

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(5 - \sqrt{2}) = 10 - 2\sqrt{2}$ $10 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 10$	2p 3p
2.	$f(-3) = 0$ $f(3) = 0$ $f(-3) + f(3) = 0$	2p 2p 1p
3.	$5^{2x} = 5^2$ $x = 1$	2p 3p
4.	$20\% \cdot 100 = 20$ Prețul după scumpire este 120 de lei	2p 3p
5.	$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2}$ $AB = 2$	3p 2p
6.	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 30^\circ + \cos 150^\circ = 0$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 =$ $= 1$	3p 2p
b)	$x = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	2p 3p
c)	$A + B = \begin{pmatrix} 1+x & -2 \\ 0 & 1+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + B) = (1+x)^2$ $(1+x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	3p 2p
2.a)	$2 \circ (-2) = 2 + (-2) + 3 =$ $= 3$	3p 2p
b)	$x \circ (-3) = x + (-3) + 3 = x$, pentru orice număr real x $(-3) \circ x = (-3) + x + 3 = x \Rightarrow x \circ (-3) = (-3) \circ x = x$, pentru orice număr real x	2p 3p

c)	$2013 \circ (-2013) = 3$ $3 = x \circ x \Leftrightarrow 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = 0$	2p 3p
SUBIECTUL al III-lea		(30 de puncte)
1.a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) =$ $= 1$	3p 2p
b)	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$	2p 3p
c)	$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ $f'(1) = -1$, $f(1) = 2 \Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = -x + 3$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big _0^1 =$ $= f(1) - f(0) = 3$	3p 2p
b)	$F'(x) = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1$ $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 1) dx =$ $= (x^3 + x) \Big _0^1 = 2$	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Arătați că $2(5 - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = 10$.
5p	2. Calculați $f(-3) + f(3)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x} = 25$.
5p	4. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(3,1)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B .
5p	6. Calculați $\cos 30^\circ + \cos 150^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	a) Calculați $\det A$.
5p	b) Pentru $x = 0$ arătați că $A - B = I_2$.
5p	c) Determinați numărul real x pentru care $\det(A + B) = 0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = x + y + 3$.
5p	a) Calculați $2 \circ (-2)$.
5p	b) Arătați că $e = -3$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
5p	c) Determinați numărul real x pentru care $2013 \circ (-2013) = x \circ x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$.
5p	a) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
5p	b) Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
5p	c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f .
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$.
5p	a) Calculați $\int_0^1 f'(x) dx$.
5p	b) Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 + x + 1$ este o primitivă a funcției f .
5p	c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Varianța 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3(2 - \sqrt{2}) = 6 - 3\sqrt{2}$ $6 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6$	2p 3p
2.	$f(0) = -1$ $f(2) = 1$ $f(0) \cdot f(2) = -1$	2p 2p 1p
3.	$5^{x-2} = 5^2$ $x = 4$	2p 3p
4.	$10\% \cdot 100 = 10$ Prețul după scumpire este 110 lei	2p 3p
5.	$AB = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2}$ $AB = 2$	3p 2p
6.	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45^\circ + \cos 135^\circ = 0$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(0)$	2p 2p 1p
b)	$\det(M(a)) = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2$ $4a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p
c)	$M(-2) + M(-1) + M(0) + M(1) + M(2) = (M(-2) + M(2)) + (M(-1) + M(1)) + M(0) =$ $= 3M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 =$ $= 1 - 2 + 1 = 0$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M_tehnologic*

Varianța 2

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

b)	Câtul este X Restul este $-X + 1$	2p 3p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 - 2 \cdot 0 = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (\sqrt{x})' - 1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty)$ $2\sqrt{x}f'(x) = 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$y - f(4) = f'(4)(x - 4)$ $f(4) = 1, f'(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{ecuația tangentei este } y = \frac{1}{4}x$	2p 3p
c)	$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty)$ $f''(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty) \Rightarrow f \text{ este concavă pe intervalul } (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 (2x + 1) dx =$ $= \left(x^2 + x \right) \Big _1^2 = (4 + 2) - (1 + 1) = 4$	2p 3p
b)	$F'(x) = \left(x^2 + x + \ln x \right)' = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ $F'(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty) \Rightarrow F \text{ este o primitivă a funcției } f$	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(2x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx =$ $= \left(x^2 + x + \ln x \right) \Big _1^2 = 4 + 2 + \ln 2 - 1 - 1 - \ln 1 = 4 + \ln 2$	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $3(2 - \sqrt{2}) + 3\sqrt{2} = 6$. |
| 5p | 2. Calculați $f(0) \cdot f(2)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x-2} = 25$. |
| 5p | 4. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(1,3)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B . |
| 5p | 6. Calculați $\cos 45^\circ + \cos 135^\circ$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $M\left(\frac{1}{2}\right) + M\left(-\frac{1}{2}\right) = M(0)$. |
| 5p | b) Determinați numărul real a pentru care $\det(M(a)) = 0$. |
| 5p | c) Determinați matricea $M(-2) + M(-1) + M(0) + M(1) + M(2)$. |
| | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $f(1) = 0$. |
| 5p | b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 1$. |
| 5p | c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - 1$. |
| 5p | a) Arătați că $2\sqrt{x}f'(x) = 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Verificați dacă dreapta de ecuație $y = \frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) Calculați $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx$. |
| 5p | b) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + x + \ln x$ este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = 2$. |

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$ $4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4$	2p 3p
2.	$f(4) = 8$ $f(-4) = 0$ $f(4) + f(-4) = 8$	2p 2p 1p
3.	$7^{2x} = 7^2$ $x = 1$	2p 3p
4.	$\frac{10}{100} \cdot 1000 = 100$ Prețul după scumpire este 1100 de lei	2p 3p
5.	$AB = \sqrt{(4-4)^2 + (1-3)^2}$ $AB = 2$	3p 2p
6.	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 45^\circ - \sin 135^\circ = 0$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 =$ $= -5$	3p 2p
b)	Pentru $m = -2$ avem $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2m-1 & m+2 \\ m+2 & 3m+1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2m-1 & m+2 \\ m+2 & 3m+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow m = 5$	3p 2p
2.a)	$f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + (-1) =$ $= -1 + 2 - 1 = 0$	2p 3p

b)	Câtul este $X + 1$ Restul este 0	2p 3p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-2)^2 - 2 \cdot 1 = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' + 10' - \left(\frac{11}{x}\right)' = 1 - 11 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$ $= 1 + \frac{11}{x^2} = \frac{x^2 + 11}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$x \in (0, +\infty) \Rightarrow x^2 + 11 > 0$ $f'(x) = \frac{x^2 + 11}{x^2} \Rightarrow f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, +\infty)$	3p 2p
c)	$f''(x) = -\frac{22}{x^3}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big _1^2 =$ $= f(2) - f(1) = 3$	3p 2p
b)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^2 \left(x + \frac{9}{x}\right) dx =$ $= \left(\frac{x^2}{2} + 9 \ln x\right) \Big _1^2 = \frac{3}{2} + 9 \ln 2$	2p 3p
c)	$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 9 - x^2)^2 dx =$ $= \pi \cdot 81x \Big _0^1 = 81\pi$	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $2(2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{3} = 4$. |
| 5p | 2. Calculați $f(4) + f(-4)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2x} = 49$. |
| 5p | 4. Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ și $B(4,1)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B . |
| 5p | 6. Calculați $\sin 45^\circ - \sin 135^\circ$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m+1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real. |
| 5p | a) Calculați $\det A$. |
| 5p | b) Pentru $m = -2$, arătați că $A + B = O_2$. |
| 5p | c) Determinați numărul real m pentru care $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$. |
| | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X$. |
| 5p | a) Arătați că $f(-1) = 0$. |
| 5p | b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + X$. |
| 5p | c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, știind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 10 - \frac{11}{x}$. |
| 5p | a) Verificați dacă $f'(x) = \frac{x^2 + 11}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$. |
| 5p | c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 9$. |
| 5p | a) Calculați $\int_1^2 f'(x) dx$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3}{2} + 9 \ln 2$. |
| 5p | c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x^2$ este egal cu 81π . |

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3(4 - \sqrt{3}) = 12 - 3\sqrt{3}$ $12 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 12$	2p 3p
2.	$f(-4) = 0$ $f(4) = 0 \Rightarrow f(-4) + f(4) = 0$	2p 3p
3.	$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ $x = 3$	2p 3p
4.	$\frac{30}{100} \cdot 100 = 30$ Prețul după ieftinire este 70 de lei	2p 3p
5.	$AB = \sqrt{(2 - 2)^2 + (1 - 4)^2}$ $AB = 3$	3p 2p
6.	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos^2 A = \frac{3}{4}$ $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 =$ $= 4$	3p 2p
b)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2b & 2 - 2b \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$ $A \cdot B = 2I_2 \Leftrightarrow b = 1$	3p 2p
c)	$A + B = \begin{pmatrix} 2 + b & -1 \\ 0 & 2 + b \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + B) = (2 + b)^2$ $(2 + b)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$	3p 2p
2.a)	$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 =$ $= 1 - 3 + 2 = 0$	2p 3p
b)	Câtul este $X^2 - X$ Restul este 0	2p 3p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 2$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3^2 - 2 \cdot 2 = 5$	2p 3p

Probă scrisă la matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)' =$ $= 3x^2 + 12x + 12$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$f'(x) = 3(x+2)^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este crescătoare pe \mathbb{R}	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 12x + 12}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{12}{x} + \frac{12}{x^2} \right)}{x^2} =$ $= 3$	3p 2p
2.a)	$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + x \right)' = x^2 + 1$ $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	3p 2p
b)	$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{4}{3}$	3p 2p
c)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx =$ $= \left(\frac{x^2}{2} + \ln x \right) \Big _1^2 = \frac{3}{2} + \ln 2$	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Arătați că $3(4 - \sqrt{3}) + 3\sqrt{3} = 12$.
5p	2. Calculați $f(-4) + f(4)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 16$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x - 2)^2 - x^2 + 8 = 0$.
5p	4. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30%.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(2,1)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B .
5p	6. Calculați $\cos A$, știind că $\sin A = \frac{1}{2}$ și unghiul A este ascuțit.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde b este număr real.
5p	a) Calculați $\det A$.
5p	b) Determinați numărul real b pentru care $A \cdot B = 2I_2$.
5p	c) Determinați numărul real b pentru care $\det(A + B) = 0$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$.
5p	a) Calculați $f(1)$.
5p	b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.
5p	c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^3$.
5p	a) Verificați dacă $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Arătați că funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} .
5p	c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^2}$.
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
5p	a) Verificați dacă funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$ este o primitivă a funcției f .
5p	b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.
5p	c) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3}{2} + \ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Barem de evaluare și de notare

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$9x^2 + 12x = 0$ $x = 0$ sau $x = -\frac{4}{3}$	3p 2p
2.	$-\frac{b}{2a} = \frac{3m}{2}$ $\frac{3m}{2} = \frac{3}{2}$ $m = 1$	2p 2p 1p
3.	$3^{2x} = 3^2$ $2x = 2 \Rightarrow x = 1$	2p 3p
4.	$C_4^2 = 6$ $A_5^2 = 20$ $5C_4^2 - A_5^2 = 10$	2p 2p 1p
5.	C mijlocul lui $(AB) \Rightarrow x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$ $x_C = -2$ $y_C = 4$	1p 2p 2p
6.	$m(\angle BAD) = 60^\circ$ $\triangle ABD$ este echilateral $BD = 4$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\Delta(1) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\Delta(1) = 0$	2p 3p
b)	$\Delta(x) = 2 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 + x^2 + x^2 - 8$ Finalizare	3p 2p
c)	$\Delta(0) = -6$ $(A(0))^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$f(1) = 1^3 - 1^2 + a \cdot 1 + b$	3p

Probă scrisă la matematică $M_{tehnologic}$

Model

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

	$a + b = 0$	2p
b)	$f = X^3 - X^2 - X + 1 \Rightarrow f = (X - 1)^2 (X + 1)$ Finalizare: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$	3p 2p
c)	$f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$ $f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = -4$ Finalizare: $a = -4, b = 4$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$ Finalizare	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$	2p 3p
c)	$f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \Rightarrow f$ descrescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ Din tabelul de variație al funcției obținem $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$F'(x) = \left(x - \frac{1}{x} + \ln x\right)' = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ F este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $F' = f$	3p 2p
b)	$\int_1^e x \cdot f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^e f(x^2) \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} f(t) dt =$ $= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} + \ln t\right) \Big _1^{e^2} = \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} + 2\right)$	3p 2p
c)	$\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = \left(x - \frac{1}{x}\right) \Big _1^a = a - \frac{1}{a}$ $a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2$ sau $a = -\frac{1}{2}$ Finalizare: $a = 2$	2p 2p 1p

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3x+2)^2 = 4$.
- 5p** 2. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3mx + 1$ are abscisa egală cu $\frac{3}{2}$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x} = 9$.
- 5p** 4. Calculați $5C_4^2 - A_5^2$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,3)$ și $B(2,5)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului (AB) .
- 5p** 6. Calculați lungimea diagonalei BD a rombului $ABCD$ în care $AB = 4$ și $m(\angle ABC) = 120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & -1 & x \\ x & x & 2 \end{pmatrix}$ și se notează determinantul ei cu $\Delta(x)$.
- 5p** a) Calculați $\Delta(1)$.
- 5p** b) Arătați că $\Delta(x) = 6(x^2 - 1)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați inversa matricei $A(0)$.
2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$.
- 5p** a) Calculați $a + b$, știind că $f(1) = 0$.
- 5p** b) Pentru $a = -1$ și $b = 1$, determinați rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați numerele reale a și b , știind că $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ sunt rădăcini ale polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.
- 5p** a) Verificați dacă $f'(x) = 1 + \ln x$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) \geq -\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.
- 5p** a) Verificați dacă funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$ este o primitivă a funcției f .

- | | |
|-----------|--|
| 5p | b) Calculați $\int_1^e x \cdot f(x^2) dx$. |
| 5p | c) Determinați numărul real $a > 1$, pentru care $\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{3}{2}$. |

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3(2 + \sqrt{2}) = 6 + 3\sqrt{2}$ $6 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 6$	2p 3p
2.	$f(-2) = -1$ $f(0) = 1$ $f(-2) \cdot f(0) = -1$	2p 2p 1p
3.	$x^2 + 1 = 1$ $x = 0$	2p 3p
4.	$10\% \cdot 1000 = 100$ Prețul după ieftinire este 900 de lei	2p 3p
5.	M mijlocul lui $(PR) \Rightarrow x_M = \frac{x_P + x_R}{2}$ și $y_M = \frac{y_P + y_R}{2}$ $x_M = 2$ $y_M = 2$	1p 2p 2p
6.	$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B}$ $\cos B = \frac{12}{13}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 =$ $= -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A - xI_2 = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$ $A \cdot A - xI_2 = A \Leftrightarrow x = 1$	3p 2p
c)	$\det(M + A) = \begin{vmatrix} m+1 & m+1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - m$ $m = -1$ sau $m = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$5 * (-5) = 5 + (-5) - 2$ $= -2$	3p 2p
b)	$x * y = x + y - 2$ și $y * x = y + x - 2$, pentru orice numere reale x și y $x * y = y * x$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p

c)	$(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3 = ((-3)*3)*((-2)*2)*((-1)*1)*0 =$ $= (-2)*(-2)*(-2)*0 = -12$	2p 3p
----	---	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x =$ $= (x+1)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f''(x) = (x+2)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) + f(x) = (x+2)e^x + xe^x = 2(x+1)e^x = 2f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ $f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -1)$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow$ funcția f are un punct de extrem, $x = -1$	2p 3p
2.a)	$\int_4^5 xf(x)dx = \int_4^5 1 \cdot dx =$ $= x \Big _4^5 = 1$	2p 3p
b)	$F'(x) = (4 + \ln x)' = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_5^a f(x) dx = \int_5^a \frac{1}{x} dx =$ $= \ln a - \ln 5 = \ln 3 \Rightarrow a = 15$	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $3(2 + \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} = 6$.
- 5p** 2. Calculați $f(-2) \cdot f(0)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 1) = \log_3 1$.
- 5p** 4. Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 10%.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(2,1)$ și $R(2,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR .
- 5p** 6. Calculați $\cos B$, știind că $\sin B = \frac{5}{13}$ și unghiul B este ascuțit.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Calculați $\det A$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot A - xI_2 = A$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Determinați matricele $M = \begin{pmatrix} m & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$, știind că $\det(M + A) = 0$, unde m este număr real.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x * y = x + y - 2$.
- 5p** a) Calculați $5 * (-5)$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Calculați $(-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = (x+1)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Verificați dacă $f''(x) + f(x) = 2f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Arătați că funcția f are un punct de extrem.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
- 5p** a) Calculați $\int_4^5 xf(x) dx$.
- 5p** b) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 4 + \ln x$ este o primitivă a funcției f .
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 5$, pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x = 5$ și $x = a$, este egală cu $\ln 3$.