Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5-3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=5-3\cdot\frac{4}{3}=$	**3p**
	$=5-4=1$	**2p**
2.	$f(a)=a-4$	**2p**
	$a-4=2$, de unde obținem $a=6$	**3p**
3.	$4+2x=4$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	$\frac{10}{100}\cdot 90=9$ lei	**3p**
	Prețul după scumpire este $90+9=99$ de lei	**2p**
5.	$a=\frac{1+5}{2}$, $b=\frac{4+0}{2}$	**3p**
	$a=3$, $b=2$	**2p**
6.	$\sin C=\frac{AB}{BC}$	**2p**
	$\frac{1}{2}=\frac{3}{BC}$, de unde obținem $BC=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 4=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
b)	$2B=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow A+2B=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 6 & 9\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=3C$	**2p**
c)	$B\cdot C+x(A-C)=\begin{pmatrix}0 & -8+2x\\ 8+2x & 8\end{pmatrix}$, deci $\det\left(B\cdot C+x(A-C)\right)=(8+2x)(8-2x)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(8+2x)(8-2x)=0$, de unde obținem $x=-4$ sau $x=4$	**2p**
2.a)	$1*1=(1+2\cdot 1)(1+2\cdot 1)+2=$	**3p**
	$=3\cdot 3+2=11$	**2p**
b)	$x*0=2x^2+2$, pentru orice număr real x, deci $2x^2+2=4$	**3p**
	$x^2-1=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**2p**

c)	$x*\frac{1}{x}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+2x\right)+2=1+2x^2+\frac{2}{x^2}+4+2=$	**3p**
	$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7>7$, pentru orice număr real nenul x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\cdot 5x^4+5\cdot 4x^3-10\cdot 3x^2=$	**3p**
	$=10x^4+20x^3-30x^2=10x^2\left(x^2+2x-3\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ sau $x=0$ sau $x=1$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-3,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-3,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=-2$, de unde obținem $2x^5+5x^4-10x^3+1\ge -2$, deci $2x^5+5x^4-10x^3+3\ge 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)dx=\int_0^2 6x\,dx=6\cdot\frac{x^2}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=12-0=12$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-6x\right)dx=\int_0^1\frac{2}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=2\ln 2-2\ln 1=2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^e\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\cdot\ln^2 x\,dx=\int_1^e 6x\ln^2 x\,dx=\int_1^e\left(3x^2\right)'\ln^2 x\,dx=3x^2\ln^2 x\Big\|_1^e-\int_1^e 6x\ln x\,dx=$ $=3e^2-3x^2\ln x\Big\|_1^e+\frac{3x^2}{2}\Big\|_1^e=\frac{3\left(e^2-1\right)}{2}$	**3p**
	$\frac{3\left(e^2-1\right)}{2}=\frac{a\left(e^2-1\right)}{2}$, de unde obținem $a=3$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $5-3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4+2x}=2$.

5p **4.** Un produs costă 90 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 10%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(5,0)$ și $M(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, în care măsura unghiului C este egală cu 30° și $AB=3$. Arătați că $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $A+2B=3C$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B\cdot C+x(A-C)\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+2y)(y+2x)+2$.

5p **a)** Arătați că $1*1=11$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*0=4$.

5p **c)** Demonstrați că $x*\frac{1}{x}>7$, pentru orice număr real nenul x.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^5+5x^4-10x^3+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=10x^2\left(x^2+2x-3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $2x^5+5x^4-10x^3+3\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+\frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-6x\right)dx=2\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\cdot\ln^2 x\,dx=\frac{a\left(e^2-1\right)}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=1+6\cdot\frac{5}{6}=$	**3p**
	$=1+5=6$	**2p**
2.	$f(3)=1$	**2p**
	$f(2)=0$, de unde obținem $f(3)-f(2)=1-0=1$	**3p**
3.	$3x+1=4$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $10-n$ este par sunt 2, 4, 6 și 8, de unde obținem 4 cazuri favorabile, deci $p=\frac{4}{9}$	**3p**
5.	Pentru orice număr real a, $AB=\sqrt{(a-a)^2+(6-0)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{6^2}=6$	**2p**
6.	$AC=10$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{5\cdot 10}{2}=25$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7\cdot 1-3\cdot 3=$	**3p**
	$=7-9=-2$	**2p**
b)	$A-4I_2=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=3B$	**2p**
c)	$X\cdot(I_2+B)=A$ și, cum $I_2+B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $\det(I_2+B)\neq 0$, obținem $X=A\cdot(I_2+B)^{-1}$	**2p**
	$(I_2+B)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$2*3=2\cdot 3(2+3-4)=$	**3p**
	$=6\cdot 1=6$	**2p**

b)	$1 * x = x^2 - 3x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2 - 3x - 4 = 0$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 4$	**3p**
c)	$2^x * 2^x = 2^{2x}\left(2^x + 2^x - 4\right)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2^{2x}\left(2^x + 2^x - 4\right) = 2^{3x} \Leftrightarrow 2^x + 2^x - 4 = 2^x \Leftrightarrow 2^x = 4$, de unde obținem $x = 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 9 \cdot 2x =$	**3p**
	$= 3x^2 - 18x = 3x(x-6)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 6$	**2p**
	Pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 0]$, pentru orice $x \in [0,6]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,6]$ și pentru orice $x \in [6, +\infty)$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[6, +\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{3f(x) - xf'(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3\left(x^2 - 6x + 5\right)}{9\left(1 - x^2\right)} =$	**2p**
	$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{3(x-1)(x-5)}{-9(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-5}{-3(x+1)} = \frac{2}{3}$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int\limits_0^2 (x-1)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big\vert_0^2 =$	**3p**
	$= 2 - 2 = 0$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 f(x) dx = \int\limits_0^1 (x-1)e^x dx = (x-1)e^x \Big\vert_0^1 - e^x \Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - (e-1) = 2 - e$	**2p**
c)	$\int\limits_2^n \frac{x}{f(x) \cdot f(-x)} dx = \int\limits_2^n \frac{x}{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_2^n \frac{\left(x^2 - 1\right)'}{x^2 - 1} dx = -\frac{1}{2}\ln\left\vert x^2 - 1\right\vert \Big\vert_2^n = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{n^2 - 1}$	**3p**
	$\frac{1}{2}\ln\frac{3}{n^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$ și, cum n este număr natural, $n > 2$, obținem $n = 3$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1+6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$. Arătați că $f(3)-f(2)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+1}=2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, numărul $10-n$ să fie par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,0)$ și $B(a,6)$, unde a este număr real. Arătați că $AB=6$, pentru orice număr real a.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=5$ și $AC=2AB$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 25.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că $A-4I_2=3B$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X+X\cdot B=A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy(x+y-4)$.

5p **a)** Arătați că $2*3=6$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $1*x=4$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $2^x*2^x=2^{3x}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-9x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3x(x-6)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{3f(x)-xf'(x)}=\frac{2}{3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=2-e$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n>2$, pentru care $\int_2^n\frac{x}{f(x)\cdot f(-x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{8}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{36}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-1-6=$	**3p**
	$=8-7=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 5x-1=5+2x$	**2p**
	Coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g sunt $x=2$ și $y=9$	**3p**
3.	$x^2+6x=x^2$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $4\cdot n$ este element al mulțimii A sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{10}$	**1p**
5.	$2=\dfrac{3+x_C}{2}$ și $1=\dfrac{4+y_C}{2}$, deci punctul C are coordonatele $x_C=1$ și $y_C=-2$	**2p**
	$OA=\sqrt{5}$, $OC=\sqrt{5}$ și $AC=\sqrt{10}$, deci $OA^2+OC^2=AC^2$, de unde obținem că triunghiul AOC este dreptunghic isoscel	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$\dfrac{1}{2}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\cos A$, deci $\sin A=\cos A$, de unde obținem $\operatorname{tg} A=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -6\\ 2 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-6)\cdot 2=$	**3p**
	$=-9+12=3$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A+A=\begin{pmatrix}0 & -6\\ 2 & -6\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A+A=2\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=2B(-1)$, de unde obținem $x=-1$	**3p**
c)	$B(a)\cdot A=\begin{pmatrix}2a-4 & -3a+6\\ 3+6a & -6-9a\end{pmatrix}$, $B(3a)=\begin{pmatrix}0 & 3a-2\\ 1 & 9a\end{pmatrix}$, deci $B(a)\cdot A+B(3a)=\begin{pmatrix}2a-4 & 4\\ 4+6a & -6\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det\left(B(a)\cdot A+B(3a)\right)=-36a+8$, pentru orice număr real a, deci $-36a+8=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{9}$	**2p**

2.a)	$1*2=(1\cdot 2+1)(1+2)=$ $=3\cdot 3=9$	**3p** **2p**
b)	$x*0=(x\cdot 0+1)(x+0)=1\cdot x=x$, pentru orice număr real x $0*x=(0\cdot x+1)(0+x)=1\cdot x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
c)	$N=2\left(n+\frac{1}{n}\right)=2n+\frac{2}{n}$, pentru orice număr natural nenul n N este număr întreg, deci $\frac{2}{n}$ este număr întreg și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x+(x-1)e^x-\frac{2x}{2}=$ $=xe^x-x=x\left(e^x-1\right),\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(x^2\right)'}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(e^x-1\right)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=0$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ Cum $x\leq 0\leq x^2$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, obținem $f(x)\leq f\left(x^2\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^2 (x+4)f(x)\,dx=\int_1^2 4x\,dx=2x^2\Big\vert_1^2=$ $=8-2=6$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^4 \frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=2\int_1^4\frac{2x}{x^2+4}dx=2\int_1^4\left(x^2+4\right)'\cdot\frac{1}{x^2+4}dx=2\ln\left(x^2+4\right)\Big\vert_1^4=$ $=2\ln 20-2\ln 5=4\ln 2$	**3p** **2p**
c)	Dacă $F:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(-4,+\infty)$ $F''(x)=f'(x)=\frac{16}{(x+4)^2}>0$, pentru orice $x\in(-4,+\infty)$, deci orice primitivă a funcției f este convexă	**2p** **3p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{8}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{36}=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5+2x$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+6x}=x$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, numărul $4\cdot n$ să fie element al mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,4)$ și C, astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC. Arătați că triunghiul AOC este dreptunghic isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 30°\cdot\sin A=\cos 60°\cdot\cos A$. Calculați $\operatorname{tg} A$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}0 & a-2\\ 1 & 3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A+A=2B(x)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(B(a)\cdot A+B(3a)\right)=4$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(xy+1)(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $1*2=9$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $N=n*\frac{1}{n}$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=0$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\le f\left(x^2\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x+4)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4 \frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_4-a_3=3$, unde r este rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$a_3=a_1+2r \Rightarrow a_1=6-2\cdot 3=0$	**3p**
2.	$f(a)=g(a)\Leftrightarrow a^2+2a-3=a-3\Leftrightarrow a^2+a=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=0$	**2p**
3.	$x+3=3^2\Leftrightarrow x+3=9$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	$\frac{30}{100}\cdot x=60$, unde x este prețul înainte de scumpire, deci $x=200$ de lei	**3p**
	După scumpire, prețul produsului este $200+60=260$ de lei	**2p**
5.	$M(-1,2)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$2=2\cdot(-1)+a$, de unde obținem $a=4$	**3p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, de unde obținem $AB=AC=6\sqrt{2}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{6\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2}=36$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0\cdot 1-0\cdot 1=0$	**2p**
b)	$2A(4)+A(-2)=2\begin{pmatrix}4&4\\1&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&-2\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6\\3&15\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}2&2\\1&5\end{pmatrix}=3A(2)$, de unde obținem $a=3$	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=2$ și $(A(1))^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(m)=\begin{pmatrix}m&m\\1&2m+1\end{pmatrix}$ și, cum $X=A(m)\cdot(A(1))^{-1}$, obținem $X=\begin{pmatrix}m&0\\-m+1&m\end{pmatrix}$, unde m este număr întreg, deci matricea X are toate elementele numere întregi	**3p**
2.a)	$2*1=(2+1)(2-1)(1-1)+1=$	**3p**
	$=3\cdot 1\cdot 0+1=1$	**2p**

b)	$x*y=(x+y)(x-1)(y-1)+1=$	**2p**
	$=(y+x)(y-1)(x-1)+1=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$n*(1-n)=-n^2+n+1$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$-n^2+n+1\geq n^2 \Leftrightarrow 2n^2-n-1\leq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x^2-(x+3)\cdot 2x}{x^4}+\dfrac{1}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x-6}{x^3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=4$, $f'(1)=-6$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-6x+10$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=3$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(0,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,3]$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(3)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\dfrac{x+3}{x^2}+\ln x\geq\dfrac{2}{3}+\ln 3\Rightarrow \ln\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{2}{3}-\dfrac{x+3}{x^2}\Rightarrow \ln\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{e^x}{2}\right)dx=\int_0^2(x+1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right\|_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{2^2}{2}+2=4$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 2x\left(f(x)-1\right)dx=\int_0^1\left(2x^2+xe^x\right)dx=\left.\frac{2x^3}{3}\right\|_0^1+\left.(x-1)e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}$	**2p**
c)	Cum $f'(x)=1+\dfrac{e^x}{2}=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$, obținem $\displaystyle\int_{-1}^0\left(f(x)-x\right)\cdot f(x)dx=\int_{-1}^0 f'(x)\cdot f(x)dx=$ $=\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right\|_{-1}^0=\dfrac{9e^2-1}{8e^2}$	**3p**
	$\dfrac{9e^2-1}{8e^2}=\dfrac{(3e+1)(3e+a)}{8e^2}$, de unde obținem $a=-1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3 = 6$ și $a_4 = 9$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-3$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+3)=2$.

5p **4.** În urma unei scumpiri cu 30%, prețul unui produs a crescut cu 60 de lei. Determinați prețul produsului după scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$, $B(2,3)$ și dreapta d de ecuație $y=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei d.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=AC$, $BC=12$ și măsura unghiului B egală cu $45°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 36.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x \\ 1 & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $2A(4)+A(-2)=aA(2)$.

5p **c)** Arătați că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot A(1)=A(m)$, unde m este număr întreg, atunci matricea X are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)(x-1)(y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $2*1=1$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n*(1-n)\geq n^2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{e^x}{2}+1$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{e^x}{2}\right)dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 2x\left(f(x)-1\right)dx=\frac{5}{3}$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_{-1}^0 \left(f(x)-x\right)\cdot f(x)\,dx=\frac{(3e+1)(3e+a)}{8e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1{,}5-0{,}5)\cdot 3-2\cdot 0{,}5=1\cdot 3-1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**
2.	$f(a)=2a-3$	**2p**
	$2a-3=9$, de unde obținem $a=6$	**3p**
3.	$3x-1=5$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $5n\le 22$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$x_M=\frac{-2+6}{2}$, $y_M=\frac{1+3}{2}$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$x_M=2$, $y_M=2$	**2p**
6.	$AB=3$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 1=$	**3p**
	$=6-1=5$	**2p**
b)	$2A-B(2)=\begin{pmatrix}4&2\\2&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2B(0)$	**2p**
c)	$B(1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow B(x)\cdot B(1)-(x+1)A=\begin{pmatrix}2&x+2\\x+2&x+4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x+2&x+1\\x+1&3x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x&1\\1&1-2x\end{pmatrix}$ și $\det\left(B(x)\cdot B(1)-(x+1)A\right)=4x^2-2x-1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2-2x-1=1\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**2p**
2.a)	$1\circ 1=1+1-6\cdot 1\cdot 1=$	**3p**
	$=2-6=-4$	**2p**
b)	$0\circ x=0+x-6\cdot 0\cdot x=0+x-0=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ 0=x+0-6\cdot x\cdot 0=x+0-0=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

c)	$m\circ(3-m)=3-6m(3-m)$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$3-6m(3-m)<3\Leftrightarrow m(m-3)<0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=1$ și $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\cdot 3x^2-3\cdot 4x^3=$	**3p**
	$=6x^2-12x^3=6x^2(1-2x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x^4}{x^3+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+2}{x^3+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(2+\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{4}{x^3}\right)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x^3}}=2$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=0$ sau $x=\dfrac{1}{2}$; $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$	**2p**
	$f(0)=2$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{33}{16}$ și $f(2)=-30$, deci $-30\leq f(x)\leq\dfrac{33}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$, de unde obținem $-32\leq 2x^3-3x^4\leq\dfrac{1}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$	**3p**
2.a)	$\int\limits_2^3\left(f(x)-3e^x\right)dx=\int\limits_2^3 2x\,dx=x^2\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=9-4=5$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 x\left(f(x)-2x\right)dx=\int\limits_0^1 3xe^x dx=3xe^x\Big\vert_0^1-3e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=3e-0-3e+3=3$	**2p**
c)	$\int\limits_0^1\dfrac{f'(x)-x}{2f(x)-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{\left(2f(x)-x^2\right)'}{2f(x)-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left\vert 2f(x)-x^2\right\vert\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)=a\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(1,5-0,5)\cdot 3-2\cdot 0,5=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x-1)=\log_4 5$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $5n\le 22$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(6,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=4$ și $BC=5$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 6.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2-x & x\\ x & 2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=5$.

5p **b)** Arătați că $2A-B(2)=2B(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\big(B(x)\cdot B(1)-(x+1)A\big)=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-6xy$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=-4$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele întregi m pentru care $m\circ(3-m)<3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^4+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6x^2(1-2x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x^4}{x^3+4}=2$.

5p **c)** Demonstrați că $-32\le 2x^3-3x^4\le\dfrac{1}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3\left(f(x)-3e^x\right)dx=5$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x\left(f(x)-2x\right)dx=3$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_0^1\dfrac{f'(x)-x}{2f(x)-x^2}\,dx=a\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$.