Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot(x+5)=4^2$	**2p**
	$x=3$	**3p**
2.	$\Delta=1-16=-15$	**2p**
	$a=1>0$ și $\Delta<0\Rightarrow$ parabola asociată funcţiei f este situată deasupra axei Ox	**3p**
3.	$x^2-1=8\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x_1=-3$ și $x_2=3$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care au suma cifrelor egală cu 7, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{7}{90}$	**2p**
5.	$M(0,3)$	**2p**
	$OM=3$	**3p**
6.	$x=\frac{\pi}{6}$	**2p**
	$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&2x&0\\0&4x+1&0\\0&3x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2y&0\\0&4y+1&0\\0&3y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2x+2y+8xy&0\\0&4x+4y+16xy+1&0\\0&3x+3y+12xy&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&2(x+y+4xy)&0\\0&4(x+y+4xy)+1&0\\0&3(x+y+4xy)&1\end{pmatrix}=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=I_3\Rightarrow A\left(2x+4x^2\right)=A(0)\Rightarrow 2x+4x^2=0$	**3p**
	$x_1=0$ și $x_2=-\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-4\cdot 0+2a=$	**2p**
	$=2a$	**3p**
b)	$x_1=1+i\Rightarrow x_2=1-i$	**1p**
	$x_1+x_2+x_3=-1\Rightarrow x_3=-3$	**2p**
	$x_1x_2x_3=-2a\Rightarrow a=3$	**2p**

c)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(1+i)^3+(1-i)^3+(-3)^3=$	**3p**
	$=(2i-2)+(-2i-2)-27=-31$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot(x-2)-x^2\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$	**2p**
	$=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(4)=f'(4)(x-4)$	**2p**
	$f(4)=8$, $f'(4)=0$, deci ecuația tangentei este $y=8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$	**1p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(2,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(2,4]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
2.a)	$I_2=\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{x^3+1}dx=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+3}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+3}}{x^3+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x^3+1)}{x^3+1}dx=$	**3p**
	$=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge 0,\ x^3+1>0\Rightarrow I_n\ge 0$	**2p**
	$I_{n+3}\ge 0$ și $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{1}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x știind că numerele 2, 4 și $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+4$ este situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$ și $B(1,2)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x, $x\neq-\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=3$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_2=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_3=18$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=36$	**3p**
2.	$x_V=-1$	**2p**
	$y_V=3$	**3p**
3.	$3^x=1$ sau $3^x=3$	**2p**
	$x=0$ sau $x=1$	**3p**
4.	Sunt 18 numere de două cifre care conțin cifra 1, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{18}{90}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	**2p**
	ΔABC echilateral $\Rightarrow AC=2$	**3p**
6.	ΔABC dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB=4$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{4\cdot 4}{2}=8$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&a\\a&2&2\\a&a&2\end{vmatrix}=(a-2)^2(a+2)$	**3p**
	$(a-2)^2(a+2)=0\Leftrightarrow a=-2$ sau $a=2$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+y+z=4\\x+2y+2z=5\\x+y+2z=4\end{cases}$	**2p**
	$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot1^2+3\cdot1+m=$	**2p**
	$=m+2$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2\cdot3=-2$	**3p**

c)	$\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3m=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3m-10 \Rightarrow m=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(e)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(e,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\le f(e)\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{11}{6}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge 0, x-1\le 0$ și $x^2+x+1>0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$\int_0^a\dfrac{2x+1}{f(x)}dx=\int_0^a\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\Big\vert_0^a=\ln\left(a^2+a+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(a^2+a+1\right)=\ln 3\Leftrightarrow a^2+a+1=3$ care are soluția pozitivă $a=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ știind că $a_1=6$ și $a_2=12$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3^x-1)(3^x-3)=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cifra 1.

5p **5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB=2$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Calculați aria triunghiului isoscel ABC știind că $A=\frac{\pi}{2}$ și $AC=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & a\\ a & 2 & 2\\ a & a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Determinați matricea $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ știind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 4\end{pmatrix}$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-2X^2+3X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2$.

5p **c)** Determinați numărul real m știind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\leq\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=$	**2p**
	$=2i$	**3p**
2.	$\Delta=16-24=-8$	**3p**
	$\Delta<0$, deci parabola asociată funcției f **nu** intersectează axa Ox	**2p**
3.	$2x-3=x+1$	**2p**
	$x=4$ care verifică ecuația	**3p**
4.	Sunt 45 de numere impare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$	**3p**
6.	$\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=\dfrac{\cos a\left(\frac{\sin a}{\cos a}-1\right)}{\cos a\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}a-1}{1+\operatorname{tg}a}=$	**3p**
	$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+2+2-1-4-1=-1$	**3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&m&2\\1&2&m\end{vmatrix}=m^2-2m$	**3p**
	$m^2-2m=0\Leftrightarrow m_1=0$ și $m_2=2$	**2p**
c)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}3&a+3&a+3\\a+3&a^2+5&4a+1\\a+3&4a+1&a^2+5\end{pmatrix}$, $A(a^2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a^2&2\\1&2&a^2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2&a+2&a+2\\a+2&5&4a-1\\a+2&4a-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=-1$	**2p**

2.a)	$1*3=3\cdot 1+3\cdot 3-1\cdot 3-6=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$x*y=3-xy+3x+3y-9=$	**2p**
	$=3-x(y-3)+3(y-3)=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x şi y	**3p**
c)	$3-(x-3)^{2014}=x$	**3p**
	$x_1=3$ şi $x_2=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x-2)'(x^2-4x+5)-(x-2)(x^2-4x+5)'}{(x^2-4x+5)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{-x^2+4x-3}{(x^2-4x+5)^2}=\dfrac{(1-x)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1$ şi $x_2=3$	**2p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$	**1p**
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,3]$	**1p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**1p**
2.a)	$I_1=\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x-1)\ln^n x\,dx$	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in[1,e]$ avem $\ln x\ge 0$ şi $\ln x-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^e x\ln^{n+1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}(n+1)\ln^n x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx\Rightarrow 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculați z^2.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$ **nu** intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x-3)=\log_2(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** În triunghiul ABC punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, AC. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg} a=\sqrt{3}$ și $a\in\mathbb{R}$, arătați că $\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=2-\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&2\\1&2&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m știind că $\det(A(m))=0$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3x+3y-xy-6$.

5p **a)** Calculaţi $1*3$.

5p **b)** Arătați că $x*y=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x \text{ de } 2014 \text{ ori}}=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x-3)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\dfrac{e^2+1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=-2+2i$ Partea reală a numărului z este egală cu -2	**2p** **3p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x-1=3x-5$ $x=2$ și $y=1$	**3p** **2p**
3.	$x^2-x=2x\Leftrightarrow x^2-3x=0$ $x_1=0$ și $x_2=3$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților poate fi 0 sau 2 Cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2=6$ numere	**2p** **3p**
5.	$(m+1)\vec{i}+4\vec{j}=2\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)$ $m=5$	**2p** **3p**
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A(x+y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2(x+y)^2-2(x+y)&4(x+y)&1\end{pmatrix}$ $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2x^2+4xy+2y^2-2x-2y&4x+4y&1\end{pmatrix}=A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(3x)$ $x^2+2=3x\Rightarrow x_1=1$ și $x_2=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+a\cdot 2-2=$ $=2a-6=2(a-3)$	**2p** **3p**
b)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)+(a-3)X$ $a=3$	**3p** **2p**

c)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)$ $\left(2^x-2\right)\left(2^{2x}-2^x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(xe^x\right)'\cdot(x+2)-xe^x\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$ $=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\cdot(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{(x+2)^2},\ x\in(-2,+\infty)$	**2p** **3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $f(0)=0,\ f'(0)=\dfrac{1}{2}$, deci ecuația tangentei este $y=\dfrac{1}{2}x$	**2p** **3p**
c)	Funcția $g:[1,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-1$ este continuă pe $[1,2]$ $g(1)\cdot g(2)=\dfrac{e-3}{3}\cdot\dfrac{e^2-2}{2}<0$, deci există $c\in(1,2)$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=1$	**2p** **3p**
2.a)	$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=$ $=x\Big\vert_0^1-\ln(1+x)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$	**2p** **3p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\left(\frac{x}{1+x^{n+1}}-\frac{1}{1+x^n}\right)dx=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{\left(1+x^n\right)\left(1+x^{n+1}\right)}dx$ Pentru orice $x\in[0,1]$ avem $x-1\le 0,\ x^n\ge 0,\ 1+x^n>0$ și $1+x^{n+1}>0$, deci $I_{n+1}-I_n\le 0$	**2p** **3p**
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $0\le\dfrac{x^n}{1+x^n}\le x^n$ $0\le\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, deci $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=1+2i+3i^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-x}=3^{2x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=(m+1)\vec{i}+4\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m știind că $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=3$ și $BC=3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x^2-2x & 4x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x știind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX-2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2)=2(a-3)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că polinomul f este divizibil prin X^2-X+1.

5p **c)** Pentru $a=3$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(2^x)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x)=1$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,2)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^n}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=1-\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=i$ $\overline{z}=-i$ $a=0$, $b=-1$	**2p** **1p** **2p**
2.	$x_V=-2$ $y_V=-16$	**2p** **3p**
3.	$x^2-4=6x-12 \Rightarrow x^2-6x+8=0$ $x_1=2$ nu convine şi $x_2=4$ verifică ecuaţia	**2p** **3p**
4.	Numerele divizibile cu 100 din mulţimea numerelor naturale de trei cifre sunt 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 şi 900 $\Rightarrow$ 9 cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de trei cifre este 900 $\Rightarrow$ 900 de cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{100}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-8\vec{j} \Rightarrow AC=10$ Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$ este egală cu 20	**2p** **3p**
6.	$B=\dfrac{\pi}{6}$ $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC=4\sqrt{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix}=-x^2+2x-1$ $\det(A(x))=0 \Leftrightarrow x=1$	**3p** **2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; pentru $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avem $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ care este sistem omogen Determinantul sistemului este egal cu $0 \Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluţii $\Rightarrow$ există o infinitate de matrice X	**3p** **2p**

2.a)	$f(-1)=(-1)^3+m\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)+1=$ $=-1+m-m+1=0$	**2p** **3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-m$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-2m$ $m^2-2m=-1 \Leftrightarrow m=1$	**2p** **1p** **2p**
c)	$f=(X+1)\left(X^2+(m-1)X+1\right)$ f are toate rădăcinile reale $\Leftrightarrow (m-1)^2-4\geq 0 \Leftrightarrow m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot\left(x^2+x+1\right)'=$ $=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\dfrac{1}{2}$ Dreapta de ecuaţie $y=x+\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p** **2p** **1p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ $f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1(1-x)e^x dx=(1-x)e^x\Big\vert_0^1+\int_0^1 e^x dx=$ $=e-2$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1(1-x)^{n+1}\left(e^x\right)'dx=(1-x)^{n+1}e^x\Big\vert_0^1-\int_0^1\left((1-x)^{n+1}\right)'e^x dx=$ $=-1+(n+1)\int_0^1(1-x)^n e^x dx=-1+(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**
c)	Demonstraţie prin inducţie matematică: $I_1=1!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}\right)=e-2$, deci proprietatea este adevărată pentru $n=1$ Presupunem proprietatea adevărată pentru numărul natural nenul k. Avem $I_{k+1}=(k+1)I_k-1=(k+1)k!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}-\ldots-\dfrac{1}{k!}\right)-1=(k+1)!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}-\ldots-\dfrac{1}{(k+1)!}\right)$, deci proprietatea este adevărată pentru orice număr natural nenul n	**1p** **4p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z=\frac{1+i}{1-i}$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-12$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-4\right)=\log_3(6x-12)$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 100.
5p	**5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
5p	**6.** Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, știind că $BC=8$, $A=\frac{\pi}{4}$ și $C=\frac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.
5p	**c)** Arătați că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde m este un număr real.
5p	**a)** Calculați $f(-1)$.
5p	**b)** Determinați numărul real m știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.
5p	**c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^x dx$.
5p	**a)** Calculați I_1.
5p	**b)** Arătați că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstrați că $I_n=n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\ldots-\frac{1}{n!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1+i}{1-i}=i\Rightarrow a+ib=i$	**3p**
	$a=0,\ b=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x_1=2,\ x_2=4\Rightarrow G_f\cap Ox=\{(2,0),(4,0)\}$	**3p**
	$f(0)=8\Rightarrow G_f\cap Oy=\{(0,8)\}$	**2p**
3.	$3^{x+2}+3^{x+1}=36\Leftrightarrow 3^{x+1}=9$	**2p**
	$x+1=2\Leftrightarrow x=1$	**3p**
4.	Sunt 72 de numere naturale de două cifre care nu conțin cifra 6, deci sunt 72 de cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$	**2p**
5.	$m_{AB}=\frac{1}{3},\ d\parallel AB\Rightarrow m_d=\frac{1}{3}$, unde d este paralela prin C la AB	**3p**
	$d: y=\frac{1}{3}x-2$	**2p**
6.	$\cos x+\sin x\cos x=\sin x+\sin x\cos x\Leftrightarrow\cos x=\sin x$	**2p**
	$x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2&1&1\\a+2&a&1\\a+2&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a-1&0\\1&0&a-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(a+2)\begin{vmatrix}a-1&0\\0&a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$	**2p**
b)	$\det(A(-1))=4$	**2p**
	Inversa matricei $A(-1)$ este $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$	**3p**

c)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+b+1 \\ a+b+1 & ab+2 & a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & ab+2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$3ab+6a+6b+12=24\Rightarrow(a+2)(b+2)=8$	**1p**
	Perechile de numere naturale care verifică cerința sunt $(0,2)$ și $(2,0)$	**2p**
2.a)	$3xy-3x-3y+4=3(xy-x-y+1)+1=$	**3p**
	$=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$x*1=1*x=1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}=\left(\frac{1}{1007}*\ldots*\frac{1006}{1007}\right)*\frac{1007}{1007}*\left(\frac{1008}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}\right)=1$	**3p**
c)	Elementul neutru este $\frac{4}{3}$	**1p**
	$x*x=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3(x-1)^2+1=\frac{4}{3}\Leftrightarrow(x-1)^2=\frac{1}{9}$	**2p**
	$x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{4}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1\Rightarrow$ dreapta $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
b)	$f(2)=6$, $f'(2)=-2$	**3p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=-2x+10$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x+2}{x^2-x}\right)^{\frac{x^2-x}{x+2}}\right]^{\frac{x+2}{x^2-x}\cdot(x+3)}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x}}=e$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}dx=$	**3p**
	$=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\|_0^1=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x+1}dx\le 0$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$2I_{n+1}\le\frac{1}{n+1}\le 2I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\frac{1}{2}\le(n+1)I_n\le\frac{n+1}{2n}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$	**1p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, ştiind că $\frac{1+i}{1-i}=a+ib$ şi $i^2=-1$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axele de coordonate a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{\frac{x+2}{2}}+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifra 6.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(2,3)$ și $C(0,-2)$. Determinați ecuația paralelei duse prin C la AB.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{1+\sin x}{\sin x}=\frac{1+\cos x}{\cos x}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Calculaţi inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea „$*$” este asociativă și are element neutru.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculaţi $\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*...*\frac{2014}{1007}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XI-a
Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\overline{z}=3-4i$	**2p**
	$z+\overline{z}=6$	**3p**
2.	$\frac{m^2-1}{4}=2\Rightarrow m^2-9=0$	**3p**
	$m=-3$ nu convine, $m=3$ convine	**2p**
3.	$2x-1=x^2$	**2p**
	$x=1$, convine	**3p**
4.	$a+b+c=5\Rightarrow$ cifrele nenule a, b şi c pot fi $1, 1, 3$ sau $1, 2, 2$	**2p**
	Dacă cifrele sunt $1, 1, 3$ se obţin numerele 113, 131 şi 311	**1p**
	Dacă cifrele sunt $1, 2, 2$ se obţin numerele 122, 212, 221 $\Rightarrow$ sunt 6 numere care verifică condiţiile date	**2p**
5.	$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow D$ este mijlocul laturii BC	**3p**
	$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow p=\frac{1}{2}$	**2p**
6.	$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3}{5}$	**2p**
	$\frac{AC}{\sin B}=2R\Rightarrow R=5$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(1,-1)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\2&2&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-6$	**3p**
b)	$D(x,y)=\begin{vmatrix}0&0&1\\x-2&y-2&2\\(x-2)(x+2)&(y-2)(y+2)&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(x-2)(y-2)\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&2\\x+2&y+2&5\end{vmatrix}=(x-2)(y-2)(y-x)$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
c)	$D\left(2^x,4^x\right)=\left(2^x-2\right)\left(4^x-2\right)\left(4^x-2^x\right)$	**2p**
	$2^x-2=0\Rightarrow x=1$	**1p**
	$4^x-2=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	**1p**
	$4^x-2^x=0\Rightarrow x=0$	**1p**

2.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $A(-2)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)-A(-2)=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
b)	$\det\left(A(n)\right)=\begin{vmatrix}1&1&n\\1&n&1\\n&1&1\end{vmatrix}=-(n+2)(n-1)^2$	**3p**
	$n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1\Rightarrow\det\left(A(n)\right)\neq 0$, deci $A(n)$ inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\neq 1$	**2p**
c)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=-2$	**2p**
	$A^{-1}(0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{n+1}=\frac{n^2(n+2)}{(n+1)^3}=$	**2p**
	$=\frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1}<1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
b)	$\frac{n+1}{n^2}>0\Rightarrow a_n>0$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\frac{n+1}{n^2}\leq\frac{n+n}{n^2}=\frac{2}{n}\leq 2\Rightarrow a_n\leq 2$, pentru orice număr natural nenul n, deci $(a_n)_{n\geq 1}$ mărginit	**3p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}(na_n)^{\sqrt{n^2+2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+2}}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}}=e^1=e$	**3p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-b}{2x+1}=\frac{1}{2}$	**3p**
	Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	f este continuă pe $(-\infty,2)$ și pe $(2,+\infty)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
	f este continuă în $x=2$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}f(x)=f(2)\Rightarrow a=-4,\ b=2$	**3p**
c)	$\left(7\cdot f(x)-1\right)\left(2^x-16\right)=0\Rightarrow x=3$ sau $x=4$	**2p**
	f este continuă pe $(2,+\infty)\Rightarrow$ mulțimea soluțiilor inecuației este $[3,4]$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XI-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $z+\overline{z}$, știind că $z=3+4i$ și $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex z.

5p **2.** Determinați numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\left(m^2-1\right)x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x-1)=2\log_2 x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale $\overline{abc}$, cu a, b și c nenule, au suma cifrelor egală cu 5.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctul D astfel încât $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$. Determinați numărul real p pentru care $\overrightarrow{AD}=p\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AC=6$ și $\cos B=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & 2\\ x^2+1 & y^2+1 & 5\end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $D(1,-1)$.

5p **b)** Arătați că $D(x,y)=(x-2)(y-2)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $D\left(2^x,4^x\right)=0$.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & x & 1\\ x & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $A(1)-A(-2)$.

5p **b)** Demonstrați că $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n, $n\neq 1$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(0)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{n+1}{n^2}$.

5p **a)** Arătați că $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **b)** Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(na_n\right)^{\sqrt{n^2+2}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<2\\ 0, & x=2\\ \frac{x-b}{2x+1}, & x>2\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Determinați numerele reale a și b pentru care funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $b=2$, rezolvați în mulțimea $(2,+\infty)$ inecuația $\left(7\cdot f(x)-1\right)\left(2^x-16\right)\leq 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6+12i+2-12i=$ $=6+2=8$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=4-4=$ $=0$, deci parabola asociată funcției f este tangentă la axa Ox	**3p** **2p**
3.	$x^2+4=4x \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 3=12$ numere	**3p** **2p**
5.	Panta dreptei BC este $m_{BC}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow m_d=-2$ $d: y=-2x-2$	**2p** **3p**
6.	$\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{3\pi}{4}=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A(n)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{n+1}&0\\0&2^{n+1}-1&1\end{pmatrix}$ $A(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^3&0\\0&2^3-1&1\end{pmatrix}$ și $A(n)\cdot A(1)=A(3)\Rightarrow n=2$	**3p** **2p**
c)	$A(p)\cdot A(q)=A(p+q)$ pentru orice numere naturale p și q $A(p+q)=A(pq)\Rightarrow p+q=pq\Rightarrow (p-1)(q-1)=1\Rightarrow p=q=0$ sau $p=q=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-3\cdot 0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	Câtul este $X+1$ Restul este $X+6$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=20$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x)'+\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=3+e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+e^x}{x}=3$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, deci dreapta de ecuație $y=3x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g'(0)=0$, $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-4x-1=e^x-x-1$	**3p**
	$g(x)\ge g(0)\Rightarrow g(x)\ge 0\Rightarrow f(x)\ge 4x+1$ pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)dx=\int\limits_0^1 x^3\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^4}{4}\Big\vert_0^1=\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int\limits_0^t f(x)dx\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{4t^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^3}{4t^3\left(t^2+t+1\right)}=\frac{1}{4}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2+4}=5^{4x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5 și 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ și $C(4,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numărul natural n știind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3X+2$.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-4.

5p **c)** Arătați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+x+1)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x+1)\,dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătați că $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.