cătălin$\}$, atunci cu elemente din mulțimea $A \cup B$ nu se poate forma cuvântul:

a china; **b** lacăt; **c** chip; **d** cină.

8 Dacă $C = \{x | x$ este literă a cuvântului Dana$\}$ și $B = \{y | y$ este literă a cuvântului Dina$\}$, atunci determinați elementele mulțimii $C \setminus B$.

9 Dacă $A = \{x | x$ este literă a cuvântului Mihnea$\}$ și $C = \{y | y$ este literă a cuvântului Dana$\}$, atunci determinați cardinalul produsului cartezian $A \times C$.

10 Determinați prenumele colegului care a intrat în joc mai târziu, știind că produsul cartezian dintre $\{a, b\}$ și mulțimea M a literelor din prenumele colegului este

$$\{a, b\} \times M = \{(a, n), (a, d), (b, a), (a, a), (b, d), (b, n)\}.$$

Pentru a răspunde la cerințele 11–15, citește următorul text:

Un grup de 28 elevi împrumută diverse materiale din două secții ale bibliotecii județene. 17 dintre ei împrumută materiale de la Mediatecă (secția documente audio-video), iar 21 dintre ei de la Ludotecă (secția de copii; spațiu destinat preșcolarilor și elevilor din clasele primare). Fiecare dintre cei 28 de elevi împrumută cel puțin un material din cele două secții.

11 Determinați numărul elevilor care nu au împrumutat materiale de la Ludotecă.

12 Determinați numărul elevilor care nu au împrumutat materiale de la Mediatecă.

13 Determinați numărul elevilor care au împrumutat materiale de la ambele secții.

14 Determinați numărul elevilor care au împrumutat materiale doar de la Ludotecă.

15 Determinați numărul elevilor care au împrumutat materiale doar de la Mediatecă.

Informații despre Biblioteca Județeană „Panait Istrati" găsiți și online, la adresa http://www.bjbraila.ro.

1.5. Probleme cu caracter practic

1 În tabelul de mai jos sunt prezentate în grade Celsius, temperaturile, la ora 12:00, înregistrate într-o săptămână la Mamaia.

Ziua	luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică
Temperatura	28°	34°	38°	28°	36°	33°	34°

a Scrieți mulțimea temperaturilor înregistrate pe parcursul săptămânii.

b Scrieți mulțimea zilelor săptămânii în care temperatura a fost mai mare de 33°.

c Fie A mulțimea formată din zilele săptămânii. Precizați numărul submulțimilor lui A formate din 3 elemente, care conțin cel puțin două zile consecutive.

2 Utilizând diagrame Venn-Euler reprezentați mulțimile: A = {litere din scrierea cuvântului *noblețe*}; B = {litere din scrierea cuvântului *popor*}; C = {litere din scrierea cuvântului *orator*}.

3 Mulțimea $A = \{(1, c); (1, o); (1, t); (2, c); (2, o); (2, t)\}$ este produsul cartezian $B \times C$.

a Determinați cele două mulțimi B și C.

b Dacă mulțimea A ar fi egală cu $\{(c, 1); (o, 1); (t, 1); (c, 2); (o, 2); (t, 2)\}$, atunci mulțimile B și C ar rămâne aceleași de la punctul a?

4 Fiecare element al mulțimii $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ se colorează cu una din culorile roșu, galben și albastru, respectând următoarele reguli:

i suma dintre orice număr galben și orice număr albastru este divizibilă cu 3;

ii suma oricăror două numere roșii este divizibilă cu 3.

Arătați că numărul 3 este roșu și apoi calculați suma tuturor numerelor roșii.

5 Din cei 29 de elevi ai unei clase, 18 participă la olimpiada de informatică, iar 24 la olimpiada de matematică.

a Câți elevi participă la ambele olimpiade?

b Câți elevi participă numai la olimpiada de matematică?

6 Fie mulțimea $A = \{1, 4, 7, 10, 13, 15\}$. Eliminați un element al mulțimii A astfel încât elementele rămase să aibă o proprietate comună.

7 Un pătrat numeric 3×3 este format din 9 numere distinct așezate pe trei linii și trei coloane. Un pătrat numeric se numește *pătrat magic* dacă suma numerelor de pe linii, coloane și diagonale este aceeași.

a Construiți un *pătrat magic* cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$.

b Numim *pătrat multimagic* un pătrat numeric de tip 3×3 în care produsul elementelor de pe linii, coloane și diagonale este același. Construiți un astfel de pătrat.

8 Într-o clasă sunt 35 de elevi. Dintre aceștia, 18 elevi sunt pasionați de limba română, 19 de matematică și 13 de istorie. Se mai știe că 10 elevi sunt pasionați de limba română și matematică, 5 elevi de matematică și istorie, 1 elev de limba română și istorie, iar 3 elevi de toate cele trei obiecte. Câți elevi sunt pasionați numai de matematică? Câți elevi nu sunt pasionați de niciun obiect din cele precizate?

9 Într-o școală cu 1104 elevi se organizează în vacanța de primăvară 3 activități: o excursie în Delta Dunării, vizionarea unui spectacol și o întrecere sportivă. Se știe că fiecare elev participă la cel puțin o activitate și că:

a 51 participă la spectacol și la întrecerea sportivă, dar nu și în excursie;

b 63 participă numai la spectacol;

c 720 merg în excursie;

d 90 merg numai în excursie și la întrecerea sportivă;

e numărul celor care merg numai în excursie și la spectacol este de 3 ori mai mare decât al celor care participă la toate activitățile și este egal cu al celor care participă numai la întrecerea sportivă.

Determinați câți elevi merg numai în excursie.

10 Fie mulțimile $A = \{3, 7, 8, 9, 11, 35, 112\}$ și $B = \{2, 4, 6, 10, 12\}$. Adăugați un element din mulțimea A mulțimii B, astfel încât elementele din mulțimea B *să aibă o proprietate comună*.

11 În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de 5 elevi la un test.

elev	Dan	Radu	Irina	Maria	Denisa
nota	5	7	10	9	6

a Scrieți mulțimea elevilor participanți la test.

b Scrieți mulțimea notelor obținute de cei 5 elevi.

c Scrieți mulțimea elevilor care au obținut note mai mari decât 8.

d Scrieți mulțimea elevilor care au obținut note mai mici decât 5.

12 Mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 225\}$ se aranjează într-un tablou pătratic, astfel:

1	2	3	4	...	15
16	17	18	19	...	30
31	32	33	34	...	45
...	...	...	...	...	...
211	212	213	214	...	225

Determinați numărul care se află în centrul pătratului.

13 Dacă aranjăm elementele mulțimii $\{3, 6, 10, 13\}$ în ordinea 13, 3, 6, 10, atunci suma oricăror două numere vecine este pătrat perfect, $13 + 3 = 16$, $3 + 6 = 9$ și $6 + 10 = 16$. Dacă aranjăm elementele mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 15, 16\}$, astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie pătrat perfect, ce poziție ocupă numărul 16? Determinați o astfel de aranjare.

14 Determinați numărul de perechi ordonate (A, B) de mulțimi, ce au simultan proprietățile:

a $A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b $B \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; c $\text{card}\, A \cap B = 3$.

15 În aceeași zi, la ore diferite, 600 de elevi au participat la concursul de limba română sau la concursul de matematică. Știind că 425 de elevi au participat la matematică și 286 la limba română aflați:

a Câți elevi au participat la ambele concursuri?

b Câți elevi au participat numai la matematică?

I.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1 Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 100\}$. Studiați dacă există două mulțimi B și C care verifica simultan condițiile:

a $B \cup C = A, B \cap C = \varnothing$;

b produsul elementelor din B este egal cu produsul elementelor din C.

2 Adăugați la fiecare mulțime B un element din mulțimea A, astfel încât mulțimea B să poată fi scrisă folosind o proprietate comună a elementelor:

a $A = \{13, 38, 57, 77, 93\}$ și $B = \{24, 35, 46, 68, 79\}$;

b $A = \{220, 337, 584, 666, 820\}$ și $B = \{121, 154, 319, 451, 616\}$;

c $A = \{11, 14, 56, 174, 225\}$ și $B = \{55, 99, 143, 187, 231\}$.

3 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < x \leq a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y \vdots 5\}$. Determinați toate numerele naturale a știind că mulțimea $A \cap B$ are 20 elemente.

4 Fie $A_1 = \{1\}$; $A_2 = \{1; 3\}$; $A_3 = \{1; 3; 6\}$; $A_4 = \{1; 3; 6; 10\}$; $A_5 = \{1; 3; 6; 10; 15\}$; ...

a Arătați că există $k, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $55 \in A_k - A_p$.

b Există $t \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $2006 \in A_t$?

c Aflați numărul elementelor divizibile cu 5 din A_{2006}.

5 Determinați două mulțimi A și B știind că $A \cup B = \{1; ; 3;...; 100\}$, mulțimea A are 70 de elemente și suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B.

6 Fie mulțimile: $A = \{2^0; 2^0 + 2^1; 2^0 + 2^1 + 2^2; 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3; ...\}$ și
$B = \{3^0; 3^0 + 3^1; 3^0 + 3^1 + 3^2; 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3; ...\}$.
Determinați mulțimea $A \cap B$.

7 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{38} < x \leq 3^{24}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 3^{24} \leq y < 2^{42}\}$. Dacă a este numărul elementelor mulțimii A și b este numărul elementelor mulțimii B, comparați numerele naturale a și b.

8 Determinați elementele mulțimii $A = \{\overline{abc} \mid 2^{\overline{ab}} - 2^{\overline{bc}} = 2^{\overline{ca}}\}$.

9 Dacă a și b sunt numere, $a < b$, atunci notăm $A(a, b) = \{x \in \mathbb{N} \mid a < x < b\}$.

a Scrieți elementele mulțimii $A(55, 110) \cap A(56, 112)$.

b Dacă notăm cu $n(a, b)$ numărul elementelor mulțimii $A(a, b)$, calculați
$n(1, 2) + n(2, 4) + n(3, 6) + ... + n(56, 112)$.

10 Fie mulțimea A formată din numere naturale pare consecutive și resturile la împărțirea cu 11 a tuturor elementelor mulțimii A. Dacă suma resturilor este 1980, atunci aflați numărul elementelor mulțimii A.

Rezolvă problema chiar aici:

11 Fie A mulțimea numerelor naturale care au câte 2003 cifre, suma cifrelor fiecăruia dintre elementele mulțimii fiind tot 2003. Dacă $x \in A$ și 200 cifre ale lui x sunt egale cu 7, atunci cel puțin 1200 cifre ale lui x sunt egale cu 0.

Rezolvă problema chiar aici:

12 Fie A și B două mulțimi de numere naturale care satisfac proprietățile:

a $6 \in A \cap B$; b dacă $x \in A$, atunci $2 \cdot x + 1 \in A \cap B$; c dacă $3 \cdot x \in B$, atunci $x \in A$.

Arătați că $9 \in A$ și $11 \in B$.

13 Determinați numărul perechilor de mulțimi (A, B) astfel încât:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \text{ și } A \cap B \subset \{2; 4; 6; 8\}.$$

14 Mulțimea A are 50 de elemente, iar mulțimea B are 30 de elemente. Determinați numărul maxim și numărul minim de elemente ale mulțimii $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

15 Fie mulțimile: $A = \{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{5k^2 - 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Arătați că A și B sunt disjuncte.

16 Calculați suma elementelor mulțimii: $\{2 \cdot a + 3 \cdot b \mid 10 \cdot a + 17 \cdot b = 400,\ a, b \in \mathbb{N}\}$.

17 Aflați elementele mulțimii $M = \{x \mid x = 1990 + \overline{2ab} + \overline{3a5c},\ 15 \mid x, a > b > c\}$.

18 Un număr natural de forma x^n, unde x și n sunt numere naturale nenule se numește *tricubic* dacă se poate scrie sub forma $a^3 + 2 \cdot b^3 + c^3$, unde a, b, c sunt numere naturale nenule.

a Arătați că 81 este număr *tricubic*.

b Arătați că există oricât de multe numere *tricubice*.

Rezolvă problema chiar aici:

19 Aflați mulțimile X și Y care satisfac simultan condițiile:

a $3 \in X \cap Y$; b $Y \setminus \{1, 3, 6\} = X \cap \{2, 4\}$; c $X \setminus \{1\} = Y \cup \{2, 4, 5, 7\}$;

d $X \cup Y \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; e $\text{card}\, Y = \text{card}\, X + 3$.

20 Două mulțimi A și B au același număr de elemente, numere naturale consecutive. Determinați cele două mulțimi, știind că suma elementelor celor două mulțimi este 170, iar suma elementelor mulțimii $A \cap B$ este 17.

21 Determinați mulțimile A, B și C care îndeplinesc simultan condițiile:

a $A \cap C = \{2\}$; b $A \cap B = \{3\}$; c $A \setminus C = \{3\}$;

d $B \cap C = \{4\}$; e $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$; f $A \cup B = \{x \mid 2 \leq x < 6\}$.

22 Determinați mulțimile A, B și C, nevide și distincte două câte două, astfel încât:

a $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\}$; b $A \cap B \cap C = \varnothing$; c $A \setminus C = \{1\}$; d $C \setminus A = \{3\}$.

23 Determinați submulțimile A și B ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, astfel încât:

a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; b $A \cap B = \{3, 4\}$; c $2 \notin A \setminus B$; d $\operatorname{card} A > \operatorname{card} B$.

24 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 2006\}$. Arătați că nu există două submulțimi B și C ale lui A astfel încât $B \cap C = \varnothing$, $B \cup C = A$ și suma elementelor din B să fie egală cu suma elementelor din C.

25 Fie M mulțimea ale cărei elemente sunt numerele naturale mai mici decât 10^4, care prin împărțire la 2007 dau restul mai mic decât 48.

a Câte elemente are mulțimea M?

b Găsiți cinci elemente ale lui M astfel încât prin împărțirea sumei lor la 2007 să obțineți restul 1.

c Aflați restul împărțirii sumei tuturor elementelor mulțimii M la 2007.

26 Aflați $n \in \mathbb{N}$, știind că mulțimea $\{2^n + 1; 3^n, 4^n + 1; 17\}$ are cardinalul egal cu 3.

27 Se consideră o mulțime A de numere naturale nenule cu proprietatea că pentru orice $x, y \in A$ și pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, nu ambele nule, avem: $n \cdot x + m \cdot y \in A$.
Determinați mulțimea A știind că ea conține numerele 3 și 5.

28 Fie $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = \overline{ab} = S(x) + P(x)\}$, unde $S(x)$ și $P(x)$ reprezintă suma, respectiv produsul cifrelor numărului x. Determinați $\operatorname{card} A$.

29 Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 3 \cdot a^2 + a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 4 \cdot b^2 + 1, b \in \mathbb{N}\}$.

a Determinați $\operatorname{card} A \cap B$.

b Arătați că oricum am alege 7 elemente din $A \cup B$, există cel puțin două, printre acestea, a căror diferență este divizibilă cu 10.

30 Fie mulțimea $A = \{2^p \cdot 5^q \mid p, q \in \mathbb{N}, p \leq 10, q \leq 10\}$.

a Câte numere din A nu au ultima cifră egală cu 0?

b Câte numere din A se divid cu 10^3, dar nu se divid cu 10^4?

c Aflați cel mai mare număr din A cu proprietatea $2 \cdot p + 3 \cdot q = 40$.

31 Se dau mulțimile $A = \{0, 4, 7, x\}$ și $B = \{1, 5, x\}$. Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât mulțimea $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ să aibă un număr minim de elemente.

32 Fie mulțimea $A = \{1, 4, 7, 10, ..., 97, 100\}$ și o submulțime B a lui A formată din 19 elemente distincte. Arătați că există în B două elemente distincte a căror sumă să fie egală cu 104.

33 Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 1000\}$. Se poate împărți A în 500 de submulțimi disjuncte două câte două, fiecare conținând două elemente a căror sumă să fie pătrat perfect? Justificați răspunsul.

34 Fie mulțimea $A = \{500, 501, 502, ...,550\}$. Arătați că nu există 5 submulțimi ale lui A astfel încât reuniunea lor să fie A și suma elementelor din fiecare submulțime să fie strict mai mică decât 5555.

35 Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, ...,2006\}$. Care este numărul maxim de elemente ale unei submulțimi B a lui A, astfel încât produsul elementelor mulțimii B să nu fie divizibil cu 36?

36 O mulțime de numere naturale nenule A cu 4 elemente se numește *productivă* dacă orice element al lui A este produsul sau câtul a două elemente distincte din A.

a Arătați că mulțimea $A = \{2, 6, 12, 24\}$ este *productivă*.

b Arătați că nicio mulțime *productivă* nu conține elementul 1.

c Determinați numărul submulțimilor *productive* ale mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 100\}$.

37 Se scriu numerele naturale nenule, în ordine, începând cu 1 și se formează mulțimile $A_1 = \{1\}$, $B_1 = \{2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $B_2 = \{5, 6\}$, $A_3 = \{7, 8, 9\}$, $B_3 = \{10, 11, 12\}$ etc. Determinați suma elementelor mulțimii A_{2006}.

38 Mulțimea $A = \{a, b, c, d, e\}$ are următoarele proprietăți:

a media aritmetică a elementelor mulțimii A este egală cu 2008;

b eliminând cel mai mic element al mulțimii A, media aritmetică a elementelor rămase este 2010;

c eliminând cel mai mare element al mulțimii A, media aritmetică a elementelor rămase este 2006.

Determinați numărul de mulțimi A care au aceste proprietăți.

39 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., n, n+1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu M_1 mulțimea tuturor mulțimilor formate cu două elemente pare din mulțimea A, cu M_2 mulțimea tuturor mulțimilor cu două elemente impare din A și cu M mulțimea tuturor mulțimilor cu două elemente din A. Arătați că $2 \cdot \text{card}(M_1 \cup M_2) < \text{card}\, M$.

40 O mulțime de numere naturale nenule S, cu 4 elemente, se numește *completă* dacă orice element al lui S este suma sau diferența a două elemente distincte din S.

a Arătați că orice multiplu de 13 este suma elementelor unei mulțimi *complete*.

b Determinați numărul submulțimilor *complete* ale mulțimii $\{1, 2, ..., 50\}$.

41 Fie X, Y două mulțimi distincte, nevide, de numere naturale. Spunem că X divide Y dacă orice element din X divide cel puțin un element din Y.

a Verificați dacă A divide B, unde $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 4, 12\}$.

b Găsiți două mulțimi distincte A și B, având fiecare trei elemente astfel încât A divide B și B divide A.

c Determinați două mulțimi distincte A și B, având fiecare 2006 elemente astfel încât A divide B și B divide A.

42 O mulțime de trei numere naturale nenule este *binecrescută* dacă un element al său este suma celorlalte două. Aflați numărul submulțimilor *binecrescute* ale mulțimii $\{1, 2, ..., 2006\}$.

43 O mulțime de trei numere naturale nenule se numește *simpatică* dacă unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două.

a Determinați mulțimile *simpatice* formate cu numerele naturale de la 1 la 10.

b Câte mulțimi *simpatice* se pot forma cu numerele naturale de la 1 la 2006?

44 Se dă mulțimea $A = \{9, 14, 19, 24, ..., 10\,044, 10\,049\}$.

a Determinați cardinalul mulțimii A.

b Dacă B este o submulțime a lui A, astfel încât $\text{card}\, B = 1006$, arătați că în B există două numere a căror sumă este 10 063.

45 Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2006} < x \leq 2^{2007}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 3^{1003} \leq y < 3^{1004}\}$. Comparați $\text{card}\, A$ cu $\text{card}\, B$.

II

Divizibilitatea numerelor naturale

II.1. Divizibilitatea numerelor naturale (recapitulare)

Definiție. Numărul natural a *este divizibil* (se divide cu numărul natural b, dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$.
Pentru a nota o relație de divizibilitate, vom scrie într-unul din următoarele moduri:
- $a \,\vdots\, b$ se citește „a se divide cu b" sau „a este multiplu al lui b";
- $b \mid a$ se citește „b divide a" sau „b este un divizor al lui a".

Observații:
1 Dacă a și b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$, atunci a este divizibil cu b, dacă restul împărțirii lui a la b este egal cu zero.
2 Numărul natural 0 este divizibil cu orice număr natural, dar 0 divide doar pe 0.

Exemple:
1 $24 \,\vdots\, 8$, deoarece $24 = 8 \cdot 3$.
2 $3 \mid 15$, deoarece $15 = 3 \cdot 5$.
3 $119 \,\vdots\, 7$, deoarece $119 : 7 = 17$, rest 0.
4 $2415 \not\vdots\, 13$, deoarece $2415 : 13 = 185$, rest 10.

Divizori improprii. Divizori proprii. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Numerele 1 și a se numesc divizori *improprii* ai numărului a. Ceilalți divizori ai lui a (dacă există) se numesc divizori *proprii*.

Observație. Orice număr natural este divizor al numărul natural 0, iar numărul natural 1 are un singur divizor, și anume pe 1. Nu se pune problema existenței divizorilor proprii, respectiv improprii, pentru numerele 0 și 1.

Exemplu: Divizorii improprii ai lui10 sunt 1și 10, iar divizorii proprii sunt 2 și 5.
Mulțimea divizorilor naturali ai numărului natural n este mulțimea D_n a tuturor numerelor naturale care divid pe n. Se notează: $D_n = \{d \in \mathbb{N} \mid n \,\vdots\, d\}$.

Exemple: $D_3 = \{1; 3\}$; $D_{14} = \{1; 2; 7; 14\}$; $D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$; $D_0 = \mathbb{N}$.
Mulțimea multiplilor naturali ai numărului natural n este mulțimea tuturor numerelor naturale care se divid cu n. Se notează: $M_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \,\vdots\, n\}$.

Exemple: $M_3 = \{0; 3; 6; 9; \ldots\}$; $M_{12} = \{0; 12; 24; 36; \ldots\}$; $M_0 = \{0\}$.

Observație. Dacă n este un număr natural nenul, atunci D_n este o mulțime finită, iar M_n este o mulțime infinită. Pentru $m = 0$ avem $D_0 = \mathbb{N}$ și $M_0 = \{0\}$.

Numere prime. Numere compuse. Un număr natural care are exact doi divizori se numește *număr prim*. Un număr natural, mai mare decât 1, care are cel puțin trei divizori, se numește *număr compus*.
Cu alte cuvinte, un număr natural $p \geq 2$ este prim dacă și numai dacă singurii săi divizori sunt 1 și p, iar un număr natural este compus dacă are cel puțin un divizor propriu.

Exemple: Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... sunt numere prime.
Numerele 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ... sunt numere compuse.

Observații:

1 Numerele naturale 0 și 1 nu sunt nici prime și nici compuse.

2 2 este singurul număr prim par.

Criterii de divizibilitate. Un criteriu de divizibilitate este o regulă prin care se stabilește dacă numărul natural a este divizibil sau nu cu numărul natural nenul b, fără a efectua împărțirea lui a la b.

Criteriul de divizibilitate cu 10. Un număr natural este divizibil cu 10 dacă și numai dacă ultima sa cifră este 0.

Criteriul de divizibilitate cu 10^k. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Un număr natural de cel puțin $k+1$ cifre este divizibil cu 10^k dacă și numai dacă ultimele sale k cifre sunt egale cu 0.
Cu alte cuvinte, un număr natural este divizibil cu 100 (1 000, 10 000 etc.), dacă și numai dacă ultimele sale două (trei, patru etc.) cifre sunt egale cu 0.

Observație. Restul împărțirii unui număr natural n la 10 este egal cu ultima cifră a lui n. Analog, numărul format de ultimele două (trei, patru etc.) cifre ale lui n reprezintă restul împărțirii lui n la 100 (1000, 10 000 etc.).

Criteriul de divizibilitate cu 2. Un număr natural este divizibil cu 2, dacă și numai dacă ultima sa cifră este pară (este divizibilă cu 2).

Criteriul de divizibilitate cu 5. Un număr natural este divizibil cu 5, dacă și numai dacă ultima sa cifră este 0 sau 5 (este divizibilă cu 5).

Criteriul de divizibilitate cu 4, respectiv cu 25. Un număr natural este divizibil cu 4, respectiv cu 25, dacă și numai dacă numărul format din ultimele sale două cifre este divizibil cu 4, respectiv cu 25.
Notând cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n, iar cu $\overline{zu}(n)$ numărul format de ultimele două cifre ale lui n, rezultă că:

1 $n \vdots 2 \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2 $n \vdots 5 \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 5\}$;

3 $n \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{zu}(n) \in \{00, 04, 08, 12, 16, \ldots, 96\}$;

4 $n \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{zu}(n) \in \{00, 25, 50, 75\}$.

Criteriul de divizibilitate cu 3, respectiv cu 9. Un număr natural este divizibil cu 3, respectiv cu 9, dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3, respectiv cu 9.

1 $\overline{a_1a_2\ldots a_k} \vdots 3 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_k \vdots 3$;

2 $\overline{a_1a_2\ldots a_k} \vdots 9 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_k \vdots 9$.

Consecințe asupra restului împărțirii unui număr natural n la 2, 3, 4, 5, 9, 25

1 Restul împărțirii lui n la 2, sau la 5 este egal cu restul împărțirii la 2, respectiv la 5, a ultimei cifre a lui n.

2 Restul împărțirii lui n la 4, sau la 25, este egal cu restul împărțirii la 4, respectiv la 25, a numărului format de ultimele două cifre ale lui n.

3 Restul împărțirii lui n la 3, sau la 9, este egal cu restul împărțirii la 3, respectiv la 9, a sumei cifrelor numărului n.

Exersare

1 Completați cu unul dintre simbolurile $\vdots$ sau $\not\vdots$ pentru a obține propoziții adevărate:

a 18 ... 3; b 24 ... 6; c 9 ... 18; d 3 ... 5; e 0 ... 8; f 7 ... 0; g 20 ... 5; h 0 ... 0.

2 Completați cu unul din simbolurile $\mid$ sau $\nmid$ pentru a obține propoziții adevărate:

a 5 ... 45; c 14 ... 2; e 65 ... 13; g 2 ... 0;

b 7 ... 63; d 9 ... 36; f 17 ... 85; h 0 ... 0.

3 Completați cu unul din simbolurile $\vdots$ sau $\mid$ pentru a obține propoziții adevărate:

a 12 ... 4; c 20 ... 4; e 13 ... 91; g 17 102;

b 19 ... 38; d 63 ... 7; f 84 ... 14; h 121 ... 11.

4 Enumerați elementele mulțimii D_n a divizorilor numărului n pentru:

a $n = 10$; c $n = 24$; e $n = 84$; g 42;

b $n = 6$; d $n = 35$; f $n = 100$; h 60.

5 Determinați numerele divizibile cu 10 de forma:

a $\overline{7a}$; b $\overline{39b}$; c $\overline{72c0}$; d $\overline{8xd}$.

6 Scrieți toate numerele divizibile cu 2 de forma:

a $\overline{79a}$; b $\overline{6b4}$; c $\overline{8cc}$; d $\overline{d94}$.

7 Determinați cifrele a, b, c, d pentru care numerele următoare sunt divizibile cu 5:

a $\overline{57a}$; b $\overline{6b0}$; c $\overline{c85}$; d $\overline{206d}$.

8 Scrieți toate numerele divizibile cu 3 de forma:

a $\overline{7a2}$; b $\overline{95b}$; c $\overline{203c}$; d $\overline{d40}$.

Rezolvă problema chiar aici:

9 Determinați cifra x pentru care următoarele relații sunt adevărate:

a $\overline{5x} \vdots 2$; b $\overline{42x} \vdots 3$; c $\overline{73x} \vdots 5$; d $9 \mid \overline{43x2}$;

e $5 \mid \overline{47x}$; f $10 \mid \overline{89x}$; g $\overline{8x5} \vdots 25$; h $4 \mid \overline{87x6}$;

i 3 este un divizor al numărului $\overline{47x}$; j $\overline{20x}$ este multiplu de 3.

10 Găsiți numerele naturale divizibile cu 4, de forma:

a $\overline{32a}$; b $\overline{3a2}$; c $\overline{31a}$; d $\overline{3a0}$; e $\overline{3a1}$; f $\overline{3a28}$.

11 Găsiți numerele naturale divizibile cu 9, de forma:

a $\overline{15a}$; b $\overline{2a9}$; c $\overline{313a}$; d $\overline{5a7}$; e $\overline{12ab0}$; f $\overline{a2b8}$.

Consolidare

12 **a** Găsiți toate perechile de divizori ai numărului 24, al căror produs să fie 24.

b Determinați toate perechile de divizori ai numărului 12, a căror sumă să fie număr impar.

c Găsiți doi divizori ai numărului 48, a căror sumă să fie pătrat perfect.

d Scrieți două numere naturale ce admit multipli de forma $\overline{4x}$.

e Scrieți un număr natural cel mult egal cu 18, ce are exact șase divizori.

13 Se dau mulțimile $A = \{5; 6; 8; 10; 12; 15\}$ și $B = \{2; 3; 4; 5\}$. Determinați toate perechile de numere (a, b), știind că $a \in A$, $b \in B$ și a este divizibil cu b.

14 Determinați numărul n, dacă mulțimea divizorilor săi este:

a $D_n = \{1, 16, 32, 4, 2, 8\}$; b $D_n = \{18, 6, 9, 36, 3, 12, 4, 1, 2\}$.

15 Aflați numerele naturale x, y și z, știind că avem simultan:

a $x + 1$ este divizor al numărului 25;

b $y - 1$ este divizor impropriu al numărului 37;

c 20 este un multiplu al numărului natural $2z - 7$.

16 Determinați numărul natural n, știind că:

a $n + 3$ este un divizor al numărului 15;

b $2n - 7$ este un divizor impropriu al lui 91;

c $3n + 1$ este un divizor propriu al lui 144.

17 a Determinați un număr prim și un număr par a căror sumă este egală cu 104.

b Suma a două numere prime este 99. Aflați cele două numere.

c Diferența a două numere prime este 95. Determinați cele două numere.

d Produsul a două numere prime este 65. Aflați cele două numere.

Rezolvă problema chiar aici:

18 Determinați cinci multipli consecutivi ai numărului 3, știind că suma lor este 540.

19 Determinați în fiecare caz numerele naturale x pentru care sunt valabile următoarele relații:

a $9 \vdots (x - 1)$; b $25 \vdots (2x + 1)$; c $48 \vdots (5x + 3)$;

d $x - 1 \mid 8$; e $2x - 1 \mid 35$; f $3x + 2 \mid 65$.

20 a Prin împărțirea unui număr natural la 18 se obține restul 12. Arătați că numărul dat este divizibil cu 6.

b Împărțind un număr natural a la 48 se obține restul 36. Arătați că numărul dat este divizibil cu orice divizor al lui 12.

Aprofundare

21 a Există un număr prim p, astfel încât $p + 7$ să fie tot număr prim?

b Determinați numerele prime a, b, c, știind că $a + b + c = 1998$ și $b - c = 42$.

c Găsiți numerele prime x, y, z, știind că $2x + y + z = 13$.

22 **a** Arătați că suma a patru puteri ale numărului 5, având exponenții numere pare nenule consecutive, se divide cu 130.

b Arătați că suma a cinci puteri ce au baza egală cu 2 și exponenții numere impare consecutive, se divide cu 682.

23 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$. Spunem că o mulțime $B = \{a, b, c, d\} \subset A$ are proprietatea (P) dacă a, b, c, d sunt divizibile cu 134 și $a + b + c + d = 2010$.

a Dați un exemplu de mulțime B cu proprietatea (P).

b Determinați toate mulțimile B care au proprietatea (P).

Probleme de șapte stele

24 Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Stabiliți dacă există două mulțimi B și C care verifică simultan condițiile:

a $B \cup C = A$; **b** $B \cap C = \varnothing$;

c Produsul elementelor lui B este egal cu produsul elementelor lui C.

25 **a** Determinați numerele naturale n, pentru care fiecare din numerele $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 15$, este număr prim.

b $A = \{n, n + 4, n + 6, n + 10, n + 12, n + 16, n + 22\}$. Știind că toate elementele mulțimii A sunt numere prime, determinați numărul natural n.

26 Fie numărul $n = 4^{2011}$.

a Determinați restul împărțirii numărului n la 3.

b Demonstrați că n are cel puțin 1207 cifre.

c Eliminăm câteva cifre de la începutul numărului n, pe care le adunăm la numărul rămas. Continuăm procedeul până obținem un număr de zece cifre. Demonstrați că acest număr are cel puțin două cifre egale.

27 Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care numărul $3^n + 5^n$ este multiplu al numărului $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

Rezolvare:

Observăm că:

$3(3^{n-1} + 5^{n-1}) = 3^n + 3 \cdot 5^{n-1} < 3^n + 5 \cdot 5^{n-1} = 3^n + 5^n$ (1)

$5(3^{n-1} + 5^{n-1}) = 5 \cdot 3^n + 5^n > 3 \cdot 3^{n-1} + 5^n = 3^n + 5^n$ (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă $3(3^{n-1} + 5^{n-1}) < 3^n + 5^n < 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$.

Deoarece $3(3^{n-1} + 5^{n-1})$, $4(3^{n-1} + 5^{n-1})$, $5(3^{n-1} + 5^{n-1})$ sunt trei multipli consecutivi ai numărului $3^{n-1} + 5^{n-1}$, și, cum $3^n + 5^n$ este multiplu al numărului $3^{n-1} + 5^{n-1}$, singura posibilitate este $3^n + 5^n = (3^{n-1} + 5^{n-1})$.

Obținem $3^{n-1} = 5^{n-1}$, de unde $n - 1 = 0$, adică $n = 1$.

II.2. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

Teorema fundamentală a aritmeticii. Orice număr natural compus se poate scrie ca produs de puteri de numere prime.
Făcând abstracție de ordinea factorilor, descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime este unică.

Exemple: $8 = 2^3$; $10 = 2 \cdot 5$; $28 = 2^2 \cdot 7$; $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; $999 = 3^3 \cdot 37$.

$$\begin{array}{r|l} 160 & 2 \cdot 5 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 765 & 3 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$160 = 2^5 \cdot 5$ $\qquad$ $765 = 3^2 \cdot 5 \cdot 17$ $\qquad$ $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$

Numărul divizorilor naturali ai unui număr natural compus este egal cu produsul succesorilor exponenților puterilor ce apar în descompunerea în produs de puteri de numere prime. Altfel spus, numărul divizorilor naturali ai numărului $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ este $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$.

Exemple: 1 $28 = 2^2 \cdot 7^1$, deci numărul divizorilor lui 28 este $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$.
Într-adevăr, $D_{28} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$, deci $\text{card}D_{28} = 6$.

2 $27 = 3^3 \Rightarrow \text{card}\, D_{27} = 3 + 1 = 4$, adică 27 are 4 divizori.

Observație. Pentru a determina toți divizorii unui număr natural putem proceda astfel: un număr ce se descompune în produs de puteri de numere prime sub forma $a^m \cdot b^n \cdot c^p \ldots$, va avea ca divizori toate numerele ale căror descompuneri în produs de puteri de numere prime au forma $a^x \cdot b^y \cdot c^z \ldots$, cu $0 \le x \le m$, $0 \le y \le n$, $0 \le x \le p$ ș.a.m.d.

Exemplu: $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Divizorii lui 36 sunt: $1, 2, 3, 2^2, 3^2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2$.

Exersare

1 Scrieți descompunerile numerelor 12, 36, 50, 84, 90, 100, 200 în produse de puteri de numere prime.

2 Scrieți ca produse de numere prime: 15, 21, 55, 119, 143, 1 850, 21 300.

3 Descompuneți în produs de puteri de numere prime numerele: 54; 72; 120; 3 528.

4 Determinați două numere naturale, cele mai mici posibile, care se descompun în produse de câte doi factori primi diferiți.

5 Care este cel mai mic număr natural care admite o descompunere în factori primi de forma $a \cdot b \cdot c$, în care numerele prime a, b și c sunt diferite?

6 Care este cel mai mic număr natural a cărui descompunere în factori conține primele cinci numere prime?

7 În câte moduri puteți scrie numărul 231 ca produsul dintre un număr prim și un număr compus?

8 Completați schemele și determinați numărul natural, n, în fiecare caz.

$$\begin{array}{r|l} n & 2 \\ & 3 \\ 147 & \\ 49 & \\ & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n & 2 \\ & 5 \\ & 5 \\ & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n & 2 \cdot 5 \\ & 2 \\ & 5 \\ 13 & \\ 1 & \end{array}$$

9 Completați pentru a obține propoziții adevărate:

a Dacă $72 = 2^n \cdot 3^m$, atunci $n = ...$ și $m = ...$

b Dacă $180 = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^p$, atunci $n = ...$, $m = ...$, și $p = ...$

10 Câți divizori au fiecare dintre numerele următoare: 16, 98, 126, 275, 3131, 23023.

11 Scrieți mulțimile divizorilor numerelor: 99, 187, 360, 1111, 2553.

Consolidare

12 Scrieți numărul 735 ca produsul a două numere compuse. Câte soluții există?

13 Descompuneți numărul 1 260 în produs de trei numere compuse în patru moduri.

14 a Numărul a este prim. Câți divizori are numărul a^2? Dar a^3?

b Câți divizori are numărul $a^2 \cdot b$, știind că a și b sunt numere prime, distincte.

15 Determinați numărul $\overline{a1bcde}$ a cărui descompunere în factori este indicată în figura alăturată:

$$\begin{array}{r|l} \overline{a1bcde} & 2^2 \cdot 5^2 \\ \overline{a1bc} & \\ \overline{a05} & 3 \\ \overline{3x} & 7 \\ & \\ 1 & \end{array}$$

16 Scrieți toate numerele mai mici decât 100 care au exact trei divizori.

17 Fie a și b două numere prime.

a Determinați m știind că a^m admite șase divizori.

b Determinați m și n știind că $a^m \cdot b^n$ are exact șase divizori.

18 Un număr care are exact șase divizori poate avea o descompunere în factori de forma $a^m \cdot b^n \cdot c^p$, unde m, n, p sunt numere naturale nenule?

19 Dați cinci exemple de numere ce admit exact șase divizori.

20 Determinați numărul n știind că singurii săi divizori numere prime sunt 2 și 3, iar mulțimea divizorilor săi are 10 elemente.

21 Dați două exemple de numere naturale, n, care îndeplinesc simultan condițiile:

a singurul divizor număr prim al lui n este 7; b $\text{card}D_n$ este număr prim.

22 Determinați numărul n știind că îndeplinește simultan condițiile:
a doi dintre divizorii săi sunt 12 și 15; b are exact 12 divizori.

23 Determinați cel mai mic număr natural a cărui descompunere în factori este de forma $a^b \cdot b^c \cdot c^a$ $(a \neq b \neq c \neq a)$.

24 Determinați $\overline{ab}+\overline{cd}$, dacă $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 713$.

25 Aflați trei numere naturale, consecutive, al căror produs este egal cu:
a 24; b 720; c 15 600; d 2 803 080.

Aprofundare

26 Determinați numerele naturale x și y din relația $x^2y = 368$.

27 Determinați numerele naturale x și y din relația $x^2(y + 4) = 396$.

28 Rezolvați ecuația $3^{n+3} - 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3\,078$, știind că $n \in \mathbb{N}$.

29 a Determinați numărul divizorilor numărului $\overline{aaaa}$ știind că a este număr prim.

b Dacă $\overline{ab}$ este număr prim, determinați numărul divizorilor numărului $\overline{abab}$.

c Fie $\overline{abc}$ un număr prim. Aflați numărul divizorilor numărului $\overline{abcabc}$.

d Care este cel mai mare număr de forma $\overline{ababab}$ care are cel mai mic număr de divizori?

30 a Care este cel mai mic număr natural care are exact 15 divizori?

b Determinați cel mai mic număr natural care are 42 divizori.

c Determinați cel mai mic număr natural care are 14 divizori.

31 Aflați cel mai mic număr natural A, divizibil cu 11, știind că $A = mp$, numărul natural m are exact 3 divizori, iar numărul natural p are exact 6 divizori. Câți divizori are numărul A?

32 a Determinați un număr natural ce are doar patru divizori, știind că produsul divizorilor săi este egal cu 1521.

b Aflați un număr natural care are exact patru divizori, știind că produsul divizorilor săi este egal cu 4225.

c Determinați un număr natural care are exact șase divizori proprii, știind că produsul divizorilor săi proprii este egal cu 2097152.

Probleme de șapte stele

33 Aflați două numere naturale, consecutive, al căror produs este egal cu:
a 12; b 1122; c 111222; d $\underbrace{111\ldots1}_{\text{de } 2005 \text{ ori}}\underbrace{222\ldots2}_{\text{de } 2005 \text{ ori}}$.

34 Aflați două numere naturale, consecutive, al căror produs este egal cu:
a 42; b 4422; c 444222; d $\underbrace{444\ldots4}_{\text{de } 1001 \text{ ori}}\underbrace{222\ldots2}_{\text{de } 1001 \text{ ori}}$.

35 Mulțimea $A \subset \mathbb{N}^*$ are zece elemente, a căror sumă este egală cu 62. Arătați că produsul elementelor se divide cu 60.

36 Numim *drăguț* un număr natural $n > 1$ care este egal cu produsul divizorilor săi proprii. Găsiți primele 11 numere drăguțe și arătați că suma lor este cub perfect.

II.3. Divizori comuni. Determinarea c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere naturale

Cel mai mare divizor comun. Date fiind două sau mai multe numere naturale, nu toate nule, mulțimea divizorilor comuni este nevidă, deoarece conține cel puțin un element, și anume pe 1.

Definiție. Numărul natural d este *cel mai mare divizor comun* al numerelor naturale a și b, nu ambele nule, dacă satisface simultan condițiile:

a d divide pe a și d divide pe b;

b d este divizibil cu orice divizor comun al numerelor a și b.

Cel mai mare divizor comun al numerelor a și b se notează c.m.m.d.c. (a, b) sau (a, b).

$$(a, b) = d \text{ dacă și numai dacă } \begin{cases} d \mid a \text{ și } d \mid b \\ \text{dacă } i \mid a \text{ și } i \mid b, \text{ atunci } i \mid d \end{cases}$$

Observații:

1 Cel mai mare divizor comun al numerelor 0 și $a \in \mathbb{N}^*$ este a.

2 Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a \mid b$, atunci $(a, b) = a$.

3 În mod asemănător se poate defini și noțiunea de cel mai mare divizor comun a trei sau mai multe numere naturale, nu toate nule.

4 Mulțimea divizorilor comuni a mai multor numere date coincide cu mulțimea divizorilor celui mai mare divizor comun al acestora.

Algoritm pentru determinarea c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere

1 Se descompun numerele în produs de puteri de numere prime.

2 Cel mai mare divizor comun este produsul *factorilor primi comuni*, luați *o singură dată*, cu *exponentul cel mai mic* care apare în descompunerile numerelor date.

Exemplu: $\left.\begin{array}{l} 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \\ 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}\right| \Rightarrow$ c.m.m.d.c. $(336; 360) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Numere prime între ele. Două numere naturale a și b se numesc *prime între ele*, dacă cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 1.

Două numere prime între ele se mai numesc și *relativ prime* sau *coprime*.

Observații:

1 Două numere prime diferite sunt prime între ele.

2 Două numere prime între ele nu sunt neapărat numere prime.

Exemplu: $\left.\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 35 = 5 \cdot 7 \end{array}\right| \Rightarrow (24, 35) = 1 \Rightarrow 24$ și 35 sunt *prime între ele*.

Aplicații privind cel mai mare divizor comun

1 Fie a și b două numere naturale nenule și d cel mai mare divizor comun al lor. Atunci există numerele naturale prime între ele x și y, astfel încât $a = dx$ și $b = dy$.

2 Dacă un număr natural d se divide cu două numere naturale a și b, ce sunt prime între ele, atunci d se divide și cu produsul lor.

3 Dacă mai multe numere naturale a, b, c se divid cu același număr natural nenul i, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c se divide cu i.

4 **Teorema lui Gauss.** Dacă produsul numerelor naturale a și b se divide cu numărul natural i, iar a și i sunt numere prime între ele, atunci b se divide cu i.

Exersare

1 a Completați tabelul următor:

divizorii numărului 36												
divizorii numărului 90												

b Identificați divizorii comuni și apoi determinați cel mai mare divizor comun.

c Completați tabele asemănătoare pentru următoarele perechi de numere: 15 și 20; 24 și 42; 45 și 60. Stabiliți, de fiecare dată, cel mai mare divizor comun.

2 Completați, fără a descompune în factori primi:

a $(12, 28) =$; b $(10, 14) =$; c $(15, 35) =$;
d $(42, 36) =$; e $(16, 36) =$; f $(100, 80) =$;
g $(14, 49) =$; h $(42, 21) =$; i $(35, 6) =$.

3 Determinați cel mai mare divizor comun al fiecărei grupe de numere:

a 16, 24, 40; b 120, 180, 240; c 15, 35, 45;
d 250, 375, 650; e 27, 54, 180; f 144, 156, 192;
g 28, 49, 63; h 1 020, 595, 1 105; i 63; 88; 65.

4 Pentru fiecare din perechile de numere naturale enumerate mai jos, determinați cel mai mare divizor comun și scrieți mulțimea divizorilor comuni.

a 26; 169; b 50; 125; c 36; 144; d 48; 108;
e 56; 72; f 104; 91; g 26; 143; h 864; 468.

5 a Aflați cel mai mare număr natural care divide simultan numerele 44, 121, 176.

b Găsiți 4 numere naturale care divid simultan numerele 45, 75 și 105.

6 Alcătuiți câte trei perechi de numere, fiecare conținând un număr compus, astfel încât cel mai mare divizor comun al lor să fie:

a egal cu 1; b egal cu 2; c egal cu 3; d egal cu 6.

7 Alcătuiți perechi de numere nenule ce au ca cel mai mare divizor comun numărul indicat:

a 9; b 10; c 5;
d 14; e 22; f 101.

8 Identificați perechile de numere prime între ele:

a 5; 9; b 10; 12; c 15; 27; d 10; 11;
e 9; 35; f 20; 72; g 16; 188; h 231; 321.

9 a Scrieți cinci perechi alcătuite din numere prime. Stabiliți c.m.m.d.c. al fiecărei perechi și justificați rezultatul obținut.

b Scrieți cinci perechi de numere prime între ele, astfel încât componentele fiecărei perechi să fie numere compuse.

Consolidare

10 a Determinați trei valori ale numărului x pentru care c.m.m.d.c. $(18, x) = 9$.

b Determinați două valori ale numărului x pentru care 18 și x sunt prime între ele.

c Există vreun număr natural x pentru care c.m.m.d.c. $(18; x) = 7$?

11 Înlocuiți corespunzător numerele a și b, astfel încât să aibă loc relațiile:

a $(18; a) = 6$, cu $a > 8$;
b $(25; a; b) = 5$, cu $a \neq b$;
c $(a; b; 16) = 8$; cu $a > b$;
d $(a; a + b) = 2$; cu $a < b$.

12 Numerele naturale a și b au cel mai mare divizor comun egal cu 18. Cu care dintre valorile următoare poate fi egală suma $a + b$? Dați exemple pentru situațiile în care răspunsul este afirmativ.

a 135; b 154; c 198; d 256.

13 Numerele naturale a și b au cel mai mare divizor comun egal cu 6. Cu care dintre numerele următoare poate fi egal produsul $a \cdot b$? Dați exemple pentru situațiile în care răspunsul este afirmativ.

a 124; b 154; c 180; d 252.

14 Se știe că dacă a și b două numere naturale nenule, iar d este cel mai mare divizor comun al lor, există numerele naturale prime între ele x și y, astfel încât $a = dx$ și $b = dy$. Verificați această afirmație pentru următoarele perechi de numere:

a $a = 20; b = 35$; b $a = 50; b = 175$; c $a = 28; b = 49$;
d $a = 34; b = 85$; e $a = 24; b = 60$; f $a = 114; b = 665$.

15 Arătați că 100 001 și 300 003 sunt compuse și că au doi divizori comuni.

16 Utilizând doar cifrele 0; 1; 3; 5; 6; 8, construiți două numere de câte două cifre fiecare, astfel încât c.m.m.d.c. al lor să fie:

a 1; b 5; c 9; d 8; e 15.

17 Determinați cifrele a, b, c, astfel încât, să aibă loc următoarele relații:

a $\overline{a12b} \vdots 12$; b $\overline{1ab8} \vdots 12$; c $\overline{c9b} \vdots 15$;
d $\overline{a77b} \vdots 18$; e $\overline{ccc2} \vdots 12$; f $\overline{7abc} \vdots 360$.

18 a Numerele 84 și 140 sunt divizibile cu același număr natural de două cifre. Care este acest număr?

b Numerele 110 și 275 sunt divizibile cu același număr natural de două cifre. Care este acest număr?

c Numerele 1 001 și 1 300 sunt divizibile cu același număr natural de două cifre. Care este acest număr?

19 a Numerele 641, 278 și 550, împărțite la același număr natural, dau resturile egale cu 11, 8 și, respectiv, 10. La ce număr au fost împărțite?

b Numerele 701, 565 și 293, împărțite la același număr natural nenul, dau resturile egale cu 1, 5 și, respectiv, 13. La ce număr au fost împărțite?

c Numerele 739, 623 și 487, împărțite la același număr natural, dau resturile egal cu 19, 23 și, respectiv, 7. La ce număr au fost împărțite?

Rezolvare: a Fie $i \in \mathbb{N}^*$ împărțitorul comun. Din teorema împărțirii cu rest, rezultă că:

$$\left.\begin{array}{l} 641 = i \cdot a + 11 \Rightarrow 630 = i \cdot a \Rightarrow 640 \vdots i \\ 278 = i \cdot b + 8 \Rightarrow 270 = i \cdot b \Rightarrow 270 \vdots i \\ 550 = i \cdot c + 10 \Rightarrow 540 = i \cdot c \Rightarrow 540 \vdots i \end{array}\right| \Rightarrow (630, 270, 540) \vdots i, \text{ deci } 90 \vdots i.$$

Din condiția restului, rezultă că $i > 11$, și atunci $i \in \{15, 18, 30, 45, 90\}$.

20 Determinați numerele naturale nenule a și b, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a $(a, b) = 12$, $5a + 2b = 384$;
b $(a, b) = 15$, $a + b = 180$;
c $(a, b) = 18$, $7a + 3b = 1\,512$;
d $(a, b) = 8$, $a \cdot b = 1\,280$.

Rezolvare: a Deoarece $(a, b) = 12$, există $x, y \in \mathbb{N}^*$, cu $(x, y) = 1$, astfel încât $a = 12x$ și $b = 12y$.
Întrucât $5a + 2b = 384$, rezultă că $60x + 24y = 384$, de unde $5x + 2y = 32$.
Deoarece $2y \vdots 2$ și $32 \vdots 2$, rezultă că $5x \vdots 2$ și, cum $(5, 2) = 1$, din teorema lui Gauss rezultă $x \vdots 2$.
Dar $5x + 2y = 32$ implică $5x \leq 32$, cu $x \in \mathbb{N}^*$, așa că $x \in \{2, 4, 6\}$.

- Pentru $x = 2$, rezultă $y = 11$, care verifică relația $(x, y) = 1$; obținem $a = 24$, $b = 132$.
- Pentru $x = 4$, rezultă $y = 6$, care nu convine, deoarece $(4, 6) = 2 \neq 1$.
- Pentru $x = 6$, rezultă $y = 1$, care verifică relația $(x, y) = 1$; obținem $a = 72$, $b = 12$.

Problema admite două soluții: $(a, b) \in \{(24, 132), (72, 12)\}$.

21 a Determinați numerele prime între ele a și b ce verifică relația: $3a + 4b = 39$.

b Determinați numerele prime între ele a și b, știind că $3a + 2b = 54$.

22 Dacă x și y sunt numere naturale, nenule care verifică relația $5x + 6y = 150$, determinați valoarea maximă a sumei $x + y$.

Aprofundare

23 a Scrieți o pereche de numere naturale consecutive și determinați c.m.m.d.c..

b Arătați că valoarea obținută la punctul a este aceeași pentru orice două numere naturale, consecutive.

24 Arătați că pentru orice valoare a numărului natural n au loc relațiile:

a $(2n + 1; 3n + 2) = 1$;
b $(5n + 2; 3n + 1) = 1$;
c $(8n + 9; 6n + 7) = 1$;
d $(12n + 6; 20n + 12) \in \{1; 2; 3; 6\}$.

Rezolvare: a Fie $(2n + 1; 3n + 2) = d$; atunci $\begin{cases} d \mid 2n+1 \Rightarrow d \mid 3(2n+1) \Rightarrow d \mid 6n+3 \\ d \mid 3n+2 \Rightarrow d \mid 2(3n+2) \Rightarrow d \mid 6n+4 \end{cases}$.

Rezultă: $d \mid (6n + 4) - (6n + 3) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$, adică $(2n + 1; 3n + 2) = 1$.

25 a Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 20$, știind că $(7n + 8, 4n + 5) \neq 1$.

b Determinați cinci valori ale numărului n, știind că $(4n + 3, 3n + 6) \neq 1$.

Indicație. a Fie $d = (7n + 8, 4n + 5)$; din ipoteză $d \geq 2$. Avem:

$$\left.\begin{array}{l} (7n+8) \vdots d \Rightarrow (28n+32) \vdots d \\ (4n+5) \vdots d \Rightarrow (28n+35) \vdots d \end{array}\right\} \Rightarrow [(28n + 35) - (28n + 32)] \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d \Rightarrow d \in \{1; 3\}.$$

Dar $d \neq 1$, deci $d = 3$. Cum $3 \mid 7n + 8$ și $3 \mid 6n + 6$, aplicând divizibilitatea diferenței, rezultă că $3 \mid n + 2$. Continuați voi!

26 Într-un hotel sunt camere cu 3 sau 4 paturi, în total 100 de paturi. Câte camere cu 3 paturi și câte cu 4 paturi pot fi în hotel, dacă din fiecare tip de cameră sunt cel puțin 10?

27 Într-un garaj sunt biciclete, triciclete și autoturisme, care au în total 21 de roți (nu se iau în calcul roțile de rezervă). Câte biciclete, triciclete și câte autoturisme sunt în acel garaj, știind că sunt cel puțin două autoturisme ?

28 **a** Determinați c.m.m.d.c. pentru următoarele perechi de numere: 169 și 26; 75 și 50; 280 și 100.

b Pentru fiecare din perechile (a, b) enumerate la punctul **a**, parcurgeți următoarele etape:

- Împărțiți b la a. Obțineți un cât c_1 și un rest r_1.
- Dacă $r_1 \neq 0$, împărțiți a la r_1. Obțineți câtul c_2 și restul r_2.
- Dacă $r_2 \neq 0$, împărțiți r_1 la r_2. Obțineți câtul c_3 și restul r_3 etc.

Continuați astfel, până când veți obține un rest nul. Completați apoi tabelul de mai jos cu ultimul rest nenul și cu c.m.m.d.c. calculat la punctul **a**.

perechea	ultimul rest nenul	c.m.m.d.c.
26; 169		
50; 75		
100; 280		

Ultimul rest nenul este chiar cel mai mare divizor comun al numerelor alese.
Acest procedeu de a afla c.m.m.d.c. se numește *algoritmul lui Euclid*.

29 Arătați că orice divizor comun a două numere naturale, nenule, distincte este cel mult egal cu diferența celor două numere.

30 **a** Fie numerele naturale a și b, cu $a > b$. Arătați că $(a; b) = (a - b; b)$.

b Fie numerele naturale a și b, cu $a > b$. Notăm cu r restul împărțirii lui a la b. Arătați că $(a; b) = (b; r)$.

Probleme de șapte stele

31 Numerele $a, b, c \in \mathbb{N}$ verifică relația $15a + 5c = 13b^2$. Arătați că $b(5a + 6c) \vdots 65$.

32 Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât, $21b - 11c^2 + 3a = 0$. Arătați că $c(3b + 2a) \vdots 33$.

33 Fie $n \in \mathbb{N}$. Calculați $S = (n + 1; 2n + 5) + (n + 2; 2n + 7) + (n + 1\,002; 2n + 2007)$, unde cu $(a; b)$ am notat cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b.

II.4. Multipli comuni. Determinarea c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere naturale

Cel mai mic multiplu comun. Mulțimea multiplilor unui număr natural, nenul este infinită. Mulțimea multiplilor comuni a două numere naturale, nenule, este și ea infinită, deoarece conține cel puțin produsul numerelor și toți multiplii acestuia.

Definiție. Numărul natural m este *cel mai mic multiplu comun* al numerelor naturale a și b dacă satisface simultan condițiile:

a. m este divizibil cu a și b;

b. orice alt multiplu al numerelor a și b este divizibil cu m. Cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b se notează c.m.m.m.c.$[a, b]$ sau $[a, b]$.

$$[a, b] = m \text{ dacă și numai dacă } \begin{cases} a \mid m \text{ și } b \mid m \\ a \mid M \text{ și } b \mid M, \text{ atunci } m \mid M \end{cases}$$

Observații:

1. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 0 și $a \in \mathbb{N}$ este 0: $[0, a] = 0$.
2. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a \mid b$, atunci $[a, b] = b$.
3. În mod asemănător se poate defini și noțiunea de cel mai mic multiplu comun a trei sau mai multe numere naturale.
4. Mulțimea multiplilor comuni a mai multor numere date coincide cu mulțimea multiplilor celui mai mic multiplu comun al acestora.

Comentariu. Fiind date două numere naturale nenule a și b, se observă că, deși 0 este un multiplu comun al numerelor a și b, el nu este și *cel mai mic multiplu comun* al lor, deoarece nu este îndeplinită a doua condiție din definiția c.m.m.m.c. Într-adevăr, dacă $[a; b] = 0$, cum ab este multiplu comun al lui a și b, ar rezulta $ab \vdots 0$, fals.

Algoritm pentru determinarea c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere

1. Se descompun numerele în produs de puteri de numere prime.
2. Cel mai mic multiplu comun este produsul *factorilor primi comuni și necomuni*, luați *o singură dată*, cu *exponentul cel mai mare* care apare în descompunerile numerelor date.

Exemplu: $\left.\begin{array}{l} 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \\ 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}\right| \Rightarrow$ c.m.m.m.c. $[336, 360] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5\,040$.

Aplicații privind cel mai mic multiplu comun

1. Fie a și b două numere naturale nenule și m cel mai mic multiplu comun al lor. Atunci există numerele naturale prime între ele x și y, astfel încât $m = ax$ și $m = by$.
2. Dacă un număr natural n se divide cu două numere naturale a și b, atunci n se divide și cu cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.
3. **Legătura dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.** Produsul dintre cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a și b este egal cu $a \cdot b$.

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{N}.$$

Exersare

1 a Completați tabelul de mai jos cu primii 12 multipli ai fiecărui număr. Încercuiți multiplii comuni și determinați cel mai mic multiplu comun.

multiplii numărului 2												
multiplii numărului 3												

b Desenați și completați tabele asemănătoare pentru următoarele perechi de numere: 4 și 5; 3 și 6; 6 și 8; 10 și 15. Precizați de fiecare dată c.m.m.m.c.

2 Calculați c.m.m.m.c. al numerelor din fiecare pereche:
a 2 și 5; b 2 și 6; c 3 și 9; d 3 și 10;
e 5 și 8; f 5 și 25; g 12 și 20; h 12 și 24;

3 Fără a descompune în factori primi, determinați c.m.m.m.c. și completați:
a $[4, 6] =$; b $[6, 12] =$; c $[3, 15] =$; d $[3, 5] =$;
e $[5, 8] =$; f $[2, 8] =$; g $[4, 10] =$; h $[6, 10] =$.

4 Determinați cel mai mic multiplu comun al numerelor din fiecare pereche:
a 18 și 24; b 14 și 49; c 64 și 81; d 15 și 35;
e 123 și 57 ; f 169 și 234; g 27 și 45; h 121 și 176.

5 Folosind descompunerile în factori primi, determinați cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale din fiecare grupă:
a 2, 15, 35; b 16, 20, 48; c 6, 8, 14; d 28, 49, 35;
e 25, 70, 100; f 72, 54, 36; g 8, 80, 120; h 120, 144, 240.

6 Determinați cel mai mic număr natural nenul care se împarte exact la:
a 2, 4 și 6; b 49, 63 și 70; c 8, 9 și 18; d 24, 60 și 84;
e 5, 10 și 45; f 18, 45 și 54; g 44, 121 și 132; h 16, 24 și 72.

7 Pentru fiecare din tripletele a, b, c scrise mai jos, determinați cel mai mic multiplu comun al numerelor $[a, b]$ și c, iar apoi c.m.m.m.c. $[a, b, c]$. Comparați rezultatele.
a 6, 12, 8; b 4, 8, 6; c 10, 20, 6; d 10, 50, 15;
e 12, 72, 9; f 16, 48, 50; g 44, 33 și 264; h 16, 24 și 72.

8 Aflați $[a, b]$, apoi enumerați primii cinci multipli comuni ai numerelor a și b:
a $a = 14, b = 2$; b $a = 6, b = 54$; c $a = 10, b = 12$; d $a = 18, b = 27$.

9 Se știe că dacă a și b două numere naturale nenule, iar d este cel mai mare divizor comun al lor, există numerele naturale prime între ele x și y, astfel încât $a = dx$ și $b = dy$. Completați tabelul după modelul indicat:

perechea	d	$d \cdot x \cdot y$	$[a, b]$
16, 40	8	$8 \cdot 2 \cdot 5 = 80$	$2^4 \cdot 5 = 80$
15, 20			
14, 49			
20, 28			
24, 36			
120, 180			

10 Scrieți trei perechi de numere al căror c.m.m.m.c. este egal cu 40.

11 a Determinați numerele naturale a pentru care c.m.m.m.c. $[a, 18] = 18$.

b Determinați numerele naturale a pentru care c.m.m.m.c. $[a, 18] = 36$.

c Există vreun număr natural a, pentru care c.m.m.m.c. $[a, 18] = 50$?

12 Verificați egalitatea $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$ pentru fiecare pereche de numere indicată:
a $a = 12, b = 20$; b $a = 27, b = 36$; c $a = 18, b = 36$; d $a = 45, b = 72$.

13 a Aflați numerele naturale mai mici decât 300 care se împart exact la 5, 6, și 8.

b Determinați numerele cuprinse între 200 și 400 care se împart exact la 10 și 12.

14 Care este cel mai mic număr de cărți care s-ar putea număra câte două, câte trei sau câte patru?

15 Care este numărul minim de plăcuțe cu dimensiunile egale cu 4 cm și respectiv 6 cm, cu care putem realiza un pătrat?

16 a Aflați cel mai mic număr natural de trei cifre care, împărțit pe rând la 6, 16 și 12 dă, de fiecare dată, restul 5.

b Determinați toate numerele naturale cuprinse între 50 și 250 care la împărțirea cu 3, 8 și 12 dau, de fiecare dată, restul 1.

c Aflați numerele de trei cifre care dau același rest la împărțirea cu 3, 6, 8 și 11.

d Câte numere de trei cifre dau același rest la împărțirea cu 111, 222 și 333?

Rezolvare: a Fie $d \in \mathbb{N}^*$, numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest, există câturile $a, b, c \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$\left.\begin{cases} d = 6a + 5 \Rightarrow d - 5 = 6a \Rightarrow (d-5) \vdots 6 \\ d = 16b + 5 \Rightarrow d - 5 = 16b \Rightarrow (d-5) \vdots 16 \\ d = 12c + 5 \Rightarrow d - 5 = 12c \Rightarrow (d-5) \vdots 15 \end{cases}\right\} \Rightarrow (d-5) \vdots [6; 16; 12] \Rightarrow (d-5) \vdots 48 \Rightarrow (\exists)\ k \in \mathbb{N}, \text{ a.î.}$$

$d - 5 = 48k \Rightarrow d = 48k + 5$, adică $d \in \{48 \cdot 0 + 5; 48 \cdot 1 + 5; 48 \cdot 2 + 5; 48 \cdot 3 + 5; ...; 48 \cdot k + 5\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d \in \{5; 53; 101; ...; 48 \cdot k + 5\}$, cu $k \in \mathbb{N}$. Cel mai mic număr natural de trei cifre este 101.

17 Tema de vacanță a Mirelei este alcătuită din mai mult de 30 de probleme, dar nu mai mult decât 50. Dacă ar rezolva câte 3, 6 sau câte 8 probleme pe zi, de fiecare dată, i-ar rămâne de rezolvat o singură problemă. Câte probleme conține tema?

18 Determinați cel mai mic număr natural, divizibil cu 7, știind că dacă îl împărțim, pe rând, la 24 sau la 36, obținem, de fiecare dată, restul 4.

19 Într-un coș sunt cel mult 200 de mere. Dacă le număr câte 3, 4 sau 5 nu rămâne niciun măr. Dacă le număr câte 7 rămâne separat un măr. Câte mere sunt în coș?

20 Într-o clasă sunt mai puțin de 30 de elevi, dar mai mult de 20. Dacă s-ar așeza câte doi într-o bancă, ar rămâne o bancă cu locuri libere. Dacă s-ar așeza câte trei într-o bancă, ar rămâne, de asemenea, o bancă cu locuri libere. Câți elevi sunt în clasă?

21 a Aflați cel mai mic număr natural care împărțit la 6 dă restul 5 și împărțit la 5 dă restul 4.

b Aflați $\overline{abc}$, știind că împărțit la 72 dă restul 69, iar împărțit la 60 dă restul 57.

c Aflați $\overline{abc}$, știind că împărțit pe rând la 15, 12 și 80 dă restul 10, 7, respectiv 75.

Indicație. Se observă că, deși se obțin resturi diferite, diferența dintre împărțitor și rest este aceeași la fiecare împărțire. După ce se aplică teorema împărțirii cu rest, la cei doi membri ai fiecărei egalități obținute, se adună diferența și se continuă asemănător ca la problema 16.

22 a Aflați cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 19 dă restul 11, iar împărțit la 13 dă restul 10.

b Aflați cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 18 dă restul 13, iar împărțit la 7 dă restul 6.

c Aflați cel mai mic număr natural de patru cifre care împărțit la 35 dă restul 29, iar împărțit la 12 dă restul 7.

Indicație. a $\overline{abc} = 19x + 11 \Rightarrow 19x + 11 \geq 100$, cu $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 5$.
$19x + 11 = 13y + 10 \Rightarrow 19x + 1 = 13y \Rightarrow 13x + (6x + 1) = 13y \Rightarrow (6x + 1) \vdots 13$.
Din $x \geq 5$ și $(6x + 1) \vdots 13 \Rightarrow$ cel mai mic număr natural x este $x = 15$, caz în care $\overline{abc} = 19 \cdot 15 + 11 = 296$.

Aprofundare

23 Determinați numerele naturale nenule a și b, cu $a \leq b$, pentru care au loc relațiile:
a $(a, b) = 18$, $[a, b] = 216$;
b $(a, b) = 15$, $[a, b] = 360$;
c $[a, b] = 240$, $a \cdot b = 2\,880$;
d $(a, b) \cdot [a, b] = 72$;
e $[a, b] + (a, b) = 20$;
f $(a, b) = 12$, $a + b + [a, b] = 2\,892$.

24 Fie a și b două numere naturale astfel încât $[a, b] = 315$ și $a \cdot b = 2\,835$. Aflați cea mai mică valoare a sumei $a + b$.

25 Aflați numerele naturale nenule a, b, n care îndeplinesc, simultan, condițiile:
a $[a, b] = 420$;
b $a \cdot b = 25\,200$;
c $(a, b) = 12n$.

26 Aflați numerele naturale a și b, cu proprietatea că $a \cdot b = 2 \cdot [a, b] + 25 \cdot (a, b) + 30$, unde $[a, b]$ și (a, b) reprezintă cel mai mic multiplu comun, respectiv cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar $a \leq b$.

Probleme de șapte stele

27 a Suma a 8 numere naturale, distincte este 39. Arătați că produsul acestor numere se divide cu 360.

b Suma a 11 numere naturale, distincte este 70. Arătați că produsul acestor numere se divide cu 420.

28 Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 2008\}$.

a Câte elemente ale mulțimii A sunt divizibile cu 56?

b Câte elemente ale mulțimii A sunt divizibile cu 56 sau 84?

c Câte elemente ale lui A sunt divizibile cu 56 sau 84, dar nu sunt divizibile cu 168?

II.5. Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$

Proprietăți ale relației de divizibilitate

1 Pentru orice număr natural a au loc relațiile $a \vdots 1$ și $0 \vdots a$.

2 **Reflexivitatea.** Orice număr natural a se divide cu el însuși: $a \vdots a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

3 **Antisimetria.** Dacă numerele naturale a și b au proprietatea că $a \vdots b$ și $b \vdots a$, atunci $a = b$.

4 **Tranzitivitatea.** Dacă numerele naturale a, b, c au proprietatea că $a \vdots b$ și $b \vdots c$, atunci $a \vdots c$.

5 **Divizibilitatea produsului**

a Produsul a două numere naturale este divizibil cu fiecare factor al produsului.

$$a \cdot b \vdots a \text{ și } a \cdot b \vdots b, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{N}.$$

b Dacă numărul natural a este divizibil cu numărul natural b, atunci orice multiplu al lui a este divizibil cu b.

$$\text{dacă } a \vdots b, \text{ atunci } a \cdot c \vdots b, \text{ oricare ar fi } c \in \mathbb{N}.$$

c Dacă a, b, x, y sunt numere naturale, astfel încât a este divizibil cu x și b este divizibil cu y, atunci produsul ab este divizibil cu produsul xy.

$$\text{dacă } a \vdots x \text{ și } b \vdots y, \text{ atunci } a \cdot b \vdots x \cdot y.$$

6 **Divizibilitatea sumei/diferenței**

a Dacă numerele naturale a și b, cu $a \geq b$, sunt divizibile cu numărul natural d, atunci suma și diferența lor sunt divizibile cu d

$$\text{dacă } a \vdots d \text{ și } b \vdots d, \text{ atunci } a + b \vdots d \text{ și } a - b \vdots d.$$

b Dacă fiecare dintre termenii unei sume și/sau diferențe este divizibil cu numărul natural d, atunci suma/diferența este divizibilă cu d.

c Dacă fiecare termen al unei sume și/sau diferențe, cu excepția unuia singur, este divizibil cu d, atunci suma/diferența nu este divizibilă cu d.

Exersare

1 Aplicând *divizibilitatea sumei*, stabiliți dacă s este divizibil cu 5:

a $s = 780 + 405$; b $s = 145 + 240 + 395$; c $s = 260 + 945 + 7409$;

d $s = 600 + 205$; e $s = 740 + 5000 + 305$; f $s = 545 + 690 + 770$;

g $s = \overline{6a0} + 205$; h $s = \overline{ab5} + 410$; i $s = 5^n + 10$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Aplicând *divizibilitatea sumei* sau a *diferenței*, stabiliți dacă numărul natural n de mai jos este multiplu al numărului 3. Justificați de fiecare dată răspunsul.

a $n = 801 + 1002$; b $n = 2913 - 541$; c $n = 10014 + 10 - 1$;

d $n = 801 + \overline{aaa}$; e $n = 36 + \overline{a5a4a}$; f $n = 23 + \overline{x6xx}$;

g $n = 681 - \overline{aaa}$; h $n = 3^e - 3$, $e \in \mathbb{N}^*$; i $n = \overline{x6xx} - 32$.

3 Știind că $n \vdots 24$, folosind *tranzitivitatea* relației de divizibilitate, arătați că:

a $n \vdots 6$; b $n \vdots 3$; c $n \vdots 12$; d $8 | n$; e $4 | n$.

4 Aplicând proprietatea de *antisimetrie* a relației de divizibilitate, determinați numărul natural x, știind că $x \vdots 8$ și 8 este un multiplu al numărului x.

5 Calculați $a - b$, știind că a și b sunt numere naturale astfel încât $a \vdots b$ și $b \vdots a$.

6 Fără a calcula produsul P, stabiliți dacă P este divizibil cu numărul n indicat:

a $P = 100 \cdot 204$, $n = 3$;

b $P = 123 \cdot 254 \cdot 505 \cdot 7$, $n = 5$;

c $P = 6 \cdot 31 \cdot 19 \cdot 4005$, $n = 5$;

d $P = 2 \cdot 241 \cdot 14$, $n = 7$.

7 Zece numere sunt divizibile cu 6, iar un al unsprezecelea nu este divizibil cu 6. Care din următoarele afirmații este adevărată?

a Suma lor este divizibilă cu 6;

b Produsul lor este divizibil cu 6.

8 Cinci dintre termenii unei sume sunt divizibili cu 14, iar al șaselea este multiplul numărului 35. Stabiliți dacă propozițiile următoare sunt adevărate:

a Suma celor șase numere este divizibilă cu 7.

b Produsul numerelor este divizibil cu 5.

c Suma numerelor este multiplu al numărului 2.

9 a Scrieți numărul 4008 cu o sumă de cinci numere nenule, divizibile cu 3.

b Puteți scrie numărul 2570 cu o sumă de șase numere divizibile cu 3?

Consolidare

10 Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt întotdeauna adevărate:

a Dacă un număr este divizibil cu 4, iar altul cu 3, atunci suma lor se divide cu 7.

b Dacă un număr se divide cu 4, iar altul cu 3, atunci produsul se divide cu 12.

c Dacă un număr este divizibil cu 6, iar altul cu 9, atunci suma lor se divide cu 3.

d Dacă un număr se divide cu 5, iar altul cu 10, atunci suma lor se divide cu 5.

11 Stabiliți dacă următoarele enunțuri sunt adevărate:

a Dacă un număr este divizibil cu 6, atunci este divizibil și cu 3.

b Dacă un număr este divizibil cu 20, atunci este divizibil și cu 3.

c Dacă un număr este divizibil cu 4, atunci este divizibil și cu 8.

d Dacă un număr este divizibil cu 2, atunci este divizibil și cu 4.

e Orice multiplu al numărului 14 este divizibil cu 7.

f Orice divizor al numărului 16 este și un divizor al numărului 80.

g Orice divizor al numărului 16 este și un divizor al numărului 44.

Justificați răspunsurile, oferind o demonstrație, pentru enunțurile pe care le considerați adevărate, sau un contraexemplu, pentru enunțurile considerate false.

12 Alcătuiți o sumă formată din patru termeni, astfel încât:

a suma să fie divizibilă cu 3, doi dintre termeni să fie divizibili cu 6, iar ceilalți doi termeni să nu fie divizibili cu 3;

b suma să nu se dividă cu 5, dar trei dintre termenii săi să fie multipli ai lui 5.

13 a Arătați că orice număr natural care împărțit la 18 dă restul 12 se divide cu 6.

b Arătați că orice număr natural care împărțit la 45 dă restul 36 se divide cu 9.

c Arătați că orice număr natural care împărțit la 45 dă restul 36 nu se divide cu 5.

d Arătați că orice număr natural care împărțit la 28 dă restul 12 nu se divide cu 7.

14 Determinați x, știind că $4362 + x$ este divizibil cu 3 și $5x + 1 \leq 245$.

15 Scrieți toate valorile posibile al numărului n în fiecare caz:
a $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_6$; b $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{104}$; c $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{28}$.

16 Enumerați în fiecare caz toate valorile numărului natural n pentru care:
a $\mathcal{M}_{10} \subset \mathcal{M}_n$; b $\mathcal{M}_8 \subset \mathcal{M}_n$; c $\mathcal{M}_5 \subset \mathcal{M}_n$.

17 Determinați cifra n, știind că:
a $(80+\overline{34n}) \vdots 2$; b $(60+\overline{34n}) \vdots 5$; c $(900-\overline{34n}) \vdots 3$;
d $(45+\overline{n4n}) \vdots 9$; e $(600-\overline{n7n}) \vdots 3$; f $(1845-\overline{n45}) \vdots 9$.

18 Se consideră suma $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2004}$. Arătați că $S \vdots 5$ și $S \vdots 7$.

19 Fie $A = 8 + 8^2 + 8^3 + ... + 8^{2011}$.
a Ce rest dă A prin împărțire la 13? b Arătați că $(A - 2011) \vdots 7$.

20 a Determinați numerele naturale de forma $\overline{xy}$, știind că $\overline{4xy} \vdots \overline{xy}$.

b Aflați numerele naturale de forma $\overline{xy}$, știind că $\overline{xy56}$ este divizibil cu $\overline{xy}$.

Rezolvare: a $\overline{4xy} = 400 + \overline{xy}$ și folosind condiția $\overline{4xy} \vdots \overline{xy}$, rezultă că $400 \vdots \overline{xy}$, de unde rezultă că $\overline{xy} \in \{10; 16; 20; 25; 40; 50; 80\}$.

21 Arătați că $3 | 6a + 9b + 15c$ și $5 | 10abc$, pentru orice numere naturale a, b și c.

22 Arătați că:
a dacă $3 | 2a + 7b$, atunci $3 | 17a + 16b$; b dacă $32a + 43b \vdots 5$, atunci $2a + 3b \vdots 5$.

23 Se știe că numerele naturale x, y și z verifică relațiile: $13 | 3x + 7y + 8z$ și $13 | 2x + 6y + 5z$. Arătați că $13 | 8x + 20y + 21z$.

24 Determinați numerele naturale impare n pentru care $n + 1 | 2n + 26$.

25 Determinați în fiecare caz numerele naturale x pentru care:
a $x + 1 | x + 13$; b $x + 2 | 5x + 12$; c $(4x + 33) \vdots (x + 3)$.

26 Se consideră numerele naturale nenule a, b, c, cu $b = 7c + 6$. Știind că numărul $A = 10a + 5b$ este divizibil cu 7, aflați cel mai mic număr natural k pentru care numărul $B = 15a + kb$ este divizibil cu 7.

27 a Fie $\overline{abc}$ un număr natural de trei cifre în baza zece, cu $a > c > 0$. Arătați că diferența dintre $\overline{abc}$ și răsturnatul său este divizibilă cu 11.

b Demonstrați că $\overline{abcd} \vdots 11$, dacă și numai dacă $[(a + c) - (b + d)] \vdots 11$.

28 a Arătați că dacă $\overline{abc} \vdots 37$, atunci $\overline{bca} \vdots 37$.

b Demonstrați că dacă $37 | \overline{abc}$, atunci $37 | (\overline{bca} + \overline{cab})$.

Aprofundare

29 Arătați că: a $\overline{abcabc} \vdots 13$; b $(\overline{abcabc} + 42) \vdots 7$.

30 Fie numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 40$.

a Arătați că $x \vdots 5^9$.

b Determinați cea mai mare valoare naturală a lui n, astfel încât $3^n | x$.

31 Fie $A = 2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^n$, cu $n \in \mathbb{N}$.

a Arătați că A este divizibil cu 13, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b Determinați cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}$, pentru care A este divizibil cu 16.

32 Fie $E = 5^{n+2} + 5^{n+1} - 5^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a $E \vdots 29$; **b** $E \vdots 145$.

33 Fie $E = 21^{n+2} - 3^n \cdot 7^{n+1} + 63^{n+1} : 3^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a $E \vdots 455$; **b** $E \vdots 1365$.

34 Determinați câte numere naturale de forma $\overline{abc6}$ sunt divizibile cu 4 și au proprietatea că $\overline{ab}$ este pătrat perfect.

35 Arătați că numărul $10^n + 125$ este divizibil cu 9, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

36 Arătați că dacă suma a două numere naturale a și b este un număr impar, atunci produsul celor două numere este un număr par.

37 **a** Demonstrați că suma oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 3.

b Demonstrați că suma oricăror patru numere consecutive are ultima cifră pară.

c Arătați că suma oricăror cinci numere naturale, consecutive se divide cu 5.

d Demonstrați că, date fiind 6 numere naturale, se pot alege două dintre ele a căror diferență să fie divizibilă cu 5.

e Demonstrați că din 4 numere naturale oarecare există două a căror diferență sau sumă să fie divizibilă cu 5.

38 Demonstrați că pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$ au loc relațiile:

a $2 \mid (n + 3)(n + 8)$; **b** $3 \mid (n + 1)(n + 5)(n + 9)$.

Probleme de șapte stele

39 Într-un săculeț sunt 9 bile numerotate de la 1 la 9. Extragem, la întâmplare, 7 bile din săculeț. Arătați că cu cifrele înscrise pe cele 7 bile, putem forma cel puțin trei numere divizibile cu 3.

40 Fie a un număr natural cu proprietatea că mulțimea $A = \{a, a + 1, a + 2, ..., a + 9\}$ conține patru numere divizibile cu 3. Arătați că a este divizibil cu 3.

41 Pe o masă sunt 7 cartonașe pe care sunt scrise numerele 1, 2, 4, 7, 8, 12 și 25. Iulia și Adrian au luat, fiecare, câte trei cartonașe și au constatat că suma numerelor de pe cartonașele Iuliei este de patru ori mai mare decât suma numerelor de pe cartonașele lui Adrian. Care este numărul scris pe cartonașul rămas pe masă?

Teste de evaluare

Testul 1

(1p) **1** Calculați suma numerelor prime cuprinse între 80 și 100.

(1p) **2** Calculați: a $(28; 42; 63)$; b $[28; 42; 63]$.

(1p) **3** Determinați cifrele x pentru care $\overline{35x} \vdots 2$.

(1p) **4** Aflați câte numere naturale de forma $\overline{12ab}$ sunt divizibile simultan cu 5 și cu 3.

(1p) **5** Determinați numerele prime a și b știind că $3a + 12b = 66$.

(1p) **6** Fie mulțimile: $A = \{n \in \mathbb{N}^* | x \vdots 3 \text{ și } x < 19\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} | 18 \vdots y\}$. Determinați elementele mulțimilor A și B și apoi calculați:
a $A \cup B$; b $A \cap B$; c $A \setminus B$.

(1p) **7** Determinați numărul natural n pentru care $n + 1$ este divizor propriu al lui 12.

(1p) **8** Aflați numărul natural a pentru care numerele $\overline{\quad}$ și 144 sunt prime între ele.

(1p) **9** Trei autobuze de călători pleacă la ora 6^{00} din aceeași stație A și merg pe trasee diferite. Primul se întoarce în aceeași stație A după 30 de minute, al doilea după 120 de minute, iar al treilea după 80 de minute. De câte ori se vor afla în stația A toate cele trei autobuze în intervalul de la ora 6^{00} până la ora 22^{00}?

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) **1** Câți divizori ai lui 24 se găsesc în șirul următor? Subliniați-i!
8; 48; 120; 6; 54; 3; 18; 20; 4

(1p) **2** Scrieți toate numerele divizibile cu 45 de forma $\overline{672ab}$.

(1p) **3** Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al numerelor: 18; 120; 30; 450.

(1p) **4** Determinați numărul natural n știind că: $2^{n+3} + 2^{n+1} + 2^n = 88$.

(1p) **5** Trei autobuze pornesc din aceeași stație, la aceeași oră, în direcții diferite. Primul autobuz face cursa dus-întors în 90 de minute, al doilea în 45 de minute, iar al treilea în 150 de minute. După câte ore vor pleca din nou, din aceeași stație, la aceeași oră?

(1p) **6** Determinați numerele prime a și b știind că: $2a - 5b = 16$.

(1p) **7** Determinați cifra x pentru care numerele 120 și $\overline{937x}$ sunt prime între ele.

(1p) **8** Scrieți mulțimea divizorilor lui 42.

(1p) **9** La o fabrică de cărămizi acestea se ambalează compact sub forma unui cub cu latura cea mai mică posibilă. Dimensiunile unei cărămizi sunt: 10 cm, 24 cm și 4 cm.
a Care este lungimea muchiei cubului? b Câte cărămizi încap într-un cub?

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(1p) 1 Care este cel mai mare divizor par al numărului 20?

(1p) 2 Scrieți un număr natural mai mare decât 30 ce are doar doi divizori.

(1p) 3 Scrieți divizorii improprii ai numerelor 28 și 41.

(1p) 4 Scrieți trei multipli mai mari decât 15 ai numărului 4.

(1p) 5 Calculați suma dintre cel mai mic număr de trei cifre diferite divizibil cu 2 și cel mai mare număr de două cifre divizibil cu 3.

(1p) 6 Determinați suma tuturor numerelor de forma $\overline{2aa}$ divizibile cu 5.

(1p) 7 Arătați că $10^n + 314$ este divizibil cu 9, pentru orice număr natural n.

(1p) 8 Arătați că numărul $N = 7^n \cdot 9^n + 21^{n+1} \cdot 3^n - 9 \cdot 63^n$ este divizibil cu 13, pentru orice număr natural n.

(1p) 9 Prin împărțirea unui număr natural la 24 se obține restul 16. Arătați că numărul se divide cu 8.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(1p) 1 Pentru numerele 15 și 40 scrieți:

a cel mai mic divizor;

b cel mai mare divizor;

c cel mai mic divizor propriu.

(1p) 2 Determinați multiplii lui 3 cuprinși între 200 și 225.

(1p) 3 Câte numere naturale mai mici decât 100 sunt divizibile cu 9?

(1p) 4 Calculați suma numerelor de forma $\overline{2x4}$ divizibile cu 3.

(1p) 5 Aflați numerele de forma $\overline{1xy}$ divizibile cu 5, dar nedivizibile cu 9.

(1p) 6 Calculați diferența dintre cel mai mare număr de forma $\overline{12xy}$ divizibil cu 2 și cel mai mic număr de forma $\overline{3ab}$ divizibil cu 4.

(1p) 7 Determinați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $2n + 1$ să fie divizor al lui 13.

(1p) 8 Arătați că $10^{2012} - 7$ este divizibil cu 3.

(1p) 9 Se consideră numărul natural $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$.

a Arătați că N este divizibil cu 3^8;

b Determinați cel mai mare număr natural de forma 10^n care divide pe a.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P

Fișă pentru portofoliul individual

A3

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Divizibilitatea numerelor naturale. Divizori comuni. Multipli comuni

(1,5p) 1 Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a Un exemplu de divizor al lui 20 este numărul ....

b Dacă $\overline{2x3}$ este divizibil cu 9, atunci $x \in \{..............\}$.

c Dacă $36 = 2^x \cdot 3^y$, atunci $x =$ ...... și $y =$ ....

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera A. În caz contrar încercuiți litera F.

a Două numere prime sunt întotdeauna prime între ele. A F

b Dacă un număr natural este divizibil cu 2, el este divizibil și cu 4. A F

c Numărul 15 nu are divizori improprii. A F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Mulțimea divizorilor naturali ai lui 10 este	1 12
b C.m.m.d.c. al numerelor 12 și 20 este	2 10 3 {1, 2, 5, 10}
c C.m.m.m.c. al numerelor 6 și 4 este	4 {0, 1, 2, 5, 10}
d Numărul divizorilor lui 48 este	5 4

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Stabiliți câte numere de forma $\overline{391xy}$ se divid cu 39.

(2p) 5 Am sădit 100 de puieți de pomi, dar câțiva, mai puțini decât numărul degetelor de la o mână nu s-au prins. Astfel din totalul puieților care s-au prins, o treime au fost meri, un sfert pruni, iar restul cireși. Câți cireși s-au prins?

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P Fișă pentru portofoliul individual

A4

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Divizibilitatea numerelor naturale. Proprietățile divizibilității în N

(1,5p) 1 Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a Cel mai mare divizor al lui 45 este numărul ....

b Cel mai mic număr de forma $\overline{24x}$ divizibil cu 3 este ....

c Un multiplu al lui 6, cuprins între 50 și 60, este numărul ....

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera A. În caz contrar încercuiți litera F.

a 5 este un divizor propriu al lui 50. A F

b $\overline{13x6}$ este divizibil cu 9, dacă $x = 2$. A F

c 12 are 5 divizori. A F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Valoarea lui x, pentru care $\overline{23x} \vdots 10$, este	1 9
b Numărul numerelor de forma $\overline{x3x}$ divizibile cu 5 este	2 0
	3 1
c Cea mai mare valoare a lui x, pentru care $\overline{45x2} \vdots 4$, este	4 7
d Numărul divizorilor improprii ai lui 2012 este	5 2

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Arătați că numărul $N = 5^{2n} \cdot 47 + 25^{2n+1} + 90 \cdot 6^{n} + 6^{n+1}$ este divizibil cu 24, pentru orice număr natural n.

(2p) 5 Fie $a = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{95}$.

a Arătați că a este număr par.

b Arătați că a este divizibil cu 13.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Tema: Numere naturale

Valea Oltului

Elevii din clasa a VI-a au făcut o excursie pe Valea Oltului. Localizată pe cursul inferior al râului Olt, aceasta este una dintre cele mai pitorești zone din România.

Pentru a răspunde la cerințele 1–2, citește următorul text:

La aproximativ 33 km sud de Sibiu, la Turnu Roșu, *își începe călătoria* Defileul Oltului, un loc fascinant de pe Valea Oltului. Spectaculos prin mulțimea de peisaje care ți se înfățișează în fața ochilor, Defileul Oltului este una dintre cele mai frumoase atracții naturale din România. Săpat între Munții Căpățânii, Lotrului și Făgărașului, Defileul Oltului este cel mai lung din țară. Impresionează prin îmbinarea armonioasă de priveliști unice, dominate de pădurile de un verde smarald, monumente pline de istorie, biserici pitorești și stațiuni balneoclimaterice. Colții prăpăstioși ai Munților Cozia și Căpățânii străjuiesc albia îngustă a Oltului până la Cozia, unde Defileul *își încheie călătoria*.

Râmnicu Vâlcea – Cozia	Râmnicu Vâlcea – Turnu Roșu	Râmnicu Vâlcea – Sibiu
20 km	67 km	100 km

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

1 Defileul Oltului are o lungime egală cu:
a 91 km; b 47 km; c 67 km; d 187 km.

2 Fie d km distanța de la Râmnicu Vâlcea la Cozia. Mulțimea divizorilor lui d este:
a $\{1, 20\}$; b $\{2, 4, 5, 10\}$; c $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$; d $\{4, 5\}$.

Pentru a răspunde la cerințele 3–4, citește următorul text:

Valea Oltului a avut o funcție militar – strategică și comercială încă de pe vremea dacilor, legând Transilvania cu Dunărea. În urma cercetărilor arheologice, lângă Masivul Cozia, a fost descoperit castrul roman *Arutela*, localizat într-un drum strategic roman. Un alt vestigiu roman de pe Valea Oltului este reprezentat de *Masa lui Traian*. În prezent, după construirea Hidrocentralei Turnu, a intrat sub ape, vârful ei fiind vizibil când apele lacului de acumulare scad. Barajul Turnu face parte din sistemul de hidrocentrale de pe Olt. Stăvilarul are o înălțime de 44 m și are cea mai mare cădere de pe râul Olt, 24 m.

3 Aflați c.m.m.d.c. al numerelor 44 și 24.

4 Legenda spune că împăratul roman Traian, în anul $\overline{10a}$, a mâncat pe stânca de piatră de la Turnu, numită, de atunci, *Masa lui Traian*. După $\overline{1b77}$ ani, în anul $\overline{1cb2}$ a fost finalizată construcția Hidrocentralei Turnu.
În ce an a fost finalizată construcția hidrocentralei?

Pentru a răspunde la cerința 5, citește următorul text:

Izvorând din Munții Hășmașul Mare, Oltul este unul din cele mai importante râuri din România. Curge prin județele Harghita, Covasna, Brașov, Sibiu, Vâlcea, Olt și Teleorman.

5 Fie d lungimea Oltului, un număr natural de trei cifre. Împărțind pe d, pe rând, la 121 și la 55, obținem același rest egal cu 10. Ce lungime are Oltul?

II.6. Probleme cu caracter practic

1 O casieră isteață va participa la un concurs la care i se cere să alcătuiască cât mai rapid sume s, cu s număr natural, cuprinse între 599 de lei și 2048 de lei, inclusiv. I se pune la dispoziție suma de bani necesară cu o zi mai devreme. Cum procedează casiera ?

2 Irina are de rezolvat 16 probleme de matematică. Poate să le rezolve în timp de două zile repartizând un număr egal de probleme în fiecare zi? Dar în trei zile? Dar în patru? Justificați.

3 Pe o masă sunt 7 cartonașe pe care sunt scrise numerele 1, 7, 9, 11, 12, 16 și 75. Ilie și Paul au luat, fiecare, câte trei cartonașe și au observat că suma numerelor de pe cartonașele lui Ilie este de cinci ori mai mare decât suma numerelor de pe cartonașele lui Paul. Care este numărul scris pe cartonașul rămas pe masă?

4 Un muncitor a executat un număr de piese. Comparându-le câte 8, 10, 12 îi rămâne de fiecare dată răzleață o piesă. Când le grupează câte 7 nu îi mai rămâne niciuna. Determinați numărul de piese executate considerând că el este cel mai mic număr cu această proprietate.

5 Pe o pistă circulară merg trei cicliști. Ei pornesc în același moment în aceeași direcție de la o linie marcată pe pistă. Primul parcurge integral pista în 4 minute, al doilea în 6 minute, iar al treilea în 8 minute. După câte minute vor ajunge toți trei din nou la linia de plecare?

6 Trei autobuze pornesc din aceeași stație, la aceeași oră, în direcții diferite. Primul autobuz face cursa dus-întors în 42 de minute, al doilea în 63 de minute, iar al treilea în 84 de minute. După cât timp vor pleca din nou, din stație, deodată?

7 La o fabrică de cărămizi acestea se ambalează sub forma unui cub cu lungimea muchiei cea mai mică, astfel încât să umple tot spațiul. Dimensiunile unei cărămizi sunt: 15 cm; 36 cm și 4 cm.

a Care este lungimea muchiei cubului?

b Câte cărămizi încap într-un cub?

8 În desenul alăturat este reprezentat un dreptunghi cu lungimea și lățimea împărțite în 16, respectiv 12 segmente congruente. Trasând prin unele dintre punctele de diviziune drepte verticale și orizontale putem împărți dreptunghiul în pătrate egale.

a Care este cel mai mare număr de pătrate pe care îl putem obține?

b Dar cel mai mic? Cu cât va fi egală latura pătratului în acest caz?

9 Moș Crăciun duce cadouri la o grădiniță: 240 de portocale, 480 mere și 560 de eugenii. Toate acestea sunt împărțite copiilor în pungi cu același conținut, fără ca să mai rămână ceva nedistribuit.

a Arătați că în grădiniță pot fi 40 de copii.

b Arătați că în grădiniță nu pot fi 60 de copii.

c Care poate fi numărul maxim al copiilor din acea grădiniță?

10 Bunica are 27 de portocale și 42 de mere. Ea le distribuie, în mod egal nepoților, dar îi mai rămân 3 portocale și 2 mere. Câți nepoți are bunica?

11 O gospodină vinde ouă la Piață. Ea observă că dacă le-aranjează câte 10, rămân separat 7 ouă, iar dacă le grupează câte 15, rămân separat 12 ouă. Câte ouă spre vânzare, știind că numărul lor este cel mai mic număr natural cu această proprietate.

12 Doi frați se joacă urcând cele 24 de trepte ale unei scări, astfel: cel mare urcă treptele din trei în trei, iar cel mic, din două în două. Pe câte dintre trepte au pășit amândoi ?

13 Un zidar are plăci dreptunghiulare de faianță, fiecare având lungimea de 15 cm și lățimea de 0,6 dm.

a Calculați lungimea laturii unui pătrat construit cu 90 de astfel de plăci dreptunghiulare.

b Care este numărul minim de astfel de plăci de faianță cu care poate construi un pătrat?

14 ***O problemă... cu ochi albaștri***

Doi profesori de matematică, Mircea și Dorel, foști colegi de facultate, se întâlnesc, după mulți ani, în București. Aflând că Dorel are 3 copii, Mircea îl întreabă:
– Ce vârste au copiii tăi, Dorele?
– Fiindcă suntem între matematicieni, îți spun că produsul vârstelor lor este 36.
Știi ce vârste au?
Mircea se gândește puțin și răspunde:
– Sunt prea multe posibilități, nu pot da răspunsul.
Apoi, Dorel adaugă:
– Vezi blocul din fața noastră? Suma vârstelor lor e egală cu numărul etajelor acestui bloc.
Mircea numără etajele și spuse:
– Tot nu pot să-ți răspund.
– Atunci află că cel mai mare are ochii albaștri!
– Acum știu, spuse Mircea. Copiii tăi au vârstele...
Voi ați putea răspunde?

Rezolvare: Prima dată, Mircea nu a putut da răspunsul, pentru că există 8 combinații a câte 3 factori al căror produs este egal cu 36:

$$1 \cdot 1 \cdot 36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 = 1 \cdot 3 \cdot 12 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4.$$

Sumele corespunzătoare acestor 8 combinații sunt 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11 și 10. Observăm că două sume coincid. Deducem că blocul respectiv avea 13 etaje și de aceea n-a putut decide Mircea nici a doua oară. Conform ultimului indiciu, vârstele copiilor sunt 2 ani, 2 ani și respectiv 9 ani, deoarece cealaltă variantă, „$1 \cdot 6 \cdot 6$", ar fi presupus existența a doi gemeni *mari*.

II.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1 Știind că $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 100^2 = a$, calculați, în funcție de a, numărul:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 99 \cdot 100 + 100 \cdot 101.$$

2 Știind că $3^2 + 7^2 + 11^2 + ... + 199^2 = a$, calculați, în funcție de a, numărul:

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + ... + 199 \cdot 201.$$

3 Aflați numerele naturale a și b, astfel încât $(\underbrace{1+1+1+...+1}_{\text{de a ori}}) \cdot a^b + 8a^{b+1} = 3^a$.

Rezolvă problema chiar aici:

4 Determinați $a, b, c \in \mathbb{N}$, știind că $4(2^{2a} \cdot 5^b + \overline{bb}) + 2^c = 2133$.

5 Suma a cinci numere naturale, diferite este 12. Aflați suma pătratelor numerelor.

6 a Aflați toate numerele naturale x, y ce verifică relația: $2^x + 2^y + 2^{x+y} = 44$.

b Există numere naturale x, y, astfel încât $2^x + 2^{x+y} + 2^{3y} = 66\,560$?

7 $7^{2010} = \overline{a_n...a_2a_1a_0}$; $\overline{a_1a_0} = ?$.

A 07; B 49; C 43; D 69; E 29.

8 Se consideră egalitatea: $x^4 = 27 \cdot y^4 + 2 \cdot x^3 \cdot y$, unde $x, y \in \mathbb{N}$.

a Arătați că $x = 3, y = 1$ și, respectiv, $x = 9, y = 3$ verifică egalitatea.

b Arătați că egalitatea din enunț este verificată de o infinitate de perechi (x, y).

9 a Demonstrați că restul împărțirii unui număr natural nenul la 9 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor numărului respectiv la 9.

b Fie numărul $a = 2012^{2012}$. Calculăm suma cifrelor numărului a, apoi calculăm suma cifrelor sumei obținute și așa mai departe până obținem o singură cifră. Care este această cifră?

10 Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „2^{110} are 34 de cifre".

11 Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „8^{2009} are cel puțin 2008 cifre".

12 Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „5^{20} are 14 cifre".

13 a Arătați că: $2008^n \leq 2009^n - 2009^{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b Comparați: $A = 1 + 2008 + 2008^2 + 2008^3 + ... + 2008^{2008}$ și $B = 2009^{2008}$.

Rezolvă problema chiar aici:

14 Scrieți numărul $A = 9^{2011}$ ca sumă de două cuburi perfecte, iar numărul $B = 10^{2011}$ ca sumă de două pătrate perfecte.

15 Fie $a = 1 + 3 + 5 + ... + 213$.

a Arătați că a este pătrat perfect.

b Determinați cifra zecilor numărului a^{2009}.

16 Arătați că numărul $x = 5^{2n+1} + 31 \cdot 25n$ este pătrat perfect, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

17 Determinați numărul natural $\overline{ab}$ știind că numărul $\overline{ab} + \overline{ba}$ este pătrat perfect.

18 Fie $x = 50 \cdot 5^{2010} \cdot 2^{2011} - 2012$.

a Numărul x este pătrat perfect?

b Calculați suma cifrelor numărului x.

19 Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n + 23$ să fie pătrat perfect.

20 Arătați că nu sunt pătrate perfecte numerele:

a $x = 9n + 32$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;

b $y = 36a + 18n + 14$, $\forall\ a, n \in \mathbb{N}$;

c $z = \overline{aaa} + 32$, $\forall\ a \neq 0$;

d $t = 10^n - 2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

21 Arătați că nu sunt pătrate perfecte numerele:

a $x = 8n + 34$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;

b $z = \overline{a34}$, oricare ar fi cifra nenulă a;

c $y = 12n + 15$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;

d $t = \overline{a35}$, oricare ar fi cifra nenulă a.

22 Arătați că $2^{n+1} \cdot 5^n + 1$ și $2^n \cdot 5^{n+1} + 1$ nu sunt pătrate perfecte oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

23 Demonstrați că mulțimile $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{5n + 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt disjuncte.

24 Arătați că nu există $a, b \in \mathbb{N}$, astfel încât $a^2 - 10^b = 2007$.

25 a Care poate fi ultima cifră a numărului $2n + 1$, știind că este pătrat perfect?

b Dacă atât $2n + 1$ cât și $3n + 1$ sunt pătrate perfecte, atunci n este divizibil cu 5.

c Determinați cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $2n + 1$ și $3n + 1$ sunt simultan pătrate perfecte.

26 Suma cifrelor unui număr natural n este egală cu 105. Stabiliți dacă n poate fi pătrat perfect.

27 a Un număr natural A are suma cifrelor egală cu 101. Arătați că A nu poate fi pătrat perfect.

b Fie șirul: 11; 111; 1111; 11111; ... .
Demonstrați că niciun element al șirului nu poate fi pătrat perfect.

28 Fie $G.M. = \overline{191019111912...2010}$ un număr natural în baza zece obținut prin alăturarea cifrelor anilor de existență din viața Societății *Gazeta Matematică*: 1910, 1911, 1912, ..., 2010. Stabiliți dacă *G.M.* este pătrat perfect.

29 Un număr de 10 cifre are 9 cifre egale cu 7. Arătați că el nu poate fi pătrat perfect.

30 Un număr natural este format din cifrele 1, 4, 5, 6, 9. Aceste cifre apar astfel: 1 o dată, 4 de patru ori, 5 de cinci ori, 6 de șase ori, 9 de 9 ori. Demonstrați că, oricare ar fi ordinea cifrelor acestui număr, el nu este pătrat perfect.

31 Fie mulțimea $A = \{5^a \cdot 7^b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$.

a Aflați cele mai mici patru elemente din A care sunt pătrate perfecte.

b Demonstrați că printre oricare 5 elemente din mulțimea A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

32 Aflați cel mai mic număr natural, cub perfect, având mai mult de trei cifre, care împărțit la 5, dă un pătrat perfect.

33 Determinați cel mai mare număr natural de cinci cifre, cub perfect, care poate fi scris ca produs dintre un cub perfect de forma $\overline{abba}$ și un alt număr natural.

34 Se scriu pe tablă numerele naturale 1; 4; 6; 7; 8; 11; 14; 16; 17. Numim *operație* faptul că se șterg de pe tablă două numere a căror sumă este un număr par.

a După câte *operații* rămâne scris un singur număr pe tablă?

b Stabiliți dacă numărul rămas este par sau impar.

35 a Arătați că numerele 1; 2; 3; ...; 16 nu pot fi aranjate pe un cerc, astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie pătrat perfect.

b Este posibilă o astfel de aranjare pe o linie?

36 Se consideră mulțimea $M = \{3^a \cdot 4^b \cdot 5^c \mid a, b, c$ sunt cifre nenule în baza 10$\}$.

a Arătați că nu există două submulțimi disjuncte A și B ale lui M astfel încât $A \cup B = M$ și produsul elementelor din mulțimea A să fie egal cu produsul elementelor din mulțimea B.

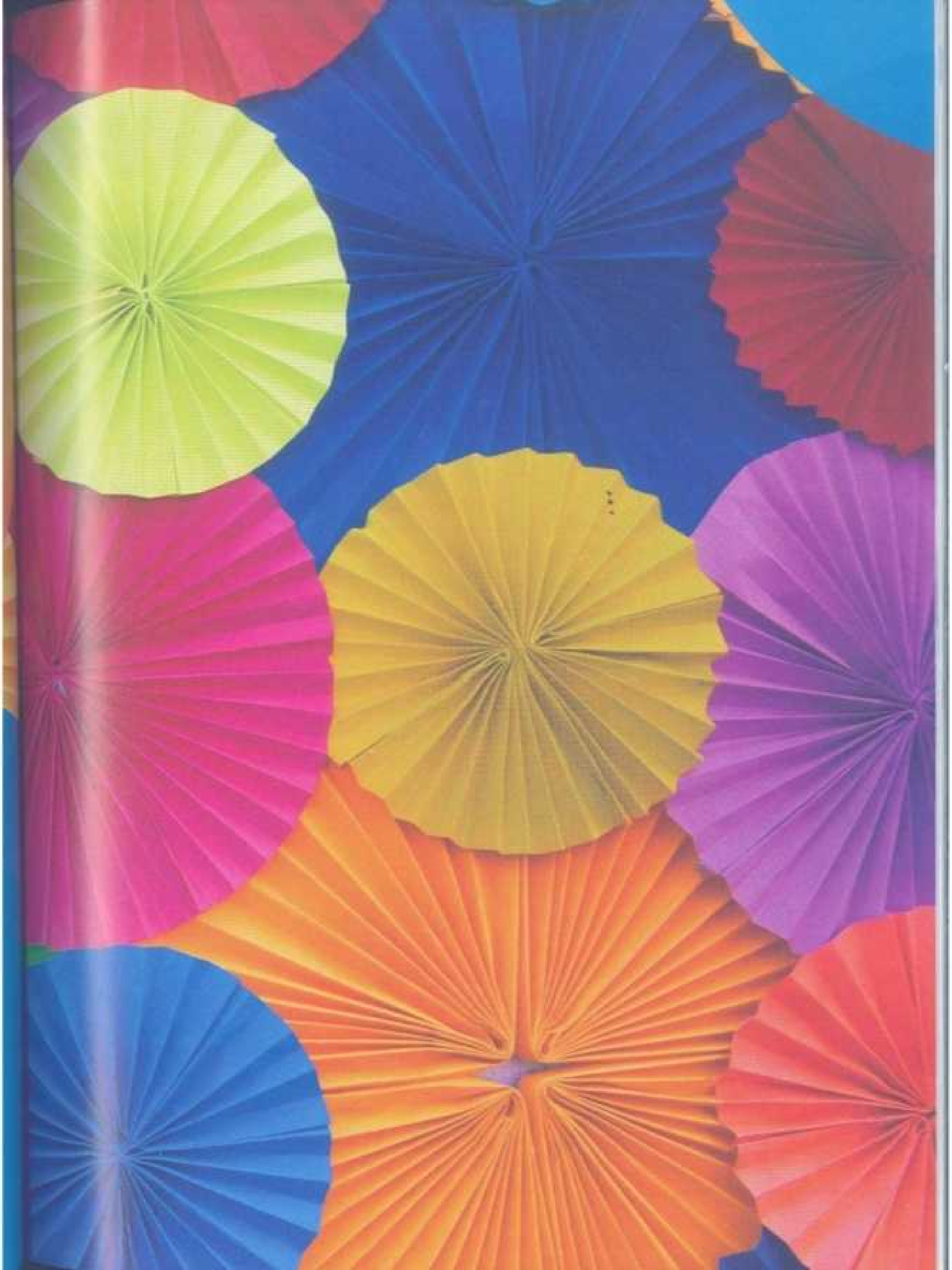
b Arătați că orice submulțime de cinci elemente a lui M conține cel puțin două elemente distincte al căror produs este pătrat perfect.

37 Pe o masă sunt 9 cartonașe pe care sunt scrise numerele 1, 5, 6, 10, 14, 16, 38, 42 și 126. Mihai și Simona au luat, fiecare, câte patru cartonașe și au observat că suma numerelor de pe cartonașele fetei este de șase ori mai mică decât suma numerelor de pe cartonașele băiatului. Care este numărul scris pe cartonașul rămas pe masă?

38 Fie numerele $k, a, b, c, A, B \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A = 10a + 5b$; $B = 15a + kb$ și $b = 7c + 6$. Care este valoarea minimă pe care o poate lua k, astfel încât A și B să fie divizibile cu 7?

A 2^0; B 2^1; C 2^2; D 2^3; E 2^4.

III Rapoarte și proporții



III.1. Rapoarte

Raport. Prin *raportul* numerelor raționale pozitive a și b, cu $b \neq 0$, se înțelege numărul rațional $a : b$, notat $\frac{a}{b}$. Scrierea $\frac{a}{b}$ este *raportul*, iar a și b sunt *termenii* raportului.

Valoarea unui raport $\frac{a}{b}$ este numărul c care se obține din relația $c = a : b$.

Exemplu: Într-o clasă sunt 12 fete și 16 băieți. Spunem că raportul dintre numărul fetelor și cel al băieților este egal cu $\frac{12}{16}$. Valoarea raportului este $12 : 16 = 0{,}75$.

Observații:

1. La scrierea raportului a două mărimi de aceeași natură, acestea trebuie exprimate în aceeași unitate de măsură. De exemplu, dacă lățimea unui dreptunghi este egală cu 120 cm, iar lungimea este egală cu 3,6 m, pentru a afla raportul dintre lățime și lungime, întâi transformăm:

$$L = 3{,}6\ \text{m} = 360\ \text{cm} \text{ și apoi avem: } \frac{l}{L} = \frac{120\ \text{cm}}{360\ \text{cm}} = \frac{1}{3}.$$

2. Se pot forma rapoarte și cu cantități de tipuri diferite. De exemplu, dacă unui om îi trebuie 3 ore pentru a parcurge 12 km, se formează raportul $\frac{12\ \text{km}}{3\ \text{h}} = 4\ \text{km/h}$. Formarea raportului duce la un nou concept, de *viteză*, cu unitatea de măsură km/h.

3. Valoarea unui raport nu se schimbă dacă înmulțim sau împărțim ambii termeni ai săi cu același număr real, nenul:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m},\ m \neq 0 \quad \text{și} \quad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n},\ n \neq 0.$$

Exemple de rapoarte utilizate în practică

1. *Raportul procentual* este un raport de forma $\frac{p}{100}$, care se notează $p\%$.

Exemplu: $19\% = \frac{19}{100}$.

2. *Scara unei hărți* este raportul dintre distanța pe hartă și distanța pe teren.

Exemplu: Pe o hartă, unui segment ce are lungimea de 1 cm îi corespunde o distanță în teren egală cu 2 km. Deoarece 2 km = 200 000 cm, scara hărții este 1 : 200 000.

3. *Concentrația unei soluții* este raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.

Exemplu: În 190 g de apă se dizolvă 10 g sare. Concentrația soluției este egală cu:

$$\frac{10}{190+10} = \frac{10}{200} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

4 *Titlul unui aliaj* este raportul dintre masa metalului preţios şi masa aliajului.
Exemplu: Un aliaj conţine 240 g aur şi 960 g cupru. Titlul aliajului este egal cu:

$$\frac{240}{240+960}=\frac{240}{1200}=\frac{1}{5}=\frac{200}{1000}=0{,}2.$$

Exersare

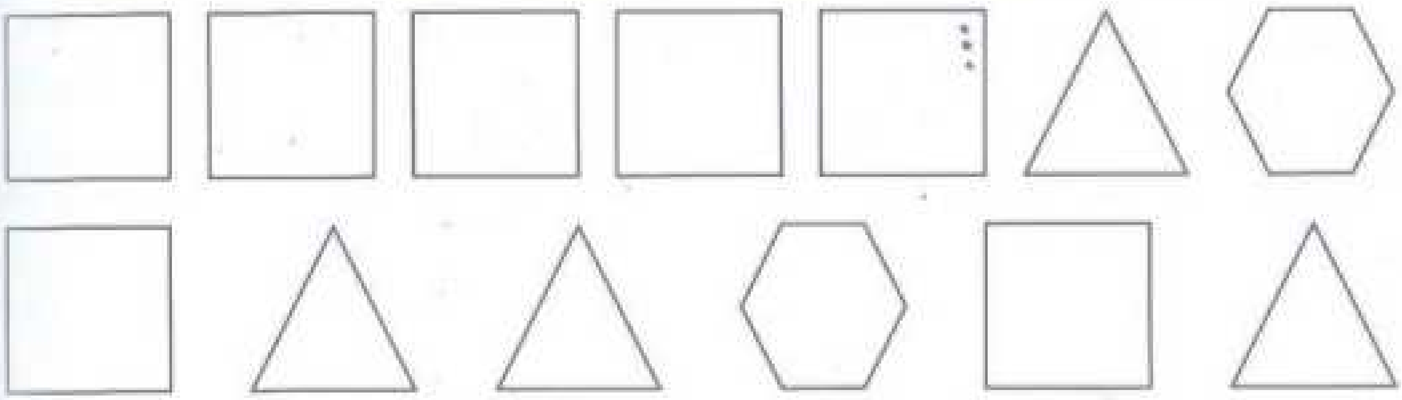
1 Scrieţi raportul numerelor: a 15 şi 41; b 3 şi 10; c 200 şi 25; d 36 şi 45.

2 Fie numerele $a = 24$ şi $b = 19$. Completaţi:

a Raportul numerelor a şi b este .... b Raportul numerelor b şi a este ....

3 Într-o clasă, din cei 30 de elevi, fiecare al treilea elev participă la olimpiada de matematică. Scrieţi raportul dintre numărul celor care participă şi al celor care nu participă la olimpiadă.

4 Scrieţi raportul dintre numărul triunghiurilor şi cel al pătratelor din desenul de mai jos:



5 Determinaţi valoarea raportului numerelor 72 şi 140.

6 Fie $a = 9$ şi $b = 2$. Care este valoarea raportului dintre b şi a?

7 O urnă conţine 25 de bile: 10 albe, 5 roşii şi restul albastre. Scrieţi raportul dintre:

a numărul bilelor albe şi numărul bilelor albastre;

b numărul bilelor albe şi numărul bilelor roşii şi albastre la un loc;

c numărul total de bile şi numărul bilelor care nu sunt albe.

8 Scrieţi raportul dintre cel mai mic număr de o cifră şi cel mai mare număr de o cifră.

9 Scrieţi raportul dintre cel mai mare număr de trei cifre şi cel mai mic număr de două cifre.

10 Se dau mulţimile: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a Scrieţi raportul a două numere pare, primul din mulţimea A, iar al doilea din mulţimea B. Daţi trei exemple:

b Scrieţi raportul dintre un număr par din A şi un număr impar din B.

Consolidare

11 Se dau mulțimile: $A = \{2, 3, 4\}$ și $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$.
Câte rapoarte se pot forma având primul termen un element din mulțimea A și al doilea termen un element din mulțimea B?

12 Se dau mulțimile: $A = \{2, 3, 4\}$ și $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$.

a Câte rapoarte de forma $\frac{a}{b}$ au valoarea 1, dacă $a \in A$ și $b \in B$?

b Câte rapoarte de forma $\frac{b}{a}$ au valoarea 2, dacă $b \in B$ și $a \in B$?

c Câte rapoarte de forma $\frac{m}{n}$ au valoarea un număr natural, dacă $m \in A \cup B$ și $n \in A \setminus B$?

13 Alegeți elemente ale mulțimii $A = \left\{0{,}25; 3; 3\frac{1}{4}; 0{,}3(5)\right\}$ și alcătuiți rapoarte care să aibă valoarea:

a 12; **b** 1,08(3); **c** 1,4(2).

14 Alcătuiți patru rapoarte ce au valoarea egală cu **a** 1,25; **b** 0,6; **c** 2.

15 Determinați scara unei hărți știind că o distanță de 10 km dintre două localități este reprezentată pe hartă printr-un segment de 1 cm.

16 O distanță de 60 km se reprezintă pe o hartă printr-un segment de 2 cm. Aflați scara acestei hărți.

17 Determinați concentrația unei soluții obținută din 240 g apă și 10 g sare.

18 Determinați titlul unui aliaj ce conține 810 g aur și 1190 g aramă.

19 Se dau numerele $a = 1{,}25$ și $b = 1\,250$.

a Scrieți raportul numerelor a și b.

b Determinați valoarea raportului numerelor 1 și $\frac{a}{b}$.

20 Valoarea raportului numerelor a și b este egală cu 1,6. Completați pentru a obține o propoziție adevărată: *„Produsul dintre* 3 *și* $\frac{a}{b}$ *este egal cu ...."*

21 Valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este 0,5. Calculați a, știind că b este egal cu 2,6(3).

22 Fie x și y două numere al căror raport este $\frac{1}{2}$. Determinați valoarea raportului $\frac{3x}{5y}$.

23 Scrieți raportul mărimilor a și b știind că:

a $a = 12$ cm și $b = 24$ cm; **b** $a = 340\ cm^2$ și $b = 170\ cm^2$;

c $a = 4$ cm și $b = 2$ dm; **d** $a = 18\,000\,000\ mm^3$ și $b = 15\ dm^3$;

e $a = 34000\ cm^2$ și $b = 6{,}8\ m^2$.

24 Calculați valoarea următoarelor rapoarte:

a $\frac{200}{25}$; b $\frac{49}{14}$; c $\frac{3,41}{0,01}$; d $\frac{18,17}{1,817}$;

e $\frac{75}{15}$; f $\frac{42}{12}$; g $\frac{3,(5)}{2,(4)}$.

25 Pentru fiecare dintre situațiile următoare calculați termenul care lipsește sau valoarea raportului:

a $\frac{\square}{2}=1,5$; b $\frac{7}{\square}=3,5$; c $\frac{18}{\square}=9$; d $\frac{\square}{11}=4$; e $\frac{250}{25}=\square$; f $\frac{36}{96}=\square$.

26 Se știe că $\frac{4x}{3y}=\frac{5}{18}$. Care este valoarea raportului numerelor y și x?

27 Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este 3. Completați:

a Raportul dintre perimetrele lor are valoarea ....

b Raportul ariilor este egal cu ....

28 Raportul perimetrelor a două pătrate are valoarea 1,8. Care este raportul ariilor?

29 Raportul dintre ariile a două pătrate are valoarea 0,09. Aflați raportul dintre lungimile laturilor lor.

30 Valoarea raportului ariilor a două pătrate este 2,56. Care este raportul perimetrelor?

31 Valoarea raportului lățimilor a două dreptunghiuri este 0,(3), iar valoarea raportului lungimilor este 1,2. Determinați raportul ariilor.

32 Un dreptunghi are aria egală cu 6 cm^2. Determinați lungimile laturilor sale știind că raportul dintre lățime și lungime are valoarea 0,(6).

33 Se știe că $\frac{11a}{5b}=550$. Calculați valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

34 Se știe că $\frac{4a}{3b}=7,8$. Calculați valoarea raportului $\frac{5a}{9b}$.

Aprofundare

35 Aflați valoarea raportului $\frac{a}{b}$, unde $a=1+2+3+...+60$ și $b=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{59}{60}$.

36 Despre numerele a, b, c se știe că $\frac{a}{b}=4$ și $\frac{a}{c}=\frac{5}{2}$. Calculați raportul numerelor b și c.

37 Aflați a, b, c, știind că suma lor este 63 și că rapoartele $\frac{c}{b}$ și $\frac{b}{a}$ au valoarea 4.

38 Calculați termenul necunoscut din:

a $\frac{5}{x}=0,20$; b $\frac{x}{9}=4,2$; c $\frac{11}{x}=1,4$; d $\frac{9}{x}=4$; e $\frac{8,3}{5}=x$; f $\frac{6,(4)}{x}=8$.

39 Găsiți trei numere, știind că raportul dintre primul și al doilea este egal cu $\frac{4}{2}$, raportul dintre al doilea și al treilea este —, iar suma lor este cel mai mic număr natural de forma $\overline{xy4}$, mai mare decât 400, scris în baza 10, divizibil cu 36.

40 Calculați valoarea raportului $\frac{ab+ac}{b^2+c^2}$, știind că *b* este două treimi din numărul *a*, iar *c* este șapte pătrimi din suma numerelor *a* și *b*.

41 Un autoturism consumă 1,8 litri de benzină la 30 km. Care este raportul procentual al consumului?

42 Știind că $\frac{x}{y}=0{,}75$ aflați valoarea raportului $\frac{5y-7x}{6y-8x}$, dacă există.

43 Determinați toate numerele naturale de două cifre, știind că raportul oricăruia dintre ele și răsturnatul său este $\frac{4}{7}$.

Probleme de șapte stele

44 Trei numere naturale nenule *a*, *b*, *c* îndeplinesc condițiile: *b* este egal cu $\frac{4}{7}$ din *a*; *c* este egal cu $\frac{2}{3}$ din suma celorlalte două, iar produsul *P* al celor trei numere se divide prin suma lor *S*.

a Arătați că *S* se divide prin 275.

b Verificați dacă $\frac{P}{S}$ este multiplu de 2 520.

c Aflați cele mai mici numere *a*, *b*, *c*.

45 Știind că $\frac{x}{y}=\frac{7}{2}$, calculați $\frac{3x+5y}{2x+y}$, unde $y \neq 0$.

46 Notăm cu *A* mulțimea formată din numerele $\overline{abcd}$ care verifică egalitatea:

$$\frac{\overline{abcd}-\overline{abd}}{\overline{abc}}=d\text{, cu } a \neq 0.$$

a Arătați că $2009 \in A$.

b Calculați suma elementelor mulțimii *A*.

III.2. Procente

Raportul procentual este un raport de forma $\frac{p}{100}$, notat $p\%$ (unde $p \geq 0$).

În limbaj uzual, când spunem că $p\%$ din x este egal cu y, înțelegem că $\frac{p}{100} \cdot x = y$.

În această relație:
- $p\%$ reprezintă *raportul procentual*;
- x (ceea ce se scrie după cuvântul *din*) reprezintă întregul;
- y reprezintă partea corespunzătoare din întreg.

În funcție de datele cunoscute din relația de mai sus, deosebim trei tipuri de aplicații:

1 Aflarea raportului procentual (se cunosc x și y și se cere $p\%$)

$$\frac{p}{100} \cdot x = y \Rightarrow p = \frac{y}{x} \cdot 100.$$

Exemplu: O gospodină a cheltuit 90 de lei din cei 150 de lei pe care îi avea. Ce procent (cât la sută) din sumă a cheltuit?

Rezolvare: Avem $\frac{p}{100} = \frac{90}{150} \Rightarrow \frac{p}{100} = \frac{3}{5} \Rightarrow p = 60 \Rightarrow p\% = 60\%$.

2 Aflarea unui procent p% dintr-un număr dat (se cunosc $p\%$ și x și se cere y)

$$p\% \text{ din } x = \frac{p}{100} \cdot x.$$

Exemplu: O gospodină avea la ea 120 de lei și a cheltuit la magazin 80% din sumă. Ce sumă a cheltuit?

Rezolvare: Știm raportul procentual și întregul:

$$80\% \text{ din } 120 \text{ lei} = \frac{80}{100} \cdot 120 \text{ lei} = 8 \cdot 12 \text{ lei} = 96 \text{ lei}.$$

3 Aflarea unui număr când se știe un procent din el (se știu $p\%$ și y și se cere x)

$$p\% \text{ din } x = y \Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot x = y \Rightarrow x = y : \frac{p}{100} \Rightarrow x = y \cdot \frac{100}{p}.$$

Exemplu: O gospodină a cheltuit 40% din suma pe care o avea, adică 80 lei. Ce sumă avea gospodina la ea?

Rezolvare: Fie s suma de bani pe care o avea gospodina. Atunci:

$$40\% \text{ din } s = 80 \text{ lei} \Leftrightarrow \frac{40}{100} \cdot s = 80 \text{ lei} \Leftrightarrow s = 80 \text{ lei} : \frac{100}{40} \Leftrightarrow s = 2 \text{ lei} \cdot 100 = 200 \text{ lei}.$$

Creșteri și scăderi cu $p\%$. Fie x un număr rațional pozitiv dat.
Dacă numărul x crește cu $p\%$, atunci, în urma măririi el devine:

$$x' = x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x = \left(\frac{100}{100} + \frac{p}{100}\right)x = \frac{100+p}{100}x = (100+p)\%\, x\,.$$

Dacă numărul x scade cu $p\%$, atunci, în urma micșorării el devine:

$$x' = x - \frac{p}{100}x = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x = \left(\frac{100}{100} - \frac{p}{100}\right)x = \frac{100-p}{100}x = (100-p)\%\, x\,.$$

Exemplul 1. Un frigider ce costă 600 lei se scumpește cu 30%. Care este noul preț?

Rezolvare: Noul preț reprezintă 100% + 30% = 130% din prețul inițial.

Noul preț este 130% din $600 \text{ lei} = \frac{130}{100} \cdot 600 \text{ lei} = 780 \text{ lei}$.

Alternativ, putem calcula mai întâi cu cât se scumpește frigiderul.

Mărirea de preț este egală cu: 30% din $600 \text{ lei} = \frac{30}{100} \cdot 600 \text{ lei} = 180 \text{ lei}$.

Noul preț este egal cu 600 lei + 180 lei = 780 lei.

Exemplul 2. Unui telefon ce costă 900 lei i se reduce prețul cu 20%. Care este noul preț?

Rezolvare: Noul preț reprezintă 100% − 20% = 80% din prețul inițial.

Noul preț este 80% din $900 \text{ lei} = \frac{80}{100} \cdot 900 \text{ lei} = 720 \text{ lei}$.

Alternativ, putem calcula mai întâi cu cât se ieftinește telefonul.

Scăderea de preț are valoarea de: 20% din $900 \text{ lei} = \frac{20}{100} \cdot 900 \text{ lei} = 180 \text{ lei}$.

Noul preț este egal cu 900 lei − 180 lei = 720 lei.

Procente din procente. În diverse probleme, se cere aflarea unui procent dintr-un număr care, la rândul său, reprezintă un procent dintr-un alt număr.

Exemplu: Salariul unui bugetar se micșorează cu 25%. După un timp se mărește cu 25% și astfel salariul devine 1500 lei. Care era salariul inițial?

Rezolvare: Fie s salariul inițial.
Se micșorează s cu 25% din s, deci noul salariu devine $b = 75\% \cdot s$.
Se mărește b cu 25%; noul salariu devine $B = 125\% \cdot b$.
Din ipoteză, $B = 1\,500$ lei și, aplicând metoda mersului invers, avem:

$$125\% \cdot b = 1500 \text{ lei} \Rightarrow \frac{125}{100} \cdot b = 1500 \text{ lei} \Rightarrow \quad = 1500 \text{ lei} \cdot \frac{100}{125} = 1200 \text{ lei}.$$

$$75\% \cdot s = 1200 \text{ lei} \Rightarrow \frac{75}{100} \cdot s = 1200 \text{ lei} \Rightarrow s = 1200 \text{ lei} \cdot \frac{100}{75} = 1600 \text{ lei}.$$

Observație. În practică se folosește și un alt tip de raport, scris sub forma $r‰$, care se citește *r la mie*. Prin r ‰ dintr-o cantitate se înțelege $\frac{r}{1000}$ din acea cantitate.

Spre exemplu, apa din straturile superioare ale Mării Negre are o salinitate de circa 17‰, ceea ce înseamnă că în 1000 de kg de apă se află 17 kg de sare.

Calculele cu rapoartele de tipul r‰ se fac la fel ca la procente.

Exersare

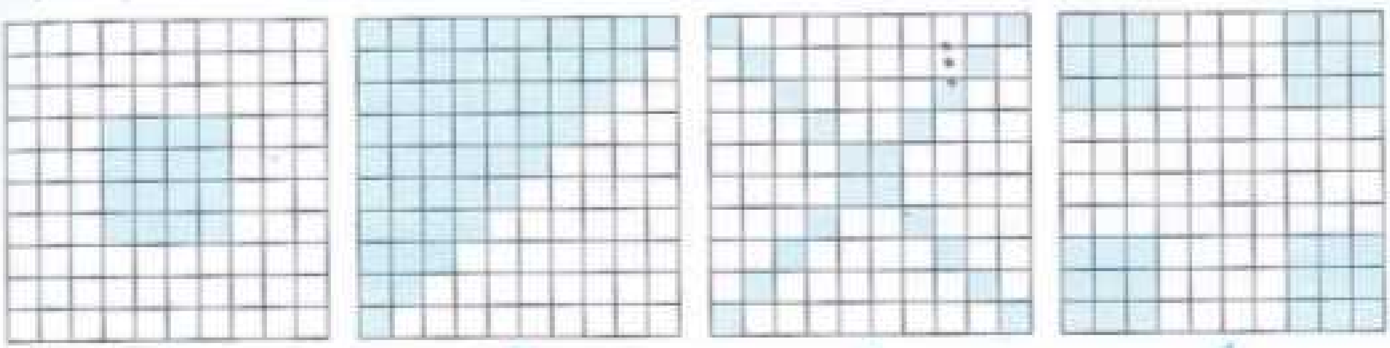
1 Subliniați rapoartele procentuale din suita următoare: $\frac{5}{7}, \frac{22}{100}, \frac{9}{4}, \frac{5}{1000}, \frac{0,7}{100}$.

2 Exprimați sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a 4%; b 54%; c 80%; d $5\frac{1}{4}$%; e 1,7%;

f 2,85%; g 4,(2)%; h 6,(5)%; i 2,1(3)%; j 2,10(3)%.

3 Exprimați, folosind rapoarte procentuale, suprafața hașurată din fiecare desen:



a b c d

4 Scrieți sub formă de raport procentual următoarele rapoarte:

a $\frac{9}{10}$; b $\frac{2}{5}$; c $\frac{5}{4}$; d $\frac{49}{140}$; e $\frac{7}{8}$;

f $\frac{11}{275}$; g 0,25; h 0,7; i 0,123; j $\frac{12}{75}$.

Rezolvare: d Simplificând prin 7 și amplificând cu 5, avem: $\frac{49}{140}=\frac{7}{20}=\frac{35}{100}=35\%$.

5 Completați pentru a obține propoziții adevărate:

a 5% din 400 este egal cu ......;

b 25% din 1600 este egal cu ...;

c 10% din 2500 km este egal cu ...... hm;

d 45% din 1800 lei este egal cu ....

6 Calculați:

a 5% din 40% din 600;

b 75% din 32% din 50;

c 1,25% din 48% din 2000;

d 25% din 70% din 68,(571428).

7 Calculați și comparați: 1% din 2500; 10% din 250; 100% din 25; 0,5% din 5000.

Rezolvă problema chiar aici:

8 Completați cu unul din simbolurile mai mic (<), mai mare (>) sau egal (=), pentru a obține propoziții adevărate:

a 35% din 144 ☐ 144% din 35;
b 80% din 20 ☐ 80% din 60;
c 15% din 900 ☐ 6% din 15 000;
d 80% din 30 ☐ 60% din 40.

Rezolvă problema chiar aici:

9 Completați pentru a obține propoziții adevărate:

a Numărul cu 20% mai mare decât 160 este egal cu ....

b Numărul cu 30% mai mic decât 240 este egal cu ....

10 Aflați un număr x știind că:

a 10% din el este 40;
b 25% din el este 900;
c 80% din el este 1040.

Consolidare

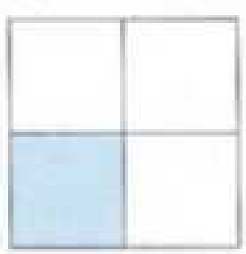
11 Completați: Dacă p% din 480 este egal cu 360, atunci p = ...

12 Stabiliți cât la sută reprezintă x din y în fiecare din situațiile următoare:

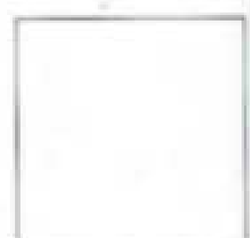
a $x = 60$, $y = 200$;
b $x = 400$, $y = 50$;
c $x = 80$, $y = 1000$;
d $x = 6$, $y = 24$;
e $x = 7$, $y = 25$;
f $x = 12$, $y = 45$.

13 Exprimați, folosind rapoarte procentuale, suprafața hașurată din fiecare desen:

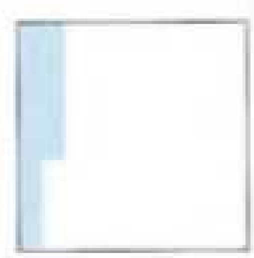

a


b


c


d

14 În desenul alăturat, partea hașurată reprezintă 17% din pătratul considerat ca întreg. Prin ce raport procentual puteți exprima partea nehașurată?



15 20% din efectivul unei clase a participat la un concurs de matematică. Cât la sută din efectivul clasei nu a participat?

16 Fasolea conține 55% amidon. Câte kilograme de amidon conțin 12 kg de fasole?

17 O bancă dă dobândă anuală de 8%. Ce dobândă va primi după un an un client care are o depunere de 5000 lei?

18 Un produs a costat 1,2 lei. Care va fi prețul după o scumpire cu 40%?

19 O agendă costă 15 lei, dar în cazul în care sunt cumpărate cel puțin 10 bucăți se oferă o reducere de 10% din valoare. Care este prețul unei agende în acest caz?

20 Am depus la bancă 3 milioane de lei cu dobânda 16% pe an. Ce sumă va conține depozitul după un an?

21 Mihai avea 20 de lei din care dorea să își cumpere caiete al căror preț este de 1 leu. Între timp acestea s-au scumpit cu 10%. Câte caiete poate să cumpere acum?

22 8% dintr-o cantitate de marfă este egală cu 32 kg. Aflați cantitatea totală.

23 Un elev a rezolvat într-o zi 3 probleme de matematică, ceea ce reprezintă 20% din totalul problemelor pe care le-a rezolvat. Câte probleme trebuie să rezolve elevul?

24 Un produs s-a ieftinit cu 5%, adică cu 6 lei. Cât costă produsul după ieftinire?

25 Am depus la o bancă o sumă de bani cu dobânda de 16% pe an. După un an am încasat pentru suma depusă o dobândă de 50 lei. Care a fost suma inițială?

26 Pentru a obține făină din grâu, se pierde 20% din cantitatea de grâu. Din cât grâu se pot obține 650 kg de făină?

27 Se știe că 21% dintr-o cantitate de lapte este smântână, iar 25% dintr-o cantitate de smântână este unt. Aflați din câte kilograme de lapte se pot obține 52,5 kg de unt.

28 18% din elevii unei școli sunt în clasa a VIII-a, iar 90% din aceștia au promovat examenul de Evaluare Națională. Știind că 243 de elevi au promovat examenul de capacitate, aflați numărul de elevi ai școlii.

29 O bancă dă dobândă anuală de 15%. Ce sumă de bani trebuie să depună un client ca peste un an să aibă o sumă totală de 690 lei?

30 Dintr-o clasă de 24 elevi, 6 au primit nota 7 la ultima lucrare scrisă. Cât la sută din elevi au primit această notă?

31 Un elev a rezolvat 8 probleme, iar altul a rezolvat 10 probleme. Cât la sută din numărul problemelor rezolvate de cel de-al doilea elev reprezintă numărul de probleme rezolvate de primul elev?

32 Un obiect costă 25 lei. După o scumpire obiectul costă 28 lei. Cu ce procent s-a majorat prețul?

33 Un elev avea de rezolvat 10 probleme, dar nu a rezolvat decât 8. Cât la sută nu a realizat din ceea ce își propusese?

Rezolvă problema chiar aici:

34 Într-o fabrică se execută 15 000 de piese de același fel. În prima etapă se execută 20% din numărul de piese, în a doua etapă 50% din rest, iar în a treia etapă restul.

a Câte piese au fost realizate în fiecare etapă?

b Cât la sută din producția totală a fost realizată în a doua etapă?

c Cu cât la sută a crescut producția în a doua etapă?

35 Într-un depozit erau 1200 tone de marfă. În prima săptămână s-a vândut 10% din cantitatea de marfă, iar în a doua săptămână 15% din rest.

a Câte tone s-au vândut în fiecare săptămână?

b Cât la sută din marfă a rămas în depozit după a doua săptămână?

36 Într-o bibliotecă sunt 16 000 de cărți, dintre care 90% sunt în limba română, iar 80% din numărul cărților în limbi străine sunt în limba engleză. Cât la sută din cele 16 000 de cărți sunt în limba engleză?

37 O bancă dă dobândă anuală de 12%. Ce sumă de bani a depus o persoană dacă după 2 ani are în cont 3 763 200?

38 După o reducere de 6% și o alta de 5% un produs costă 178,6 lei. Aflați prețul inițial.

39 Îmi creez un depozit la bancă. În primul an am primit 12% dobândă, iar în al doilea an dobânda a fost de 15%. Am acum 579,6 lei. Câți lei am depus inițial?

40 Prețul unui obiect a crescut cu 10% și după un timp a scăzut cu 10%. Știind că după reducere costă 44,55 lei, determinați prețul inițial.

Aprofundare

41 Am depus la bancă o sumă de bani. La această sumă s-a adăugat în primul an o dobândă de 15%, iar în al doilea de 16%. Câți bani am depus, dacă dobânda acordată în al doilea an este cu 13,6 lei mai mare decât cea din primul an?

42 Un obiect a costat 40 lei. Prețul lui crește cu 25%. Cu cât la sută trebuie să scadă noul preț pentru ca, după reducere, prețul obiectului să fie 40 lei?

43 Adi citește un roman scris în trei volume, care au în total 3000 de pagini. Fiind pasionat de matematică, Adi observă că dacă numărul paginilor primului volum ar fi mai mic cu 75%, numărul paginilor celui de-al doilea ar fi mai mic cu 80%, iar cel de-al treilea ar conține doar o treime din pagini, ar fi un număr egal de pagini în fiecare volum.

a Câte pagini are fiecare volum?

b Dacă Adi citește un număr egal de pagini în fiecare zi, ce procent din timpul necesar citirii celui de-al doilea volum îl reprezintă timpul necesar citirii celui de-al treilea volum?

44 După o scumpire de 15% și apoi o ieftinire cu 1,15 lei prețul unui obiect este 5,75 lei.

a Care era prețul inițial al obiectului?

b Cu cât la sută s-a ieftinit obiectul față de prețul de după scumpire?

45 Dan a cheltuit un sfert din suma pe care o avea, apoi 50% din rest. I-au rămas 7,5 lei.

a Ce procent din sumă a cheltuit prima dată?

b Ce sumă a avut inițial?

46 Într-o clasă cu 30 de elevi, 30% dintre ei au media 10 la fizică, 50% au media 10 la matematică și 40% au media 10 la chimie.

a Câți elevi au media 10 la fizică, câți la matematică și câți la chimie?

b Ce procent reprezintă numărul elevilor de 10 la fizică din cel al elevilor de 10 la matematică?

c Arătați că cel puțin 6 elevi au media 10 la una dintre cele trei discipline.

47 După o reducere de preț egală cu 8%, un aspirator se poate cumpăra cu 322 lei.

a Calculați prețul inițial al aspiratorului.

b Care este cel mai mic număr natural p pentru care, după o reducere cu $p\%$ a prețului inițial al aspiratorului, acesta să coste mai puțin de 300 lei?

48 La livrarea din fabrică către dealer, un autoturism are prețul de 7500 euro. Dealerul auto aplică un comision de 40%, iar la suma obținută se adaugă taxa pe valoare adăugată (TVA), în valoare de 24%, obținându-se astfel prețul de vânzare al autoturismului. Dacă un cumpărător achită un avans de 20% din prețul de vânzare, restul banilor îi poate achita în 24 rate lunare egale.

a Care este valoarea TVA?

b Care este prețul de vânzare al autoturismului?

c Cât reprezintă rata lunară?

Probleme de șapte stele

49 Din numărul total al volumelor aflate în biblioteca unei școli, 60% sunt cărți de literatură, 36% sunt culegeri școlare, iar restul de 168 de volume sunt dicționare.

a Ce procent reprezintă numărul culegerilor din numărul cărților de literatură?

b Câte volume sunt în total în bibliotecă?

c Cu ce procent trebuie să se mărească fondul de carte existent pentru ca biblioteca să conțină 5000 de volume?

50 Aflați numărul rațional pozitiv care, după ce crește cu 16%, iar rezultatul scade cu 16%, se micșorează cu 16.

51 După o mărire de preț cu 20% a unui obiect, s-a efectuat o reducere cu 16%. Aflați ce procent din prețul inițial reprezintă ultimul preț.

52 Într-o pizzerie s-a scumpit pizza: cea mică cu 60%, iar cea mare cu 20%. Astfel, pizza mare costă de trei ori mai mult decât pizza mică. De câte ori a costat mai mult pizza mare decât pizza mică înainte de scumpire?

53 Aflați numărul rațional x care verifică egalitatea:

$$\frac{1}{2}\%\text{ din}\left(\frac{2}{3}\%\text{ din}\left(\frac{3}{4}\%\text{ din}\left(\ldots\left(\frac{n}{n+1}\%\text{ din } x\right)\ldots\right)\right)\right)=\frac{1}{100^n\cdot(n+1)}.$$

54 Din numărul de elevi ai unei clase, 75% participă la cercul foto sau radio. Din aceștia 66,(6)% frecventează cercul foto, iar 75% cercul radio. Cât la sută din numărul de elevi ai clasei participă la ambele cercuri?

III.3. Proporţii. Proprietatea fundamentală a proporţiilor

Definiţie. Egalitatea a două rapoarte se numeşte *proporţie*.

Dacă rapoartele $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ au aceeaşi valoare, ele formează proporţia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, iar numerele a, b, c, d se numesc *termenii proporţiei*.

Termenii a şi d se numesc *extremi*, iar termenii b şi c se numesc *mezi*.

Exemplu: Rapoartele $\frac{10}{5}$ şi $\frac{6}{3}$ au valoarea 2. Ele formează proporţia $\frac{10}{5}=\frac{6}{3}$.

Putem obţine proporţii prin amplificarea sau simplificarea unui raport cu un număr raţional nenul şi punerea semnului de egalitate între raportul iniţial şi raportul obţinut.

Exemple: 1 $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$, deoarece $\frac{3}{12}$ se obţine amplificând raportul $\frac{1}{4}$ cu 3.

2 $\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$, deoarece $\frac{4}{3}$ se obţine simplificând raportul $\frac{20}{15}$ cu 5.

Proprietatea fundamentală a proporţiilor

Într-o proporţie produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, \text{ unde } b \neq 0 \text{ şi } d \neq 0.$$

Reciproc, dacă numerele a, b, c, d verifică relaţia $ad = bc$, atunci ele pot fi termenii unei proporţii.

Exemplu: Deoarece $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$, putem forma proporţii care să aibă ca termeni numerele 2, 3, 4 şi 6. Acestea sunt $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$; $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$; $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie

Dacă într-o proporţie un singur termen este necunoscut, din proprietatea fundamentală a proporţiei, acesta se poate determina astfel:

$$\text{un extrem} = \frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}} \quad \text{sau} \quad \text{unul dintre mezi} = \frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt dintre mezi}}.$$

Aflarea unui extrem: $\frac{x}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow x=\frac{bc}{d}$; respectiv $\frac{a}{b}=\frac{c}{x} \Rightarrow x=\frac{bc}{a}$;

Aflarea unui med: $\frac{a}{x}=\frac{c}{d} \Rightarrow x=\frac{ad}{c}$; respectiv $\frac{a}{b}=\frac{x}{d} \Rightarrow x=\frac{ad}{b}$.

Exersare

1 Scrieți toate proporțiile pe care le puteți forma folosind câte două din rapoartele $\frac{33}{24}$, $\frac{20}{28}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{15}{20}$.

2 Care dintre rapoartele $\frac{4}{6}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{14}{16}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{24}{36}$, $\frac{60}{90}$ pot forma proporții cu $\frac{12}{18}$?

3 Fie proporția $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$. Completați pentru a obține propoziții adevărate:

a Extremii sunt ...... și ....

b Mezii sunt ...... și ....

c Produsul mezilor este egal cu ....

d Produsul extremilor este egal cu ....

4 Decideți dacă următoarele rapoarte formează proporții:

a $\frac{15}{20}$ și $\frac{6}{8}$; b $\frac{12}{16}$ și $\frac{21}{28}$; c $\frac{15}{25}$ și $\frac{6}{9}$; d $\frac{0,3}{1,5}$ și $\frac{1}{5}$;

e $\frac{0,2}{18}$ și $\frac{1,(2)}{110}$; f $\frac{5}{7}$ și $\frac{2,5}{4,5}$; g $\frac{1,8}{5}$ și $\frac{0,3}{4}$; h $\frac{5}{9}$ și $\frac{0,(3)}{2}$.

5 În proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, mezii sunt egali cu 0,2 și 10. Care este produsul extremilor?

6 Numerele a și b sunt termeni ai proporției $\frac{5}{3}=\frac{a}{b}$. Stabiliți care dintre răspunsurile de mai jos sunt corecte.

a $a=8$, $b=15$; b $a=15$, $b=9$; c $a=25$, $b=15$; d $a=30$, $b=18$.

Există și alte soluții?

7 Determinați valoarea lui x din proporțiile:

a $\frac{x}{8}=\frac{3}{4}$; b $\frac{10}{x}=\frac{5}{6}$; c $\frac{45}{3}=\frac{60}{x}$; d $\frac{2}{17}=\frac{x}{34}$; e $\frac{5}{8}=\frac{70}{x}$.

8 Completați pentru a obține proporții:

a $\frac{5}{\ldots}=\frac{12}{7}$; b $\frac{\ldots}{8}=\frac{24}{96}$; c $\frac{15}{2}=\frac{3}{\ldots}$; d $\frac{2}{15}=\frac{\ldots}{2}$; e $\frac{3}{8}=\frac{7}{\ldots}$;

f $\frac{5}{3}=\frac{\ldots}{12}$; g $\frac{1}{9}=\frac{\ldots}{7}$; h $\frac{\ldots}{18}=\frac{23}{5}$; i $\frac{6}{\ldots}=\frac{11}{4}$; j $\frac{12}{\ldots}=\frac{7}{4}$.

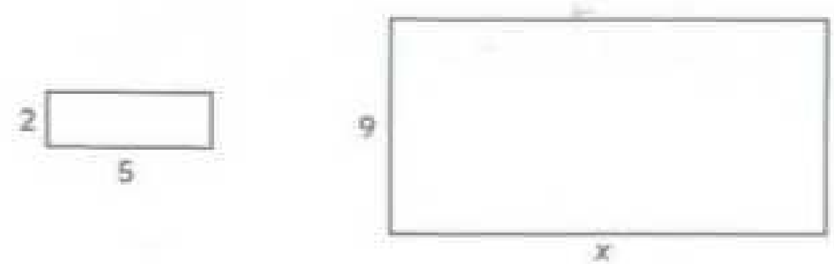
9 Fie proporția $\frac{4,1}{a}=\frac{b}{2,(5)}$. Determinați produsul numerelor a și b.

10 Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ și $ad=8$, calculați valoarea expresiei $(bc)^3-6ad$.

11 Alcătuiți patru proporții având ca mezi numerele 3 și 5.

12 Determinați cele două elemente ale mulțimii $A=\left\{2,5;\frac{2}{5};4;6;9;1\frac{3}{5}\right\}$ care pot fi termenii proporției următoare $\frac{1,2}{\ldots}=\frac{12}{\ldots}$.

13 Determinați numărul x, știind că dimensiunile dreptunghiurilor din desenul de mai jos sunt proporționale.



Consolidare

14 Determinați termenul necunoscut și scrieți-l sub forma unei fracții zecimale:

a $\frac{10}{x}=\frac{1}{9}$; b $\frac{x}{2}=\frac{3}{5}$; c $\frac{x}{5\frac{1}{7}}=\frac{0}{6}$; d $\frac{0,2}{x}=\frac{1,75}{2}$; e $\frac{1,82}{6,3}=\frac{x}{8}$;

f $\frac{1,(3)}{x}=\frac{1}{9}$; g $\frac{1,2}{x}=\frac{72}{2}$; h $\frac{x}{2}=\frac{3,(4)}{5}$; i $\frac{2,(5)}{0,05}=\frac{46}{x}$; j $\frac{3,3(6)}{0,06}=\frac{45}{x}$.

15 Stabiliți dacă numerele următoare pot fi termenii unei proporții:

a 4, 6, 10, 15; b 1; 5; 0,9; 4,5; c 3, 6, 7, 15;

d 0,3; $\frac{1}{5}$; 0,4; $\frac{1}{2}$; e 0,(1); 5; 9; 0,2; f 0,(037); 0,2; 3; 10.

16 Aflați x din proporțiile următoare, scriind rezultatul sub formă de fracție ordinară:

a $\frac{2x+1}{5}=\frac{7}{8}$; b $\frac{4}{5}=\frac{3x+2}{12,5}$; c $\frac{2}{7}=\frac{6,5}{2x-5}$; d $\frac{3x-1}{4}=\frac{0,5}{3}$;

e $\frac{5}{4}=\frac{1}{2x+0,5}$; f $\frac{1}{6}=\frac{0,3+x}{4}$; g $\frac{2+x}{x-1}=\frac{7}{6}$; h $\frac{2x+25}{24}=\frac{x+1}{8}$;

i $\frac{3x-1}{7}=\frac{5x+4}{12,8}$; j $\frac{3x+2}{5x+4}=\frac{7}{12}$; k $\frac{x+2}{x+4}=\frac{4}{5}$; l $\frac{1,1x-4}{x+4}=\frac{1,5}{3}$.

17 Fie proporția $\frac{5}{x}=\frac{3y}{5}$. Determinați valoarea expresiei $\left(xy+1\frac{1}{2}\right)^2$.

18 Se consideră proporția $\frac{8}{u}=\frac{14}{v}$, în care cel mai mare dintre numerele u și v este egal cu 21.

Determinați numerele:

a u; b u^2+v; c $\frac{u}{v}$; d $\frac{2u}{3v}$; e $\frac{u+v}{v}$; f $\frac{v-u}{v+u}$.

19 Scrieți trei proporții de forma $\frac{2}{9}=\frac{x}{y}$ astfel încât:

a $x, y \in \mathbb{N}^*$; b $x \in \mathbb{N}$ și $y \in \mathbb{Q}_+$; c $x, y \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$.

20 Rapoartele $\frac{5}{6}$ și $\frac{x}{y}$ alcătuiesc o proporție. Scrieți o altă proporție în care doi termeni sunt $4x$ și $3y$.

21 Un caiet costă 1,5 lei și raportul dintre prețul lui și cel al unui creion este $\frac{10}{3}$. Cât costă un creion?

22 Raportul dintre vitezele a două automobile este $\frac{2}{3}$. Primul parcurge o distanță în 2 h și 30 min. În cât timp parcurge aceeași distanță al doilea automobil?

23 Completați: Dacă o hartă are scara 1 : 300 000 atunci 8 mm de pe hartă reprezintă .... km din teren.

24 Distanța dintre două localități este reprezentată pe hartă printr-un segment de 2 cm. Știind că scara hărții este 1 : 500 000, exprimați distanța dintre cele două localități în kilometri.

25 Scara fragmentului de hartă din figura alăturată este 1 : 6 000 000. Estimați distanța dintre București și Buzău.

26 Determinați numărul $\overline{xy}$ știind că 2, 3, 8 și $\overline{xy}$ sunt termenii unei proporții.

27 Dacă x și y sunt termenii unei proporții ai cărei mezi au produsul egal cu 6, determinați numărul $\overline{xy}$.

28 a Determinați valoarea raportului $\frac{4x-5y+10}{3+8x-10y}$ știind că $\frac{x}{y}=\frac{5}{4}$.

b Determinați valoarea raportului $\frac{6x-2y}{7x-3y}$ știind că $\frac{x}{y}=\frac{10}{2}$.

Rezolvare: a Conform proprietății fundamentale a proporțiilor obținem $4x = 5y$ și de aici $x=\frac{5y}{4}$.

Înlocuind în raportul din enunț obținem: $\frac{4\cdot\frac{5y}{4}-5y+10}{3+8\cdot\frac{5y}{4}-10y}=\frac{5y-5y+10}{3+10y-10y}=\frac{10}{3}$.

29 Știind că $\frac{x}{y}=\frac{7}{9}$, determinați valorile rapoartelor următoare:

a $\frac{5x+2y}{2x-y}$; b $\frac{x+8y}{3x+6y}$; c $\frac{9x-7y}{18x+14y}$;

d $\frac{18x-14y+25}{12+9x-7y}$; e $\frac{4+27x-21y}{9x+5-7y}$; f $\frac{2,5+4,5x-3,5y}{0,9x+1-0,7y}$.

30 a Se știe că $\frac{2x-5y}{3x-y}=\frac{1}{4}$. Determinați valoarea raportului numerelor x și y.

b Se știe că $\frac{3x-2y}{4x-y}=\frac{3}{7}$. Determinați valoarea raportului $\frac{x}{y}$.

Rezolvare: a Din proprietatea fundamentală a proporțiilor obținem $4(2x-5y) = 3x-y$.
Desfacem parantezele, transferăm termenii ce conțin aceeași variabilă într-un singur membru.
Obținem astfel $5x = 19y$ și de aici $\frac{—}{—}=\frac{19}{—}$.

31 Aflați valoarea raportului numerelor x și y dacă:

a $\frac{x+y}{2x+3y}=\frac{8}{19}$;
b $\frac{6x-2y}{12x+5y}=\frac{1}{7}$;
c $\frac{6x+2y}{5x+3y}=1,(1)$;
d $\frac{x-3y}{2x+7y}=0,0(6)$;
e $\frac{2x+5y}{4x-y}=1\frac{18}{19}$;
f $\frac{x+0,5y}{3x+y}=\frac{7}{18}$.

Aprofundare

32 Arătați că dacă numerele a și b verifică relația $\frac{6a+3b}{3a+7b}=0,9$, atunci ele sunt egale.

33 a Raportul dintre două numere raționale este $\frac{5}{3}$. Determinați cele două numere știind că suma lor este egală cu 64.

b Determinați două numere raționale știind că raportul lor este $\frac{11}{6}$, iar diferența dintre ele este 35.

34 Numerele raționale a și b au raportul 4 și diferența 18. Determinați media aritmetică a numerelor a și b.

35 Aflați x din proporțiile următoare, scriind rezultatul sub formă de fracție ordinară:

a $\frac{x}{9}=\frac{19}{\overline{8a5}}$, unde $\overline{8a5}\vdots 9$;
b $\frac{x+1}{16}=\frac{12}{\overline{13a}}$, unde $\overline{13a}\vdots 4$;
c $\frac{3x-1}{15}=\frac{24}{\overline{18a}}$, unde $\overline{18a}\vdots 5$;
d $\frac{2x}{15}=\frac{24}{\overline{19a}}$, unde $\overline{19a}\vdots 12$;
e $\frac{x}{17}=\frac{22}{\overline{56a}}$, unde $\overline{56a}\vdots 11$;
f $\frac{x}{14}=\frac{26}{\overline{18a}}$, unde $\overline{18a}\vdots 13$.

Rezolvă problema chiar aici:

36 Aflați numerele naturale a și b, $b \neq 0$, știind că $\frac{a}{b} = \frac{8}{7}$ și $8a - 9b \leq 2$.

37 a Alcătuiți o proporție care are trei termeni numere prime, iar al patrulea termen este 45,4.

b Alcătuiți o proporție care are trei termeni numere prime, iar al patrulea termen este 71,5.

c Alcătuiți o proporție care are trei termeni numere prime, iar al patrulea termen este 27,5.

Rezolvare: a $\frac{a}{b} = \frac{c}{45{,}5} \Leftrightarrow a \cdot 45{,}5 = bc$. Înmulțim relația cu 2 și obținem $a \cdot 91 = 2bc$.
Numărul $2bc$ este par deci $91a$ este par. Cum singurul număr prim par este 2 rezultă că $a = 2$.
Din $91a = 2bc$ obținem $bc = 91$ și de aici $b, c \in \{7, 13\}$.

38 Arătați că într-o proporție ce are termeni numere naturale, produsul tuturor termenilor este un pătrat perfect.

39 Arătați că x din proporția: $\frac{\overline{abcabc}}{7x} = \frac{11\overline{abc}}{169}$ este cub perfect.

40 Determinați x din proporția: $\frac{3^{2012} + 3^{2011}}{3^{2011} + 3^{2010}} = \frac{5\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{4} - \left(6\frac{5}{11}\right)^{0}}{4x}$.

41 Calculați x din proporția: $\frac{x}{600} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2010 \cdot 2011}{5 \cdot 10 + 10 \cdot 15 + 15 \cdot 20 + \ldots 10050 \cdot 10055}$.

Probleme de șapte stele

42 Aflați x pentru care: $\frac{x+1}{x} = \frac{0,(3) + 0,(27) + 1,(23)}{4{,}5 : 0{,}09 + 2 + \frac{2}{3}} \cdot 2607$.

43 Calculați valoarea lui x din:

$$\frac{1+2+3+\ldots+2010}{2010-2009+2008-2007+\ldots+4-3+2-1} = \frac{x}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2010 \cdot 2011}}.$$

44 Determinați numerele naturale nenule a și b, știind că $\frac{5b}{4a+3} = \frac{b-1}{a}$.

45 Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Știind că $\frac{a-13}{b} = \frac{a}{b+7}$, arătați că $\frac{a}{b} > \frac{13}{7}$.

46 Fie numerele x și y, astfel încât $y \neq 0$ și $2x + y \neq 0$.
Demonstrați că $\frac{5x+2y}{2x+y} = \frac{69}{29}$ dacă și numai dacă $\frac{x}{y} = \frac{11}{7}$.

47 Se consideră proporția $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. Arătați că are loc relația:

$$(ac + bd)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

III.4. Proporții derivate. Șir de rapoarte egale

Fiind date patru numere raționale pozitive a, b, c, d, care sunt termeni ai unei proporții $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, putem forma noi proporții folosind următoarele procedee:

1 Proporții derivate cu aceiași termeni:

a $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ (schimbarea extremilor între ei);

b $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (schimbarea mezilor între ei);

c $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (inversarea fiecărui raport).

2 Proporții derivate cu alți termeni:

a1 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$;

a2 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$, în cazul $b \neq d$;

b1 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$;

b2 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$, în cazul $a \neq b$;

c1 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

c2 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

d1 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{nc}{nd}$;

d2 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{mb}=\frac{c}{md}$, unde $m, n \neq 0$;

e $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ka}{ma+nb}=\frac{kc}{mc+nd}$, unde $k, m, n \in \mathbb{Q}$, astfel încât $ma+nb \neq 0$.

Exemple:

a1 $\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{2+6}{3+9} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{8}{12}$;

a2 $\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{6-2}{9-3} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{4}{6}$;

b1 $\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{2+3}=\frac{6}{6+9} \Rightarrow \frac{2}{5}=\frac{6}{15}$;

b2 $\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{3-2}=\frac{6}{9-6} \Leftrightarrow \frac{2}{1}=\frac{6}{3}$;

c1 $\frac{5}{4}=\frac{15}{12} \Rightarrow \frac{5+4}{4}=\frac{15+12}{12} \Rightarrow \frac{9}{4}=\frac{27}{12}$;

c2 $\frac{5}{4}=\frac{15}{12} \Rightarrow \frac{5-4}{4}=\frac{15-12}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{3}{12}$;

d1 $\frac{2}{7}=\frac{6}{21} \Rightarrow \frac{2}{7}=\frac{5\cdot 6}{5\cdot 21} \Leftrightarrow \frac{2}{7}=\frac{30}{105}$;

d2 $\frac{2}{7}=\frac{6}{21} \Rightarrow \frac{2}{4\cdot 7}=\frac{6}{4\cdot 21} \Leftrightarrow \frac{2}{28}=\frac{6}{84}$;

e $\frac{5}{3}=\frac{10}{6} \Rightarrow \frac{2\cdot 5}{4\cdot 3+7\cdot 5}=\frac{2\cdot 10}{4\cdot 6+7\cdot 10} \Leftrightarrow \frac{10}{47}=\frac{20}{94}$.

Șir de rapoarte egale. Mai multe rapoarte care au aceeași valoare formează un *șir de rapoarte egale*: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

Proprietatea 1. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$, unde $b_1+b_2+\ldots+b_n \neq 0$.

Exemplu: $\frac{3}{7}=\frac{6}{14}=\frac{30}{70}=\frac{3+6+30}{7+14+70}=\frac{39}{91}$.

Proprietatea 2. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1k_1+a_2k_2+\ldots+a_nk_n}{b_1k_1+b_2k_2+\ldots+b_nk_n}$, unde $b_1k_1+b_2k_2+\ldots+b_nk_n \neq 0$.

Exemplu: $\frac{5}{2}=\frac{10}{4}=\frac{15}{6}=\frac{5\cdot3+10\cdot7+15\cdot6}{2\cdot3+4\cdot7+6\cdot6}=\frac{175}{70}$.

Exersare

1 Fie proporția $\frac{2}{3}=\frac{7}{10{,}5}$. Completați spațiile libere în următoarele proporții derivate cu aceiași termeni: $\frac{2}{7}=\frac{\square}{\square}$; $\frac{10{,}5}{3}=\frac{\square}{\square}$; $\frac{7}{2}=\frac{\square}{\square}$; $\frac{3}{2}=\frac{\square}{\square}$.

2 Scrieți trei proporții derivate cu aceiași termeni pornind de la proporția $\frac{11}{3}=\frac{55}{15}$.

3 Determinați termenul necunoscut al proporției $\frac{x}{7}=\frac{102}{14}$ și apoi scrieți 2 proporții derivate cu aceiași termeni.

4 Numerele 5; 3; 10 și 6 pot fi termenii unei proporții deoarece $3\cdot10=5\cdot6$. Scrieți toate proporțiile care au acești termeni.

5 Trei termeni ai unei proporții sunt 8, 2, 7, iar al patrulea este a.
a Calculați pe a dacă el este un extrem și apoi scrieți toate proporțiile derivate cu aceiași termeni.
b Calculați pe a dacă el este un med și apoi scrieți toate proporțiile derivate cu aceiași termeni.

6 Fie proporția $\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$. Scrieți proporții derivate cu termeni schimbați obținute astfel:
a înmulțind numărătorii cu 3;
b amplificând al doilea raport cu 5;
c adunând numărătorii la numitori.

7 Se dă proporția $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$. Dintre următoarele proporții, care este o proporție derivată cu termeni schimbați obținută din aceasta? Indicați procedeul de obținere.
a $\frac{6}{15}=\frac{4}{10}$; b $\frac{2}{5}=\frac{20}{50}$; c $\frac{3}{9}=\frac{6}{18}$; d $\frac{1}{2{,}5}=\frac{8}{20}$; e $\frac{6}{5}=\frac{12}{10}$.

8 Fie proporția $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$. Scrieți proporții derivate cu termeni schimbați obținute prin:
a scăderea numărătorilor din numitori;
b împărțirea numărătorilor cu 2;
c împărțirea numitorilor la 7.

9 Scrieți proporția derivată din $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$ care are un termen egal cu 12.

10 Pornind de la proporția $\frac{5}{9}=\frac{10}{18}$:

a proporția $\frac{20}{36}=\frac{10}{18}$ s-a obținut prin amplificarea primului raport cu ...... ;

b proporția $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$ s-a obținut prin împărțirea numitorilor cu ...... ;

c proporția $\frac{35}{9}=\frac{70}{18}$ s-a obținut prin înmulțirea numărătorilor cu ...... ;

d proporția $\frac{105}{63}=\frac{30}{18}$ s-a obținut prin amplificarea primului raport cu ...... și înmulțirea numărătorilor cu ....

11 Fie proporția $\frac{2}{7}=\frac{10}{35}$. Scrieți proporții derivate, cu termeni schimbați în care:

a primul extrem să fie egal cu 6;

b primul med să fie egal cu 28;

c numărătorii rapoartelor să fie multipli de 11.

12 Pornind de la raportul $\frac{5}{11}$ scrieți șirul de rapoarte egale obținut prin amplificarea raportului da pe rând cu 3; cu 4 și respectiv, cu 7.

13 Se știe că $\frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$ și $x+y+z=32$. Calculați pe x, y și z.

14 Fie șirul de rapoarte egale $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{11}$. Știind că $x+y=28$ determinați numerele x, y și z. Scrieți apoi proporțiile derivate cu aceiași termeni pornind de la proporția formată cu primele două rapoarte.

15 Se dă șirul de rapoarte egale $\frac{x}{7}=\frac{y}{5}=\frac{40}{z}$. Determinați x, y și z știind că $x+y=12$.

16 Scrieți proporțiile derivate cu termenii schimbați, pornind de la proporția:

a $\frac{2}{11}=\frac{5}{27{,}5}$;　　b $\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$;　　c $\frac{m}{n}=\frac{7m}{7n}$.

17 Se dă proporția $\frac{5}{4}=\frac{3{,}5}{2{,}8}$. Scrieți proporțiile cu termenii schimbați obținute altfel:

a amplificăm al doilea raport cu 10;

b înmulțim numărătorii cu 2;

c împărțim numitorii la 4;

d scriem la numărători diferența dintre numărător și numitor, iar la numitor suma dintre numitor și numărător.

18 Lățimea unui dreptunghi este $\frac{3}{7}$ din lungimea sa. Aflați raportul dintre:

a lungime și lățime; b lățime și perimetru; c lungime și perimetru.

19 Determinați numerele x, y, z, știind că:

a $\frac{x}{2}=\frac{y}{11}=\frac{z}{7}$ și $x+y+z=80$;

b $\frac{x}{6}=\frac{y}{7}=\frac{z}{8}$ și $x+y-z=20$;

c $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z}{7}$ și $x+2y-z=192$;

d $\frac{x}{14}=\frac{y}{11}=\frac{z}{12}$ și $x+y-z=39$.

20 Pornind de la proporția $\frac{7}{8}=\frac{28}{32}$, scrieți proporții derivate cu termeni schimbați astfel încât:

a un termen să fie 70;

b numărătorii să fie multipli de 5;

c termenii unui raport să se dividă la 11.

21 Se consideră proporția — $\frac{13}{}$. Formând proporții derivate, determinați numerele a și b în fiecare din cazurile:

a $a-b=27$; b $a+b=34$; c $5a+2b=365$.

22 Determinați numerele a și b știind că $\frac{a}{11}=\frac{b}{8}$ și:

a $a+b=76$; b $a-b=0{,}9$; c $3a+b=41$.

23 Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$. Aflați valoarea raportului $\frac{x}{y}$ știind proporțiile:

a $\frac{x-y}{y}=\frac{3}{4}$; b $\frac{2x+y}{y}=\frac{73}{15}$; c $\frac{3x-y}{2y}=\frac{9}{4}$; d $\frac{x+y}{x-y}=\frac{7}{3}$;

e $\frac{x}{x+2y}=\frac{5}{17}$; f $\frac{2x+y}{x+2y}=\frac{13}{17}$; g $\frac{2x-y}{x+y}=\frac{11}{16}$; h $\frac{x}{3x+8y}=\frac{1}{9}$.

24 Se știe că $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ și $8x-5y=2$. Calculați produsul xyz.

25 Cunoscând $5a+2b=36$ și $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{12}$, determinați a, b, și c.

26 Arătați că, dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și $\frac{a-b}{c}=\frac{b-c}{a}=\frac{c-a}{12}$, atunci $a=b=c$.

27 Determinați numerele x, y, z, știind că $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{9}$ și:

a $x+y+z=34$; b $x+z-y=21$; c $2y+3x+4z=440$;

d $x^2+y^2+z^2=1035$; e $xy+yz+zx=1392$; f $7x^2+9y^2-2z^2=2016$.

Aprofundare

28 Numerele raționale pozitive a, b, c verifică relația $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$.

Arătați că $a^2+b^2=c^2$ și determinați numerele a, b, c în fiecare din cazurile:

a $a+b+c=84$; **b** $8a+7b+6c=410$; **c** $a^2+b^2+c^2=200$;

d $ab+bc+ca=1175$; **e** $9a^2-3b^2+2c^2=4067$; **f** $abc=20\,580$.

29 Determinați numerele a, b, c știind că au loc simultan relațiile:

a $3a=2b$; **b** $5a+4b+3c=399$; **c** $5b=4c$.

30 Media aritmetică a numerelor a, b și c este 70 și au loc simultan relațiile $2a=3b$ și $10b=4c$. Determinați numerele a, b și c.

31 Fie relația $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{3}=k$, cu $k \in \mathbb{N}$.

a Arătați că: a^2+c^2 este pătrat perfect;

b Determinați a, b și c, știind că $a+b+c=36$.

32 Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$ și $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$, arătați că $2a=b+c$ și că $a=b=c$.

33 Determinați numerele a, b, c, d care verifică simultan următoarele relații: $2b=3a$; $5b=4c$; $3d=8c$ și $a+b+c+d=75$.

34 Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$ și $\frac{a}{2b+3c}=\frac{2b}{a+3c}=\frac{3c}{a+2b}$. Calculați valoarea expresiei $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Probleme de șapte stele

35 Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$.

a Arătați că $A=7\cdot\frac{a+b}{b+c}+5\cdot\frac{b+c}{c+a}+4\cdot\frac{c+a}{a+b}$ este număr natural pătrat perfect.

b Calculați valoarea expresiei $B=\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+bc+ca}$.

36 Determinați numerele raționale a, b, c știind că $15a=12b=10c$ și $a^2+b^2=164$.

37 Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+c}$.

Arătați că expresia $A=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{a+d}+\frac{c+d}{a+b}+\frac{d+a}{b+c}$ reprezintă un număr natural.

38 Se dau proporțiile $\frac{a}{6}=\frac{b}{9}$ și $\frac{b}{12}=\frac{c}{15}$.

a Determinați k și p astfel încât $\frac{a}{16}=\frac{b}{k}=\frac{c}{p}$.

b Pentru $k=24$, $p=30$ găsiți pe a, b, c, știind că $a^2+b^2+c^2=1732$.

Testul 1

(2p) **1** Lungimea unui dreptunghi este de 24 cm, iar lățimea de 18 cm. Aflați raportul dintre:
a lungime și lățime; b lățime și lungime.

(1p) **2** Scrieți raportul dintre numerele $4\frac{1}{2}$ și $2\frac{1}{4}$ și calculați valoarea acestui raport.

(1p) **3** Aflați x din $\frac{x}{65}=\frac{4}{10}$.

(1p) **4** Determinați numerele x, y și z, știind că $\frac{x}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z}{11}$ și $x+y+z=138$.

(2p) **5** Fie proporția $\frac{0,5}{3}=\frac{4}{24}$. Pornind de la aceasta scrieți:

a două proporții derivate cu aceiași termeni;

b o proporție derivată cu termeni schimbați.

(1p) **6** Calculați 15% din 280 *kg*.

(1p) **7** Smântâna reprezintă 6% din cantitatea de lapte. Din ce cantitate de lapte se obțin 15 litri de smântână?

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) **1** Determinați x din proporția $\frac{2\frac{1}{3}}{x}=\frac{0,5}{1\frac{3}{7}}$.

(2p) **2** Calculați valoarea raportului dintre cel mai mic număr natural de două cifre și cel mai mare număr par natural de trei cifre.

(1p) **3** Suma a trei numere este 560. Determinați numerele știind că ele sunt proporționale cu 2, 11 și 7.

(1p) **4** S-au pus la încolțit 400 de semințe și dintre acestea nu au încolțit 36.
Care este procentul de semințe încolțite (adică procentul de germinație al semințelor)?

(1p) **5** Prețul unei cămăși a fost de 48 lei și s-a stabilit să se facă o reducere de 15%.
Cât este noul preț al cămășii?

(2p) **6** Știind că $\frac{3x-y}{2x+y}=\frac{5}{4}$, calculați valoarea raportului $\frac{x}{y}$.

(1p) **7** Pornind de la proporția $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$, scrieți o proporție derivată cu termeni schimbați în care un termen să fie 24.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(1p) 1 Determinați x din proporțiile: a $\dfrac{5}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{x}{12}$; b $\dfrac{0,(3)}{0,3(8)}=\dfrac{x-1}{1,1(6)}$.

(1p) 2 Stabiliți dacă se pot forma proporții cu numerele: a 1; 9; 5; 45; b 7; 2; 5; 11.

(2p) 3 Pe o *hartă* cu scara de $\dfrac{1}{500\,000}$, distanța dintre două localități este de 14 *cm*. Calculați distanța în teren dintre cele două localități.

(1p) 4 Împărțiți numărul 350 în patru părți astfel încât a doua parte să fie $\dfrac{3}{2}$ din prima, a treia parte să fie $\dfrac{4}{3}$ din a doua, iar a patra să fie $\dfrac{5}{4}$ din a treia.

(1p) 5 În 480 g de apă se introduc 20 g de sare. Care este concentrația de sare a soluției obținute?

(2p) 6 Priviți figura alăturată și calculați producția de grâu dacă producția de porumb a fost de 3 220 t.

(1p) 7 După două creșteri consecutive de preț cu 20% din prețul inițial și respectiv 15% din noul preț, un obiect a ajuns să coste cu 760 lei mai mult decât era prețul inițial. Determinați prețul inițial și cel de după prima creștere.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(1p) 1 Cât la sută din 85 reprezintă 51?

(1p) 2 Calculați x din proporțiile: a $\dfrac{\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{15}{28}}=\dfrac{4^3:2^5}{x-2}$; b $\dfrac{171}{39}=\dfrac{x-2}{13}$.

(2p) 3 Într-o sală de spectacol sunt 180 elevi, din care 65% sunt fete. Câți băieți trebuie să mai vină în sală pentru ca numărul băieților să devină 70% din numărul total al elevilor din sală?

(1p) 4 Știind că $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{7}$ calculați valoarea raportului $\dfrac{5a+b}{3b-2a}$.

(1p) 5 Calculați numerele x, y și z știind că $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y}{9}=\dfrac{z}{3}$ și $\dfrac{x}{11}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{3}=18$.

(2p) 6 Valoarea unui raport este 5. Care va fi valoarea raportului dacă:

a mărim primul termen al raportului de 3 ori;

b micșorăm primul termen de 2 ori și mărim al doilea termen de 14 ori?

(1p) 7 Calculați numerele a și b știind că: $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{7}$ și $\dfrac{a+5}{b+1}=\dfrac{a+b}{b+10}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Fișă pentru portofoliul individual

A5

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Rapoarte. Procente. Proporții. Proporții derivate. Șir de rapoarte egale

(1,5p) 1 Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a Raportul numerelor 6 și 8 are valoarea ....

b 12% din 45 este egal cu ....

c Valoarea lui x din proporția $\frac{x}{12}=\frac{15}{10}$ este ....

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera A, în caz contrar încercuiți litera F:

a Valoarea raportului $\frac{213}{71}$ este număr natural.	A	F
b Dacă $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}$, atunci $\frac{x+y}{y}=\frac{2}{7}$.	A	F
c Numărul cu 15% mai mare decât 40 este egal cu 46.	A	F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**:

A	B
a 125% din 32	1 31
b Numărul x pentru care $\frac{x+1}{6}=\frac{6}{9}$.	2 20
c Numărul p pentru care concentrația unei soluții obținută din 120 g apă și 30 g sare este p%.	3 40
	4 29
d Dacă $\frac{x}{21}=\frac{10}{y}=\frac{5}{7}$, atunci $x+y$ este	5 3

La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 O soluție de sare cu apă are masa 240 g și concentrația de 15%.

a Care este masa sării din soluție?

b Câtă apă trebuie adăugată pentru a obține o soluție cu concentrația de 10%?

(2p) 5 Prețul unui obiect se mărește de două ori succesiv cu câte 20%.

a Aflați prețul inițial al obiectului știind că prețul acestuia după cele două măriri est de 432 lei.

b Cu ce procent ar fi trebuit să fie făcută o singură mărire de preț astfel ca obiectul s ajungă la prețul de după cele două măriri?

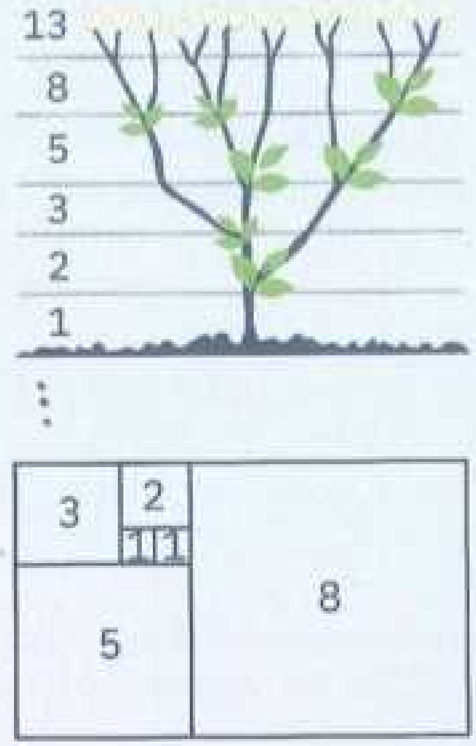
NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Test-model pentru Evaluarea Națională

Tema: Rapoarte și proporții

Secțiunea de aur

Secțiunea de aur (numită uneori și Raportul de aur, Proporția de aur, Numărul de aur), notată cu litera grecească, φ (se citește „fi"), este primul număr irațional descoperit și este aproximativ egal cu 1,61803399. Îl regăsim peste tot în natură: în bifurcația ramurilor plantelor și arborilor, în dispunerea geometrică a frunzelor și inflorescențelor unor plante, a petalelor florii de trandafir, a semințelor de floarea soarelui, în conurile de brad, în fiecare caz, dispunerea asigurând utilizarea optimă a luminii solare și polenizarea prin atragerea insectelor.



Pentru a răspunde la cerințele 3 – 4, citește următorul text:

În matematică, asociat numărului de aur este șirul lui Fibonacci (matematician renumit în Evul Mediu, născut la Pisa, în Italia, un șir în care fiecare termen se obține din suma celor doi termeni precedenți: 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13;... . Cu cât scriem mai mulți termeni, cu atât raportul dintre un număr și predecesorul său este mai aproape de raportul de aur.

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

1 Dacă în șir, succesorul lui 13 este a, iar b este succesorul lui a, atunci $\dfrac{b}{a}$ este egal cu:

a $\dfrac{21}{13}$; b $\dfrac{13}{8}$; c $\dfrac{34}{21}$; d $\dfrac{21}{34}$.

2 Fie r valoarea raportului $\dfrac{34}{21}$. Rotunjit la o miime, r este egal cu:

a 1,61; b 1,62; c 1,619; d 1,620.

Pentru a răspunde la cerințele 3 – 4, citește următorul text:

Datorită imensului său potențial de a reda o compoziție estetică perfectă, îl întâlnim în sculpturi: *Statuia lui Zeus* din Olympia – sculptură a lui Phidias, „Domnișoara Pogany", „Pasărea măiastră", opere ale lui Brâncuși și multe altele. Sărutul de pe *Poarta* lui Brâncuși seamănă foarte mult cu litera grecească, ϕ. Chiar și cele 16 module și jumătate din *Coloana Infinitului* ne duc cu gândul la $\phi \approx 1,6$. Construcții arhitecturale ca Marea Piramidă din Egipt și catedrala Notre Dame din Paris, Ateneul Român din București respectă această proporție de aur, ca și multe opere de artă ale lui Leonardo da Vinci. Bun prieten cu Brâncuși, Henry Coandă a inventat primului avion cu reacție. Raportul dintre raza mare și raza mică a elipselor folosite la construcția profilului de aripă este chiar numărul de aur.

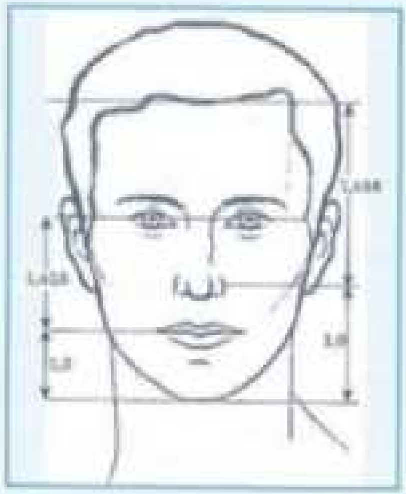
Secțiunea de aur a segmentului de lungime $a + b$ din desenul alăturat este realizată atunci când raportul dintre $a + b$ și a este egal cu raportul dintre a și b.

3 Stabiliți dacă numerele 13, 21, 34 și 55 pot forma o proporție.

4 Găsiți numărul rațional b, astfel încât $\frac{8+b}{8}=\frac{8}{5}$.

Pentru a răspunde la cerința 5, citește următorul text:

De remarcat raportul de aur pe chipul omului, precum și la forma urechii umane. Ombilicul împar
corpul omenesc în secțiunea de aur.



5 Stabiliți dacă are loc egalitatea:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8}$$

III.5. Mărimi direct proporționale

Mărimi direct proporționale. Două mărimi variabile sunt *direct proporționale*, dacă depind una de cealaltă, astfel încât dacă una crește de un număr de ori, atunci și cealaltă crește de același număr de ori.

Exemplul 1. Dacă 1 kg de fructe costă 4 lei, atunci 2 kg costă de două ori mai mult, 3 kg costă de trei ori mai mult etc. Cantitatea și costul sunt mărimi direct proporționale.

Exemplul 2. Lungimea laturii unui pătrat și perimetrul acestuia sunt direct proporționale. Completăm un tabel cu câteva valori particulare:

latura (cm)	1	2	3	5	6	a	na
perimetrul (cm)	4	8	12	20	24	$4a$	$4na$

Analizând rezultatele din tabel, observăm că dacă latura se dublează, atunci perimetrul se dublează, dacă latura se triplează, perimetrul se mărește de trei ori și, în general, dacă lungimea laturii crește de n ori: perechea (a, na), atunci perimetrul crește de același număr de ori: perechea $(4a, 4na)$.

Se formează astfel un șir de rapoarte egale $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\ldots=\frac{a}{4a}=\ldots=\frac{na}{4na}$.

Între două mulțimi finite de numere se stabilește o *proporționalitate directă* dacă se poate forma un *șir de rapoarte egale*, astfel încât mulțimea numărătorilor rapoartelor este una din mulțimi, iar mulțimea numitorilor rapoartelor este cealaltă mulțime.

În cele ce urmează vom folosi notația $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ pentru a desemna o mulțime ordonată (ordinea elementelor nu poate fi modificată).

Definiție. Mulțimea ordonată $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ este direct proporțională cu mulțimea ordonată $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ dacă $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

Valoarea comună a acestor rapoarte se numește coeficient de proporționalitate și se notează, de regulă, cu k, unde $k \neq 0$.

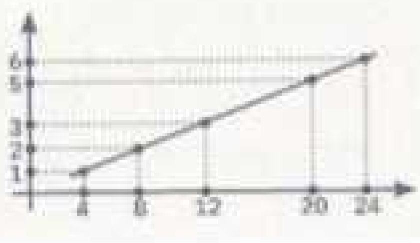
Exemple:

1 Mulțimea ordonată (3, 9, 15) este direct proporțională cu mulțimea ordonată (1, 3, 5), deoarece $\frac{3}{1}=\frac{9}{3}=\frac{15}{5}$. Coeficientul de proporționalitate este $k = 3$.

2 Mulțimea (2, 3, 6) nu este direct proporțională cu (5, 8, 15), deoarece $\frac{2}{5}\neq\frac{3}{8}$.

Reprezentarea grafică a dependenței direct proporționale

Perechile de valori particulare cuprinse în tabelul de mai sus se pot reprezenta într-un sistem de axe ortogonale.
Observăm că punctele obținute sunt coliniare.



Exersare

1 Stabiliți dacă mărimile ale căror valori sunt trecute în tabelele următoare sunt direct proporționale.

a

1	3	6	8
5	15	30	30

b

2	5	7	10
6	15	21	30

c

7	10	12	16
3,5	5	6	8

d

0,5	2	2,1	3
1	4	4,2	6

e

0,(2)	0,5	0,25	1
2	4,5	2	9

f

1	5,3	7	10
12	65	84	110

2 Completați tabelele următoare știind că mărimile x și y sunt direct proporționale.

a

x	3	5	6	15
y		35	0	

b

x	15	18	24	42
y			8	

3 Reprezentați grafic perechile de numere (x, y) conținute în tabelul de mai jos.
Stabiliți dacă mărimile x și y sunt direct proporționale.

x	1	2	4	6
y	2	4	8	12

4 Stabiliți dacă mărimile următoare sunt direct proporționale:

a o cantitate de fructe și prețul acestei cantități;

b numărul de muncitori și numărul de zile în care aceștia execută o lucrare dată.

5 Determinați x și y pentru care mulțimile următoare sunt direct proporționale:

a $A = \{2; 5\}$, $B = \{1; x\}$;

b $A = \{1; 4; 7\}$, $B = \{3; x; y\}$;

c $A = \{3; 5; 6\}$, $B = \{x; 2; y\}$;

d $A = \{15; 9; x\}$, $B = \{5; y; 7\}$.

6 Mulțimea $\{2; 9\}$ este direct proporțională cu mulțimea $\{x; 16\}$. Scrieți numărul x sub formă de fracție zecimală.

Consolidare

7 Numerele 3, x, 5 sunt direct proporționale cu y, 54, 45. Calculați $x + y$ și $y - x$.

8 Determinați numerele a și b, știind că sunt direct proporționale cu 5 și 8, iar diferența lor este egală cu 45.

9 Calculați trei numere raționale, știind că sunt direct proporționale cu 5, 7 și, respectiv, 12 iar suma lor este 252.

10 Aflați a, b, c știind că sunt proporționale cu 0,5; 0,2; 0,(3) și $a + b + c = 930$.

11 Determinați numerele a, b și c, știind că sunt direct proporționale cu 3, 4 și, respectiv, 5, iar produsul lor este egal cu 480.

12 Determinați trei numere raționale, știind că sunt direct proporționale cu 3,5; 2 și respectiv 0,5 și:

a diferența dintre cel mare și cel mic este egală cu 27;

b media lor aritmetică este egală cu 24.

13 Aflați cinci numere raționale știind că primele trei sunt direct proporționale cu 5, 6 și 10, ultimele 3 sunt direct proporționale cu 3, 8, 12 și suma lor este egală cu 200.

14 Împărțiți numărul 900 în părți direct proporționale cu numerele 3, 5 și respectiv, 7.

15 Împărțiți numărul 2 016 în părți direct proporționale cu numerele 3, 15 și 24.

16 Numerele a și b sunt proporționale cu 5, respectiv 4. Cât la sută din a reprezintă b?

17 Stabiliți dacă între lungimea laturii unui pătrat și aria acestuia se stabilește o relație de directă proporționalitate.

18 Verificați dacă între lungimea unui dreptunghi (ce are lățimea constantă) și aria sa se stabilește o relație de directă proporționalitate.

19 Calculați $\frac{4x+3z+u}{4y+3t+v}$, știind că $(x, z, u, 2)$ este direct proporțională cu $(y, t, v, 5)$.

20 Dacă valoarea raportului dintre a și b este 0,(1), atunci numerele a și b sunt direct proporționale cu 5 și, respectiv, ...

21 Știind că 60% dintr-un număr este egal cu 48% dintr-un alt număr, demonstrați că cele două numere sunt direct proporționale cu 4 și, respectiv, 5.

22 Aflați numerele naturale x, y și z care verifică relația $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{6}{z}$.

23 Arătați că $\frac{2x+6y}{25x-y}=\frac{58}{41}$ dacă și numai dacă x și y sunt direct proporționale cu numerele 2 și 9.

24 Se consideră numerele raționale a, b, c, d direct proporționale cu 5, 4, 2, 3. Știind că $bc = 4d$, determinați mulțimea divizorilor numărului $a + b + c + d$.

25 Trei persoane au depus la bancă sume direct proporționale cu 4, 6 și 14. Dobânda oferită de bancă este 8% pe an. După un an aveau la bancă în total 9072 lei.

a Ce sumă de bani a depus inițial fiecare persoană?

b Ce sumă de bani avea în bancă după un an fiecare persoană?

c Ce procent reprezintă suma celei de-a treia persoane din suma sumelor primelor două persoane după un an?

Aprofundare

26 $\overline{abab}$ și răsturnatul său sunt direct proporționale cu numerele 2 și 9. Aflați $a + b$.

27 Trei numere naturale de două cifre sunt direct proporționale cu numerele 5,(3); 3,75 și respectiv 1,(6). Determinați suma numerelor.

28 Dacă x, y, z, t sunt proporționale cu a, b, c, d, atunci $\frac{x^3+y^3+z^3+t^3}{a^3+b^3+c^3+d^3}=\frac{xyz}{abc}$.

29 Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ sunt direct proporţionale cu 6 şi 3, atunci $\frac{a}{a+b} < \frac{a^2}{a^2+b^2} < \frac{a^3}{a^3+b^3}$.

30 Între $\{1, 2, 3, ..., 2012\}$ şi $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{2012}\}$ există o proporţionalitate directă.

Ştiind că $\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+...+\frac{x_{2012}}{2012}=2012$, determinaţi $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2012}$.

31 Un număr de 2011 cifre este scris cu cifrele 4, 5, 6 şi cu 616 zerouri. Numărul de apariţii ale cifrelor 4, 5 şi 6 sunt direct proporţionale cu 4, 5 şi 6. Arătaţi că numărul dat nu este pătrat perfect.

Probleme de şapte stele

32 Numerele naturale x, y, z sunt direct proporţionale cu numerele naturale prime p, q, r. Ştiind că $p < q < r$, $p + q + r = 10$ şi $x + y + z = 100$, calculaţi suma ultimelor 2010 cifre ale numărului $T = x^{2009} + y^{2009} + z^{2009}$.

33 Numerele $x + y$, $y + z$, $z + x$ sunt direct proporţionale cu 3, 4, respectiv 5.

a Aflaţi valoarea raportului $\frac{3xy+4yz+5zx}{x^2+y^2+z^2}$, unde $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$.

b Ştiind că a, b, c sunt cifre nenule distincte, aflaţi valoarea maximă şi valoarea minimă a raportului $\frac{axy+byz+czx}{x^2+y^2+z^2}$.

c Aflaţi numerele $\overline{abc}$ de trei cifre nenule, distincte, astfel ca $\frac{axy+byz+czx}{x^2+y^2+z^2}=6$.

34 Determinaţi numerele prime x, y, z astfel încât numerele $x + 2y$, $y + z$, $2z + x$ să fie direct proporţionale cu 6, 7, respectiv 9.

35 Ştiind că numerele $x + y$, $y + z$, $z + x$ sunt direct proporţionale cu numerele $a + 1$, $a + 2$, respectiv $a + 3$, cu $a \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că: $2 < \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \le 11,(7)$.

36 Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi $c \in \mathbb{Q}$ direct proporţionale cu numerele prime x_1, x_2, x_3, unde $x_1 < x_2 < x_3$.

a Arătaţi că c este număr natural.

b Determinaţi x_1, x_2, x_3, dacă $a + b < c = 35$.

III.6. Mărimi invers proporționale

Mărimi invers proporționale. Două mărimi variabile sunt *invers proporționale*, dacă depind una de cealaltă, astfel încât dacă una crește de un număr de ori, atunci cealaltă scade de același număr de ori.

Exemplul 1. 10 m de stofă se pot cumpăra cu o anumită sumă de bani. Dacă prețul stofei ar fi de două ori mai mic, atunci cu aceeași sumă de bani s-ar cumpăra 20 m de stofă. Dacă prețul stofei ar fi de trei ori mai mic, atunci cu aceeași sumă de bani s-ar cumpăra de trei ori mai multă stofă. Prețul stofei și lungimea cuponului cumpărat sunt mărimi invers proporționale.

Exemplul 2. Dacă pentru a realiza o lucrare un muncitor trebuie să lucreze timp de 10 zile, atunci aceeași lucrare va fi realizată de doi muncitori în cinci zile, iar de cinci muncitori în doar două zile. Între numărul de muncitori și numărul de zile se stabilește o relație de inversă proporționalitate.

Exemplul 3. Lungimea și lățimea unui dreptunghi cu aria constantă sunt mărimi invers proporționale. Completăm un tabel cu câteva valori particulare:

lățimea (cm)	2	3	4	6	12	a	na
lungimea (cm)	12	8	6	4	2	$\frac{24}{a}$	$\frac{24}{na}$

Analizând rezultatele din tabel, observăm că dacă latura se dublează, atunci lungimea se înjumătățește, dacă latura se triplează, lungimea se micșorează de trei ori și, în general, dacă lățimea crește de n ori: perechea (a, na), atunci lungimea scade de același număr de ori: perechea $\left(\frac{24}{a}, \frac{24}{na}\right)$.

Se formează astfel un șir de produse egale $2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = \ldots = a \cdot \frac{24}{a} = na \cdot \frac{24}{na}$.

Între două mulțimi finite de numere se stabilește o proporționalitate inversă, dacă și numai dacă se poate forma un *șir de produse egale*, astfel încât primul factor al fiecărui produs să fie element al unei mulțimi, iar cel de-al doilea factor să fie element al celeilalte mulțimi.

Definiție. Mulțimea ordonată $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ este *invers proporțională* cu mulțimea ordonată $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_p)$ dacă $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots = a_p \cdot b_p$.

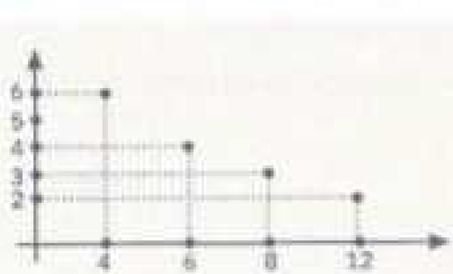
Exemple:

1 Mulțimea {3; 4; 6} este invers proporțională cu {4; 3; 2}, deoarece $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$.

2 Mulțimea {2; 3; 6} nu este invers proporțională cu {9; 6; 2}, deoarece $2 \cdot 9 \neq 6 \cdot 2$.

Reprezentarea grafică a dependenței invers proporționale

Perechile de valori particulare cuprinse în tabelul anterior, de la exemplul 3, se pot prezenta într-un sistem de axe ortogonale. Observăm că, spre deosebire de dependența direct proporțională, punctele obținute nu sunt coliniare.



Exersare

1 Completați cu unul din cuvintele *direct* sau *invers* pentru a obține propoziții adevărate:

a Viteza și timpul (când distanța este constantă) sunt mărimi ...... proporționale.

b Viteza și distanța (când timpul este constant) sunt mărimi ...... proporționale.

c Numărul de muncitori și numărul de piese executate de ei într-un interval de timp dat sunt mărimi ...... proporționale.

d Cantitatea de mere și costul ei când prețul unui kilogram este dat sunt mărimi ...... proporționale.

e Numărul robinetelor (cu același debit) și timpul de umplere a unui bazin sunt mărimi ...... proporționale.

2 Stabiliți dacă mărimile ale căror valori sunt trecute în tabelele următoare sunt direct sau invers proporționale.

a

1	4	5	8
40	10	8	5

b

2	4	9	10
3	12	27	30

c

0,1(6)	2	6	8
3	0,25	0,08(3)	1

d

1	3	5	10
24	8	4,8	2,4

e

3	5	6	8
1,5	3	2	4

f

0,3	0,(4)	12	21
140	94,5	3,5	2

3 Reprezentați grafic perechile de numere (x, y) conținute în tabelul de mai jos. Stabiliți dacă mărimile x și y sunt direct sau invers proporționale.

x	1	2	4	8
y	8	4	2	1

4 Stabiliți dacă numerele 5, 12, 6 sunt invers proporționale cu 10; 4,1(6); 8,(3).

5 Numerele 1, 3, 12, sunt direct sau invers proporționale cu numerele 27, 9, 2,25?

6 Determinați x și y pentru care mulțimile următoare sunt invers proporționale:

a $A = \{2; 8\}$, $B = \{18; x\}$;

b $A = \{10; 4; 2\}$, $B = \{3; x; y\}$.

Consolidare

7 Aflați a, știind că numerele 4 și 12 sunt invers proporționale cu a și respectiv, 6.

8 Determinați numerele x și y știind că sunt invers proporționale cu 0,(3) și 0,25, iar media lor aritmetică este 14.

Rezolvă problema chiar aici:

9 Suma numerelor x și y este 20 și mulțimea $\{x; y\}$ este invers proporțională cu $\{0,25; 0,(3)\}$. Determinați numerele.

10 Aflați trei numere raționale ce sunt invers proporționale cu 0,(3); 0,25; 0,2 și au media aritmetică egală cu 60.

11 Trei numere sunt invers proporționale cu 2, 5, respectiv, 4. Aflați suma lor dacă cel mai mic dintre ele este 144,(3).

12 Două numere sunt invers proporționale cu 5 și 4, iar cel mai mare dintre ele este egal cu 20. Aflați diferența dintre cele două numere.

13 Împărțiți numărul 420 în părți invers proporționale cu 2, 5 și 6.

14 Împărțiți numărul 3804 în părți invers proporționale cu 0,(6); 0,75; 0,8; 0,8(3).

15 Numerele x și y sunt invers proporționale cu 6 și, respectiv, 5.

Calculați valorile rapoartelor: $\dfrac{3x+8y}{5x+y}$; $\dfrac{x^2+y^2}{8xy}$.

16 Numerele a și b sunt invers proporționale cu 6 și 15. Cât la sută din a reprezintă b?

17 Determinați numerele raționale pozitive x, y, z știind că sunt invers proporționale cu numerele 6, 4, 3 și verifică egalitatea $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=24$.

18 Fie x, y, z, t numere raționale pozitive și $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\dfrac{ax}{by+cz+dt}=\dfrac{by}{ax+cz+dt}=$ $=\dfrac{cz}{ax+by+dt}=\dfrac{dt}{ax+by+cz}$. Arătați că:

a Numerele x, y, z, t sunt invers proporționale cu a, b, c, d.

b Numărul $A=(kax+by+cz+dt)\cdot\left(\dfrac{k}{ax}+\dfrac{1}{by}+\dfrac{1}{cz}+\dfrac{1}{dt}\right)$ este natural pătrat perfect, pentru orice valoare $k \in \mathbb{N}^*$.

Aprofundare

19 a Determinați numerele naturale nenule a, b, c știind că sunt invers proporționale cu numerele $\dfrac{1}{0,(4)}$; 1; $\dfrac{1}{0,4}$ și că $(c+b; a)=1$.

b Pentru a, b, c determinate anterior rezolvați în $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{c}{6x}-\dfrac{a}{5y}=\dfrac{b}{45}$.

20 Determinați numerele naturale nenule a, b, c, d știind că (a, b), (c, d), $[a, b]$ și $[c, d]$ sunt cele mai mici numere naturale invers proporționale cu numerele 1260, 525, 36, respectiv 35. Notațiile (m, n) și $[m, n]$ reprezintă cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor m și n.

21 Determinați numerele naturale nenule a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 care verifică relațiile:

$a_2^2=a_1a_3$; $a_3^2=a_2a_4$; $a_4^2=a_3a_5$; $a_5^2=a_4a_1$; $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2010$.

22 Determinați numerele a, b, c știind că a și b sunt direct proporționale cu 5 și 8, b și c sunt invers proporționale cu 3 și 2, iar $3a + 2b - c = 57$.

23 Aflați a, b, c știind că a și b sunt invers proporționale cu 0,(2), respectiv 1,(1), b și c sunt direct proporționale cu 3, respectiv 2, iar $a + 2b + 3c = 54$.

24 Numerele raționale pozitive x_1, x_2, x_3 sunt direct proporționale cu numerele 11, 9, respectiv 7, iar numerele raționale x_3, x_4, x_5, x_6 sunt invers proporționale cu numerele 15, 21, 35, respectiv 105.

a Arătați că $S < 1$, unde

$$S = \frac{x_3}{x_1 - x_2} + \left(\frac{x_3}{x_2 - x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_3 - x_4}\right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_4 - x_5}\right)^4 + \left(\frac{x_3}{x_5 - x_6}\right)^5.$$

b Aflați primele două numere dacă suma pătratelor ultimelor patru este 189.

Probleme de șapte stele

25 Determinați numerele naturale a, b, c știind că $a + 2b - 3c$, $b + 2c - 3a$ și $c + 2a - 3b$ sunt direct proporționale cu 2006, 2007, 2008 și că $ab + bc + ca = 363$.

26 Numerele a, b, c reprezintă măsurile în grade a trei unghiuri. Aflați aceste măsuri, știind că a și b sunt invers proporționale cu 0,5 și 0,(3); b și c sunt direct proporționale cu 0,25 și 0,(3), iar c reprezintă 40% din măsura suplementului lui a.

27 Un pachet de bomboane a fost împărțit la trei copii invers proporțional cu numerele 20, 10, respectiv 12. Unul dintre copii observă ca a primit mai puțin cu 90 de bomboane, decât ar fi primit, dacă același pachet de bomboane s-ar împărți direct proporțional cu numerele 0,1; 0,2; respectiv 0,(3). Câte bomboane au fost în pachet? Câte bomboane a primit fiecare copil?

28 O sumă de bani se împarte la 3 persoane, invers proporțional cu 3, 4, respectiv 5. O persoană constată că primește cu 260 de lei mai mult decât dacă aceeași sumă ar fi fost împărțită astfel: prima persoană ar fi primit 45% din sumă, a doua 35% din sumă, iar a treia restul. Aflați suma și cât primește fiecare persoană.

29 Aflați numerele naturale a, b, c, d, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a numerele $a + 3$, $b + 4$, $c + 5$ sunt direct proporționale cu 2, 3, respectiv 4;

b numerele $c + 5$, $d + 7$ sunt invers proporționale cu 0,5, respectiv 0,(3);

c $3a + 4b + 5c + 6d = 148870$.

III.7. Regula de trei simplă

Regula de trei simplă este procedeul folosit pentru a determina numărul necunoscut dintr-o mulțime de două elemente, dacă între acea mulțime și o altă mulțime ale cărei elemente sunt cunoscute există o relație de directă proporționalitate sau de inversă proporționalitate.
Pentru a rezolva concis o problemă, aplicând *regula de trei simplă*, convenim să comparăm mintal mărimile de același fel și ilustrăm concluzia la care am ajuns cu o săgeată orientată cu vârful spre elementul mai mare:
- dacă săgețile sunt orientate în același sens, mărimile sunt direct proporționale;
- dacă săgețile au sensuri opuse, mărimile sunt invers proporționale.

Problema 1. 3 kg de mere costă 15 lei. Cât costă 7 kg de mere de aceeași calitate?

Rezolvare: $\downarrow$ 3 kg de mere .... 15 lei $\downarrow$
7 kg de mere .... x lei

S-a *mărit* cantitatea de mere, *se va mări* și prețul și am orientat săgețile, conform convenției menționate anterior. Deducem că mărimile (cantitatea de mere și prețul sunt direct proporționale. Folosind metoda proporției, scriem cele două rapoarte în ordinea sugerată de datele problemei.

$$\frac{3}{7}=\frac{15}{x} \Rightarrow x=\frac{15\cdot 7}{3}=35 \text{ lei}.$$

Problema 2. Patru muncitori execută o lucrare în 6 zile. În câte zile ar termina acea lucrare 3 muncitori, lucrând cu aceeași îndemânare?

Rezolvare: $\uparrow$ 4 muncitori .... 6 zile $\downarrow$
3 muncitori .... x zile

S-a *micșorat* numărul muncitorilor, *se va mări* numărul zilelor. Deducem că cele două mărimi (numărul muncitorilor și timpul necesar) sunt invers proporționale. Vom folosi metoda proporției, dar scriem inversul celui de-al doilea raport sugerat de datele problemei, iar primul rămâne neschimbat.

$$\frac{4}{3}=\frac{x}{6} \Rightarrow x=\frac{6\cdot 4}{3}=8.$$

Sunt necesare 8 zile.

Regula de trei compusă (extindere). În diverse probleme, intervin trei sau mai multe mulțimi de câte două numere, între unele dintre ele existând o proporționalitate directă, iar între altele o proporționalitate inversă.
Să considerăm următoarea problemă în care apar trei mărimi și să o rezolvăm transformând-o în două probleme ce se rezolvă cu regula de trei simplă.

Problema 3. Pentru a strânge 18 hl de apă, prin 4 robinete trebuie să curgă apă timp de 360 de minute. Pentru a strânge 12 hl de apă, cât timp trebuie să fie deschise 6 robinete, cu același debit?

Rezolvare: 18 hl .... 4 robinete .... 360 min
12 hl .... 6 robinete .... x min

Observăm că s-a schimbat și cantitatea de apă și numărul robinetelor. Transformăm problema, introducând o nouă problemă, în care schimbăm cantitatea de apă, ca în concluzia problemei, dar lăsăm neschimbat numărul robinetelor, ca în ipoteza problemei.

Problema intermediară

18 hl	4 robinete	360 min
12 hl	4 robinete	y min

Deoarece numărul robinetelor nu influențează valoarea lui y, aplicăm regula de trei simplă:

↑ 18 hl	360 min ↑
12 hl	y min

Micșorând cantitatea de apă, se va micșora și timpul necesar. Deducem că cele două mărimi (cantitatea de apă și timpul necesar) sunt direct proporționale. Cu regula de trei simplă, avem:

$$\frac{18}{12}=\frac{360}{y} \Rightarrow y=\frac{360\cdot 12}{18}=240 \text{ min}.$$

Problema finală

Preluăm concluzia problemei intermediare și concluzia problemei inițiale.

12 hl	4 robinete	240 min
12 hl	6 robinete	x min

Deoarece cantitatea de apă nu influențează valoarea lui x, o ignorăm și obținem o problemă pe care o rezolvăm aplicând regula de trei simplă:

↓ 4 robinete	240 min ↑
6 robinete	x min

Mărind numărul robinetelor, timpul necesar se va micșora. Deducem că numărul robinetelor și timpul necesar sunt mărimi invers proporționale. Cu regula de trei simplă, rezultă:

$$\frac{4}{6}=\frac{x}{240} \Rightarrow x=\frac{240\cdot 4}{6}=160 \text{ min}.$$

Observație: Analog se rezolva problema și dacă în problema intermediară schimbam numărul robinetelor, dar lăsam neschimbată cantitatea de apă.

Problema de mai sus poate fi rezolvată direct, analizând tipul de proporționalitate (directă sau inversă) dintre datele cunoscute ale problemei și datele care trebuie aflate.

18 hl	4 robinete	360 min
12 hl	6 robinete	x min

Perechile $(360, x)$ și $(18, 12)$ sunt direct proporționale (d.p.), deoarece micșorând cantitatea de apă cerută (de la 18 la 12 hl , timpul necesar se va micșora și el. Perechile $(360, x)$ și $(4, 6)$ sunt invers proporționale (i.p.), deoarece mărind numărul de robinete, timpul necesar se micșorează.

Raportul dintre elementele perechii care conține necunoscuta, adică $(360, x)$, va fi egal cu produsul rapoartelor formate cu elementele perechilor $(18, 12)$ și $(4, 6)$.

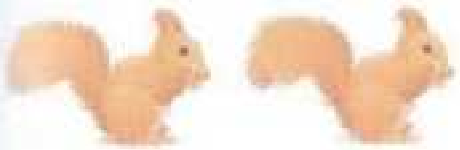
Ca și mai înainte, în cazul proporționalității directe *păstrăm* raportul sugerat de datele problemei, iar în cazul proporționalității inverse *inversăm* raportul sugerat de datele problemei.

(d.p.)	(i.p.)	
18 hl	4 robinete	360 min
12 hl	6 robinete	x min

$$\frac{360}{x}=\frac{18}{12}\cdot\frac{6}{4} \Rightarrow x=\frac{360\cdot 12\cdot 4}{18\cdot 6}=160 \text{ min}.$$

Acest mod de a proceda se numește *regula de trei compusă*.

Exersare

1. 

.... 40 lei

.... x lei

2 Cinci kilograme de prune costă 15 lei. Cât costă 8 kg de prune?

3 Un profesor achită pentru 8 cărți 144 lei. Cât vor costa 5 cărți de același fel?

4 Doi muncitori execută la strung 60 de piese. Câte piese execută trei muncitori, în același timp, lucrând cu aceeași îndemânare?

5 Dacă 1 kg de prune costă 3 lei, o gospodină poate cumpăra 8 kg de prune. Câte kg de prune poate cumpăra cu aceeași sumă, dacă 1 kg de prune costă 4 lei?

6 Dacă o carte costă 12 lei, un profesor poate cumpăra 8 cărți. Câte cărți de același fel poate cumpăra cu aceeași sumă, dacă prețul cărții a devenit 16 lei?

Rezolvă problema chiar aici:

7 Doi muncitori execută la strung un număr de piese în 60 de minute. În cât timp execută trei muncitori, același număr de piese, lucrând cu aceeași îndemânare?

Rezolvă problema chiar aici:

8 Trei ouă fierb în 6 minute. În câte minute fierb 10 ouă? Atenție!

Consolidare

9 În 1200 g de soluție se află 50 g de sare. Câte grame de sare se găsesc în 1,5 kg de soluție, de aceeași concentrație?

10 Un automobil a parcurs 38,5 km în 30 de minute. Ce distanță va parcurge automobilul în 3 ore, dacă se va deplasa cu aceeași viteză?

11 12 muncitori pot executa o lucrare în 6 zile. În câte zile pot executa aceeași lucrare 18 muncitori?

12 Cifra de afaceri a Societății MATH-SM, s-a ridicat, în anul 2008, la 90 000 000 €, realizându-se un profit de 4 500 000 €. Pentru anul 2009 cifra de afaceri a fost egală cu 100000000 €. Ce profit a realizat societatea, păstrând rentabilitatea din anul precedent?

13 Inima unui om bate de aproximativ 140 de ori în 2 minute. De câte ori bate într-o oră?

14 Cinci muncitori termină o lucrare în 18 zile lucrând câte 8 ore pe zi. În câte zile pot termina aceeași lucrare 9 muncitori dacă vor lucra tot câte 8 ore pe zi?

Rezolvă problema chiar aici:

15 Peștele spadă înoată mai rapid decât oricare alt pește! Știind că parcurge 150 m în 6 secunde aflați câți kilometri parcurge într-o oră.

16 Douăsprezece camioane transportă o cantitate de nisip făcând fiecare câte 10 curse pe zi. Câte camioane sunt necesare pentru a transporta aceeași cantitate, dacă fiecare face câte 15 curse?

17 *Ș-atunci, unde nu începe Flămânzilă a cărăbăni deodată în gură câte o harabă de pâne, și răped mi ți le-a înfulecat și le-a forfecat, de parcă n-au mai fost.*

Ion Creangă – *Harap Al*

După ce-și potoli foamea, Flămânzilă luă aminte că, dacă înfulecă 400 de pâini pe zi, are hrană pentru 3 zile. Câte pâini trebuie să înfulece pe zi, ca să-i ajungă pentru 5 zile?

Ștefan Smărăndoiu, „Magia Performanței

18 *Și-n vreme cât s-au cununat*
S-a-ntins poporul adunat
Să joace-n drum după tilinci:
Feciori la zece fete, cinci,
Cu zdrăngăneii la opinci
Ca-n port de sat.

George Coșbuc – *Nunta Zamfir*

Desigur, n-am fost la nuntă, dar, presupunând că-n uriașa horă formată erau 90 de feciori, aflat numărul fetelor.

Aprofundare

19 Cinci muncitori termină o lucrare în 18 zile lucrând câte 8 ore pe zi. În câte zile pot termina aceeași lucrare 9 muncitori dacă vor lucra câte 10 ore pe zi?

20 360 kl de apă curg prin 3 robinete timp de 36 de minute. Prin 4 robinete, cu același debit, în cât timp curg 120 kl de apă?

Rezolvă problema chiar aici:

21 Dintr-o sârmă lungă, un muncitor betonist face 11 tăieturi, cu un clește, pentru a obține bucăți de sârmă a 5 m fiecare. Câte tăieturi ar trebui să facă pentru a obține, din aceeași bucată de sârmă, bucăți a 10 m fiecare?

22 Dintr-o fântână trebuiau pompate 300 de găleți de apă. Pompa scoate 180 de găleți de apă pe oră din care 30 de găleți se scurg înapoi în fântână. În câte ore se scot cele 300 de găleți de apă?

A 1; B 2; C 3; D 4; E alt răspuns.

23 Pentru obținerea fontei, la un combinat siderurgic, s-au folosit 2030 tone de cărbuni, timp de 145 zile. Pentru câte zile vor ajunge 3296 tone de cărbuni, dacă zilnic se vor consuma cu 2 tone mai mult ca înainte?

24 Doi muncitori sapă 2 m de șanț în 2 ore. În 5 ore, câți muncitori vor săpa 5 m de șanț?

Rezolvă problema chiar aici:

Probleme de șapte stele

25 O echipă de 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 de zile. După ce echipa lucrează 10 zile, 6 muncitori sunt trimiși să lucreze în altă parte. În cât timp vor termina lucrarea muncitorii care au rămas?

26 Un număr de 6 muncitori au început o lucrare pe care și-au propus să o termine în 20 de zile, lucrând câte 8 ore pe zi. După 4 zile 2 muncitori pleacă. În cât timp va fi terminată lucrarea, dacă cei rămași lucrează câte 6 ore pe zi?

Rezolvă problema chiar aici:

27 Clopotele bisericii *Cuvioasa Sf. Paraschiva* din Râmnicu Vâlcea bat de 3 ori în 12 secunde. În câte secunde vor bate de 12 ori?

III.8. Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice

Uneori, pentru a înțelege mai bine un fenomen, o situație, sau pentru a prezenta cât mai clar o suită de valori, sunt necesare tabele sau diagrame statistice. O problemă ce se referă la o relație între două mulțimi de numere poate fi mai ușor rezolvată dacă se creează un tabel. Acesta poate fi util în organizarea datelor astfel încât relațiile să fie mult mai clare. În cadrul acestui proces denumit organizarea datelor, putem colecta, organiza, expune și interpreta datele. Prezentarea acestora trebuie să fie clară, astfel încât să nu lase loc unor interpretări. Ea poate fi realizată cu ajutorul diagramelor, unele dintre cele mai întâlnite fiind diagramele circulare și cele cu bare.

Diagramele circulare. O diagramă circulară oferă posibilitatea raportării părților la întreg. Este utilizată atunci când suma datelor este cunoscută și categoriile ce formează întregul sunt disjuncte.

Exemplu: La sfârșitul anului școlar 2009 – 2010 elevii din clasa a VIII-a ai unei școli au susținut evaluarea națională. Numărul de elevi promovați a fost egal cu 228. Dintre aceștia 16 au avut medii cuprinse între 9 și 10, 41 medii cuprinse între 8 și 9, 61 între 7 și 8, 57 între 6 și 7, 53 între 5 și 6. Pentru expunerea datelor putem folosi un tabel.

medii între	numărul elevilor
5 și 6	53
6 și 7	57
7 și 8	61
8 și 9	41
9 și 10	16

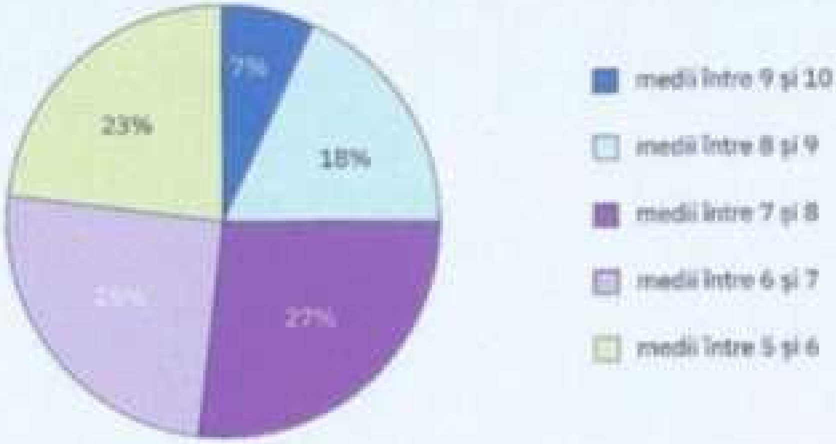
Observăm că:
- suma datelor este cunoscută: numărul elevilor promovați.
- categoriile sunt disjuncte, adică elevii promovați au medii cuprinse între 9 și 10, 8 și 9, 7 și 8, 6 și 7, 5 și 6.

Pentru a trasa diagrama vom parcurge următoarele etape:
- identificăm întregul și determinăm numărul părților;
- calculăm procentul corespunzător fiecărei categorii (scriem raportul dintre numărul elevilor aparținând unei categorii și numărul total, apoi îl transformăm în raport procentual;
- determinăm măsurile unghiurilor ce corespund procentelor calculate anterior.

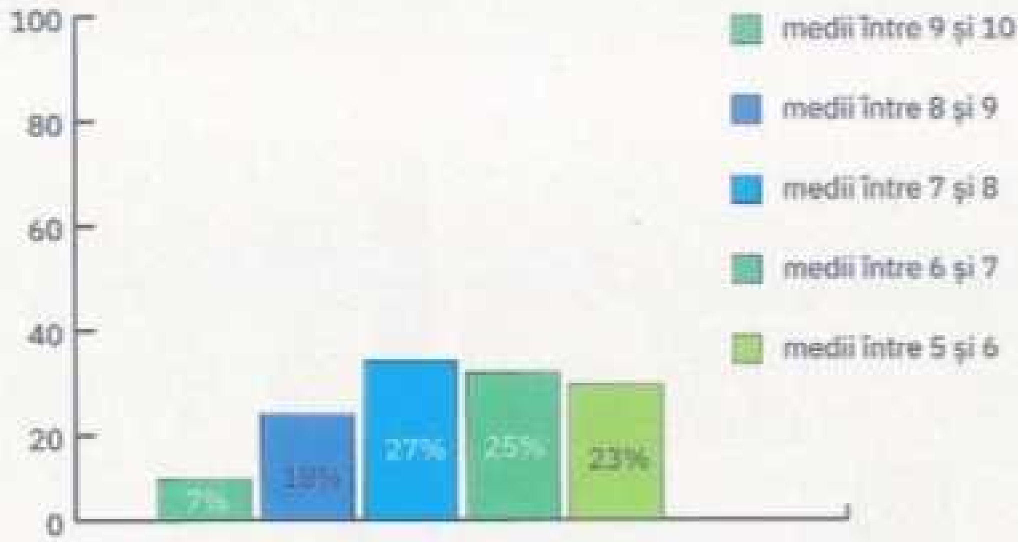
Exemplu: $\dfrac{16}{228}=\dfrac{p}{100} \Rightarrow p=\dfrac{1600}{228} \Rightarrow p \approx 7\%$.

Exemplu: $\dfrac{7 \cdot 360^\circ}{100} \approx 25^\circ$.

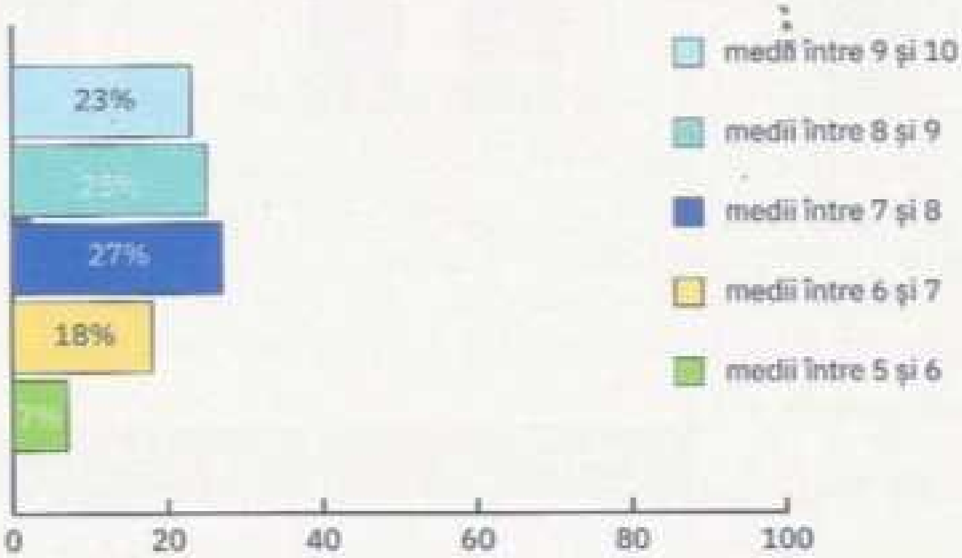
- Trasăm diagrama și evidențiem fiecare categorie.



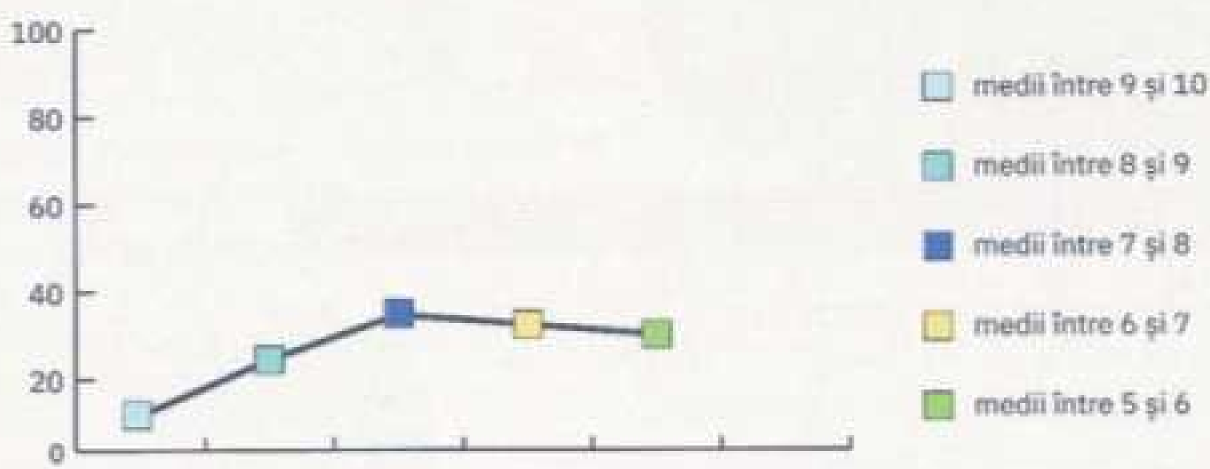
Grafic cu bare. Într-un grafic cu bare, datele sunt expuse cu ajutorul unor bare paralele verticale sau orizontale. Acestea permit compararea rapidă a datelor. Pentru exemplul anterior diagrama cu bare verticale este următoarea:



Pentru exemplul anterior diagrama cu bare orizontale este următoarea:



Grafic cu puncte. Aceleași date pot fi expuse într-un grafic cu puncte în care datele sunt expuse cu ajutorul unor puncte ce sunt unite prin segmente ce indică tendința de creștere sau descreștere a valorilor cuprinse în diagramă.

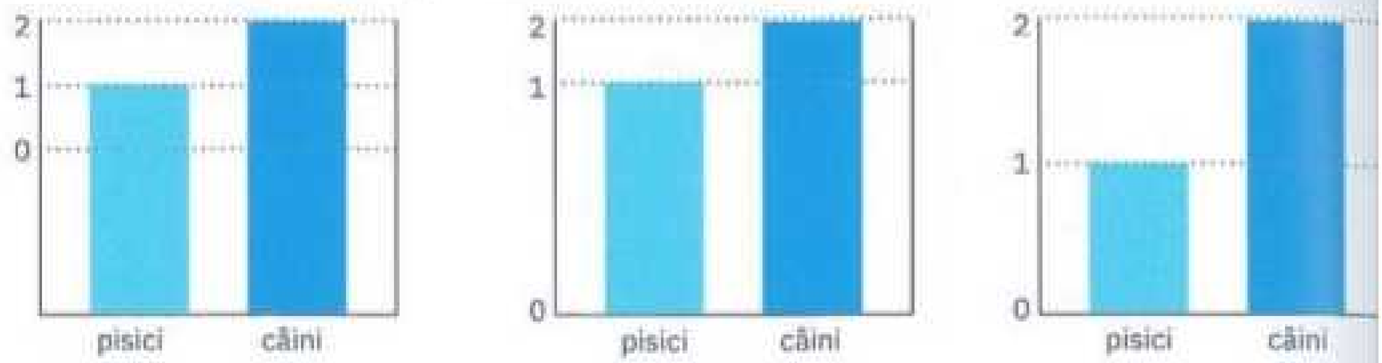


Pentru a realiza o diagramă cu bare sau o diagramă prin puncte:

- alegeți cele două seturi de date care vor fi scrise de-a lungul axelor. (În exemplul dat, categoriile sunt trecute pe o axă, iar numărul elevilor din fiecare categorie pe cealaltă axă.);
- alegeți o unitate de măsură pentru fiecare axă și evidențiați valorile alese. (Numărul elevilor aparținând unei categorii variază între 16 și 61 deci o unitate potrivită pentru axa corespunzătoare numărului elevilor este 10.);
- trasați diagrama.

Exersare

1 Irina are o pisică și doi câini. Ea a realizat trei diagrame cu bare în care să se regăsească acest valori. Care dintre aceste reprezentări este corectă?



2 Măsura unghiului $\widehat{AOB}$ din figura 1 este egală cu 120°. Ce procent din suprafața circular este hașurat cu o culoare mai închisă?

3 În reprezentarea din figura 2, raportul dintre înălțimile coloanelor C și A este egal cu $1\frac{1}{2}$.

Determinați înălțimea coloanei C.

4 Dacă raportul dintre x și y din figura 3 este egal cu $\frac{9}{5}$, care sunt valorile lui x și y?

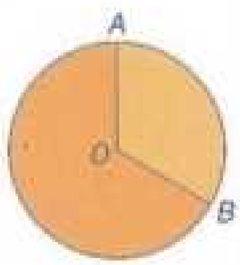


Figura 1

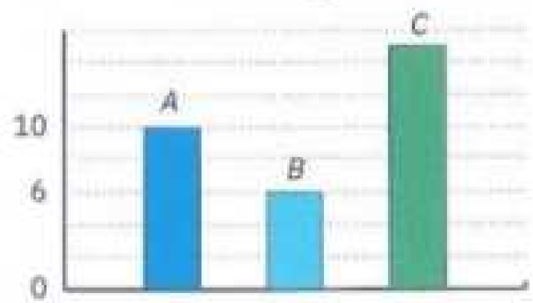


Figura 2

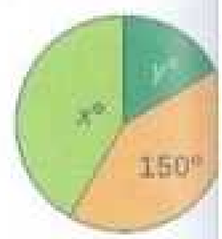


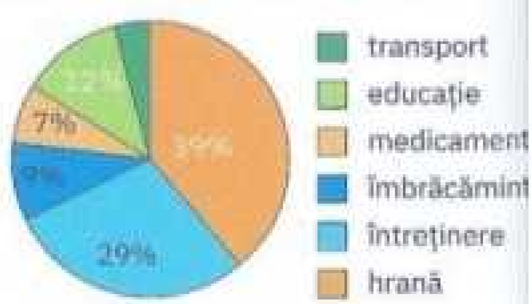
Figura 3

Consolidare

5 În diagrama de mai jos sunt prezentate cheltuielile lunare ale unei familii. Venitul lunar este egal cu 1250 lei.

a Cât la sută reprezintă cheltuielile cu transportul?

b Cât se cheltuiește în fiecare lună pentru medicamente? Dar pentru hrană?

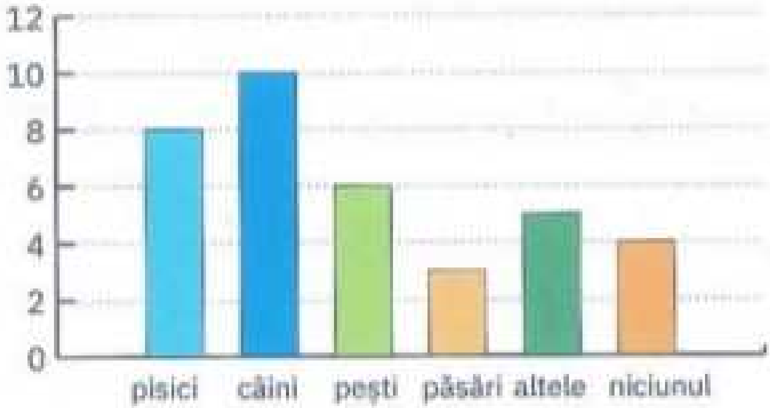


6 Într-un grup de copii, unii au ca animale de companie pisici, alții câini, pești, păsări ș.a.m.d. Într-o reprezentare printr-o diagramă cu bare ce reprezintă fiecare categorie, distribuția este dată mai jos.

a Care este numărul total de păsări?

b Câți elevi nu au animale de companie?

Realizați, pentru aceleași date, o diagramă cu bare orizontale.



7 La o lucrare elevii unei clase au obținut următoarele rezultate:

nota	10	9	8	6	5	4
numărul de elevi	3	4	2	7	5	1

Alcătuiți, pe baza acestor rezultate, o diagramă cu bare.

8 Listați activitățile principale ale unei zile lucrătoare precum și timpul acordat fiecăreia. Realizați, pe baza datelor obținute, o diagramă cu bare.

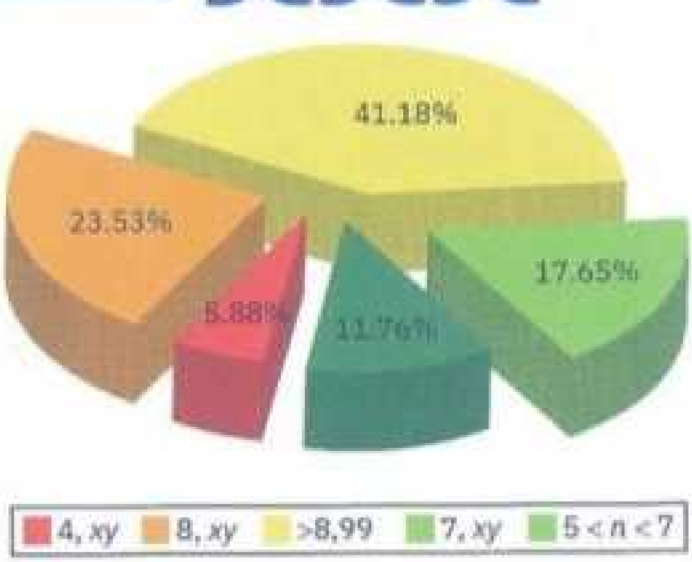
9 48% din cei 120 000 de locuitori ai unei localități sunt bărbați. Câți locuitori sunt femei? Cât la sută din numărul total sunt femei? Realizați o diagramă circulară pentru a prezenta aceste rezultate.

Aprofundare

10 La un test de evaluare dat celor 51 de elevi de la două clase de la Școala *Take Ionescu*, din Râmnicu Vâlcea, numărul elevilor care au obținut cele cinci tipuri de punctaje: x, y, z, t, s, corespunde procentelor din diagramă, în ordine descrescătoare.
Se știe că $8{,}99 < x$; $8{,}00 \le y < 9$; $7{,}00 \le z < 8$; $5 < t < 7$; $4{,}00 \le s < 5$.

a Aflați numărul elevilor corespunzător fiecăruia din cele 5 punctaje.

b Între ce limite este cuprinsă media obținută la acest test?

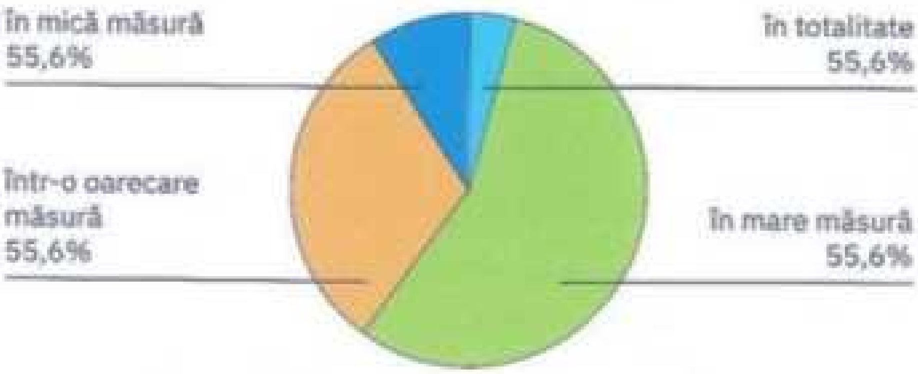


Rezolvă problema chiar aici:

11 Venitul lunar net al unei familii este 850 lei și cheltuielile lunare sunt: 30% cheltuieli pen
întreținerea locuinței, 40% hrana, 10% îmbrăcămintea, 10% transportul, 10% diverse. Întocm
o diagramă circulară prin care să expuneți aceste date.

12 La un test, la consiliere, elevii au fost întrebați în ce măsură consideră că școala îi pregătește pe
tru viitoarea lor profesie. Situația este prezentată prin aproximarea rezultatelor în tabel și d
gramă. Corelând datele prezentate, determinați x; y; z.

		Frecvența răspunsului	Procent
răspunsuri valide	în totalitate	x	4,4%
	în mare măsură	y	55,6%
	într-o oarecare măsură	28	31,1%
	în mică măsură	8	z
	Total	90	100%



Rezolvă problema chiar aici:

III.9. Probabilități

Să analizăm următoarele *experimente* ce pot avea cel puțin două rezultate posibile:

1. Extragerea unei bile dintr-o urnă. Dacă avem n bile identice ca formă sau greutate, dar diferă prin culoare, și extragem o bilă fără a privi în urnă, atunci e posibilă extragerea oricărei bile, deci avem n cazuri posibile. Dacă în urnă sunt trei bile de trei culori diferite, atunci sunt trei rezultate posibile ale acestui experiment.
2. Aruncarea unui zar. Oricare dintre cele șase fețe ale sale poate apărea, deci experimentul are șase rezultate posibile.
3. Aruncarea unei monede. Sunt două rezultate posibile.
   Vom numi *eveniment* rezultatul pe care dorim să îl obținem.

Exemple:
1. Extragerea unei bile de o anumită culoare.
2. Apariția feței cu șase puncte.
3. Apariția feței pe care este înscrisă valoarea monedei.

Definiție. Probabilitatea ca un anumit eveniment să se producă este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului și numărul cazurilor posibile experimentului.
Notând cu n_f numărul cazurilor favorabile realizării unui anumit eveniment/experiment eveniment A și cu n_p numărul tuturor cazurilor posibile, probabilitatea p de realizare a evenimentului A este:

$p(A)=\frac{n_f}{n_p}$, unde $n_f, n_p \in \mathbb{N}$, $n_p \neq 0$, iar $n_f \leq n_p$.

Exemplu: Dintr-o urnă ce conține 8 bile albe și 9 bile negre extragem o bilă. Extragerea unei bile albe este un eveniment pe care îl vom nota cu A. Extragerea unei bile negre este un al doilea eveniment pe care îl notăm cu N. Întrucât oricare dintre bile poate fi extrasă, sunt 17 cazuri posibile. Pentru realizarea evenimentului A sunt 8 cazuri favorabile, iar pentru evenimentul N sunt 9, deci $p(A)=\frac{8}{17}$ și $p(N)=\frac{9}{17}$.

Evenimentul *sigur* este cel pentru care $p = 1$ (toate cazurile posibile sunt favorabile) și eveniment *imposibil* când $p = 0$ (niciun caz posibil nu este favorabil).

Exemplu: Într-o urnă sunt 3 bile roșii și 5 bile albe. Calculați:

a. probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să nu fie neagră;
b. probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie verde.

Soluție:

a. În urnă fiind numai bile albe și roșii sigur nu se poate extrage o bilă neagră:

$n_f = 3 + 5 = 8,\ n_p = 8 \Rightarrow p=\frac{8}{8}=1.$

b. Este imposibil să extragem o bilă verde, dacă în urnă sunt numai bile albe și roșii:

$n_f = 0,\quad n_p = 8 \Rightarrow p=\frac{0}{8}=0.$

Exersare

1 Câte rezultate posibile are fiecare din următoarele experimente?

a alegerea unei luni a anului la întâmplare;

b aruncarea unei monede;

c alegerea unui număr de două cifre.

2 Dați un exemplu de experiment care are patru rezultate posibile.

3 Arunc o monedă. Care este posibilitatea de a apărea fața pe care este înscrisă valoarea monedei?

4 Care este probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară fața cu cinci puncte? Dar cea cu trei puncte?

5 Arunci un zar. Vreau să apară fața cu patru puncte. Care este șansa de a obține acest rezultat?

6 Într-un coș sunt 8 mere, 12 pere și 4 gutui. Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare un fruct, acesta să fie măr?

Consolidare

7 Într-o urnă sunt cuburi albe, verzi și roșii. Sunt 25 cuburi albe, 18 cuburi verzi și sunt 50 cuburi în total. Extrag un cub la întâmplare.

a Care este posibilitatea de a extrage un cub verde?

b Care dintre culori are o șansă mai mare de apariție. Explicați.

8 Ce puteți spune despre un eveniment a cărui probabilitate este egală cu 100%? Dar despre un eveniment ce are probabilitatea egală cu 0%?

9 Probabilitatea unui eveniment poate fi mai mare decât 1? Justificați.

10 Un eveniment are probabilitatea egală cu $\frac{5}{11}$. Ce este mai probabil: să se producă sau să nu se producă evenimentul?

11 Aruncați un zar. Care este probabilitatea apariției:

a feței cu numărul 3;

b unei fețe cu număr par de puncte;

c feței cu un număr cel mult egal cu 6.

12 Într-o urnă sunt bile albe și negre. Probabilitatea de a extrage o bilă albă este egală cu 0,3. Care este probabilitatea de a extrage o bilă neagră?

Rezolvă problema chiar aici:

13 Într-o ladă sunt 30 de mere din care 20% sunt stricate. Se ia la întâmplare un fruct. Care este probabilitatea ca acesta să fie stricat?

14 Probabilitatea de a câștiga într-un joc de cărți pe calculator este de 60%. Care este probabilitatea de a nu câștiga?

15 Într-o urnă sunt 5 bile albe și 12 bile negre. Se iau succesiv două bile (fără a fi repuse în urnă). Dacă prima bilă este albă, care este probabilitatea ca a doua bilă să fie neagră?

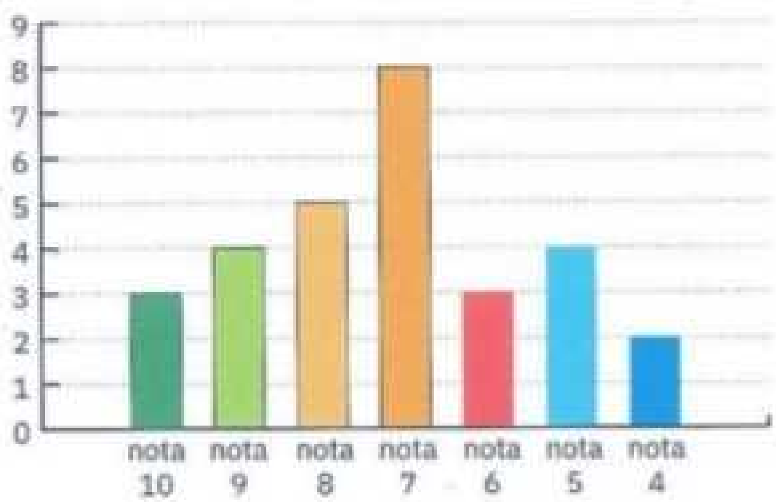
16 Formulați un experiment în care un eveniment are probabilitatea egală cu 25%.

Rezolvă problema chiar aici:

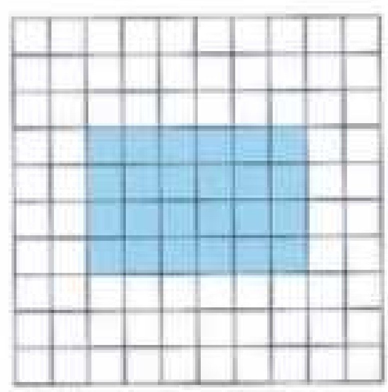
17 Diagrama de mai jos indică repartiția notelor obținute la ultima lucrare de control.

a Care este probabilitatea ca, alegând un elev la întâmplare, acesta să fi avut nota 10 la acest extemporal?

b Care este probabilitatea ca, alegând un elev la întâmplare, acesta să fi avut nota cel puțin egală cu 7 la acest extemporal?



18 Un parașutist aterizează pe un teren asemănător desenului de mai jos. Estimați probabilitatea ca acesta să aterizeze în porțiunea care este reprezentată hașurat.



19 Deschid la întâmplare o carte ce are 244 de pagini.
Care este probabilitatea ca:

a numărul paginii din stânga să fie impar;

b numărul paginii din dreapta să fie multiplu al numărului 7.

Aprofundare

20 Într-o urnă sunt 80 bile numerotate de la 1 la 80. Se extrage la întâmplare o bilă. Care este pr babilitatea ca numărul bilei să fie:

a număr impar; b pătrat perfect;

c număr prim; d format din două cifre distincte?

21 Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 87\}$. Aflați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea acesta să fie cub perfect.

22 Pe bilele dintr-o urnă sunt scrise toate numerele naturale de forma $\overline{2ab}$. Care este probabili tea ca, extrăgând o bilă la întâmplare, pe aceasta să fie scris un număr pătrat perfect?

23 Care este probabilitatea ca luând un număr de forma $\overline{1a7b}$, el să fie divizibil cu 4?

24 Pe o dreaptă se consideră 10 puncte distincte $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$ astfel înc $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_9A_{10} = 1$ cm. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un segme determinat de două puncte, acesta să aibă lungimea de 4 cm?

Probleme de șapte stele

25 Care este probabilitatea ca aruncând două zaruri să obținem două fețe astfel încât suma pătrat lor numerelor de puncte de pe ele să fie număr prim?

26 Într-o urnă sunt mai multe bile numerotate, iar numerele înscrise pe acestea sunt numerele nat rale mai mici decât 1000, care se scriu numai cu cifre pare. Aflați probabilitatea ca, extrăgând bilă, numărul înscris pe ea să fie pătrat perfect.

27 Într-o urnă se află 75 de bile numerotate de la 1 la 75.

a Dacă scoatem din urnă o bilă, care este probabilitatea ca numărul înscris pe bilă să fie diviz bil cu 5?

b Câte bile trebuie să extragem minim, fără a ne uita în urnă, pentru a fi siguri că am extras dou bile ce au înscrise numere a căror sumă sau diferență este divizibilă cu 5?

Teste de evaluare

La fiecare dintre testele următoare, pentru rezolvarea corectă a unui item se acordă **1,5p**.
Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 1

1 Șase robinete pot umple un bazin în 15 ore. În câte ore este umplut același bazin de către 9 robinete de același debit cu primele?

2 Într-o cutie sunt 10 bile albe, 20 bile roșii și 15 bile verzi. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o bilă aceasta să fie roșie?

3 Luând câte două dintre mulțimile: $A = \{2, 7, 5\}$; $B = \{8, 11, 3\}$ și $C = \left\{\frac{5}{2}; \frac{5}{7}; 1\right\}$ există între ele o proporționalitate directă? Dar o proporționalitate inversă?

4 Dacă $\frac{a}{2} = \frac{5}{b}$, calculați $10ab - 36$.

5 Șase muncitori au de săpat un șanț în 48 ore.
După 16 ore mai vin doi muncitori.
În câte ore se va termina lucrarea?

6 Graficul alăturat prezintă temperaturile înregistrate la ora 12^{00} într-o săptămână de primăvară.
a În ce zi a fost cea mai mică temperatură?
Dar cea mai mare?
b Ce temperatură a fost joi?

Testul 2

1 Patru becuri consumă în 3 ore 3 kW. Cât consumă 6 becuri în 20 ore?

2 Pe un raft sunt 4 caiete de matematică, 6 caiete de limba română și 2 caiete de desen. Care este probabilitatea ca luând un caiet la întâmplare, acesta să fie de desen?

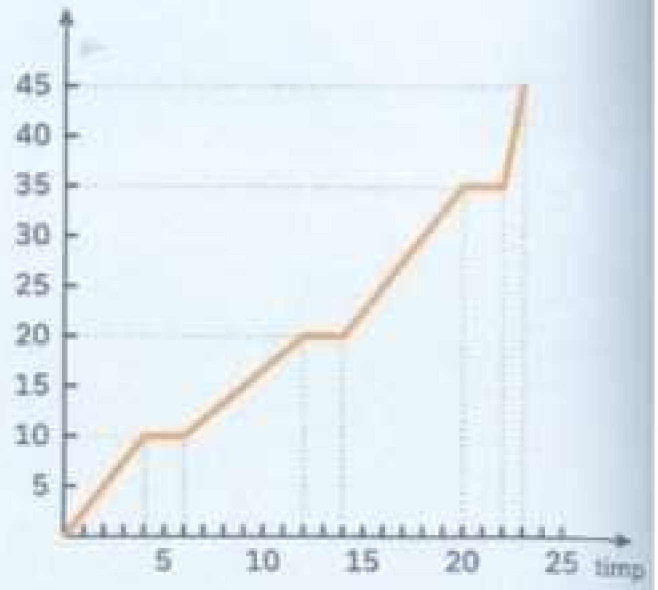
3 Mergând cu viteza constantă un autoturism parcurge în 2,8(3) ore o distanță de 170 km.
Ce distanță va parcurge în 7,(3) ore?

4 Determinați numerele x, y și z a căror sumă este 42 știind că x și y sunt direct proporționale cu 7 și 2, iar y și z sunt invers proporționale cu 3 și respectiv 4.

5 Dintr-o localitate pleacă un biciclist, un camion și un autoturism având vitezele proporționale cu numerele 2, 7 și respectiv 9. Știind că media aritmetică a vitezelor celor trei mobile este de 48 km/h, calculați viteza biciclistului.

6 12 muncitori termină o lucrare în 15 zile. În câte zile termină aceeași lucrare 10 muncitori?

Testul 3



1 Graficul alăturat prezintă mersul unui tren.

a Câte minute a staționat în total?

b Câți kilometri a parcurs de la minutul 6 la minutul 22?

2 Din 200 kg de grâu se obțin 120 kg de făină. Din câte kilograme de grâu se obțin 420 kg de făină?

3 Între mulțimile $\left\{5; \frac{3}{7}\right\}$ și $\{x; 210\}$ există o proporționalitate inversă. Calculați-l pe x.

4 Cu ce are în magazie o cantină asigură hrana a 35 persoane, timp de 30 de zile. Cât timp va ajunge hrana dacă mai vin 15 persoane?

5 Pentru o evaluare au fost propuse 48 subiecte. Un elev are deja rezolvate 32 de variante. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o variantă, aceasta să nu fie rezolvată de elev?

6 Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr de o cifră, acesta să fie mai mare decât 7?

Testul 4

1 Se scrie fiecare număr natural de două cifre pe câte o bilă. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o bilă pe ea să fie scris un număr pătrat perfect?

2 Pe 14 caiete identice s-a plătit 30,8 lei. Cât costă 8 caiete identice cu primele?

3 Diagrama alăturată prezintă răspunsurile la o întrebare dintr-un sondaj de opinie. Calculați câte persoane au participat la sondaj dacă răspunsul „Nu știu" a fost dat de 228 persoane.

4 O bucată de sârmă de 140 m se împarte în două părți invers proporționale cu 2 și 5.
Calculați lungimea fiecărei părți.

5 Determinați numerele naturale a, b, c, distincte două câte două, știind că $\frac{7,5}{a} = \frac{b}{c}$ și c este număr prim.

6 9 muncitori termină o lucrare în 12 zile. În câte zile termină aceeași lucrare 12 muncitori?

Fișă pentru portofoliul individual

A6

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă. Reprezentarea datelor prin grafice. Probabilități

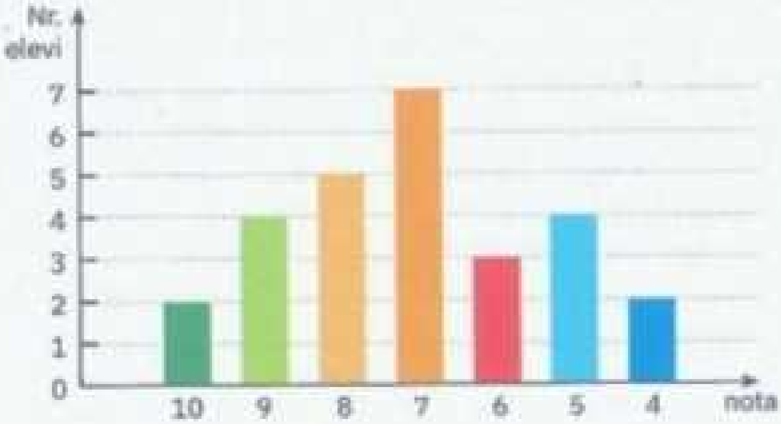
(1,5p) 1 Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a La un dreptunghi cu aria constantă dacă mărim de trei ori lățimea atunci lungimea se ....

b La o deplasare cu viteza constantă dacă micșorăm timpul de 5 ori atunci distanța se ....

c Din 20 m de stofă se confecționează 8 costume identice. Din 42,5 m de stofă se pot face .... costume de același fel.

(1,5p) 2 Diagrama alăturată indică repartiția notelor la ultima lucrare la matematică. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera „A", în caz contrar încercuiți litera „F":



a Exact 11 elevi din clasă au luat note mai mari sau egale cu 8. A F

b Exact 10 elevi din clasă au luat note mai mici sau egale cu 6. A F

c Probabilitatea ca alegând o lucrare la întâmplare, ea să fie notată cu 9 sau cu 7 este egală cu $\frac{11}{27}$. A F

(2p) 3 Indicați varianta corectă de răspuns. Un singur răspuns este corect.

a Numărul p pentru care, la aruncarea unui zar, probabilitatea apariției unei fețe cu număr par de puncte este p%.	1 14
b Trei caiete costă 8,4 lei. Cât costă 5 caiete?	2 15
c Numărul x pentru care tripletele (3, x, 4) și (9, 45, 12) sunt direct proporționale.	3 36 4 50
d Numărul x pentru care tripletele (7, 3, x) și (15, 35, 5) sunt invers proporționale.	5 21

La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Numerele a și b sunt invers proporționale cu 0,25 și 0,2. Determinați numerele a și b știind că $3a + 2b - 6 = 60$.

(2p) 5 Trei muncitori au primit împreună pentru efectuarea unei lucrări suma de 2 530 lei. Ce sumă a primit fiecare muncitor dacă plata se face proporțional cu numărul de zile lucrate, iar ei au lucrat 7, 11 și respectiv 5 zile?

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Tema: Proporționalitate

Parcul Zăvoi din Râmnicu Vâlcea

Parcul Zăvoi este unul dintre cele mai vechi parcuri din țară și a fost amenajat printr-un ordin emis la jumătatea secolului al XIX-lea de către domnitorul Țării Românești, Barbu Știrbei. În parc, printre copacii seculari, se află Lacul Zăvoi, monumente sau fântâni memorialistice. Vâlcenii poartă o deosebită recunoștință domnitorului Barbu Știrbei (1849 – 1856) pentru toate ctitoriile realizate: restaurarea Episcopiei și a Mănăstirii Bistrița, un spital, o școală, Parcul Zăvoi și multe altele.

Pentru a răspunde la cerințele 1 – 2, citește următorul text:

La intrarea în Parcul Zăvoi se găsește Monumentul domnitorului Barbu Știrbei, operă a profesorului Constantin Mihăilescu, din anul $\overline{xyz0}$. Lucrarea are o înălțime de $\overline{ab0}$ cm, fiind amplasată pe un soclu de 450 cm, sculptat în piatră neagră.

Domnul Florin Epure o descrie, astfel: *Statuia întruchipează dorința de libertate și independență a poporului, exprimată prin eforturile unui bărbat puternic încordat în lupta pentru descătușarea patriei, care iese la lumină, reprezentată printr-o tânără femeie desprinsă pe jumătate de stâncă. Chipul tinerei femei reprezintă România descătușată. Bustul domnitorului, care face corp comun cu ansamblul statuar, este foarte expresiv, în ținută militară. Pieptul domnitorului este acoperit de o ramură de laur, simbolul victoriei și al triumfului.*

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

1 Dacă $\frac{\overline{xyz0}}{21}=\frac{640}{7}$, aflați anul când a fost sculptat Monumentul.

a 1890; b 1920; c 1910; d 1900.

2 Ce înălțime are lucrarea, știind că înălțimea soclului și înălțimea lucrării sunt direct proporționale cu 9 și, respectiv, 5.

a 3 m; b 2,5 m; c 3,5 m; d 6,5 m.

Pentru a răspunde la cerințele 3 – 4, citește următorul text:

În Parcul Zăvoi, se află și *Fântâna lui Turbatu*, construită de C. Măldărescu, în $\overline{18xy}$. Aici, la ceremonialul organizat pentru cinstirea victoriei revoluției și sfințirea *stindardelor libertății naționale*, la 29 iulie $\overline{18ab}$, se intonează, pentru prima dată, cântecul „Deșteaptă-te, române!", compus de Anton Pann, pe versurile poeziei „Un răsunet", de Andrei Mureșanu. În urma revoluției din decembrie 1989, „Deșteaptă-te, române!" a devenit Imnul Național al României.

3 Determinați $\overline{18xy}$, știind că cu numerele $\overline{18xy}$, 20, 461 și 5 se poate forma o proporție.

4 Știind că $\overline{ab}$ și 36 sunt invers proporționale cu numerele 3 și, respectiv, 4, aflați anul când a fost intonat prima oară Imnul României.

Pentru a răspunde la cerința 5, citește următorul text:

Din cauza acțiunilor sale propagandistice, Costache Codreanu, profesor la Școala Națională din Vâlcea (azi Școala *Take Ionescu*), inspector școlar, a fost arestat. Au fost destituiți și alți profesori, astfel că școala se închide după 29 septembrie $\overline{abcb}$. Domnitorul Barbu Știrbei, conștient de importanța școlii în ridicarea nivelului de cultură a maselor, menționa: *Învățământul trebuie privit nu ca un scop, ci ca un mijloc. Instrucția publică trebuie să fie potrivită cu nevoile poporului și să nu aibă în vedere conveniențele unor familii privelegiate…* .

Astfel școala se redeschide, după trei ani, în septembrie $\overline{abda}$.

5 Știind că $\overline{abcb}$ și $\overline{abda}$ sunt proporționale cu 616 și, respectiv, 617, aflați în ce an se redeschide școala.

III.10. Probleme cu caracter practic

1 La finisarea unui bloc lucrează 70 muncitori repartizați în 4 echipe. Fiecărei echipe i s-a repartizat câte o scară a acestui bloc. Prima echipă termină lucrarea în 30 zile, cea de a doua în 15 zile, a treia în 20 zile, iar cea de a patra în 12 zile. Știind că muncitorii au lucrat în mod egal, determinați numărul muncitorilor din fiecare echipă.

2 Au fost aprinse două lumânări de lungimi și grosimi diferite. Lumânarea scurtă se topește în întregime în 5 ore, iar cea lungă în $3\frac{1}{2}$ ore. După ce au ars timp de două ore, lumânările au lungimi egale. De câte ori a fost mai scurtă o lumânare față de cealaltă?

3 În timp ce parcurgea drumul dintre două orașe, un motociclist s-a întrerupt la un sfert din distanță și a staționat 15 minute, timp în care ar mai fi parcurs 10 km, iar distanța rămasă (dacă nu ar fi întrerupt), ar fi parcurs-o în 3 ore și 30 minute. Știind că viteza a fost tot timpul constantă, determinați lungimea drumului.

4 O lucrare ar fi fost finalizată de 20 muncitori în 15 zile. După ce lucrează 8 zile, șase dintre ei sunt transferați rămânând ca lucrarea să fie finalizată de către restul echipei. În câte zile va fi terminată lucrarea?

5 Unei echipe de 25 muncitori i-ar fi necesare 40 zile pentru a realiza o lucrare dar în primele 10 zile lucrează doar 20 muncitori, iar în următoarele 5 zile doar 15. Câți muncitori ar fi necesari pentru a finaliza lucrarea la termenul stabilit?

6 Într-o urnă sunt 8 bile albe, 10 bile negre și 12 bile roșii.

a Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă sau neagră?

b Câte bile trebuie extrase pentru a fi siguri că vor fi 5 bile care au aceeași culoare?

Rezolvă problema chiar aici:

7 Într-o urnă sunt 75 de bile roșii, albe și negre. Numerele bilelor roșii și negre sunt invers proporționale cu 0,5 și 0,(3), iar probabilitatea de a extrage o bilă albă este $\frac{1}{5}$. Calculați probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o bilă aceasta să nu fie roșie.

8 Dintre elevii unei clase, 30% au participat la o excursie în Ardeal, 70% la o excursie în Dobrogea, iar 20% din ei au mers în ambele excursii. Cât la sută dintre elevi nu a participat la nicio excursie?

9 După o reducere de preț cu 10% urmată de o scumpire de 10% prețul este mai mare, mai mic sau egal cu cel inițial?

10 Este ora 12^{15}. Ce oră va fi după ce minutarul va parcurge 75% dintr-o rotație completă? Cât la sută a parcurs acul orar?

Rezolvă problema chiar aici:

11 O asociație agricolă a însămânțat 0,28 din teren cu porumb, 40% din teren cu grâu, o cincime din teren cu orz iar restul cu floarea soarelui. Știind că suprafața însămânțată cu grâu și cu floarea-soarelui totalizează 234 ha, determinați suprafața ocupată de fiecare cultură.

Rezolvă problema chiar aici:

12 Lucrând împreună, două echipe de muncitori ar putea să finalizeze o lucrare în 24 zile. Dar prima lucrează singură timp de 4 zile iar cea de a doua 6 zile și astfel ele realizează doar 20% din lucrare. Câte zile îi vor fi necesare celei de a doua echipe pentru a termina lucrând singură?

13 S-a măsurat înălțimea elevilor unei clase și valorile au fost înregistrate în tabelul următor:

Înălțimea (cm)	154	157	158	159	160	162	163	164
Număr de elevi	2	4	5	3	4	3	4	4

Realizați o diagramă cu bare verticale pe baza datelor din tabel.

14 Cheltuielile lunare ale unei familii sunt: 30% cheltuieli pentru întreținerea locuinței, 35% hrana, 10% îmbrăcămintea, 10% transportul, 15% diverse. Întocmiți o diagramă circulară și apoi o diagramă cu bare orizontale pentru a expune aceste date.

15 a Măsurați pe o hartă a României distanțele în linie dreaptă dintre localitățile cuprinse în tabelul de mai jos. Folosiți apoi scara hărții pentru a determina distanțele reale și completați tabelul de mai jos cu aceste valori.

distanța	București	Buzău	Râmnicu Vâlcea	Arad	Baia Mare
București					
Buzău					
Râmnicu Vâlcea					
Arad					
Baia Mare					

b Identificați pe hartă cel puțin trei perechi de localități (altele decât cele cuprinse în tabel care sunt situate la distanța de 80 km una față de cealaltă.

c Determinați scara unei hărți pe care distanța dintre București și Râmnicu Vâlcea este aproximativ egală cu 9 mm.

Rezolvă problema chiar aici:

Geometrie

IV

Noțiuni geometrice fundamentale

IV.1. Unghiul. Clasificarea unghiurilor (recapitulare)

Definiție. Reuniunea a două semidrepte, cu aceeași origine, se numește *unghi*.

Desenăm	Citim	Notăm
	Unghiul AOB; sau unghiul BOA; sau unghiul O.	$\sphericalangle AOB$; $\sphericalangle BOA$; $\sphericalangle O$.

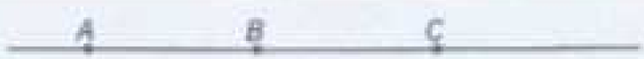
Elementele unui unghi

- Originea comună a celor două semidrepte se numește *vârful unghiului*.
- Cele două semidrepte închise se numesc *laturile unghiului*.

Exemplu: Pentru unghiul AOB, vârful este O, iar laturile sale sunt OA și OB.

Cazuri particulare de unghiuri

- Unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte identice se numește unghi *nul*.
- Unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte opuse se numește unghi *alungit*.

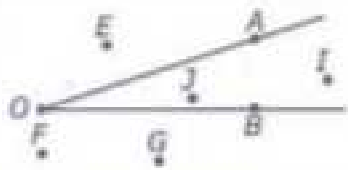
Exemplu: 

Unghiul $\sphericalangle BAC$ este unghi nul, pentru că vârful unghiului este punctul A, iar laturile sale sunt semidreptele identice: AB și AC. Evident, $\sphericalangle ACB$ este unghi nul. În aceeași figură, unghiul $\sphericalangle ABC$ este unghi alungit, pentru că vârful unghiului este punctul B, iar laturile sale sunt semidreptele opuse BA și BC.

Unghi impropriu. Unghi propriu

- Unghiul nul și unghiul alungit se numesc unghiuri *improprii*.
- Unghiul care nu este nici nul și nici alungit se numește unghi *propriu*.

Pozițiile relative ale unui punct față de un unghi

Desenăm	Citim	Notăm
	A, O și B aparțin unghiului $\sphericalangle AOB$; I și J se află în interiorul $\sphericalangle AOB$; E, F și G se află în exteriorul $\sphericalangle AOB$;	$A, O, B \in \sphericalangle AOB$. $I, J \in \text{Int}(\sphericalangle AOB)$ $E, F, G \in \text{Ext}(\sphericalangle AOB)$

Măsura unghiului. Unități de măsură. Cea mai folosită unitate pentru măsurarea unghiurilor este unghiul de *un grad sexagesimal*. Această denumire provine de la faptul că *minutul* este o unitate de 60 de ori mai mică decât gradul: $1° = 60'$.

Definiție. *Măsura unui unghi* este numărul care ne arată de câte ori se cuprinde unitatea de măsură în interiorul acelui unghi.

Măsurarea unui unghi dat

Instrumentul folosit pentru măsurarea unghiurilor este raportorul.

Observații:

1 Dacă $\sphericalangle AOB$ este unghi nul, atunci măsura sa este egală cu $0°$.
2 Dacă $\sphericalangle AOB$ este unghi alungit, atunci măsura sa este egală cu $180°$.

Operații cu măsuri de unghiuri

Adunarea. Operația se face adunând grade cu grade, minute cu minute. Dacă se obțin mai mult de 60 minute, atunci transformăm minutele în grade, astfel: $60' = 1°$.

Exemplu: $15°32' + 29°53' = 44°85' = 44° + (1° + 25') = 45°25'$.

Scăderea. Se scad minutele din minute și gradele din grade. Dacă nu avem suficiente minute la descăzut, ne împrumutăm cu un grad.

Exemplu: $27°11' - 13°40' = 26°71' - 13°40' = 13°31'$.

Înmulțirea cu un număr natural. Operația se face înmulțind cu acel număr, numărul gradelor și numărul minutelor. În final, eventual se fac transformări.

Exemplu: $5 \cdot (21°14') = 105°70' = 105° + (1°10') = (105° + 1°) + 10' = 106°10'$.

Împărțirea la un număr natural. Operația se face împărțind: numărul de grade la numărul dat (dacă rămâne rest, acesta se transformă în minute și se adună la minutele existente, apoi împărțim numărul de minute la numărul dat.

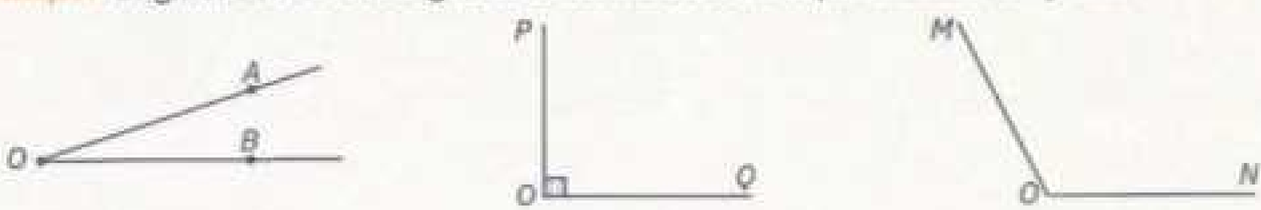
Exemplu: $13°12' : 4 = 12°72' : 4 = 3°18'$.

Unghiuri congruente

Definiție. Două unghiuri care au aceeași măsură se numesc *unghiuri congruente*.
În figura de mai jos $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle CED$ au măsurile egale $\Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CED$.

Clasificarea unghiurilor

Definiție. Unghiul *ascuțit* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între $0°$ și $90°$.
Definiție. Unghiul *drept* este unghiul a cărui măsură este egală cu $90°$.
Definiție. Unghiul *obtuz* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între $90°$ și $180°$.



$\sphericalangle AOB$ este ascuțit $\qquad \sphericalangle POQ$ este drept $\qquad \sphericalangle MON$ este obtuz

1 Completați, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a Unitatea principală de măsură pentru unghiuri este ....

b Unghiul alungit are ...... grade sexagesimale.

c Unghiul nul are ...... grade.

d Unghiul drept are măsura de ....

e Un unghi care are măsura cuprinsă între 0° și 90° este un unghi ....

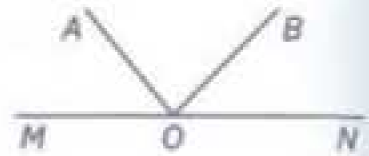
f Un unghi este obtuz, dacă măsura sa ....

2 Se consideră un unghi propriu *BAC*.

a Vârful unghiului este .... b Laturile unghiului sunt .... și ....

3 Desenați unghiul alungit *ABC*. Atunci ∢*BAC* este unghi .... Justificați!

4 Analizând figura alăturată, stabiliți dacă unghiurile precizate sunt proprii sau improprii:



a ∢*AOB*; b ∢*MON*; c ∢*MNO*;

d ∢*AOM*; e ∢*AON*; f ∢*MNO*;

g ∢*NMO*; h ∢*BOM*; i ∢*NOM*.

5 Folosind figura de mai jos stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a ∢*ABC* este unghi propriu; b ∢*BCE* este unghi alungit;

c ∢*CEB* este unghi nul; d ∢*EBC* este unghi alungit;

e *E* ∈ ∢*ABC*; f *D* ∉ Int(∢*ABC*);

g *M* ∉ Ext(∢*ABC*); h *B* ∈ (∢*AEC*);

i *M* ∉ Ext(∢*BEA*); j *C* ∈ Int(∢*BAE*);

k *C* ∉ Int(∢*ABE*).

6 Ținând seama de măsura lor, scrieți unghiurile, de mai jos, în tabel:

nule	ascuțite	drepte	obtuze	alungite

a $\sphericalangle A = 14°$; b $\sphericalangle E = 41°$; c $\sphericalangle A_1 = 0°$;

d $\sphericalangle F = 90°$; e $\sphericalangle C = 111°30'$; f $\sphericalangle C_1 = 8°13'$;

g $\sphericalangle D = 180°$; h $\sphericalangle M = 144°$; i $\sphericalangle C_2 = 98°30'$.

7 Putem stabili dacă un unghi dat este ascuțit, drept sau obtuz cu ajutorul echerului, care se așază, ca în desenele de mai jos. Precizați felul fiecărui unghi:

a 

b 

c 

8 Construiți unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, care să nu aibă puncte interioare comune, astfel încât măsurile lor să fie $40°$, respectiv, $60°$.

9 Efectuați:

a $23°14' + 10°33'$; b $19°39' - 7°21'$; c $(41°2') \cdot 3$; d $19°39' : 3$;

e $34°18' + 18°52'$; f $71°23' - 63°29'$; g $5 \cdot (21°30')$; h $(28°48') : 6$.

10 Transformați:

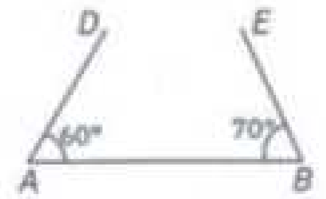
a $3°$ în minute; c $5100'$ în grade; e $7°11'$ în minute;

b $540'$ în grade; d $2520'$ în grade; f $45°7'$ în minute.

11 Aproximați, cu o eroare de $1°$, prin lipsă, respectiv, prin adaos, măsurile:

a $34°18'$; b $7°58'$; c $107°47'$; d $44°25'$; e $11{,}25°$.

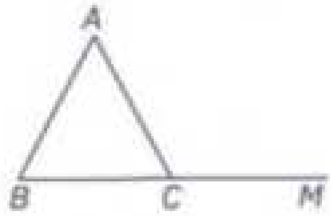
12 În figura alăturată, măsurile unghiurilor *DAB* și *EBA* sunt egale cu $60°$, respectiv, $70°$. Desenați figura pe caiet și notați cu *C* intersecția semidreptelor *AD* și *BE*.



a Determinați cu raportorul *măsura unghiului C*.

b Calculați suma măsurilor unghiurilor *A*, *B* și *C*.

13 În figura alăturată, punctele *B*, *C* și *M* sunt coliniare. Măsurați cu raportorul unghiurile din figură și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



a Măsura unghiului *ACM* este egală cu suma măsurilor unghiurilor *A* și *B*.

b Măsura unghiului *A* este mai mare decât măsura unghiului *ACM*.

14 În interiorul unghiului *AOB*, cu măsura egală cu $153°$, se construiesc semidreptele *OD* și *OE*, astfel încât măsurile unghiurilor *AOD* și *EOB* sunt egale cu $50°$ și, respectiv, $71°$. Aflați măsura unghiului *DOE*.

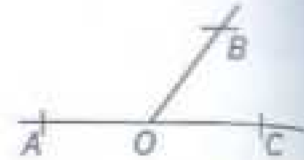
15 Construiți unghiurile *AOB* și *BOC* cu măsurile egale cu $90°$, respectiv, $40°$, și, în fiecare din cazurile următoare, aflați măsura unghiului *AOC*, știind că:

a Punctele *A* și *C* sunt de o parte și de alta a dreptei *OB*.

b Punctele *A* și *C* sunt de aceeași parte a dreptei *OB*.

Rezolvă problema chiar aici:

16 Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ două unghiuri cu măsurile egale cu $130°$ și, respectiv, $50°$, astfel încât OB separă punctele A și C. Arătați că A, O și C sunt coliniare.



Rezolvare: Suma măsurilor celor două unghiuri este egală cu $180°$. Atunci unghiul AOC este alungit $\Rightarrow OA$ și OC sunt semidrepte opuse $\Rightarrow A, O, C$ sunt coliniare.

Aprofundare

17 Fie M un punct în interiorul unghiului AOB, asfel încât măsura unghiului AOB este de patru ori mai mare decât măsura unghiului AOM, iar unghiul MOB este drept. Aflați măsura unghiului AOB.

18 Aflați măsura unghiului BOC, știind că $\sphericalangle AOB$ este drept, iar $C \in \text{Int}(\sphericalangle AOB)$, astfel încât măsura unghiului AOC reprezintă $0,(6)$ din măsura unghiului BOC.

19 Aflați măsura unghiului BOC, știind că punctele A, B, C sunt necoliniare, iar O este un punct interior segmentului AB, astfel încât măsura unghiului AOC reprezintă $0,8$ din măsura unghiului BOC.

20 Fie măsura unghiului AOB egală cu $24° + x°$. Aflați $x \in \mathbb{N}$, pentru care unghiul AOB este succesiv:

a ascuțit; **b** drept; **c** obtuz; **d** alungit.

21 Se consideră unghiul ascuțit xOy. În semiplanul determinat de Ox, în care nu se află y, se ia un punct A, astfel încât $\sphericalangle AOy$ este unghi drept. Se construiește semidreapta $OB \subset \text{Int}(\sphericalangle AOx)$, astfel încât $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOx$. Aflați măsura unghiului xOy, știind că este cu $20°$ mai mică decât măsura unghiului xOB.

22 Punctele A, O, B sunt coliniare, în această ordine. De aceeași parte a dreptei AB se consideră semidreptele OC și OD, cu $OD \subset \text{Int}(\sphericalangle BOC)$. În semiplanul opus cu AB, D se iau semidreptele OE și OF, cu $OE \subset \text{Int}(\sphericalangle BOF)$, astfel încât $\sphericalangle AOC = \sphericalangle EOF$ și $\sphericalangle BOE = COD$. Arătați că F, O și D sunt coliniare.

Probleme de șapte stele

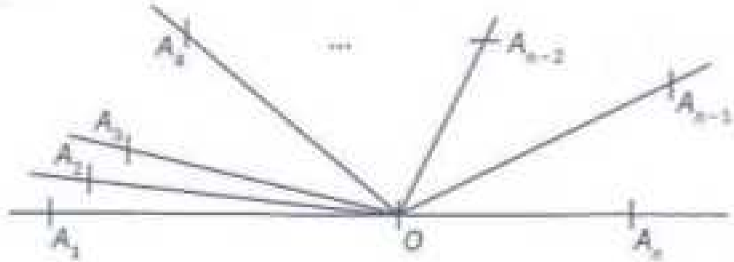
23 Fie O un punct interior segmentului A_1A_n, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $A_2, A_3, A_4, ..., A_{n-1}$ puncte exterioare dreptei A_1A_n, situate într-unul din semiplanele determinate de A_1A_n, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_{n-1} > (A_1OA_{n-2}) > ... > (A_1OA_3) > (A_1OA_2) > 0°$.

a Care este numărul maxim de unghiuri proprii formate astfel încât oricare două dintre ele să aibă interioarele fără puncte comune?

b Câte unghiuri proprii s-au format?

c Știind că măsura unghiului A_1OA_2 este exprimată în grade printr-un număr natural nenul, iar măsurile unghiurilor A_2OA_3, A_3OA_4, $\sphericalangle A_4OA_5$, ..., $A_{n-1}OA_n$ sunt de 2 ori, de 3 ori, de 4 ori, ..., mai mari decât măsura acestuia, aflați n.

Soluție



a Numărul maxim de unghiuri proprii, cu interioarele disjuncte, două câte două, este $n-1$ și este atins, dacă luăm în considerare unghiurile: $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, ..., $\sphericalangle A_{n-1}OA_n$.

b OA_1 este inclusă în $n-2$ unghiuri proprii: $\sphericalangle A_1OA_3$, $\sphericalangle A_1OA_3$, $\sphericalangle A_1OA_4$, ..., $\sphericalangle A_1OA_{n-1}$;

OA_2 este inclusă în alte $n-2$ unghiuri proprii: $\sphericalangle A_2OA_3$, $\sphericalangle A_2OA_4$, ..., $\sphericalangle A_2OA_n$;

OA_3 este inclusă în alte $n-3$ unghiuri proprii: $\sphericalangle A_3OA_4$, $\sphericalangle A_3OA_5$, ..., $\sphericalangle A_3OA_n$;

OA_4 este inclusă în alte $n-4$ unghiuri proprii: $\sphericalangle A_4OA_5$, $\sphericalangle A_4OA_6$, ..., $\sphericalangle A_4OA_n$;

....

OA_{n-1} este inclusă încă într-un singur unghi propriu: $\sphericalangle A_{n-1}OA_n$.

Numărul de unghiuri proprii este egal cu: $1+2+3+...+(n-2)+(n-2)=\frac{(n-2)\cdot(n-1)}{2}+(n-2)=$

$=(n-2)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=(n-2)\left(\frac{n-1}{2}+\frac{2}{2}\right)=\frac{(n-2)\cdot(n+1)}{2}$.

c $A_1OA_2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists)\ k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_2 = k°$. Atunci $\sphericalangle A_2OA_3 = 2k°$;

$\sphericalangle A_3OA_4 = 3k°$; $\sphericalangle A_4OA_5 = 4k°$, ..., $\sphericalangle A_{n-1}OA_n = (n-1)k°$. Evident:

$\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_4 + ... + \sphericalangle A_{n-1}OA_n = \sphericalangle A_1OA_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k° + 2k° + 3k° + ... + (n-1)k° = 180° \Leftrightarrow k[1 + 2 + 3 + ... + (n-1)] = 180 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\cdot(n-1)\cdot n : 2 = 180 \Leftrightarrow kn(n-1) = 360$. Studiem posibilitățile în tabelul de mai jos:

$n-1$	1	2	3	4	5	8	9
n	2	3	4	5	6	9	10
k	180	60	30	18	12	5	4

Ca urmare, convin valorile $n \in \{2; 3; 4; 5; 6; 9; 10\}$.

24 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și punctele coliniare A, O, A_n, în această ordine. De aceeași parte a dreptei AA_n se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$, astfel încât:

$$\sphericalangle AOA_{n-1} > \sphericalangle AOA_{n-2} > ... > \sphericalangle AOA_2 > \sphericalangle AOA_1 > 0.$$

Aflați numărul natural n știind că măsura unghiului AOA_1 este număr natural și:

$\sphericalangle A_1OA_2 = 5\cdot\sphericalangle AOA_1$; $\sphericalangle A_2OA_3 = 10\cdot\sphericalangle AOA_1$; $\sphericalangle A_3OA_4 = 15\cdot\sphericalangle AOA_1$, ...

25 Fie B un punct interior segmentului AC. De aceeași parte a dreptei AC, se iau punctele D și E, astfel încât $[BD \subset \mathrm{Int}(\sphericalangle ABE$, iar $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBC$.

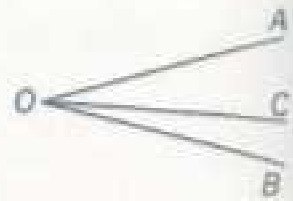
a Determinați măsura unghiului ABD, știind că $\sphericalangle DBE$ este unghi drept.

b Care este numărul maxim de valori naturale, nenule, pe care le poate lua k, unde $k = \sphericalangle ABD$, în cazul în care $\sphericalangle DBE$ este unghi obtuz, cu măsura număr natural, exprimat în grade sexagesimale.

IV.2. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi

Unghiuri adiacente

Definiție. Două unghiuri proprii care au vârf comun, o latură comună, iar celelalte două laturi sunt situate de o parte și de alta a laturii comune se numesc *unghiuri adiacente*.



În alăturată, unghiurile AOC și BOC sunt adiacente, deoarece O este *vârful comun* al unghiurilor, OC este *latura comună*, iar OA și OB sunt *laturile situate de o parte și de alta a laturii comune.*

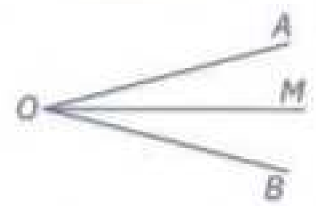
Observații:

1 $\text{Int}(\sphericalangle AOC) \cap \text{Int}(\sphericalangle BOC) = \varnothing$.

2 Un unghi impropriu nu poate fi adiacent cu nici un alt unghi.

Bisectoarea unui unghi propriu

Definiție. Semidreapta cu originea în vârful unghiului, interioară unghiului, ce formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente, se numește *bisectoare*.

Desenăm	Citim
	OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$

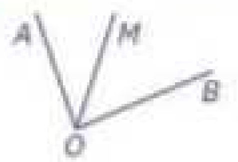
Redactăm: $\left.\begin{array}{l} OM \subset \text{Int}(\sphericalangle AOB) \\ \sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM \end{array}\right\} \Leftrightarrow OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$.

Observație. Orice unghi propriu are o singură bisectoare.

Exersare

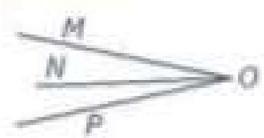
1 Citiți perechea de unghiuri indicată și argumentați dacă sunt adiacente sau nu:

a $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle MOB$;



b $\sphericalangle CEF$ și $\sphericalangle FGH$;

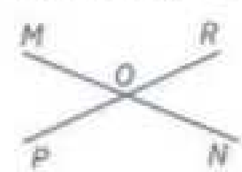
c $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle MOP$;



2 Citiți perechi de unghiuri adiacente din următoarele figuri:

a

b



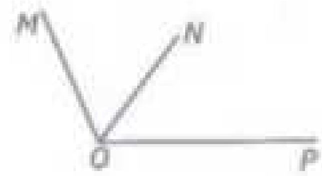
3 $\sphericalangle MAT$ și $\sphericalangle TAS$ sunt unghiuri adiacente. Atunci:
a vârful lor comun este ...... ; b latura comună este .... ;
c celelalte două laturi, ... și ......, sunt situate de o parte și ...... a laturii comune ....

4 $\sphericalangle MAT$ și $\sphericalangle TAS$ sunt unghiuri neadiacente. Atunci:
a vârful lor comun este ...... ; b latura comună este ...... ;
c celelalte două laturi, ... și ......, sunt situate de aceeași ...... a laturii comune ....

5 Construiți un unghi $\sphericalangle AOB$ și semidreapta OM, astfel încât să fie adiacente:
a $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle MOB$; b $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOM$; c $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle AOB$.

6 Se dau unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Stabiliți dacă semidreptele OA și OC sunt opuse, știind că:
a $\sphericalangle AOB = 72°$ și $\sphericalangle BOC = 108°$;
b $\sphericalangle AOB = 52°30'$ și $\sphericalangle BOC = 67°30'$.

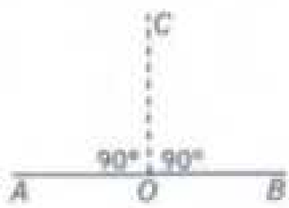
7 În figura alăturată, unghiurile MON și NOP sunt adiacente. Știind că $\sphericalangle MON = 57°$, iar $\sphericalangle MOP = 103°$, determinați măsura unghiului NOP.

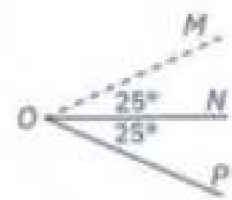


8 Fie OM bisectoarea unghiului AOB. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a OM are originea în vârful A al unghiului $\sphericalangle AOB$;
b $OM \subset \sphericalangle AOB$; c $OM \subset \text{Int}(\sphericalangle AOB)$; d $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$.

9 Stabiliți dacă semidreapta punctată este bisectoare pentru unghiul dat:

a


b


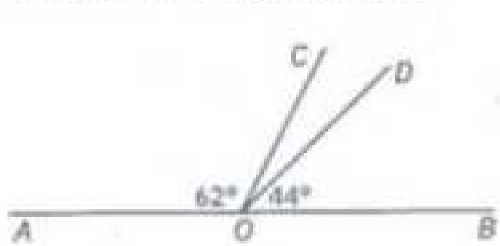
c


10 Fie OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$.
a Aflați *măsura unghiului AOB*, știind că măsura unghiului AOM este egală cu:
i $23°$; ii $44°30'$; iii $65°22'$;
b Aflați *măsura unghiului MOB*, știind că măsura unghiului AOB este egală cu:
i $84°$; ii $75°40'$; iii $142°24'$.

Consolidare

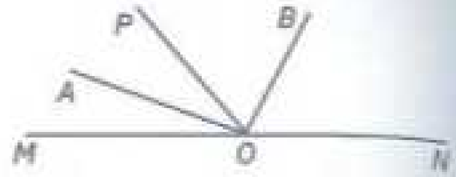
11 Fie semidreapta $OM \subset \text{Int}(\sphericalangle AOB)$ astfel încât măsura unghiului AOM este egală cu $40°$ și măsura unghiului BOM este egală cu 25% din $160°$. Arătați că OM este bisectoarea unghiului AOB.

12 În figura alăturată, $\sphericalangle AOB$ este un unghi alungit:
a Folosind-o, dați exemplu de două perechi de unghiuri adiacente.
b Calculați măsura unghiului COD.
c Construiți OM bisectoarea unghiului COD și calculați *măsura unghiului MOB*.



13 Se consideră segmentul MN și punctele $O \in MN$, $P \notin MN$. Se construiește bisectoarea OA a unghiului MOP și bisectoarea OB a unghiului NOP. Arătați că măsura unghiului AOB este constantă (nu depinde de alegerea punctului P).

Soluție



$O \in MN \Rightarrow \sphericalangle MON$ este unghi alungit $\Rightarrow \sphericalangle MON = 180°$.
Măsura unghiului AOB este egală cu suma măsurilor unghiurilor POA și POB.
Din ipoteză, OA este bisectoarea unghiului

$\sphericalangle MOP \Rightarrow \sphericalangle MOA = \sphericalangle POA \Rightarrow \sphericalangle POA = \frac{1}{2}\sphericalangle MOP$.

Analog, OB este bisectoarea $\sphericalangle NOP \Rightarrow \sphericalangle BOP = \sphericalangle BON \Rightarrow \sphericalangle BOP = \frac{1}{2}\sphericalangle NOP$.

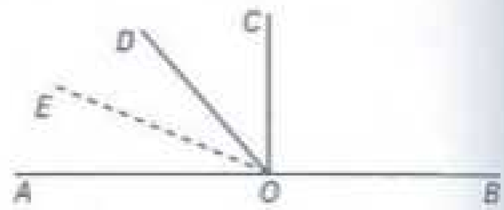
Atunci $\sphericalangle AOB = \sphericalangle POA + \sphericalangle POB = \frac{1}{2}\sphericalangle MOP + \frac{1}{2}\sphericalangle NOP = \frac{1}{2}[\sphericalangle MOP + \sphericalangle NOP] = \frac{1}{2}\sphericalangle MON = 90°$, adică *măsura unghiului* AOB este constantă.

14 Se consideră unghiul alungit $\sphericalangle AOB$, punctele M și N de aceeași parte a dreptei AB astfel încât $OM \subset \text{Int}(\sphericalangle AON)$, $\sphericalangle MON = 2a$, $\sphericalangle POQ = 3a$, unde $0° < a < 90°$, iar OP și OQ sunt bisectoarele unghiurilor MON, respectiv NOB.

a În funcție de a, determinați măsura unghiului MOB.

b Pentru ce valoare a lui a, avem măsura unghiului POQ egală cu $90°$?

15 În figura alăturată, punctele A, O, B sunt coliniare, iar semidreapta OE este bisectoarea unghiului AOD. Știind că $\sphericalangle AOE = 22°30'$ și $\sphericalangle AOC = 90°$, calculați măsurile unghiurilor AOD, COB și EOC.



16 Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ unghiuri adiacente.
Calculați $\sphericalangle AOC$ în cazurile:

a $\sphericalangle AOB = 52°$ și $\sphericalangle BOC = 73°$; **b** $\sphericalangle AOB = 63°18'$ și $\sphericalangle BOC = 116°42'$; **c** $\sphericalangle AOB = 45°$ și $\sphericalangle BOC = 116°$.

17 Fie OA bisectoarea unghiului MON. Știind că măsura unghiului AON este egală cu $36°$, determinați măsura unghiului MON.

18 Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ unghiuri adiacente și OM, respectiv ON, bisectoarele acestora. Știind că măsura unghiului MOC este egală cu $70°$ și măsura unghiului CON este egală cu $20°$, determinați măsurile unghiurilor:

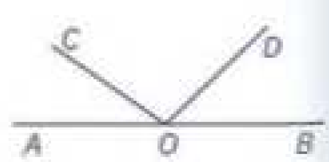
a $\sphericalangle BON$; **b** $\sphericalangle MOB$; **c** $\sphericalangle AOB$; **d** $\sphericalangle AOC$; **e** $\sphericalangle AON$.

19 Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente, astfel încât $\sphericalangle AOB = 72°$ și $\sphericalangle COB = 36°$. Calculați măsura unghiului format de bisectoarele lor.

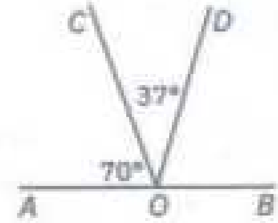
20 Măsura unghiului format de laturile necomune a două unghiuri adiacente este de $97°42'$. Determinați măsurile celor două unghiuri, știind că măsura unuia din ele este de cinci ori mai mare decât măsura celuilalt.

21 Fie AOB și BOC unghiuri adiacente, astfel încât $\sphericalangle AOB = 150°$ și $\sphericalangle BOC = 60°$. Arătați că bisectoarea OM a unghiului BOC este opusa semidreptei OA.

22 În figura alăturată, punctele A, O, B sunt coliniare.
Știind că $\sphericalangle AOD = 140°$ și $\sphericalangle BOC = 150°$, determinați măsura unghiului COD.



23 În figura alăturată, $\sphericalangle AOB$ este un unghi alungit, $\sphericalangle AOC = 70°$, $\sphericalangle COD = 37°$, iar M este un punct situat în același semiplan determinat de dreapta AB ca și punele C și D, astfel încât $\sphericalangle MOB = 96°$. Stabiliți în interiorul căruia dintre unghiurile $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COD$ sau $\sphericalangle DOB$ se află punctul M.



Aprofundare

24 Unghiurile AOB și AOC nu sunt adiacente, iar $\sphericalangle AOC = 80°$ și $\sphericalangle BOC = 24°$. Fie OM și ON bisectoarele unghiurilor AOC, respectiv BOC. Calculați măsura unghiului MON.

25 Fie OC bisectoarea unghiului AOB . Știind că $\sphericalangle AOB = 120°$, iar semidreapta OD este opusă cu OA, arătați că semidreapta OB este bisectoarea unghiului COD.

26 Fie $OD \subset \text{Int}(\sphericalangle AOB)$ și $OE \subset \text{Int}(\sphericalangle BOD)$. Arătați că $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE$ dacă și numai dacă $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle AOB$ au aceeași bisectoare.

27 Fie $\sphericalangle AOE$ un unghi propriu și punctele $B, D \in \text{Int}(\sphericalangle AOE)$ astfel încât $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOD$ sunt unghiuri neadiacente. Arătați că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOE$ dacă și numai dacă $\sphericalangle DOB$ și $\sphericalangle AOE$ au aceeași bisectoare.

Probleme de șapte stele

28 Fie OC și OD două semidrepte situate în interiorul $\sphericalangle AOB$, astfel încât $OD \subset \text{Int}(\sphericalangle AOC)$. Știind că $\sphericalangle AOD = 60°$ și $\sphericalangle BOC = 50°$, aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOD.

29 Se dau unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, astfel încât măsura unghiului AOB este de 4 ori mai mare decât măsura unghiului BOC. Dacă măsura unghiului AOC este egală cu 90° și semidreapta OD este semidreapta opusă semidreptei OB, calculați măsura unghiului AOD.

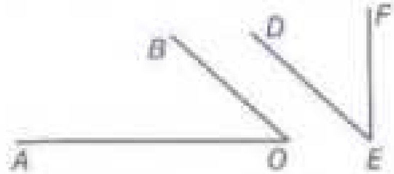
30 Fie unghiul AOB cu măsura de 64° și OA_1 bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, OA_2 bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOA_1$, OA_3 bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOA_2$, ..., OA_6 bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOA_5$.

a Aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOA_6$ și $\sphericalangle BOA_6$.

b Aflați măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului AOA_6 și bisectoarea unghiului BOA_2.

IV.3. Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare

Unghiuri complementare. Două unghiuri care au suma măsurilor egală cu 90° se numesc unghiuri *complementare*.
Fiecare dintre cele două unghiuri este *complementul* celuilalt unghi.

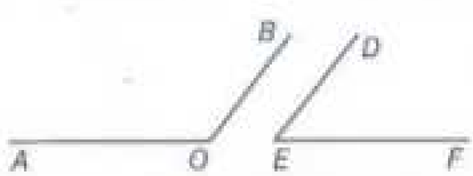
Desenăm	Citim
	$\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DEF$ sunt unghiuri complementare

$\sphericalangle AOB + \sphericalangle DEF = 90° \Leftrightarrow \sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DEF$ sunt unghiuri complementare.

Proprietățile unghiurilor complementare

1 Complementul unui unghi cu măsura egală cu x este un unghi de măsură $90° - x$.
2 Dacă două unghiuri complementare sunt congruente, atunci măsura fiecăruia este egală cu 45°.
3 Unghiurile congruente au complemente congruente.
4 Unghiurile care au același complement sunt congruente.

Unghiuri suplementare. Două unghiuri care au suma măsurilor egală cu 180° numesc *unghiuri suplementare*.
Fiecare dintre cele două unghiuri este *suplementul* celuilalt unghi.

Desenăm	Citim
	$\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DEF$ sunt unghiuri suplementare

$\sphericalangle AOB + \sphericalangle DEF = 180° \Leftrightarrow \sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DEF$ sunt unghiuri suplementare.

Proprietățile unghiurilor suplementare

1 Suplementul unui unghi cu măsura egală cu x este un unghi de măsură $180° - x$.
2 Dacă două unghiuri suplementare sunt congruente, fiecare este un unghi drept.
3 Unghiurile congruente au suplemente congruente.
4 Unghiurile care au același suplement sunt congruente.
5 Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează un unghi drept.

Exersare

1 Calculați măsurile complementelor unghiurilor cu măsura de:
a 72°; b 13°; c 50°; d 40°40'.

2 Stabiliți o corespondență de la fiecare măsură, din coloana A, la măsura complementului său, din coloana B, ca în exemplul dat:

A	B
a $m(\sphericalangle AOB) = 40°$	1 $m(\sphericalangle TVS) = 7°$
b $m(\sphericalangle COD) = 32°$	2 $m(\sphericalangle EFG) = 23°$
c $m(\sphericalangle PQR) = 83°$	3 $m(\sphericalangle RSQ) = 50°$
d $m(\sphericalangle MNP) = 51°30'$	4 $m(\sphericalangle BOC) = 58°$
e $m(\sphericalangle ABC) = 67°$	5 $m(\sphericalangle STQ) = 38°30'$.

3 Măriți cu $14°25'$ măsura complementului unghiului cu măsura de $65°32'$.

4 Calculați măsurile suplementelor unghiurilor cu măsura de:

a $14°$; b $75°$; c $110°$; d $36°40'$; e $149°30'$.

5 Un unghi are măsura de $72°22'$. Calculați suma măsurilor complementului și suplementului acestui unghi.

6 Fie unghiurile *AOB*, *EDF*, *PRS*, *XOY*, *KTS*, *KLM*, *MNP*, cu măsurile egale cu $57°$, $41°$, $123°$, $15°$, $75°$, $49°$, respectiv, $32°$.
Verificați dacă printre aceste unghiuri sunt perechi de:

a unghiuri complementare; b unghiuri suplementare.

7 Construiți unghiul $\sphericalangle AOB$, cu măsura egală cu $85°$, iar apoi construiți complementul și suplementul acestuia.

8 Desenați cu ajutorul raportorului, un unghi cu măsura de $40°$ și apoi construiți folosind rigla și echerul:

a complementul unghiului; b suplementul unghiului.

9 Complementul căruia dintre unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, cu măsurile egale cu $32°$, $81°$, respectiv, $45°$, este un unghi cu măsura mai mică decât $20°$?

10 Se dau unghiurile *AOB* și *COD* cu măsurile egale cu $17°$, respectiv, $73°$. Calculați diferența dintre măsurile complementelor unghiurilor *AOB* și *COD*.

11 În coloana A sunt date măsurile unor unghiuri, iar în coloana B sunt măsurile suplementelor unora din ele. Asociați litera din fața măsurii din coloana A cu cifra măsurii suplementului unghiului, scris în coloana B.

A	B
a $118°$	1 $111°$
b $73°$	2 $136°$
c $44°$	3 79
d $101°$	4 $107°$
e $69°$	5 $62°$

Consolidare

12 Un unghi are măsura de două ori mai mare decât cea a complementului său. Determinați măsura unghiului.

13 Calculați măsura unghiului care are măsura de 8 ori mai mare ca a suplementului său.

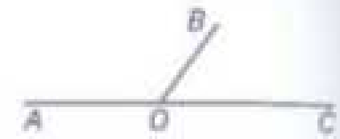
14 Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt unghiuri adiacente suplementare, iar *OD* și respectiv *OE* sunt bisectoarele lor. Arătați că $\sphericalangle DOE$ este drept.

15 În figura alăturată, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri adiacente complementare, cu $\sphericalangle AOB = (x + 22)°$, $\sphericalangle BOC = (2x + 14)°$.

a Arătați că $\sphericalangle AOC$ este unghi drept;

b Aflați x.

16 În figura alăturată, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri adiacente suplementare, cu $\sphericalangle AOB = (2x + 20)°$ și $\sphericalangle BOC = (x + 4)°$.



a Arătați că $\sphericalangle AOC$ este unghi alungit.

b Aflați x.

17 Ce măsură are complementul unui unghi, al cărui suplement are măsura de 140°?

18 Ce măsură are suplementul unui unghi, al cărui complement are măsura de 60°?

19 Măsura unui unghi este cuprinsă între 23° și 41°.

a Între ce valori este cuprinsă măsura complementului său?

b Între ce valori este cuprinsă măsura suplementului său?

20 Calculați măsura unghiului $\sphericalangle AOB$, știind că suma dintre măsura complementului și măsura suplementului său este egală cu 200°.

Rezolvă problema chiar aici:

21 Diferența măsurilor a două unghiuri complementare este 24°20'. Determinați măsurile celor două unghiuri.

22 Diferența măsurilor a două unghiuri suplementare este 0,4 dintr-un unghi drept. Calculați măsura unghiurilor.

Aprofundare

23 Un unghi are măsura egală cu $1\frac{1}{4}$ din măsura complementului său. Determinați măsura unghiului și a complementului său.

24 Un unghi are măsura egală cu 3,5 din măsura suplementului său. Determinați măsura unghiului și a suplementului său.

25 Determinați măsura unui unghi, știind că măsura complementului său este de cinci ori mai mică decât măsura suplementului său.

26 **a** Calculați măsura unghiului *MON*, știind că suplementul complementului său are măsura de 147°.

b Calculați măsura unghiului *MON*, știind că măsura complementului suplementului său este de 41°.

27 Arătați că:

a suplementul suplementului unui unghi este congruent cu unghiul dat;

b complementul complementului unui unghi este congruent cu unghiul dat;

c suplementul complementului unui unghi de măsura α are măsura $\alpha^\circ + 90^\circ$.

28 Demonstrați că:

a dintre două unghiuri complementare, necongruente, unul are măsura mai mică decât 45°;

b dintre două unghiuri suplementare, necongruente, unul este ascuțit, iar celălalt obtuz;

c complementul unui unghi este unghiul nul, dacă unghiul este congruent cu suplementul său.

29 Determinați măsura unui unghi, știind că media aritmetică dintre măsura complementului și a suplementului său este egală cu 95°.

30 Se consideră unghiurile adiacente suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, astfel încât $\sphericalangle BOC = 5 \cdot \sphericalangle AOB$. Fie OM și ON bisectoarele unghiurilor AOB, respectiv BOC, iar OP și OB sunt de aceeași parte a dreptei AC, astfel încât $\sphericalangle POB = 90^\circ$. Dacă ON și OR sunt semidrepte opuse, atunci:

a aflați măsurile unghiurilor: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COP$ și $\sphericalangle POR$;

b stabiliți dacă $\sphericalangle MON = 90^\circ$;

c demonstrați că bisectoarele unghiurilor MOP și BON coincid.

31 Fie unghiul alungit AOB și semidreapta OC, astfel încât $\sphericalangle AOC = (3x + 3)^\circ$ și $\sphericalangle BOC = (5x + 17)^\circ$. Fie OD, OF, OE bisectoarele unghiurilor AOC, BOC și respectiv COF.

a Aflați măsurile unghiurilor AOC și BOC.

b Calculați măsura unghiului DOE.

c Arătați că $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle COF$ sunt unghiuri complementare.

Probleme de șapte stele

32 Unghiurile BOC și BOD sunt respectiv adiacente complementar și suplementar cu unghiul ascuțit AOB. Fie OE semidreapta opusă lui OB, OM bisectoarea unghiului BOC și ON bisectoarea unghiului AOE. Calculați măsurile unghiurilor:

a MON;

b AOB, știind în plus că $\sphericalangle DOB = 10 \sphericalangle BOC$.

33 Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ unghiuri neadiacente suplementare, astfel încât $\frac{\sphericalangle AOB}{11} = \frac{\sphericalangle COB}{7}$. În semiplanul determinat de dreapta AO, care nu conține punctul B, se ia punctul D, astfel încât $\sphericalangle AOD$ este unghi drept. Fie E un punct astfel încât $\sphericalangle EOC \equiv \sphericalangle AOD$. Determinați măsurile unghiurilor DOC și EOB.

IV.4. Unghiuri opuse la vârf

Definiție. Două unghiuri proprii cu laturile unuia semidrepte opuse cu laturile celuilalt se numesc *unghiuri opuse la vârf.*

Desenăm	Citim
	$\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sau $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri opuse la vârf

$$\left.\begin{array}{l} OA \text{ și } OC \text{ semidrepte opuse} \\ OB \text{ și } OD \text{ semidrepte opuse} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sphericalangle AOB \text{ și } \sphericalangle COD \text{ sunt unghiuri opuse la vârf} \\ \text{sau} \\ \sphericalangle AOD \text{ și } \sphericalangle BOC \text{ sunt unghiuri opuse la vârf} \end{array}\right.$$

Observații:

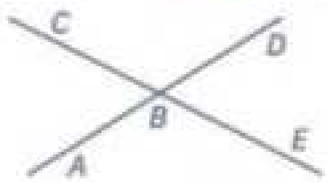
1 Două unghiuri proprii se numesc unghiuri opuse la vârf, dacă laturile unuia *sunt în prelungirea* laturilor celuilalt.

2 Două drepte AC și BD, concurente în O, formează două perechi de unghiuri opuse la vârf: $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$, respectiv $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$.

Teoremă. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.
Altfel spus, dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt opuse la vârf, atunci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.
Demonstrația rezultă imediat din faptul că două unghiuri opuse la vârf au același suplement. Unghiul $\sphericalangle AOD$ este suplement, atât pentru unghiul $\sphericalangle AOB$, cât și pentru unghiul $\sphericalangle COD$, de unde rezultă că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

Exersare

1 Priviți figura alăturată și completați corespunzător:



a AD și CE sunt ... ... în punctul ... .

b Laturile unghiului $\sphericalangle ABC$ sunt ... și ... .

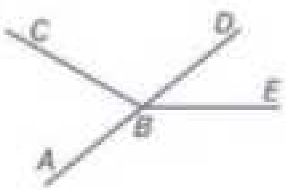
c BA și BD sunt ... ...

d BC și ... sunt semidrepte opuse.

e $\sphericalangle ABC$ și ... sunt unghiuri opuse la vârf.

f $\sphericalangle ABE$ și $\sphericalangle CBD$ sunt ... ...

2 Priviți figura alăturată și stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:



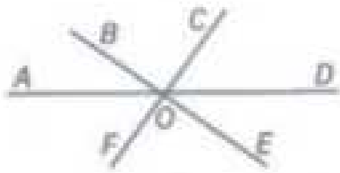
a BA și BD sunt semidrepte opuse.

b BC și BE sunt semidrepte opuse.

c Unghiurile ABC și DBE au laturile BA și BD în prelungire.

d $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DBE$ sunt unghiuri opuse la vârf.

3 În figura alăturată, precizați:



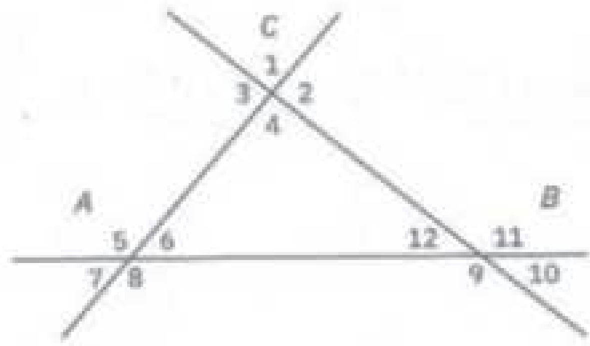
a trei perechi de semidrepte opuse;

b trei unghiuri alungite;

c trei unghiuri suplementare;

d trei perechi de unghiuri opuse la vârf.

4 Priviți figura de mai jos și completați spațiul punctat cu unghiul potrivit obținerii unor afirmații adevărate:



a $\sphericalangle 1$ este opus la vârf cu ...... ;

b $\sphericalangle 5$ este opus la vârf cu ...... ;

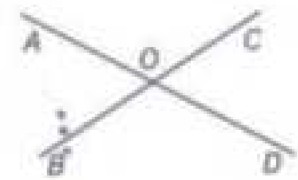
c $\sphericalangle 12$ este opus la vârf cu ...... ;

d $\sphericalangle 11$ este opus la vârf cu ...... ;

e $\sphericalangle 3$ este opus la vârf cu ...... ;

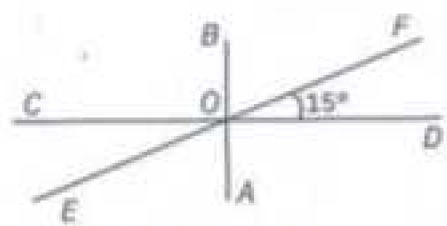
f $\sphericalangle 6$ este opus la vârf cu ....

5 În figura alăturată, $AD \cap BC = \{O\}$, iar măsura unghiului COD este egală cu $60°$.
Aflați măsurile unghiurilor AOB și AOC.



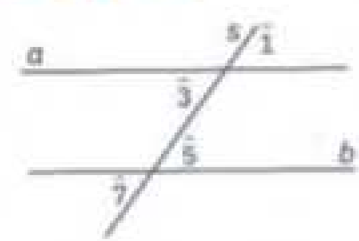
6 Folosind figura din problema precedentă, dacă $\sphericalangle AOC = 125°$, aflați măsurile unghiurilor BOD și AOB.

7 În figura alăturată, dreptele AB, CD și EF sunt concurente în punctul O. Se știe că $\sphericalangle BOC = 90°$ și $\sphericalangle DOF = 15°$. Aflați măsurile unghiurilor: $\sphericalangle EOC$, $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOF$, $\sphericalangle AOE$ și $\sphericalangle BOE$.



Consolidare

8 În figura alăturată dreapta s este concurentă cu fiecare din dreptele a și b. (Într-o astfel de figură, dreapta s „taie" cele două drepte paralele a și b și, de aceea, se numește *secantă*.) Știind că $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$, arătați că:



a $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$;

b $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 7$.

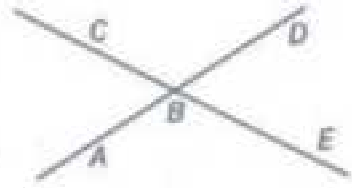
9 În figura alăturată, $\{O\} = AB \cap CD$, se știe că:

i $\sphericalangle AOD = (3x - 18)°$;

ii $\sphericalangle BOC = 120°$.

Determinați numărul natural x.

10 În figura alăturată, $AD \cap CE = \{B\}$, iar $\sphericalangle DBE = 60°$.

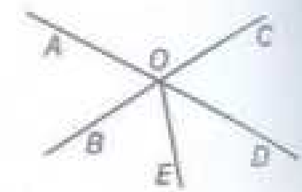


a Dacă $\sphericalangle ABC = (3x)°$, aflați x.

b Dacă $\sphericalangle ABC = (2x - 14)°$, calculați $4x - 3$.

c Dacă $\sphericalangle ABC$ este jumătate din $\sphericalangle DBC$, atunci aflați $\sphericalangle DBC$.

11 În figura alăturată, $AD \cap BC = \{O\}$, $\sphericalangle BOD = 120°$, și OE este bisectoarea unghiului BOD.



a Determinați măsurile unghiurilor formate de dreptele concurente AD și BC.

b Arătați că OB este bisectoarea unghiului AOE.

Soluție

a Deoarece $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt unghiuri opuse la vârf, rezultă $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$, de unde $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 120°$ (1).

Din ipoteză, $AD \cap BC = \{O\}$, deci punctele B, O, C sunt coliniare, adică $\sphericalangle BOC$ este unghi alungit și, ca urmare, $\sphericalangle BOC = 180°$ (2).

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle AOB = 60°$ (3).

Cum $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt opuse la vârf, rezultă $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 60°$.

b Din ipoteză OE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD \Rightarrow \sphericalangle EOB \equiv \sphericalangle EOD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sphericalangle EOB = \sphericalangle EOD = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOD = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60° \quad (4).$$

Din relațiile (3) și (4) $\Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOE \Rightarrow OB$ este bisectoarea unghiului AOE.

12 Fie A, B, C trei puncte necoliniare și două puncte D și O, astfel încât O este interior segmentelor AB și CD. Știind că $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt unghiuri complementare, aflați măsurile unghiurilor AOC și AOD.

13 Fie A, B, C trei puncte necoliniare și două puncte D și O, astfel încât O este interior segmentelor AB și CD. Știind că $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt unghiuri suplementare, aflați măsurile unghiurilor AOC și AOD.

14 Considerăm două unghiuri, $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ opuse la vârf, cu A, O, B coliniare. Fie OE bisectoarea unghiului BOD. Aflați măsurile unghiurilor AOC și AOD, știind că măsura unghiului EOB este egală cu $35°$.

Rezolvă problema chiar aici:

15 Considerăm unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$, opuse la vârf, cu A, O, B coliniare. Fie OE bisectoarea unghiului BOD. Aflați măsura unghiului EOB, știind că măsura unghiului AOD este de 3 ori mai mare ca măsura unghiului AOC.

Aprofundare

16 Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente complementare, cu măsura unghiului AOB egală cu $50°$. Fie OE bisectoarea unghiului BOC, OF semidreaptă opusă cu OE și OD semidreaptă opusă cu OA. Aflați măsura unghiului AOF și arătați că $\sphericalangle AOF \equiv DOE$.

17 $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt neadiacente complementare, cu măsura unghiului AOB egală cu $50°$. Fie OE bisectoarea unghiului BOC, OF semidreaptă opusă cu OE și OD semidreaptă opusă cu OC. Aflați măsurile unghiurilor AOF și DOF.

18 Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt adiacente suplementare, cu măsura unghiului *AOB* egală cu 50°. Fie *OE* bisectoarea unghiului *BOC*, și *OF* semidreaptă opusă cu *OE*. Aflați măsura unghiului *AOF*.

19 $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt neadiacente suplementare, cu măsura unghiului *AOB* egală cu 50°. Fie *OE* bisectoarea unghiului *BOC* și *OF* semidreaptă opusă cu *OE*. Aflați măsura unghiului *AOF*.

Rezolvă problema chiar aici:

20 Arătați că bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt semidrepte opuse.

Probleme de șapte stele

21 Se dau punctele *M*, *N*, *O*, astfel încât *O* este punct interior segmentului *MN*. De aceeași parte a dreptei *MN* se duc semidreptele *OA* și *OB*, cu $OB \subset \mathrm{Int}(\sphericalangle AOM)$, astfel încât măsura unghiului *AOB* egală cu 130°. Fie *OD* și *OE* semidrepte opuse cu *OA* și respectiv, *OB*.

a Aflați măsura unghiului *DOE*.

b Calculați măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor *MOA* și *BON*.

22 Fie $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ unghiuri, opuse la vârf, cu *A*, *O*, *B* coliniare, iar *OP*, *OT*, și *OR* bisectoarele unghiurilor *AOC*, *POB*, respectiv, *TOD*.

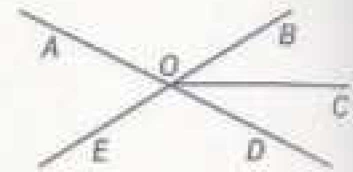
a Dacă măsura unghiului *POR* egală cu 140°, aflați măsurile unghiurilor *AOC* și *AOD*.

b Dacă măsura unghiului *POR* egală cu 25°, aflați măsurile unghiurilor *AOC* și *AOD*.

IV.5. Unghiuri în jurul unui punct

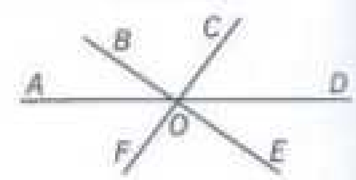
Definiție. Trei sau mai multe unghiuri care îndeplinesc condițiile:
- au vârful comun;
- au interioarele disjuncte, două câte două;
- orice punct al planului se află pe o latură sau în interiorul unui unghi, se numesc *unghiuri în jurul unui punct*.

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor din jurul unui punct este egală cu 360°.
$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOA$ sunt unghiuri în jurul punctului $O \Rightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360°$.



Exersare

1 În figura alăturată, $AD \cap BE \cap CF = \{O\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



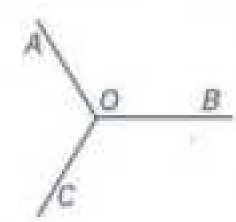
a $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOF$, $\sphericalangle FOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O;

b $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOF$ au vârful comun O, $\text{Int}(\sphericalangle DOE) \cap \text{Int}(\sphericalangle EOF) = \varnothing$, iar latura $[OE$ este comună.

c $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOF + \sphericalangle FOA = 360°$.

d $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ sunt trei unghiuri cu vârful în O, de aceeași parte a dreptei AD.

2 Priviți figura alăturată și completați corespunzător:



a $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$ sunt trei unghiuri în jurul punctului ....

b $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ au vârful comun ......, latura ...... este comună, iar $\text{Int}(\sphericalangle AOB) \cap \text{Int}(\sphericalangle BOC) =$ ....

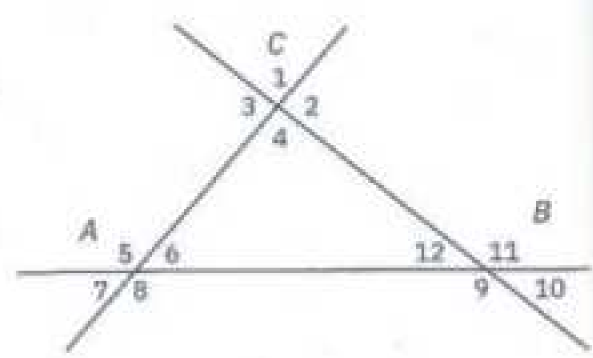
c $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$ au $\text{Int}(\sphericalangle BOC) \cap \text{Int}(\sphericalangle AOC) =$ ......, vârful comun ......, latura ...... este comună.

d $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COA) =$ ....

e $\text{Int}(\sphericalangle AOb) \cap \text{Int}(\sphericalangle BOC) \cap \text{Int}(\sphericalangle AOC) =$ ....

f Dacă $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COA$, atunci $\sphericalangle AOB =$ ....

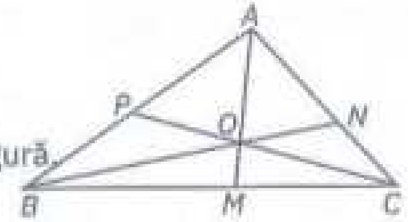
3 În figura alăturată, observăm că în jurul punctului C sunt unghiurile: $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 4$. Dintre acestea, sunt unghiuri opuse la vârf, $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 4$, respectiv, $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 3$.
Realizați un comentariu analog pentru punctul A și, respectiv, B.



4 În figura alăturată, se consideră punctul O în interiorul triunghiului ABC și se notează $AM \cap BN \cap CP = \{O\}$.

a Precizați cele trei unghiuri proprii cu vârful în B.

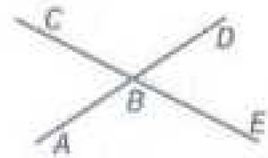
b Enumerați unghiurile în jurul unui punct pe care le observați în figură.



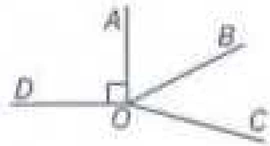
5 În figura alăturată, $\sphericalangle AOB = 120°$ și $\sphericalangle AOC = 80°$.
Aflați măsura unghiului BOC.

6 Unghiurile AOB, BOC și AOC sunt unghiuri în jurul punctului O, astfel încât $\sphericalangle BOC - \sphericalangle AOB = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOC = 40°$.
Aflați măsurile celor trei unghiuri.

7 În figura alăturată, $AD \cap CE = \{B\}$. Știind că măsura unghiului ABC este egală cu $58°$, aflați măsurile celorlalte trei unghiuri.



8 În figura alăturată, măsura unghiului AOB este egală cu $60°$ și măsura unghiului BOC este egală cu $50°$, iar $\sphericalangle AOD$ este unghi drept. Aflați măsura unghiului COD.



9 $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle DBE$ și $\sphericalangle EBA$ sunt unghiuri în jurul punctului O, cu măsura unghiului EBA mai mare cu $2°$, $4°$, respectiv $6°$, față de măsurile unghiurilor ABC, CBD și, respectiv, DBE. Aflați măsurile celor patru unghiuri.

Consolidare

10 Fie $a \cap b = \{O\}$. Aflați măsura unghiurilor formate în jurul punctului O, dacă suma măsurilor a două unghiuri neadiacente este egală cu $160°$.

11 Calculați măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente, știind că diferența măsurilor a două dintre unghiuri este $80°$.

12 Prin O construiți patru drepte distincte. Patru dintre cele opt unghiuri care nu au puncte interioare comune au măsurile de x, $x + 10°$, $x + 20°$ și $x + 30°$.

a Determinați pe x.

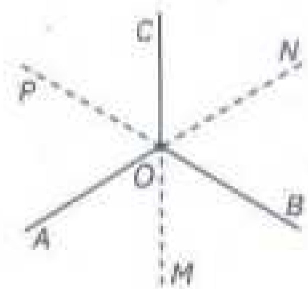
b Stabiliți valoarea de adevăr a afirmației: „În figură există două unghiuri opuse la vârf care au măsura cuprinsă între $72°$ și $93°$". Justificați răspunsul.

13 În jurul unui punct s-au format 8 unghiuri congruente. Determinați măsura acestor unghiuri.

14 În figura alăturată, $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ sunt congruente și sunt formate în jurul punctului O, iar OM, ON și OP sunt bisectoarele acestor unghiuri.

a Calculați măsura unghiului POM.

b Arătați că semidreptele OM și OC sunt opuse.



15 Fie dreptele a și b, concurente în punctul O. Aflați măsurile unghiurilor formate în jurul punctului O, dacă suma măsurilor a trei unghiuri este de $300°$.

16 Fie OA, OB și OC trei semidrepte distincte, iar OM este bisectoarea unghiului AOB și ON bisectoarea unghiului BOC.

a Stabiliți dacă măsura unghiului MON este media aritmetică a măsurilor unghiurilor AOB și BOC.

b Știind că măsura unghiului MON este egală cu $115°$, calculați suma măsurilor unghiurilor AOB și BOC.

Aprofundare

17 Fie OX, OY, OZ, OT bisectoarele unghiurilor AOB, BOC, COD, respectiv DOA, formate în jurul punctului O. Știind că măsura unghiului ZOB este cu $23°$ mai mare decât măsura unghiului XOC, iar măsura unghiului XOY este cu $21°$ mai mică decât măsura unghiului XOT, aflați măsura unghiului XOZ.

18 În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA, astfel încât OA și OD sunt semidrepte opuse, $\sphericalangle BOC$ este un unghi drept, iar $3 \cdot \sphericalangle DOE = 2 \cdot \sphericalangle AOE$. Știind că bisectoarea unghiului BOC formează cu OA un unghi cu măsura de $70°$, aflați măsurile unghiurilor AOB, COD și DOE.

19 În jurul punctului O se dau unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA astfel încât $\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD = 2 \cdot \sphericalangle BOC$, $\sphericalangle DOE = 5 \cdot \sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle EOA = 4 \cdot \sphericalangle BOC$.

a Precizați măsurile unghiurilor care se formează în jurul punctului O.

b Arătați că semidreptele OA și bisectoarea $\sphericalangle COD$ formează un unghi drept.

20 Se dau unghiurile adiacente AOB și BOC. Bisectoarea OE a unghiului AOB formează cu semidreapta OC un unghi cu măsura de $105°$. Bisectoarea OF a unghiului BOC formează cu semidreapta OE un unghi cu măsura de $65°$. Determinați măsurile unghiurilor AOB și BOC.

21 **a** Care este măsura unghiului format de minutarul și orarul unui ceas, atunci când acesta indică ora 4 fix?

b Care este măsura unghiului format de minutarul și orarul unui ceas, atunci când acesta indică ora 4 și 12 minute fix?

22 Considerăm n unghiuri în jurul unui punct, unde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, având măsurile exprimate prin numere naturale, nenule. Dacă începând cu al doilea unghi, fiecare măsură a unghiului următor este cu $30°$ mai mare decât a unghiului precedent, determinați pe n și măsurile unghiurilor.

23 În jurul punctului O se consideră 27 de unghiuri având măsurile, în grade, exprimate prin numere naturale, nenule. Arătați că cel puțin două dintre unghiuri sunt congruente.

Probleme de șapte stele

24 Un elev are la dispoziție numai unghiuri de $19°$.

a Descrieți un procedeu prin care să se obțină un unghi de $18°$.

b Arătați că există procedee pentru obținerea de unghiuri a căror măsură în grade este exprimată prin orice număr natural, utilizând numai unghiuri de $19°$.

25 În jurul punctului O sunt desenate unghiuri, având măsurile, în ordinea: $2°, 4°, 6°, ..., 16°, 2°, 4°, 6°, ..., 16°, 2°, 4°, 6°, ..., 16°$, și așa mai departe.

a Câte unghiuri sunt desenate în jurul punctului O?

b Notând cu $O_1, O_2, O_3, ...$ unghiurile determinate anterior, în jurul punctului O, determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor O_6 și O_{14}.

26 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. În jurul punctului O se construiesc n unghiuri, astfel încât $\sphericalangle A_0OA_1 = 1°$, $\sphericalangle A_1OA_2 = 2°$, $\sphericalangle A_{n-1}OA_n = n°$ și $\sphericalangle A_nOA_0 \in \mathbb{N}$.

a Aflați valoarea maximă a lui n.

Pentru această valoare:

b Arătați că $\sphericalangle A_5OA_{14}$ este unghi drept.

c Arătați că $\sphericalangle A_{18}OA_{26}$ este unghi alungit.

Teste de evaluare

Testul 1

(1p) 1 Măsura unui unghi drept este egală cu ......°.

(1p) 2 Latura comună unghiurilor *ABC* și *CBD* este ....

(1p) 3 Unghiurile suplementare au suma măsurilor egală cu ......°.

(1p) 4 Dacă ștergem latura *OP* a unghiului *MOP* obținem ....

(1p) 5 Calculați $23°47' + 15°36'$.

(1p) 6 Desenați, folosind raportorul, un unghi *BOC* cu măsura de 80° și apoi simetricul lui *B* față de *O*.

(1p) 7 Un unghi are măsura egală cu 35°16'. Calculați măsura complementului său.

(1p) 8 Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt adiacente suplementare, iar *OD* și *OF* sunt bisectoarele lor. Aflați măsura unghiului *DOF*.

(1p) 9 Unghiurile *AOB*, *BOC* și *AOC* sunt unghiuri în jurul unui punct, astfel încât $\sphericalangle AOB = x + 25°$, $\sphericalangle BOC = 2x + 80°$ și $\sphericalangle AOC = 3x + 45°$.

a Calculați măsurile unghiurilor *AOB*, *BOC* și *AOC*.

b Dacă *OD* este semidreaptă opusă cu *OA*, iar *OE* este bisectoarea unghiului *AOC*, calculați măsura unghiului *DOE*.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) 1 Măsura unui unghi alungit este egală cu ......°.

(1p) 2 Laturile unghiului nul sunt două ....

(1p) 3 Unghiurile complementare au suma măsurilor egală cu ......°.

(1p) 4 $\sphericalangle ABC \cap AC =$ ....

(1p) 5 Calculați $78° - 60°30'$.

(1p) 6 Desenați, cu ajutorul raportorului, un unghi *AOB* cu măsura de 55° și apoi simetricul lui *B* față de *A*.

(1p) 7 Un unghi are măsura egală cu 35°16'. Calculați măsura suplementului său.

(1p) 8 Două unghiuri, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente complementare, iar *OD* și *OF* sunt bisectoarele lor. Aflați măsura unghiului *DOF*.

(1p) 9 Se consideră unghiurile adiacente suplementare *AOB* și *BOC*. Se știe că măsura unghiului *AOB* este egală cu 60°. Fie *OE* bisectoarea $\sphericalangle BOC$, *OD* semidreapta opusă semidreptei *OB*, iar *OF* semidreapta situată în același semiplan cu *OD*, astfel încât *AOF* este unghi drept.

a Calculați măsurile unghiurilor *BOE*, *DOF* și *EOF*.

b Demonstrați că *OC* este bisectoarea unghiului *DOE*.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(1p) 1 Măsura unui unghi ascuțit este cuprinsă între ......° și ......°.

(1p) 2 Laturile unghiului alungit sunt două ....

(1p) 3 Unghiurile în jurul unui punct au suma măsurilor egală cu ......°.

(1p) 4 $\sphericalangle ABC - BA =$ ....

(1p) 5 Calculați $72°36' : 2$.

(1p) 6 Desenați, folosind raportorul, unghiul *COD* cu măsura de 40° și apoi simetricul lui *D* față de *C*.

(1p) 7 Un unghi are măsura egală cu 35°16'. Calculați măsura suplementului său.

(1p) 8 $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt opuse la vârf, cu $\sphericalangle AOB = 70°$, iar *OE* este bisectoarea unghiului *COD*. Aflați măsura unghiului EOC.

(1p) 9 Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOA$ cinci unghiuri în jurul unui punct *O* astfel încât $\sphericalangle AOB = 90°$, $\sphericalangle COD = x + 70°$, $\sphericalangle DOE = x$, $\sphericalangle AOE = 2x + + 40°$, iar $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COE$.

a Aflați măsurile unghiurilor *BOC*, *COD* și *AOE*.

b Dacă *OM* este bisectoarea $\sphericalangle AOE$ și *ON* este bisectoarea $\sphericalangle BOC$, arătați că $\sphericalangle MOD = \sphericalangle NOC$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(1p) 1 Măsura unui unghi obtuz este cuprinsă între ......° și ......°.

(1p) 2 Latura comună unghiurilor adiacente *ADE* și *ADF* este ....

(1p) 3 Două unghiuri sunt complementare, congruente. Măsura fiecăruia este de ......°.

(1p) 4 $\text{Int}(\sphericalangle ABC) \cap AC =$ ....

(1p) 5 Calculați produsul $23°24' \cdot 3$.

(1p) 6 Desenați un unghi propriu *AOB* cu măsura egală cu 50° și apoi construiți simetricul lui *A* față de *O*.

(1p) 7 Un unghi are măsura egală cu 35°16'. Calculați măsura suplementului său.

(1p) 8 Se consideră un unghi alungit *AOB* și punctul *M*, astfel încât măsura unghiului *AOM* este cu 40° mai mare decât măsura unghiului *MOB*. Calculați măsurile unghiurilor *AOM* și *MOB*.

(1p) 9 $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOA$ sunt unghiuri formate în jurul punctului *O* astfel încât *AOB* este unghi ascuțit, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOD$ sunt complementare, iar $\sphericalangle COD = 3 \cdot \sphericalangle AOB$.

a Calculați măsura unghiului *AOB*.

b Arătați că *OA* este bisectoarea $\sphericalangle BOD$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P Fișă pentru portofoliul individual

G1

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: **Unghiul. Clasificarea unghiurilor. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri în jurul unui punct**

(1p) 1 Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a Un unghi cu măsura de 90° se numește unghi ....
- b Suma măsurilor a două unghiuri suplementare este egală cu ....
- c Două unghiuri proprii cu laturile perechi de semidrepte opuse se numesc unghiuri ....

(2p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera A. În caz contrar încercuiți litera F.

- a Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu 180°. A F
- b Unghiul care nu este nici nul, nici alungit, se numește unghi propriu. A F
- c Două unghiuri adiacente sunt întotdeauna congruente. A F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Suma măsurilor a două unghiuri complementare congruente	1 72°
b Măsurile unghiurilor formate de bisectoarea unui unghi de 72° cu laturile unghiului	2 90°
	3 45°
c Măsurile a cinci unghiuri congruente formate în jurul unui punct	4 36°
d Suplementul unghiului cu măsura de 72°	5 108°

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, și $\sphericalangle AOD$ sunt unghiuri în jurul unui punct O, astfel încât sunt îndeplinite simultan condițiile:

i $\sphericalangle AOB = x°$; ii $\sphericalangle BOC = 2x° + 10°$; iii $\sphericalangle COD = 3x° - 5°$; iv $\sphericalangle AOD = 4x° + 5°$.

a Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle AOD$.

b Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor BOC și COD.

(2p) 5 Măsura unghiului format de laturile necomune a două unghiuri adiacente este de 85°. Determinați măsurile celor două unghiuri, știind că măsura unuia dintre ele este de patru ori mai mare decât măsura celuilalt.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Tema: Unghiul

Anul 2014 – Anul Brâncoveanu

Având în vedere importanța și contribuția majoră a domnitorului în istoria și cultura națională, precum și faptul că în anul 2014 se împlinesc 300 de ani de la martiriul lui Constantin Brâncoveanu și a fiilor acestuia, anul 2014 a fost declarat *Anul Brâncoveanu*. Epoca brâncovenească s-a deschis influențelor occidentale care au început să prevaleze asupra celor orientale.

Pentru a răspunde la cerințele 1–2, citește următorul text:

În cei 26 de ani de domnie, Constantin Brâncoveanu s-a dovedit un gospodar desăvârșit și bun administrator al avuțiilor țării, instaurând o epocă de prosperitate și pace. A inițiat o amplă activitate de construcții religioase și laice, îmbinând armonios în arhitectură, pictură murală și sculptură, tradiția autohtonă, stilul neo-bizantin și ideile novatoare ale *renascentismului* italian într-un stil caracteristic, numit *stilul brâncovenesc*. Și-a început domnia în Țara Românească în anul 1688, iar peste 2 ani, a pus piatra de temelie a celei mai de seamă din ctitoriile sale, Mânăstirea Horezu. Ea reprezintă „cel mai frumos și mai rafinat exemplar de arhitectură românească", definitoriu pentru *stilul brâncovenesc* și a fost inclusă în 1995 în patrimoniul UNESCO.

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

1 Constantin Brâncoveanu a domnit între anii:

a 1688–1690; b 1688–1714; c 1688–1704; d 1690–1714.

2 Piatra de temelie a Mânăstirii Horezu s-a pus în anul:

a 1995; b 1688; c 1714; d 1690.

Pentru a răspunde la cerințele 3–4, citește următorul text:

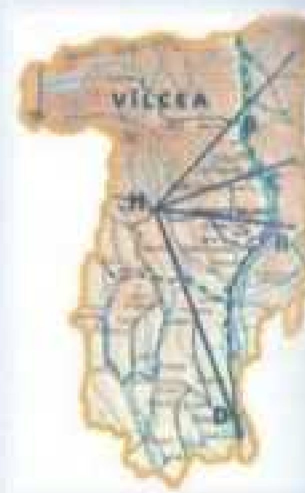
Inaugurarea sculpturii de bronz, *Fântâna cu bustul lui Brâncoveanu*, expusă astăzi în fața Primăriei din Râmnicu Vâlcea, s-a făcut cu mare fast, în ziua de 15 august $\overline{1a1b}$, cu un an înainte de împlinirea a 200 de ani de la moartea tragică a marelui voievod. Ministrul Instrucțiunii Publice, Ion Gh. Duca, a hotărât ca aniversarea să aibă loc cu participarea strănepoților voievodului, a renumiților savanți, Nicolae Iorga și A.D. Xenopol, a elevilor tuturor școlilor, precum și a unui numeros public.

3 Știind că $\overline{1a}$ reprezintă cel mai mare număr prim de această formă, aflați măsura unghiului B, știind că măsura complementului său, exprimată în grade, este $\overline{1a}$.

4 Știind că suplementul unghiului cu măsura de 167° are măsura de $\overline{1b}^\circ$, aflați în ce an a fost inaugurată *Fântâna cu bustul lui Brâncoveanu* la Râmnicu Vâlcea.

Pentru a răspunde la cerința 5, citește următorul text:

Mircea cel Bătrân a semnat documentul de atestare a Județului Vâlcea, la 8 ianuarie 1392, fiind *primul județ atestat documentar*. În 4 septembrie 1388, Mircea cel Bătrân menționează într-un hrisov că se află „în orașul domniei mele Râmnic". Călimănești-Căciulata, apare menționat în același hrisov: „binevoit domnia mea să ridic din temelie o mânăstire... la locul numit Călimănești pe Olt". Pe Calea lui Traian se afla castrul roman Rusidava (Drăgășani, castrul roman Buridava (situat în zona suburbană Stolniceni a municipiului Râmnicu Vâlcea), castrul roman Arutela (Călimănești și continua prin Brezoi către Transilvania.



5 Pe harta Județului Vâlcea fixăm punctul H ce indică poziția orașului Horezu. Trasăm apoi, în ordine, patru semidrepte HB, HC, HR, HD, unde punctele B, C, R, D indică pe hartă pozițiile orașelor Brezoi, Călimănești, Râmnicu Vâlcea și, respectiv, Drăgășani. Știind că unghiul CHD este drept, $\sphericalangle BHD = 118^\circ$ și $\sphericalangle RHD = 62^\circ$, arătați că HC este bisectoarea unghiului RHB.

IV.6. Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism

Unghiuri determinate de două drepte cu o secantă. O dreaptă care intersectează două drepte distincte, oarecare, în două puncte diferite se numește *secantă*.

În figură avem $a \cap d = \{M\}$, $b \cap d = \{N\}$, $M \neq N$.

Cele opt unghiuri formate de dreptele a și b cu secanta d poartă denumiri sugerate de pozițiile lor.

Față de dreptele date, a și b, unghiurile 4, 3, 5, 6 sunt *interne*, iar unghiurile 1, 2, 7, 8 sunt *externe*.

Față de secanta d, unghiurile 2, 3, 6, 7 (sau 1, 2, 7, 8) sunt *de aceeași parte a secantei*, iar unghiurile 1 și 6, 3 și 5 etc., sunt *de o parte și de alta a secantei*.

Unghiurile determinate de două drepte cu o secantă se denumesc astfel:

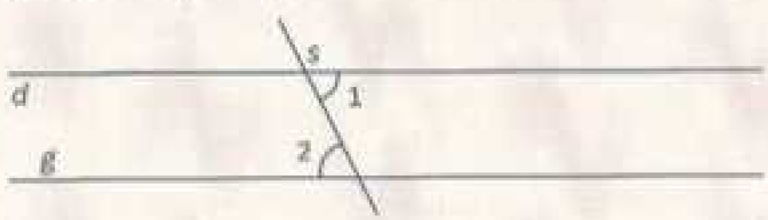
- unghiuri *alterne interne*: $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 6$ sau $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 5$;
- unghiuri *alterne externe*: $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 7$ sau $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 8$;
- unghiuri *corespondente*: $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 5$ sau $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 8$ sau $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 6$ sau $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 7$;
- unghiuri *interne de aceeași parte a secantei*: $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 5$ sau $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 6$;
- unghiuri *externe de aceeași parte a secantei*: $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 8$ sau $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 7$.

Drepte paralele. Două drepte coplanare, care nu au niciun punct comun se numesc *drepte paralele*.

Desenăm	Citim	Notăm
	dreptele d și e sunt paralele	$d \parallel e \Leftrightarrow d \cap d = \phi$

Criterii de paralelism. O condiție suficientă ca două drepte să fie paralele este exprimată de teorema următoare, numită teorema de existență *a dreptelor paralele*.

Teorema 1. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.



Redactare cu simboluri: $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2 \\ \sphericalangle 1 \text{ și } \sphericalangle 2 \text{ sunt unghiuri alterne interne} \\ \text{formate de dreptele } d \text{ și } g \text{ cu secanta } s \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel g.$

Alte criterii de paralelism sunt date de consecințele acestei teoreme.

Teorema 2. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.

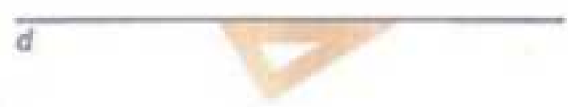
Teorema 3. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.

Teorema 4. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.

Teorema 5. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.

Construcția unei drepte paralele cu o dreaptă dată printr-un punct exterior dreptei folosind echerul și rigla

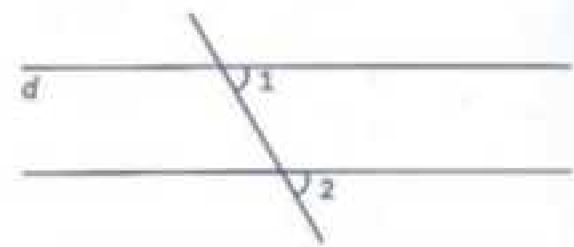
P_1: Se dă dreapta *d*. Așezăm echerul cu ipotenuza pe dreaptă.



P_2: Așezăm o riglă pe una din catetele echerului.

P_3: Ținem rigla fixă și deplasăm echerul în sus sau în jos sprijinit pe riglă (mișcare de translație.

P_4: Trasăm dreapta suport a ipotenuzei echerului. Ea va fi paralelă cu dreapta dată.

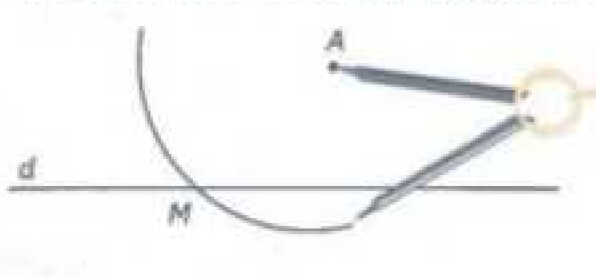


Faptul că dreptele sunt paralele rezultă din congruența unghiurilor corespondente 1 și 2 determinate de unghiul ascuțit al echerului (format de ipotenuza și cateta alături de care s-a așezat rigla.

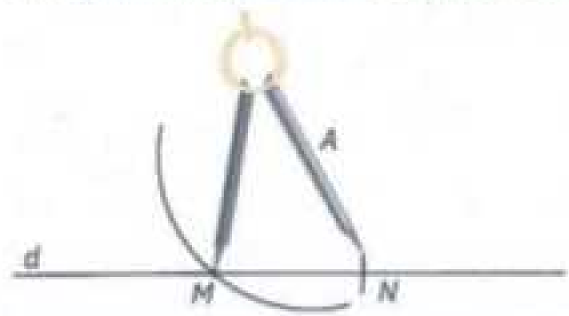
Construcția paralelei la o dreaptă dată printr-un punct dat exterior acesteia se face cum s-a arătat mai sus, cu precizarea că deplasarea echerului se face spre punctul dat până când ipotenuza echerului se așază pe acesta.

Construcția unei drepte paralele cu o dreaptă dată printr-un punct exterior dreptei folosind rigla negradată și compasul

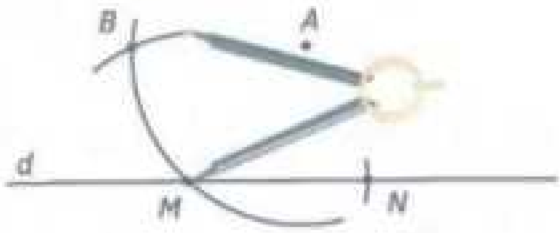
P_1: Cu o deschizătură de compas înțepăm în *A* și trasăm un arc de cerc ce taie dreapta *d* în *M*.



P_2: Cu aceeași deschizătură de compas înțepăm în *M* și trasăm un arc secant dreptei *d* în *N*.

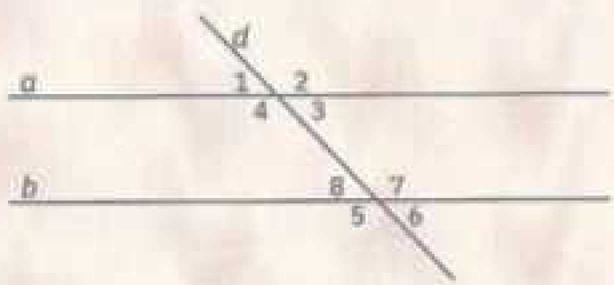


P_3: Luăm în deschizătura compasului lungimea AN, înțepam în M și trasăm un arc de cerc secant primului arc de cerc trasat în punctul B.



P_4: Dreapta determinată de punctele A și B este paralelă cu dreapta d: $AB \parallel d$.

Problemă. În figura alăturată, dreptele a și b formează cu secanta d unghiurile numerotate de la 1 la 8. Cunoscând $m(\hat{3})=57°$ și $m(\hat{5})=123°$, stabiliți dacă dreptele a și b sunt paralele.



Demonstrație. Unghiurile $\hat{3}$ și $\hat{5}$ sunt alterne, dar unul intern și celălalt extern, deci nu se poate aplica direct teorema de existență a paralelelor.

Observăm că unghiurile $\hat{8}$ și $\hat{5}$ sunt suplementare. Putem calcula $m(\hat{8}) \stackrel{\cdot}{=} 180° - m(\hat{5}) \Rightarrow m(\hat{8}) = 57°$.

Acum avem $m(\hat{3}) = m(\hat{8})$ și acestea având poziții de alterne interne, rezultă, conform teoremei, $a \parallel b$.

Axioma paralelelor. Fie un punct exterior unei drepte. Există cel mult o dreaptă ce conține punctul și care este paralelă cu dreapta dată.

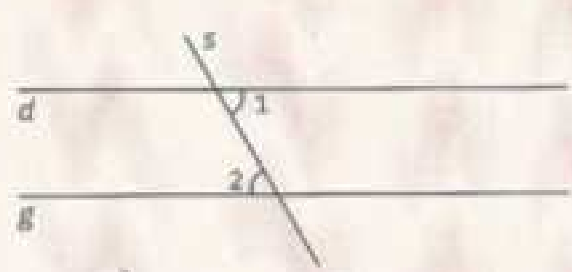
Axioma paralelelor (axioma lui Euclid). Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură dreaptă paralelă cu acea dreaptă.

Redactare cu simboluri: $\left.\begin{matrix} A \notin d \\ g \parallel d \\ A \in g \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ dreapta g este unică. De regulă, se aplică în demonstrația unor probleme de coliniaritate, astfel:

$$\left.\begin{matrix} A \notin d \\ AB \parallel d \\ AC \parallel d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{dreptele } AB \text{ și } AC \text{ coincid} \Rightarrow \text{punctele } A, B, C \text{ sunt coliniare.}$$

Drepte paralele tăiate de o secantă

Reciproca teoremei unghiurilor alterne interne are următorul enunț:



Teorema R1. Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri alterne interne congruente.

Redactare cu simboluri: $\left.\begin{matrix} d \parallel g \\ \sphericalangle 1 \text{ și } \sphericalangle 2 \text{ sunt unghiuri alterne interne} \\ \text{formate de dreptele } d \text{ și } g \text{ cu secanta } s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$

Din teoremă obținem proprietăți referitoare la celelalte perechi de unghiuri:

Teorema R2. Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri alterne externe congruente.

Teorema R3. Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri corespondente congruente.

Teorema R4. Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.

Teorema R5. Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare.

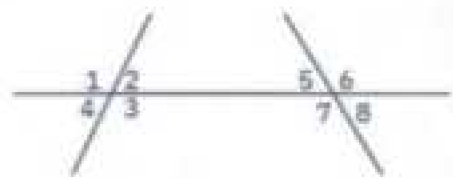
Tranzitivitatea relației de paralelism

Teoremă. Două drepte distincte, paralele cu o a treia dreaptă, sunt paralele.

Redactare cu simboluri: $\left.\begin{matrix} a \neq b \\ a \parallel c \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b.$

Exersare

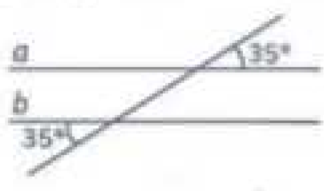
1 În figura alăturată, indicați perechi de unghiuri:
a alterne interne;
b alterne externe;
c corespondente;
d interne de aceeași parte a secantei;
e externe de aceeași parte a secantei.

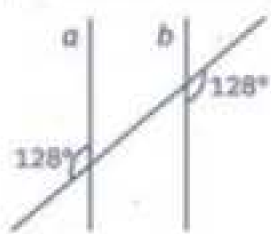


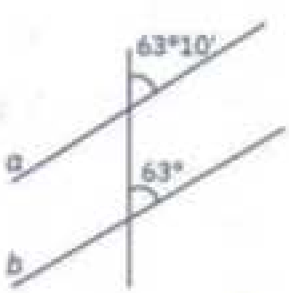
2 Desenați două drepte și o secantă, numerotați unghiurile și scrieți perechile de unghiuri:
a alterne interne; b alterne externe; c corespondente;
d interne de aceeași parte a secantei; e externe de aceeași parte a secantei.

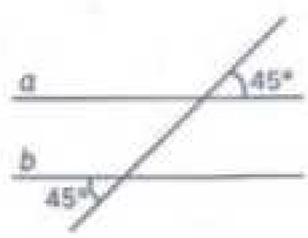
Consolidare

3 Comparați măsurile unghiurilor date și stabiliți dacă dreptele a și b sunt paralele:

a


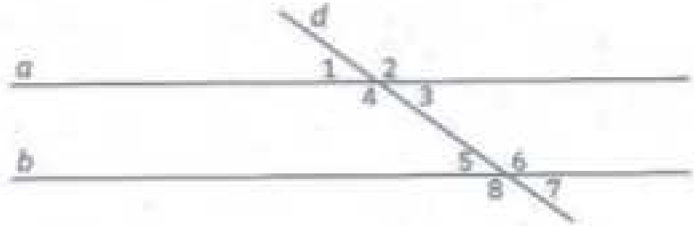
b


c


d


4 Desenați o dreaptă d și un punct M exterior acesteia. Construiți prin M, $MN \parallel d$.

5 Dreptele paralele a și b formează cu secanta d unghiurile numerotate ca în figura de mai jos. Determinați măsurile celorlalte unghiuri știind că:



a $m(\hat{8}) = 38°$;
b $m(\hat{3}) = 112°$;
c $m(\hat{1}) = 80°$;
d $m(\hat{7}) = 110°$;
e $m(\hat{5}) = 98°$.

6 Două drepte paralele a și b intersectate de secanta d determină 8 unghiuri. Măsurile a două dintre cele 8 unghiuri se exprimă în grade prin x și $2x + 30°$. Determinați măsurile celor 8 unghiuri.

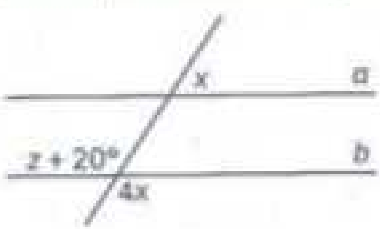
7 Două drepte paralele formează cu o secantă 8 unghiuri, dintre care cinci sunt congruente. Precizați poziția secantei față de fiecare dreaptă dată.

Aprofundare

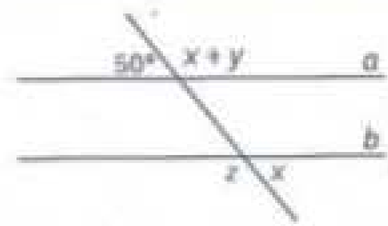
8 Două drepte a și b formează cu secanta d o pereche de unghiuri alterne interne care au măsurile exprimate în grade de $x°$ și $2x° - 48°$. Determinați valorile lui x pentru care dreptele nu sunt paralele.

9 Determinați măsurile de unghiuri exprimate prin x, y, z din figurile de mai jos, știind că $a \parallel b$.

a



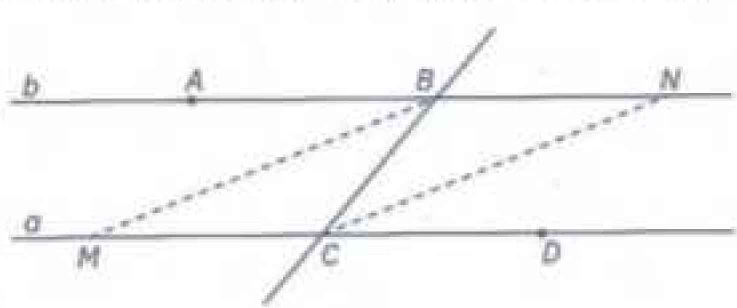
b



Probleme de șapte stele

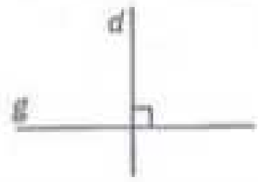
10 În figura de mai jos dreptele a și b sunt paralele și sunt intersectate de c în B, respectiv E. Arătați că bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$ și $\widehat{DEB}$ se află pe două drepte paralele.

11 Se dau dreptele paralele $a \parallel b$ și secanta d, ca în figura de mai jos, iar $[BM$ și $[CN$ sunt bisectoarele unghiurilor alterne interne $\widehat{ABC}$, respectiv $\widehat{BCD}$, unde $M \in a$ și $N \in b$. Demonstrați că $BM \parallel CN$.



IV.7. Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă

Drepte perpendiculare. Două drepte concurente ce formează un unghi cu măsura de 90° se numesc *drepte perpendiculare.*

Desenăm	Citim	Notăm
	dreapta *d* este perpendiculară pe dreapta *g*	$d \perp g$

Redactăm simboluri: $d \perp g \Leftrightarrow m(\widehat{d, g}) = 90°$.

Consecință. Două drepte perpendiculare formează patru unghiuri drepte.
Două drepte concurente *d* și *e*, care nu sunt perpendiculare, se numesc *drepte oblice.*

Construcția perpendicularei pe o dreaptă dată, dintr-un punct exterior dreptei. Se consideră dreapta *d* și punctul *A*, astfel încât $A \notin d$. Vom construi perpendiculara din punctul *A* pe dreapta *d*.

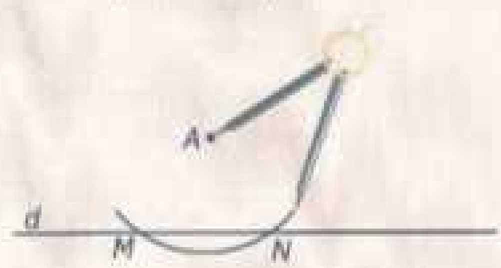
Construcția cu ajutorul echerului

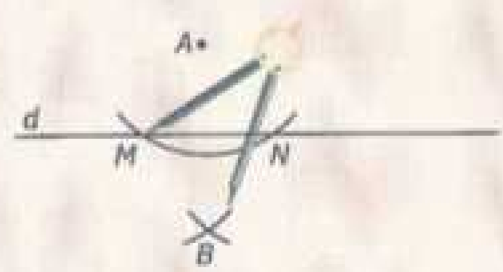
Așezăm echerul cu o catetă (latură a unghiului drept) pe dreapta *d* și îl deplasăm până când punctul *A* va fi situat pe cealaltă catetă a echerului.

Trasăm dreapta *a* după cateta echerului care conține punctul *A*.

Construcția cu ajutorul compasului și a riglei negradate:

Înțepăm în *A* și trasăm un arc de cerc astfel încât să taie dreapta *d* în două puncte *M* și *N*:

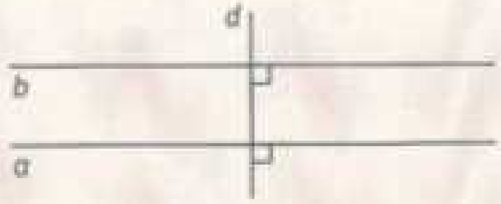




Înțepăm în *M* și apoi în *N* și trasăm, cu aceeași deschizătură, câte un arc de cerc în semiplanul care nu conține pe *A*. Aceste arce se intersectează în *B*.
Dreapta *AB* este tocmai dreapta căutată *a*, deci $AB = a$ și avem $a \perp d$.

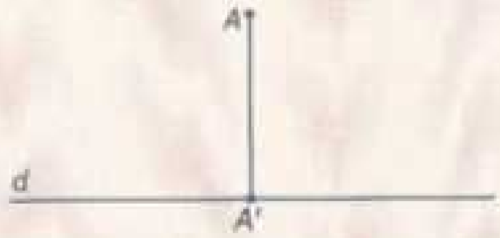
Construcția perpendicularei pe o dreaptă dată, într-un punct care aparține dreptei. Fiind dată dreapta d și punctul $A \in d$, pentru construcția perpendicularei pe dreapta d care trece prin punctul A se procedează într-un stil asemănător construcției dintr-un punct exterior, cu următoarele mici deosebiri:

- folosind echerul, acesta se așază cu vârful unghiului drept în punctul A;
- folosind rigla și compasul, pentru obținerea punctelor M și N, se trasează, cu aceeași deschizătură, două arce de cerc, de o parte și de alta a punctului A.



Teoremă. Două drepte coplanare perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele.

Redactare cu simboluri: $\left.\begin{matrix} a \perp d \\ b \perp d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b.$



Distanța de la un punct la o dreaptă. Fie o dreaptă d și un punct A exterior acesteia. Prin *distanța de la punctul A la dreapta d* înțelegem lungimea segmentului cu un capăt în A și celălalt în A', unde $AA' \perp d$ și $A' \in d$.
Redactare cu simboluri: Fie $AA' \perp d \Leftrightarrow (A, D) = AA'$.
Punctul A' se numește piciorul perpendicularei duse din A pe dreapta d.
Dacă $A \in d$, atunci $A = A'$ și $d\,(A, D) = 0$.

Mediatoarea unui segment. *Mediatoarea unui segment* este perpendiculara pe acel segment construită prin mijlocul acestuia.

Desenăm	Citim
	dreapta d este mediatoarea segmentului $[AB]$

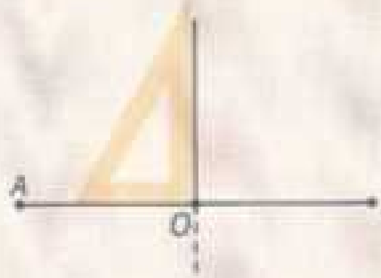
Redactare cu simboluri:

$$\left.\begin{matrix} d \perp CT \\ d \cap AB = \{O\} \\ O \text{ este mijlocul segmentului } [AB] \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \text{ este mediatoarea segmentului } [AB].$$

Construcția mediatoarei cu rigla gradată și echerul

Pasul 1: Măsurăm segmentul $[AB]$ și notăm mijlocul său O.

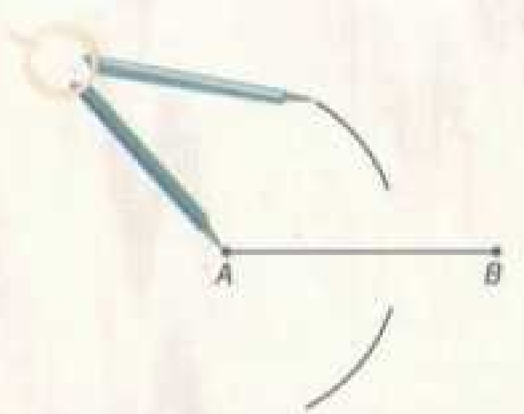
Pasul 2: Ridicăm perpendiculara în O pe dreapta AB. Prelungim și dincolo de O.

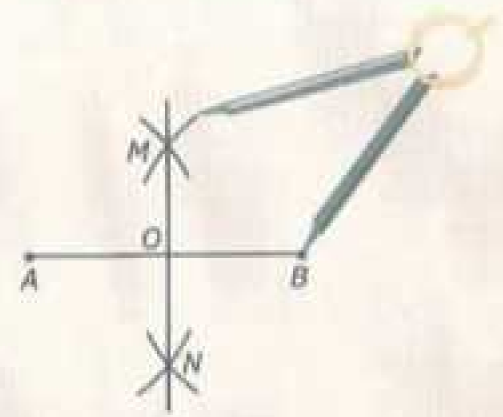


Construcția mediatoarei cu rigla negradată și compasul

Pasul 1: Deschidem compasul mai mult decât jumătatea segmentului [AB] dat. Cu această deschizătură înțepăm în primul capăt al segmentului și trasăm un arc mare.

Pasul 2: La fel procedăm, înțepând în al doilea capăt al segmentului. Unim cele două puncte de intersecție ale arcelor, punctele M și N și obținem mediatoarea MN.





Simetria față de o dreaptă. Fie dreapta d și $A \notin d$. Punctul A' pentru care d este mediatoarea segmentului [AA'] se numește *simetricul lui A față de d*.

Redactare cu simboluri:

A și A' sunt simetrice față de $d \Leftrightarrow d$ este mediatoarea segmentului [AA'].

Construcția simetricului unui punct față de o dreaptă

Pentru a construi punctul A', simetricul punctului A față de dreapta d, procedăm astfel:

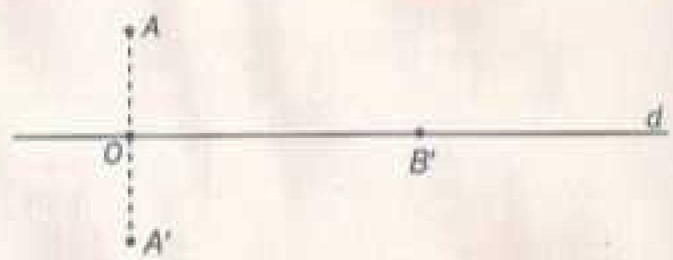
P_1: Din A construim $AO \perp d$, cu $O \in d$.

P_2: Prelungim segmentul [AO] cu segmentul [OA'] astfel încât [OA] ≡ [OA'].

Observație. Dacă $B \in d$, atunci simetricul lui B față de dreapta d este punctul $B' = B$.

Axă de simetrie. O dreaptă se numește *axa de simetrie* a unei figuri geometrice dacă simetricul fiecărui punct al figurii aparține de asemenea figurii respective.

Exemplu: Mediatoarea unui segment este axă de simetrie pentru acel segment.



Observație. Simetrica unei figuri geometrice față de o dreaptă este mulțimea de puncte formată din toate simetricele punctelor figurii date față de acea dreaptă.

Se poate arăta că:

Simetricul segmentului AB față de dreapta d este segmentul $A'B'$, unde A' este simetricul lui A față de d, iar B' este simetricul lui B față de d. Dacă $AB \perp d$, atunci segmentul $A'B'$ se reduce la un singur punct.

Observație. Dacă A' este simetricul punctului A față de dreapta d, atunci, pentru orice $M \in d$, avem $AM = A'M$.

Exersare

1 Fie o dreaptă d și un punct exterior A. Din punctul A coborâm oblica AD și perpendiculara AO, $D, O \in d$. Măsurați segmentele [AO] și [AD], unghiurile $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle ADO$, apoi completați spațiile punctate cu concluzia desprinsă din comparare:

a Dintre o oblică și perpendiculara coborâte din același punct la o dreaptă lungimea mai mare o are ....

b Dintre unghiurile formate de o dreaptă cu o oblică și, respectiv, cu o perpendiculară duse din același punct la dreapta dată, măsura mai mare o are unghiul format de .... cu dreapta dată.

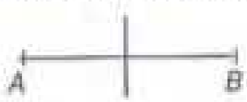
2 Construiți o dreaptă *d* pe care fixați punctele distincte *A*, *B*, *C*. Ridicați pe *d* perpendicularele $AA' = 2$ cm, $BM = 4$ cm, $CP = 5$ cm.

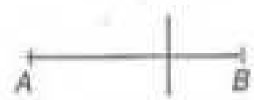
3 Construiți segmentele [*AB*] și [*AC*] cu $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm. Construiți mediatoarele segmentelor [*AB*] și [*AC*].

Rezolvă problema chiar aici:

4 Precizați în care caz dreapta *d* este mediatoarea segmentului [*AB*]:

a


b


c


5 Fie dreapta *d* și punctele *A*, *M* exterioare ei. Construiți:

a segmentul [*AB*], astfel încât dreapta *d* să fie mediatoarea lui;

b simetricul *A'* al punctului *A* față de dreapta *d*;

c segmentul [*MN*], astfel încât dreapta *d* să fie axă de simetrie pentru [*MN*].

Rezolvă problema chiar aici:

6 În figura alăturată avem o dreaptă *d* și un segment [*AB*] cu $A \in d$. Desenați segmentul care este simetricul lui [*AB*] față de dreapta *d*.

7 În figura alăturată avem o dreaptă *d* și un segment [*AB*]. Desenați segmentul [*A'B'*] care este simetricul lui [*AB*] față de dreapta *d*.

8 Măsurați segmentele [*AB*] și [*A'B'*] din problema anterioară, comparați lungimile obținute, apoi completați spațiile punctate, astfel încât să obțineți o afirmație adevărată: *Două segmente simetrice față de o dreaptă d sunt* ....

9 Fie punctele B, C, D în același semiplan determinat de dreapta OA, astfel încât $[OA \perp [OC$, $B \in \text{Int}(\widehat{AOC})$, iar bisectoarea $[OM$ a unghiului AOB să fie perpendiculară pe bisectoarea $[ON$ a unghiului COD. Arătați că:

a $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$;

b $[OB \perp [OD$.

Rezolvă problema chiar aici:

Consolidare

10 Se dă unghiul alungit AOE. În același semiplan se construiesc trei perechi de unghiuri adiacente: AOB, BOC, COD și DOE, ale căror măsuri verifică relația:

$$m(\widehat{AOB}) = \frac{1}{5}m(\widehat{BOC}) = \frac{1}{4}m(\widehat{COD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{DOE}).$$

a Determinați măsurile acestor unghiuri.

b Arătați că $OC \perp AE$.

11 Se consideră unghiul ascuțit AOB. Construim $OC \perp OA$ și $OD \perp OB$. Demonstrați că unghiurile AOB și COD sunt congruente sau suplementare.

Rezolvă problema chiar aici:

Aprofundare

12 Fie $\sphericalangle AOB$ cu măsura de $140°$, $(OC$ și $(OD$ două semidrepte situate în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ astfel încât $(OC \subset \text{Int}(\sphericalangle AOD)$. Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ este $60°$.

a Aflați măsura unghiului $\sphericalangle COD$.

b Dacă $(OE$ și $(OF$ sunt două semidrepte situate în semiplanul delimitat de OD ce conține punctul A, astfel încât $OE \perp OC$ și $OF \perp OD$, calculați $m(\sphericalangle EOF)$.

13 Fie unghiul ascuțit $\sphericalangle AOB$. Prelungim $(OA$ cu semidreapta $(OE$. De aceeași parte cu $(OB$ se duc $OC \perp OA$ și $OD \perp OB$. Se știe că măsura unghiului $\sphericalangle EOD$ este de nouă ori mai mare decât a unghiului $\sphericalangle AOB$.

a Aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle EOD$ și $\sphericalangle COD$.

b Dacă semidreapta $(OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle EOD$ și semidreapta $(OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle FOM$.

Probleme de șapte stele

14 Fie unghiul ascuțit $\sphericalangle AOB$ și semidreptele $[OC$ și $[OD$, astfel încât $OC \perp OA$ și $OD \perp OB$, iar $\mathrm{Int}(\sphericalangle AOC) \cap \mathrm{Int}(\sphericalangle DOB) = \varnothing$. Dacă $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COB$, iar $[OG$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$, să se arate că măsura unghiului $\sphericalangle FOG$ este constantă, indiferent de măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.

15 Fie unghiul ascuțit AOB, bisectoarea sa $(OC$ și semidreapta $(OD$ în semiplanul determinat de dreapta OC, care nu conține punctul B, astfel încât $OD \perp OC$. Se consideră semidreapta $(OE$ perpendiculară pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$. Aflați câte valori posibile de numere naturale poate avea măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ astfel încât $(OE \subset \mathrm{Int}(\sphericalangle AOB)$.

16 Fie punctele A și B exterioare dreptei d, situate de aceeași parte a dreptei AB. Fie B' simetricul lui B față de dreapta d și $AB' \cap d = \{P\}$.

a Arătați că $AB' = AP + PB$.

b Alegeți $T \in d$, $T \neq P$, și verificați prin măsurare dacă $AT + TB > AP + PB$.

Teste de evaluare

Testul 1

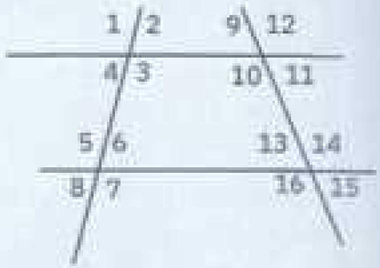
(3p) 1 Subliniază răspunsul corect. Mediatoarea unui segment este:

a un segment; b o semidreaptă; c o dreaptă.

(4p) 2 În figura alăturată indicați:

a 8 perechi de unghiuri corespondente;

b 4 perechi de unghiuri alterne interne.



(2p) 3 Fie unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ astfel încât $3m(\widehat{BOC})=2m(\widehat{AOB})$. Bisectoarele [*OM*, respectiv [*ON* ale unghiurilor *AOB* și *BOC* formează un unghi de 75°. Construim perpendiculara $OD \perp OM$ astfel încât *M* și *D* sunt de aceeași parte cu *B* față de *OA*.

a Calculați măsurile unghiurilor *AOB* și *BOC*.

b Demonstrați că [*OD* este bisectoarea unghiului *CON*.

NOTĂ. Timp de lucru: 40 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

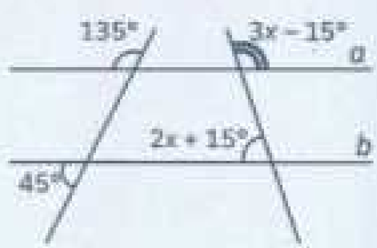
Testul 2

(2p) 1 Construiți un segment [*AB*] cu lungimea *AB* = 4 cm. Utilizând instrumentele de geometrie trasați mediatoarea segmentului [*AB*].

(5p) 2 Analizați figura alăturată și:

a stabiliți dacă dreptele *a* și *b* sunt paralele;

b calculați pe *x*.



(2p) 3 Fie punctele *A* și *B* pe dreapta *d*. Se construiesc perpendiculara în *A* pe *AB*, pe care se alege un punct *C* și perpendiculara în *B* pe *BA*, pe care se alege un punct *D*. Știind că $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ACB) = 30°$, determinați măsura unghiului *CBD*.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Fișă pentru portofoliul individual

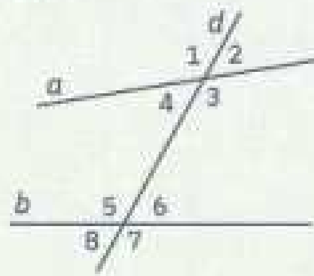
P **G2**

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Drepte paralele. Drepte perpendiculare. Mediatoarea unui segment

(1,5p) 1 Folosind figura de mai jos, completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate referitoare la poziția unghiurilor:



a $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 6$ sunt unghiuri ....

b $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 5$ sunt unghiuri ....

c $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 7$ sunt unghiuri ....

(1,5p) 2 Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a Dacă $d \perp g$, atunci $m(\sphericalangle(d, g)) =$ ....

b Dacă $[DA$ este bisectoarea unghiului DEF, atunci $\sphericalangle$......... = $\sphericalangle$......... .

c Dacă $TO \perp AB$ și O este mijlocul segmentului $[AB]$ atunci TO este .... segmentului $[AB]$.

(1,5p) 3 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera A, în caz contrar încercuiți litera F:

a Dacă $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$. A F

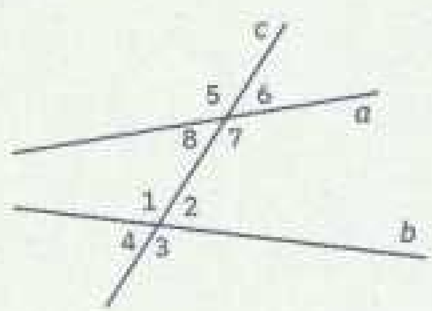
b Dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$ sau $a = c$. A F

c $a \perp c, b \perp c, a \neq b \Rightarrow a \parallel b$. A F

(1,5p) 4 În figura de mai jos indicați perechile de unghiuri:

a corespondente;

b interne de aceeași parte a secantei.

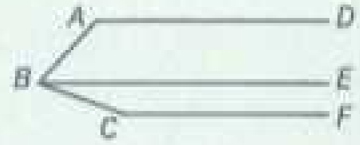


La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 5 În figura alăturată, $AD \parallel BE \parallel CF$. Calculați:

a $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle C)$;

b $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle BAC)$.



(1p) 6 Se dau punctele coliniare C, O, D și semidreptele $(OA$ și $(OB$ de aceeași parte a dreptei CD astfel încât $(OA$ este interioară unghiului COB și $OA \perp OB$. Calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOD.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Test-model pentru Evaluarea Națională

Tema: Paralelism

Nadia Comăneci

Paralelele inegale constituie unul dintre aparatele de gimnastică utilizat doar în gimnastica feminină. Cadrul este confecționat din oțel, iar barele sunt realizate din lemn, materiale plastice sau din materiale compozite.

Pentru a răspunde la cerințele 3–42, citește următorul text:

Dimensiunile aparatului sunt standardizate: înălțimea la care se află bara superioară: 245 cm, înălțimea la care se află bara inferioară: 165 cm, grosimea barelor: 4 cm, lungimea barelor, 240 cm, iar distanța diagonală dintre cele două bare, între 130 cm și 180 cm (ajustabilă). Nadia Elena Comăneci, o gimnastă română, este câștigătoare a cinci medalii olimpice de aur. Este considerată a fi una dintre cele mai bune sportive ale secolului XX și una dintre cele mai bune gimnaste ale lumii, din toate timpurile. *Zeița de la Montreal* este prima gimnastă a epocii moderne care a luat nota 10 absolut.

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

1 Înălțimea la care se află bara superioară depășește înălțimea la care se află bara inferioară cu:

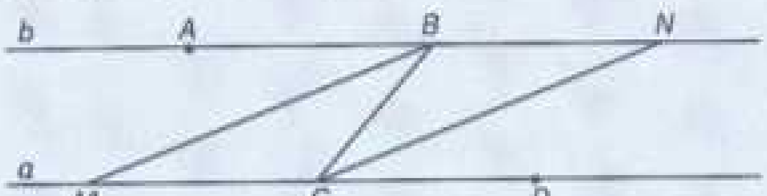
a 5 cm; b 75 cm; c 80 cm; d 50 cm.

2 Dreptele paralele sunt două drepte coplanare pentru care mulțimea punctelor comune are un număr de elemente egal cu:

a 2; b 1 c 3; d 0.

Pentru a răspunde la cerințele 3–4, citește următorul text:

Ca să efectueze un antrenament special, antrenorii lotului de gimnastică au comandat niște bare speciale [*BM*], [*BC*] și [*CN*] pe care le-au sudat de cele două bare paralele *a* și *b*, astfel încât [*BM* este bisectoarea unghiului *ABC* și [*CN* este bisectoarea unghiului *BCD*.



3 Arătați că două dintre unghiurile *MBC*, *MCB* și *BMC* sunt congruente.

4 Arătați că $BM \parallel CN$.

Pentru a răspunde la cerința 5, citește următorul text:

Instituție culturală de mare prestigiu, Ateneul Român din București a fost fondat în anul 1866 și inaugurat la 14 februarie 1888. Fațada este un peristil cu lățimea de 48 m. Fiecare din cele 6 coloane are înălțimea egală cu 12 m. În interior, sala de concerte are o înălțime egală cu 16 m.

5 Dacă alegem două din cele 6 coloane și le stilizăm ca segmente $[AB]$ și respectiv $[CD]$ astfel încât $AB \perp g$ și $m(\widehat{CD,g})=90^\circ$ arătați că cele două coloane sunt paralele.

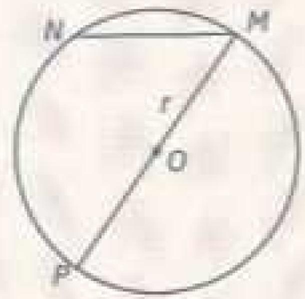
IV.8. Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri

Fiind dat un punct în plan O și un număr pozitiv r, se numește *cerc de centru O și rază r* mulțimea punctelor din plan situate la distanța r de punctul O.

Altfel spus, cercul este mulțimea punctelor egal depărtate de un punct fix (centrul .

Notăm cercul de centru O și rază r astfel: $\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM = r\}$.

În anumite situații, prin *rază* vom înțelege și segmentul care unește centrul cercului cu un punct al cercului. Un segment care unește două puncte de pe cerc se numește *coardă*. O coardă care conține centrul cercului se numește *diametru*. Lungimea oricărui diametru este $2r$. Două puncte de pe cerc care sunt extremitățile unui diametru se numesc *puncte diametral opuse*.



Două cercuri sunt congruente dacă au razele egale.
Scriem $\mathcal{C}_1(O_1, r_1) \equiv \mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ dacă și numai dacă $r_1 = r_2$.

În figura alăturată, segmentul $[MN]$ este coardă, iar $[MP]$ este diametru. Segmentele $[OM]$, $[ON]$ și $[OP]$ sunt raze. Avem $OM = ON = OP = r$ și $MP = 2r$.

Interior. Exterior. Disc

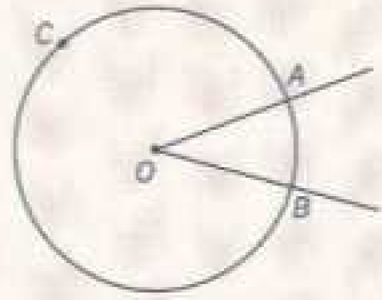
Mulțimea $\text{Int}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM < r\}$ se numește *interiorul cercului*.

Mulțimea $\text{Ext}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM > r\}$ se numește *exteriorul cercului*.

Mulțimea $\mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int}\,\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM \leq r\}$ se numește *disc* de centru O și rază r.

Arc de cerc. Porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numește *arc de cerc*, iar punctele care determină arcul se numesc capetele (extremitățile arcului. Dacă extremitățile unui arc de cerc sunt puncte diametral opuse, arcul se numește *semicerc*.

Două puncte $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$, nediametral opuse, determină pe un cerc două arce: *arcul mic* $\overset{\frown}{AB}$ (porțiunea de cerc aflată în interiorul unghiului AOB și *arcul mare* $\overset{\frown}{AB}$ (porțiunea de cerc din exteriorul unghiului AOB.



În general, când scriem $\overset{\frown}{AB}$ (folosind doar două litere, ne referim la arcul mic. Pentru notația unui arc mare vom folosi încă un punct al arcului, diferit de capetele lui: de exemplu, vom nota $\overset{\frown}{ACB}$ arcul mare $\overset{\frown}{AB}$ din figură.

Unghi la centru. Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește unghi la centru. În figura de mai sus, $\sphericalangle AOB$ este unghi la centru.

Măsura unui arc mic de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător: $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\widehat{AOB})$.

Măsura arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ este $m(\overset{\frown}{ACB}) = 360^\circ - m(\widehat{AOB})$.

Măsura unui semicerc este egală cu 180°, iar măsura unui cerc este de 360°.

Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

Fie $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc. În funcție de numărul de puncte de intersecție cu cercul, dreptele se clasifică în:

a *exterioare* – nu au niciun punct comun cu cercul;

b *tangente* – au un singur punct comun cu cercul;

c *secante* – au două puncte comune cu cercul.

În figura alăturată,

– dreapta a este exterioară cercului: $a \cap \mathcal{C}(O, r) = \varnothing$;

– dreapta b este tangentă cercului: $b \cap \mathcal{C}(O, r) = \{B\}$;

– dreapta c este secantă cercului: $c \cap \mathcal{C}(O, r) = \{A, C\}$.

Pozițiile relative ale unei drepte h față de cercul $\mathcal{C}(O, r)$ pot fi studiate și în funcție de distanța de la centrul cercului la dreaptă. Astfel:

a dreapta h este exterioară cercului dacă și numai dacă $d(O, h) > r$;

b dreapta h este tangentă cercului dacă și numai dacă $d(O, h) = r$;

c dreapta h este secantă cercului dacă și numai dacă $d(O, h) < r$.

Observație. Tangenta la un cerc este perpendiculară pe rază în punctul de contact cu cercul.

Pozițiile relative a două cercuri. Două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, cu $r_1 \geq r_2$, se pot afla în poziții diferite unul față de celălalt, în funcție de distanța O_1O_2 dintre centre. Astfel, cercurile sunt:

a *exterioare*, dacă $O_1O_2 > r_1 + r_2$;

b *tangente exterior*, dacă $O_1O_2 = r_1 + r_2$;

c *secante*, dacă $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$;

d *tangente interior*, dacă $O_1O_2 = r_1 - r_2$;

e *interioare*, dacă $O_1O_2 < r_1 - r_2$;

f *concentrice*, dacă $O_1O_2 = 0$.

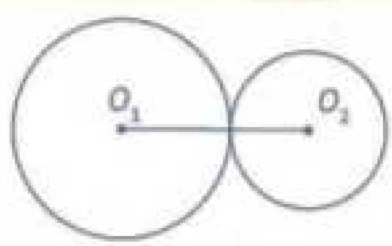


Figura 1. Cercuri tangente exterior

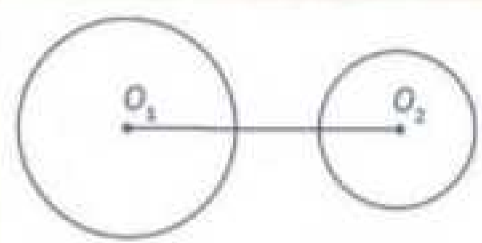


Figura 2. Cercuri exterioare

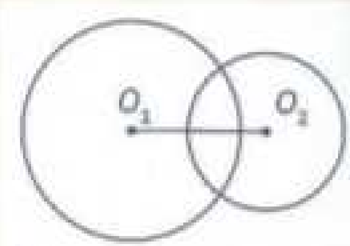


Figura 3. Cercuri secante

Figura 4. Cercuri tangente interior

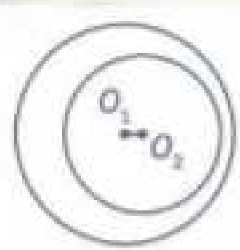


Figura 5. Cercuri interioare

Figura 6. Cercuri concentrice

Exersare

1 Desenați un cerc de centru O și rază $r = 3$ cm și punctele A, B, C, D, E, F astfel încât $OA = 1$ cm, $OB = 5$ cm, $OC = 3$ cm, $OD = 4$ cm, $OE = 3$ cm și $OF = 2$ cm. Stabiliți care dintre aceste puncte aparțin cercului, care interiorului și respectiv exteriorului cercului.
Care puncte aparțin discului $\mathcal{D}(O, r)$?

2 Desenați cercul $\mathcal{C}(O, r)$, unde $r = 3$ cm și alegeți un punct A pe cerc. Construiți pe cerc punctele A', B, C, D, E, F astfel încât:

a A' este diametral opus lui A;
b $m(\widehat{AB}) = 60°$;
c $m(\sphericalangle AOC) = 45°$;
d $m(\widehat{BAD}) = 120°$;
e $m(\widehat{ABE}) = 220°$;
f $\widehat{EF}$ este semicerc.

Consolidare

3 Măsura arcului $\widehat{AB}$ reprezintă 30% din măsura cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Determinați măsura unghiului la centru AOB.

Rezolvă problema chiar aici:

4 Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele oarecare A, B și M, N mijloacele arcelor determinate de ele. Arătați că $[MN]$ este diametru.

5 Stabiliți poziția dreptei h față de $\mathcal{C}(O, 10 \text{ cm})$, dacă distanța $d(O, h)$ este egală cu:

a 12 cm;
b 10 cm;
c 0 cm;
d 2 cm.

6 Construiți cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ în următoarele situații, precizând poziția unuia față de celălalt:

a $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 5$ cm; $O_1O_2 = 8$ cm;
b $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 4$ cm; $O_1O_2 = 4$ cm;
c $r_1 = r_2 = 2$ cm; $O_1O_2 = 6$ cm;
d $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 2$ cm; $O_1O_2 = 3$ cm;
e $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm; $O_1O_2 = 0$ cm;
f $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 3$ cm; $O_1O_2 = 1$ cm.

Aprofundare

7 Fie cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, cu $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 5$ cm și $O_1O_2 = 3x + 2$ cm. Determinați valorile $x \in \mathbb{N}$ pentru care cercurile sunt:

a secante;
b tangente interioare;
c concentrice;
d tangente exterioare.

Teste de evaluare

Testul 1

(3p) 1 Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a Un cerc are măsura egală cu ....

b Coarda care conține centrul cercului se numește ....

c O dreaptă care are un punct comun cu un cerc este .... cercului.

(3p) 2 Desenați un cerc cu raza de 2 cm și punctele A, B, C și D, astfel încât $OA = 3$ cm, $OB = 2$ cm, $OC = 1{,}5$ cm și $OD = 4$ cm. Stabiliți care dintre aceste puncte aparține cercului, care interiorului cercului și care exteriorului cercului.

(3p) 3 Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A și B, astfel încât $m(\widehat{AB})$ este 20% din măsura cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Determinați măsura arcului mic $\widehat{AB}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera A. În caz contrar, încercuiți litera F.

a Măsura unui semicerc este egală cu 180°. A F

b Măsura unui unghi la centru este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile unghiului. A F

c Prin capetele unui segment trec o infinitate de cercuri. A F

d Două cercuri concentrice au întotdeauna razele egale. A F

(3p) 2 Desenați cercul $\mathcal{C}(O, r)$, unde $r = 3$ cm și alegeți un punct A pe cerc. Construiți pe cerc punctele B, C și D, astfel încât:

a A și B sunt diametral opuse; b $OA \perp OC$; c C și D sunt diametral opuse

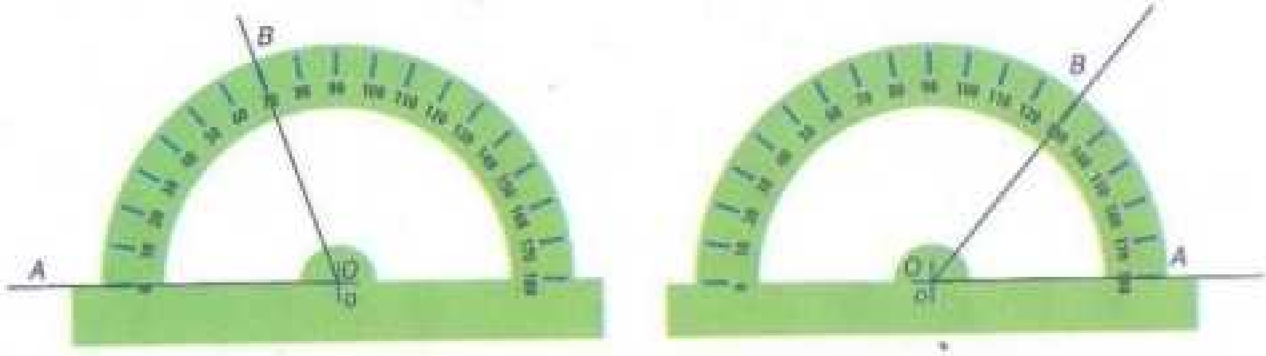
(3p) 3 Pe un cerc se iau punctele A, B, C, D în sensul mișcării acelor de ceasornic, astfel încât $m(\widehat{AB}) = 80°$, $m(\widehat{BC}) = 130°$, $m(\widehat{CD}) = 110°$. Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**:

A	B
a Măsura arcului $\widehat{ABC}$	1 110°
b Măsura arcului $\widehat{BCD}$	2 40°
c Măsura arcului mic $\widehat{AD}$	3 210°
d Măsura unghiului $\sphericalangle BOD$	4 240°
	5 120°

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

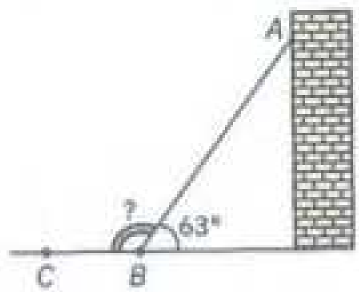
IV.9. Probleme cu caracter practic

1 *Cuminţel* şi *Neastâmpărel* au primit, din partea domnului profesor, la o evaluare, câte o coală de hârtie, pe care era desenat unghiul $\sphericalangle AOB$. *Cuminţel* a aşezat raportorul, ca în figura din stânga şi a afirmat că $\sphericalangle AOB = 70°$, iar *Neastâmpărel* a aşezat raportorul, ca în figura din dreapta şi a afirmat că $\sphericalangle AOB = 130°$.



Cine a răspuns corect? Justificaţi!

2 O scară (*AB*) se sprijină de un perete, ca în figura alăturată.
Ştiind că scara face cu solul un unghi de 63°, calculaţi măsura $\sphericalangle ABC$.



3 Avem o riglă negradată şi un unghi dat, $\sphericalangle DAT$, cu măsura de 55°. Cum procedăm pentru a desena bisectoarea unui unghi cu măsura de 30°? Justificaţi!

Rezolvă problema chiar aici:

Soluţie. Cu ajutorul riglei desenăm pe o coală de hârtie o dreaptă pe care luăm, în ordine, punctele coliniare *B*, *O*, *C* $\Rightarrow \sphericalangle BOC$ este alungit $\Rightarrow \sphericalangle BOC = 180°$ (1).

Cu o foarfecă decupăm unghiul $\sphericalangle DAT$. Marginea tăiată de-a lungul laturii [*AD* a unghiului $\sphericalangle DAT$ o suprapunem peste latura *OB* a unghiului alungit desenat şi trasăm, de-a lungul celeilalte margini, o semidreaptă *OE*. Am desenat, astfel, într-unul din cele două semiplane de frontieră *BC*, unghiul $\sphericalangle BOE$, cu măsura de 55°. Analog, în acelaşi semiplan, vom desena alte două unghiuri $\sphericalangle EOF$ şi $\sphericalangle FOG$, fiecare cu măsura de 55°, astfel încât $\sphericalangle BOG = 55° \cdot 3 = 165°$. (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle GOC = 15°$ (3).

Copiem pe o a doua foaie figura obţinută anterior şi decupăm, cu foarfeca, interiorul unghiului $\sphericalangle GOC$, pe care îl notăm $\sphericalangle COH$. Evident, $\sphericalangle COH = 15°$ (4).

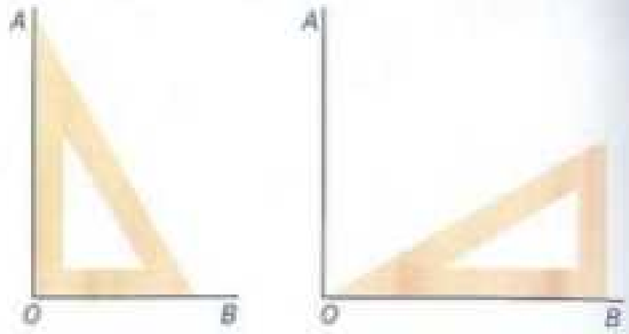
Din (3) şi (4) $\Rightarrow \sphericalangle GOH = 30°$ (5).

Revenim la prima coală și, cu ajutorul conturului obținut anterior, desenăm unghiul $\sphericalangle GOH$, astfel încât $\sphericalangle GOC$ și $\sphericalangle GOH$ să fie adiacente $\Rightarrow OC \subset \text{Int}(\sphericalangle GOH)$.

Din (3) și (4) $\Rightarrow \sphericalangle GOC = \sphericalangle GOH \Rightarrow \sphericalangle GOC \equiv \sphericalangle HOC$ (7).

Din (5) și (7), OC este bisectoarea unghiului GOH, a cărui măsură este egală cu 30°.

4 *Geome* și *Neatentul* au primit, din partea domnului profesor, la o evaluare, câte o coală de hârtie, pe care era desenat unghiul AOB. Ei trebuiau să stabilească, cu ajutorul echerului, dacă unghiul dat este ascuțit, drept sau obtuz. *Geome* a așezat echerul, ca în figura din stânga și a afirmat că unghiul AOB este drept, iar *Neatentul* a așezat echerul, ca în figura din dreapta și a afirmat că unghiul AOB este obtuz.



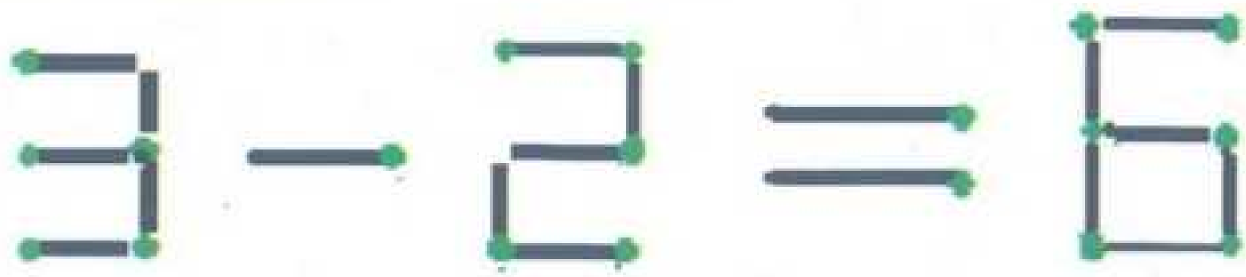
Cine a răspuns corect? Justificați!

5 În clasa voastră, priviți tabla, ușa, fereastra și dați exemple de unghiuri drepte.

6 Desenați un semicerc cu extremitățile în E și, respectiv, F. Pe acest semicerc luați punctele A, B, C și D. Cu ajutorul raportorului, aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle EAF$, $\sphericalangle EBF$, $\sphericalangle ECF$ și $\sphericalangle EDF$. Ce constatați?

7 De câte ori, de la ora 11:55 până la ora 15:10, unghiul format de minutarul și orarul unui ceas mecanic, formează un unghi nul, un unghi alungit, respectiv, un unghi drept?

8 Așezați 19 chibrituri astfel:



a Câte unghiuri alungite sesizați?

b Câte unghiuri drepte au format chibriturile?

c Mutați un singur chibrit pentru a obține egalitate.

d Din configurația inițială luați trei chibrituri pentru a obține egalitate.

e Este posibil să mutați două chibrituri în configurația inițială pentru a obține egalitate?

IV.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1 Care este măsura unghiului dintre acele unui ceas mecanic ce indică ora 12:30?

2 Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare. Fie Ox și Oy bisectoarele acestora. Dacă $\sphericalangle BOy \in \mathbb{N}^*$ și $\sphericalangle COx = p \cdot \sphericalangle BOy$, unde p este un număr prim, aflați p.

3 Considerăm unghiurile $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, ..., $\sphericalangle A_iOA_{i+1}$, ..., $\sphericalangle A_nOA_{n+1}$, în jurul unui punct O, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_2 = 1°$, $\sphericalangle A_2OA_3 = 2°$, $\sphericalangle A_3OA_4 = 3°$, ..., $\sphericalangle A_nOA_{n+1} = n°$ (punctele sunt luate până în momentul când următorul punct l-ar depăși pe A_1). Dacă $\sphericalangle A_{n+1}OA_1 = 9°$ găsiți valoarea lui n.

4 Fie unghiurile $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, ..., $\sphericalangle A_iOA_{i+1}$, $\sphericalangle A_{n+1}OA_1$ în jurul punctului O, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_2 = 4°$, $\sphericalangle A_2OA_3 = 8°$, $\sphericalangle A_3OA_4 = 12°$, ..., $\sphericalangle A_iOA_{i+1} = 4i°$, ..., $\sphericalangle A_{n+1}OA_1 = 4n°$. Aflați numărul natural n pentru care i este maxim posibil și deduceți dacă există laturi ale acestor unghiuri care sunt semidrepte opuse.

5 Fie AOB un unghi cu măsura de 128° și OA_1 bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, OA_2 bisectoarea lui AOA_1, ..., OA_7 bisectoarea unghiului AOA_6. Aflați măsura unghiului format de bisectoarea unghiului A_2OA_5 și bisectoarea unghiului BOA_7.

6 Avem mai multe șabloane sub formă de unghiuri care au măsurile de 11° și de 7°.
Utilizând aceste șabloane putem forma un unghi drept? Justificați!

7 În jurul punctului O se consideră toate unghiurile ce se pot forma cu măsurile de 1°, 3°, 5°, 7°, 9°, 11°, 1°, 3°, 5°, 7°, 9°, 11°, ... în ordinea scrisă. Notăm cu $\sphericalangle O_1$, $\sphericalangle O_2$, $\sphericalangle O_3$, ... unghiurile formate în ordinea precizată.

a Câte unghiuri se pot forma, conform enunțului, în jurul punctului O?

b Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle O_1$ și $\sphericalangle O_4$.

8 Semidreptele OA_1, OA_2, OA_3, ..., OA_n, formează unghiurile $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, $\sphericalangle A_3OA_4$, ..., $\sphericalangle A_nOA_1$, cu măsurile numere naturale, iar n este număr natural impar, cu proprietatea că suma măsurilor oricăror două unghiuri adiacente este aceeași.

a Găsiți un exemplu pentru numărul n. Justificați!

b Demonstrați că $\sphericalangle A_1OA_2 \equiv \sphericalangle A_2OA_3 \equiv \sphericalangle A_3OA_4 \equiv ... \equiv \sphericalangle A_nOA_1$.

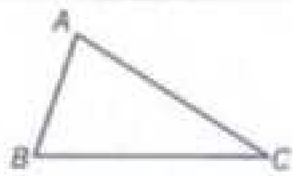
c Dacă OX_1, OX_2, OX_3, ..., OX_n sunt bisectoarele unghiurilor considerate, demonstrați că oricare două bisectoare nu pot forma un unghi alungit.

V

Triunghiul

V.1. Triunghiul. Elementele triunghiului. Clasificarea triunghiurilor

Definiție. Reuniunea segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, unde A, B, C sunt trei puncte necoliniare, se numește triunghi ABC.

Desenăm	Citim	Notăm
	triunghiul ABC	ΔABC

Redactăm cu simboluri: $\left.\begin{array}{l}[AB]\cup[BC]\cup[CA] \\ A, B, C \text{ necoliniare}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC.$

Elementele triunghiului

Orice triunghi are 6 elemente: trei unghiuri și trei laturi. Pentru triunghiul ABC:
- $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ se numesc *unghiurile triunghiului ABC.*
- segmentele $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$ se numesc *laturile triunghiului ABC.*

Observații:

1 Punctele A, B, C se numesc *vârfurile triunghiului ABC.*

2 În triunghiul ABC spunem că: latura $[AB]$ se opune vârfului (unghiului) C și reciproc, vârful C este opus laturii $[AB]$; unghiurile B și C sunt alăturate laturii $[BC]$.

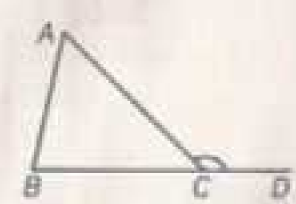
3 *Perimetrul* unui triunghi este egal cu suma lungimilor laturilor sale.

4 Lungimile laturilor triunghiului ABC se notează frecvent astfel:

$$a = BC,\ b = AC \text{ și } c = AB.$$

În acest caz, perimetrul triunghiului ABC este $\mathcal{P} = a + b + c$, *iar semiperimetrul triunghiului* este $p = \frac{\mathcal{P}}{2} = \frac{a+b+c}{2}$.

Definiție. *Unghiul exterior* triunghiului ABC este unghiul adiacent și suplementar unui unghi interior al triunghiului.



Exemplu: Unghiul $\sphericalangle ACD$ este unghi exterior triunghiului ABC, unde $[CD$ este semidreapta opusă semidreptei $[CB$.

Observație. Un triunghi are șase unghiuri exterioare, două câte două fiind opuse la vârf.

Punct interior unui triunghi. Punct exterior unui triunghi

Un punct se numește *punct interior triunghiului* dat, dacă el este interior fiecărui unghi al triunghiului. Un punct din planul unui triunghi care nu este nici pe laturile triunghiului, nici în interiorul său se numește *punct exterior triunghiului.*

Prin *interiorul* unui triunghi, notat Int(Δ), înțelegem mulțimea tuturor punctelor interioare triunghiului dat.

Mulțimea tuturor punctelor exterioare unui triunghi se notează Ext(Δ).

Exemplul 1. Punctul A este punct interior ΔMNP, deoarece A este interior fiecăruia dintre unghiurile $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NPM$ și $\sphericalangle PMN$. Punctul B este punct exterior triunghiului MNP. Scriem $B \in \text{Ext } \Delta MNP$.

Exemplul 2. În figura alăturată, porțiunea colorată reprezintă interiorul triunghiului MNP, care mai poate fi scris și sub forma:
$\text{Int}(\Delta MNP) = \text{Int}(\sphericalangle MNP) \cap \text{Int}(\sphericalangle NPM) \cap \text{Int}(\sphericalangle PMN)$

Clasificarea triunghiurilor

1. Clasificarea în funcție de lungimile laturilor

a Triunghiul *oarecare* (*scalen*) este triunghiul în care lungimile laturilor, exprimate în aceeași unitate de măsură, au valori diferite.

b Triunghiul *isoscel* este triunghiul care are două laturi congruente. Latura necongruentă se numește *bază*.

c Triunghiul *echilateral* este triunghiul care are toate laturile congruente.

Exemplu: Triunghiul ABC din figura 1, are $a \neq b \neq c \neq a$, deci este scalen.
Triunghiul ABC din figura 2 este isoscel, deoarece $b = c \neq a$.
Triunghiul ABC din figura 3 este echilateral, deoarece $a = b = c$.

Figura 1

Figura 2

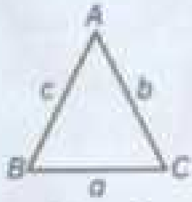


Figura 3

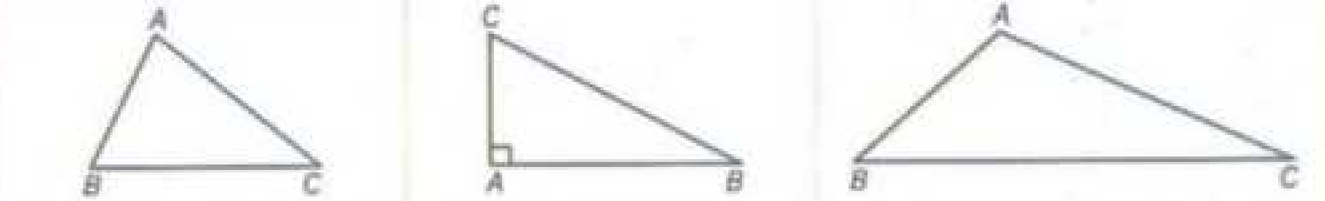
2. Clasificarea în funcție de măsurile unghiurilor

a Triunghiul *ascuțitunghic* este triunghiul care are toate unghiurile ascuțite.

b Triunghiul *dreptunghic* este triunghiul care are un unghi drept.

Într-un triunghi dreptunghic, laturile alăturate unghiului drept se numesc catete, iar latura opusă unghiului drept se numește ipotenuză.

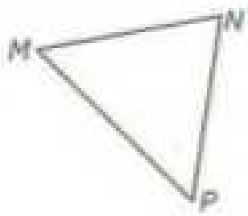
c Triunghiul *obtuzunghic* este triunghiul care are un unghi obtuz.

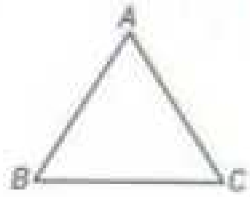


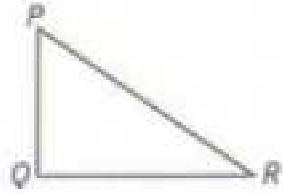
triunghi ascuțitunghic | triunghi dreptunghic | triunghi obtuzunghic

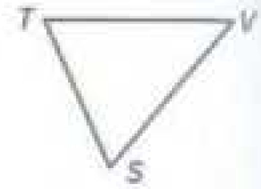
Exersare

1 Priviți figurile de mai jos și completați tabelul după modelul dat:

a


b


c


d


	a	b	c	d
triunghi	ΔMNP			
laturi	$[MN]$, $[NP]$, $[PM]$			
unghiuri	$\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NPM$, $\sphericalangle PMN$			
vârfuri	M, N, P			

2 Pentru triunghiul DEF, din figura alăturată, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a latura opusă unghiului D este $[EF]$;

b unghiul opus laturii $[DE]$ este $\sphericalangle F$;

c latura opusă unghiului E este $[DF]$;

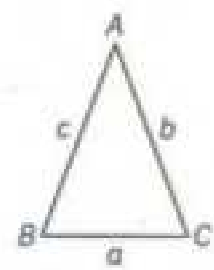
d unghiul opus laturii $[EF]$ este $\sphericalangle D$;

e unghiul opus laturii $[DF]$ este $\sphericalangle E$;

f $\text{Int}(\Delta DEF) \subset \text{Int}(\Delta DEF)$;

g unghiurile alăturate laturii $[EF]$ sunt $\sphericalangle E$ și $\sphericalangle F$.

3 În figura alăturată, ΔABC este isoscel de bază $[BC]$.
Completați pentru a obține propoziții adevărate:



a Unghiul opus bazei este ....

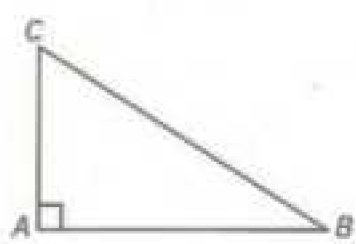
b Unghiurile alăturate bazei sunt ...... și ....

c Laturile congruente sunt ...... și ....

4 Indicați vârful și apoi baza triunghiului isoscel DEF, știind că:

a $[DE] \equiv [DF]$; b $DE = EF$; c $[FD] \equiv [FE]$.

5 În figura alăturată, ΔABC este dreptunghic, cu vârful unghiului drept în A.
Completați pentru a obține propoziții adevărate:



a Ipotenuza triunghiului este ....

b Catetele triunghiului sunt ...... și ....

c Cateta opusă unghiului $\sphericalangle C$ este ....

d Unghiurile alăturate ipotenuzei sunt ...... și ....

e Unghiul opus ipotenuzei este ....

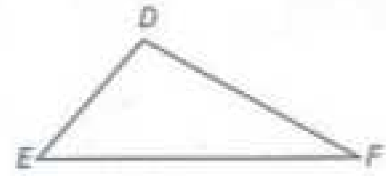
6 Catetele triunghiului dreptunghic ABC sunt $[AB]$ și $[BC]$. Indicați:

a ipotenuza; b unghiul drept; c unghiul opus catetei $[AB]$.

7 Dacă în ΔABC, $m(\sphericalangle ABC) = 120°$, iar $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$ sunt ascuțite, atunci:

a ΔABC este ...... ; b laturile unghiului obtuz sunt ...... și ....

8 În figura alăturată, $m(\sphericalangle EDF) > 90°$. Completați pentru a obține propoziții adevărate:



a Unghiul $\sphericalangle EDF$ este unghi ....

b Latura opusă unghiului obtuz este ....

c Triunghiul EDF este triunghi ....

9 Stabiliți natura triunghiului ABC știind că:

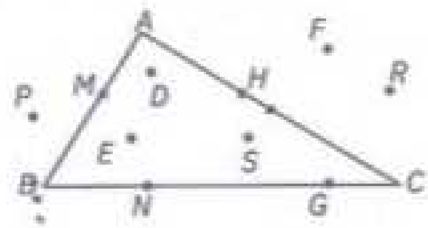
a $m(\sphericalangle A) = 100°$; b $AB = 12$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 11$ cm;

c $AB = AC \neq BC$; d $m(\sphericalangle A) = 70°$, $m(\sphericalangle B) = 50°$, $m(\sphericalangle C) = 60°$;

e $m(\sphericalangle B) = 90°$; f $AB = 1{,}7$ dm, $BC = 170$ mm, $AC = 17$ cm.

Consolidare

10 Priviți alăturată și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



a $E \in \text{Int } \Delta ABC$; b $P \in \text{Ext } \Delta ABC$;

c $M \in \Delta ABC$; d $\{S, R\} \subset \text{Int } \Delta ABC$;

e A este opus laturii $[AC]$; f $\{A, H, N, G, B\} \subset \Delta ABC$;

g $[AB]$ și $[BC]$ sunt laturi alăturate unghiului B.

11 Desenați un triunghi ΔABC și fixați punctele:

a M și N în interiorul triunghiului; b D, E, F situate pe triunghi;

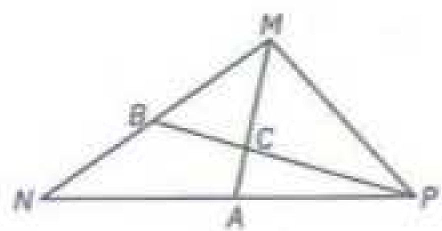
b L, P, S, T situate în exteriorul triunghiului.

12 Calculați perimetrul triunghiului care are lungimile laturilor de:

a 18 cm, 16 cm, 20 cm; b 4,3 dm; 3,7 dm; 4 dm.

13 Perimetrul unui triunghi echilateral este de 21 cm. Care este lungimea unei laturi a triunghiului?

14 Priviți figura alăturată și scrieți toate triunghiurile din figură care îndeplinesc condiția respectivă:



a au ca latură comună pe $[MP]$;

b au ca unghi comun, $\sphericalangle CPA$;

c au ca unghi exterior unghiul $\sphericalangle CBN$;

d au ca vârf comun pe N.

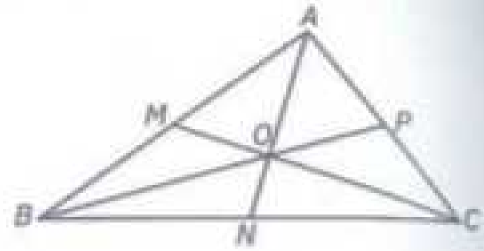
15 Desenați un triunghi ΔMNP și un unghi exterior $\sphericalangle NMR$. Dacă măsura unghiului exterior $\sphericalangle NMR$ este de 117°, câte grade are unghiul $\sphericalangle NMP$?

16 Un triunghi isoscel are baza cu lungimea de 12 cm și perimetrul de 32 cm. Calculați lungimile celorlalte laturi ale triunghiului.

17 Perimetrul unui triunghi este de 30 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea se exprimă prin trei numere pare, consecutive.

Aprofundare

18 Priviți figura de mai jos și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



a $[AO] \cup [OP] \cup [PA] = \Delta AOP$;

b $\Delta ABC \cap [BP] = [BP]$;

c $\Delta ABC \cap AC = \{A, C\}$;

d $\Delta ABC \cap [AC] = [AC]$;

e $\Delta ABC \cap [BP] = \{B, P\}$;

f $\text{Int}(\Delta ABC) \cap [BP] = [BP]$; **g** $\text{Int}(\Delta ABC) \cap [BP] = (BP)$;

h $\text{Ext}(\Delta ABO) \cap \{O, C, A\} = \{C\}$; **i** $\text{Ext}(\Delta ABO) \cap \Delta AOC = (AC] \cup (CO)$;

j $\sphericalangle AOP$ este unghi exterior al triunghiului ΔAOB;

k $\sphericalangle OAP$ este unghi exterior al triunghiului ΔAOB.

19 Perimetrul unui triunghi este de 39 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea se exprimă prin trei numere impare, consecutive.

20 Se știe că adunând câte două dintre lungimile laturilor unui triunghi se obțin 25 cm, 27 cm și, respectiv, 28 cm. Determinați:

a perimetrul triunghiului; **b** lungimile laturilor triunghiului.

21 Perimetrul unui triunghi este de 35 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului, știind că a doua este cu 4 cm mai mare decât prima, iar a treia este cu 3 cm mai mare decât a doua.

Probleme de șapte stele

22 Perimetrul unui triunghi isoscel este de 26 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului, știind că una din ele are lungimea egală cu 8 cm.

23 Se consideră 6 puncte, din care oricare trei sunt necoliniare. Se colorează fiecare segment cu roșu sau albastru. Arătați că oricum le-am colora, există cel puțin un triunghi de aceeași culoare.

Demonstrație

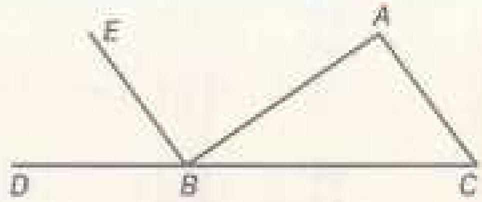
Fie *A, B, C, D, E, F* cele 6 puncte, astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Atunci sunt cinci segmente cu o extremitate în *A*: $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[AE]$ și $[AF]$.

Aplicând *principiul cutiei*, oricum le-am colora, cu roșu sau albastru, există cel puțin trei segmente de aceeași culoare. Fără a restrânge generalitatea problemei, presupunem că $[AB]$, $[AC]$ și $[AD]$ au culoarea roșie. Studiem ce culoare au laturile triunghiului *BCD*:

- dacă una din laturile acestui triunghi are culoarea roșie, atunci triunghiul determinat de acea latură și punctul *A* este roșu.
- dacă niciuna din laturile acestui triunghi nu are culoarea roșie, atunci triunghiul *BCD* este albastru.

Deci există cel puțin un triunghi de aceeași culoare.

V.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi



Teoremă. În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor este egală cu 180°.

Demonstrație. În ΔABC, prelungim latura $[BC]$, dincolo de B, cu $[BD]$ și construim $BE \parallel AC$.

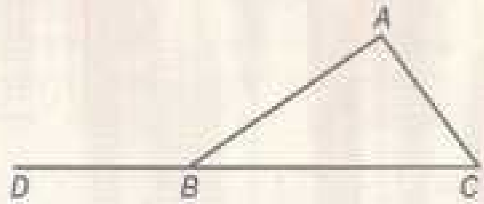
$$\left.\begin{array}{l} BE \parallel AC \\ DC \text{ secantă} \\ \sphericalangle DBE \text{ și } \sphericalangle C \text{ sunt unghiuri corespondente} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle C.$$

$$\left.\begin{array}{l} BE \parallel AC \\ AB \text{ secantă} \\ \sphericalangle ABE \text{ și } \sphericalangle A \text{ sunt unghiuri alterne interne} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle A.$$

Atunci $m(\sphericalangle DBE) + m(\sphericalangle EBA) + m(\sphericalangle ABC) = 180° \Rightarrow m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle ABC) = 180°$.

Consecințe

1 Într-un triunghi dreptunghic unghiurile ascuțite sunt complementare.
2 Toate unghiurile triunghiurilor echilaterale au măsura de 60°.



Măsura unghiului exterior unui triunghi. În demonstrația de mai sus, $\sphericalangle ABD$ este unghi exterior triunghiului ABC. Atunci:
$m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle EBA) + m(\sphericalangle DBE) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)$.

Teorema unghiului exterior. Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente lui.

Redactăm cu simboluri:
$\sphericalangle ABD$ este unghi exterior $\Delta ABC \Rightarrow m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)$.

Problemă. Fie triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle B) = 70°$. Știind că $m(\sphericalangle ACD) = 130°$, iar $\sphericalangle ACD$ este unghi exterior triunghiului ABC, determinați $m(\sphericalangle A)$ și $m(\sphericalangle C)$.

Demonstrație. Unghiurile ACB și ACD sunt suplementare și $m(\sphericalangle ACD) = 130° \Rightarrow m(\sphericalangle ACB) = 50°$.
Din $(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle ACB) = 180°$, rezultă $m(\sphericalangle A) = 60°$.

Exersare

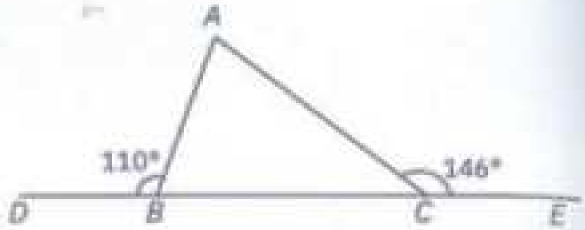
1 Determinați măsura celui de-al treilea unghi al triunghiului ABC cunoscând că:
a $m(\sphericalangle A) = 35°$ și $m(\sphericalangle B) = 75°$;
b $m(\sphericalangle A) = 40°$ și $m(\sphericalangle C) = 65°$;
c $m(\sphericalangle B) = 25°33'$ și $m(\sphericalangle C) = 81°27'$.

2 Într-un triunghi isoscel unghiurile congruente au măsurile de 70°. Care este măsura celui de-al treilea unghi al triunghiului?

3 Un triunghi dreptunghic are un unghi cu măsura de 36°. Care este măsura celuilalt unghi ascuțit al triunghiului?

4 Un triunghi isoscel are un unghi cu măsura de 104°. Determinați măsura celorlalte două unghiuri ale triunghiului.

5 În figura alăturată unghiurile exterioare triunghiului ABC în vârfurile B și C au măsurile de 110°, respectiv 146°. Determinați măsura unghiului A.



6 Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC cunoscând că

$m(\sphericalangle A) = 2 \cdot m(\sphericalangle B)$ și $m(\sphericalangle C) - m(\sphericalangle B) = 48°$.

7 În triunghiul ABC măsura unghiului A este de 56°, iar măsura unghiului exterior triunghiului cu vârful în C are măsura de 139°. Să se determine $m(\sphericalangle B)$.

8 În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B) = 68°$, iar bisectoarea unghiului A intersectează în D latura $[BC]$. Știind că $m(\sphericalangle ADB) = 85°$, să se determine $m(\sphericalangle C)$ și $m(\sphericalangle A)$.

9 Calculați măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic isoscel.

10 Măsurile unghiurilor unui triunghi se exprimă prin trei numere naturale consecutive. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului.

Consolidare

11 Determinați măsura celui de-al treilea unghi al triunghiului ABC, cunoscând:

a $m(\sphericalangle A) = 42°10'$ și $m(\sphericalangle B) = 57°50'$; b $m(\sphericalangle A) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle C) = 20°20'$;

c $m(\sphericalangle B) = 37°41'$ și $m(\sphericalangle B) = 68°33'$.

12 Un triunghi are măsura unui unghi de 84° și măsura unui unghi exterior egală cu 135°. Determinați măsurile celorlalte două unghiuri ale triunghiului.

13 Determinați măsura unui unghi obtuz format de două bisectoare ale unui triunghi echilateral.

14 Calculați măsurile unghiurilor unui triunghi știind că sunt direct proporționale cu numerele 1, 3 și 5.

15 Fie triunghiul ABC și $D \in [BC]$ astfel încât $[AD$ este bisectoarea unghiului A. Cunoscând $m(\sphericalangle B) = 60°$ și $m(\sphericalangle ADC) = 100°$, calculați $m(\sphericalangle C)$ și $m(\sphericalangle BAC)$.

16 Pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC se iau punctele D și E astfel încât $[AD]$ să fie înălțime a triunghiului, iar $[AE$ bisectoarea unghiului BAC. Cunoscând că $m(\sphericalangle B) = 80°$ și $m(\sphericalangle DAE) = 30°$, demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

17 Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt direct proporționale cu numerele 5 și 13. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului.

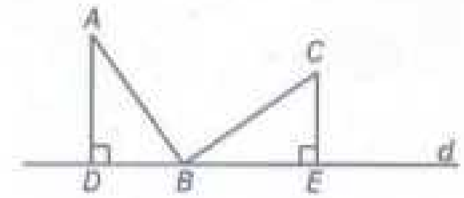
18 Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt a, b și c. Demonstrați că dacă $a = b + c$ atunci triunghiul este dreptunghic.

19 Calculați măsurile unui triunghi dreptunghic, știind că modulul diferenței măsurilor unghiurilor ascuțite este de 14°.

20 În figura alăturată, unghiul ACD este unghi exterior triunghiului ABC. Cunoscând $m(\sphericalangle A) = x + 15°$, $m(\sphericalangle B) = 2x$, $m(\sphericalangle ACD) = 4x - 25°$, să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Aprofundare

21 Fie punctele A, $C \notin d$ și $B \in d$ și $AD \perp d$, $D \in d$, $E \in d$, cu $CE \perp d$. Știind că $AD = BE$ și $DB = CE$, să se determine măsura unghiului CAB.



22 Într-un triunghi măsura unui unghi este cu 21° mai mică decât măsura altui unghi al triunghiului și cu 6° mai mare decât măsura celui de-al treilea unghi al triunghiului. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului.

23 Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că $m(\sphericalangle A) = \frac{6}{11} m(\sphericalangle B) = \frac{6}{19} m(\sphericalangle C)$.

24 Bisectoarele unghiurilor B și C ale triunghiului ABC se intersectează în punctul I, iar bisectoarele unghiurilor IBC și ICB se intersectează în M. Dacă $m(\sphericalangle BMC) = 150°$, să se calculeze măsura unghiului A.

25 În exteriorul triunghiului dreptunghic isoscel ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele MAB și NAC cu ipotenuzele $[AB]$, respectiv $[AC]$. Să se demonstreze că $BM \parallel CN$ și că M, A, N sunt coliniare.

26 Fie I intersecția bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC.
Calculați suma $m(\sphericalangle IAB) + m(\sphericalangle IBC) + m(\sphericalangle ICA)$.

27 Fie I intersecția bisectoarelor unghiurilor B și C ale triunghiului ABC și $CD \perp BI$, $D \in BI$.
Demonstrați că $m(\sphericalangle A) = 90°$ dacă și numai dacă $[ID] \equiv [DC]$.

28 Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, iar $[AM$ și $[AN$ sunt bisectoarele unghiurilor BAD și respectiv, DAC, unde $M, N \in BC$. Demonstrați că triunghiurile ABN și AMC sunt isoscele.

29 Fie $[BI$ și $[CI$ bisectoare în triunghiul ABC. Se prelungesc laturile $[AB]$ și $[AC]$ cu segmentele $[BE] \equiv [BC]$, respectiv, $[CF] \equiv [BC]$.

a Să se demonstreze că $IB \parallel CE$ și $IC \parallel BF$.

b Să se demonstreze că dacă $[AB] \equiv [AC]$ și $m(\sphericalangle A) = 80°$, atunci $[CB$ este bisectoarea unghiului ICE.

30 Un triunghi are măsurile unghiurilor invers proporționale cu numerele 0,25, 0,1(6), 0,125. Să se determine măsura unghiului obtuz format de bisectoarele celor mai mici unghiuri ale triunghiului.

Probleme de șapte stele

31 Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră punctele M și D, astfel încât $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle DAC$. Dacă $m(\sphericalangle C) = 2m(\sphericalangle B)$ și $[MB] \equiv [MA]$, să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC și să se arate că $[CD] \equiv [DM]$.

32 Măsurile unghiurilor A, B, C ale triunghiului ABC sunt respectiv proporționale cu 5, 6, 7. Fie $AD \perp BC$ și $[CE$ bisectoare în $\triangle ABC$, cu $D \in BC$ și $E \in AD$.
Determinați $m(\sphericalangle DEC)$.

33 Arătați că bisectoarele de la baza unui triunghi isoscel nu pot fi perpendiculare.

34 Se consideră triunghiul ABC, cu înălțimea $[AD]$ și bisectoarea interioară $[BE]$, unde $D \in BC$ și $E \in AC$. Dreptele AD și BE se intersectează în H, iar $\triangle AHB$ și $\triangle ADC$ sunt isoscele. Calculați măsura unghiurilor triunghiului ABC.

V.3. Construcția triunghiurilor

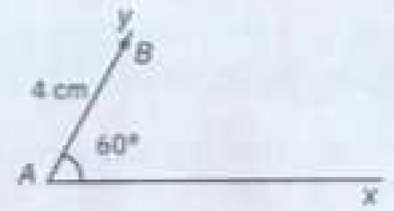
Orice triunghi are șase elemente măsurabile: trei laturi și trei unghiuri. Pentru a construi un triunghi este suficient să se cunoască trei elemente, dintre care cel puțin lungimea unei laturi.

Construcția unui triunghi când se cunosc lungimile a două laturi și măsura unghiului dintre ele (L.U.L.). Se construiește un unghi cu măsura dată și apoi, începând din vârful acestuia, pe laturile sale, se construiesc segmente congruente cu cele două laturi date și se unesc punctele obținute.

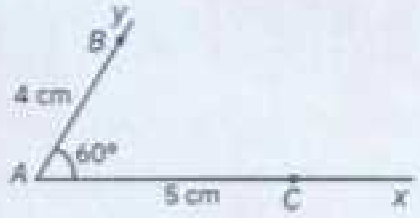
Exemplu: Construcția unui triunghi ΔABC în care $AB = 4$ cm, $m(\sphericalangle A) = 60°$ și $AC = 5$ cm se face în felul următor:

P_1: Construim unghiul $\sphericalangle xAy$ cu $m(\sphericalangle xAy) = 60°$.

P_2: Măsurăm pe $[Ay$ segmentul $[AB]$ astfel încât $AB = 4$ cm.



P_3: Măsurăm pe $[Ax$ segmentul $[AC]$ astfel ca $AC = 5$ cm.

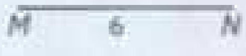


P_4: Construim $[BC]$, unind B cu C și ștergem $[By$ și $[Cx$.

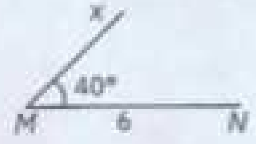
Construcția unui triunghi când se cunosc măsurile a două unghiuri și lungimea laturii cuprinse între ele (U.L.U.). Se construiește un segment cu măsura egală cu lungimea laturii date. În același semiplan (determinat de dreapta suport a segmentului, se construiesc la capetele segmentului unghiurile de măsură dată. Laturile unghiurilor situate în semiplanul considerat se intersectează în al treilea vârf al triunghiului.

Exemplu: Construcția unui triunghi ΔMNP în care $MN = 6$ cm, $m(\sphericalangle MNP) = 40°$ și $m(\sphericalangle N) = 60°$ se face în felul următor:

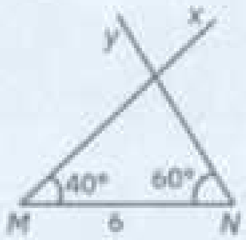
P_1: Construim $[MN]$, cu $MN = 6$ cm și alegem semiplanul superior:

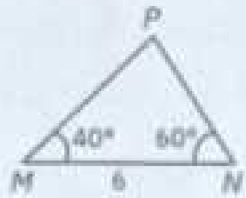


P_2: Construim unghiul $\sphericalangle NMx$ cu $m(\sphericalangle NMx) = 40°$



P_3: Construim unghiul $\sphericalangle MNy$ cu $m(\sphericalangle MNy) = 60°$. P_4: Notăm $\{P\} = [Mx \cap [Ny$ și ștergem $[Px$ și $[Py$.





Observație. Dacă semidreptele $[Mx$ și $[Ny$ nu se intersectează, de exemplu dacă $m(\sphericalangle M) = 70°$ și $m(\sphericalangle N) = 130°$, atunci nu există un triunghi care să aibă ca elemente datele din ipoteza problemei noastre.

Construcția unui triunghi când se cunosc lungimile laturilor sale (L.L.L.)

Se construiește un segment cu măsura egală cu lungimea unei laturi (din cele trei date, apoi cu centrul în capetele segmentului se construiesc cercuri cu razele egale cu lungimile celorlalte două laturi date. Intersecția, într-un semiplan (determinat de dreapta suport a segmentului desenat la început) a celor două cercuri este al treilea vârf al triunghiului căutat.

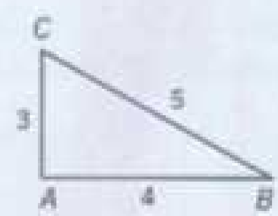
Exemplu: Construcția unui triunghi ΔABC în care $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm și $BC = 5$ cm se face în felul următor:

P_1: Construim $[AB]$ cu $AB = 4$ cm, și alegem un semiplanul determinat de dreapta AB:

P_2: Luăm 3 cm în deschiderea compasului, înțepăm în A și trasăm un arc de cerc deasupra dreptei AB:

P_3: Luăm 5 cm în deschiderea compasului, înțepăm în B și trasăm un arc de cerc deasupra dreptei AB:

P_4: Notăm cu C intersecția celor două arce, unim C cu A și C cu B și ștergem arcele.



Observații:

1 Dacă trasăm arcele de cerc și deasupra și sub dreapta AB se obțin două triunghiuri ABC și ABD care îndeplinesc cerințele problemei.

2 În funcție de lungimile laturilor este posibil ca arcele să nu se intersecteze. În acest caz, că nu există un triunghi care să aibă ca elemente datele din ipoteza problemei noastre.

Exersare

1 Construiți triunghiul ΔABC cu $AB = 6$ cm, $m(\sphericalangle BAC) = 80°$ și $AC = 7$ cm.

2 Construiți triunghiul ΔMNP cu $m(\sphericalangle M) = 80°$, $MN = 6$ cm și $m(\sphericalangle N) = 50°$.

3 Cu segmentele $DE = 5$ cm, $EF = 7$ cm și $DF = 8$ cm, construiți triunghiul DEF.

4 Construiți triunghiul dreptunghic ABC, în care $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AB = 7$ cm și $m(\sphericalangle B) = 30°$.

5 Construiți triunghiul obtuzunghic MNP, știind că $m(\sphericalangle M) = 130°$, $MN = 4$ cm și $MP = 6$ cm.

6 Construiți triunghiul ABC având lungimile laturilor $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm și $AC = 6$ cm.

7 Construiți triunghiul echilateral PRS știind că $PR = 5$ cm.

8 Construiți triunghiul isoscel MNP în care $MN = NP = 8$ cm și $m(\sphericalangle N) = 50°$.

9 Construiți triunghiul ABC în care $AB = 7$ cm, $m(\sphericalangle B) = 80°$, $BC = 5$ cm.

Consolidare

10 Construiți un triunghi echilateral care are perimetrul egal cu 18 cm.

11 Cu dimensiunile $AB = 5$ cm, $BC = 13$ cm și $AC = 12$ cm construiți triunghiul ABC. Măsurați unghiurile triunghiului și stabiliți ce fel de triunghi este (în clasificarea după măsura unghiurilor).

12 Construiți triunghiul ΔMNP în care $MN = 0{,}05$ m, $MP = 0{,}6$ dm și $PN = 8$ cm.

13 Construiți triunghiul ΔABC în care $BC = 6$ cm și $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 50°$. Măsurați laturile $[AB]$ și $[AC]$ și stabiliți tipul triunghiul ABC.

14 Știind că $MN = 4$ cm, $NP = 5$ cm și $MN = 4$ cm, $NP = 5$ cm și $m(\sphericalangle N) = 130°$, construiți triunghiul MNP.

15 Construiți triunghiul isoscel DEF în care $DE = DF = 7$ cm și $m(\sphericalangle D) = 30°$.

16 Construiți triunghiul ABC cu $AB = AC = 5$ cm și perimetrul egal cu 16 cm.

17 Construiți triunghiul echilateral cu perimetrul de 0,24 m. Măsurați unghiurile triunghiului și indicați măsura fiecărui unghi. Calculați măsura unui unghi exterior triunghiului.

18 Adunând lungimile a câte două laturi ale unui triunghi se obțin dimensiunile 15 cm, 16 cm, 17 cm. Construiți triunghiul.

19 Construiți un triunghi ΔABC știind că $BC = 9$ cm, iar unghiurile alăturate laturii $[BC]$ au suma măsurilor egală cu 130° și diferența măsurilor egală cu 30°.

20 Construiți triunghiul MNP în care $MN = 8$ cm, $NP = 0{,}5$ dm, iar complementul unghiului N are măsura de 50°.

21 Știind că $AB = 4$ cm și $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 60°$, construiți triunghiul ABC, măsurați lungimile laturilor $[AC]$ și $[BC]$ și determinați perimetrul triunghiului.

22 Construiți triunghiul MNP în care $MN = 8$ cm, $m(\sphericalangle M) = 60°$ și $m(\sphericalangle N) = 30°$, măsurați unghiul P și stabiliți ce tip de triunghi este: ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic.

23 Construiți triunghiul ΔABC știind că $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AB = 6$ cm și $BC = 10$ cm. Măsurați lungimea laturii $[AC]$.

24 Construiți triunghiul MNP, știind că $MN = 6$ cm, $m(\sphericalangle M) = 50°$ și măsura unghiului exterior triunghiului cu vârful în N este de $120°$.

Aprofundare

25 Folosind rigla gradată și compasul arătați că nu există un triunghi cu lungimile laturilor de 8 cm, 4 cm și 3 cm.

26 Construiți triunghiul isoscel ABC cu $AB = 5$ cm și $BC = 6$ cm.

27 Construiți un triunghi ABC dreptunghic în A, cu $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm. Fie D simetricul punctului B față de A. Prin măsurare, stabiliți dacă:

a $CB = CD$; b $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ACD)$.

28 Construiți triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 3$ cm și $m(\sphericalangle BAC) = 60°$, iar apoi construiți punctele D și E, simetricele punctelor A și respectiv, B față de C. Prin măsurare, comparați perimetrele triunghiurilor ABC și DEC.

Probleme de șapte stele

29 Construiți un triunghi dreptunghic ABC, de ipotenuză $[BC]$, cu $m(\sphericalangle C) = 30°$. Măsurați lungimile catetei $[AB]$ și a ipotenuzei $[BC]$ și stabiliți dacă $AB = \frac{1}{2}BC$.

30 Construiți un triunghi dreptunghic ABC, de ipotenuză $[BC]$, cu $BC = 6$ cm. Fixați punctul M, mijlocul ipotenuzei și trasați segmentul $[AM]$. Prin măsurare, verificați dacă $AM = \frac{1}{2}BC$.

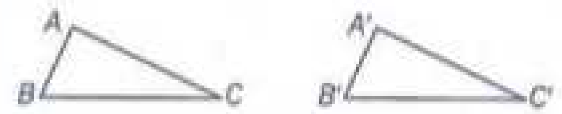
31 Construiți un triunghi echilateral ABC. Fie D simetricul lui B față de C. Prin măsurare, verificați dacă triunghiul ABD este dreptunghic.

32 Construiți un triunghi ABC, cu $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm și $BC = 5$ cm.
Măsurați unghiul BAC și, dacă ați obținut $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, atunci meritați felicitări!

V.4. Congruența triunghiurilor

Congruența triunghiurilor. În general, despre două figuri geometrice plane, se spune că sunt congruente, dacă prin suprapunere acestea coincid. Același lucru se poate spune și despre două triunghiuri: dacă putem așeza unul din cele două triunghiuri pe celălalt, astfel încât să coincidă, vom spune că cele două triunghiuri sunt congruente.

Definiție. Triunghiurile care au elementele corespunzătoare, congruente două câte două, se numesc *triunghiuri congruente.*

Desenăm	Citim	Notăm
	triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $\Delta A'B'C'$	$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

Redactăm cu simboluri:

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} [AB]\equiv[A'B']; [BC]\equiv[B'C']; [AC]\equiv[A'C'] \\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'; \sphericalangle B \equiv B'; \sphericalangle C \equiv C'; \end{cases}$$

Observații:

1 Elementele care se corespund se mai numesc și elemente omoloage.

2 În notația triunghiurilor congruente, ordinea literelor contează! Astfel, dacă în loc de $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, scriem $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$, atunci au loc congruențele:

$$[AB] \equiv [A'C']; [BC] \equiv [C'B']; [AC] \equiv [A'B'] \text{ și } \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'; \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C'; \sphericalangle C \equiv \sphericalangle B'.$$

Proprietățile relației de congruență

1 **Reflexivitatea:** Oricare ar fi triunghiul ΔABC avem $\Delta ABC \equiv \Delta ABC$.

2 **Simetria:** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ atunci $\Delta MNP \equiv \Delta ABC$.

3 **Tranzitivitatea:** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și $\Delta MNP \equiv \Delta DEF$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

Cazurile de congruență. Pentru a arăta că două triunghiuri date sunt congruente este suficient să verificăm trei congruențe, cu condițiile: să existe cel puțin o congruență de laturi, iar elementele să aibă o anume poziție.

1. Congruența latură-unghi-latură (L.U.L.)

Dacă două laturi și unghiul cuprins între ele dintr-un triunghi sunt congruente, respectiv, cu elementele corespunzătoare dintr-un alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

$$\left.\begin{array}{l} [AB]\equiv[MN] \\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle M \\ [AC]\equiv[MP] \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

2. Congruența unghi-latură-unghi (U.L.U.)

Dacă o latură și unghiurile alăturate acesteia dintr-un triunghi sunt congruente, respectiv, cu elementele corespunzătoare dintr-un alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M\\ [AB] \equiv [MN]\\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

3. Congruența latură-latură-latură (L.L.L.)

Dacă toate cele trei laturi ale unui triunghi sunt congruente, respectiv, cu cele trei laturi dintr-un alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [MN]\\ [BC] \equiv [NP]\\ [AC] \equiv [MP]\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

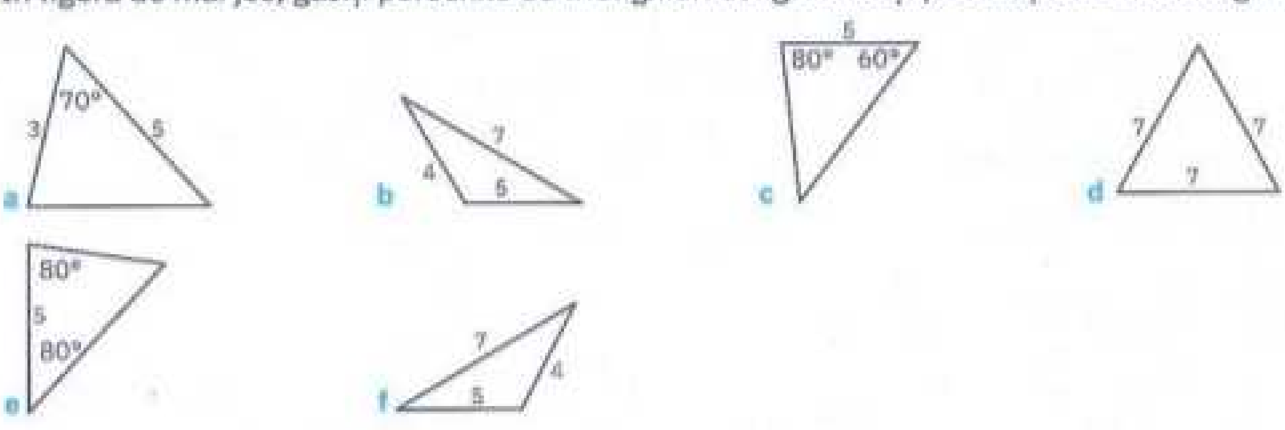
4. Congruența latură-unghi-unghi (L.U.U.) (Extindere)

Dacă o latură și două unghiuri dintr-un triunghi sunt congruente, respectiv, cu elementele corespunzătoare dintr-un alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

$$\left.\begin{array}{l}[BC] \equiv [NP]\\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle M\\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

Exersare

1 În figura de mai jos, găsiți perechile de triunghiuri congruente și precizați cazul de congruență.



2 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $[AB] \equiv [DE]$; b $[AC] \equiv [EF]$; c $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$; d $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle E$.

3 Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, scrieți congruența elementelor omoloage.

Rezolvă problema chiar aici:

4 Completați spațiile punctate, astfel încât să obțineți propoziții adevărate și precizați cazul de congruență al celor două triunghiuri:

a Dacă $[AB] \equiv [A'B']$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ și $[BC] \equiv [B'C']$, atunci $\Delta ...... \equiv \Delta ......$.

b Dacă $[AB] \equiv [MN]$, $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle PMN$ și $\sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle PNM$, atunci $\Delta ...... \equiv \Delta ......$.

c Dacă $[DE] \equiv [MN]$; $[EF] \equiv [NP]$ și $[DF] \equiv [MP]$, atunci $\Delta ...... \equiv \Delta ......$.

d Dacă $[MA] \equiv [GE]$, $\sphericalangle AMT \equiv \sphericalangle EGO$, $\sphericalangle MTA \equiv \sphericalangle GOE$, atunci $\Delta ...... \equiv \Delta ......$.

5 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, $AB = 3$ cm, $m(\sphericalangle B') = 110°$ și $A'C' = 5$ cm. Determinați $m(\sphericalangle B)$ și lungimile segmentelor $[A'B']$ și $[AC]$.

6 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. Dacă $AB = 3$ cm, $m(\sphericalangle A) = 35°$, iar $EF = 4$ cm, $m(\sphericalangle F) = 70°$, calculați BC și $m(\sphericalangle C)$.

7 Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta MRP$, $m(\sphericalangle B) = 73°$, $m(\sphericalangle C) = 29°$, $AB = 3{,}5$ cm și $MP = 5$ cm. Calculați MR, AC, $m(\sphericalangle R)$ și $m(\sphericalangle P)$.

8 Se consideră triunghiurile ΔABC și ΔDEF astfel încât $[AB] \equiv [DE]$, $[BC] \equiv [EF]$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$. Stabiliți dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

9 Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, $m(\sphericalangle A') = 72°$ și $m(\sphericalangle C') = 36°$, calculați suma $S = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)$.

10 Se cunosc congruențele $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, $\Delta DEF \equiv \Delta MNP$, $\Delta MNP \equiv \Delta RTS$.
Ce putem spune despre ΔABC și ΔRTS?

Consolidare

11 Din congruența $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ rezultă alte congruențe, precum $\Delta ACB \equiv \Delta MPN$. Scrieți toate celelalte congruențe posibile.

12 În figura de mai jos, segmentele $[AD]$ și $[CE]$ au același mijloc, punctul B. Arătați că:

a $\Delta ABC \equiv \Delta DBE$; b $\Delta ABE \equiv \Delta DBE$.

Demonstrație. a Din ipoteză, B este mijlocul segmentului $[AD] \Rightarrow$ $[AB] \equiv [DB]$ (1).
$\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DBE$ sunt unghiuri opuse la vârf $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DBE$ (2).
Din ipoteză B este mijlocul segmentului $[CE]$, rezultă că $[BC] \equiv [BE]$ (3).
Din (1), (2) și (3), conform cazului de congruență L.U.L., rezultă $\Delta ABC \equiv \Delta DBE$.

13 În triunghiul isoscel ΔABC, cu $[AB] \equiv [AC]$, notăm cu M mijlocul bazei $[BC]$. Arătați că $\Delta ABM \equiv \Delta ACM$.

14 Fie O mijlocul segmentului $[AB]$. Punctele M și N sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB astfel ca $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OBN$ și $AM = BN$. Arătați că $\Delta OAM \equiv \Delta OBN$.

15 Se consideră punctele coliniare A, B, C, în această ordine, iar punctele D și E sunt sunt situate de-o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât $[AD] \equiv [AE]$ și $[BD] \equiv [BE]$. Arătați că:

a $\Delta ABD \equiv \Delta ABE$; b $\Delta ACD \equiv \Delta ACE$.

16 Pe latura $[Ox$ a unghiului xOy se iau punctele A și B, iar pe latura $[Oy$ punctele C și D, astfel încât $[OA] \equiv [OC]$ și $[OB] \equiv [OD]$. Arătați că $\Delta AOD \equiv \Delta COB$.

17 Stabiliți natura triunghiului ΔABC știind că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

18 Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $\Delta MNP \equiv \Delta BCA$ și $AB = 10$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

19 Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, iar punctele D și Q sunt mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[NP]$, arătați că $\Delta ABD \equiv \Delta MNQ$.

Aprofundare

20 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. Fie $M \in (AC$ și $M' \in (A'C')$ astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle A'B'M'$. Arătați că $\Delta ABM \equiv \Delta A'B'M'$.

21 Fie triunghiul ΔABC, cu $[AB] \equiv [AC]$, iar punctele P, R sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Arătați că $\Delta ARB \equiv \Delta APC$.

22 Fie triunghiul ΔABC, cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, iar punctele P, R se află pe laturile $[AB]$ respectiv $[AC]$ astfel încât $\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle CRB$. Arătați că $\Delta PBC \equiv \Delta RCB$.

23 În triunghiul ΔABC cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, fie punctul $D \in (BC$ astfel încât $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC. Arătați că $\Delta DAB \equiv \Delta DAC$.

24 În triunghiul ΔABC, punctul D este mijlocul laturii $[AC]$ iar E este simetricul lui B față de D. Arătați că $\Delta BDC \equiv \Delta EDA$.

25 Triunghiul isoscel ABC are perimetrul egal cu 36 cm, latura $AB = 12$ cm și este congruent cu triunghiul MNP. Arătați că triunghiul MNP este echilateral.

Probleme de șapte stele

26 Considerăm M un punct interior triunghiului echilateral ΔABC astfel încât $[AM] \equiv [BM] \equiv [CM]$. Arătați că $\Delta MAB \equiv \Delta MBC \equiv \Delta MCA$.

27 Triunghiul ΔABC este isoscel de bază $[BC]$. Fie punctele M și N astfel încât $m(\sphericalangle MAC) = m(\sphericalangle BAN) = 90°$, $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle ANC$, unde $[AB$ este interioară unghiului MAC și $[AC$ este interioară unghiului BAN. Arătați că $\Delta MAB \equiv \Delta NAC$.

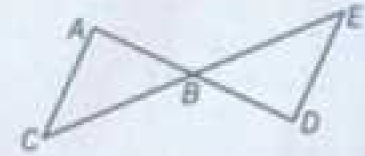
28 Fie ΔABC, cu $[AB] \equiv [AC]$. În exteriorul triunghiului se construiesc triunghiurile echilaterale ABM și ACN. Stabiliți dacă triunghiul MAN este isoscel.

V.5. Metoda triunghiurilor congruente

Prin metoda triunghiurilor congruente putem demonstra congruența a două triunghiuri și, conform definiției triunghiurilor congruente, găsim alte perechi de elemente congruente. Acestea se aleg, raționând, astfel:

Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci laturilor congruente li se opun unghiuri congruente și reciproc.

Exemplu: În figura alăturată, segmentele $[AD]$ și $[CE]$ au același mijloc, punctul B. Găsiți cele șase perechi de elemente congruente din ΔABC și ΔDBE.



Demonstrație:

Cum B este mijlocul segmentului $[AD]$, avem $[AD] \equiv [DB]$ (1).

$\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DBE$ sunt unghiuri opuse la vârf, deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DBE$ (2).

Din ipoteză B este mijlocul segmentului $[CE]$, deci $[BC] \equiv [BE]$ (3).

Din (1), (2) și (3) $\overset{\text{L.U.L.}}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta DBE \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} \begin{cases} [AC] \equiv [DE] \\ \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDE. \\ \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DEB \end{cases}$

Observații:

După ce am demonstrat că $\Delta ABC \equiv \Delta DBE$, conform definiției, cele două triunghiuri au toate elementele corespunzătoare congruente, două câte două și am ales cele trei perechi de congruențe, gândind, astfel:

- unghiurilor opuse la vârf, congruente, $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DBE$, se opun, în cele două triunghiuri congruente, laturile $[AC]$ și, respectiv, $[DE]$.
- laturilor congruente $[BC]$ și $[BE]$ li se opun, în cele două triunghiuri congruente, unghiurile $\sphericalangle BAC$ și, respectiv, $\sphericalangle BDE$;
- laturilor congruente, $[AB]$ și $[DB]$ li se opun, în cele două triunghiuri congruente, unghiurile $\sphericalangle ACB$ și, respectiv, $\sphericalangle DEB$.

Exersare

1 Se consideră triunghiurile ABC și DEF din figura alăturată.

a Știm că $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, cu $[AB] \equiv [DE]$. Atunci $\sphericalangle C$, care se opune laturii $[AB]$ în primul triunghi, este congruent cu $\sphericalangle$......, pentru că acesta se opune laturii $[DE]$ în cel de-al doilea triunghi.

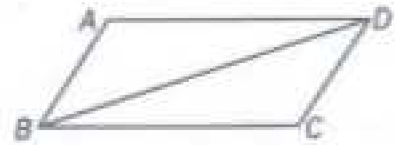
b Știm că $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, cu $[BC] \equiv [EF]$. Atunci $\sphericalangle A$, care se opune laturii $[BC]$ în primul triunghi, este congruent cu $\sphericalangle$......, pentru că acesta se opune laturii ...... în cel de-al doilea triunghi.

2 În figura alăturată sunt desenate triunghiurile ABC și DEF, în care $[AB] \equiv [DE]$, $[BC] \equiv [EF]$ și $[AC] \equiv [DF]$.

a Arătați că $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

b Completați: $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle$...... și justificați.

3 În figura alăturată, $[AB] \equiv [CD]$ și $[AD] \equiv [BC]$.



a Arătați că $\triangle BAD \equiv \triangle DCB$.

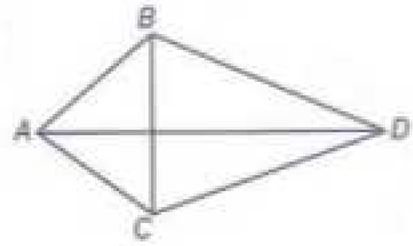
b Completați: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle$...... și justificați.

4 În triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle MNP$, avem $[AB] \equiv [MN]$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$.

a Arătați că $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$.

b Completați: $[BC] \equiv [......]$ și justificați.

5 În figura alăturată, $\triangle ABC$ este isoscel de bază $[BC]$, iar $[DB] \equiv [DC]$. Arătați că:



a $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$;

b Completați: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle$...... și justificați;

c $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC.

6 Fie triunghiurile ABC și DEF astfel încât $[AB] \equiv [DE]$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$.

a Arătați că $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

b Completați: $[AC] \equiv [......]$ și justificați.

7 Considerăm triunghiurile ABC și DEF astfel încât $[BC] \equiv [EF]$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$ și $[AB] \equiv [DE]$.

a Arătați că $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$;

b Completați: $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle$...... și justificați.

Rezolvă problema chiar aici:

Consolidare

8 În $\triangle ABC$ și $\triangle MNP$, avem $AB = MN = 3$ cm, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și $BC = NP = 4$ cm.

a Arătați că $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$.

b Completați: $[AC] \equiv [......]$ și justificați.

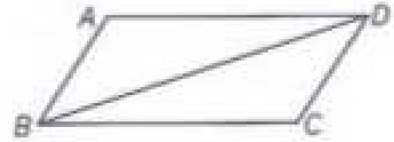
9 Triunghiul ABC este isoscel de bază $[BC]$, iar M este mijlocul bazei. Arătați că:

a $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$;

b $[AM$ este bisectoarea unghiului BAC.

10 Triunghiul ABC este isoscel de bază $[BC]$, iar $M \in BC$ astfel încât $[AM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Arătați că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ și că M este mijlocul bazei.

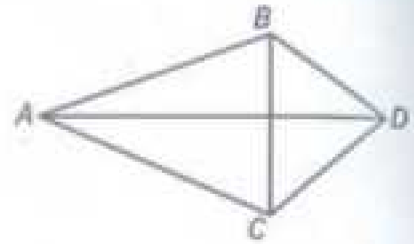
11 În figura alăturată, $[AB] \equiv [CD]$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$.



a Arătați că $[BC] \equiv [DA]$.

b Completați: $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle$...... și justificați.

12 În figura alăturată, ΔABC este isoscel de bază $[BC]$, iar $[AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Arătați că:



a $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$.

b Completați: $[BD] \equiv [......]$ și justificați.

c Arătați că $[DA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDC$.

13 În ΔABC și ΔMNP, avem: $AB = MN = 3$ cm, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$.

a Arătați că $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$.

b Completați: $[BC] \equiv [......]$ și justificați.

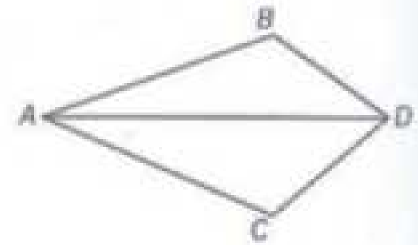
14 În figura alăturată, $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$.

a Arătați că $[AD] \equiv [BC]$.

b Completați: $[AB] \equiv [......]$ și justificați.

15 În triunghiul ABC, punctul $M \in (BC)$ astfel încât $[AM$ este bisectoarea unghiului BAC, iar $m(\sphericalangle BMA) = 90°$. Arătați că ΔABC este isoscel.

16 În figura alăturată, $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, iar $[DA$ este bisectoarea unghiului BDC. Arătați că:



a $[BD] \equiv [DC]$;

b ΔABC este isoscel;

c Completați: $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ......$ și justificați.

17 Pe laturile unghiului xOy se consideră punctele $A \in (Ox$ și $B \in (Oy$ astfel încât $[OA] \equiv [OB]$. Fie M în interiorul unghiului xOy astfel încât $[MA] \equiv [MB]$. Dacă $m(\sphericalangle MOA) = 37°30'$, calculați $m(\sphericalangle AOB)$.

18 Fie M un punct situat în interiorul triunghiului ABC isoscel de bază $[BC]$, astfel încât $[AM$ este bisectoarea unghiului BAC. Stabiliți dacă ΔMBC este isoscel.

19 Se consideră triunghiul isoscel ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $[AM] \equiv [AN]$. Arătați că:

a $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ACM$;

b $\sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle NBC$.

20 Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $[MB] \equiv [NC]$ și $[BN] \equiv [CM]$. Arătați că:

a $\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle NCM$;

b $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CNB$;

c ΔABC este isoscel.

21 Se prelungesc laturile $[BA]$ și $[CA]$ ale triunghiului ABC cu segmentele $[AD]$, respectiv $[AE]$, astfel încât $[BA] \equiv [AD]$ și $[CA] \equiv [AE]$. Arătați că:

a $[DE] \equiv [BC]$;

b $[BE] \equiv [DC]$.

22 Fie O mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC și M un punct oarecare pe segmentul $[AO]$. Știind că $[MB] \equiv [MC]$, arătați că:

a $\sphericalangle BMO \equiv \sphericalangle CMO$;

b $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC$;

c ΔABC este isoscel.

Rezolvă problema chiar aici:

23 În exteriorul triunghiului isoscel ΔMNP, cu $m(\sphericalangle M) = 90°$, se construiesc triunghiurile echilaterale MNQ și MPR. Demonstrați că:

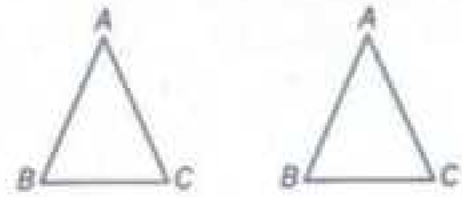
a ΔMRQ este isoscel; b $\sphericalangle QMP \equiv \sphericalangle RMN$; c $[QP] \equiv [NR]$.

24 De-o parte și de alta a segmentului $[AB]$ se consideră punctele C și D, astfel încât $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BAC$ și $[AC] \equiv [BD]$. Arătați că:

a $[AD] \equiv [BC]$; b segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc.

25 Arătați că în orice triunghi isoscel unghiurile opuse laturilor congruente sunt congruente.
Observație. Particularizând, putem reformula problema astfel:
Dacă triunghiul ABC este isoscel, cu $[AB] \equiv [AC]$, atunci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

Demonstrație. Comparăm ΔABC cu ΔACB:
Din ipoteză, $[AB] \equiv [AC]$ (1).
Conform simetriei relației de congruență, $[AC] \equiv [AB]$ (2).
Evident, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CAB$ (3).
Din (1), (2) și (3), conform cazului de congruență L.U.L., rezultă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$, de unde $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB \Leftrightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.



26 Demonstrați că triunghiul echilateral are toate unghiurile congruente.

Observație. Particularizând, putem reformula problema astfel:
Dacă triunghiul ΔABC este echilateral, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

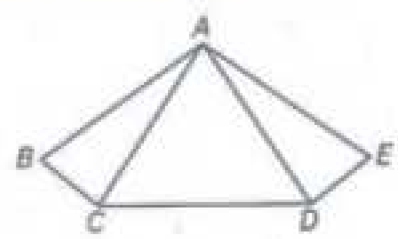
Aprofundare

27 În figura alăturată, ΔABE este isoscel de bază $[BE]$, $[BC] \equiv [ED]$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AED$. Arătați că:

a ΔACD este isoscel;

b $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle EAC$;

c $[BD] \equiv [EC]$.



28 Fie D un punct situat în semiplanul opus cu $(AC, B$ astfel încât $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$. Fie $M \in (BC)$ și $N \in (CD)$ astfel încât $[BM] \equiv [ND]$. Arătați că:

a $\Delta ABM \equiv \Delta ADN$; b ΔAMN este isoscel; c $\sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle ACN$.

29 Fie un triunghi ABC, cu $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $[OM] \equiv [ON]$ și ΔOBC este isoscel de bază $[BC]$, unde $\{O\} = BN \cap MC$. Demonstrați că:

a $[BM] \equiv [CN]$; b ΔABC este isoscel;

c $[AO$ este bisectoarea unghiului BAC

30 Fie triunghiul ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$ și $E \in (BC)$, $F \in (CE)$, astfel încât $[BE] \equiv [CF]$. Demonstrați că:

a $\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle CAE$; b Unghiurile $\sphericalangle EAF$ și $\sphericalangle BAC$ au aceeași bisectoare.

31 Se consideră triunghiul isoscel ABC, $[AB] \equiv [AC]$ și punctele $D, E \in (AB)$, $F, G \in (AC)$, astfel încât $[AD] \equiv [DE] \equiv [EB]$ și $[AF] \equiv [FG] \equiv [GC]$. Arătați că:

a $[DG] \equiv [EF]$; b $[BG] \equiv [CE]$.

32 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, iar $(AD$ și $(A'D'$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$, respectiv $\sphericalangle B'A'C'$, unde $D \in (BC)$, $D' \in (B'C')$. Arătați că:

a $[AD] \equiv [A'D']$; b $[CD] \equiv [C'D']$.

33 Se consideră punctele coliniare A, B, C, D, în această ordine. Fie M și N două puncte situate în semiplane opuse determinate de dreapta AD, astfel încât $\Delta ABM \equiv \Delta ABN$. Arătați că $\Delta CDM \equiv \Delta CDN$.

34 Fie M un punct interior segmentului $[AD]$. Punctele B și C se iau de o parte și de alta a dreptei AD, astfel încât $\Delta BDM \equiv \Delta CDM$. Stabiliți dacă:

a ΔDBC este isoscel; **b** ΔABC este isoscel.

35 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$, iar $[AC] \cap [BD] \neq \varnothing$. Fie $M \in (AC)$ și $N \in (MC)$ astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Arătați că:

a $[BM] \equiv [DM]$; **b** $\Delta BNM \equiv \Delta DNM$.

Probleme de șapte stele

36 Fie ABC un triunghi isoscel, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se construiesc, în exterior, triunghiurile echilaterale ABM și ACN. Arătați că:

a $[MN] \equiv [CM] \equiv [BN]$; **b** $[NA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MNB$.

37 Se consideră unghiul nealungit $\sphericalangle xOy$ și punctele A', $B' \in [Ox$, respectiv $A, B \in [Oy$ astfel încât $[OA] \equiv [OA']$ și $[OB] \equiv [OB']$. Fie $\{M\} = AB' \cap A'B$. Arătați că:

a $[AB'] \equiv [A'B]$; **b** $\Delta AMB \equiv \Delta A'MB'$;

c $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$.

38 Fie C un punct pe dreapta AB, cu $C \in (AB)$. Punctele M și N sunt în același semiplan determinat de dreapta AB, astfel încât M se află în interiorul unghiului NCB, $m(\sphericalangle MCN) = 60°$ și $\Delta CBM \equiv \Delta CNA$.

a Câte grade are unghiul BCM? Justificați.

b Stabiliți dacă $[NC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ANM$.

V.6. Congruența triunghiurilor dreptunghice

Am numit *triunghi dreptunghic*, triunghiul cu un unghi drept. Latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*, iar laturile ce formează unghiul drept *catete*.
Deoarece toate triunghiurile dreptunghice au câte un unghi drept, putem reformula cazurile de congruență, folosind câte două perechi de elemente congruente, dintre care cel puțin o congruență de laturi.

Catetă-catetă (CC). Două triunghiuri dreptunghice care au catetele, respectiv congruente, sunt congruente.

Catetă-unghi (CU). Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și câte un unghi ascuțit, respectiv congruente, sunt congruente.

Ipotenuză-catetă (IC). Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte o catetă, respectiv congruente, sunt congruente.

Ipotenuză-catetă (IU). Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte un unghi ascuțit, respectiv congruente, sunt congruente.

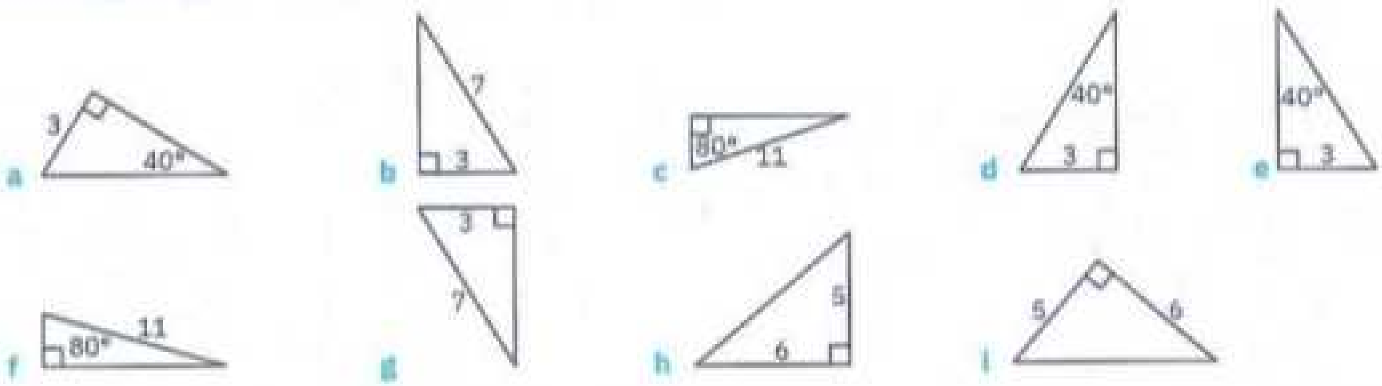
Observație. Pentru o mai bună asimilare a cunoștințelor, considerăm necesară utilizarea, încă din această perioadă, a următorului rezultat:

Teoremă. Într-un triunghi isoscel unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

Exersare

1 Construiți triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, în care:
a $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm; b $AB = 4$ cm, $m(\sphericalangle B) = 30°$; c $m(\sphericalangle C) = 45°$; $BC = 5$cm.

2 Analizați triunghiurile dreptunghice de mai jos, spuneți care sunt congruente și precizați cazul de congruență:



3 Fie M un punct pe bisectoarea unghiului ascuțit xOy și construim $MA \perp [Oy$, cu $A \in [Oy$, $MB \perp [Ox$, cu $B \in [Oy$. Demonstrați că $[AO] \equiv [BO]$.

4 Segmentele $[AD]$ și $[BC]$ se intersectează în punctul O astfel încât $[AO] \equiv [BO]$ și $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ADB) = 90°$. Arătați că triunghiul OCD este isoscel.

Consolidare

5 E, C, B, D sunt coliniare, în această ordine, cu $[EC] \equiv [CB] \equiv [BD]$ și $A \notin BC$, astfel ca $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC$. Perpendiculara în D pe BC intersectează AB în M, iar perpendiculara în E pe BC intersectează AC în N. Arătați că $[DM] \equiv [EN]$.

6 Punctele P, B, C, R sunt coliniare, în această ordine, cu $[PB] \equiv [CR]$. Fie punctele E și F, de aceeași parte a dreptei PR, astfel încât $d(E, PR) = d(F, PR)$, $d(E, PR) = EB$ și $d(F, PR) = FC$. Arătați că $[EP] \equiv [FR]$ și $[ER] \equiv [FP]$.

7 Fie $[AC] \cap [BD] = \{O\}$ astfel încât $AC \perp BD$ și O este mijlocul lui $[AC]$. Din O se coboară $OM \perp BC$ cu $M \in BC$ și $ON \perp AD$ cu $N \in AD$. Să se arate că:

a ΔBAC este isoscel; b $d(O, BC) = d(O, AD)$; c M, O, N coliniare.

8 În pătratul $ABCD$, pe dreapta BD se iau M și N în exteriorul pătratului , astfel încât $[BM] \equiv [DN]$. Se construiesc $DP \perp AN$ cu $P \in AN$ și $BR \perp AM$, cu $R \in AM$. Să se demonstreze că:

a triunghiul AMN este isoscel; b $d(D, AN) = d(B, AM)$.

Aprofundare

9 Fie M și N mijloacele laturilor congruente $[AB]$ și respectiv $[AC]$ ale triunghiului isoscel ABC. Construim $MP \perp BC$, $P \in BC$, $NR \perp BC$, $R \in BC$. Să se demonstreze că:

a $[BP] \equiv [RC]$; b $[MR] \equiv [PN]$.

10 Fie punctele coliniare B, D, E, C, în această ordine și A un punct nesituat pe dreapta BC. Știind că $[BD] \equiv [AD] \equiv [AE] \equiv [EC]$, să se arate că:

a $[AB] \equiv [AC]$; b $d(D, AB) = d(E, AC)$.

11 Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului isoscel ABC, $[AB] \equiv [AC]$, se consideră, punctele M și respectiv N astfel încât $[AM] \equiv [AN]$. Perpendicularele în M și N pe AB, respectiv pe AC intersectează dreptele AC în E, respectiv pe AB în F. Să se demonstreze că:

a $[AE] \equiv [AF]$ și $[BE] \equiv [CF]$;

b $\Delta MFO \equiv \Delta NEO$, unde $\{O\} = EM \cap FN$;

c $AO \perp BC$.

Probleme de șapte stele

12 Pe dreapta d se consideră punctele diferite A, B, C, D, E, în această ordine, astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$. Fie M un punct exterior dreptei d, astfel încât distanța de la punctul B la dreapta MA este egală cu distanța de la punctul D la dreapta ME. Arătați că distanțele de la punctul C la dreptele MA și ME sunt egale.

13 Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Pe segmentul (AB) se ia un punct D, iar pe semidreapta $(AC$, în afara segmentului $[AC]$, se ia un punct E, astfel încât punctul de intersecție F al dreptelor DE și BC este mijlocul segmentului $[DE]$. Arătați că $[BD] \equiv [CE]$.

Testul 1

(1p) 1 În ΔFGH, latura opusă unghiului $\sphericalangle FGH$ este ....

(1p) 2 În ΔHFG, unghiurile alăturate laturii $[HG]$ sunt ...... și ....

(1p) 3 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta GHF$. Atunci $[BC] \equiv [......]$ și $\sphericalangle C \equiv$ ....

(1p) 4 Dacă în ΔDEF, $[DE] \equiv [EF] \equiv [FD]$, atunci ΔDEF este triunghi ....

(1p) 5 Dreptele a și b sunt concurente în O. Fie $A, B \in a$, situate de o parte și de alta a punctului O, astfel încât $[AO] \equiv [BO]$. Fie $C, D \in b$, cu $O \in (CD)$, astfel încât $[CO] \equiv [DO]$. Demonstrați că $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$.

(1p) 6 Fie ΔABC isoscel de bază $[BC]$ și D mijlocul acesteia. Arătați că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$.

(3p) 7 Se consideră unghiul ascuțit $\sphericalangle xOy$. Pe $(Ox$ se ia punctul B, iar pe $(Oy$ se ia punctul D, astfel încât ΔOBD este isoscel de bază $[BD]$. Fie $A \in (OB)$ și $C \in (OD)$, astfel încât $[AB] \equiv [CD]$. Demonstrați că:

a ΔOAC este isoscel;

b $\Delta BOC \equiv \Delta DOA$;

c $[OT$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$, unde $\{T\} = AD \cap BC$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) 1 În ΔMNP, latura cuprinsă între $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle P$ este ....

(1p) 2 În ΔTAS, unghiul opus laturii $[TS]$ este ....

(1p) 3 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta TAS$. Atunci $[AC] \equiv$ ...... și $\sphericalangle A \equiv$ ....

(1p) 4 Dacă în ΔMNP avem $MN = NP \neq MP$, atunci ΔMNP este triunghi ....

(1p) 5 Se consideră ΔABC și D mijlocul laturii (AC). Pe $(BD$ se consideră punctul E, astfel încât $[BD] \equiv [DE]$. Demonstrați că $\Delta ABD \equiv \Delta CED$.

(1p) 6 Se consideră triunghiul ΔABC, în care D este mijlocul laturii $[BC]$ și $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ADC) = 90°$. Arătați că ΔABC este isoscel.

(3p) 7 Pe laturile unghiului ascuțit xOy se consideră punctele $A \in [Ox$ și $B \in [Oy$ astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ și apoi punctele $M \in [Oy$, $N \in [Ox$, astfel încât $m(\sphericalangle MAO) = m(\sphericalangle NBO) = 90°$. Notăm $AM \cap BN = \{C\}$. Demonstrați că:

a $AM = BN$; b $AN = BM$;

c $[OC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(1p) 1 În ΔFGH, latura opusă unghiului $\sphericalangle GFH$ este ....

(1p) 2 În ΔHFG, unghiurile alăturate laturii $[HF]$ sunt ...... și ....

(1p) 3 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta GHF$. Atunci $[AC] \equiv$ ...... și $\sphericalangle B \equiv$ ....

(1p) 4 Dacă în ΔDEF, $m(\sphericalangle DEF) = 90°$, atunci ΔDEF este triunghi ....

(1p) 5 Dreptele a și b sunt concurente în A. Fie $C, B \in a$, situate de o parte și de alta a punctului A, astfel încât $[AB] \equiv [AC]$. Fie $E, D \in b$, cu $A \in (ED)$, astfel încât $[AE] \equiv [AE]$. Demonstrați că $\Delta BEC \equiv \Delta CDB$.

(1p) 6 Fie triunghiul ABC, cu $D \in (BC)$ astfel încât $[AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ și $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ADC) = 90°$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

(3p) 7 Se consideră unghiul ascuțit $\sphericalangle xOy$. Fie $A \in (Ox$ și $B \in (Oy$ astfel încât ΔOAB este isoscel de bază $[AB]$. Fie $D \in (Ox$, cu $A \in (OD)$ și $C \in (Oy$ cu $B \in (OC)$, astfel încât $[AD] \equiv [BC]$. Arătați că:

a ΔODC este isoscel;

b $\Delta BOD \equiv \Delta AOC$;

c $[OT$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$, unde $\{T\} = AC \cap BD$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(1p) 1 În ΔMNP, latura cuprinsă între $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle N$ este ....

(1p) 2 În ΔTAD, unghiul opus laturii $[AS]$ este ....

(1p) 3 Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta TAS$. Atunci $[AB] \equiv$ ...... și $\sphericalangle B \equiv$ ....

(1p) 4 Dacă în ΔMNP avem $90° < m(\sphericalangle MNP) < 120°$ atunci ΔMNP este triunghi ....

(1p) 5 Fie $[AB] \cap [CD] = \{T\}$. Știind că punctul T este mijlocul ambelor segmente, arătați că $\Delta ATD \equiv \Delta BTC$.

(1p) 6 Se consideră triunghiul ΔABC, în care mijlocul D al laturii $[BC]$ are proprietatea că $m(\sphericalangle ADB) = 90°$. Arătați că ΔABC este isoscel.

(3p) 7 Pe laturile unghiului ascuțit xOy se consideră punctele $A \in [Ox$ și $M \in [Oy$ astfel încât $[OA] \equiv [OM]$ și apoi punctele $N \in [Oy$, $B \in [Ox$, astfel încât $m(\sphericalangle NAO) = m(\sphericalangle BMO) = 90°$. Notăm $AN \cap BM = \{T\}$.
Demonstrați că:

a $\sphericalangle ONA \equiv \sphericalangle OBM$;

b $AN = BM$;

c $[OT$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P

Fișă pentru portofoliul individual

G3

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Triunghiul. Construcția triunghiurilor. Congruența triunghiurilor. Metoda triunghiurilor congruente

(1,5p) 1 Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a Suma lungimilor laturilor unui triunghi se numește .... triunghiului.

b Triunghiul care are două laturi congruente se numește triunghi ....

c Triunghiurile care au elementele corespunzătoare congruente, două câte două, se numesc triunghiuri ....

(1,5p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera A. În caz contrar încercuiți litera F.

a Triunghiul echilateral este triunghiul care are toate laturile congruente. A F

b Triunghiul dreptunghic este triunghiul care are toate unghiurile drepte. A F

c Un triunghi ascuțitunghic poate fi congruent cu un triunghi obtuzunghic. A F

(2p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a Latura opusă unghiului $\sphericalangle A$ al triunghiului ABC	1 (AB)
b Baza triunghiului isoscel ABC, în care $[AB] \equiv [BC]$.	2 (BD)
	3 (AC)
c Ipotenuza triunghiului dreptunghic ABD, în care $m(\sphericalangle A) = 90°$.	4 (BC)
d Cateta alăturată unghiului $\sphericalangle D$ al triunghiului dreptunghic ABD, în care $m(\sphericalangle A) = 90°$.	5 (AD)

La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 10 cm. O latură are lungimea de 4 cm. Aflați lungimile celorlalte două laturi și apoi construiți triunghiul. (Analizați toate cazurile posibile.)

(2p) 5 Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc, punctul O. Demonstrați că:

a $[AC] \equiv [BD]$;

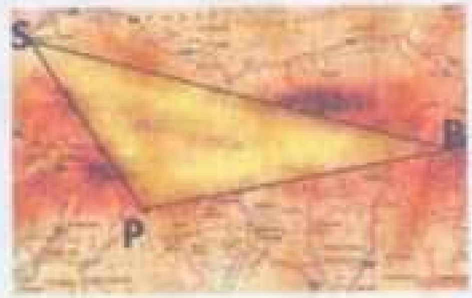
b $\sphericalangle OAD \equiv \sphericalangle OBC$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Tema: Triunghiul

Triunghiul magic din Carpați

Datorită energiei extraordinare care a fost măsurată în aceste locuri, semn al unei întâlniri între razele terestre și cele coborâte din imensitatea Universului cosmic, ce durează de milioane de ani, se presupune că în interiorul unui *triunghi gigantic* legat prin măruntaiele Carpaților Meridionali există o altă lume.



Pentru a răspunde la cerințele 3 – 4, citește următorul text:

Triunghiul magic *PSB* începe în Cheile Parângului, chiar la intrarea în Polovragi, peștera fără capăt a marelui zeu dac Zalmoxis, cea care străbate munții cale de 10 km până în celălalt vârf al triunghiului magic, la Orăștie, în marginea Sarmizegetusei, și se sfârșește sub ochiul Sfinxului, pe enigmaticul platou al Bucegilor. Prin interiorul munților, distanța dintre Peștera Polovragi și Sfinxul din Bucegi este de 15 km, iar cea dintre Sarmizegetusa și Sfinxul din Bucegi este de 21 km.

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

1 Distanța, măsurată prin măruntaiele munților, dintre Peștera Polovragi și capitala Daciei, Sarmizegetusa Regia, este egală cu:

a 10 000 m; b 15 km; c 21 km; d 15 000 m;

2 Perimetrul triunghiului *PSB* este egal cu:

a 23 km; b 36 km; c 46 km; d 56 km.

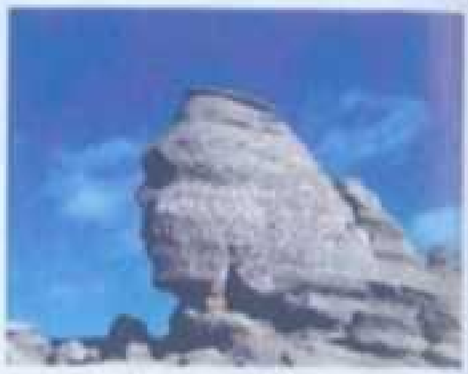
Pentru a răspunde la cerințele 3 – 4, citește următorul text:

Printre ruinele de la Sarmizegetusa s-au descoperit *calendarul* și *ceasul solar*, ceea ce denotă cunoștințele avansate ale dacilor. Secțiunea de aur: 21/13, numărul de aur: 1,618 și triunghiul de aur apar la cel mai complex monument de arhitectură sacră al dacilor: sanctuarul mare circular de la Sarmizegetusa Regia.

3 Sarmizegetusa, centrul strategic al sistemului defensiv al lui Decebal, a fost construită pe vârful unei stânci, la înălțimea de $\overline{a2cc}$ metri. Aflați $\overline{a2cc}$, știind că este cel mai mic număr natural, nenul divizibil cu 150 și 240.

4 Știind că perimetrul unui triunghi isoscel ABC, de bază $[BC]$ este egal cu 21 m, iar $AB = 8$ m, stabiliți dacă $AB : BC > 1,618$.

Pentru a răspunde la cerința 5, citește următorul text:

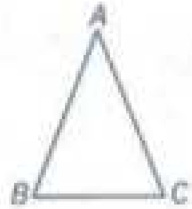


Sfinxul din Munții Bucegi este un megalit antropomorf situat la 2216 metri altitudine. Originea numelui Sfinxului este datorată asemănării sale cu un cap uman. Format dintr-un bloc mare de piatră, Sfinxul din Bucegi, aflat pe platoul Bucegi, măsoară 12 metri în lățime. Mulți istorici merg până acolo încât spun că Marele Sfinx de la Giza, Egipt, este o copie a celui de pe platforma Bucegilor. Acest lucru se bazează pe niște asemănări care sunt mai mult sau mai puțin întâmplătoare, cum ar fi faptul că Sfinxul din Bucegi are aceeași înălțime cu cel egiptean.

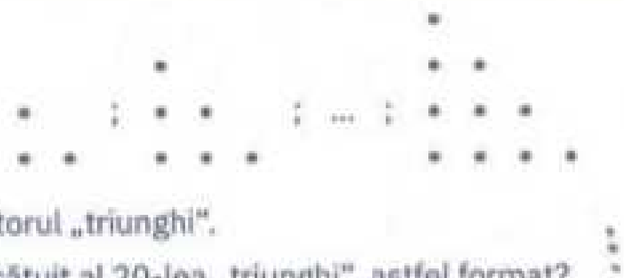
5 Se consideră un triunghi ABC, al cărui perimetru este egal cu 32 m. Lungimea laturii $[BC]$ este egală cu lățimea Sfinxului din Bucegi. Fie M un punct interior segmentului $(BC$. Știind că suma dintre perimetrul triunghiului ABM și perimetrul triunghiului ACM este egală cu 48 m, aflați înălțimea *Sfinxului*, știind că este egală cu lungimea segmentului $[AM]$.

V.7. Probleme cu caracter practic

1 Adrian a confecționat un triunghi isoscel de bază [BC], din sârmă. Neatent, l-a așezat în bucătărie pe două picături de miere, chiar în vârfurile unghiurilor alăturate bazei. După un timp, două furnici, *cu simțurile bine ascuțite*, au pornit simultan din A, una către B, iar cealaltă către C, cu *aceeași viteză*. Cine ajunge prima la miere? Justificați.



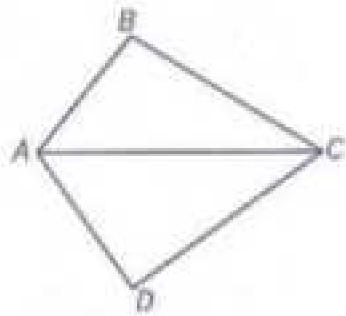
2 Cu ajutorul punctelor am format „triunghiuri", ca în figura de mai jos:



a Desenați pe caiet următorul „triunghi".

b Din câte puncte va fi alcătuit al 20-lea „triunghi", astfel format?

3 O firmă de transport are sediul în localitatea A și trebuie să ducă marfă în C, marfă pe care o poate lua din B sau D, după care trebuie să se întoarcă în A. O schiță redusă a plasamentului celor patru localități este prezentată în figura alăturată.
Știm că $AB = 30$ km, $AC = 50$ km, [BC] are lungimea egală cu media aritmetică a lungimilor AB și AC, iar perimetrul triunghiului ACD este egal cu 25% din 520 km. În condiții de eficiență, care este traseul pe care trebuie să-l aleagă firma? Justificați.



4 Se consideră un *triunghi* de numere ca în figura alăturată:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
....

a Cu ce număr începe al 40-lea rând?

b Care este suma numerelor de pe rândul 40?

c Pe ce rând se află numărul 40?

d Al câtelea este 40 pe rândul respectiv?

Rezolvare:

a Fie $U(r_i)$ ultimul număr de pe rândul i. Observăm că:

$U(r_1) = 1 = 1 \cdot 2 : 2$

$U(r_2) = 3 = 1 + 2 = 2 \cdot 3 : 2$

$U(r_3) = 6 = 1 + 2 + 3 = 3 \cdot 4 : 2$

$U(r_4) = 10 = 1 + 2 + 3 + 4 = 4 \cdot 5 : 2$

Deducem că $U(r_i) = 1 + 2 + 3 + ... + i = i \cdot (i + 1) : 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow U(r_{39}) = 1 + 2 + 3 + ... + 39 = 39 \cdot 40 : 2 = 780 \Rightarrow$ rândul al 40-lea începe cu 781.

b $U(r_{40}) = 40 \cdot 41 : 2 = 820$. Suma numerelor de pe rândul al 40-lea este:

$S = 781 + 782 + 783 + ... + 820 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = (780 + 1) + (780 + 2) + (780 + 3) + ... + (780 + 40) \Rightarrow$

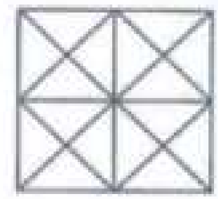
$\Rightarrow S = 780 \cdot 40 + (1 + 2 + 3 + ... + 40) \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 780 \cdot 40 + 40 \cdot 41 : 2 \Rightarrow S = 32\,020$

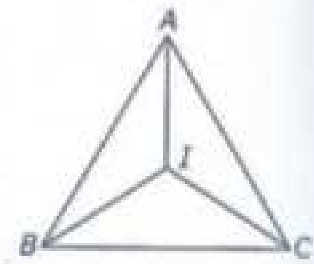
c Fie r_s rândul pe care se află numărul 40. Evident că numărul 40 e mai mare ca ultimul număr de pe rândul anterior și este cel mult egal cu ultimul număr de pe rândul r_s. Deci $U(r_{s-1}) < 40 \leq U(r_s)$ $\Rightarrow s \cdot (s-1) : 2 < 40 \leq s \cdot (s+1) : 2 \Rightarrow s \cdot (s-1) < 80 \leq s \cdot (s+1)$. Evident $8 \cdot 9 < 80 < 9 \cdot 10$ și $s \in \mathbb{N}$. Deducem că $s = 9$, ceea ce înseamnă, că numărul 40 se află pe rândul al 9-lea.

d $U(r_8) = 8 \cdot 9 : 2 = 36 \Rightarrow 37$ e primul număr de pe rândul al 9-lea $\Rightarrow 40$ e al 4-lea număr de pe rând.

5 Într-un parc s-a realizat un aranjament floral, ca în figura alăturată. Câte triunghiuri distingeți în acest aranjament?



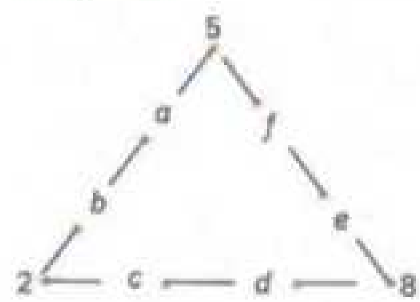
6 Pe un șantier sunt trei mașini care lucrează noaptea și sunt instalate în poziții corespunzătoare vârfurilor triunghiului echilateral *ABC*. Se instalează un bec puternic pe un stâlp plasat în *I*. Mașinile sunt luminate la fel, dacă stâlpul este amplasat la distanțe egale de punctele *A*, *B* și, respectiv, *C*. Se știe că [*BI* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, iar [*CI* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$.



a Demonstrați că mașinile sunt luminate la fel.

b Aflați $m(\sphericalangle AIB)$.

7 Pe masă s-au așezat 9 bețe de chibrit și 9 piese de remy. Pe fiecare piesă de remy este scrisă o cifră nenulă diferită de cea scrisă pe oricare altă piesă.
Numim „*Triunghi MATE*" , stilizat ca în figura alăturată, triunghiul care are pe fiecare latură trei bețe de chibrit și patru piese de remy, astfel încât suma cifrelor de pe piesele de pe fiecare latură să fie egală cu 20. Deja trei piese de remy sunt fixate în vârfurile triunghiului. Aflați celelalte cifre ce lipsesc de pe piesele de remy, fiind înlocuite cu literele *a*, *b*, *c*, *d*, *e* și respectiv, *f*, astfel ca triunghiul din figură să devină un „*Triunghi MATE*".



V.8. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1 În triunghiul CRE, $CE = 4$cm, $CR = 6$cm, $RE = 5$ cm, iar semidreapta $[CT$ este bisectoarea unghiului RCE, unde $T \in (ER)$. Fie $A \in (CR)$, astfel încât $\sphericalangle ATC \equiv \sphericalangle ETC$.

a Construiți cu rigla și compasul triunghiul CRE.

b Să se afle perimetrul triunghiului ART.

2 În cercul de centru O, $[OA]$ și $[OB]$ sunt raze. Se construiesc tangentele la cerc ce trec prin A, respectiv prin B, și se notează cu P punctul lor de intersecție. Fie $OP \cap \overset{\frown}{AB} = \{I\}$. Arătați că:

a $[PA] \equiv [PB]$;

b $[OP$ este bisectoarea unghiului AOB;

c $\overset{\frown}{AI} \equiv \overset{\frown}{BI}$.

3 Triunghiul ABC este isoscel de bază $[BC]$. Două din laturile sale au lungimile egale cu 4 cm și respectiv 9 cm. Care este lungimea celei de-a treia laturi?

4 În ΔECT, punctul A este interior laturii CT, iar prin E construim $EL \parallel CT$, astfel încât $[AT] \equiv [EL]$. Punctul I este interior laturii ET, astfel încât $\sphericalangle IAT \equiv \sphericalangle ILE$. În semiplanul opus cu cel determinat de dreapta CE și punctul L se ia un punct D, astfel încât $\sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle TCE$. Arătați că:

a D, E și L sunt coliniare;

b L este simetricul punctului A față de I.

5 Triunghiul ABC dreptunghic în A și triunghiul $A'B'C'$ dreptunghic în A' au perimetrele egale și $[AB] \equiv [A'B']$. Arătați că cele două triunghiuri sunt congruente.

6 Fie $M = \{1; 2; 3; \dots; 2018\}$ și 2018 segmente de dreaptă de lungimi diferite exprimate prin numerele naturale din mulțimea M.

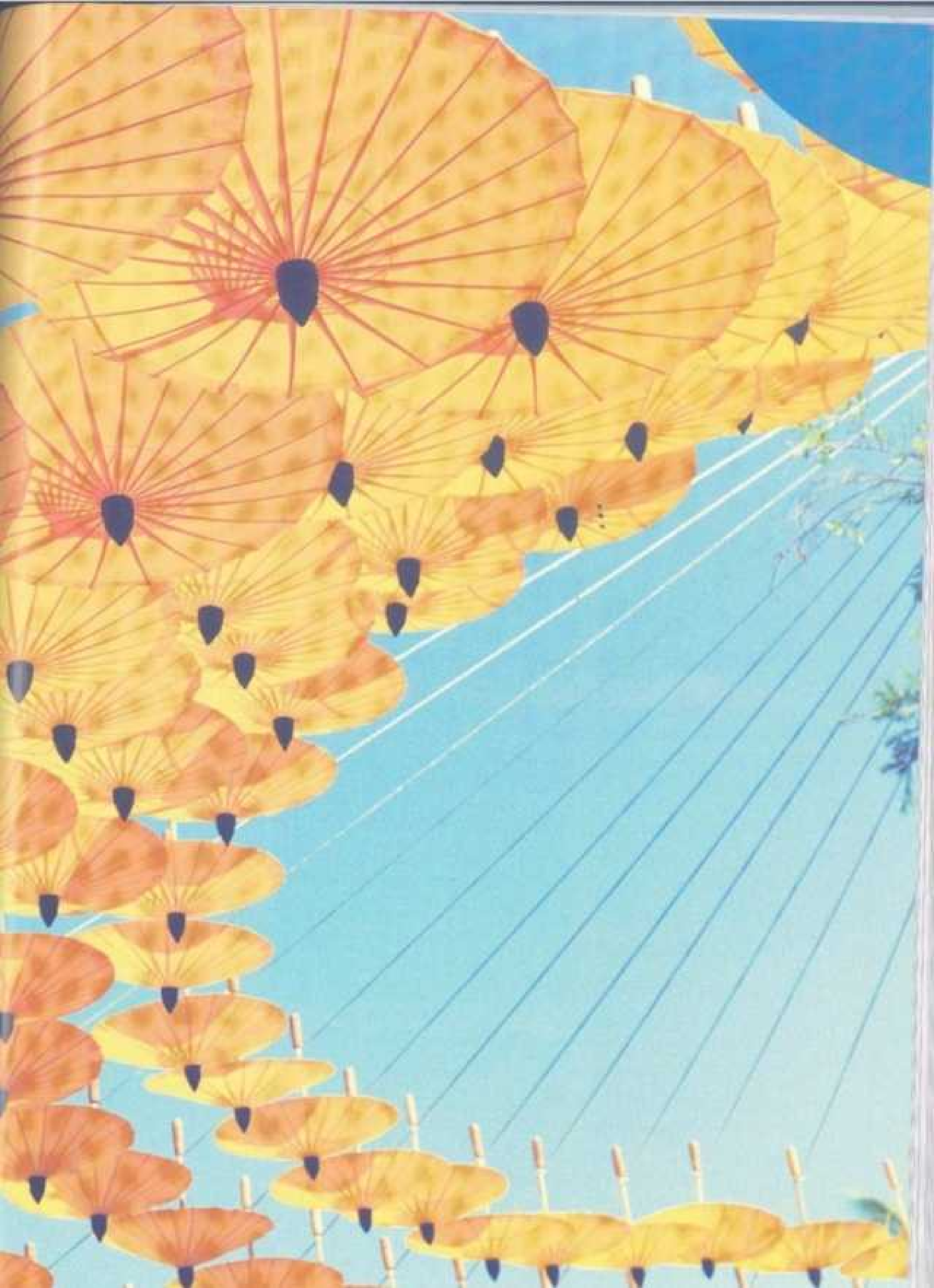
a Arătați că nu se poate construi un triunghi cu lungimile laturilor 1, 2, respectiv, 3.

b Stabiliți dacă se poate construi un triunghi cu lungimile laturilor numere naturale nenule, consecutive.

c Arătați că din cele 2018 segmente se pot alege 1010 segmente, astfel încât cu oricare trei dintre ele se poate construi un triunghi.

VI

Variante de subiecte pentru teză



Varianta 1

SUBIECTUL I. Pe foaia de teză se trec numai rezultatele. **(30 de puncte)**

1 Rezultatul calculului $14 - 4 : 2$ este egal cu ....

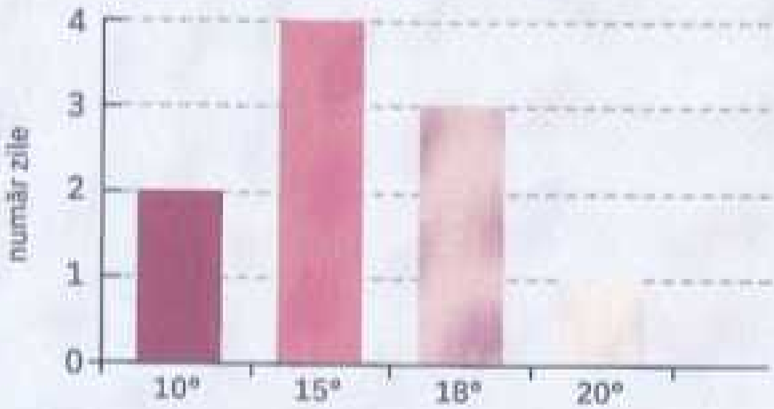
2 Doi divizori ai numărului 20 sunt ....

3 Într-un triunghi ABC, latura opusă unghiului $\sphericalangle C$ este ....

4 Două unghiuri complementare au suma măsurilor egală cu ....°.

5 Cel mai mare număr de forma $\overline{23x}$ divizibil cu 3 este ....

6 Într-o perioadă de timp am măsurat și apoi am calculat temperatura medie zilnică. Rezultatele sunt prezentate în graficul de mai jos.



Temperatura medie a fost cel puțin 15° în .... zile.

SUBIECTUL al II-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

7 Desenați un triunghi ABC și construiți S, simetricul punctului B față de C.

8 Calculați media aritmetică a numerelor a și b, știind că $a = \frac{2^3 + 2}{3} + \frac{15}{9}$ și $b = 0,5 + 5 : 2$.

9 Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C și D (în această ordine), astfel încât B este mijlocul segmentului $[AD]$, iar C este mijlocul segmentului $[BD]$. Știind că $BC = 3$ cm, calculați BD, AB și AD.

SUBIECTUL al III-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

10 Andrei are o sumă de bani. În prima zi el cheltuiește $\frac{1}{4}$ din sumă, a doua zi $\frac{1}{3}$ din rest, iar a treia zi ceea ce i-a mai rămas, adică 36 lei.

a Ce sumă de bani a avut Andrei?

b Ce sumă de bani a cheltuit a doua zi?

11 Fie $[OD \subset \text{Int}(\sphericalangle AOB)$ și $[OE \subset \text{Int}(\sphericalangle BOD)$, astfel încât $\sphericalangle AOD = BOE$. Fie OC bisectoarea unghiului DOE. Arătați că $[OC$ este bisectoarea unghiului AOB.

12 Bunica are 39 de portocale și 50 de mere. Ea le distribuie, în mod egal nepoților, dar îi mai rămân 3 portocale și 2 mere. Câți nepoți are bunica, știind că numărul lor este divizibil cu 6?

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Varianta 2

SUBIECTUL I. Pe foaia de teză se trec numai rezultatele. **(30 de puncte)**

1 Rezultatul calculului $14 - 4 \cdot 2$ este egal cu ....

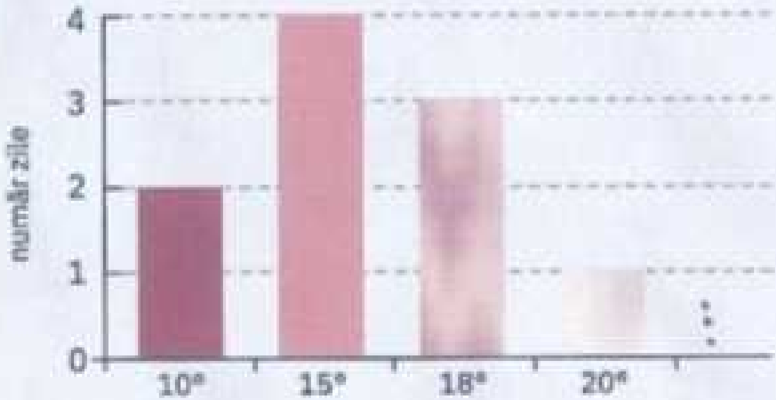
2 Doi multipli ai numărului 20 sunt ....

3 Într-un triunghi *ABC*, unghiul opus laturii [*BC*] este ....

4 Două unghiuri suplementare au suma măsurilor egală cu ....°.

5 Cel mai mic număr de forma $\overline{23x}$ divizibil cu 4 este ....

6 Într-o perioadă de timp am măsurat și apoi am calculat temperatura medie zilnică. Rezultatele sunt prezentate în graficul de mai jos.



Temperatura medie a fost cel mult 15° în .... zile.

SUBIECTUL al II-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

7 Desenați un triunghi *ABC* și fixați *S*, simetricul punctului *A* față de *C*.

8 Calculați $\left[0,(3)+1,(3):1\frac{7}{9}\right]:\left(1+\frac{1}{12}\right)$.

9 Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$ trei unghiuri formate în jurul unui punct *O* astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 2x + 20°$, $m(\sphericalangle BOC) = 3x + 10°$ și $m(\sphericalangle COA) = 4x + 15°$.

a Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$.

b Dacă [*OM* este bisectoarea unghiului *BOC* și [*ON* este bisectoarea unhgiului *COA*, calculați măsura unghiului $m(\sphericalangle MON)$.

SUBIECTUL al III-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

10 În laboratorul de informatică, dacă se așază câte 2 elevi la un calculator, atunci la un calculator rămâne un singur elev, iar ultimul calculator rămâne liber. Dacă se așază câte trei elevi la un calculator, atunci rămân șase calculatoare libere.

a Câte calculatoare sunt în laboratorul de informatică?

b Câți elevi sunt în laboratorul de informatică?

11 Pe o dreaptă *d* se consideră punctele *A*, *B*, *C* și *D* (în această ordine , astfel încât *M* este mijlocul segmentului [*BC*], iar [*AB*] ≡ [*CD*]. Demonstrați că punctul *M* este mijlocul segmentului [*AD*].

12 O gospodină vinde ouă la Piață. Ea observă că dacă le-aranjează câte 10, 15 sau 20 rămân separat 3 ouă. Câte ouă are spre vânzare, știind că numărul lor este cel mai mic număr natural de trei cifre cu această proprietate.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Varianta 3

SUBIECTUL I. Pe foaia de teză se trec numai rezultatele. **(30 de puncte)**

1 Calculând $(2^7)^4 : 2^{23} - 4 : 4$, obținem ....

2 Suma divizorilor naturali ai numărului 10 este egală cu ....

3 Într-un triunghi DEF, isoscel de bază $[EF]$, avem $[DE] = [......]$.

4 Dacă $2x - 3 = 47$, atunci $x =$ ....

5 Fie $[OA$ bisectoarea unghiului BOC, cu $m(\sphericalangle BOC) = 70°$. Atunci $m(\sphericalangle AOB) =$ ......°.

6 În funcție de măsură, putem clasifica unghiurile. Putem stabili natura unui unghi și cu ajutorul echerului, care se așază, ca în desenul de mai jos. Astfel, unghiul ACB este unghi ....

SUBIECTUL al II-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

7 Desenați un triunghi BAC astfel încât $m(\sphericalangle BAC) = 70°$, $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm.

8 Calculați $\left(2\frac{2}{5} - 1\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) : \left[0,2(3) \cdot \frac{10}{7} + \frac{1}{2}\right]^2$.

9 Unghiul EFG și $\sphericalangle HFG$ sunt adiacente cu $m(\sphericalangle HFG) = 80°$. Știind că $[FA$ este bisectoarea unghiului EFG și că $m(\sphericalangle EFG) = \frac{3}{5} \cdot m(\sphericalangle HFG)$, aflați $m(\sphericalangle EFA)$.

SUBIECTUL al III-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

10 Fie numărul $a = 13 + 13^2 + 13^3 + ... + 13^{2014}$. Arătați că:

a Numărul a este număr par;

b Numărul a se divide cu 14.

11 Fie D un punct situat în semiplanul opus cu $(AC, B$ astfel încât $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$. Fie $M \in (BC)$ și $N \in (CD)$ astfel încât $[BM] \equiv [ND]$. Arătați că:

a $\Delta ABM \equiv \Delta ADN$; **b** ΔAMN este isoscel.

12 Moș Crăciun duce cadouri la o grădiniță: 270 de portocale, 360 de mere și 450 de eugenii. Toate acestea sunt împărțite copiilor în pungi cu același conținut, fără ca să mai rămână ceva nedistribuit.

a Arătați că în grădiniță pot fi 30 de copii.

b Care poate fi numărul maxim al copiilor din acea grădiniță?

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Varianta 4

SUBIECTUL I. Pe foaia de teză se trec numai rezultatele. **(30 de puncte)**

1 Un număr prim cuprins între 20 și 30 ....

2 Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$ și $AM = 6$ cm, atunci $AB =$ ...... cm.

3 Cel mai mic număr natural n, pentru care $2n - 3 > 23$ este $n =$ ....

4 Scris sub formă de fracție ireductibilă numărul $0,6 =$ ....

5 Dacă $[OC$ este bisectoarea unghiului BOA, iar $m(\sphericalangle BOC) = 70°$, atunci $m(\sphericalangle BOA) =$ ......°.

6 În funcție de măsură, putem clasifica unghiurile. Putem stabili natura unui unghi și cu ajutorul echerului, care se așază, ca în desenul alăturat. Astfel, unghiul EFG este unghi ....

SUBIECTUL al II-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

7 Desenați un triunghi BAC, cu $m(\sphericalangle BAC) = 60°$, $m(\sphericalangle BCA) = 30°$ și $AC = 5$ cm.

8 Determinați elementele mulțimii: $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{x+2}{3} \in \mathbb{N},\ x < 16 \right\}$.

9 Unghiurile $\sphericalangle DEA$ și $\sphericalangle AEB$ sunt adiacente complementare cu $m(\sphericalangle AEB) = 60°$.

a Aflați măsura unghiului DEA.

b Dacă $[EC$ este bisectoarea unghiului AEB, arătați că $[EA$ este bisectoarea unghiului CED.

SUBIECTUL al III-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

10 a Arătați că numărul $t = 5^n + 6^n + 9^{2014}$ este număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b Dacă $(8a + 7b \vdots 4$, atunci $(b + \overline{xy56}) \vdots 4$.

11 Pe laturile unghiului $\sphericalangle XOY$ se consideră punctele $A, C \in [OX$ și $B, D \in [OY$, astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ și $[AC] \equiv [BD]$. Se notează $AD \cap BC = \{M\}$.

a Demonstrați că $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$.

b Arătați că $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$.

12 Dacă pentru o defilare sportivă elevii unei școli se împart în grupe de câte 72 de elevi rămân separat 69 de elevi, iar dacă se împart în grupe de câte 60 de elevi rămân separat 57 de elevi. Câți elevi sunt în școala respectivă, știind că numărul lor este cuprins între 600 și 900?

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Varianta 5

SUBIECTUL I. Pe foaia de teză se trec numai rezultatele. **(30 de puncte)**

1 Dacă $20 = 2^x \cdot 5^y$, atunci $x + y =$ ....

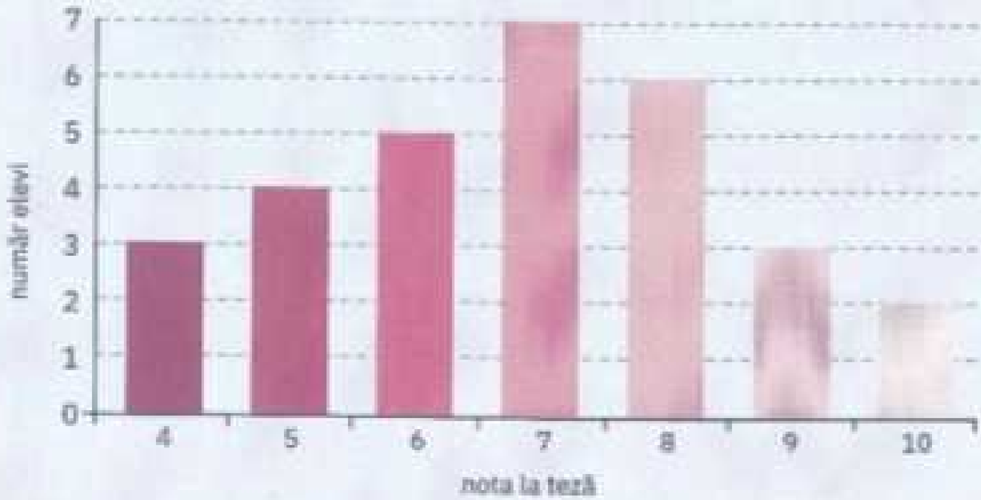
2 Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ și $AB = 8$ cm, atunci $AM =$ ...... cm.

3 Cel mai mare număr natural n, pentru care $3n + 2 < 29$ este $n =$ ....

4 Scris sub formă de fracție ireductibilă numărul $0,(6) =$ ....

5 Dacă $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ sunt unghiuri congruente în jurul lui O, atunci $m(\sphericalangle AOB) =$ ......°.

6 Elevii unei clase au susținut teza la matematică. Rezultatele obținute sunt reprezentate în graficul alăturat. Analizând graficul, constatăm că în clasă sunt........ elevi.



SUBIECTUL al II-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

7 Desenați un triunghi BAC, cu $AB = BC = CA = 4$ cm.

8 Calculați $0,5 + 8 \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{24}\right) : 8\frac{2}{3}\right]$.

9 Unghiurile $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle DBC$ sunt adiacente, cu $m(\sphericalangle ABD) = 120°$, $m(\sphericalangle DBC) = 0,5 \cdot m(\sphericalangle ABD)$, iar $[BE$ este semidreapta opusă semidreptei $[BD$.

a Aflați măsura unghiului EBC.

b Dacă $[BF$ este bisectoarea unghiului ABD, arătați că $[BD$ este bisectoarea unghiului FBC.

SUBIECTUL al III-lea. Pe foaia de teză se trec rezolvările complete. **(30 de puncte)**

10 Determinați elementele mulțimii: $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{63}{2x+1} \in \mathbb{N}\right\}$.

11 Unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOA$ sunt formate în jurul unui punct O, astfel încât $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ sunt complementare, iar $m(AOD) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC) + 30°$.

a Calculați măsura unghiului $\sphericalangle BOC$.

b Arătați că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ formează un unghi drept.

12 Determinați numerele naturale nenule a și b, cu $a \leq b$, pentru care au loc relațiile: $(a, b) = 15$, $[a, b] = 360$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Soluții

I. Mulțimi

I.1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

5. 0.6. a $A=\{0, 1, ..., 7\}$; b $B=\{4, 5, ..., 9\}$; c $C=\{8, 9, ..., 14\}$; d $D=\{11, 12, ..., 22\}$; e $E=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; f $F=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. 9. Mulțimi finite: A, C; mulțimi infinite: B, D. 10. $A=\{0,2,5\}$. 11. Mulțimi finite: A, B, D, E; mulțimi infinite: C, F. 12. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{0,1,2,3,4\}$. 13. $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,7,8\}$. 14. $<, =, >$. 15. $5=4\cdot1+1$, $9=4\cdot2+1$, ..., $201=4\cdot50+1$; $\text{card}A=50$, $m_a=(5+9+...+201):50=103=4\cdot25+3\notin A$. 19. $n=2$. 20. a 4; b 0; c $\text{car}A=4 \Rightarrow a\in\{1, 2\}$; $\text{card}A=5 \Rightarrow a=0$. 21. 3. 22. a A; b A; c F; d F; e A; f F. 24. $A=\{2^n \mid n\le 4, n\in\mathbb{N}\}$. 25. $\{22,33,44,55,66\}$. 26. 0, 4, 6. 27. $A=\{3,4\}$; $B=\{4,5,...,25\}$; $C=\{100,101,...599\}$; $D=\{1,8,15,...,50\}$; $E=\{7,8,9\}$; $F=\{50,52,54,56,58\}$; $G=\{0,3\}$; $H=\{1,3,9,27,81\}$. 28. a $B=\{2,9,16,23\}$; b $A=\{21,22,23,24\}$, $B=\{52,55,58,61\}$. 29. $A=\{x \mid x$ este literă a cuvântului picior$\}$; $E=\{2^n-1 \mid n\le 6, n\in\mathbb{N}^*\}$; $D=\{n! \mid n\le 6, n\in\mathbb{N}\}$; $B=\{5n+1 \mid n\le 100, n\in\mathbb{N}\}$; $C=\{1+2+3+...+n \mid n\le 20, n\in\mathbb{N}\}$; $F=\{n^{n+1} \mid n\le 4, n\in\mathbb{N}\}$; $G=\{2^n \mid n\le 5, n\in\mathbb{N}\}$; $H=\{n^2 \mid n\le 6, n\in\mathbb{N}\}$. 32. $n=5$. 33. A opta mulțime este $\{57, 59, ..., 71\}$. Suma elementelor acestei mulțimi este 512. 34. Sunt 1006 elemente divizibile cu 2: $2\cdot1, 2\cdot2, ..., 2\cdot1006$. Sunt 402 elemente divizibile cu 5: $5\cdot1, 5\cdot2, ..., 5\cdot402$. Sunt 201 elemente divizibile și cu 2 și cu 5: $10\cdot1, 10\cdot2, ..., 10\cdot201$. În concluzie avem $1006+402-201=1207$ elemente divizibile cu 2 sau cu 5. 35. a $A_4=\{10,11,12,...,16\}$; b $\text{card}A_1+\text{card}A_2+...+\text{card}A_n=n^2$ și cum $44^2<2010 \Rightarrow 2010\in A_{45}$; c cel mai mic element este $2009^2+1=4036082$, iar cel mai mare element este $2010^2=4040100$. 36. Fiecare dintre exponenții a, b, c poate fi par sau impar, în total sunt $2\cdot2\cdot2=8$ combinații posibile ale exponenților în raport cu paritatea. Avem 8 posibilități de combinare a parității și 9 elemente; conform *principiului cutiei* vor fi cel puțin două elemente cu exponenții de aceeași paritate și produsul lor va conține pe 2, 3 și 5 la exponenți pari, adică produsul va fi pătrat perfect. 37. $9\in A \Rightarrow 46=9\cdot5+1\in A$; $46=7\cdot6+4\in A \Rightarrow 6\in A$. 39. $1\in A\Rightarrow 5\in A\Rightarrow 17\in A$; $17=4^2+1\in A\Rightarrow 4\in A$; $5=2^2+1\in A\Rightarrow 2\in A\Rightarrow 8\in A\Rightarrow 26\in A$. 40. $11\in A\Rightarrow 33\in A$ și $6\cdot33+4=202\in A$; $202=4\cdot50+2\in A\Rightarrow 50\in A\Rightarrow 150\in A$; $150=4\cdot37+2\in A\Rightarrow 37\in A\Rightarrow 111\in A\Rightarrow 670\in A\Rightarrow 2010\in A$.

I.2. Relații între mulțimi. Submulțimi

5. $2^4=16$. 6. $n=2$. 8. 5. 9. 5. 10. a $x=1$; b $x=1$, $y=2$, $z=3$; c $x=5$; d $t=5$. 12. Mulțimea A este formată din elementele 1, 2, și 3 la care se adaugă elementele submulțimilor mulțimii $\{4,5,6\}$. Mulțimea $\{4, 5, 6\}$ are $2^3=8$ submulțimi, deci vor fi 8 mulțimi A ce verifică datele problemei (câte una pentru fiecare submulțime a mulțimii $\{4, 5, 6\}$). Mulțimile cerute sunt: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ și $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 13. $2x+2=x+5\Rightarrow x=3$; $3x+3=x+5\Rightarrow x=1$; dacă $x=3$ sau $x=1$, atunci $\text{card}A=2$, iar dacă $x\notin\{1,3\}$, atunci $\text{card}A=3$. 16. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,8,15\}$; B are 8 submulțimi. 17. a F; b F; c A; d A; e F; f A; g F; h A; i A. 18. **Indicație.** $x-2$ și $4-x$ numere naturale deducem $2\le x\le 4$, iar din $x-y\in\mathbb{N}\Rightarrow$ $\Rightarrow y\le x$. Dacă $x=2$, avem $A=\{4, 4^{2-y}, 2^{2y}\}$ și $B=\{1, 4, 2^{2+y}\}$, de unde deducem $4^{2-y}=1\Rightarrow 2-y=0\Rightarrow y=2$ și avem $A=\{4, 1, 16\}$ și $B=\{1, 4, 16\}$ deci $A=B$. Continuați rezolvarea! 20. Fie mulțimea $A=\{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$. Construim submulțimile $A_1=\{a_1\}$, $A_2=\{a_1, a_2\}$, ..., $A_{10}=\{a_1, ..., a_{10}\}$. Notăm cu $s_1, s_2, ..., s_{10}$ suma elementelor mulțimii $A_1, A_2, ..., A_{10}$. Dacă niciunul dintre numerele $s_1, s_2, ..., s_{10}$ nu este divizibil cu 10, atunci conform principiului cutiei (avem 10 numere și 9 resturi) cel puțin două numere dintre $s_1, s_2, ..., s_{10}$ vor da același rest la împărțirea la 10, deci diferența lor va fi divizibilă cu 10. Considerând cele două numere s_i și s_j, cu $i>j$, submulțimea cerută este $A_{i,j}=\{a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_i\}$. 21. a 34; b 20. 22. Submulțimile B se formează din elementele 1 și 2, la care se adaugă elementele submulțimilor mulțimii numerelor naturale de la 3 la 100. Deoarece mulțimea $\{3,4,5, ..., 100\}$ are 2^{98} submulțimi, există 2^{98} mulțimi B. 23. a $A_{13}=\{5\cdot78, 5\cdot79, ..., 5\cdot90\}$, $A_{34}=\{5\cdot595, 5\cdot596, ..., 5\cdot629\}$; b mulțimea A_{98} este formată din elementele $\{5\cdot4753, 5\cdot4754, ..., 5\cdot4850\}$. Suma elementelor este 2352735. 24. a Perechile

sunt (1,99), (3,97), ..., (49,51) sunt 25 de perechi; **b** cele mai mici 46 de elemente din mulțimea A au suma egală cu $1+3+5+...+91=2116>2010$. Trebuie eliminate 6 unități și astfel cel puțin două elemente vor fi egale. **25.** **a** Avem $1+2010=2+2009=...=1005+1006=2011$, deci numărul submulțimilor este 1005. **b** Numărul submulțimilor este egal cu $1004+1003+...+2+1=504\,510$.

Teste de evaluare

Testul 1. **2.** **a** $x \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$; **b** 27. **3.** **a** 34; **b** 6. **4.** **a** 7; **b** 8. **5.** $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4\}$. **6.** $C=\{7, 12, 17, 22, 27\}$, $D=\{36, 49, 64, 81\}$.

Testul 2. **3.** **a** $A=\{13, 18, 23, ..., 93\}$; **b** $A=\{5, 7, 9, 11, 13\}$, $B=\{121, 122, 123, ..., 127\}$. **4.** 2^{77}. **5.** $2^{100}+2^{77}-1$. **6.** $19=3\cdot 6+1 \in A \overset{a}{\Rightarrow} 6 \in A \overset{a}{\Rightarrow} 20 \in A \overset{a}{\Rightarrow} 62 \in A \overset{a}{\Rightarrow} 188 \in A \overset{a}{\Rightarrow} 566 \in A \overset{a}{\Rightarrow} 1700 \in A$.

Testul 3. **3.** **a** $A=\{0, 1, 2, 5, 8, 17\}$; **b** $\{9, 10, 11, 12, 13\}$. **4.** Pentru $n \geq 5$ și $x \in A$, avem $u(x)=4$, iar pentru $n \geq 4$ și $y \in B$, avem $u(y) \in \{1, 2, 5, 0, 6, 7\}$. Elementele comune sunt 5 și 10. **5.** **a** 8; **b** 13. **6.** Avem $19 \in A \Rightarrow 18 \in A \Rightarrow 17 \in A \Rightarrow 16 \in A$; iar de aici aplicăm proprietatea **a**: $16 \in A \Rightarrow 81 \in A \Rightarrow 406 \in A \Rightarrow 405 \in A$. Din nou cu **a**, avem $405 \in A \Rightarrow 2026 \in A$.

Testul 4. **3.** **a** $A=\{0, 2, 4, 14\}$; **b** 1, 2, 3. **4.** $A=\{8, 13, 20\}$. **5.** **a** 4; **b** 33. **6.** $x=1$, $y=2$, deci $A=\{1\}$.

I.3. Operații cu mulțimi

3. $A=\{1,3,4,5,7,9\}$, $B=\{3,5,6,8,13\}$ și $C=\{4,5,8,15,22\}$. **7.** $a=3$, $b=2$. **10.** $A=\{1,2,3,4,6\}$, $B=\{1,2,3,5\}$. **11.** $A=\{1,2,4,6,7\}$, $B=\{2,3,5,6,7\}$. **12.** $A=\{1,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ sau $A=\{1,3,4\}$, $B=\{1,2,3\}$. **15.** **a** $n=p=1 \Rightarrow x=y=5 \in A \cap B$; **b** $2x+3y=6n+4+6p+9=6(n+p+2)+1$, deci restul este 1; **c** $n=667, p=1000 \Rightarrow x=y=2003$. **16.** Numărul maxim de elemente este 70, iar numărul minim este 30. **17.** card $A \cap B = 70+60-89=41$, iar card $A \cup B=70+60-47=83$. **19.** card $A \cup B = 9$. **20.** $A=\{31,62,93\}$, $B=\{1,2,3\}$ și $C=\{0,7,26\}$. **27.** $X=\{1,2\}$, $Y=\{1,2,4\}$ sau $X=\{1,4\}$, $Y=\{2,3,5\}$ sau $X=\{1,2,4\}$, $Y=\{3,5\}$. **28.** $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{3,4,5,6,7,8\}$. **31.** $A=\{1,3\}$, $B=\{2,4\}$. **36.** **a** $20+16-30=6$ elevi participă la ambele olimpiade; **b** $20-6=14$ elevi participă doar la olimpiada de matematică. **37.** $(16+21)-(28-3)=12$ elevi joacă și fotbal și tenis. **39.** **a** $A_1=\{4,5,20,21\}$; **b** $12n+2=1002 \Rightarrow n=100$; **c** $5n \in A_n \cap A_{n+1}$. **41.** $A \cap B=\{2\}$. **42.** $(a, b, c) \in \{(3, 2, 5), (5, 2, 1)\}$. **43.** Elementele comune se obțin din $x+11y=z+22t \Rightarrow z-x=11(y-2t) \Rightarrow x=z \Rightarrow y=2t \Rightarrow t \in \{1,2,3,4,5\}$. $A \cap B$ are $5 \cdot 10=50$ elemente.

I.4. Mulțimi finite și mulțimi infinite

11. 3. **13.** $A \cap B=\{3, 9, 15, 45\}$. **15.** Mulțimi finite: A, B, E, F; mulțimi infinite C, D. **18.** $A=\{1\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{2, 3, 4, 5\}$. **19.** $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$, $C=\{1, 3\}$. **25.** **a** 6; **b** 6; **c** 2; **d** 8. **29.** 2, 3, 5, 7. **30.** 96. **31.** 5, 7, 11, 13. **32.** 4, 9, 25, 49. **33.** 2012. **37.** **a** cel mai mic multiplu este $45 \cdot 5$, iar cel mai mare multiplu este $45 \cdot 44$; sunt $44-5+1=40$ de multipli; **b** cel mai mic multiplu este $18 \cdot 12$, iar cel mai mare multiplu este $18 \cdot 111$; sunt $111-12+1=100$ de multipli. **38.** Dacă $x \in A$, atunci $U(x) \in \{2, 7\}$, iar dacă $y \in B$, atunci $U(y) \in \{3, 8\}$; în concluzie, $A \cap B=\varnothing$.

Teste de evaluare

Testul 1. **5.** $A=\{a, b, x, c, n\}$, $B=\{a, b, x, m, d\}$. **6.** $x=3$.

Testul 2. **5.** $M=\{1, 3, 5, 4, 6\}$, $P=\{1, 3, 5, 2, 0\}$. **6.** Observăm că $4x \neq 4x+1$ și $4x \neq 27$. Din $4x=12$ obținem $C=\{13, 12, 27\}$ și $D=\{12, 14, 13\}$, iar $C \cap D=\{12, 13\}$. Soluția este $x=3$.

Testul 3. **3.** **a** $84=7\cdot 12 \in A$; **b** $A=\{14, 21, 28, ..., 98\}$; **c** $14=7\cdot 2$, $98=7\cdot 14$, car$A=14-2+1=13$. **4.** $A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 3, 6, 7, 8\}$. **5.** $x=7$.

Testul 4. **2.** $(19+16)-(27-2)=10$. **4.** $E=\{a, b, c, d\}$, $F=\{a, c\}$. **6.** $B=\{3, 27, 243\}$, $A=\{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36\}$, $C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11\}$.

Test-model pentru Evaluarea Națională

1. b). 2. A, A, F, A. 3. c). 5. b). 6. b). 7. c). 8. $\varnothing$. 9. 18. 10. Dan. 11. $28 - 21 = 7$. 12. $28 - 17 = 11$. 13. $17 + 21 - 28 = 10$. 14. $28 - 17 = 11$. 15. $28 - 21 = 7$.

I.5. Probleme cu caracter practic

1. a {28, 33, 34, 36, 38}; b {marți, miercuri, vineri, duminică}; c $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. 4. Presupunem prin reducere la absurd că 3 nu ar fi roșu. Atunci el ar fi galben sau albastru. Dacă 3 ar fi galben, atunci din condiția I deducem că numerele 6, 9, 12, ..., 99 sunt galbene sau albastre, iar celelalte numere 1, 2, 4, 5, 7, 8, 97, 98 sunt roșii. Obținem $1 + 3 = 4$ și 4 ar trebui să fie multiplu de 3, fals deoarece contrazice condiția II. Numerele roșii sunt 3, 6, 9, 96, ..., 99. Dacă ar mai fi și alte numere roșii, atunci s-ar contrazice condiția II. Suma este egală cu 1683. 5. a $(18 + 24) - 29 = 13$; b 11. 6. 15, $A = \{3n + 1 \mid n \le 4, n \in \mathbb{N}\}$. 8. Utilizăm principiul includerii și excluderii. 7 elevi sunt pasionați numai de matematică, iar un elev nu este pasionat de niciun obiect din cele 3. 9. 270 de elevi merg numai în excursie. 10. 8, $B = \{2n \mid n \le 6, n \in \mathbb{N}^*\}$. 12. Numărul din centrul pătratului se află la intersecția liniei 8 cu coloana 8. Pentru „a ajunge" la centrul pătratului, plecând din 1, vom trece prin 7 linii a 15 numere fiecare, adică la linia 8 ajungem trecând prin $7 \cdot 15 = 105$. Numărul din centrul pătratului se află în a opta pătrățică de pe linia 8, adică la numărul $105 + 8 = 113$. 14. $10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 720$. 15. a 111; b 314.

I.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. Numărul prim 97 se va afla în una din cele două mulțimi, deci produsele nu pot fi egale. 2. a 57, $B = \{11n + 2 \mid 2 \le n \le 7, n \in \mathbb{N}\}$; b 220, $B = \{11 \cdot [11 + 3n(n+1):2] \mid n \le 5, n \in \mathbb{N}\}$; c 11, $B = \{11(4n+1) \mid n \le 5, n \in \mathbb{N}\}$. 3. Deoarece mulțimea $A \cap B$ are 20 de elemente $\Rightarrow$ intersecția celor două mulțimi este $\{5 \cdot 2; 5 \cdot 3; ...; 5 \cdot 21\}$. Valorile lui a sunt 105, 106, 107, 108 și 109. 4. Elementele mulțimilor sunt de forma: $1; 1 + 2; 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + ... + n$ sau $1 \cdot 2:2$; $2 \cdot 3:2$; ...; $n(n+1):2$. a $55 = 10 \cdot 11:2$ și de aici avem $55 \in M_{10} \setminus M_9$; b $63 \cdot 64:2 = 2016$, $62 \cdot 63:2 = 1953$; avem că nu există $t \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2006 \in M_t$; c Numerele care se împart exact la 5 din M_{2006} sunt de forma $(5k-1)5k:2$ sau $5k(5k+1):2$ și primele două numere sunt $4 \cdot 5:2$, $5 \cdot 6:2$, iar ultimele două numere sunt $2004 \cdot 2005:2$, $2005 \cdot 2006:2$. În concluzie sunt $2 \cdot 401 = 802$ numere care se împart exact la 5. 5. Mulțimile sunt $A = \{1; 2; 3; ...; 49; 51; 52; ...; 70; 90\}$ și $B = \{50; 71; 72; ...; 89; 91; 92; ...; 100\}$. 6. Elementele mulțimii A sunt de forma $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ și elementele mulțimii B sunt de forma $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{n-1} = (3^n - 1):2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Observăm că $1 \in A \cap B$. Arătăm că $A \cap B = \{1\}$. Dacă mulțimile A și B ar mai avea un element comun diferit de 1, atunci ar exista $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \ge 2$ astfel încât $2^k - 1 = (3^n - 1):2 \Leftrightarrow 2^{k+1} = 3^n + 1$. Pentru orice $k \ge 2$, avem $2^{k+1} = M_8$ și $3^n + 1 = \begin{cases} M_8 + 2, \text{ dacă } n \text{ este par} \\ M_8 + 4, \text{ dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$, deci egalitatea $2^{k+1} = 3^n + 1$ este imposibilă, oricare ar fi $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \ge 2$. În concluzie, $A \cap B = \{1\}$. 7. card $A = a = 3^{26} - 2^{36}$ și card $B = b = 2^{40} - 3^{25}$. Avem succesiv $3^{26} - 2^{36} < 2^{40} - 3^{25}$ sau $3^{26} + 3^{25} < 2^{40} + 2^{36}$ sau $3^{25} \cdot 4 < 2^{36} \cdot 17$ sau $3^{25} < 2^{36} \cdot 17$. Dar $2^{36} \cdot 17 > 2^{36} \cdot 16 = 2^{40} = (2^8)^5 = 256^5 > 243^5 = 3^{25}$. În concluzie, $a < b$. 8. $\overline{bc} = \overline{ac}$ și $\overline{ab} = \overline{bc} + 1 \Rightarrow a = b$ și $a = c + 1$. $A = \{110, 221, 332, 443, 554, 665, 776, 887, 998\}$. 9. a $A(55, 110) = \{56, 57, 58, ..., 108, 109\}$ și $A(56, 112) = \{57, 58, ..., 109, 110, 111\}$, deci $A(55, 110) \cap A(56, 112) = \{57, 58, ..., 109\}$; b $S = n(1, 2) + n(2, 4) + ... + n(56, 112) = 1540$. 11. Suma cifrelor de 7 este $200 \cdot 7 = 1400$; suma cifrelor rămase este $2003 - 1400 = 603$; numărul cifrelor rămase este $2003 - 200 = 1803$; cifrele nule sunt $1803 - 603 = 1200$. 12. $6 \in A \cap B \Rightarrow 6 \in A \Rightarrow 13 \in A \cap B \Rightarrow 13 \in A \Rightarrow 27 \in A \cap B \Rightarrow 27 = 3 \cdot 9 \in B \Rightarrow 9 \in A$. 13. Dacă $A \cap B = C$, atunci soluțiile sunt de forma $A = C \cup X$, $B = C \cup (\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} - X)$ și $X \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $X \cap C = \varnothing$ (1). Astfel, pentru fiecare C fixat, numărul perechilor de mulțimi (A, B) este egal cu numărul de mulțimi X care verifică condițiile (1). Apar cazurile:

1. $A \cap B = \varnothing$; numărul mulțimilor X căutate care verifică (1) este 2^8.
2. $X \cap C = \{a\}$, unde $a \in \{2; 4; 6; 8\}$; numărul mulțimilor căutate care verifică (1) este de fiecare data 2^7 și cum $a \in \{2; 4; 6; 8\}$ avem în total $4 \cdot 2^7$ mulțimi.
3. $A \cap B = \{a, b\}$ și $\{a, b\} \subset \{2; 4; 6; 8\}$; numărul mulțimilor căutate care verifică (1) este de fiecare data 2^6 și cum $a \subset \{2; 4; 6; 8\}$ avem în total $6 \cdot 2^6$ mulțimi.

4. $A \cap B = \{a, b, c\}$ și $\{a, b, c\} \subset \{2; 4; 6; 8\}$; numărul mulțimilor căutate care verifică (1) este de fiecare data 2^5 și cum $\{a, b, c\} \subset \{2; 4; 6; 8\}$ avem în total $4 \cdot 2^5$ mulțimi.

5. $A \cap B = \{2; 4; 6; 8\}$; numărul mulțimilor căutate care verifică (1) este 2^4.

În total avem $2^8 + 4 \cdot 2^7 + 6 \cdot 2^6 + 4 \cdot 2^5 + 2^4 = 1\ 296$ **15.** $U(n^2+n+1) \in \{1,2,3,7\}$ și $U(5k^2-1) \in \{4,9\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$. **17.** $M = \{5\,685, 6\,015, 6\,240\}$. **19.** Dacă Y are 3 elemente, atunci $Y = \{2,3,4\}$ și $X = \{1,2,3,4,5,7\}$. Dacă Y are 4 elemente, atunci $Y = \{2,3,4,6\}$ și $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. **20.** Dacă $A \cap B = \{17\}$, atunci $A = \{13,14,15,16,17\}$ și $B = \{17,18,19,20,21\}$. Dacă $A \cap B = \{8,9\}$, atunci $A = \{0,1,...,9\}$ și $B = \{8,9,...,17\}$. **21.** $A = \{2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{1,2,4,6\}$. **22.** Problema admite 7 soluții: **1)** $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$; **2)** $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{3\}$; **3)** $A = \{1\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{3\}$; **4)** $A = \{1\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{3\}$; **5)** $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2,3\}$; **6)** $A = \{1,2\}$, $B = \{3\}$, $C = \{2,3\}$; **7)** $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{2,3\}$. **28.** $A = \{19,29,39,...,99\}$, deci $\text{card}\,A = 9$. **30.** **a** Numerele din A nu au ultima cifră 0 dacă $p = 0$. Deoarece $0 \le q \le 10$, avem 11 numere; **b** un element din A se divide cu 10^3, dar nu se divide cu 10^4 pentru $p = 3$ și $q \ge 3$ (8 numere) sau $p \ge 3$ și $q = 3$ (8 numere); **c** $2^3 \cdot 5^n$. **31.** $C = \{1, 5, 8, 9, 12\} \cup \{x, x+1, x+4, x+5, x+7, 2x\}$. Mulțimea C are număr minim de elemente dacă cele două mulțimi din reuniune au cel mai mare număr de elemente în comun. Pentru $x = 1$, $C = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 12\}$. **39.** Studiem cazul $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Avem $A = \{1, 2, 3, ..., 2k, 2k+1\}$ și $\text{card}\,M_1 = (k-1) \cdot k : 2$, $\text{card}\,M_2 = k \cdot (k+1) : 2$. Obținem $\text{card}M = 2k^2 + k > 2k^2 = 2 \cdot \text{card}(M_1 \cup M_2)$. **40.** **a** Fie $13n$, $n \in \mathbb{N}^*$, un multiplu de 13. Se observă că mulțimea $M = \{n, 3n, 4n, 5n\}$ este completă, iar suma elementelor lui M este $13n$; **b** Fie $S = \{a, b, c, d\}$ o mulțime completă, $a < b < c < d$. Atunci a și b pot fi scrise doar ca diferența a două elemente distincte ale lui S, iar d poate fi scris numai ca suma a două elemente distincte ale lui S. Ca urmare, $d \in \{a+b, a+c, b+c\}$, iar $c \in \{d-a, d-b, a+b\}$. În plus, d nu poate fi $a+b$, deoarece ar rezulta $c = b$ sau $c = a$ sau $c = d$. Așadar, mulțimile complete sunt de forma $\{a, b, a+b, 2a+b\}$ (1) sau $\{a, b, a+b, a+2b\}$ (2).

1. Dacă $S = \{a, b, a+b, 2a+b\}$, atunci $2a + b \le 50 \Rightarrow 3a \le 50 \Rightarrow a \le 16$ și $a < b \le 50 - 2a$.

- pentru $a = 1 \Rightarrow b \in \{2, 3, ..., 48\} \rightarrow 47$ mulțimi
- pentru $a = 2 \Rightarrow b \in \{3, 4, ..., 46\} \rightarrow 44$ mulțimi
- pentru $a = 3 \Rightarrow b \in \{4, 5, ..., 44\} \rightarrow 41$ mulțimi

....

- pentru $a = 15 \Rightarrow b \in \{16, 17, ..., 20 \rightarrow 5$ mulțimi
- pentru $a = 16 \Rightarrow b \in \{17, 18\} \rightarrow 2$ mulțimi

Sunt $2 + 5 + 8 + ... + 44 + 47 = 392$ mulțimi complete de tipul (1).

2. Dacă $S = \{a, b, a+b, a+2b\}$, atunci $a + 2b \le 50 \Rightarrow 3a \le 50 \Rightarrow a \le 16$ și $a < b \le (50 - a) : 2$.

- pentru $a = 1 \Rightarrow b \in \{2, 3, ..., 24\} \rightarrow 23$ mulțimi
- pentru $a = 2 \Rightarrow b \in \{3, 4, ..., 24\} \rightarrow 22$ mulțimi
- pentru $a = 3 \Rightarrow b \in \{4, 5, ..., 23\} \rightarrow 20$ mulțimi
- pentru $a = 4 \Rightarrow b \in \{5, 6, ..., 23\} \rightarrow 19$ mulțimi
- pentru $a = 5 \Rightarrow b \in \{6, 7, ..., 22\} \rightarrow 17$ mulțimi
- pentru $a = 6 \Rightarrow b \in \{7, 8, ..., 22\} \rightarrow 16$ mulțimi

....

- pentru $a = 15 \Rightarrow b \in \{16, 17\} \rightarrow 2$ mulțimi
- pentru $a = 16 \Rightarrow b = 17 \rightarrow 1$ mulțime

Sunt $1 + 2 + 4 + 5 + ... + 22 + 23 = (1 + 2 + ... + 24) - (3 + 6 + ... + 24) = 192$ mulțimi complete de tipul (2). Așadar mulțimea $\{1, 2, ..., 50\}$ are $392 + 192 = 584$ submulțimi complete.

44. **a** $9 = 5 \cdot 2 - 1$, $14 = 5 \cdot 3 - 1$, ..., $10\,049 = 5 \cdot 2010 - 1$. În concluzie, mulțimea are 2009 elemente. **b** Observăm că $14 + 10\,049 = 19 + 10\,044 = 5029 + 5034 = 10\,063$. Avem 1004 perechi de numere cu suma 10 063. Cea mai nefavorabilă modalitate de construcție a mulțimii B ar fi atunci când 1004 elemente ar fi câte un element din cele 1 004 perechi și al 1005-lea element ar fi 9. Al 1006-lea element este din cele 1004 perechi care împreună cu un element deja aflat în B va da suma 10 063. **45.** $\text{card}\,A = 3^{2003} \cdot 2^3 = 3^{2002} \cdot 3 \cdot 2^3 > 2^{2002} \cdot 2^3 \cdot 3 = 2^{2005} \cdot 3 = \text{card}\,B$.

II. Divizibilitatea numerelor naturale

II.1. Divizibilitatea numerelor naturale (recapitulare)

1. a $\vdots$; b $\vdots$; c $\not\vdots$; d $\not\vdots$; e $\vdots$; f $\not\vdots$; g $\vdots$; h $\vdots$. **2.** a $|$; b $|$; c $\nmid$; d $|$; e $\nmid$; f $|$; g $|$; h $|$. **3.** a $\vdots$; b $|$; c $\vdots$; d $\vdots$; e $|$; f $\vdots$; g $|$; h $|$. **4.** a $\{1, 2, 5, 10\}$; b $\{1, 2, 3, 6\}$; c $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$; d $\{1, 5, 7, 35\}$; e $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$. **5.** a 70; b 390; c 7 200, 7 210, ..., 7 290. **6.** a 790, 792, 794, 796, 798; b 604, 614, 624, ..., 694; c 800, 822, 844, 866, 888; d 194, 294, 394, ..., 994. **7.** a $a \in \{0, 5\}$; b $b \in \{0, 1, ..., 9\}$; c $c \in \{1, 2, ..., 9\}$; d $d \in \{0, 5\}$. **8.** a 702, 732, 762, 792; b 951, 954, 957; c 2 031, 2 034, 2037; d 240, 540, 840. **9.** a $x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b $x \in \{0,3,6,9\}$; c $x \in \{0, 5\}$; d $x \in \{0, 9\}$; e $x \in \{0, 5\}$; f $x = 0$. **10.** a 320, 324, 328; b 312,332,352,372,392; c 312,316; d 300,320, 340, 360, 380; e nu există; f 3028, 3128, 3228, ...,3928. **11.** a 153; b 279; c 3132; d 567. **12.** a (2,12); (3,8); (4,6); (1,24); b (1,2); (1,4); (1,6); (1,12); (3,2); (3,4); (3,6); (3,12); d 5 și 8 admit ca multiplu numărul 40; e 12. **13.** (5,5), (6,2), (6,3), (8,2), (8,4), (10,2), (10,5), (12,2), (12,3), (12,4), (15,3), (15,5). **14.** a 32; b 36. **15.** a 0, 4, 24; b 2, 38; c 4, 6. **16.** a $n \in \{0, 2, 12\}$; b $n \in \{4, 49\}$; c $n \in \{1, 5\}$. **17.** a $2+102=104$; b 2; 97; c 97; 2; d 5; 13. **18.** 102, 105, 108, 111, 114. **19.** a $x \in \{2, 4, 10\}$; b $x \in \{0, 2, 12\}$. **20.** a Fie $d \in \mathbb{N}$, numărul natural care prin împărțire la 18 dă restul 12. Așadar $d = 18\hat{i} + 12$, cu condiția $\hat{i} \in \mathbb{N}^*$. Imediat $d = 6(3\hat{i} + 2) \Rightarrow d \vdots 6$. **21.** a Nu. Dacă p este impar, atunci $p + 7$ este par, deci nu este prim. Dacă $p = 2$, atunci $p + 2 = 9$, care este compus. b $a = 2$, $b = 1019$, $c = 977$. c $y + z$ este impar și atunci $y = 2$ sau $z = 2$. S obține soluțiile (x, y, z): (3, 5, 2); (3, 2, 5); (2, 2, 7); (2, 7, 2). **22.** a Exponenții sunt $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$. Avem $5^{2n} + 5^{2n+2} + 5^{2n+4} + 5^{2n+6} = (5^2)^n + (5^2)^{n+1} + (5^2)^{n+2} + (5^2)^{n+3} = 25^n + 25^{n+1} + 25^{n+2} + 25^{n+3} = 25^n(1 + 25 + 25^2 + 25^3) = 25^n[(1 + 25) + 25^2(1 + 25)] = 25^n(26 + 26 \cdot 25^2) = 25^n \cdot 26 \cdot (1 + 25^2) = 26 \cdot 25 \cdot k = 130 \cdot 5 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}^*$. **23.** a $B = \{268, 402, 536, 804\}$; b {134, 402, 536, 938}, {134, 268, 670, 938}, {268, 402, 536, 804}, {134, 268, 402, 1206}, {134, 268, 536, 1072}, {134, 670, 804}. **24.** Nu. Sugestie: În ce mulțime veți plasa, de exemplu, pe 97? **25.** a Observăm că cele cinci numere date, $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$ și $n + 15$, dau resturi diferite la împărțirea cu 5. Ca urmare, vom face o discuție după restul obținut prin împărțirea lui n la 5. Conform teoremei împărțirii cu rest, există $k \in \mathbb{N}$, astfel încât n să aibă una din formele $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$ sau $5k + 4$. Pentru $k = 0$, obținem $n = 4$, iar numerele determinate 5, 7, 11, 13 și 19 sunt toate prime. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$:

- Dacă $n = 5k$, atunci $n + 15 = 5k + 15 = 5(k + 3)$ este număr compus, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.
- Dacă $n = 5k + 1$, atunci $n + 9 = 5k + 10 = 5(k + 2)$ este compus, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.
- Dacă $n = 5k + 2$, atunci $n + 3 = 5k + 5 = 5(k + 1)$, care este număr compus pentru orice $k \geq 1$. Pentru $k = 0$, obținem $n = 2$, pentru care $n + 7 = 9$, care este număr compus.
- Dacă $n = 5k + 3$, atunci $n + 7 = 5k + 10 = 5(k + 2)$ este compus, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.
- Dacă $n = 5k + 4$, atunci $n + 1 = 5k + 5 = 5(k + 1)$, care este număr compus, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$. Așadar, problema are o singură soluție, și anume $n = 4$.

b Raționând analog, se obține $n = 7$.

26. a $n = 4^{2011} = (3+1)^{2011} = M_3 + 1$; b $n = 4^{2011} > 4^{2010} = (2^{10})^{402} > 1000^{402} = 10^{1206} \Leftrightarrow n > 10^{1206} \to n$ are cel puțin 1207 de cifre. c Fie $n = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1} \dots a_p}$.
Conform a Numărul $n = M_3 + 1 \Leftrightarrow [(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_p)] = M_3 + 1$. Fie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ cifrele eliminate. Atunci $\overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_p} + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) = M_3 + 1$ și am obținut un invariant. Dacă toate cele zece cifre ar fi diferite două câte două, atunci suma lor ar fi $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45 = M_3$. Deci cel puțin două cifre sunt egale.

II.2. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

4. 6; 10. **5.** 30. **6.** 2310. **7.** Trei moduri. **8.** 882, 350, 1300. **9.** a $n = 3$, $m = 2$; b $n = 2$, $m = 2$, $p = 1$. **10.** 5; 6; 12; 6; 4; 16. **12.** $734 = (5 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 3) = (5 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 7)$; **13.** $1260 = 10 \cdot 6 \cdot 21 = 4 \cdot 15 \cdot 21 = 9 \cdot 14 \cdot 10 = 9 \cdot 4 \cdot 35$. **14.** a $D_{a^2} = \{1; a; a^2\}$; $D_{a^3} = \{1, a, a^2, a^3\}$; b $D_{a^2b} = \{1, a, b, a^2, a \cdot b, a^2 \cdot b\}$. **15.** 115500. **16.** 4, 9, 25, 49. **17.** a $m = 5$; b $(m, n) \in \{(1, 2); (2, 1)\}$. **18.** Nu. **19.** 2^5; 3^3; $2 \cdot 3^2$; $3 \cdot 5^2$; $5 \cdot 7^2$. **20.** $n = 2^a \cdot 3^b$, $\{a, b\} = \{1, 4\} \Rightarrow n = 162$ și $n = 48$. **21.** $n \in \{7; 49\}$. **22.** $n = 2^m \cdot 3^p \cdot 5^r$, $(m+1)(p+1)(r+1) = 12 \Rightarrow (m, p, r) \in \{(1,1,2); (1,2,1); (2,1,1)\} \Rightarrow n \in \{150; 90; 60\}$. **23.** $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2 = 48600$. **24.** 54. **25.** a $2 \cdot 3 \cdot 4$; b $8 \cdot 9 \cdot 10$; c $24 \cdot 25 \cdot 26$; d $140 \cdot 141 \cdot 142$. **26.** $x = 4$, $y = 23$ sau $x = 2$, $y = 92$. **27.** $(x, y) \in \{(2,95); (3,40); (6,7)\}$. **28.** $n = 4$. **29.** a $\overline{aaaa} = a \cdot 11 \cdot 101$; 8 divizori; b 4; c 16; d $\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10101 = \overline{ab} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \Rightarrow \overline{ab}$ trebuie să fie număr prim pentru ca numărul divizorilor să fie

minim $\Rightarrow$ max $\overline{ab}=97$. **30.** a Pentru ca numărul să aibă 15 divizori, trebuie să admită o descompunere în factori primi de forma a^{14} sau $a^2\cdot b^4$, iar pentru ca numărul să fie cât mai mic, trebuie ca a şi b să fie cele mai mici numere prime. Dintre 2^{14} şi $3^2\cdot 2^4$, mai mic este $3^2\cdot 2^4$. b $2^6\cdot 3^2\cdot 5=2880$; c $2^6\cdot 3=192$; **31.** $m=2^4$; $p=11\cdot 2^4$; $A=11\cdot 2^4$; card $D_A=10$. **32.** a Fie $n\in\mathbb{N}$ numărul căutat. Având 4 divizori, avem $n=a^3$ sau $n=ab$, unde a şi b sunt numere prime, distincte. Dacă $n=a^3\Rightarrow D_n=\{1;a;a^2;a^3\}$, de unde $1\cdot a\cdot a^2\cdot a^3=1521 \Leftrightarrow a^6=1521=3^2\cdot 13^2$, ceea ce este imposibil. Dacă $n=ab\Rightarrow D_n=\{1;a;b;ab\}$ şi deci $1\cdot a\cdot b\cdot ab=1521 \Leftrightarrow (ab)^2=(3\cdot 13)^2 \Rightarrow ab=39$. b 65; c Deducem că numărul n are 8 divizori naturali. Atunci $n=a^7$, $n=a^3\cdot b$ sau $n=a\cdot b\cdot c$, cu a, b, c numere prime distincte $2097152=2^{21}=a\cdot a^2\cdot a^3\cdot a^4\cdot a^5\cdot a^6=a^{21}\Rightarrow a=2\Rightarrow n=2^7=128$. **33.** a $3\cdot 4$; b $33\cdot 34$; c $333\cdot 334$;
d $\underbrace{111\ldots1}\underbrace{222\ldots2}=\underbrace{111\ldots1}\underbrace{000\ldots0}+222\ldots2=111\ldots1\cdot 10^{2009}+2\cdot 111\ldots1=$

$=111\ldots1\cdot(10^{2009}+2)=\underbrace{111\ldots1}\cdot\underbrace{1000\ldots02}=111\ldots1\cdot 3\cdot 333\ldots34=\underbrace{333\ldots3}\cdot\underbrace{333\ldots34}$. Cele două numere naturale, consecutive sunt $\underbrace{333\ldots3}$ şi $\underbrace{333\ldots34}$. **34.** a $6\cdot 7$; b $66\cdot 67$; c $666\cdot 667$; d $\underbrace{66\ldots6}\cdot\underbrace{66\ldots67}$. **35.** Fie $C=\{1;2;3;4;6;7;8;9\}$ muţimea formată din cele mai mici opt numere naturale nenule, a.î. produsul elementelor să nu fie divizibil cu 5. Suma elementelor este 40. Ar trebui să mai adăugăm două elemente cu suma egală cu 22. Această cerinţă este posibilă, doar dacă adaugăm 5 şi 17 sau 10 şi 12, caz în care produsul elementelor este divizibil cu 60. **36.** Fie n număr *drăguţ* şi d un divizor propriu al său $\Rightarrow n/d$ este divizor propriu al lui n. Evident, $d\cdot(n/d)=n$ şi ţinând cont de ipoteză, deducem că n are doar 2 divizori proprii $\Rightarrow n=p^3$ sau $n=p\cdot q$, cu p şi q prime, distincte. Atunci $S=6+8+10+14+15+21+22+26+27+33+34=216=6^3$, cub perfect.

II.3. Divizori comuni. Determinarea c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere naturale

3. a 8; b 60; c 5; d 25; e 9; f 12; g 7; h 85; i 1. **4.** a $\{1, 13\}$; b $\{1, 5, 25\}$; c $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$; d $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; e $\{1, 2, 4, 8\}$; f $\{1, 13\}$. **5.** a 11; b 1, 3, 5, 15. **8.** *a*), *d*), *e*). **9.** a Oricare două numere prime sunt şi prime între ele; b 4 şi 9; 6 şi 25; 8 şi 15; 9 şi 10; 20 şi 21. **10.** a 9, 27, 45; b 5, 7; c Nu. **11.** a $a=12$; b $a=5$, $b=10$; c $a=24$, $b=8$; d $a=2$, $b=6$. **12.** $a\,\vdots\,18$, $b\,\vdots\,18\Rightarrow a+b\,\vdots\,18\Rightarrow a+b=k\cdot 18$, iar k este sumă de două numere prime între ele. Răspuns 198, $a=5\cdot 18$, $b=6\cdot 18$. **13.** $a\cdot b=6x\cdot 6y$; 180 sau 252. **15.** $100001=11\cdot 9091$; $300003=3\cdot 11\cdot 9091$. **16.** a $(13;56)$; b $(15;35)$; c $(18;63)$; d $(56;80)$; e $(60;15)$. **17.** a $\overline{a12b}\,\vdots\,12\Rightarrow\overline{a12b}\,\vdots\,4$ şi $\overline{a12b}\,\vdots\,3$; din $\overline{a12b}\,\vdots\,4\Rightarrow\overline{2b}\,\vdots\,4\Rightarrow b\in\{0;4;8\}$; dacă $b=0\Rightarrow a\in\{3;6;9\}$; dacă $b=4\Rightarrow a\in\{2;5;8\}$; dacă $b=8\Rightarrow a\in\{1;4;7\}$. c $\overline{c9b}\,\vdots\,5$ şi $\overline{c9b}\,\vdots\,3$; d $\overline{a77b}\,\vdots\,2$; $\overline{a77b}\,\vdots\,9$; f $c=0$, $\overline{7ab}\,\vdots\,4$ şi $\overline{7ab}\,\vdots\,9$. **18.** a $(84;140)\,\vdots\,\overline{ab}\Rightarrow\overline{ab}\in\{28;14\}$; b $55\,\vdots\,\overline{ab}\Rightarrow\overline{ab}\in\{11;55\}$. c 13. **19.** b $i\in\{140;70;35;28;20;14\}$; c $i\in\{120;60;40;30;24\}$. **20.** b $(a,b)\in\{(15;165);(75;105);(105;75);(165;15)\}$; c $(162;126)$; d $(a,b)\in\{(8;160)\}\cup\{(32,40);(40;32);(160;8)\}$. **21.** a Din relaţia dată obţinem $4b\,\vdots\,3\Rightarrow b\,\vdots\,3$. Cum $3a+4b=39$ şi $3a\geq 3$, rezultă $4b\leq 36$, adică $b\leq 9$, deci $b\in\{3;6;9\}$. Dacă $b=3\Rightarrow a=9\Rightarrow(a;b)=3\Rightarrow a$ şi b nu sunt prime între ele. Dacă $b=6\Rightarrow$ $\Rightarrow a=5\Rightarrow(a,b)=1$, convine, iar dacă $b=9\Rightarrow a=1\Rightarrow(a;b)=1$, convine. Deci problema admite două soluţii: $(a,b)\in\{(5,6);(1,9)\}$; b $(a,b)\in\{(4,21),(8,15),(16,3)\}$. **22.** $x+y=24+5=29$. **23.** b Fie $(n,n+1)=d\Rightarrow$ $\Rightarrow n+1\,\vdots\,d$ şi $n\,\vdots\,d\Rightarrow n+1-n\,\vdots\,d\Rightarrow 1\,\vdots\,d\Rightarrow d=1$. **25.** a $n\in\{1,4,7,10,13,16,19\}$; b $(4n+3;3n+6)\in\{3,5,15\}$, $(n-3)\,\vdots\,d$, cu $d\in\{3;5;15\}$; $n\in\{3k;5k+3;15k+3\}$; $n\in\{0;3;6;\ldots\}$ sau $n\in\{3;8;13;\ldots\}$ sau $n\in\{3;18;33;\ldots\}$. Alegem 5 valori. **26.** x, y numărul camerelor cu 3 paturi, respectiv, cu 4 paturi. Din cele 8 cazuri posibile convin: $(x,y)\in\{(20,10);(16,13);(12,16)\}$. **27.** $2b+3t+4a=21$. Deoarece $2b+3t\geq 5$, deducem că $a\in\{2,3,4\}$. Soluţiile sunt: $(a,b,t)\in\{(2,5,1),(2,2,3),(3,3,1),(4,1,1)\}$. **29.** Fie $a,b\in\mathbb{N}^*$, $a>b$, $(a;b)=d$ cu $d\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(\exists)x$ şi $y\in\mathbb{N}^*$, cu $(x;y)=1$, a.î. $a=dx$ şi $b=dy$. Din $a>b\Rightarrow x>y\Rightarrow x-y>0$; obţinem $x-y\geq 1$, de unde $a-b=dx-dy=d(x-y)$. Atunci $d\leq a-b$, cu egalitate dacă $x-y=1$. Orice divizor comun al numerelor a şi b este mai mic sau egal cu d. Deducem că orice divizor comun al numerelor a şi b este mai mic sau egal cu $a-b$. **31.** Din enunţ $15a+5c=13b^2$ $\Leftrightarrow 5(3a+c)=13b^2$ $(\forall)\,a,b,c\in\mathbb{N}\Rightarrow 3a+c$ şi $13b^2\in\mathbb{N}$. Din $5(3a+c)\,\vdots\,5$, obţinem $13b^2\,\vdots\,5$ şi cum $(13;5)=1\Rightarrow$ $\Rightarrow b^2\,\vdots\,5\Rightarrow b\,\vdots\,5$. Din $15a+5c=13b^2\Rightarrow 15a+18c=13b^2+13c\Rightarrow 3(5a+6c)=13(b^2+c)\Rightarrow 3(5a+6c)\,\vdots\,13$ şi cum $(3;13)=1\Rightarrow(5a+6c)\,\vdots\,13$. Din $b\,\vdots\,5$ şi $(5a+6c)\,\vdots\,13\Rightarrow b(5a+6c)\,\vdots\,65$. **32.** $21b+3a=11c^2\Leftrightarrow 3(7b+a)=11c^2\Rightarrow$ $\Rightarrow 11c^2\,\vdots\,3\ldots\Rightarrow c\,\vdots\,3$. $21b+14a=11c^2+11a\Leftrightarrow 7(3b+2a)=11(c^2+a)\Rightarrow\ldots\Rightarrow(3b+2a)\,\vdots\,11$. **33.** $(n+1;2n+5)$, $(n+2;2n+7)$ şi $(n+1002;2n+2007)\in\{1;3\}$. Dacă $(n+1)\,\vdots\,3\Rightarrow(n+2)\not\vdots\,3$ şi $(n+1002)\not\vdots\,3$. În final, $S=5$.

II.4. Multipli comuni. Determinarea c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere naturale

2. **a** 10; **b** 6; **c** 9; **d** 30; **e** 40; **f** 25; **g** 60; **h** 24. **4.** **a** 72; **b** 98; **c** 5184; **d** 105; **e** 2337; **f** 3042; **g** 135; **h** 1936. **5.** **a** 210; **b** 240; **c** 168; **d** 980; **e** 700; **f** 216; **g** 240; **h** 720. **6.** **a** 12; **b** 4410; **c** 72; **d** 840; **e** 90; **f** 270; **g** 1452; **h** 144. **10.** $[5, 8] = [10, 8] = [40, 10] = 40$. **11.** **a** $a \in D_{18}$; **b** $a \in \{4, 12, 36\}$; **13.** **a** 0, 120, 240; **b** 240, 300, 360. **14.** $[2; 3; 4] = 12$. **15.** 6. **16.** **b** $\{73; 97; 121; 145; 169; 193; 217; 241\}$; **c** $\{264, 265, 266, 528, 529, 530, 792, 793, 794\}$; **d** Evident că $r \in \{0; 1; 2; ...; 110\}$; $d = 666k + r$, cu $k \in \mathbb{N}$, a.î. $99 < d < 1000 \Rightarrow k = 1$. Fiind 111 resturi, obținem 111 numere. **17.** 49. **18.** $(d-4) \vdots [24; 36]$; $d = 72k + 4$. Din $(72k + 4) \vdots 7 \Rightarrow (2k + 4) \vdots 7 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow d = 364$. **19.** Din $d \vdots 3$, $d \vdots 4$, $d \vdots 5 \Rightarrow d \vdots 60 \Rightarrow d = 60k$; $60k = 7t + 1 \Leftrightarrow 56k + (4k - 1) = 7t \Rightarrow (4k - 1) \vdots 7 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow d = 120$. **20.** Pot fi 23, 25 sau 29 elevi. **21.** **a** $\begin{cases} d = 6a + 5 \Rightarrow d + 1 = 6a + 6 \Rightarrow d + 1 = 6(a + 1) \Rightarrow (d + 1) \vdots 6 \\ d = 5b + 4 \Rightarrow d + 1 = 5b + 5 \Rightarrow d + 1 = 5(b + 1) \Rightarrow (d + 1) \vdots 5 \end{cases}$ $\Rightarrow (d + 1) \vdots [6; 5] \Rightarrow (d + 1) \vdots 30 \Rightarrow (\exists)\ k \in \mathbb{N}^*$, a.î. $d + 1 = 30k \Rightarrow d = 30k - 1 \Rightarrow d = 29$. **b** $(\overline{abc} + 3) \vdots [72; 60]$; $\overline{abc} \in \{357; 717\}$. **c** $\overline{abc} \in \{235; 475; 715; 955\}$ **22.** **b** $\overline{abc} = 18x + 13$; $x \geq 5$; $18x + 13 = 7t + 6$; $x \vdots 7$; $\overline{abc} = 139$. **c** $\overline{abcd} = 35x + 29$; $35x + 29 \geq 1000 \Rightarrow x \geq 28$; $35x + 29 = 12t + 7$; $11(x + 2) \vdots 12 \Rightarrow (x + 2) \vdots 12$; $x = 34$; $\overline{abcd} = 1219$. **23.** **a** Din $(a; b) = 18 \Rightarrow (\exists)\ x, y \in \mathbb{N}^*$, a.î. $a = 18x$; $b = 18y$ cu condiția $(x, y) = 1$; $(a; b) \cdot [a; b] = ab \Rightarrow ab = 18 \cdot 216$; $xy = 12$; $(a; b) \in \{(18; 216), (54; 72)\}$. **b** $ab = (a; b) \cdot [a; b] = 400$; $a = 15x$; $b = 15y$, cu $(x; y) = 1$; $15x \cdot 15y = 5\,400 \Rightarrow xy = 24$; $(x; y) \in \{(1; 24), (3; 8)\}$; $(a; b) \in \{(15; 360), (45; 120)\}$. **c** $(a; b) = 2\,880 : 240 = 12$; $12x \cdot 12y = 2\,880$; $xy = 20$; $(a, b) \in \{(12; 240), (48; 60)\}$. **d** $ab = 72 \Leftrightarrow d \cdot dxy = 72 = 2^3 \cdot 3^2 \Rightarrow d^2 \in \{1^2; 2^2; 3^2; 6^2\}$; $(a, b) \in \{(1, 72), (2, 36), (3, 24), (4, 18), (6, 12), (8, 9)\}$. **e** $d(xy + 1) = 20$; $(a, b) \in \{(1, 19), (2, 18), (4, 16), (5, 15)\}$. **f** $12x + 12y + 12xy = 2\,892 \Rightarrow y + xy = 241 \Rightarrow x(y + 1) + y = 241 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 242$; $x + (x; b) \in \{(12; 1\,440), (120, 252)\}$. **24.** $45 + 63 = 108$. **25.** $(a; b; n) \in \{(60; 420; 5), (420; 60; 5)\}$. **26.** $dx \cdot dy = 2 \cdot dxy + 25d + 30 \Rightarrow 30 \vdots d$. Convine cazul $d = 3 \Rightarrow xy = 35 \Rightarrow (a; b) \in \{(3; 105), (15; 21)\}$. **27.** **a** Fie $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$, mulțimea celor 8 numere distincte, cu $a_1 < a_2 < ... < a_8$ și $p = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_8$. Avem $s = a_1 + a_2 + ... + a_8 = 39$. Dacă $a_1 = 0 \Rightarrow p = 0 \vdots 360$. Dacă $a_1 \neq 0$, ținând cont că $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. • există cel puțin 3 numere pare sau unul par și unul divizibil cu 4 sau $a_i \vdots 8$, în caz contrar $s \geq 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 + 11 = 43 > 39$ (F). • există cel puțin 2 divizibile cu 3 sau unul divizibil cu 9, în caz contrar $s \geq 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 = 40 > 39$ (F). • există cel puțin unul divizibil cu 5, în caz contrar $s \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40 > 39$ (F) $\Rightarrow p \vdots [2^3; 3^2; 5] = 360$. **b** Raționament analog. **28.** **a** Testăm ce rest dă 2008 prin împărțire la 56. Cum $2008 = 56 \cdot 35 + 48 \Rightarrow (2008 - 48) = 56 \cdot 35 \Rightarrow 1960 \vdots 56$. Fie $B = \{x \in A \mid x \vdots 56\} \Rightarrow \{56; 112; 168; ...; 1960\} \Leftrightarrow B = \{56 \cdot 1; 56 \cdot 2; 56 \cdot 3; ...; 56 \cdot 35\} \Rightarrow \text{card}\, B = 35$, ceea ce înseamnă că în A sunt 35 de elemente divizibile cu 56. **b** Testăm ce rest dă 2008 prin împărțire la 84. Cum $2008 = 84 \cdot 23 + 76 \Rightarrow 1932 \vdots 84$. Fie $C = \{x \in A \mid x \vdots 84\} \Rightarrow C = \{84 \cdot 1; 84 \cdot 2; 84 \cdot 3; ...; 84 \cdot 23\} \Rightarrow \text{card}\, C = 23$. Din $x \vdots 56$ și $x \vdots 84 \Rightarrow x \vdots [56, 84] \Rightarrow x \vdots 168$. Testăm ce rest dă 2008 prin împărțire la 168. Cum $2008 = 168 \cdot 11 + 160 \Rightarrow 1848 \vdots 168 \Rightarrow B \cap C = \{168 \cdot 1; 168 \cdot 2, 168 \cdot 3; ...; 168 \cdot 11\}$, rezultă $\text{card}(B \cap C) = 11$, ceea ce înseamnă că în A sunt 11 elemente divizibile cu 56 și 84. Aplicăm principiul includerii și excluderii, obținem: $\text{card}(B \cup C) = \text{card}\, B + \text{card}\, C - \text{card}(B \cap C) = 47$. În A sunt 47 de elemente divizibile cu 56 sau 84. **c** Numărul elementelor din A care sunt divizibile cu 56 sau 84, dar nu sunt divizibile cu 168 se află calculând $\text{card}(B \setminus C) + \text{card}(C \setminus B) = 36$ sau $\text{card}(B \cup C) - \text{card}(B \cap C) = 47 - 11 = 36$.

II.5. Proprietăți ale relației de divizibilitate în N

1. **a** $780 \vdots 5$, $405 \vdots 5 \Rightarrow (780 + 405) \vdots 5 \Rightarrow$ **a** divizibilă; **b** divizibilă; **c)** nedivizibilă; **d** divizibilă; **e** divizibilă; **f** divizibilă; **g** divizibilă; **h** divizibilă; **i** divizibilă. **2.** **a** $n \in M_3$; **b** $n \notin M_3$; **c** $n \in M_3$; **d** $n \in M_3$; **e** $n \in M_3$; **f** $n \notin M_3$; **g** $n \in M_3$; **h** $n \in M_3$; **i** $n \notin M_3$. **4.** $x = 8$. **5.** $a = b \Rightarrow a - b = 0$. **6.** **a** $204 \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3$; **b** $505 \vdots 5 \Rightarrow p \vdots 5$; **c** $4\,005 \vdots 5 \Rightarrow p \vdots 5$; **d** $14 \vdots 7 \Rightarrow p \vdots 7$. **7.** **b** **8.** **a** Adevărat; **b** Adevărat; **c** Fals. **9.** **a** $3 + 3 + 3 + 3 + 3996$; **b** Nu, pentru că $2\,573 \not\vdots 3$. **10.** **a** fals; **b** adevărat; **c** adevărat; **d** adevărat. **11.** **a** adevărat; **b** fals; **c** fals; **d** fals; **e** adevărat; **f** adevărat; **g** fals. **12.** **a** $6 + 12 + 1 + 2$; **b** $5 + 10 + 15 + 3$. **13.** **a** Fie $d \in \mathbb{N}$, numărul natural care prin împărțire la 18 dă restul 12. Din teorema împărțirii cu rest, avem: $d = 18i + 12$, cu condiția $i \in \mathbb{N}^*$. $d = 6(3i + 2)$. Conform divizibilității produsului, $d \vdots 6$. **b** $n = 45c + 36 = 9 \cdot (5c + 4)$ așa că $n \vdots 9$. **c** Fie $d \in \mathbb{N}$, numărul natural care prin împărțire la 45 dă restul 36. Din teorema împărțirii cu rest, avem: $d = 45i + 36$, $i \in \mathbb{N}^*$. $d = 5 \cdot 9i + 5 \cdot 7 + 1 \Leftrightarrow d = 5(9i + 7) + 1$. Cum $1 \not\vdots 5 \Rightarrow d \not\vdots 5$. **14.** Avem $x \vdots 3$, $x \leq 48$, $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 3, 6, ..., 48\}$. **15.** **a** $\{1, 2, 4, 8\}$; **b** $\{1, 2, 5, 10\}$; **c** $\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$. **16.** **a** $\{1, 2, 5, 10\}$; **b** $\{1, 2, 4, 8\}$; **c** $\{1, 5\}$. **17.** **a** $n \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; **b** $n \in \{0, 5\}$; **c** $n \in \{2, 5, 8\}$; **d** $n \in \{7\}$; **e** $n \in \{1, 4, 7\}$; **f** $n \in \{9\}$. **18.** **a** $2S = 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2009} \Rightarrow 2S - S = 2^{2009} - 2 \Rightarrow S = 2^{2009} - 2$; **b** $U(S) = U((2^4)^{502} \cdot 2 - 2) = U(6 \cdot 2 - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S \vdots 5$; $S = (2^3)^{668} \cdot 2 - 2 = 8^{668} \cdot 2 - 2 = (7+1)^{668} \cdot 2 - 2 = (M_7 + 1) \cdot 2 - 2 = 7k \vdots 7$. **20.** b $56 \vdots \overline{xy} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{xy} \in \{14, 28, 56\}$. **21.** $3 | 6a$, $3 | 9b$ și $3 | 15c \Rightarrow 3 | (6a + 9b + 15c)$; $5 | 10 \Rightarrow 5 | 10abc$. **22.** a $3 | (2a + 7b)$, $3 | 15a$, $3 | 9b \Rightarrow 3 | (2a + 7b + 15a + 9b) \Rightarrow 3 | (17a + 16b)$. b $(32a + 43b) \vdots 5$; $30a \vdots 5$; $40b \vdots 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow (2a + 3b) \vdots 5$. **23.** $13 | 2(3x + 7y + 8z) + (2x + 6y + 5z) \Rightarrow 13 | (8x + 20y + 21z)$. **25.** a $x \in \{0, 1, 2, 3, 5, 11\}$; b $x = 0$; c $x \in \{0, 4, 18\}$. **27.** a $\overline{abc} - \overline{cba} = 9 \cdot 11(a - c) \vdots 11$. **28.** b $\overline{abc} + (\overline{bca} + \overline{cba}) = 37 \cdot 3 \cdot (a + b + c)$ și $37 | \overline{abc} \Rightarrow$ $\Rightarrow 37 | (\overline{bca} + \overline{cba})$. **30.** a În produsul x apar factorii 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, fiecare divizibil cu 5 (deci produsul lor este divizibil cu 5^7) și factorul $25 = 5^2$. Ca urmare, x este divizibil cu 5^9. b $n = 18$. **31.** a $A = 2^n \cdot (2^3 + 2^2 + 1) = 2^n \cdot 13$; b $n = 4$. **33.** a $E = 3^{n+2} \cdot 7^{n+2} - 3^n \cdot 7^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 7^{n+1}$; $E = 3^n \cdot 7^n \cdot (3^2 \cdot 7^2 - 7 + 3 \cdot 7)$; $E = 3^n \cdot 7^n \cdot 455 \vdots 455$. b $E = 3^{n-1} \cdot 7^n \cdot 3 \cdot 455 = 3^{n-1} \cdot 7^n \cdot 1\,365$. **34.** $\overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\} \Rightarrow 6$ variante, $\overline{c6} \vdots 4 \Rightarrow \overline{c6} \in \{16, 36, 56, 76, 96\} \Rightarrow 5$ sunt în total 30 variante. **35.** $10^n + 125 = \underbrace{100\ldots0}_{} + 125 = 1000\ldots0125$. Suma cifrelor este $9 \Rightarrow 10^n + 125 \vdots 9$. **36.** $a + b$ este număr impar $\Rightarrow$ unul dintre numere este par, iar celălalt este impar $\Rightarrow$ produsul lor este un număr par. **37.** a $a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 = 3(a + 1) \vdots 3$; b $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) = 4a + 6 = 2(2a + 3) \vdots 2 \Rightarrow$ suma are ultima cifră pară. **38.** a Dacă $n = 2k$, $n + 8 \vdots 2$ dacă $n = 2k + 1$, $n + 3 \vdots 2$. În ambele variante unul dintre factori este par. b $n = 3k$; $n + 9 \vdots 3$; $n = 3k + 1$; $n + 5 \vdots 3$; $n = 3k + 2$, $n + 1 \vdots 3$. În toate cele trei variante unul dintre factori se divide cu 3. **39.** Conform principiului cutiei, există cel puțin trei cifre care dau același rest prin împărțire la 3. **40.** Realizăm următoarea partiție a mulțimii A: $\{a; a + 3; a + 6; a + 9\}$, $\{a + 1; a + 4; a + 7\}$, $\{a + 2; a + 5; a + 8\}$. Fiecare submulțime conține numere care dau același rest prin împărțire la 3. **41.** Fie S, S_I, S_A, n, suma tuturor numerelor, suma numerelor de pe cartonașele Iuliei, suma numerelor de pe cartonașele lui Adrian, respectiv numărul de pe cartonașul rămas pe masă. Conform ipotezei, deducem că $S = 59$, deci $S_I + S_A + n = 59$. Dar $S_I = 4S_A$, așa că $5S_A + n = 59$. Rezultă că n și 59 dau același rest prin împărțire la 5, deci n este de forma $5k + 4$. Singurul număr dintre cele 7 de această formă este 4.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** $83 + 89 + 97 = 269$. **2.** a 7; b 252. **3.** $x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. **4.** 7 numere. **5.** $12b$ și 66 sunt numere pare, deci $a = 2$, iar $b = 5$. **6.** Avem $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.
a $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$; b $A \cap B = \{3, 6, 9, 18\}$; c $A \setminus B = \{12, 15\}$. **7.** $n \in \{1, 2, 3, 5\}$. **8.** $a \in \{3, 5, 9\}$. **9.** $[30, 120, 80] = 240$. 240 minute = 4 ore. Răspuns: $(22 - 6) : 4 + 1 = 5$.

Testul 2. **1.** 8, 6, 3, 4. **2.** 67 230, 67 275. **3.** c.m.m.d.c. = 6, c.m.m.m.c. = 1 800. **4.** $n = 3$. **5.** $[90, 45, 150] = 450$, deci 7 ore și 30 min. **6.** $b = 2$ și $a = 13$. **7.** $x \in \{1, 3, 7, 9\}$; **8.** $D_{42} \in \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. **9.** $[10, 24, 4] = 120$, deci a 120 cm, b 1 800 cărămizi.

Test-model pentru Evaluarea Națională

1. b 47 km. **2.** c $\{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$. **3.** 4. **4.** $U(a + 7) = 2 \Rightarrow a = 5$; 1982. **5.** 615 km.

II.6. Probleme cu caracter practic

2. Poate în 2 sau 4 zile, dar nu în 3 zile. **3.** 11. **4.** 721. **5.** 24. **6.** 252. **7.** a 180 cm; b 2700 cărămizi. **8.** a 192; b 12; cu 4. **9.** a $240 \vdots 40$, $480 \vdots 40$, $560 \vdots 40$; b $560 \not\vdots\ 60$; c 80. **10.** 4 sau 8. **11.** 27 ouă. **12.** pe treptele 6, 12, 18, 24. **13.** a 90 cm; b 10.

II.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. Fie $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 99 \cdot 100 + 100 \cdot 101$.
Această sumă are 100 de termeni. Asociindu-i doi câte doi, și dând factor comun, putem scrie:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2(1 + 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2^2$;

$3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 4(3 + 5) = 4 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot (4 \cdot 4) = 2 \cdot 4^2$;

$5\cdot6+6\cdot7=6(5+7)=6\cdot2\cdot6=2\cdot(6\cdot6)=2\cdot6^2$;

. . . .

$99\cdot100+100\cdot101=100(99+101)=100\cdot2\cdot100=2\cdot(100\cdot100)=2\cdot100^2$.

Însumând, membru cu membru, suma S devine: $S=2(2^2+4^2+6^2+...+100^2)=2a$.

2. $1\cdot3+3\cdot5=3(1+5)=3\cdot3\cdot2=2\cdot(3\cdot3)=2\cdot3^2$; $5\cdot7+7\cdot9=2\cdot7^2$; $9\cdot11+11\cdot13=2\cdot11^2$; $197\cdot199+$ $+199\cdot201=2\cdot199^2$, deci $S=2a$. **3.** $9a^{b+1}=3^8\Rightarrow a^{b+1}=81^1=9^2=3^4$, de unde $(a;b)\in\{(81;0),(9;1),(3;3)\}$.

4. Conform principiului parității, 2^c este impar $\Rightarrow c=0$; $4^a\cdot5^b+\overline{bb}=533$; $a=0$, nu convine. Dacă $a\in\mathbb{N}^*$, cum $b\neq0\Rightarrow U(4^a\cdot5^b)=0$; $b=3$; $a=1$. **5.** Cele 5 numere sunt 0, 1, 2, 3, 6 sau 0, 1, 2, 4, 5. **6.** **a** Presupune că $x\le y$ și ecuația se rescrie sub forma $2^x(1+2^{y-x}+2^y)=44$, de unde rezultă $2^x=4$ și $1+2^{y-x}+2^y=11$, deci $x=2$ și $y=3$. Așadar, soluțiile ecuației sunt (2; 3) și (3; 2). **b** În ipoteza $x\le10$ și $y>3$ avem $2^{10}(2^{x-10}+2^{x+y-10}+2^{3y-10})=2^{10}\cdot5\cdot13$, de unde rezultă că $2^{x-10}+2^{x+y-10}+2^{3y-10}=65$. Unul dintre exponenți trebuie să fie egal cu 0, iar ceilalți doi egali cu 5. Soluție: $x=10$, $y=5$. **7.** $\overline{ZU}(7^4)=01\Rightarrow\overline{ZU}(7^{4018})=\overline{ZU}[(7^4)^{1004}\cdot7^2]=49\Leftrightarrow\overline{a_1a_2}=49$. **8.** **b** $x=3n$; $y=n$; $n\in\mathbb{N}$.

9. **a** $x=\overline{abcd}=d+10c+100b+1000a=(a+b+c+d)+9c+99b+999a=(a+b+c+d)+M_9\Rightarrow$ $\Rightarrow\overline{abcd}-(a+b+c+d)=M_9$. **b** Invariantul este restul împărțirii numărului a la 9, pentru că el este același pentru a și pentru suma cifrelor, adică, atunci când suma rămâne cu o singură cifră, ea are același rest la împărțirea cu 9 ca numărul inițial a. Dar $a=2012^{2012}=(M_9+5)^{2012}=M_9+5^{2012}=M_9+(5^4)^{503}=M_9+(M_9+4)^{503}=M_9+4^{503}=M_9+$ $+4^{501}\cdot4^2=M_9+(4^3)^{167}\cdot16=M_9+(M_9+1)^{167}\cdot16=M_9+(M_9+1)\cdot16=M_9+7$. Deci ultima cifră este 7. **10.** Propoziția: „2^{110} are 34 de cifre" este adevărată dacă și numai dacă $\underbrace{1000...0}_{34\text{ cifre}}\le2^{110}<\underbrace{1000...0}_{35\text{ de cifre}}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow10^{33}\le2^{110}<10^{34}\Leftrightarrow2^{33}\cdot5^{33}\le2^{110}<2^{34}\cdot5^{34}\Leftrightarrow5^{33}\le2^{77}<2\cdot5^{34}$ (1); $5^{33}=(5^3)^{11}=125^{11}<128^{11}=(2^7)^{11}=2^{77}$ (2); $512^8<625^8\Rightarrow512^8\cdot16<625^8\cdot25\Rightarrow(2^9)^8\cdot2^4<(5^4)^8\cdot5^2\Rightarrow2^{72}\cdot2^4<5^{32}\cdot5^2\Rightarrow2^{76}<5^{34}\Rightarrow2^{77}<2\cdot5^{34}$ (3). Din relațiile (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ propoziția: „$2^{110}$are 34 de cifre" este adevărată. Observație: Dintre puterile lui 2 și 10 foarte apropiate sunt $2^{10}=1024$ și $10^3=1000$. De aceea, de regulă, o putere a lui 10 cu exponentul divizibil cu 3 se compară cu o putere a lui 2, astfel : $10^{33}=(10^3)^{11}=1000^{11}<1024^{11}=(2^{10})^{11}=2^{110}$. **13.** **a** $2009^n-2009^{n-1}=2009^{n-1}\cdot(2009-1)=2008\cdot2009^{n-1}\ge2008\cdot2008^{n-1}=2008^n$; **b** $2008^1\le2009^1-2009^0$; $2008^2\le2009^2-2009^1$;...; $2008^{2008}\le2009^{2008}-2009^{2007}$. În urma adunării acestor inegalități, obținem $2008+2008^2+...+2008^{2008}\le2009^{2008}-1$, de unde rezultă că $A\le B$. **14.** $A=9^{2011}=9^{2010}\cdot9=(9^{670})^3\cdot(1^3+2^3)=(9^{670})^3+(9^{670}\cdot2)^3$; $B=10^{2011}=10^{2010}\cdot10=(10^{1005})^2\cdot(1^2+3^2)=(10^{1005})^2+(10^{1005}\cdot3)^2$. **15.** **a** $a=107^2$; **b** $a^{2009}=107^{4018}$. Cum $\overline{ZU}(107)=07$, $\overline{ZU}(107^2)=49$, $\overline{ZU}(107^3)=43$, $\overline{ZU}(107^4)=01$ și $\overline{ZU}(107^5)=07$ deducem că rezultatele se repetă din 4 în 4 și cum $4018=4\cdot1004+2$, rezultă $\overline{ZU}(107^{4018})=49$. **16.** $x=5^{2n}\cdot6^2=(5^n\cdot6)^2$. **17.** $\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)\Rightarrow a+b=11$. Problema are 8 soluții: $\overline{ab}\in\{29,38,47,56,65,74,83,92\}$. **18.** **a** $U(x)=8$. **19.** Pentru $n\ge5$ avem $U(x)=3$, deci în acest caz x nu este pătrat perfect. Singura soluție este $n=2$. **20.** **a** $x=9n+32=3\cdot3n+3\cdot10+2=3(3n+$ $+10)+2$. Se știe sau se demonstrează că numerele de forma $3k+2$ nu pot fi pătrate perfecte. **b**, **c**, **d** Analog. **21.** **a), b):** Se poate arăta și că x, z au forma $4k+2$, y, t au forma $4k+3$, iar numerele de această formă nu sunt pătrate perfecte. **22.** Cele două numere sunt divizibile cu 3, dar nu cu 9. **23.** Elementele mulțimii A sunt pătrate perfecte, iar cele din B nu sunt. **24.** Presupunem, prin absurd, că există $a,b\in\mathbb{N}$, astfel încât, $a^2-10^b=2007\Rightarrow$ $\Rightarrow a^2=10^b+2007$. Evident că, membrul stâng, a^2, este pătrat perfect. Dacă $b=0$, atunci $10^0+2007=2008$, iar dacă $b\neq0$, $U(10^b+2007)=7$ și atunci membrul drept nu este pătrat perfect. Obținem contradicție. **26.** Datorită sumei cifrelor, deducem că n este divizibil cu 3 și nu este divizibil cu 3^2, deci n nu este pătrat perfect. **27.** **a** $s(A)=101=3\cdot33+2\Rightarrow A=3k+2$, $k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow A$ nu este pătrat perfect; **b** Numerele din șir sunt de forma $4h+3$. Cum pătratele perfecte sunt de forma $4h$ sau $4h+1$, rezultă că numerele din șir nu sunt pătrate perfecte. **28.** Evident numărul se divide cu 2, dar nu cu 2^2. Deci nu este pătrat perfect. Putem obseva și că e de forma $4k+2$. **29.** Fie n numărul respectiv. Dacă $U(n)=7$, atunci n nu este pătrat perfect. Dacă $\overline{ZU}(n)=\overline{7c}$, atunci n nu este pătrat perfect, deoarece avem subcazurile: **i** $c\in\{2;3;7;8\}$; **ii** $\overline{7c}\in\{70;74\}\Rightarrow n$ este de forma $4k+2$; **iii** $\overline{7c}\in\{71;75;79\}\Rightarrow n$ este de forma $4k+3$; $\overline{7c}=76\Rightarrow n$ este de forma $7k+6$. **30.** $s(a)=1\cdot1+4\cdot$ $\cdot4+5\cdot5+6\cdot+9\cdot9=159$. Deoarece 159 este divizibil cu 3 și nu este divizibil cu 9, deducem ca a este divizbil 3 și nu este divizibil cu 9, deci a nu este pătrat perfect. **31.** **a** 1; 5^2; 7^2 și 5^4. **b** În funcție de paritatea exponenților a și b, distingem patru situații asupra formei elementelor din A: $5^{2a}\cdot7^{2b}$; $5^{2a+1}\cdot7^{2b}$; $5^{2a}\cdot7^{2b+1}$; $5^{2a+1}\cdot7^{2b+1}$. Aplicând principiul cutiei, deducem că există cel puțin două elemente de aceeași formă. Produsul acestora va fi de forma $5^{par} \cdot 7^{par}$, adică este pătrat perfect. **33.** Fie $\overline{cdefg}$ cel mai mare cub perfect, astfel încât, $\overline{cdefg}=\overline{abba}\cdot x$, cu $\overline{abba}$ cub perfect. Atunci x este cub perfect. Dar $\overline{abba}=11(91a+10b)$, deci $91a+10b=11^2\cdot k^3$. Pentru $k=2 \Rightarrow 91a+10b=\overline{abba}=121\cdot 8=968$. Cazul $a=9$ conduce la $10b=149$, imposibil, deci $k=1$, pentru care $\overline{abba}=1331$. De aici, $x_{max}=4^3$; $\overline{cdefg}_{max}=85184$. **34.** **a** După 4 operații. **b** par. **35.** **a** Există 9 a.î. $16+9$ este pătrat perfect, dar nu există în mulțimea dată un număr n a.î. $16+n=36$; **b** 16; 9; 7; 2; 14; 11; 5; 4; 12; 13; 3; 6; 10; 15; 1; 8. **36.** **a** Produsul tuturor elementelor din M este $3^{3645}\cdot 4^{3645}\cdot 5^{3645}$ și, având numerele prime 3 și 5, prime între ele, ambele la exponenți impari, nu se poate scrie ca produs de două numere egale. **b** Fie $3^a\cdot 4^b\cdot 5^c$ și $3^m\cdot 4^n\cdot 5^p$ două elemente oarecare din M. $4^b\cdot 4^n$ este pătrat perfect pentru orice b și n cifre nenule. Produsul celor două elemente din M este de forma $3^{a+m}\cdot 4^{b+n}\cdot 5^{c+p}$ și este pătrat perfect dacă exponenții lui 3 și 5 sunt numere pare. Avem 4 posibilități pentru exponenții lui 3 și 5 ca elemente din M: $3^{impar}\cdot 5^{impar}$; $3^{impar}\cdot 5^{par}$; $3^{par}\cdot 5^{impar}$; $3^{par}\cdot 5^{par}$. Conform principiului lui Dirichlet dacă avem 5 elemente din M, atunci cel puțin două sunt de aceeași formă, iar acestea prin înmulțire dau exponenți numere pare, și-n consecință produsul este pătrat perfect. **37.** Fie s, $6s$, n, cele două sume și, respectiv, numărul rămas. Obținem ecuația: $s+6s+n=1+5+6+10+14+16+38+42+126 \Rightarrow 7s+n=7\cdot 36+6 \Rightarrow n=6$. **38.** $A \vdots 7 \Leftrightarrow (10a+5b) \vdots 7 \Rightarrow (3a+5b) \vdots 7 \Rightarrow (6a+10b) \vdots 7 \Rightarrow (6a+3b) \vdots 7$ (1); $B \vdots 7 \Leftrightarrow (15a+kb) \vdots 7 \Rightarrow (a+kb) \vdots 7$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow (7a+kb+3b) \vdots 7 \Rightarrow (kb+3b) \vdots 7 \Rightarrow b(k+3) \vdots 7 \Rightarrow (7c+6)(k+3) \vdots 7 \Rightarrow (k+3) \vdots 7 \Rightarrow k_{min}=4$.

III. Rapoarte și proporții

III.1. Rapoarte

3. $\frac{10}{20}$; **4.** $\frac{4}{7}$; **5.** 0,5(142857); **6.** 0,(2); **7.** **a** 1, **b** $\frac{2}{3}=0,(6)$; **c** $\frac{5}{3}=1,(6)$; **9.** $\frac{999}{10}=99,9$. **10.** **a** $\frac{2}{4};\frac{4}{6};\frac{6}{8}$; **b** $\frac{2}{5};\frac{4}{5};\frac{6}{7}$. **14.** **a** $\frac{5}{4}=\frac{2,5}{2}=\frac{10}{8}=\frac{2}{1,6}$. **15.** 1 : 1 000 000. **16.** 1 : 300 000. **17.** 0,04. **18.** 0,405. **19.** **b** 1 000; **20.** 4,8; **21.** 1,31(6); **22.** 0,3. **23.** **a** 0,5; **b** 2; **c** 0,2; **d** 1,2; **e** 0,5. **25.** **a** 3; **b** 2; **26.** $\frac{24}{5}$. **27.** **a** 3; **b** 9. **28.** $\frac{81}{25}$. **29.** $\frac{3}{10}$. **30.** $\frac{8}{5}$. **31.** $\frac{2}{5}$. **32.** 2 cm, 3 cm. **39.** $a=\frac{4536}{17}$; $b=\frac{2268}{17}$; $c=\frac{1764}{17}$. **40.** $\frac{516}{1289}$. **41.** $\frac{1,8l}{30\text{ km}}=\frac{0,6l}{10\text{ km}}=\frac{6l}{100\text{ km}}$. **42.** Nu există pentru că am avea $6y-8x=0$. **43.** 12; 24; 36; 48. **44.** **a** $S=\frac{55a}{21}\in\mathbb{N}$ și $(55;21)=1 \Rightarrow a \vdots 21$, cu $k\in\mathbb{N}^*$. Din $P \vdots S \Rightarrow a \vdots 5$. Deci $a=105k \Rightarrow S=275k \Rightarrow S \vdots 275$; **b** $\frac{P}{S}=\frac{88a^2}{147}\cdot\frac{21}{55a}=2520k^2 \Rightarrow \frac{P}{S} \vdots 2520$; **c** Pentru $k=1$, obținem cele mai mici valori: $a=105$; $b=60$; $c=110$. **45.** $\frac{31}{16}$. **46.** **a** $\frac{2009-209}{200}=9 \Leftrightarrow \overline{abcd}=2009\in A$; **b** $\frac{\overline{abcd}-\overline{abd}}{\overline{abc}}=d \Leftrightarrow \frac{90\cdot\overline{ab}+10c}{10\cdot\overline{ab}+c}=d\le 9 \Leftrightarrow 90\cdot\overline{ab}+10c\le 90\cdot\overline{ab}+9c \Leftrightarrow c\le 0 \Leftrightarrow c=0$, de unde $d=9$. Atunci $A=\{1009; 1109; 1209;...; 9809; 9909\}$, iar $S=491310$.

III.2. Procente

2. **a** $\frac{1}{25}$; **b** $\frac{27}{50}$; **c** $\frac{4}{5}$; **d** $\frac{21}{400}$; **e** $\frac{17}{1000}$; **3.** **a** 16%; **b** 55%; **c** 20%; **d** 36%. **4.** **a** 90%; **b** 40%; **c** 125%; **d** 35%; **e** 87,5%; **f** 4%; **g** 25%; **h** 70%; **i** 12,3%. **5.** **a** 20; **b** 400; **c** 2500; **d** 810. **6.** **a** 12; **b** 12; **c** 12; **d** 12. **8.** **a** =; **b** <; **c** <; **d** =. **9.** **a** 192; **b** 168. **10.** **a** 400; **b** 3600; **c** 1300. **11.** 75. **12.** **a** 30%; **b** 800%; **c** 8%; **d** 25%; **e** 28%; **f** 26,(6) %. **13.** **a** 40%; **b** 25%; **c** 50%; **d** 0%. **14.** 83%. **15.** 80%. **16.** 6,6 kg. **17.** 400 lei. **18.** 1,68. **19.** 13,5. **20.** 3 480 000. **21.** 18. **22.** 400 kg. **23.** 15.

24. 114. **25.** 312,5. **26.** 812,5. **27.** 1 000. **28.** 1 500. **29.** 600 lei. **30.** 25%. **31.** 80%. **32.** 12%. **33.** 20%. **34.** a prima etapă: 3 000; a doua etapă: 6 000; a treia etapă: 6 000; b 40%; c 100%. **35.** a prima săptămână: 120; a doua săptămână: 162; b 76,5%. **36.** 8%. **37.** 3 000 000. **38.** 200. **39.** 450. **40.** 45. **41.** 400. **42.** 20%. **43.** a 1000, 1250, 750; b 60%. **44.** a 6; b 16,(6)%. **45.** a 25%; b 20. **46.** a 9, 15, 12; b 60%. **47.** a 350; b $p=15$. **48.** a 2 520; b 1 3020; c 434. **49.** a 60%; b 4200; c 19,(047619)%. **50.** 84% din $116\%x=x-16$; $x=625$. **51.** $p\%x=84\%\cdot120\%x$; $p\%=100{,}8\%$. **52.** $3\cdot160\%x=120\%y \Leftrightarrow 4x=y$. Deci de 4 ori! **53.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{100}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{100}\cdot x=\frac{1}{100^n(n+1)}$ $\Rightarrow \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x}{100^n}=\frac{1}{100^n(n+1)} \Rightarrow x=1$. **54.** Fie F și R mulțimea elevilor care participă la cercul foto, respectiv, radio. Notăm cu e numărul elevilor din clasă. Atunci $\text{card}(F\cup R)=75\%e=\frac{3e}{4}$, $\text{card}F=66{,}(6)\%\cdot\frac{3e}{4}=\frac{e}{2}$ și $\text{card}R=\frac{9e}{16}$. Rezultă $\text{card}(F\cap R)=\text{card}F+\text{card}R-\text{card}(F\cup R)=\frac{e}{2}+\frac{9e}{16}-\frac{3e}{4}=\frac{5e}{16}$, de unde obținem $p\%e=\frac{5e}{16} \Rightarrow$ $\Rightarrow p\%=31{,}25\%$.

III.3. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor

1. $\frac{33^{)}}{24}=\frac{11}{8}$, $\frac{20^{)}}{28}=\frac{5}{7}$. **2.** $\frac{4}{6}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{24}{36}$, $\frac{60}{90}$. **3.** a 4, 15; b 5, 12; **5.** 2; **6.** $(a, b) \in \{(15, 9), (25, 15), (30, 18)\}$. Există o infinitate de soluții. **7.** 6. **8.** a $\frac{5}{2{,}91(6)}=\frac{12}{7}$; b $\frac{2}{8}=\frac{24}{96}$; c $\frac{15}{2}=\frac{3}{0{,}4}$; d $\frac{2}{15}=\frac{0{,}2(6)}{2}$; e $\frac{3}{8}=\frac{7}{18{,}(6)}$; f $\frac{5}{3}=\frac{20}{12}$; g $\frac{1}{9}=\frac{0{,}(7)}{7}$; h $\frac{82{,}8}{18}=\frac{23}{5}$; i $\frac{6}{2{,}(18)}=\frac{11}{4}$; **9.** $\frac{943}{90}$. **10.** 16. **11.** $\frac{x}{3}=\frac{5}{y}$ cu $xy=15$. Ex. $(x, y) \in \{(1, 15), (3, 5), (2, 7{,}5), (4, 3{,}75)\}$; **12.** $\frac{2}{5}$ și 4. **13.** $x=22{,}5$. **14.** a 90; b 1,2; c 0; d 0,2(285714); e 2,3(1); f 12; g 0,0(3); h 1,3(7); i 0,9; **15.** Dacă numerele scrise în odine crescătoare sunt a, b, c, d verificăm dacă $ad=bc$. Dacă egalitatea se verifică, putem forma proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; a $4\cdot15=6\cdot10 \Rightarrow \frac{4}{6}=\frac{10}{15}$. Se pot forma proporții cu termenii de la subpunctele b și e. **16.** a $\frac{27}{16}$; b $\frac{8}{3}$; c $\frac{111}{8}$; d $\frac{5}{9}$; e $\frac{3}{20}$; f $\frac{11}{30}$; g 19; h 22; i $\frac{3}{5}$. **17.** $\frac{3481}{36}$; **18.** a 12; b 165; c $\frac{4}{7}$; d $\frac{8}{21}$; e $\frac{11}{7}$; f $\frac{3}{11}$. **19.** a $\frac{4}{18}$; $\frac{6}{27}$; $\frac{10}{45}$. b $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}$; $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{7}}$; $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{18}{5}}$. **20.** $\frac{20}{18}=\frac{10}{9}$. **21.** 5. **22.** 1h 45 min. **23.** 2,4 km. **24.** 10 km. **25.** 90 km. **26.** $\overline{xy}=12$. **27.** 23; 32; 16; 61. **28.** b $\frac{7}{8}$. **29.** a $\frac{53}{5}$; b $\frac{79}{75}$; c 0; d $\frac{25}{12}$; e $\frac{4}{5}$; f 2,5. **30.** b $\frac{11}{9}$. **31.** a $19(x+y)=8(2x+3y) \Rightarrow 19x+19y=16x+24y \Rightarrow 3x=5y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{5}{3}$; b $\frac{19}{30}$; c 3; d 4; e $\frac{6}{5}$; f $\frac{2}{3}$. **32.** $10\cdot(6a+3b)=9\cdot(3a+7b) \Rightarrow 60a+30b=27a+63b \Rightarrow 33a=33b \Rightarrow a=b$. **33.** a $a=40$; $b=24$; b $a=77$; $b=42$. **34.** $a=24$, $b=6$, $m_a=15$. **35.** a $a=5$, $x=\frac{1}{5}$; b $a=2$, $x=\frac{5}{11}$ sau $a=6$, $x=\frac{7}{17}$; c $a=0$, $x=1$ sau $a=5$, $x=\frac{109}{111}$; d $a=2$, $x=\frac{15}{16}$; e $a=1$, $x=\frac{2}{3}$; f $a=2$, $x=2$. **36.** Avem $7a=8b$, deci b este divizibil cu 7. În plus, $a=\frac{8b}{7} \Rightarrow 8a-9b=\frac{64b}{7}-9b=\frac{b}{7}$. Rezultă $\frac{b}{7}\leq2$, deci $b\leq14$. Avem soluțiile $b=7$, $a=8$ sau $b=14$, $a=16$. **37.** b $\frac{2}{11}=\frac{13}{71{,}5}$; c $\frac{2}{5}=\frac{11}{27{,}5}$. **38.** Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, atunci $ad=bc$, deci $abcd=(ad)\cdot(bc)=(ad)\cdot(ad)=(ad)^2$.

39. $x = 2197 = 13^3$. **40.** $x = 24$. **41.** $x = \frac{49}{36}$. **43.** $x = 2010$. **44.** $\frac{5b}{4a+3} = \frac{b-1}{a} \Leftrightarrow \frac{5a}{4a+3} = \frac{b-1}{b} < 1 \Rightarrow 5a < 4a + 3$.

Rezultă $a < 3$; obținem $a = 2$; $b = 11$. **45.** Din enunț avem $7a = 13b + 91$. Fie $-$ $\Rightarrow a = bk \Rightarrow b = \frac{91}{7k-13} \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow 7k - 13 \in D_{91} = \{1; 7; 13; 91\} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \left\{2; \frac{20}{7}; \frac{26}{7}; \frac{104}{7}\right\}$. **46.** $\frac{5x+2y}{2x+y} = \frac{69}{29} \Leftrightarrow 29(5x + 2y) = 69(2x + y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 145x + 58y = 138x + 69y \Leftrightarrow 7x = 11y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{11}$. **47.** Notăm $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k \Rightarrow a = ck$; $b = dk$.
Atunci $(ac + bd)^2 = (ck \cdot c + dk \cdot d)^2 = k^2(c^2 + d^2)^2$ și $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (c^2 \cdot k^2 + d^2 \cdot k^2)(c^2 + d^2) = k^2(c^2 + d^2)^2$, deci are loc identitatea dată.

III.4. Proporții derivate. Șir de rapoarte egale

1. $\frac{3}{10,5}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{10,5}{3}$; $\frac{10,5}{7}$. **2.** $\frac{11}{55} = \frac{3}{15}$; $\frac{3}{11} = \frac{15}{55}$; $\frac{15}{3} = \frac{55}{11}$. **3.** $x = 51$; $\frac{7}{51} = \frac{14}{102}$; $\frac{14}{7} = \frac{102}{51}$; $\frac{51}{102} = \frac{7}{14}$. **4.** $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$; $\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$; $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$; $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$. **5.** **a** $a = \frac{16}{7}$ sau $a = 28$ sau $a = \frac{7}{4}$; **b** $a = \frac{7}{4}$ sau $a = \frac{16}{7}$ sau $a = 28$. **6.** **a** $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$; **b** $\frac{4}{28} = \frac{5}{35}$; **c** $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. **7.** **a** amplificarea primului raport cu 3; **b** amplificarea celui de-al doilea raport cu 5; **d** simplificarea primului raport prin 2, amplificarea celui de-al doilea raport cu 2; **e** înmulțirea numărătorilor cu 3. **8.** **a** $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$; **b** $\frac{1}{7} = \frac{3}{21}$; **c** $\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$. **9.** $\frac{12}{5} = \frac{36}{15}$. **10.** **a** 4; **b** împărțirea numitorilor la 3; **c** înmulțirea numărătorilor cu 7. **11.** **a** $\frac{6}{21} = \frac{10}{35}$ sau $\frac{6}{7} = \frac{30}{35}$; **b** $\frac{2}{28} = \frac{10}{140}$ sau $\frac{8}{28} = \frac{10}{35}$; **c** $\frac{22}{7} = \frac{110}{35}$. **12.** $\frac{5}{11} = \frac{15}{33} = \frac{20}{44} = \frac{35}{77}$. **13.** $x = 14$, $y = 8$, $z = 10$; **14.** $x = 8$, $y = 20$, $z = 44$. **15.** $x = 7$, $y = 5$, $z = 40$. **16.** **a** $\frac{2}{11} = \frac{10}{55}$; **b** $\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$; **c** $\frac{m}{2m+3n} = \frac{7m}{14m+21n}$. **17.** **a** $\frac{5}{4} = \frac{35}{28}$; **b** $\frac{10}{4} = \frac{7}{2,8}$; **c** $\frac{5}{1} = \frac{3,5}{0,7}$; **d** $\frac{1}{9} = \frac{0,7}{6,3}$. **18.** **a** $\frac{7}{3}$; **b** $\frac{3}{20}$; **c** $\frac{7}{20}$. **19.** **a** $x = 8$; $y = 44$; $z = 28$; **b** $x = 24$; $y = 28$; $z = 32$; **c** $x = 240$; $y = 144$; $z = 42$; **20.** **a** $\frac{70}{80} = \frac{28}{32}$; **b** $\frac{35}{8} = \frac{140}{32}$; **c** $\frac{77}{88} = \frac{28}{32}$. **21.** **a** $a = 39$; $b = 12$; **b** $a = 26$; $b = 8$; **c** $a = 65$; $b = 20$. **22.** **a** $(44; 32)$; **b** $(3,3; 2,4)$; **c** $(11; 8)$. **23.** **a** $\frac{7}{4}$; **b** $\frac{29}{15}$; **c** $\frac{11}{}$; **d** $\frac{5}{2}$; **e** $\frac{5}{6}$; **f** $\frac{3}{7}$; **g** $\frac{9}{7}$; **h** $\frac{4}{3}$. **24.** $xyz = \frac{168}{68921}$. **25.** $a = \frac{24}{5}$; $b = 6$; $c = \frac{72}{5}$. **27.** **a** 6, 10, 18; **b** 9, 15, 27; **c** 24, 40, 72; **d** 9, 15, 27; **e** 12, 20, 36; **f** 12, 20, 36. **28.** **a** $a = 21$, $b = 28$, $c = 35$; **b** $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$; **c** $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$; **d** $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$; **e** $a = 21$, $b = 28$, $c = 35$; **f** $a = 21$, $b = 28$, $c = 35$. **29.** $a = 24$, $b = 36$, $c = 45$. **30.** $a = 63$, $b = 42$, $c = 105$. **31.** **a** $a^2 + c^2 = 25k^2 = (5k)^2$, cu $5k \in \mathbb{N}$; **b** $a = 12$; $b = 15$; $c = 9$. **32.** $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = b + c$. Analog, avem $c + a = 2b$ și $a + b = 2c$, de unde $a = b = c$. **33.** $a = 12$; $b = 18$; $c = 15$; $d = 40$. **34.** 11. **35.** **a** $A = 16 = 4^2$; **b** $B = 2$. **36.** $a = 8$, $b = 10$, $c = 12$; **37.** $A = 4$. **38.** Avem $\frac{a}{6} = \frac{b}{9}$ și $\frac{b}{12} = \frac{c}{15}$, deci $\frac{a}{24} = \frac{b}{36}$ și $\frac{b}{36} = \frac{c}{45} \Leftrightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{36} = \frac{c}{45} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{a}{16} = \frac{b}{24} = \frac{c}{30}$, deci $k = 24$ și $p = 30$; **b** $a = 32$; $b = 48$; $c = 60$.

Testul 1. 1. $\frac{L}{\ell}=\frac{24}{18}$; $\frac{\ell}{L}=\frac{18}{24}$. 2. $\frac{4\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}}=\frac{9}{2}:\frac{9}{4}=\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{9}=2$. 3. $x=26$.

4. $\frac{x}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z}{11}=\frac{x+y+z}{7+5+11}=\frac{138}{23}=6 \Rightarrow x=42; y=30; z=66$. 5. a $\frac{24}{3}=\frac{4}{0,5}$; $\frac{0,5}{4}=\frac{3}{24}$; b $\frac{1}{3}=\frac{8}{24}$.

6. $15\%\cdot 280=\frac{15}{100}\cdot 280=42$ kg. 7. $\frac{6}{100}\cdot x=15 \Leftrightarrow x=15\cdot\frac{100}{6}$; $x=250$ litri.

Testul 2. 1. $x=2\frac{1}{3}\cdot 1\frac{3}{7}:0,5 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}\cdot\frac{10}{7}\cdot 2 \Leftrightarrow x=\frac{20}{3}$. 2. $\frac{10}{998}=\frac{5}{499}$. 3. $\frac{x}{2}=\frac{y}{11}=\frac{z}{7}=\frac{x+y+z}{2+11+7}=\frac{560}{20}=28 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=56; y=308; z=196$. 4. $\frac{400-36}{400}=\frac{364^{(4}}{400}=\frac{91}{100}=91\%$.

5. $48\cdot(100\%-15\%)=48\cdot\frac{85}{100}=40,8$ (lei). 6. $\frac{3x-y}{2x+y}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow 4(3x-y)=5(2x+y) \Leftrightarrow 12x-4y=10x+5y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x-10x=5y+4y \Leftrightarrow 2x=9y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{9}{2}$. 7. $\frac{24}{48}=\frac{10}{20}$.

Testul 3. 1. a $5\cdot\frac{6}{5}=\frac{x}{12} \Leftrightarrow x=72$; b $x-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{6}:\frac{7}{18} \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$. 2. a $1<5<9<45$.

Deoarece $1\cdot 45=5\cdot 9 \Rightarrow$ se pot forma proporții. De exemplu: $\frac{1}{5}=\frac{9}{45}$. b $2<5<7<11$.

Deoarece $2\cdot 11\neq 5\cdot 7 \Rightarrow$ nu se pot forma proporții. 3. $\frac{14}{x}=\frac{1}{500\,000} \Rightarrow x=14\cdot 500\,000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=7\,000\,000$ cm $=70\,000$ m $=70$ km. 4. Notăm părțile cu a, b, c, d și avem: $b=\frac{3}{2}\cdot a \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{3}$;

$c=\frac{4}{3}\cdot b \Rightarrow \frac{b}{3}=\frac{c}{4}$; $d=\frac{5}{4}\cdot c \Rightarrow \frac{c}{4}=\frac{d}{5}$. Putem scrie $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{5}=\frac{a+b+c+d}{2+3+4+5}=\frac{350}{14}=25$; $a=50$, $b=75$;

$c=100$ și $d=125$. 5. $c=\frac{20}{480+20}=4\%$. 6. 8 260 t.

7. După prima mărire, prețul este de 120% din prețul inițial, iar după a doua mărire, $120\%+15\%\cdot 120\%=138\%$ din prețul inițial. $138\%-100\%=38\%$, reprezintă 760 lei. A costat 2000 lei inițial, iar după prima creștere a costat 2400 lei.

Testul 4. 1. $\frac{x}{100}\cdot 85=51 \Leftrightarrow x=60$. 2. a $\frac{5}{28}\cdot\frac{28}{15}=\frac{2}{x-2} \Leftrightarrow x-2=6 \Leftrightarrow x=8$; b $\frac{171}{39}=\frac{x-2}{13} \Leftrightarrow \frac{171}{3}=x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=57 \Leftrightarrow x=59$. 3. $\frac{65}{100}\cdot 180=117$ fete sunt în sală și $180-117=63$ băieți.

Avem $\frac{63+x}{70\%}=\frac{117}{30\%} \Leftrightarrow x=210$ băieți trebuie să mai vină. 4. $\frac{a}{b}=\frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{7}=k \Rightarrow a=2k$ și $b=7k$.

Atunci $\frac{5a+b}{3b-2a}=\frac{5\cdot 2k+7k}{3\cdot 7k-2\cdot 2k}=\frac{17k}{17k}=1$. 5. Notăm $\frac{x}{11}=\frac{y}{9}=\frac{z}{3}=k$, $k=6 \Rightarrow x=66$, $y=54$, $z=18$.

6. $\frac{a}{b}=5 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{1}$; a $\frac{3a}{b}=\frac{3\cdot 5}{1}=15=5\cdot 3$ (se mărește de 3 ori). $\frac{a:2}{b\cdot 14}=\frac{5:2}{1\cdot 14}=\frac{5}{28}=5\cdot\frac{1}{28}=5:28$

(se micșorează de 28 ori). 7. $a=10$ și $b=14$.

Test-model pentru Evaluarea Națională

1. a. 2. c. 3. $\frac{13}{21}=\frac{34}{55} \Leftrightarrow 13\cdot 55 = 21\cdot 34 \Leftrightarrow 715 = 714$ fals. Deci, cele patru numere nu pot forma o proporție. 4. $\frac{8+b}{8}=\frac{8}{5} \Leftrightarrow 8+b=\frac{64}{5} \Leftrightarrow b=\frac{24}{5}$. 5. Se pornește de la cel mai de jos numitor, adică de la $1+\frac{1}{1}$ care fac 2 și pe care îl înlocuim în penultima fracție și obținem: $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ pe care o înlocuim mai departe. Obținem $\frac{13}{8}=\frac{13}{8}$.

III.5. Mărimi direct proporționale

4. a Da; b Nu; 5. a $x=2{,}5$; b $x=12$, $y=21$; c $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{12}{5}$. 6. 3,(5); 7. $x=6$; $y=27$; 33; 21; 8. 75; 120. 9. 52,5; 73,5; 126; 10. 450; 180; 300. 11. $(a, b, c)=(6, 8, 10)$; 12. a 31,5; 18; 4,5; b 42; 24; 6. 13. $\frac{3000}{263}$, $\frac{3600}{263}$, $\frac{6000}{263}$, $\frac{16000}{263}$, $\frac{24000}{263}$. 14. 180; 300; 420; 15. 144; 720; 1 152; 16. 80%; 17. Dacă $l=x$, atunci $A=x^2$, iar dacă $l=x$, atunci $A=y^2$ și $\frac{x}{x^2}\neq\frac{y}{y^2}$; deci nu este o relație de directă proporționalitate. 18. $\frac{A_1}{L_1}=\frac{A_2}{L_2}$. 19. $\frac{2}{5}$. 20. 45. 21. $\frac{3}{5}a=\frac{12}{25}b \Leftrightarrow 5a=4b$. 22. $(x, y, z)\in\{(3, 4, 6), (6, 8, 3), (9, 12, 2), (18, 24, 1)\}$; 23. Dacă $\frac{2x+6y}{25x-y}=\frac{58}{41}$, atunci $\frac{x}{2}=\frac{y}{9}$, iar dacă $\frac{x}{2}=\frac{y}{9}$ atunci $\frac{2x+6y}{25x-y}=\frac{58}{41}$. 24. $a+b+c++d=21$. 25. a 1400, 2100 și respectiv 4900 lei; b 1512, 2268 și respectiv 5292 lei; c 140%. 26. $a+b=9$. 27. $\frac{\overline{ab}}{5,(3)}=\frac{\overline{cd}}{3,75}=\frac{\overline{ef}}{1,(6)} \Rightarrow \overline{ab}=\frac{64}{45}\cdot\overline{cd}$. Cum $\overline{ab}\in\mathbb{N}$, rezultă $45\,|\,\overline{cd}$, de unde $\overline{cd}\in\{45, 90\}$. Convine $\overline{cd}=45$, pentru care $\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}=129$. 28. $x=ka$; $y=kb$; $z=kc$; $t=kd$. Fiecare membru devine egal cu k^2. 29. $\frac{a}{a+b}=\frac{2}{3}$, $\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{5}$, $\frac{a^3}{a^3+b^3}=\frac{8}{9}$. 30. $x_1=x_2=x_3=\ldots=$ $=x_{2012}=1$. 31. Suma cifrelor numărului este $S=4\cdot 4k+5\cdot 5k+6\cdot 6k=77k$; $4k+5k+6k=2011-616=$ $=1395$; $k=93$; $S=77\cdot 93$ este divizibil cu 3, dar nu e divizibil cu 9. 32. $p=2$; $q=3$; $r=5$; $x=20$; $y=30$; $z=50$; $S=0$. 33. Avem $x+y=3k$; $y+z=4k$; $z+x=5k \Rightarrow 2(x+y+z)=12k$; $x=2k$; $y=3k=z=3k$; a $\frac{24}{7}$; b $\frac{9}{7}$; $\frac{46}{7}$; c $\overline{abc}\in\{389; 968; 987\}$. 34. 2, 11, 17. 35. Notând $\frac{x+y}{a+1}=\frac{y+z}{a+2}=\frac{z+x}{a+3}=k$, rezultă $x+y=ka+k$, $y+z=ka+2k$, $z+x=ka+3k$, de unde $x=\frac{ka+2k}{2}$; $y=\frac{ka}{2}$; $z=\frac{ka+4k}{2}$. Atunci $\frac{x}{y}=\frac{a+2}{a} \Rightarrow 1<\frac{x}{y}\leq 3$ și $\frac{z}{x}=\frac{a+4}{a+2}=1+\frac{2}{a+2} \Rightarrow$ $\Rightarrow 1<\frac{z}{x}\leq 1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, de unde rezultă $2<\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2\leq 9+\frac{25}{9}=11,(7)$. 36. b Cum $\frac{a}{x_1}=\frac{b}{x_2}=\frac{c}{x_3} \Rightarrow b=\frac{x_2\cdot a}{x_1}\in\mathbb{N}$, deci $x_1\,|\,ax_2$, adică $x_1\,|\,a$. Atunci există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a=kx_1$, de unde $c=\frac{ax_3}{x_1}=kx_3\in\mathbb{N}$. b $x_3\,|\,c \Rightarrow x_3\in\{5; 7\}$. Convine doar $x_3=7$, pentru care se obține $a=10$, $b=15$, $x_1=2$; $x_2=3$.

III.6. Mărimi invers proporționale

3. Sunt mărimi invers proporționale. 4. Da. 5. Invers proporționale; 6. a $x=\frac{9}{2}$; b $x=7{,}5$; $y=15$. 7. 18; 8. $(x, y)=(12, 16)$; 9. $\frac{80}{7}$, $\frac{60}{7}$. 10. 45, 60, 75; 11. $\frac{8227}{12}$. 12. 4. 13. $\frac{3150}{13}$, $\frac{1260}{13}$, $\frac{1050}{13}$. 14. 1 080.

960, 900, 864; **15.** $\frac{63}{31}$, $\frac{61}{240}$. **16.** 40%; **17.** $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{2}$. **18. a** Notând $ax = m$; $by = n$; $cz = n$; $dt = q$, obținem

$$\frac{m}{n+p+q}=\frac{n}{p+q+m}=\frac{p}{q+m+n}=\frac{q}{p+m+n} \Rightarrow \frac{m}{m+n+p+q}=\frac{n}{n+p+q+m}=\frac{p}{p+q+m+n}=\frac{q}{q+p+m+n} \Rightarrow m=n=p=q \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow ax = by = cz = dt$, deci a, b, c, d sunt invers proporționale cu x, y, z, t.

b $(km+n+p+q)\left(\frac{k}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=(k+3)m\cdot\frac{k+3}{m}=(k+3)^2$. **19.** $\frac{9a}{4}=b=\frac{10c}{4} \Rightarrow 9a=4b=10c=180k \Rightarrow a=2k$, $b=45k$ și $c=18k$. Cum $(63k; 20k)=1 \Rightarrow k=1$; $a=20$; $b=45$; $c=18$. **20.** $1260x=525y=36z=35t=6300k$; k minim $\Rightarrow k=1 \Rightarrow x=5$; $y=12$; $z=175$; $t=180$. Obținem soluțiile: $(a; b) \in \{(5; 175), (25; 35), (35; 25), (175; 5)\}$ și $(c; d) \in \{(12; 180), (36; 60), (60; 36), (180; 12)\}$. **21.** Înmulțiți membru cu membru primele 4 egalități. $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=402$. **22.** $a=5k$; $b=8k$; $2c=3b$; $c=12k$; $a=15$; $b=24$; $c=36$. **23.** $a=30$; $b=6$; $c=4$. **24. a** $x_1=11k$; $x_2=9k$; $x_3=7k$; $15x_3=21x_4=35x_5=145x_6$; $x_4=5k$; $x_5=5k$; $x_6=5k$;

$S=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5<1$; **b** $84k^2=189 \Rightarrow k^2=\frac{9}{4}$ cu $k>0 \Rightarrow k=1,5 \Rightarrow x_1=16,5$; $x_2=13,5$.

25. Avem $\frac{a+2b-3c}{2006}=\frac{b+2c-3a}{2007}=\frac{c+2a-3b}{2008}=\frac{a+2b-3c+b+2c-3a+c-2a-3b}{2006+2007+2008}=0$, deci $a+2b=3c$, $b+2c=3a$, $c+2a=3b$. De aici $a=b=c$, iar din $ab+bc+ca=363$, rezultă $p=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$, de unde $a=b=c=11$.

26. $\frac{7}{11}2a=c$; $2a=\frac{2}{5}(180^\circ-a)$; $a=30^\circ$; $b=45^\circ$; $c=60^\circ$. **27.** $7:\frac{5}{7}\frac{x}{\frac{1}{10}}=\frac{y}{\frac{1}{5}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}=\frac{S}{\frac{19}{30}} \Rightarrow x=\frac{3S}{19}$; $y=\frac{6S}{19}$; $z=\frac{10S}{19}$;

$2\cdot\frac{5}{2}=7\cdot\frac{5}{7}=5\cdot1$, $a=114$; $b=228$, $z-c=90$, $S=532$, $\frac{b}{2}=\frac{a}{7}=\frac{t}{9}=\frac{a+b+t}{18}=\frac{3\cdot48}{18}=8$. **28.** $a=2000$; $b=1500$; $c=1200$. **29.** $\frac{a+3}{2}=\frac{b+4}{3}=\frac{c+5}{4}=\frac{d+7}{6}=k \Rightarrow a=2k-3$; $b=3k-4$; $c=4k-5$; $d=6k-7$; $a=4023$; $b=6035$; $c=8047$; $d=12071$.

III.7. Regula de trei simplă

1. 60 lei. **2.** 24 lei. **3.** 80 lei. **4.** 90 de piese. **5.** 6 kg. **6.** 6 cărți. **7.** 40 min. **8.** Tot în 6 minute! **9.** 62,5 g. **10.** 231 km. **11.** 4 zile. **12.** 5 000 000 €. **13.** 4200. **14.** 10 zile. **15.** 90 km/h. **16.** 8. **17.** 240. **18.** 180 de fete. **19.** 8. **20.** 9 min. **21.** Prin 11 tăieturi obținem 12 bucăți de sârmă! 5 tăieturi. **22.** 2 ore. **23.** 206 zile. **24.** 2 muncitori. **25.** 25 de zile. **26.** 32 de zile. **27.** Între 3 bătăi consecutive sunt 2 intervale a 6 secunde fiecare. Pentru 12 bătăi sunt necesare 11 intervale a 6 secunde fiecare. Deci 66 s!

III.8. Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice

2. 33,(3)%. **3.** 15. **4.** $x=135^\circ$, $y=75^\circ$. **5. a** 4%; **b** 87,5 lei; 487,5 lei. **6. a** 3; **b** 4. **10. a** 21; 12; 9; 6; 3; **b** $7{,}64<m<8{,}76$. **11.** Se trasează raze în cerc ce formează unghiuri cu măsurile: 108°, 144°, 36°, 36°; 36°. **12.** $x=4$; $y=50$; $z=8{,}9\%$.

III.9. Probabilități

1. a 12; **b** 2; **c** 90; **2.** Extragerea unei bile dintr-o urnă în care sunt bile albe, roșii, negre și verzi. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$. **5.** $\frac{1}{6}$. **6.** $\frac{1}{3}$. **7. a** $\frac{9}{25}$; **b** culoarea albă; $P(A)>P(V)>P(R)$; **9.** Nu, deoarece numărul cazurilor favorabile nu poate fi mai mare decât numărul cazurilor posibile. **10.** Să nu se producă; **11. a** $\frac{1}{6}$; **b** $\frac{1}{2}$; **c** 1. **12.** $\frac{7}{10}$. **13.** $\frac{1}{5}$. **14.** $\frac{2}{5}$.

15. $\frac{3}{4}$. 16. Extragerea unei bile albe dintr-o urnă în care sunt 5 bile albe și 15 bile negre. 17. $\frac{3}{29}$. 18. $\frac{6}{25}$.

19. a 0; b $\frac{17}{61}$; 20. a $\frac{1}{2}$; b $\frac{1}{10}$; c $\frac{5}{16}$; d $\frac{4}{5}$. 21. $\frac{3}{81}$. 22. $\frac{4}{100}$. 23. $\frac{2}{100}$. 24. $\frac{6}{1+2+3+...+9}=\frac{6}{45}$. 25. Sunt 2 cazuri posibile: $\frac{7}{21}$, dacă zarurile nu au fost însemnate (de exemplu, cazul 5 + 2 a fost citit la cazul 2 + 5) și $\frac{14}{36}$, dacă zarurile au colori diferite sau sunt însemnate într-un anume fel. 26. $\frac{5}{125}$. 27. a $\frac{15}{75}$; b 4 bile (principiul cutiei).

Teste de evaluare

Testul 1. 1. 10 ore. 2. $p=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$. 3. Nu există proporționalitate directă deoarece $\frac{2}{8}\neq\frac{7}{11}$; $2:\frac{5}{2}\neq7:\frac{5}{7}$ și $8:\frac{5}{2}\neq11:\frac{5}{7}$. Există o proporționalitate inversă între A și C deoarece $2\cdot\frac{5}{2}=7\cdot\frac{5}{7}=5\cdot1$. 4. $ab=2\cdot5\Rightarrow$ $\Rightarrow 10ab-36=10\cdot10-36=100-36=64$. 5. 24 ore. 6. a miercuri; sâmbătă; b 9°.

Testul 2. 1. $x=30$ kW. 2. $p=\frac{2}{4+6+2}=\frac{1}{6}$. 3. 440 km. 4. $\frac{x}{7}=\frac{y}{2}$ și $3y=4z\Rightarrow\frac{x}{14}=\frac{y}{4}$ și $\frac{y}{4}=\frac{z}{3}\Rightarrow\frac{x}{14}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=$ $=\frac{x+y+z}{21}=\frac{42}{21}=2\Rightarrow x=28,\ y=8,\ z=6$. 5. $\frac{b}{2}=\frac{a}{7}=\frac{t}{9}=\frac{a+b+t}{18}=\frac{3\cdot48}{18}=8\Rightarrow b=16$ km/h. 6. $12\cdot15:10=18$ (zile).

Testul 3. 1. a 6 min; b 25 km. 2. $\frac{200}{x}=\frac{120}{420}\Rightarrow x=700$. 3. $5x=\frac{3}{7}\cdot210\Leftrightarrow x=18$. 4. $35\cdot30:(35+15)=21$ zile. 5. $p=\frac{48-32}{48}=\frac{16}{48}=\frac{1}{3}$. 6. $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

Testul 4. 1. $p=\frac{6}{99-9}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$. 2. $8\cdot(30{,}8:14)=17{,}6$ lei. 3. $\frac{12}{100}\cdot x=228\Rightarrow x=1900$. 4. $x\cdot2=y\cdot5\ \frac{x}{5}=\frac{y}{2}=\frac{x+y}{5+2}=\frac{140}{7}=20\Rightarrow x=100,\ y=40$. 5. $\frac{7{,}5}{a}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow a\cdot b=7{,}5\cdot c$ este număr natural deoarece $a, b\in\mathbb{N}$, rezultă $7{,}5\cdot c\in\mathbb{N}\Rightarrow c$ este număr par, dar singurul număr par și prim este 2, deci $c=2$ și $a\cdot b=15$. Avem soluțiile: $a\cdot b=1\cdot15=3\cdot5=5\cdot3=15\cdot1\Rightarrow S=\{(1;15;2);(3;5;2);(5;3;2);(15;1;2)\}$.

Test-model pentru Evaluarea Națională

1. b. 2. b. 3. $\frac{\overline{18xy}}{20}=\frac{461}{5}\Rightarrow\overline{18xy}=1844$. 4. $\overline{ab}\cdot3=36\cdot4\Rightarrow\overline{ab}=48$, deci anul este 1848. 5. $\frac{\overline{abcd}}{616}=\frac{\overline{abda}}{617}$ și știm că $3+\overline{abcd}=\overline{abda}$. Înlocuim a doua relație în prima și rezultă $\frac{\overline{abcd}}{616}=\frac{3+\overline{abcd}}{617}$, de unde vom obține că $\overline{abcd}=1848$.

III.10. Probleme cu caracter practic

1. Notăm cu x, y, z, t numărul muncitorilor din fiecare echipă. Deoarece numărul de muncitori este invers proporțional cu numărul de zile în care s-a efectuat lucrarea, putem alcătui relația:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{\frac{1}{30}}=\frac{y}{\frac{1}{15}}=\frac{z}{\frac{1}{20}}=\frac{t}{\frac{1}{12}}\\ x+y+z+t=70\end{array}\right|\Rightarrow\frac{x}{\frac{1}{30}}=\frac{y}{\frac{1}{15}}=\frac{z}{\frac{1}{20}}=\frac{t}{\frac{1}{12}}=300\Rightarrow x=10,\ y=20,\ z=15,\ t=25.$$

2. Notăm lungimea primei lumânări cu x iar a celei de a doua cu y.

x .... 5 ore
a .... 2 ore

$a = \frac{2x}{5}$

y .... $3\frac{1}{2}$ ore
b .... 2 ore

$b = \frac{2y}{3\frac{1}{2}} \Rightarrow b = \frac{4y}{7}$

În două ore lungimea primei lumânări scade cu $\frac{2x}{5}$, deci devine egală cu $\frac{3x}{5}$, iar lungimea celei de a doua scade cu $\frac{4y}{7}$ devenind $\frac{3y}{7}$.

Atunci $\frac{3x}{5} = \frac{3y}{7} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{7}$.

3. 15 min .... 10 km
3 h 30 min .... x km

$x = \frac{210 \cdot 10}{15} \Rightarrow x = 140$ km

Ar fi parcurs $3 \cdot 40 + 20 = 140$ km ceea ce ar fi reprezentat cu 10 km mai puțin decât $\frac{3}{4}$ din distanță. Notăm distanța totală cu d și obținem $\frac{3}{4}d - 10 = 140$, deci $d = 200$ km.

4. Dacă unei echipe de 20 muncitori îi sunt necesare 15 zile pentru a efectua lucrarea, atunci unui singur muncitor i-ar fi fost necesare $15 \cdot 20 = 300$ zile ceea ce înseamnă că el realizează $\frac{1}{300}$ din lucrare pe zi. În primele 8 zile, 20 muncitori au realizat $20 \cdot 8 \cdot \frac{1}{300} = \frac{8}{15}$ din lucrare deci au rămas de efectuat $\frac{7}{15}$. Cei 14 muncitori rămași efectuează $14 \cdot \frac{1}{300} = \frac{7}{150}$ din lucrare pe zi deci ea va fi finalizată după $\frac{7}{15} : \frac{7}{150} = 10$ zile.

5. 25 muncitori .... 40 zile
20 muncitori .... x zile

$x = \frac{25 \cdot 40}{20} \Rightarrow x = 50$ zile

Celor 20 muncitori le-ar fi necesare 50 zile pentru a realiza în întregime lucrarea. Au lucrat doar 10 zile; deci pentru a finaliza le-ar mai fi necesare 40 zile.

20 muncitori .... 40 zile
15 muncitori .... y zile

$y = \frac{20 \cdot 40}{15} \Rightarrow y = \frac{160}{3}$ zile

Celei de a doua echipe i-ar mai fi fost necesare $\frac{160}{3} - 5 = \frac{145}{3}$ zile pentru a finaliza lucrarea dar aceasta trebuie terminată în $40 - (10 + 5) = 25$ zile.

15 muncitori ...... $\frac{145}{3}$ zile
z muncitori .... 25 zile

$z = \frac{15 \cdot \frac{145}{3}}{25} \Rightarrow z = 29$

6. a $\frac{8+10}{8+10+12} = 0{,}6$; b 13 bile. Dacă extragem 12 bile pot fi câte 4 din fiecare culoare. **7.** Notăm cu r, a, n numărul bilelor roșii, albe și respectiv negre. Avem $\frac{a}{75} = \frac{1}{5} \Rightarrow a = 15$, și cum $r + a + n = 75$, rezultă $r + n = 60$. Atunci $r \cdot \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{r}{2} = \frac{n}{3} = \frac{60}{5} \Rightarrow r = 24$, $n = 36$, de unde $P = \frac{15+36}{75} \Rightarrow P = \frac{17}{25}$. **8.** 20% au participat la ambele excursii, 10% la excursia din Ardeal, 50% la cea din Dobrogea iar 20% nu au participat.

9. $(x - 10\%x) + 10\%(x - 10\%) = 90\%x + 90\%x = 99\%x$. Prețul final este mai mic.

IV. Noțiuni geometrice fundamentale

IV.1. Unghiul. Clasificarea unghiurilor (recapitulare)

1. **a** gradul; **b** 180; **c** 0; **d** 90°; **e** ascuțit; **f** este cuprinsă între 90° și 180°. **5.** **a** A; **a** A; **b** A; **c** A; **d** F; **e** A; **f** F; **g** F; **h** A; **i** A; **j** A; **k** A. **9.** **a** 33°47'; **b** 12°18'; **c** 123°6'; **d** 6°33'; **e** 53°10'; **f** 7°54'; **g** 107°30'; **h** 4°48'. **10.** **a** 180'; **b** 9°; **c** 85°; **d** 42°; **e** 431'; **f** 2707'. **11.** **a** 34°; 35°; **b** 7°; 8°; **c** 107°; 108°; **d** 44°; 45°; **e** 11°; 12°. **12.** **a** 50°; **b** 180°. **13.** A; **b** F; **14.** 32°. **15.** **a** 130°; **b** 50°. **17.** Fie $\sphericalangle AOM = x^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = 4x^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOM = 3x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x^\circ = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = 120^\circ$. **18.** Fie $BOC = 3x^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC = 2x^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = 5x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x^\circ = 18^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOC = 54^\circ$. **19.** Fie $\sphericalangle BOC = 5x^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle AOC = 4x^\circ$; $5x^\circ + 4x^\circ = 180^\circ \Rightarrow x^\circ = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOC = 100^\circ$. **20.** **a** $x \in \{0^\circ; 1^\circ; 2^\circ; 3^\circ; ...; 65^\circ\}$; **b** $x = 66^\circ$; **c** $x \in \{67^\circ, 68^\circ, ..., 155^\circ\}$; **d** $x = 156^\circ$. **21.** Fie $\sphericalangle xOy = a^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle xOB = a^\circ + 20^\circ$; $3a^\circ + 40^\circ = 90^\circ \Rightarrow 3a^\circ = 50^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle xOy = a^\circ = 16^\circ 40'$. **22.** $\sphericalangle FOD = \sphericalangle FOE + \sphericalangle EOB + \sphericalangle BOD = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle BOD = 180^\circ \Rightarrow F, O, D$, sunt coliniare. **24.** Fie $\sphericalangle AOA_1 = k^\circ$. Avem $k^\circ + 5k^\circ + 10k^\circ + ... + 5(n-1)k^\circ = 180^\circ \Rightarrow k^\circ\left[1+5\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}\right] = 180^\circ$, cu $n \geq 2$.

Fie $p = 1+5\cdot\dfrac{n(n-1)}{2} \Rightarrow p \geq 6$. Atunci avem 14 perechi posibile $(k; p)$, dar ținând cont că p este de forma $M_5 + 1$, admitem perechile $(k^\circ; p) \in \{(30^\circ; 6); (5^\circ; 36)\} \Rightarrow n = 2$. **25.** **a** $\sphericalangle ABD = x = \sphericalangle EBC$; $x + x + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 45^\circ = \sphericalangle ABD$; **b** $\sphericalangle DBE$ este obtuz $\Rightarrow \sphericalangle DBE > 90^\circ \Rightarrow 2k < 90^\circ \Rightarrow k < 45^\circ$; $k \in \mathbb{N}^*$; k este maxim $\Rightarrow$ $\Rightarrow k \in \{1^\circ; 2^\circ; 3^\circ; ...; 44^\circ\} \Rightarrow k$ este maxim 44.

IV.2. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi

7. 46°. **9.** **a** Da; **b** Nu, pentru că $\sphericalangle AOB$ este unghi impropriu; **c** Nu, pentru că semidreapta punctată, OM, nu este interioară unghiului NOP. **10.** **a** **I** 46°; **II** 89°; **III** 130°44'; **b** **I** 42°; **II** 37°50'; **III** 71°12'. **11.** $\sphericalangle MOB = 25\% \cdot 160^\circ = 40^\circ$; $\sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB \Rightarrow OM$ este bisectoarea $\sphericalangle AOB$. **12.** **a** $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle COD$; $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle DOB$. **b** 74°; **c** 81°. **14.** **a** $\sphericalangle MOP = \sphericalangle PON = a$; $\sphericalangle NOQ = \sphericalangle BOQ = 2a$; $\sphericalangle BOM = 6a$. **b** Dacă $\sphericalangle POQ = 90^\circ$, se arată că $\sphericalangle BOM = 180^\circ$ și atunci OA coincide cu OM, ceea ce este imposibil, pentru că $M \notin AB$. **15.** 45°; 90°; 67°30'. **16.** **a** 125°; **b** 180°; **c** 161°. **17.** 72°. **18.** **a** 20°; **b** 30°; **c** 60°; **d** 100°; **e** 80°. **19.** 54°. **20.** 16°17' și 81°25'. **21.** $\sphericalangle AOM = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC : 2 = 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow OA$ și OM sunt semidrepte opuse. **22.** $\sphericalangle COD = 110^\circ$. **23.** $\sphericalangle BOD = 73^\circ$. $M \in \mathrm{Int}(\sphericalangle COD)$. **24.** $\sphericalangle AOB = 80^\circ - 24^\circ = 56^\circ$; $\sphericalangle MON = 40^\circ - 12^\circ = 28^\circ$. **25.** OD este semidreaptă opusă cu $OA \Rightarrow \sphericalangle AOD$ este unghi alungit $\sphericalangle AOD = 180^\circ$; $\sphericalangle BOD = 60^\circ$; $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD \Rightarrow OB$ este bisectoarea unghiului COD. **27.** $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOE \Rightarrow \sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE$. „$\Rightarrow$" Fie OF bisectoarea unghiului $DOB \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BOF = \sphericalangle FOD$; $\sphericalangle AOF = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOF$; $\sphericalangle FOE = \sphericalangle FOD + \sphericalangle DOE$. Atunci $\sphericalangle AOF = \sphericalangle FOE \Rightarrow OF$ este bisectoarea unghiului AOE. Deci, $\sphericalangle DOB$ și $\sphericalangle AOE$ au aceeași bisectoare, semidreapta, OF. „$\Leftarrow$": OF bisectoarea unghiului $AOE \Rightarrow \sphericalangle AOF = \sphericalangle FOE$ (1). OF este bisectoarea unghiului $DOB \Rightarrow \sphericalangle BOF = FOD$ (2). $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOF - \sphericalangle BOF$ (3), iar $\sphericalangle DOE = \sphericalangle FOE - \sphericalangle FOD$ (4). Cum $\sphericalangle AOF = \sphericalangle FOE$, din (1), (2), (3) și (4) $\Rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle DOE$. **28.** Fie $\sphericalangle COD = 2x$. Fie OE bisectoarea unghiului $AOC \Rightarrow \sphericalangle AOE = \sphericalangle COE = 30^\circ + x$. Fie OF bisectoarea unghiului $BOD \Rightarrow$ $\sphericalangle BOF = \sphericalangle DOF = 25^\circ + x$; $\sphericalangle EOF = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOE - \sphericalangle BOF = 110^\circ + 2x - (30^\circ + x) - (25 + x) = 55$. **29.** Două cazuri: **I** Dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente, notăm $\sphericalangle BOC = x^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = 4x^\circ$. Avem $x^\circ + 4x^\circ = 90^\circ$; $\Rightarrow \sphericalangle AOD = 108^\circ$; **II** Dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt neadiacente, atunci $\sphericalangle AOC = 3x^\circ = 90^\circ$. $\sphericalangle AOD = 60^\circ$. **30.** **a** $\sphericalangle AOA_1 = 32^\circ$; $\sphericalangle AOA_2 = 16^\circ$; $\sphericalangle AOA_3 = 8^\circ$; $\sphericalangle AOA_4 = 4^\circ$; $\sphericalangle AOA_5 = 2^\circ$; $\sphericalangle AOA_6 = 1^\circ$; $\sphericalangle AOA_4 = 4^\circ$; $\sphericalangle BOA_6 = 63^\circ$; **b** OA_i este bisectoarea unghiului AOA_4. $\sphericalangle BOA_1 = 48^\circ$. Fie OS bisectoarea unghiului BOA_1. $\sphericalangle BOS = \sphericalangle A_1OS = 24^\circ$; $\sphericalangle A_1OS = 38^\circ$.

IV.3. Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare

1. **a** 18°; **b** 77°; **c** 40°; **d** 49°20'. **2.** $b-4$, $c-1$, $d-5$, $e-2$. **3.** 38°53'. **4.** **a** 166°; **b** 105°; **c** 70°; **d** 143°20'; **e** 30°30'. **5.** 125°16'. **6.** **a** $\sphericalangle EDF$ și $\sphericalangle KLM$; $\sphericalangle XOY$ și $\sphericalangle KTS$; **b** $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle PRS$. **9.** $\sphericalangle COD$. **10.** 56°. **11.** $a-5$, $b-4$, $c-2$, $d-3$, $e-1$. **12.** Fie u măsura unghiului $\Rightarrow 90^\circ - u$ este măsura complementului său. Obținem ecuația: $u = 2(90^\circ - u)$; $u = 60^\circ$. **13.** Fie u măsura unghiului $\Rightarrow 180^\circ - u$ este măsura suplementului său. Obținem ecuația: $u = 8(180^\circ - u)$; $u = 160^\circ$. **15.** **a** $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 90^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle AOC = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC$ este unghi drept; **b** $x = 18$. **16.** $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 180^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle AOC = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC$ este unghi alungit; **b** $x = 52$. **17.** 50°. **18.** 150°. **19.** **a** 49° și 67°; **b** 139° și 157°. **20.** $(90^\circ - u) + (180^\circ - u) = 200^\circ$; $u = 35^\circ$. **21.** $u - (90^\circ - u) = 24^\circ 20'$; $u = 57^\circ 10'$.

iar $90° - u = 32°50'$. **22.** $u - (180° - u) = 0{,}4 \cdot 90°$; $180°$ și $72°$. **23.** $u = \frac{5}{4}(90° - u)$; $u = 50°$; $90° - u = 40°$. **24.** $140°$ și $40°$. **25.** $5(90° - u) = 180° - u$; $u = 67°30'$. **26.** **a** complementul unghiului are măsura de $180° - 147° = 33° \Rightarrow$ $\Rightarrow$ unghiul are $57°$. **b** $131°$. **27.** **a** Fie u măsura unghiului $\Rightarrow 180° - u$ este măsura suplementului său $\Rightarrow$ $\Rightarrow 180° - (180° - u) = u$ este măsura suplementului suplementului unui unghi. **28.** **a** Fie $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ cele două unghiuri necongruente, cu $\sphericalangle A < \sphericalangle B$. Presupunem, prin absurd, că niciunul din unghiuri nu are măsura mai mică de $45°$. Atunci $\sphericalangle A \geq 45°$ și $\sphericalangle B > 45° \Rightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle B > 90° \Rightarrow \sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ nu sunt complementare, ceea ce contrazice ipoteza. Deci presupunerea este falsă. **29.** $[(90° - u) + (180° - u)] : 2 = 95°$; $u = 40°$; **30.** **a** $\sphericalangle AOB + 5 \cdot \sphericalangle AOB = 180°$; $\sphericalangle AOB = 30°$; $\sphericalangle BOC = 150°$; $\sphericalangle COP = \sphericalangle BOC - \sphericalangle BOP = 60°$; $\sphericalangle POR = 165°$; **b** $\sphericalangle MON = 90°$, fiind format de bisectoarele a două unghiuri suplementare. **c** Fie OT bisectoarea unghiului $BON \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BOT = \sphericalangle NOT = 37°30'$; $\sphericalangle MOT = \sphericalangle POT = 52°30' \Rightarrow \sphericalangle MOT = \sphericalangle POT \Rightarrow OT$ este bisectoarea unghiului MOP. **31.** **a** $(3x + 3)° + (5x + 17)° = 180°$; $x = 20°$; $\sphericalangle AOC = 63°$; $\sphericalangle BOC = 117°$; **b** $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOC = 31°30'$; $\sphericalangle COF = \sphericalangle BOF = 58°30'$; $\sphericalangle COE = \sphericalangle EOF = 29°15'$; $\sphericalangle DOE = 31°30' + 29°15' = 60°45'$; **c** $\sphericalangle DOC + \sphericalangle COF = 90°$. **32.** **a** $\sphericalangle MON = 135°$; **b** $\sphericalangle AOB = 80°$. **33.** $\sphericalangle AOB = 11k$, $\sphericalangle BOC = 7k$; $k = 10°$; obținem $\sphericalangle AOB = 110°$; $\sphericalangle BOC = 70°$, iar $\sphericalangle DOC = \sphericalangle AOC + \sphericalangle AOD = 40° + 90° = 130°$. Sunt posibile două cazuri: dacă E se află în semiplanul determinat de dreapta AO și punctul B, atunci $\sphericalangle EOB = 20°$, iar dacă E nu se află în semiplanul determinat de dreapta AO și punctul B, atunci $EOB = 160°$.

IV.4. Unghiuri opuse la vârf

2. **a** A; **b** F; **c** A; **d** F. **4.** **a** $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 4$; A; **b** $\sphericalangle 5$ și $\sphericalangle 8$; **c** $\sphericalangle 12$ și $\sphericalangle 10$; A; **d** $\sphericalangle 11$ și $\sphericalangle 9$; **e** $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 2$; **e** $\sphericalangle 6$ și $\sphericalangle 7$. **5.** $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ sunt unghiuri opuse la vârf; $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 60°$; $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ sunt unghiuri adiacente suplementare; $\sphericalangle AOC = 180° - 60° = 120°$; **6.** $\sphericalangle BOD = \sphericalangle AOC = 125°$; $\sphericalangle AOB = 180° - 125° = 55°$. **7.** $\sphericalangle EOC$ și $\sphericalangle FOD$ sunt unghiuri opuse la vârf; $\sphericalangle EOC = 15°$; $\sphericalangle AOD = 90°$; $\sphericalangle BOF = 90° - 15° = 75° = \sphericalangle AOE$; $\sphericalangle BOE = 105°$. **8.** **a** $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 3$ sunt unghiuri opuse la vârf $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ și cum $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5 \Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$. **b** $\sphericalangle 5$ și $\sphericalangle 7$ sunt unghiuri opuse la vârf $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle 5 = \sphericalangle 7$ și cum $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5 \Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 7$. **9.** $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$; $3x - 18° = 120° \Rightarrow x = 46°$. **10.** $\Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle DBE = 60°$; **a** $x = 20°$; **b** $2x - 14° = 60° \Rightarrow x = 37° \Rightarrow 4x - 3 = 145°$; **c** $\sphericalangle COD = 120°$. **12.** $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt unghiuri opuse la vârf, iar, din ipoteză, sunt complementare $\Rightarrow \sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 45°$; $\sphericalangle AOD = 135°$. **13.** $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD = 90°$. **14.** $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 70°$; $\sphericalangle AOD = 110°$. **15.** $\sphericalangle AOC = 45°$; $\sphericalangle AOD = 135°$; $\sphericalangle EOB = 22°30'$. **16.** $\sphericalangle BOE = \sphericalangle EOC = 20°$; $\sphericalangle AOF = 180° - \sphericalangle AOE = 110°$. $\sphericalangle AOF$ și $\sphericalangle DOE$ sunt unghiuri opuse la vârf $\Rightarrow \sphericalangle AOF = \sphericalangle DOE$. **17.** $\sphericalangle AOF = 150°$. $\sphericalangle DOF$ și $\sphericalangle COE$ sunt unghiuri opuse la vârf $\Rightarrow \sphericalangle DOF = \sphericalangle EOC = 20°$. **18.** $\sphericalangle AOF = \sphericalangle EOC = 65°$. **19.** $\sphericalangle BOE = \sphericalangle EOC = 65°$. Fie OT semidreapta opusă cu OA; $\sphericalangle AOE$ și $\sphericalangle FOT$ sunt opuse la vârf; $\sphericalangle AOE = \sphericalangle FOT = 15°$; $\sphericalangle AOF = 180° - 15° = 165°$. **20.** Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ unghiuri opuse la vârf $\Rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle COD \Rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 2x$ (1) unde $0° < 2x < 180°$. Fie OM bisectoarea unghiului AOB; atunci $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$ (2). Fie OT bisectoarea unghiului COD; rezultă $\sphericalangle COT = \sphericalangle DOT = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle COD = x$ (3). $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ opuse la vârf, deci OB și OC sunt semidrepte opuse (4). Fie $\sphericalangle AOC = 2y$, unde $0° < 2y < 180°$ (5). Din relația (4) rezultă că $\sphericalangle BOC$ este unghi alungit $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BOC = 180° \Leftrightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC = 180° \Leftrightarrow 2x + 2y = 180°$ (6). Din relațiile (2), (3) și (5) $\Rightarrow \sphericalangle MOT = \sphericalangle MOA +$ $+ \sphericalangle AOC + \sphericalangle COT = x + 2y + x + 2x + 2y = 180° \Rightarrow \sphericalangle MOT$ este unghi alungit, deci OM și OT sunt semidrepte opuse. **Rețineți** această proprietate a bisectoarelor a două unghiuri opuse la vârf! **21.** **a** $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOE$ sunt unghiuri opuse la vârf $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOE = 130°$; **b** Fie $\sphericalangle MOB = 2x$ și $\sphericalangle AON = 2y$. $2x + 130° + 2y = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow x + y = 25°$. Fie OT bisectorea unghiului MOA; $\sphericalangle MOT = 65° + x$. Fie OV bisectorea unghiului BON; $\sphericalangle VON = 65° + y$; $\sphericalangle VOT = 180° - (65° + x) - (65° + y) = 50° - 25° = 25°$. **22.** **a** Fie $\sphericalangle AOC = 8x$. Atunci $\sphericalangle BOD = 8x$; $\sphericalangle AOP = \sphericalangle COP = 4x$; $\sphericalangle POB = 180° - \sphericalangle AOP = 180° - 4x$; $\sphericalangle POT = \sphericalangle BOT = 90° - 2x$; $\sphericalangle TOD = \sphericalangle BOT + \sphericalangle BOD = 90° - 2x + 8x =$ $= 90° + 6x$; $\sphericalangle TOR = \sphericalangle ROD = 45° + 3x$; $\sphericalangle BOR = 45° + 3x - 8x = 45° - 5x$; $\sphericalangle AOP + \sphericalangle POR + \sphericalangle BOR = 180° \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x + 140° + 45° - 5x = 180° \Rightarrow x = 5°$; $\sphericalangle AOC = 40°$; $\sphericalangle AOD = 140°$; **b** $\sphericalangle AOC = 160°$; $\sphericalangle AOD = 20°$.

IV.5. Unghiuri în jurul unui punct

1. a A; b A; c A; d A. 4. a $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ABN$, $\sphericalangle NBC$. 5. $\sphericalangle BOC = 160°$. 6. $\sphericalangle AOB = 120°$; $\sphericalangle AOC = 80°$; $\sphericalangle BOC = 160°$. 7. $\sphericalangle DBE = 58°$; $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABE = 122°$. 8. $\sphericalangle COD = 160°$. 9. $\sphericalangle ABC = 91°$; $\sphericalangle CBD = 89°$; $\sphericalangle DBE = 87°$; $\sphericalangle EBA = 93°$. 10. Două unghiuri au măsurile egale cu 80°, iar celelalte două au măsurile egale cu 100°. 11. Două unghiuri au măsurile egale cu 130°, iar celelalte două au măsurile egale cu 50°. 12. a $x + x + 10° + x + 20° + x + 30° = 180° \Rightarrow x = 30°$. b F. 13. 45°. 14. a $\sphericalangle POM = 120°$; b $\sphericalangle COM = \sphericalangle POM + \sphericalangle POC = 120° + 60° = 180° \Rightarrow OM$ și OC sunt semidrepte opuse. 15. Două unghiuri au măsurile egale cu 60°, iar celelalte două au măsurile egale cu 120°. 16. a A. b 230°. 17. Fie $\sphericalangle AOB = 2x$; $\sphericalangle BOC = 2y$; $\sphericalangle COD = 2z$; $\sphericalangle DOA = 2t$; $2x + 2y + 2z + 2t = 360° \Rightarrow x + y + z + t = 180°$; $2y + z = 23° + x + 2y \Rightarrow z = 23° + x$; $x + y + 21° = x + t \Rightarrow y = t - 21°$. Cazul I: $\sphericalangle XOZ = x + 2y + z = x + y + (t - 21°) + z = 180° - 21 = 159°$, convine.
Cazul al II-lea: $m(\sphericalangle XOZ) = x + 2t + z = x + t + (y + 21°) + z = 180° + 21° > 180°$, nu convine. 18. $\sphericalangle AOB = 25°$; $\sphericalangle COD = 65°$; 19. a $\sphericalangle AOB = 18°$; $\sphericalangle BOC = 36°$; $\sphericalangle COD = 72°$; $\sphericalangle DOE = 90°$; $\sphericalangle EOA = 144°$. 20. $\sphericalangle COF = \sphericalangle EOC - \sphericalangle EOF = 105° - 65° = 40°$; $\sphericalangle BOC = 80°$; $\sphericalangle EOB = 65° - 40° = 25°$; $\sphericalangle AOB = 50°$. 21. a $360° : 12 \cdot 4 = 120°$; b Între două ore consecutive orarul parcurge $360° : 12 = 30°$; în 12 minute se deplasează a cincea parte din 30°, adică 6°. Minutarul se deplasează în 12 minute $2 \cdot 30° + 0{,}4 \cdot 30° = 72°$. Unghiul are măsura egală cu $120° + 6° - 72° = 54°$. 22. a $k° + (k° + 30°) + (k° + 2 \cdot 30°) + (k° + 3 \cdot 30°) + ... + [k° + (n - 1) \cdot 30°] = 360° \Rightarrow k°n + (n - 1) \cdot n : 2 \cdot 30° = 360° \Rightarrow n[k + (n - 1) \cdot 15] = 360$; $n = 3$, $k° = 90°$; $n = 4$, $k° = 45°$ sau $n = 5$, $k° = 12°$. 23. Presupunem, prin absurd, că nu există 2 unghiuri congruente. Aplicând principiul cutiei, cazul optim, ar trebui să avem unghiuri cu măsura 1°, 2°, 3°, ...,27°. Suma măsurilor ar fi egală cu $1° + 2° + 3° + ... + 27° = 378° > 360°$. Am ajuns la o contradicție și în cazul optim. Presupunerea făcută este falsă. Deci există cel puțin două unghiuri congruente. 24. a Desenem 19 unghiuri în jurul unui punct, din care, primele 18, cu cu ajutorul unui șablon, au fiecare câte 19°. Atunci al 19-lea unghi are $360° - 18 \cdot 19° = 18°$. b Desenăm șabloanele unghiurilor de 19° și 18°, iar cu ajutorul lor construim un șablon „diferență" de 1°, cu care putem construi unghiuri de orice măsură, exprimată în grade, număr natural . 25. a cinci grupe a $2° + 4° + 6° + ... + 16° = 72°$; 40 de unghiuri; b 72°. 26. a $n(n + 1) : 2 < 360 \Rightarrow n_{max} = 26$. b $\sphericalangle A_0OA_{14} = 105°$; $\sphericalangle A_0OA_5 = 15°$; $\sphericalangle A_5OA_{14} = 90°$. c $\sphericalangle A_0OA_{18} = 171°$; $\sphericalangle A_0OA_{26} = 351°$; $\sphericalangle A_{18}OA_{26} = 180° \Rightarrow$ cerința.

Teste de evaluare

Testul 1. 1. 90°. 2. BC. 3. 180°. 4. Semidreapta OM. 5. 39°23'. 7. 54°44'. 8. 90°. 9. a 60°; 150°; 150°; b 150°.

Testul 2. 1. 180°. 3. 90°. 4. $\{A; C\}$. 5. 17°30'. 7. 144°44'. 8. 45°.
9. a 60°; 30°; 150°; b $\sphericalangle EOC = \sphericalangle BOC : 2 = 60° = \sphericalangle COD \Rightarrow OC$ este bisectoarea unghiului EOD.

Testul 3. 1. 0° și 90°. 2. Semidrepte opuse. 3. 360°. 4. Semidreapta BC. 5. 36°18'. 7. 144°44'. 8. 35°. 9. a 100°; 85°; 70°. b $\sphericalangle MOD = 35° + 15° = 50°$; $\sphericalangle NOC = \sphericalangle BOC : 2 = 50°$; $\sphericalangle MOD = \sphericalangle NOC$.

Testul 4. 1. 90° și 18°. 2. Semidreapta DA. 3. 45°. 4. AC. 5. 70°12'. 7. 144°44'. 8. 110° și 70°. 9. a $\sphericalangle AOB = 45°$; b $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD = 45° \Rightarrow OA$ este bisectoarea unghiului BOD.

Test-model pentru Evaluarea Națională

1. b 1 688 – 1 714; 2. d 1 690; 3. $\sphericalangle B = 90° - \overline{1a}° = 90° - 19° = 71°$. 4. $\overline{1b}° = 180° - 167° = 13°$. $\overline{1a1b} = 1913$. 5. $\sphericalangle BHC = \sphericalangle BHD - \sphericalangle CHD = 118° - 90° = 28°$. $\sphericalangle RHC = \sphericalangle CHD - \sphericalangle RHD = 90° - 62° = 28°$. Deci $\sphericalangle BHC = \sphericalangle RHC \Rightarrow \sphericalangle BHC = \sphericalangle RHC \Rightarrow HC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle RHB$.

IV.6. Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism

3. a unghiuri alterne externe congruente $\Rightarrow a \parallel b$; b unghiuri alterne externe congruente $\Rightarrow a \parallel b$; c unghiurile corespondente nu sunt congruente, deci $a \nparallel b$; d unghiuri alterne externe congruente $\Rightarrow a \parallel b$. 5. a $m(\hat{8}) = m(\hat{6}) = m(\hat{4}) = m(\hat{2}) = 38°$; $m(\hat{5}) = m(\hat{7}) = m(\hat{1}) = m(\hat{3}) = 142°$. 6. Unghiurile au măsurile de x și $2x + 30$ nu pot fi congruente, deoarece am obține $x = 2x + 30°$ sau $x = -30°$, ceea ce nu convine. Rezultă că unghiurile sunt suplementare, adică $x + 2x + 30° = 180° \Rightarrow x = 50°$. Patru dintre unghiuri au măsura de 50°, iar celelalte patru

de 130°. 7. Două dintre cele 8 unghiuri sunt și congruente și suplementatre. Atunci $d \perp a$; $d \perp b$; 8. $a \nparallel b$; $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^\circ \neq 2x^\circ - 48^\circ \Leftrightarrow x^\circ \neq 48^\circ$. 9. a $x = 36^\circ$, $z = 124^\circ$; b $x = 50^\circ$, $y = 80^\circ$, $z = 130^\circ$. 10. $a \parallel b$; $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DEB$ sunt unghiuri corespondente formate de dreptele a și b cu secanta c, deci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEB$. Fie $[BG$ și EH bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$, respectiv $\sphericalangle DEB$. Se arată că $\sphericalangle GBC = \sphericalangle HEB$, care sunt unghiuri corespondente formate de dreptele a și b cu secanta c, deci $BG \parallel EH$. 11. Se demonstrează că $\sphericalangle BMC = \sphericalangle NCD$ și, având poziții de unghiuri corespondente, rezultă $MB \parallel CN$.

IV.7. Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă

1. a oblică; b perpendiculară. 6. Se construiește simetricul lui B față de dreapta d. Se obține segmentul $[AB']$. 7. Pentru a construi simetricul unui segment $[AB]$ față de o dreaptă d, se construiesc simetricele A' și B' ale lui A și, respectiv B, și se obține segmentul $[A'B']$. 8. Congruente. 9. $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ au același complement, $\sphericalangle BOC$. 10. a Fie $m(\sphericalangle AOB) = x \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 5x$, $m(\sphericalangle COD) = 4x$, $m(\sphericalangle DOE) = 2x$. Din $x + 5x + 4x + 2x = 180^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 15^\circ$; b $m(\sphericalangle AOC) = 6x = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AB$. 11. Cazul I: Dacă D și C sunt în același semiplan determinat de OB, atunci $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$. Cazul II: Dacă C și D se află de o parte și de alta a dreptei OB, atunci $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD$ sunt suplementare; 12. a $m(\widehat{XOY}) = m(\widehat{AOB}) - m(\widehat{AOX}) - m(\widehat{BOY}) = 140^\circ - \frac{1}{2}(m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{BOC})) = 60^\circ$, de unde se obține apoi că $m(\sphericalangle COD) = 20^\circ$. b $m(\sphericalangle EOF) = 90^\circ - m(\sphericalangle FOC)$; $m(\sphericalangle DOC) = 90^\circ - m(\sphericalangle FOC)$; $m(\sphericalangle EOF) = 20^\circ$. 13. a $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$; $m(\sphericalangle COD) = 9^\circ$; $m(\sphericalangle EOD) = 81^\circ$; b $m(\sphericalangle FOM) = 45^\circ$. 14. b $m(\sphericalangle FOG) = 135^\circ$. 15. Fie $m(\sphericalangle AOB) = 2a$ și $[OM$ bisectoarea unghiului AOD. Atunci $m(\sphericalangle AOM) = 45^\circ - \frac{a}{2}$; $m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle AOB) > 90^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 45^\circ - \frac{a}{2} + 2a > 90^\circ$, deci $a > 30^\circ$. Rezultă $60^\circ < m(\sphericalangle AOB) < 90^\circ$, de unde $m(\sphericalangle AOB) \in \{61^\circ; 62^\circ; 63^\circ; \ldots; 89^\circ\}$. Sunt 29 de valori. 16. a Se arată că dreapta d este axa de simetrie a segmentului $[BB']$, de unde rezultă că $d(P, B) = d(P, B') \Rightarrow PB = PB' \Rightarrow AP + PB = AP + PB' \Leftrightarrow AP + PB = AB'$. b Adevărat.

Teste de evaluare

Testul 1. 1. c o dreaptă. 2. a 1 și 5; 2 și 6; 4 și 8; 3 și 7; 9 și 13; 10 și 16; 11 și 15; 12 și 14; b 4 și 6; 3 și 5; 2 și 10; 3 și 9. 3. a $m(\sphericalangle AOC) = 150^\circ$; $m(\sphericalangle AOB) = 90^\circ$; $m(\sphericalangle BOC) = 60^\circ$. b Se demonstrează că $m(\sphericalangle CON) = 30^\circ$ și $m(\sphericalangle DON) = 15^\circ$.

Testul 2. 2. a Da. Cum $135^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b$. b $2x + 15^\circ + 3x - 15^\circ = 180^\circ$, de unde obținem că $5x = 180^\circ$, adică $x = 36^\circ$. 3. Dacă C și D sunt de aceeași parte a dreptei AB, atunci $m(\sphericalangle CBD) = 30^\circ$; dacă C și D sunt de o parte și de alta a dreptei AB, atunci $m(\sphericalangle CBD) = 150^\circ$.

Test-model pentru Evaluarea Națională

1. c. 2. d. 3. $\sphericalangle ABM = \sphericalangle BMC$ (alterne interne) și, cum $[BM$ este bisectoare, rezultă că $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBC$. De aici rezultă ceea ce trebuia demonstrat. 4. $m(\sphericalangle MBC) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle ABC)$, $m(\sphericalangle NCB) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle BCD)$ și, cum $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ (alterne interne), urmează că $\sphericalangle MBC = \sphericalangle NCB \Rightarrow MB \parallel CN$. 5. Dacă unghiul dintre CD și g este de 90°, rezultă că CD este perpendiculară pe g. Pentru că și AB este perpendiculară pe g, dreptele AB și CD formează unghiuri alterne interne congruente, deci sunt paralele.

IV.8. Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri

1. $C, E \in \mathcal{C}(O, r)$, $A, F \in Int\,\mathcal{C}(O, r)$, $B, D \in Ext\,\mathcal{C}(O, r)$. **3.** $108°$.

4. $m(\widehat{MON}) = m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{AON}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{AN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AMB}) + \frac{1}{2}m(\widehat{ANB}) = 180°$, deci $[MN]$ este diametru.

5. **a** exterioară; **b** tangentă; **c** secantă; **d** secantă. **6.** **a** tangente exterioare; **b** secante; **c** exterioare; **d** tangente interioare; **e** concentrice; **f** interioare. **7.** **a** 1; **b** 0; **c** nu există; **d** 2.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** **a** $360°$; **b** diametru; **c** tangentă. **2.** A și D sunt în exterior, B pe cerc și C în interior. **3.** $72°$.

Testul 2. **1.** **a** A; **b** F; **c** A. **b** F. **3.** **a** $210°$; **b** $240°$; **c** $40°$; **d** $120°$.

IV.9. Probleme cu caracter practic

1. *Cuminței*. **2.** $117°$. **4.** *Geome*.

IV.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. Între două ore cosecutive orarul parcurge $360° : 12 = 30°$. În 30 minute se deplasează a $15°$. Minutarul se deplasează în 30 de minute $180°$. Unghiul are măsura egală cu $180° - 15° = 165°$. **2.** Fie $\sphericalangle BOy = k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sphericalangle COx = pk$; $\sphericalangle BOx = \sphericalangle AOx = pk - 2k$; $2(pk - 2k) + 2k = 180°$; $k(p - 1) = 90$; p este prim; $(p; k) \in \{(3, 45°), (7; 15°), (11; 9°), (19; 5°), (31, 3°)\}$. **3.** $1° + 2° + 3° + ... + n° + 9° = 360° \Rightarrow \frac{n(n+1)°}{2} = 351° \Rightarrow n(n + 1) = 702 \Rightarrow n = 26$. **4.** $m(\sphericalangle A_1OA_2) = 4 \cdot 1°$; $\sphericalangle A_2OA_3 = 4 \cdot 2°$;...; $\sphericalangle A_iOA_{i+1} = 4 \cdot i°$; $\sphericalangle A_{i+1}OA_1 = 4 \cdot n°$; $4(1° + 2° + 3° + ... + i°) + 4n° = 360°$; $2(1° + 2° + 3° + ... + i°) + 2n° = 180° \Rightarrow i \cdot (i + 1) + 2n = 180 \Rightarrow i = 12$; $n = 12$. Sunt semidrepte opuse: OA_1 și OA_{10}; OA_5 și OA_{11}; OA_7 și OA_{12}. **5.** $\sphericalangle AOA_1 = 64° = (2^6)°$; $\sphericalangle AOA_2 = 32° = (2^5)°$; $\sphericalangle AOA_3 = 16° = (2^4)°$;...; $\sphericalangle AOA_7 = 1° = (2^0)°$; $\sphericalangle A_2OA_5 = 16° + 8° + 4° = 28°$. Fie OS bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_2OA_5 \Rightarrow \sphericalangle A_2OS = \sphericalangle A_5OS = 14°$; $\sphericalangle A_3OB = 16° + 32° + 64° = 112°$. Fie OT bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_3OB \Rightarrow \sphericalangle A_3OT = \sphericalangle BOT = 56°$; $\sphericalangle A_5OB = 4° + 8° + 16° + 32° + 64° = 124°$; $\sphericalangle SOT = \sphericalangle A_5OB - \sphericalangle BOT - \sphericalangle A_5OS = 124° - 56° - 14° = 54°$. **6.** Fie u și $s \in \mathbb{N}^*$ numărul șabloanelor de $11°$ și, respectiv, $7°$. Obținem ecuația: $11u + 7s = 90 \Leftrightarrow 11u + (7s - 2) = 88 \Rightarrow (7s - 2) \vdots 11 \Rightarrow s = 5$; $u = 5$. **7.** $1° + 3° + 5° + 7° + 9° + 11° = 36°$; 10 grupe; $\Rightarrow$ 60 de unghiuri; **c** $\sphericalangle O_6 = 7°$; $\sphericalangle O_{14} = 3°$. Măsura unghiului dintre bisectoare este egală cu $7° : 2 + 9° + 11° + 36° + 1° + 3° : 2 = 62°$. **8.** **a** $n = 3$ sau $n = 5$. **b** Fie $\sphericalangle A_1OA_2 = a°$, unde $a \in \mathbb{N}^*$ și $\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 = s \Rightarrow \sphericalangle A_2OA_3 = s - a$; $\sphericalangle A_3OA_4 = a \Rightarrow ... \Rightarrow \sphericalangle A_{n-1}OA_n = s - a \Rightarrow \sphericalangle A_nOA_1 = a$. Cum $\sphericalangle A_nOA_1 + \sphericalangle A_1OA_2 = s = 2a \Rightarrow \sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \sphericalangle A_3OA_4 = ... = \sphericalangle A_nOA_1$. **c** Conform *b*) $\Rightarrow n \cdot a = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ și n este impar $\Rightarrow n \in \{3; 5; 9; 15; 45\}$. În niciunul din cazuri nu avem soluție.

V. Triunghiul

V.1. Triunghiul. Elementele triunghiului. Clasificarea triunghiurilor

2. Toate sunt adevărate. **3.** **a** $\sphericalangle A$; **b** $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$; **c** $[AB]$ și $[AC]$. **4.** **a** vârful D și baza $[EF]$; **b** vârful E și baza $[DF]$; **c** vârful F și baza $[DE]$. **5.** **a** $[BC]$; **b** $[AB]$ și $[AC]$; **c** $[AB]$; **d** $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$; **e** $\sphericalangle A$. **6.** **a** $[AC]$; **b** $\sphericalangle B$; **c** $\sphericalangle C$. **7.** **a** obtuzunghic; **b** $[BA]$ și $[BC]$. **8.** **a** obtuz; **b** $[EF]$; **c** obtuzunghic; **9.** **a** obtuzunghic; **b** oarecare; **c** isoscel; **d** ascuțitunghic; **e** dreptunghic; **f** echilateral. **10.** **a** A; **b** A; **c** A; **d** F; **e** F; **f** A; **g** A. **12.** **a** 54 cm; **b** 12 dm. **13.** $l = 7$ cm. **14.** **a** ΔAMP, ΔBMP, ΔCMP, ΔNMP; **b** ΔCPA, ΔBPN; **c** ΔMBC, ΔMBP; **d** ΔNBP, ΔNMA, ΔNMP. **15.** $63°$. **16.** 10 cm. **17.** $x + (x + 2) + (x + 4) = 30 \Rightarrow x = 8$. Laturile au lungimile egale cu 8 cm, 10 cm, 12 cm. **18.** Propoziții adevărate: ***a, d, e, g, h, l, j***; propoziții false: ***b, c, f, k***. **19.** 11 cm, 13 cm, 15 cm. **20.** **a** $a + b = 25$; $b + c = 27$; $c + a = 28$. Adunând cele trei relații obținem $2a + 2b + 2c = 80 \Rightarrow a + b + c = 40$. **b** $a = 40 - 27 = 13$ cm, $b = 12$ cm și $c = 15$ cm. **21.** $a + b + c = 35$;

$b = a + 4$, $c = b + 3 = a + 7$, de unde $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm. **22.** Cazul I: $AB = AC = 8$ cm, de unde $BC = 26 - 16 = 10$ cm. Cazul II: $BC = 8$ cm $\Rightarrow AB = (26 - 8) : 2 = 9$ cm.

V.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

1. a $m(\hat{C}) = 70°$; **b** $m(\hat{B}) = 75°$; **c** $m(\hat{A}) = 73°$. **2.** 40°. **3.** 54°. **4.** 38°. **5.** 76°. **6.** $m(\hat{A}) = 66°$, $m(\hat{B}) = 33°$, $m(\hat{C}) = 81°$. **7.** $m(\hat{B}) = 83°$. **8.** $m(\hat{A}) = 54°$, $m(\hat{C}) = 58°$. **9.** 45°. **10.** $x + (x + 1) + (x + 2) = 180° \Leftrightarrow x = 59°$. Unghiurile triunghiului au măsurile de 59°, 60°, 61°. **11. a** $m(\hat{C}) = 80°$; **b** $m(\hat{B}) = 119°$; **c** $m(\hat{A}) = 73°46'$. **12.** $180° - 135° = 45°$, $135° - 84° = 51°$. **13.** 120°. **14.** $\frac{m(\hat{A})}{1} = \frac{m(\hat{B})}{3} = \frac{m(\hat{C})}{5} = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{9} = \frac{180°}{9} = 20°$. Unghiurile au măsurile de 20°, 60°, 100°. **15.** $m(\hat{C}) = 40°$, $m(\widehat{BAC}) = 80°$. **16.** $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAC}) = 80°$.

17. Fie $m(\hat{A}) = 90°$, rezultă $\frac{m(\hat{B})}{5} = \frac{m(\hat{C})}{13} = \frac{m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{18} = \frac{90°}{18} = 5°$, rezultă $m(\hat{B}) = 25°$, $m(\hat{C}) = 65°$.

19. Fie $m(\hat{A}) = 90°$, rezultă $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90°$ și $m(\hat{B}) - m(\hat{C}) = 14°$ rezultă $m(\hat{B}) = 52°$, iar $m(\hat{C}) = 38°$. Dacă $m(\hat{C}) - m(\hat{B}) = 14°$ rezultă $m(\hat{B}) = 38°$ și $m(\hat{C}) = 52°$. **20.** $m(\hat{A}) = 55°$, $m(\hat{B}) = 80°$, $m(\hat{C}) = 45°$. **21.** Se arată că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel (din $\Delta ABD \equiv \Delta BCE$). **22.** 55°, 49°, 76°. **23.** $m(\hat{A}) = 30°$, $m(\hat{B}) = 55°$, $m(\hat{C}) = 95°$. **24.** $m(\hat{A}) = 60°$. **25.** Se arată că $NC \perp CB$ și $MB \perp BC$. **26.** 90°. **28.** Se arată congruențele $\widehat{ANM} \equiv \widehat{NAB}$ și $\widehat{AMC} \equiv \widehat{CAM}$. **29. a** Se arată că $m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{ABC}) : 2 = m(\widehat{IBC})$. **b** Se arată că $m(\widehat{ICB}) = m(\widehat{BCE}) = 25°$.

V.3. Construcția triunghiurilor

10. $l = 6$ cm. **11.** dreptunghic. **13.** isoscel. **16.** $BC = 6$ cm.. **17.** Fiecare unghi interior are măsura egală cu 60°, iar cel exterior are 120°. **18.** Lungimile laturilor sunt de 9 cm, 8 cm, 7 cm. **20.** $m(\sphericalangle N) = 40°$. **21.** $AB = AC = BC = 4$ cm, $P_{\Delta ABC} = 12$ cm. **22.** dreptunghic. **23.** Cu centrul în B și cu o deschidere de 10 cm se trasează un arc de cerc și se determină punctul C; $AC = 8$ cm. **24.** $m(\sphericalangle MNP) = 60°$. **25.** $4 + 3 < 8$. Ulterior vom învăța că în orice triunghi suma lungimilor a două laturi este mai mare decât lungimea celei de-a treia laturi. **26.** Deoarece nu s-a precizat baza, avem două cazuri: 5 cm, 5 cm, 6 cm, respectiv 6 cm, 6 cm, 5 cm. **27. a** $CB = CD = 5$ cm, **b** A. **28.** $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta DCE} = 9$ cm. **29.** A; **30.** A. **31.** A.

V.4. Congruența triunghiurilor

1. b cu **f** și **c** cu **e**. **2. a** A; **b** F; **c** A; **d** F. **4. a** $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (L.U.L.); **b** $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ (U.L.U.); **c** $\Delta DEF \equiv \Delta MNP$ (L.L.L.); **d** $\Delta MAT \equiv \Delta GEO$ (L.U.U.). **5.** $A'B' = 3$ cm, $AC = 5$ cm. $m(\sphericalangle B) = 110°$. **6.** $BC = EF = 4$ cm, $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle F) = 70°$. **7.** $m(\sphericalangle R) = m(\sphericalangle B) = 73°$, $MR = AB = 3{,}5$ cm, $AC = MP = 5$ cm, $m(\sphericalangle P) = m(\sphericalangle C) = 29°$. **8.** Nu se poate aplica L.U.L. deoarece era necesar ca $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$! **9.** $S = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C) = 72° + 36° = 108°$. **10.** Prin tranzitivitate, $\Delta ABC \equiv \Delta RTS$. **11.** Avem $\Delta BAC \equiv \Delta MNP$, $\Delta BCA \equiv \Delta NPM$, $\Delta CAB \equiv \Delta PMN$ și $\Delta CBA \equiv \Delta PNM$. **13.** $[AB] \equiv [AC]$, $[AM] \equiv [AM]$ (latură comună) și, cum M este mijlocul laturii $[BC]$, avem și $[BM] \equiv [CM]$. Conform cazului L.L.L., rezultă $\Delta ABM \equiv \Delta ACM$. **14.** L.U.L. **15. a** Rezultă conform cazului L.L.L.; **b** Din **a** rezultă că $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle EAC$. Apoi, conform cazului L.U.L., rezultă cerința problemei. **16.** $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle COB$ (unghiul O este comun). **17.** Din $\Delta ABC \equiv \Delta NMP$ și $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ rezultă $\Delta MNP \equiv \Delta NMP$, de unde $[PN] \equiv [PM]$, deci ΔPMN este isoscel de bază $[MN]$. Cum $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Rightarrow \Delta CAB$ este isoscel de bază $[AB]$. **18.** $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Rightarrow AB = MN$ (1); și $AC = MP$ (2). $\Delta MNP \equiv \Delta BCA \Rightarrow MN = BC$ (3); și $MP = BA$ (4). Din (1) și (2) $\Rightarrow AB = BC$, iar din (3) și (4) $\Rightarrow AC = AB$. În concluzie, ΔABC este echilateral și are perimetrul de 30 cm. **19.** $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Rightarrow [AB] \equiv [MN]$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $[BC] \equiv [NP]$. Deci $[BD] \equiv [NQ]$. Conform cazului L.U.L., rezultă apoi cerința problemei. **20.** Din $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ (1) și $[AB] \equiv [A'B']$ (2). Din ipoteză $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle A'B'M'$ (3). Din (1), (2) și (3), conform cazului U.L.U., rezultă $\Delta ABM \equiv \Delta A'B'M'$. **21.** Din $[AR] \equiv [AP]$, $\sphericalangle RAB \equiv \sphericalangle PAC$ și $[AB] \equiv [AC]$, conform L.U.L. rezultă $\Delta RAB \equiv \Delta PAC$. **22.** Evident, $[BC] \equiv [CB]$ (latură comună), $\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle CRB$ și $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle RCB$. Conform L.U.U., avem $\Delta PBC \equiv \Delta RCB$. **23.** Avem $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DAC$, $[AD] \equiv [AD]$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Conform cazului U.L.U., $\Delta DAB \equiv \Delta DAC$. **24.** $\sphericalangle BDC$ și $\sphericalangle EDA$ sunt unghiuri opuse la vârf, deci $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle EDA$. E este simetricul lui B față de D, deci D este mijlocul slui $[EB]$, de unde $[BD] \equiv [ED]$. Cum $[CD] \equiv [AD]$, conform L.U.L., rezultă $\Delta BDC \equiv \Delta EDA$. **25.** Cazul I: $AB = AC = 12$ cm $\Rightarrow \Delta ABC$ echilateral $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta MNP$ echilateral. Cazul II: $AB = 12$ cm $\Rightarrow BC = CA = (36 - 12) : 2 = 12$ cm $\Rightarrow \Delta ABC$ echilateral $\Rightarrow \Delta MNP$ echilateral. **26.** $\Delta AMB \equiv \Delta BMC \equiv \Delta CMA$ (conform L.L.L.). **27.** Avem $[AB] \equiv [AC]$, $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle NAC) = 90° - m(\sphericalangle BAC)$ $\Rightarrow \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC$ și $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle ANC$, deci $\Delta MAB \equiv \Delta NAC$, conform cazului L.U.U. **28.** $\sphericalangle MAB$ este echilateral $\Rightarrow$ $\Rightarrow [MA] \equiv [MB] \equiv [AB]$ (1). ΔNAC este echilateral $\Rightarrow [NA] \equiv [NC] \equiv [AC]$ (2). Din ipoteză, $[AB] \equiv [AC]$ (3). Din (1), (2) și (3) rezultă $[AM] \equiv [AN]$ și atunci ΔMAN este isoscel, cu condiția ca $\sphericalangle MAN$ să nu fie alungit, caz în care ΔMAN nu există!

V.5. Metoda triunghiurilor congruente

1. **a** $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$; **b** $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$; $[EF]$. **2.** **a** L.L.L. **b** $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle EFD$. **3.** **a** A treia congruență este $[AC] \equiv [CA]$ (latură comună); L.L.L. **b** $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DCB$. În triunghiuri congruente, ambele se opun laturii comune. **4.** **a** U.L.U.; **b** $[BC] \equiv [NP]$. **5.** **a** ΔABC este isoscel de bază $[BC]$, deci $[AB] \equiv [AC]$. L.L.L. **b** Din $\Delta ABD \equiv \Delta ACD \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$; **c** Din $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD \Rightarrow [AD$ este bisectoarea unghiului BAC. **6.** **a** U.L.U. **b** $[AC] \equiv [DF]$. **7.** **a** L.U.L. **b** $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$. **8.** **a** $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ (L.U.L.), de unde $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. **b** $[AC] \equiv [MP]$. **9.** M este mijlocul bazei $[BC]$, deci $[BM] \equiv [CM]$. Din $\Delta AMB \equiv \Delta AMC$ (L.L.L.) rezultă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM$, deci $[AM$ este bisectoarea unghiului BAC. **10.** $[AM$ este bisectoarea unghiului BAC, deci $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM$. Rezultă $\Delta AMB \equiv \Delta AMC$ (L.U.L.), de unde $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ și $[BM] \equiv [CM]$, deci M este mijlocul bazei. **11.** **a** $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$ (L.U.L.) $\Rightarrow [BC] \equiv [DA]$. **b** $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$. **12.** **a** $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ (L.U.L.) $\Rightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$. **b** $[BD] \equiv [CD]$; **c** $\Delta ABD \equiv \Delta ACD \Rightarrow \sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle CDA \Rightarrow$ $\Rightarrow [DA$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDC$. **13.** **a** $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ (U.L.U.) $\Rightarrow \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. **b** $[BC] \equiv [NP]$.

14. **a** $\Delta ABC \equiv \Delta CDB$ (U.L.U.). **b** $[AB] \equiv [DC]$. **15.** $\Delta AMB \equiv \Delta AMC$ (U.L.U.) $\Rightarrow [AB] \equiv [AC]$, deci ΔABC este isoscel de bază $[BC]$. **16.** **a** $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ (U.L.U.) $\Rightarrow [BD] \equiv [CD]$; **b** Din aceeași congruență de triunghiuri obținem $[AB] \equiv [AC]$ $\Rightarrow \Delta ABC$ isoscel; **c** $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$. **17.** $\Delta MOA \equiv \Delta MOB$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle MOA \equiv \sphericalangle MOB$; $m(\sphericalangle AOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle MOA) = 75°$. **18.** Conform L.U.L., $\Delta MAB \equiv \Delta MAC \Rightarrow [BM] \equiv [CM] \Rightarrow \Delta MBC$ isoscel. **19.** **a** $\Delta ABN \equiv \Delta ACN$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ACM$; **b** $\Delta MBC \equiv \Delta NCB$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle NBC$. **20.** **a** Cum $\Delta BMN \equiv \Delta CNM$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle NCM$; **b** $\Delta BMC \equiv \Delta CNB$ (L.L.L.), $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CNB$. **c** $\Delta ABN \equiv \Delta ACM$ (L.U.U.) $\Rightarrow [AB] \equiv [AC]$. **21.** **a** $\Delta ADE \equiv \Delta ABC$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [DE] \equiv [BC]$. **b** $\Delta ABE \equiv \Delta ADC$ (L.U.L.) $\Rightarrow [BE] \equiv [DC]$. **22.** **a** $\Delta MOB \equiv \Delta MOC$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle BMO \equiv \sphericalangle CMO$. **b** $\sphericalangle AMB$ și $\sphericalangle AMC$ au suplemente congruente, deci $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC$. **c** $\Delta AMB \equiv \Delta AMC$ (L.U.L.) $\Rightarrow [AB] \equiv [AC] \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel. **23.** **a** ΔMNP este isoscel $\Rightarrow [MN] \equiv [MP]$ (1). Cum ΔMNQ este echilateral $\Rightarrow [MN] \equiv [MQ] \equiv [QN]$ (2). Dar și ΔMPT este echilateral $\Rightarrow [MP] \equiv [PR] \equiv [MR]$ (3). Din (1), (2) și (3) rezultă $[MQ] \equiv [MR] \Rightarrow \Delta MQR$ este isoscel. **b** $m(\sphericalangle QMP) = 60° + m(\sphericalangle MNP) = m(\sphericalangle NMR) \Rightarrow \sphericalangle QMP \equiv \sphericalangle RMN$. **c** $\sphericalangle QMP \equiv \sphericalangle RMN$ (L.U.L.) $\Rightarrow [QP] \equiv [RN]$. **24.** **a** $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$ (L.U.L.) $\Rightarrow [BD] \equiv [AC]$. **b** Fie M mijlocul segmentului $[AB]$. $\Delta AMC \equiv \Delta BMD$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle DMB \equiv \sphericalangle AMC$ și $[DM] \equiv [MC] \Rightarrow D, M, C$ sunt coliniare $\Rightarrow M$ este mijlocul segmentului $[DC]$. **26.** Comparăm ΔABC cu ΔBCA și ΔCAB. Deoarece ΔABC este echilateral, avem congruențele: $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA]$ (1), $[BC] \equiv [CA] \equiv [AB]$ (2) și $[CA] \equiv [AB] \equiv [BC]$ (3). Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta BCA \equiv \Delta CAB \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. **27.** **a** $\Delta ABC \equiv \Delta AED$ (L.U.L.) $\Rightarrow [AC] \equiv [AD] \Rightarrow \Delta ACD$ este isoscel. **b** $\Delta ABC \equiv \Delta AED \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EAD$; atunci: $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle EAD) + m(\sphericalangle CAD) \Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle EAC$. **c** $\Delta BAD \equiv \Delta EAC$ sau $\Delta BCD \equiv \Delta EDC$ (L.U.L.). **28.** **a** $\Delta ABC \equiv \Delta ADC \Rightarrow [AB] \equiv [AD]$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$, de unde $\Delta ABM \equiv \Delta ADN$ (L.U.L.). **b** $\Delta ABM \equiv \Delta ADN \Rightarrow [AM] \equiv [AN]$. **c** $\Delta AMC \equiv \Delta ANC$ (cazul L.U.L. sau U.L.U.). **29.** **a** $\Delta MOB \equiv \Delta NOC$ (L.U.L.) (1) conduce la $[BM] \equiv [CN]$ (2). **b** Din (1) rezultă $\sphericalangle BMO \equiv \sphericalangle CNO$ și cum $\sphericalangle BMO$ este suplementar cu $\sphericalangle AMC$, iar $\sphericalangle CNO$ este suplementar cu $\sphericalangle ANB$, deducem că $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle ANB$ (3). Din (1) avem $\sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle ABN$ (4). În plus, $CO + OM = BO + ON \Rightarrow [CM] \equiv [BN]$ (5). Din (3), (5) și (4) rezultă $\Delta ACM \equiv \Delta ABN$ de unde $[AC] \equiv [AB] \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel. **c** $\Delta AOB \equiv \Delta AOC \Rightarrow \sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle CAO \Rightarrow$ $\Rightarrow [AO$ este bisectoarea unghiului BAC. **30.** **a** $BF = BC - FC = BC - BE = EC$; cazul (L.U.L.) arată că $\Delta BAF \equiv \Delta CAE \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle CAE$. **b** $\Delta ABE \equiv \Delta ACF$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle CAF$ (1). Fie $T \in (EF)$ astfel încât $[AT$ este bisectoarea unghiului EAF, deci $\sphericalangle EAT \equiv \sphericalangle FAT$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\sphericalangle BAT \equiv \sphericalangle CAT \Rightarrow [AT$ este bisectoarea unghiului BAC. **31.** **a** $\Delta AEF \equiv \Delta AGD$ (L.U.L.) $\Rightarrow [DG] \equiv [EF]$. **b** $\Delta ABG \equiv \Delta ACE$ (L.U.L.) $\Rightarrow [BG] \equiv [CE]$. **32.** **a** $\Delta ABD \equiv \Delta A'B'D'$ (U.L.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [AD] \equiv [A'D']$; **b** $\Delta ACD \equiv \Delta A'C'D'$ (L.U.L.) $\Rightarrow [CD] \equiv [C'D']$. **33.** $\Delta ABM \equiv \Delta ABN \Rightarrow \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NAC$; $\Delta MAC \equiv \Delta NAC$ (L.U.L.) $\Rightarrow \sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle NCA$ (1) și $[MC] \equiv [NC]$. Din (1) rezultă $\sphericalangle MCD \equiv \sphericalangle NCD$, de unde obținem $\Delta CDM \equiv \Delta CDN$ (L.U.L.). **34.** **a** Dacă B, D, C nu sunt coliniare, atunci $\Delta BDM \equiv \Delta CDM \Rightarrow [BD] \equiv [CD] \Rightarrow \Delta BDC$ este isoscel. Dacă B, D, C sunt coliniare, nu există ΔBDC. **b** Analog. **35.** **a** $\Delta BAM \equiv \Delta DAM$ (L.U.L.) $\Rightarrow [MB] \equiv [MD]$. **b** $\Delta BCN \equiv \Delta DCN$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $[BN] \equiv [DN]$, deci $\Delta BMN \equiv \Delta DMN$ (L.L.L.). **36.** **a** $m(\sphericalangle NAM) = 360° - 60° - 60° - 90° = 150° = m(\sphericalangle NAB) = m(\sphericalangle CAM)$;

atunci $\Delta MAC \equiv \Delta MAN \equiv \Delta BAN$ (L.U.L.). **b** Din $\Delta MAN \equiv \Delta BAN \Rightarrow \sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle BNA$. **37. a**, **b** Din $\Delta OAB' \equiv \Delta OA'B$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [AB'] \equiv [A'B]$ și $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle A'B'M$. Ca diferențe de segmente congruente, obținem că $[AB] \equiv [A'B']$; $\Delta AMB \equiv \Delta A'MB'$ (L.U.U.) $\Rightarrow [BM] \equiv [BM']$; **c** $\Delta OMB \equiv \Delta OMB'$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle OMB \equiv \sphericalangle OMB' \Rightarrow [OM$ este bisectoare. **38. a** Deoarece $M \in Int(\sphericalangle NCB)$ rezultă că $\sphericalangle ACN$, $\sphericalangle NCM$, $\sphericalangle MCB$ sunt unghiuri suplementare cu interioarele disjuncte! Atunci $m(\sphericalangle ACN) + 60° + m(\sphericalangle MCB) = 180°$; $\Delta CBM \equiv \Delta CNA \Rightarrow \sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle BCM$ și $m(\sphericalangle BCM) = 60°$. **b** $\Delta MCN \equiv \Delta ACN \Rightarrow \sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle ANC \Rightarrow [NC$ este bisectoarea unghiului ANM.

V.6. Congruența triunghiurilor dreptunghice

3. Din $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$ (I.U.) $\Rightarrow [AO] \equiv [BO]$. **4.** Din $\Delta OAC \equiv \Delta OBD$ (I.U.) $\Rightarrow [OC] \equiv [OD] \Rightarrow \Delta OCD$ isoscel. **5.** $\sphericalangle DBM \equiv \sphericalangle ECN$; $\Delta DBM \equiv \Delta BCN$ (C.U.) $\Rightarrow [DM] \equiv [EN]$; **6.** $\Delta BEP \equiv \Delta CFR$ (C.C.) $\Rightarrow [FR] \equiv [PE]$; $\Delta EBR \equiv \Delta FCP$ (C.C.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [ER] \equiv [FP]$. **7. a** $\Delta BOA \equiv \Delta BOC$ (C.C.) $\Rightarrow [BA] \equiv [BC] \equiv \Delta BAC$ este isoscel de bază $[AC]$. **b** Din $\Delta BOA \equiv \Delta BOC \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA$; $\Delta MCO \equiv \Delta NAO$ (I.U.) **c** $\sphericalangle MOC \equiv \sphericalangle NOA$ și se aplică reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf. **8. a** ΔADB este isoscel de bază $[BD] \Rightarrow \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ABD$; $\sphericalangle ADN \equiv \sphericalangle ABM$; **b** $\Delta DPN \equiv \Delta BRM$ (I.U.) $\Rightarrow [DP] \equiv [BR]$; **9. a** $[AB] \equiv [AC] \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Din $\Delta BPM \equiv \Delta CRN$ (I.U.) $\Rightarrow [BP] \equiv [RC]$ și $[MP] \equiv [NR]$; **b** $\Delta MPR \equiv \Delta NRP$ (C.C.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [MR] \equiv [PN]$. **10. a** Din $[AD] \equiv [AE] \Rightarrow \Delta ADE$ este isoscel de bază $[DE] \Rightarrow \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AED \Rightarrow \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC$; $\Delta ABD \equiv \Delta ACE$ (L.U.L.) $\Rightarrow [AB] \equiv [AC]$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$; **b** Construim $DM \perp AB$, $M \in AB$ și $EN \perp AC$, $N \in AC$. Avem $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$ și $[AD] \equiv [AE] \Rightarrow \Delta ADM \equiv \Delta AEN$ (I.U.) $\Rightarrow [DM] \equiv [EN]$, adică $d(D, AB) = d(E, AC)$. **11. a** $\Delta ANF \equiv \Delta AME$ (C.U.) $\Rightarrow \sphericalangle AFN \equiv \sphericalangle AEM$ și $[AE] \equiv [AF]$. Din $[AB] \equiv [AC] \Rightarrow \Delta ACB \equiv \Delta ABC$ (L.U.L.) $\Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, iar din $[AB] \equiv [AC]$ și $[AF] \equiv [AE] \Rightarrow [BF] \equiv [CE]$. Din $\Delta BCF \equiv \Delta CBE$ (L.U.L.) $\Rightarrow [BE] \equiv [CF]$. **b** $[AE] \equiv [AF]$ și $[AN] \equiv [AM]$ $\Rightarrow [NE] \equiv [MF]$ atunci $\Delta NEO \equiv \Delta MFO$ (C.U.) $\Rightarrow [MO] \equiv [NO]$. **c** Din $\Delta NAO \equiv \Delta MAO$ (C.C.) $\Rightarrow \sphericalangle NAO \equiv \sphericalangle MAO$. Notez $AO \cap BC = \{P\}$. $\Delta APC \equiv \Delta APB$ (U.L.U.) $\Rightarrow \sphericalangle APC \equiv \sphericalangle APB$ și cum $m(\sphericalangle APC) + m(\sphericalangle APB) = 180° \Rightarrow AO \perp BC$. **12.** Fie $BB' \perp MA$ și $DD' \perp ME$. $\Delta B'BA \equiv \Delta D'DE$ (I.C.). $\Rightarrow \sphericalangle BAB' \equiv \sphericalangle DED'$. Fie $CF \perp MA \Rightarrow d(C, MA) = CF$; și $CG \perp ME \Rightarrow$ $\Rightarrow d(C, ME) = CG$; $\Delta FCA \equiv \Delta GCE$ (I.U.) $\Rightarrow CF \perp MA \Rightarrow d(C, MA) = CF$; și $CG \perp ME \Rightarrow d(C, ME) = CG$; $\Delta FCA \equiv \Delta GCE$ (I.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [CF] \equiv [CG] \Rightarrow CF = CG$. **13.** Fie $DD' \perp BC$ și $EE' \perp BC$; $\Delta DD'F \equiv \Delta EE'F$ (I.U.) $\Rightarrow [DD'] \equiv [EE']$; $\Delta BDD' \equiv \Delta CEE'$ (C.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [BD] \equiv [CE]$.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** $[FH]$. **2.** $\sphericalangle H$, $\sphericalangle G$. **3.** $[HF]$, $\sphericalangle F$. **4.** Echilateral. **5.** Este cazul L.U.L. **6.** $\Delta BAD \equiv \Delta CAD$ (L.L.L.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$. **7. a** $OA = OB - AB = OD - CD = OD$; **b** $\Delta BOC \equiv \Delta DOA$ (L.U.L.); **c** $\Delta ATB \equiv \Delta CDT$ (U.L.U) $\Rightarrow$ $\Rightarrow BT = TD$ și $OB = OD$; $\sphericalangle OBT \equiv \sphericalangle ODT \Rightarrow \Delta OBT \equiv \Delta ODT \Rightarrow \sphericalangle BOT \equiv \sphericalangle DOT$.

Testul 2. **1.** $[MP]$. **2.** $\sphericalangle A$. **3.** $[TS]$, $\sphericalangle T$. **4.** Isoscel. **5.** Este cazul L.U.L. **6.** $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$ (L.U.L.) $\Rightarrow AB = AC$. **7. a** $\Delta MAO \equiv \Delta NBO$ (U.L.U.) $\Rightarrow AM = BN$; **b** Conform **a** ave $OM = ON \Rightarrow AN = BM$; **c** $\Delta ACN \equiv \Delta BCN$ (U.L.U.) $\Rightarrow CA = CB \Rightarrow \Delta COA \equiv \Delta COB$ (L.U.L.) $\Rightarrow \sphericalangle COA \equiv \sphericalangle COB$.

Testul 3. **1.** $[GH]$. **2.** $\sphericalangle H$, $\sphericalangle F$. **3.** $[GF]$, $\sphericalangle H$. **4.** Dreptunghic. **5.** $\Delta ABE \equiv \Delta ACD$ (L.U.L.) $\Rightarrow BE = CD$ (1). $\Delta AEC \equiv \Delta ADB$ (L.U.L.) $\Rightarrow EC = BD$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\Delta BEC \equiv \Delta CDB$. **6.** $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$ (U.L.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB = AC$. **7. a** $OD = OA + AD = OB + BC = OC$; **b** $\Delta BOD \equiv \Delta AOC$ (L.U.L.); **c** $\Delta DOT \equiv \Delta COT$ (L.U.L.).

Testul 4. **1.** $[MN]$. **2.** $\sphericalangle T$. **3.** $[TA]$, $\sphericalangle A$. **4.** Obtuzunghic. **5.** L.U.L. **6.** $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$ (L.U.L.) $\Rightarrow AB = AC$. **7. a** $\Delta ANO \equiv \Delta MBO$ (U.L.U.) $\Rightarrow \sphericalangle ONA \equiv \sphericalangle OBM$; **b** Din **a** $\Rightarrow AN = BM$; **c** $\Delta ATB \equiv \Delta MTN$ (U.L.U.) $\Rightarrow AT = MT \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta TAO \equiv \Delta TMO \Rightarrow \sphericalangle TOA \equiv \sphericalangle TOM$.

Test-model pentru Evaluarea Națională

1. a 100 00 m. **2. c** 46 km. **3.** $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$; $[150; 240] = 1200$. $\left.\begin{array}{l}\overline{a2cc} \vdots 150 \\ \overline{a2cc} \vdots 240\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{a2cc} \vdots [150; 240] \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{a2cc} \vdots 1200 \Rightarrow \overline{a2cc} = 1200$. **4.** $AB = AC = 8$ m; $BC = 5$ m; $AB : BC = 8$ m $: 5$ m $= 1,6 \neq 1,618$. **5.** $P_{\Delta ABM} + P_{\Delta ACM} =$ $= AB + AM + BM + CM + AC + AM = AB + AC + BC + 2AM = P_{\Delta ABC} + 2AM = 32$ m $+ 2AM = 48$ m $\Rightarrow AM = 8$ m.

V.7. Probleme cu caracter practic

1. Vor ajunge în același timp, deoarece $AB = AC$. **2.** **a** Următorul triunghi va avea catetele *formate* din câte 5 puncte; **b** $1 + 2 + 3 + ... + 21 = 231$ puncte. **3.** Se calculează $BC = 40$ km. Traseul $ABCA$ are 120 km, iar traseul $ADCA$ are $520 \times 25\% = 130$ km; va fi ales traseul $ABCA$. **6.** $\Delta ABI \equiv \Delta ACI$ (L.U.L.) $\Rightarrow m(\sphericalangle BAI) = m(\sphericalangle CAI) = m(\sphericalangle BAC) : 2 = 30°$. **a** $m(\sphericalangle ABI) = m(\sphericalangle BAI) = m(\sphericalangle IBC) = m(\sphericalangle ICB) = 30° \Rightarrow$ triunghiurile AIB și BIC sunt isoscele $\Rightarrow AI = BI = CI$; **b** $m(\sphericalangle AIB) = 360° : 3 = 120°$, deoarece $\Delta AIB \equiv \Delta BIC \equiv \Delta AIC$ (U.L.U.). **7.** Avem, conform datelor problemei: $a + b = 13$, $c + d = 10$, $e + f = 7$. Pentru ca cele 9 jetoane să conțină numere diferite, trebuie ca $\{a, b\} = \{6, 7\}$; $\{c, d\} = \{1, 9\}$ și $\{e, f\} = \{3, 4\}$. Sau $\{a, b\} = \{4, 9\}$, $\{c, d\} = \{3, 7\}$ și $\{e, f\} = \{1, 6\}$.

V.8. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. **b** Din ipoteză CT este bisectoarea unghiului $RCE \Rightarrow \sphericalangle ACT \equiv \sphericalangle ECT$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ACT \equiv \sphericalangle ECT \\ [CT] \equiv [CT] \text{ (latură comună)} \\ \sphericalangle ATC \equiv \sphericalangle ETC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CAT \equiv \Delta CET \Rightarrow \begin{cases} [CA] \equiv [CE] \Rightarrow CA = CE = 4 \text{ cm} \\ [AT] \equiv [ET] \Rightarrow AT = ET = x, \text{ cu } 9 \text{ cm} < x < 5 \text{ cm} \end{cases}$$

Atunci $RT = RE - TE = (5 - x)$ cm, iar $AR = CR - CA = 6 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 2$ cm.

$P_{\Delta ART} = AR + TA + RT = 2 \text{ cm} + x \text{ cm} + (5 - x) \text{ cm} = 7$ cm.

2. **a** $$\left.\begin{array}{l} PA \text{ este tangentă la cerc} \Rightarrow PA \perp OA \Rightarrow \Delta AOP \text{ este dreptunghic în } A \\ PB \text{ este tangentă la cerc} \Rightarrow PB \perp OB \Rightarrow \Delta BOP \text{ este dreptunghic în } B \\ [OP] \equiv [OP] \text{ (ipotenuză comună)} \\ OA \text{ și } OB \text{ sunt raze} \Rightarrow [OA] \equiv [OB] \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOP \equiv \Delta BOP. \text{ Din } \Delta AOP \equiv \Delta BOP \Rightarrow$$

$\Rightarrow [PA] \equiv [PB]$. **b** Din $\left.\begin{array}{l} \Delta AOP \equiv \Delta BOP \Rightarrow \sphericalangle POA \equiv \sphericalangle POB \\ OP \subset \text{Int}(\sphericalangle AOB) \end{array}\right\} \Rightarrow [OP$ este bisectoarea unghiului AOB.

c $$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle IOA \text{ este unghi la centru} \Rightarrow \sphericalangle IOA = \widehat{AI} \\ \sphericalangle IOB \text{ este unghi la centru} \Rightarrow \sphericalangle IOB = \widehat{BI} \\ \sphericalangle IOA \text{ coincide cu } \sphericalangle POA \text{ și } \sphericalangle IOB \text{ coincide cu } \sphericalangle POB \\ \sphericalangle POA \equiv \sphericalangle POB \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AI} \equiv \widehat{BI}.$$

3. ΔABC este isoscel de bază $[BC] \Rightarrow [AB] \equiv [AC]$. Distingem două cazuri de analizat.

Cazul I: $AB = AC = 4$ cm și $BC = 9$ cm. Deoarece $AB + AC = 4 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm} < BC$, ceea ce contrazice inegalitatea triunghiului, deducem că acest caz este imposibil.

Cazul al II-lea: $AB = AC = 9$ cm și $BC = 4$ cm. În acest caz avem $AB + BC = AC + BC = 4 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 13$ cm și $AB + AC = 9 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 18$ cm. Comparăm cea mai mică dintre sume cu cea mai mare lungime a celei de-a treia laturi: $AB + BC > AC$ (sau $AC + BC > AB$), deducem că sunt îndeplinite inegalitățile între lungimile laturilor triunghiului. În consecință, problema admite o singură soluție: cea de-a treia latură are 9 cm.

4. **a** **Metoda I:** *Metoda unghiului alungit*

$$\left.\begin{array}{l} EL \parallel CT \\ ET \text{ secantă} \\ \sphericalangle CTE \text{ și } \sphericalangle LET \text{ sunt alterne interne} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle CTE \equiv \sphericalangle LET \Leftrightarrow \sphericalangle ATI \equiv \sphericalangle LEI.$$

$m(\sphericalangle ECT) + m(\sphericalangle CET) + m(\sphericalangle CTE) = 180° \Leftrightarrow m(\sphericalangle DEL) = m(\sphericalangle DEC) + m(\sphericalangle CET) + m(\sphericalangle LET) = m(\sphericalangle ECT) + m(\sphericalangle CET) + m(\sphericalangle CTE) = 180° \Rightarrow \sphericalangle DEL$ este unghi alungit $\Rightarrow D, E, L$ sunt coliniare.

Metoda a II-a: *Axioma paralelelor*

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle TCE \\ \sphericalangle DEC \text{ și } \sphericalangle TCE \text{ sunt alterne interne} \\ \text{formate de dreptele } DE \text{ și } CT \text{ cu secanta } CE \end{array}\right\} \Rightarrow DE \parallel CT. \text{ Vom aplica } \textit{axioma paralelelor}\text{: } \left.\begin{array}{r} E \notin CT \\ ED \parallel CT \\ EL \parallel CT \end{array}\right\} \Rightarrow \text{dreptele } ED$$

și EL coincid $\Rightarrow D, E, L$ sunt coliniare.

b Comparăm ΔAIT cu ΔLIE: $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle IAT \equiv \sphericalangle ILE \\ [AT] \equiv [EL] \\ \sphericalangle ATI \equiv \sphericalangle LEI \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AIT \equiv \Delta LIE \Rightarrow \sphericalangle AIT \equiv \sphericalangle LIE$. Pentru a demonstra că punctele A, I, L sunt coliniare, putema aplica două metode.

Metoda I: *Metoda unghiului alungit*

E, I, T sunt coliniare $\Rightarrow \sphericalangle EIT$ este unghi alungit $\Rightarrow m(\sphericalangle EIA) + m(\sphericalangle AIT) = 180° \Leftrightarrow m(\sphericalangle EIA) + m(\sphericalangle LIE) = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow A, I, L$ sunt coliniare (1).

Metoda a II-a: *Reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf*

$\left.\begin{array}{l} E, I, T \text{ sunt coliniare în această ordine} \\ \sphericalangle AIT \equiv \sphericalangle LIE \\ ET \text{ separă punctele } A \text{ și } L \end{array}\right\} \Rightarrow A, I, L$ sunt coliniare în această ordine (1).

Din $\Delta AIT \equiv \Delta LIE \Rightarrow [AI] \equiv [LI] \Rightarrow I$ este mijlocul segmentului AL (2).
Din relațiile (1) și (2), rezultă că L este simetricul punctului A față de I.

5. $\left.\begin{array}{l} P_{\Delta ABC} = P_{\Delta A'B'C'} \Leftrightarrow AB + AC + BC = A'B' + A'C' + B'C' \\ [AB] \equiv [A'B'] \Leftrightarrow AB = A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow AC + BC = A'C' + B'C'$.

Prelungim latura AC cu un segment $[CD] \equiv [BC]$ și latura AC cu un segment $[C'D'] \equiv [B'C']$.

$\left.\begin{array}{l} AC + BC = A'C' + B'C' \\ [CD] \equiv [BC] \text{ și } [C'D'] \equiv [B'C'] \end{array}\right\} \Rightarrow AC + CD = A'C' + C'D' \Rightarrow AD = A'D'$.

$\left.\begin{array}{l} \Delta ABD \text{ este dreptunghic în } A \\ \Delta A'B'D' \text{ este dreptunghic în } A' \\ [AB] \equiv [A'B'] \\ AD = A'D' \Rightarrow [AD] \equiv [A'D'] \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta A'B'D' \Rightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'B'D'$ și $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle D'$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } CE \perp BD \Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle BEC = 90° \Rightarrow \Delta BEC \text{ este dreptunghic în } E \\ \sphericalangle DEC = 90° \Rightarrow \Delta DEC \text{ este dreptunghic în } E \end{cases} \\ [BC] \equiv [DC] \\ [CE] \equiv [CE] \text{ (catetă comună)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BEC \equiv \Delta DEC \Rightarrow \sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle D$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } C'E' \perp B'D' \Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle B'E'C' = 90° \Rightarrow \Delta B'E'C' \text{ este dreptunghic în } E' \\ \sphericalangle D'E'C' = 90° \Rightarrow \Delta D'E'C' \text{ este dreptunghic în } E' \end{cases} \\ [B'C'] \equiv [D'C'] \\ [C'E'] \equiv [C'E'] \text{ (catetă comună)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta B'E'C' \equiv \Delta D'E'C' \Rightarrow \sphericalangle C'B'E' \equiv \sphericalangle D'$.

Din $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'B'D'$, $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle D'$, $\sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle D$ și $\sphericalangle C'B'E' \equiv \sphericalangle D' \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$.

$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ este dreptunghic în } A \\ \Delta A'B'C' \text{ este dreptunghic în } A' \\ [AB] \equiv [A'B'] \\ \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

6. **a** Deoarece $1+2 > 3$, deducem că nu putem construi un triunghi ale cărui laturi au lungimile 1, 2, respectiv, 3. **b** Fie n, $n+1$, $n+2$ trei numere naturale consecutive, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Putem construi un triunghi ale cărui laturi au lungimile n, $n+1$, $n+2$, numai dacă este îndeplinită condiția $n + (n+1) > n+2$, ceea ce este echivalent cu $n+1 > n+2 \Leftrightarrow n > 1$. Deci, cu excepția tripletului (1; 2; 3), se poate construi un triunghi ale cărui laturi au lungimea exprimată prin trei numere naturale, nenule, consecutive. **c** Fie $E = \{1009; 1010; 1011; ...; 2018\}$ o submulțime a mulțimii M. Mulțimea M are $2018 - 1008 = 1010$ elemente. Cea mai mică sumă de două numere dintre toate sumele posibile este $1009 + 1010 = 2019$. Deoarece $1009 + 1010 > 2018$, cu atât mai mult celelalte sume sunt mai mari decât oricare alt element al submulțimii E și atunci putem construi un triunghi cu oricare trei segmente a căror lungime este element în mulțimea E.

VI. Variante de subiecte pentru teză

Varianta 1

1. 12. 2. Oricare două dintre 1; 2; 4; 5; 10; 20. 3. $[AB]$. 4. $90°$. 5. 237. 6. 8 zile. 8. $a = 5$, $b = 3$, $m.a.\ (a, b) = 4$. 9. $BD = 6$ cm $= AB$; $AD = 12$ cm. 10. a Prima zi a cheltuit $\frac{1}{4}s \Rightarrow r_1 = \frac{3}{4}s$. A doua zi a cheltuit $\frac{1}{3}r_1 \Rightarrow r_2 = \frac{2}{3}r_1 = 36$ lei $\Rightarrow$ $\Rightarrow r_1 = 54$ lei; $\frac{3}{4}s = 54$ lei $\Rightarrow s = 72$ lei. b 54 lei : 3 = 18 lei. 11. $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle BOE) = x$; $[OC$ este bisectoarea unghiului $DOE \Rightarrow \sphericalangle DOC \equiv \sphericalangle EOC \Rightarrow m(\sphericalangle DOC) = m(\sphericalangle EOC) = y$. $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle BOC) = x + y \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC \Rightarrow [OC$ este bisectoarea unghiului AOB. 12. $(36; 48) = 12$. $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Bunica are 6 sau 12 nepoți.

Varianta 2

1. 6. 2. De ex. 20 și 40. 3. $\sphericalangle A$. 4. $180°$. 5. 232. 6. 6 zile. 8. 1. 9. a $x = 35°$; $m(\sphericalangle AOB) = 90°$; $m(\sphericalangle BOC) = 115°$; $m(\sphericalangle AOB) = 155°$; b $m(\sphericalangle MON) = 135°$. 10. a $e = 2(c - 2) + 1$, respectiv, $e = 3(c - 6)$. Obținem $3c - 18 = 2c - 3$; $c = 15$; $e = 27$. 11. $[AB] \equiv [CD] \Rightarrow AB = CD = x$; M este mijlocul segmentului $[BC] \Rightarrow [BM] \equiv [CM] \Rightarrow BM = CM = y$; $MA = MD = x + y \Rightarrow [MA] \equiv [MD] \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului $[AD]$.

12. $$\left.\begin{array}{l}\overline{abc} = 10 \cdot t + 3 \Rightarrow \overline{abc} - 3 = 10t \Rightarrow \overline{abc} - 3 \vdots 10\\ \overline{abc} = 15 \cdot x + 3 \Rightarrow \overline{abc} - 3 = 15x \Rightarrow \overline{abc} - 3 \vdots 15\\ \overline{abc} = 20 \cdot y + 3 \Rightarrow \overline{abc} - 3 = 20y \Rightarrow \overline{abc} - 3 \vdots 20\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{abc} - 3 \vdots [10; 15; 20] \Rightarrow \overline{abc} - 3 \vdots 60 \Rightarrow \overline{abc} = 123.$$

Varianta 3

1. 7. 2. 18. 3. $[DE] \equiv [DF]$. 4. $x = 25$. 5. $35°$. 6. $\sphericalangle ACB$ este obtuz. 8. $\frac{5}{6} : \frac{25}{36} = \frac{6}{5}$. 9. $m(\sphericalangle EFG) = 48°$; $m(\sphericalangle EFA) = 24°$. 10. a Putem forma 1007 grupe a câte 2 numere impare, iar suma a 2 numere impare este număr par. b $a = 13(1 + 13) + 13^3(1 + 13) + ... + 13^{2013}(1 + 13)$. $a = 14(13 + 13^3 + 13^5 + ... + 13^{2013}) \Rightarrow a \vdots 14$. 11. a $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ $\Rightarrow [AB] \equiv [AD]$; $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$; $\Delta ABM \equiv \Delta AND$ (L.U.L.); b $[AM] \equiv [AN] \Rightarrow \Delta AMN$ este isoscel de bază $[MN]$. 12. a Toate cele trei numere sunt divizibile cu 30. b $[270; 360; 450] = 90$.

Varianta 4

1. 23 sau 29. 2. $AB = 12$ cm. 3. $n = 14$. 4. $\frac{3}{5}$. 5. $140°$. 6. $\sphericalangle EFG$ este ascuțit. 8. $A = \{1; 4; 7; 10; 13\}$. 9. a $m(\sphericalangle DEA) = 30°$; b $m(\sphericalangle CEA) = 30°$; $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle AEC \Rightarrow [AE$ este bisectoarea unghiului CED. 10. a $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $U(5^n) = 5$ și $U(6^n) = 6$. $U(9^{2014}) = 1$. $U(t) = 2 \Rightarrow t \vdots 2$. b $\left.\begin{array}{l}(8a + 7b) \vdots 4\\ 8a \vdots 4\end{array}\right\} \Rightarrow 7b \vdots 4$. $\left\{\begin{array}{l}7b \vdots 4\\ (7; 4) = 1\end{array}\right. \Rightarrow b \vdots 4$.

$\left\{\begin{array}{l}\overline{ZU}(\overline{xy56}) = 56 \Rightarrow \overline{xy56} \vdots 4\\ b \vdots 4.\end{array}\right. \Rightarrow (b + \overline{xy56}) \vdots 4$. 11. a $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$ (L.U.L.); b $\Delta ACM \equiv \Delta BDM$ (U.L.U. sau L.U.U.) $\Rightarrow [CM] \equiv [DM]$; $\Delta MOC \equiv \Delta MOD$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle COM \equiv \sphericalangle DOM \Rightarrow [OM$ este bisectoarea unghiului XOY.

12. $$\left.\begin{array}{l}\overline{abc} = 72 \cdot t + 69 \Rightarrow \overline{abc} + 3 = 72(t + 1) \Rightarrow \overline{abc} + 3 \vdots 72\\ \overline{abc} = 60 \cdot x + 57 \Rightarrow \overline{abc} + 3 = 60(x + 1) \Rightarrow \overline{abc} + 3 \vdots 60\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{abc} + 3 \vdots [72; 60] \Rightarrow \overline{abc} + 3 \vdots 360 \Rightarrow \overline{abc} = 717.$$

Varianta 5

1. 3. 2. $AM = 4$ cm. 3. $n = 8$. 4. $\frac{2}{3}$ 5. $120°$. 6. 30 de elevi. 8. 3. 9. a $m(\sphericalangle EBC) = 120°$; b $m(\sphericalangle FBD) = m(\sphericalangle DBC) = 60°$.

10. $\frac{63}{2x+1} \in \mathbb{N}$; $2x+1 \in \mathbb{N}^*$; $63 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 63 \vdots (2x+1) \Rightarrow 2x+1 \in \{1; 3; 7; 9; 21; 63\} \Rightarrow 2x \in \{0; 2; 6; 8; 20; 62\} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \{0; 1; 3; 4; 10; 31\}$. 11. a Fie $m(\sphericalangle BOC) = x$; $m(\sphericalangle COD) = 90° - x$; $m(\sphericalangle AOD) = 2x + 30°$; $2x + 30° + 90° - x = 180°$; $m(\sphericalangle BOC) = 60°$. 12. $(a, b) = 15$, există $x, y \in \mathbb{N}^*$, cu $(x, y) = 1$, astfel încât $a = 15x$ și $b = 15y$. Din $(a, b) = 15$ și $[a, b] = 360 \Rightarrow ab = 15 \cdot 360 \Leftrightarrow 15x \cdot 15y = 15 \cdot 360 \Rightarrow xy = 24$. Din $xy = 24$, $x, y \in \mathbb{N}^*$, $(x; y = 1)$ și $x \leq y \Rightarrow (x; y) \in \{(1; 24), (3; 8)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(15, 360), (45, 120)\}$.