Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=4-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}-3=$	**3p**
	$=4-3=1$	**2p**
2.	$5a-3=2a+3$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$2^{2x+4}=2^0$, de unde obținem $2x+4=0$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $4\cdot 3=12$ numere	**3p**
5.	$M\left(2,1\right)$, de unde obținem $MO=\sqrt{5}$	**3p**
	$MC=\sqrt{5}$, deci $MO=MC$	**2p**
6.	$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(0\right)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A\left(0\right)\right)=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot 1=$	**3p**
	$=3-2=1$	**2p**
b)	$A\left(a\right)-A\left(0\right)=\begin{pmatrix}a & -2a\\ -a & 3a\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\left(0\right)\cdot\left(A\left(a\right)-A\left(0\right)\right)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=aI_2$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A\left(a^2\right)=\begin{pmatrix}3+a^2 & 2-2a^2\\ 1-a^2 & 1+3a^2\end{pmatrix}$, $A\left(a^2\right)-aA\left(a\right)=\begin{pmatrix}3-3a & 2-2a\\ 1-a & 1-a\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A\left(a^2\right)-aA\left(a\right)\right)=3\left(1-a\right)^2-2\left(1-a\right)^2=\left(1-a\right)^2\geq 0$, pentru orice număr real a	**3p**
2.a)	$0\circ 2=0^2-4\cdot 0\cdot 2+3\cdot 2^2=$	**3p**
	$=0-0+12=12$	**2p**
b)	$\left(2x\right)\circ x=-x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x^2=-1$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

c)	$m\circ n=m^2-mn-3mn+3n^2=(m-n)(m-3n)$, pentru orice numere întregi m și n	**2p**
	$(m-n)(m-3n)=3$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m<n$, obținem perechile $(-4,-1)$ și $(0,1)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{4x^2-(4x-4)\cdot 2x}{x^4}=$	**3p**
	$=\dfrac{4x(2-x)}{x^4}=\dfrac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{4x-4}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)=5$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=5$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$; pentru orice $x\in[1,2]$, $f'(x)\geq 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,2]$ și pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\leq 0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$f(1)=5$, $f(2)=6$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$, deci $5\leq f(x)\leq 6$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, de unde obținem $\lvert f(x)-f(y)\rvert\leq 1$, pentru orice x, $y\in[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_1^e 4x\ln x\,dx=\int_1^e\left(2x^2\right)'\ln x\,dx=2x^2\ln x\Big\|_1^e-x^2\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=2e^2-0-e^2+1=e^2+1$	**2p**
c)	$F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\int_1^{\sqrt{e}}f(x)F''(x)dx=\int_1^{\sqrt{e}}f(x)f'(x)dx=\dfrac{f^2(x)}{2}\Big\|_1^{\sqrt{e}}=\dfrac{(3e+2)^2-3^2}{2}=\dfrac{(3e-1)(3e+5)}{2}$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=1$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}\cdot 2^3=1$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{3,4,5,6\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(0,2)$, $C(3,3)$ și M, mijlocul segmentului AB. Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}3+a&2-2a\\1-a&1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=1$.
5p	**b)** Arătați că $A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=aI_2$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2-4xy+3y^2$.
5p	**a)** Arătați că $0\circ 2=12$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-1$.
5p	**c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m<n$, pentru care $m\circ n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{4x-4}{x^2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\lvert f(x)-f(y)\rvert\leq 1$, pentru orice x, $y\in[1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=7$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=e^2+1$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3-4i+i(4-i)=3-4i+4i-i^2=$	**3p**
	$=3+1=4$	**2p**
2.	$f(1)=2$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=0$	**3p**
3.	$x^2-2x+6=6$, deci $x^2-2x=0$	**2p**
	$x=0$ sau $x=2$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 4 numere divizibile cu 3 și cu 7, deci sunt 4 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$	**3p**
5.	$A\left(\frac{a+0}{2},\frac{0+b}{2}\right)$	**3p**
	$a=2$ și $b=4$	**2p**
6.	Triunghiul ABD este dreptunghic în D și $BD=8$	**3p**
	$AD=\sqrt{100-64}=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(2)=\begin{pmatrix}3&5\\1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(2))=\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix}=3\cdot3-5\cdot1=$	**3p**
	$=9-5=4$	**2p**
b)	$B(0)\cdot B(1)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-2&-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=2A$	**3p**
	$aA=2A$, de unde obținem $a=2$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}3x-1&6x-1\\-3x+1&-6x+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x, $A\cdot(B(0)-3I_2)=\begin{pmatrix}-4&-7\\4&7\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}3x-1&6x-1\\-3x+1&-6x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-7\\4&7\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
2.a)	$f=X^3+2X^2-3\Rightarrow f(1)=1^3+2\cdot1^2-3=$	**3p**
	$=1+2-3=0$	**2p**
b)	$f(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+m(-1)-3=-m-2$	**3p**
	$-m-2=0$, de unde obținem $m=-2$	**2p**
c)	$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=m$, pentru orice număr real m	**3p**
	$x_1x_2x_3=3$, deci $m=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{6x\left(x^2+x-2\right)-3x^2(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3x^2-12x}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\dfrac{3x(x-4)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=3$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(1,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1,4]$	**2p**
	$1<x\le 2\Rightarrow 1<x^2\le 4$, deci $f(x)\ge f(2)$ și $f\left(x^2\right)\ge f(4)$ și, cum $f(2)=3$ și $f(4)=\dfrac{8}{3}$, obținem $f(x)+f\left(x^2\right)\ge\dfrac{17}{3}$, pentru orice $x\in(1,2]$	**3p**
2.a)	$\int\limits_3^7\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}dx=\int\limits_3^7 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\|_3^7=$	**3p**
	$=\dfrac{49}{2}-\dfrac{9}{2}=20$	**2p**
b)	$\int\limits_2^3\dfrac{x}{f(x)}dx=\int\limits_2^3\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}dx=-\dfrac{1}{x-1}\Big\|_2^3=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$\int\limits_0^1\dfrac{xf\left(e^x\right)}{e^x}dx=\int\limits_0^1 x\left(e^x-1\right)^2dx=\int\limits_0^1 x\left(\dfrac{e^{2x}}{2}-2e^x\right)'dx+\dfrac{x^2}{2}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=x\left(\dfrac{e^{2x}}{2}-2e^x\right)\Big\|_0^1-\left(\dfrac{e^{2x}}{4}-2e^x\right)\Big\|_0^1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^2-5}{4}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $3-4i+i(4-i)=4$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4-2x$. Arătați că $(f\circ f)(1)=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2-2x+6\right)=\log_5 6$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(a,0)$ și $C(0,b)$. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul A este mijlocul segmentului BC.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=AC=10$ și $BC=16$. Arătați că $AD=6$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1&2x+1\\x-1&2x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(B(2)\right)=4$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(1)=aA$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=A\cdot\left(B(0)-3I_2\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+mX-3$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=0$, arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+x-2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3x(x-4)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)+f\left(x^2\right)\geq\dfrac{17}{3}$, pentru orice $x\in(1,2]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-1)^2$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_3^7\frac{f(x)}{(x-1)^2}\,dx=20$.
5p	**b)** Arătați că $\displaystyle\int_2^3\frac{x}{f(x)}\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 \frac{xf\left(e^x\right)}{e^x}dx = \frac{e^2-5}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(5+\sqrt{24}\right)=\left(5-\sqrt{24}\right)\left(5+\sqrt{24}\right)=5^2-\sqrt{24}^2=$	**3p**
	$=25-24=1^2$, deci numerele $5-2\sqrt{6}$, 1 și $5+\sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$f(1)=a+1$, $(f\circ f)(1)=a(a+1)+1$, pentru orice număr real nenul a	**3p**
	$a(a+1)+1=1$, deci $a(a+1)=0$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a=-1$	**2p**
3.	$2^x\cdot 2^{-4+2x}=32\Rightarrow 2^{3x-4}=2^5$, de unde obținem $3x-4=5$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	$A_5^2=\dfrac{5!}{3!}=$	**3p**
	$=4\cdot 5=20$	**2p**
5.	$m_{AB}=1$ și, cum $d\perp AB$, obținem $m_d=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y-5=-1(x-2)$, adică $y=-x+7$	**2p**
6.	$(\text{tg}\,x+1)(\text{ctg}\,x-1)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+1\right)\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-1\right)=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x\sin x}=$	**2p**
	$=\dfrac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2\text{ctg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4-2-2-4-1-4=-9$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&a+1\\1&a&-1\\2&-a&4\end{vmatrix}=-3a-6$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-2$; sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	**3p**
c)	Adunând ultimele două ecuații ale sistemului, obținem $x_0+z_0=0$	**2p**
	$y_0+z_0=a$, $ay_0-2z_0=4$, deci $(a+2)(y_0-2)=0$ și, cum $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, obținem $y_0=2$, deci $x_0+y_0+z_0=2$	**3p**
2.a)	$f=X^3-3X^2+2X+6\Rightarrow f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)+6=$	**3p**
	$=-1-3-2+6=0$	**2p**

b)	$f=(X-3)\left(X^2+2\right)+6+m$, pentru orice număr real m	**3p**
	f este divizibil cu polinomul g dacă $6+m=0$, de unde obținem $m=-6$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=3$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$, deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$ și $x_1^3+x_2^3+x_3^3=9-3m$, pentru orice număr real m	**3p**
	$9-3m=0$, deci $m=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot e^x-\sqrt{x+1}\cdot e^x}{e^{2x}}=$	**3p**
	$=1+\dfrac{1-2x-2}{2e^x\sqrt{x+1}}=1-\dfrac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2e^x\sqrt{x+1}}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x\Rightarrow g'(x)=-\dfrac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$g'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow g$ este crescătoare pe $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]$, $g'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow g$ este descrescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, deci $g(x)\leq g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ și, cum $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{e}{2}}$, obținem $f(x)-x\leq\sqrt{\dfrac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2 3\left(f(x)-x\ln x\right)dx=\int_1^2 3x^2\,dx=x^3\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{x^3}dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx+\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=\ln x\Big\|_1^e-\frac{\ln x}{x}\Big\|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=$	**3p**
	$=1-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}\Big\|_1^e=2-\dfrac{2}{e}=2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$	**2p**
c)	$g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x\ln x}\geq 0$, pentru orice $x\in[1,e]$, deci $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^e\left\|g(x)\right\|dx=\int_1^e\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=$	**2p**
	$=\displaystyle\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x+\ln x}dx=\int_1^e(x+\ln x)'\cdot\frac{1}{x+\ln x}dx=\ln(x+\ln x)\Big\|_1^e=\ln(e+1)>\ln e=1$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numerele $5-2\sqrt{6}$, 1 și $5+\sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=32$.
5p	**4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate, cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulțimii $M=\{0,1,2,3,4\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(2,5)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul B și este perpendiculară pe dreapta AB.
5p	**6.** Arătați că $(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{ctg}x-1)=2\operatorname{ctg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+(a+1)z=a \\ x+ay-z=4 \\ 2x-ay+4z=-4 \end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.
5p	**b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
5p	**c)** Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=6$, arătați că $f(-1)=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X^2+2$.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)-x\le\sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 3(f(x)-x\ln x)\,dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3}\,dx = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria strict mai mare decât 1.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(1+i)-i(2-i)=2+2i-2i+i^2=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
2.	$f(2a)=a \Leftrightarrow 6a+10=a$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
3.	$2x^2+2=4x^2$, de unde obținem $x^2-1=0$	**2p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în două moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unitășilor, cifra zecilor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei unitășilor și a cifrei zecilor, cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 5\cdot 4=40$ de numere	**3p**
5.	$\frac{a}{1}=\frac{a-1}{2}$	**3p**
	$a=-1$	**2p**
6.	$AC=12$; $\sphericalangle ACD=\frac{\pi}{6}$	**3p**
	$\frac{AC}{CD}=\cos\frac{\pi}{6}$, de unde obținem $CD=8\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 0\cdot 1+0\cdot(-1)\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1-(-1)\cdot 0\cdot 2-0\cdot(-1)\cdot 2=$	**3p**
	$=4+0+0-1-0-0=3$	**2p**
b)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $A(0)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x+2 & -x-2 & x+2\\ 0 & 0 & 0\\ x+2 & -x-2 & x+2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x=-1$	**2p**
c)	$(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3 \Leftrightarrow aA(1)\cdot A(1)+bA(1)=I_3$ și $A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}5 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{pmatrix}5a+2b & -4a-b & 4a+b\\ 0 & a+b & 0\\ 4a+b & -4a-b & 5a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$a=-\frac{1}{3}$ și $b=\frac{4}{3}$	**2p**

2.a)	$1*2=1\cdot 2+1+2-1+2^{1\cdot 2}=$ $=4+4=8$	**3p** **2p**
b)	$x*0=x\cdot 0+x+0-1+2^{x\cdot 0}=x$, pentru orice număr real x $0*x=0\cdot x+0+x-1+2^{0\cdot x}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
c)	$n*\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{2n^2-3n-2}{2n}$, pentru orice număr natural nenul n $\frac{2n^2-3n-2}{2n}=0\Rightarrow 2n^2-3n-2=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)\cdot x-(2x+1+\ln x)}{x^2}=$ $=\frac{2x+1-2x-1-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$ Ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=2$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$ $1<x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$, deci $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=\int_3^5 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\|_3^5=$ $=\frac{25}{2}-\frac{9}{2}=8$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^2\frac{x^2}{f(x)-x+2}dx=\int_0^2\frac{x^2}{x^3+2}dx=\frac{1}{3}\int_0^2\frac{\left(x^3+2\right)'}{x^3+2}dx=\frac{1}{3}\ln\left(x^3+2\right)\Big\|_0^2=$ $=\frac{\ln 10}{3}-\frac{\ln 2}{3}=\frac{\ln 5}{3}$	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$ și $G'(x)=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $G''(x)=\left(-x^2+2x-1\right)e^{-x}$ $G''(x)=-(x-1)^2e^{-x}\le 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția G este concavă	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2(1+i)-i(2-i)=1$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+10$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(2a,a)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+2}=2x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului B egală cu $\frac{\pi}{6}$ și $BC=24$. Bisectoarea unghiului C al triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D. Determinați lungimea segmentului CD.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-1&1\\0&x&0\\1&-1&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y-1+2^{xy}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=8$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $n*\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Arătați că $\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x)-x+2}dx = \frac{\ln 5}{3}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției g este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)=\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
2.	$a^2+1=1-a$, deci $a^2+a=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=0$	**2p**
3.	$x^2+4=6x-4$, deci $x^2-6x+8=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $3\cdot 5=15$ numere	**3p**
5.	$x_M=3$ și $y_M=0$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$OM=3$	**2p**
6.	$\operatorname{tg}C=\dfrac{AB}{AC}\Rightarrow AB=6\sqrt{3}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{6\cdot 6\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -6 & 7\end{vmatrix}=(-1)\cdot 7-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-7+12=5$	**2p**
b)	$A(a)-I_2=\begin{pmatrix}-a & a\\ -3a & 3a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow a\left(A(1)-I_2\right)=a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, deci $A(a)-I_2=a\left(A(1)-I_2\right)$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A(m)\cdot A(2m)=A\left(4m^2+3m\right)$, pentru orice număr întreg m	**3p**
	$A\left(4m^2+3m\right)=A(1)$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=-1$	**2p**
2.a)	$0\circ 3=0\cdot 3-0-3+4=$	**3p**
	$=0-3+4=1$	**2p**
b)	$x\circ x=x^2-2x+4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-2x+4=3x\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=4$	**3p**
c)	$xa-x-a+4=x+a\Leftrightarrow xa-2x-2a+4=0$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x(a-2)-2a+4=0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x, obținem $a=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-2\right)+e^x\left(2x+2\right)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2+2x-2+2x+2\right)=e^x\left(x^2+4x\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(x^2+2x-2\right)}{e^x\left(x^2+4x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2+4x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x}}=1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-4$ sau $x=0$; pentru $x\in(-\infty,-4]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-4]$ și, pentru $x\in[-4,0]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-4,0]$	**2p**
	$f(x)\leq f(-4)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$ și $f(-4)=\frac{6}{e^4}$, deci $e^{x+4}\left(x^2+2x-2\right)\leq 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$	**3p**
2.a)	$\int\limits_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\int\limits_1^2 x^3\,dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{16}{4}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$	**2p**
b)	G este o primitivă a funcției $g\Rightarrow G'(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x^3+\frac{3}{x}\right),\ x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x^3+\frac{3}{x}\right)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția G este crescătoare	**3p**
c)	$\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^4+3}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+3}dx=\left.\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right\|_1^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=1-a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+4\right)=\log_4(6x-4)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-5)$ și $B(5,5)$. Determinați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=6$ și $\operatorname{tg}C=\sqrt{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1-a&a\\-3a&3a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=5$.

5p **b)** Arătați că $A(a)-I_2=a\left(A(1)-I_2\right)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-x-y+4$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 3=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=3x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $x\circ a=x+a$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+2x-2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2+4x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=1$.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x+4}\left(x^2+2x-2\right)\le 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{15}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.

5p **c)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.