5

partea I

Scanează codul QR din interior pentru a activa conținutul aplicației MATE 2000+

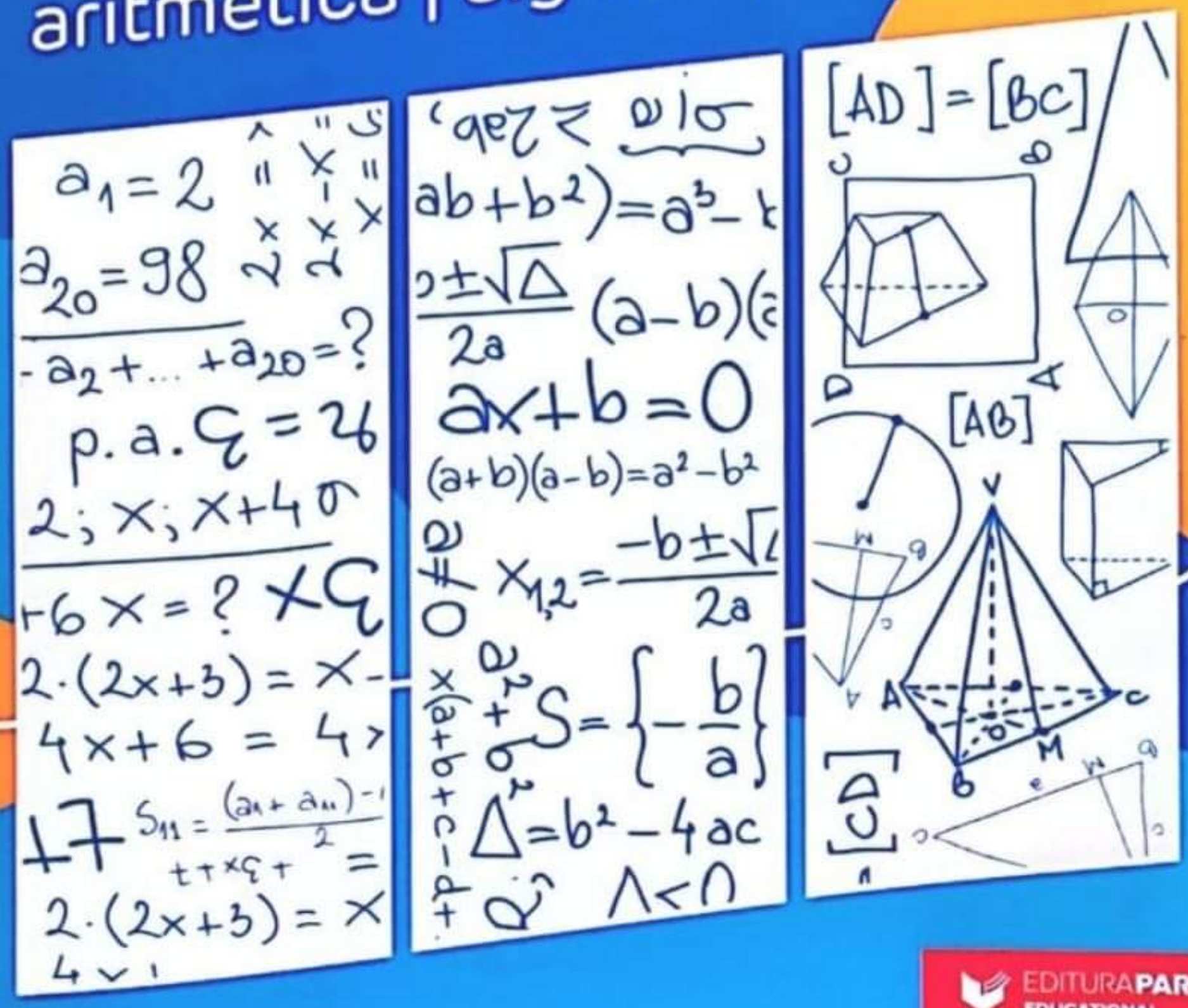
MATE 2000+ Consolidare

AVIZAT ME

Maria Zaharia, Dan Zaharia, Sorin Peligrad

MATEMATICĂ

aritmetică | algebră | geometrie



EDITURA PARALELA 45 EDUCAȚIONAL

MATE 2000+
Consolidare

Nume: .....

Prenume: .....

Clasă: .....

Școală: .....

.....

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA
Sorin PELIGRAD

matematică

aritmetică
algebră
geometrie

clasa a V-a

partea I

ediția a XI-a

mate 2000 – consolidare

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

* **Iniţiere (înţelegere)**

** **Consolidare (aplicare şi exersare)**

*** **Excelenţă (aprofundare şi performanţă)**

**** **Supermate**

Legendă

PE = **portofoliul elevului**

PP = **portofoliul profesorului**

PE-PP = **portofoliul elevului - portofoliul profesorului**

Recapitulare şi evaluare iniţială

PP Competenţe generale şi specifice vizate (conform programei clasei a IV-a)

2. Utilizarea numerelor în calcule

2.1. Recunoaşterea numerelor naturale în concentrul 0 - 1 000 000 şi a fracţiilor cu numitori mai mici sau egali cu 10, respectiv egali cu 100

2.2. Compararea numerelor naturale în concentrul 0 - 1 000 000, respectiv a fracţiilor care au acelaşi numărător sau acelaşi numitor, mai mic sau egal cu 10 sau numitor egal cu 100

2.3. Ordonarea numerelor naturale în concentrul 0 - 1 000 000 şi respectiv a fracţiilor care au acelaşi numărător sau acelaşi numitor, mai mic sau egal cu 10 sau numitor egal cu 100

2.4. Efectuarea de adunări şi scăderi de numere naturale în concentrul 0 - 1 000 000 sau cu numere fracţionare

2.5. Efectuarea de înmulţiri de numere în concentrul 0 - 1 000 000 când factorii au cel mult trei cifre şi de împărţiri la numere de o cifră sau două cifre

3. Explorarea caracteristicilor geometrice ale unor obiecte localizate în mediul apropiat

3.1. Explorarea caracteristicilor, relaţiilor şi a proprietăţilor figurilor şi corpurilor geometrice identificate în diferite contexte

4. Utilizarea unor etaloane convenţionale pentru măsurări şi estimări

4.1. Utilizarea unor instrumente şi unităţi de măsură standardizate, în situaţii concrete, inclusiv pentru validarea unor transformări

4.2. Operarea cu unităţi de măsură standardizate, folosind transformări

5. Rezolvarea de probleme în situaţii familiare

5.1. Utilizarea terminologiei specifice şi a unor simboluri matematice în rezolvarea şi/sau compunerea de probleme cu raţionamente diverse

5.3. Rezolvarea de probleme cu operaţiile aritmetice studiate, în concentrul 0 - 1 000 000

PP 1. Exerciţii şi probleme recapitulative

1. Scrieţi cu cifre numerele:

a) patru sute paisprezece mii nouăzeci; optzeci şi opt de mii şase; două sute de mii două sute cinci; şapte sute trei mii douăzeci şi trei;

b) care au: 64 de sute şi 5 unităţi; 900 de zeci şi 7 unităţi; 500 de mii şi 32 de unităţi; 8 unităţi şi 51 de zeci de mii.

2. a) Care este cifra unităţilor şi câte unităţi are numărul 20 347?

b) Care este cifra zecilor şi câte zeci are numărul 20 347?

c) Care este cifra sutelor şi câte sute are numărul 20 347?

d) Care este cifra miilor şi câte mii are numărul 20 347?

e) Care este cifra zecilor de mii şi câte zeci de mii are numărul 20 347?

3. Comparaţi perechile de numere şi completaţi cu semnul corespunzător: mai mic, egal sau mai mare:

a) 3 477 ☐ 4 477;
b) 524 398 ☐ 52 439;
c) 57 105 ☐ 57 115;
d) 23 045 ☐ 2 345;
e) 753 824 ☐ 753 829;
f) 13 131 ☐ 13 131.

4. Scrieţi succesorul şi predecesorul celui mai mare număr natural de două cifre distincte.

5. Scrieţi cel mai mic număr natural de trei cifre:

a) distincte;
b) identice;
c) consecutive;
d) a căror sumă să fie 7.

6. Scrieţi cel mai mare şi cel mai mic număr de trei cifre distincte care se poate forma cu cifrele 4, 7 şi 1.

7. Scrieţi în ordine crescătoare toate numerele de două cifre distincte care se pot forma cu cifrele: 2, 5 şi 0.

8. Scrieţi în ordine descrescătoare toate numerele de două cifre care se pot forma cu cifrele: 2, 5 şi 7.

9. Se dau numerele: 245 196; 69 329; 137 252.

a) Aproximaţi prin lipsă fiecare număr la: zeci; sute; mii.
b) Aproximaţi prin adaos fiecare număr la: zeci; sute; mii.
c) Rotunjiţi fiecare număr la ordinul: zecilor; sutelor; miilor.

10. Calculaţi diferenţa dintre cel mai mare număr de trei cifre distincte şi cel mai mic număr impar de trei cifre identice.

11. Suma a două numere pare consecutive este 206. Aflaţi numerele.

12. Suma a trei numere naturale consecutive este 219. Aflaţi numerele.

13. Calculaţi:

a) 300 403 – (189 734 + 53 696);
b) (12 863 + 15 348) – 26 375;
c) 20 523 – (17 408 – 10 639);
d) (21 375 – 10 143) – 507.

14. Calculaţi produsul perechilor de numere: 274 şi 6; 349 şi 25; 539 şi 46.

15. Calculaţi câtul şi restul împărţirii lui 948 la 7, a lui 897 la 5 şi a lui 562 la 6; verificaţi rezultatul efectuând proba.

16. Calculaţi folosind proprietăţile înmulţirii:

$$8 \times (30 + 20); \quad 24 \times 32 + 24 \times 18 - 24 \times 10.$$

17. Calculaţi respectând ordinea efectuării operaţiilor:

$$1\,028 - 28 \times 15; \quad 800 - (112 : 4 + 9 \times 4) : 8 + 70 \times 45;$$
$$[(147 : 7 - 5) + 3 \times 4] : 4 - 2\,012 \times 0.$$

18. Determinaţi termenul necunoscut:

a) $1\,932 + x = 2\,301$;
b) $x - 748 - 3\,654 = 97$;
c) $957 + 3\,185 - x = 1\,634$;
d) $837 - 253 - x = 194$.

19. Calculaţi a din:

a) $235\,402 + a = 236\,702$;
b) $53\,201 - a = 23\,141$;
c) $a + 17\,123 = 25\,432$;
d) $a - 25\,754 = 14\,123$;
e) $48\,045 : a = 3203$;
f) $a : 24\,573 = 137$;
g) $73\,121 \cdot a = 1\,754\,904$;
h) $a \cdot 4312 = 90\,552$.

20. În numărul de forma $\overline{7abc}$, cifrele sunt distincte și oricare dintre literele a, b sau c reprezintă una dintre cifrele 2, 3 sau 5.

a) Scrieți toate numerele de forma $\overline{7abc}$. Câte numere sunt?

b) Ordonați crescător numerele respective.

21. Primul termen al unei sume este 1 278, iar al doilea termen este cu 379 mai mic decât primul. Calculați suma.

22. Descăzutul este 6 056, iar scăzătorul este suma numerelor 1 478 și 600. Găsiți diferența.

23. Știind că $(a : 5 + 210) : 100 = 6$, aflați numărul a.

24. Alexandra și Costin au împreună 170 de lei. Alexandra are cu 30 de lei mai mult decât Costin. Câți lei are fiecare?

25. O carte, un caiet și un stilou costă 90 de lei. Cartea este mai scumpă decât caietul cu 30 de lei și mai ieftină decât stiloul cu 12 lei. Cât costă fiecare obiect?

26. La o librărie s-au încasat într-o zi 1 974 de lei pentru caiete și cărți. Pentru caiete s-a încasat mai mult cu 94 de lei. Cât s-a încasat pe cărți? Dar pe caiete?

27. Scrieți cel mai mic număr de trei cifre care împărțit la 9 dă restul 7.

28. Scrieți cel mai mare număr de trei cifre care împărțit la 99 dă restul 77.

29. Suma a două numere este 500. Dacă micșorăm primul număr cu 30, iar pe al doilea îl mărim cu 50, calculați noua sumă.

30. Scrieți toate numerele ce se pot forma cu cifrele romane: L, I, V, folosite o singură dată.

31. Scrieți cu cifre romane numerele:

a) 49, 65, 84; b) 357, 568, 976; c) 1 300, 2 002, 3 025.

32. Costin a cumpărat o bicicletă care a valorat 350 de lei. Ce bancnote i-a dat el casierului de la casa de marcat, dacă a primit ca rest: 4 bancnote de câte 10 lei și două de câte 5 lei?

33. Triplul numărului 746 este egal cu dublul unui alt număr. Calculați acest număr.

34. Se știe că 14 caiete costă 42 de lei. Cât costă 5 caiete de același fel?

35. 4 albume costă 16 lei. Cu valoarea a trei albume se pot cumpăra 2 stilouri. Calculați cât costă 5 stilouri de același model.

36. Suma a două numere este 24 375. Diferența lor este 375. Calculați numerele.

37. În clasa a V-a sunt 24 de elevi. Numărul fetelor este de trei ori mai mare decât numărul băieților. Câte fete și câți băieți sunt în clasă?

38. Pentru a măsura lungimea unui gard am folosit de trei ori ruleta de 1 dam și de 6 ori metrul.

a) Calculați lungimea gardului.

b) Câți metri, fără poartă, are gardul dacă spațiul porții ocupă 200 cm?

39. Un număr de două cifre are suma cifrelor 12. Cifra zecilor este dublul cifrei unităților. Determinați numărul.

40. Semisuma a două numere este 21. Calculați numerele știind că unul este de cinci ori mai mic decât celălalt.

41. a) La ce număr am adunat 25 dacă un sfert din rezultat este 25?

b) Dacă la triplul unui număr adaug 7, obțin 49. Care este numărul?

42. Suma a trei numere este 72 454. Primul număr este de trei ori mai mic decât al doilea și de patru ori mai mare decât al treilea. Calculați numerele.

43. O echipă de 5 muncitori sapă un șanț în 10 zile. În câte zile poate executa aceeași lucrare o echipă formată din 10 muncitori, dacă norma zilnică este aceeași?

44. Mihaela și Mihai au economisit împreună 32 de lei. Numărându-i, Mihai constată că, dacă îi dă Mihaelei 1 leu, au aceeași sumă. Ce sumă are fiecare?

45. Într-o livadă sunt 170 de meri, pruni și piersici; numărul prunilor este cu 20 mai mic decât al merilor, iar al piersicilor cu 30 mai mare decât al prunilor. Câți pomi de fiecare fel sunt?

46. La florăria din piață s-au adus de trei ori mai multe garoafe roșii decât albe. Câte garoafe de fiecare fel s-au adus dacă în total au venit 1 000 de fire?

47. Diferența dintre vârsta tatălui și vârsta fiului este de 25 de ani. Calculați vârsta fiecăruia, știind că vârsta tatălui este de 6 ori mai mare decât vârsta fiului.

48. Într-o fructieră erau portocale. Mihaela și Mihai au mâncat din acele portocale, lăsând în fructieră o treime din numărul lor. Mama a mai pus 5 portocale și astfel acum sunt 7 portocale în fructieră. Câte portocale erau la început în fructieră?

49. La un cros au participat de trei ori mai mulți elevi din ciclul gimnazial decât din ciclul primar. Se știe că numărul elevilor din ciclul primar a fost cu 240 mai mic decât cel al elevilor din ciclul gimnazial. Câți elevi din fiecare ciclu au participat la acest cros?

50. În două baxuri sunt 40 de pachete cu biscuiți. Dacă dintr-un bax se iau 4 pachete și se mută în celălalt, atunci în ambele baxuri va fi același număr de pachete. Câte pachete cu biscuiți au fost la început în fiecare bax?

51. Pe trei rafturi ale unei biblioteci sunt 105 volume. Pe primele două rafturi sunt 78 de volume, iar pe ultimele două rafturi sunt 68 de volume. Calculați câte volume sunt pe fiecare raft.

52. Pentru o seară festivă s-au cumpărat portocale și mere, în total 244 de fructe. După ce s-au așezat pe mese 40 de mere și 24 de portocale, au rămas de două ori mai multe mere decât portocale. Câte mere și câte portocale s-au cumpărat?

53. Trei copii au împreună 188 de timbre. Al treilea are cu 7 timbre mai mult decât primul, iar al doilea are de trei ori mai multe decât primul și al treilea la un loc. Câte timbre are fiecare copil?

54. Calculați diferența dintre deîmpărțit și împărțitor, știind că împărțitorul este 27, câtul reprezintă $\frac{2}{3}$ din împărțitor, iar restul este cel mai mare număr de o cifră.

55. Mihaela citește o carte ce are 150 de pagini. Luni a citit 10 pagini, iar în zilele următoare cu câte 5 pagini mai mult decât în ziua precedentă. Câte pagini va mai avea de citit Mihaela duminică?

56. Transformați:

a) 780 s = ? min.;
b) 1 jumătate de oră = ? min.;
c) 240 min. = ? s;
d) 1 sfert de oră = ? min.;
e) 7 h = ? min.;
f) 20 min. = ? s;
g) 48 h = ? zile;
h) 3 sferturi de oră = ? min.

57. O autocisternă are capacitatea de 250 hl. Pentru aprovizionarea cu benzină a unei stații, autocisterna trebuie să facă 3 drumuri. Aflați câți kilolitri de benzină sunt necesari pentru aprovizionarea a 5 stații cu aceeași capacitate.

58. Suma a trei numere este 43 257. Calculați numerele, știind că al doilea este de 2 ori mai mare decât primul și cu 257 mai mic decât al treilea.

59. Calculați și efectuați transformările:

a) 27 g + 34 g = ? dg;
b) 680 g – 12 dag = ? g;
c) 50 mg + 300 mg = ? cg;
d) 68 hg – 100 dag = ? dag;
e) 4 200 kg + 500 kg = ? q;
f) 47 kg – 210 dag = ? hg;
g) 420 q + 30 q = ? t;
h) 300 cg – 12 dg = ? dg.

60. Știind că $a = 10$ și $b = 7$, calculați:

a) $(2 \cdot a + 3 \cdot b) \cdot (a - b)$; b) $(3 \cdot a - b) \cdot (2 \cdot a + b)$; c) $(a + b) \cdot (2 \cdot a + 5 - 3 \cdot b)$.

61. Numărul notelor de 9 primite la evaluarea din semestrul al doilea reprezintă $\frac{1}{5}$ din numărul notelor de 7 primite la aceeași lucrare. Știind că numărul elevilor care au primit nota 7 este cu 8 mai mare decât numărul elevilor care au primit nota 9, calculați câți elevi au primit nota 9 și câți elevi au primit nota 7.

62. Fie $a = 127 - 3 \cdot 12$, $b = 134 + 2 \cdot 17 + 432 : 4 : 3$ și $c = 17 \cdot 12 - 576 : 6 : 4 - 12$. Calculați:

a) $11 \cdot a - 3 \cdot (b - c)$; b) $3 \cdot a + 2 \cdot b - c$; c) $4 \cdot (a + b) - 5c$.

63. Fie numerele: $a = 40 + 60 : 2 - 20$, $b = (17 + 17 \cdot 4) : 17$ și $c = (37 \cdot 3 - 37) : 74$. Calculați $5 \cdot a + 4 \cdot b - 3 \cdot c + 33$.

64. Scrieți în ordine crescătoare numerele:

$A = 7360 - [(5 + 206 \cdot 8) - 709]$; $B = 6 + 8 \cdot [14 \cdot 6 + 3 \cdot (7 \cdot 9 - 4 \cdot 5)]$;
$C = 2 + 10 \cdot [632 + 10 \cdot (14 + 14 : 7)]$;
$D = 40 + 3 \cdot \{32 : 8 + 3 \cdot [50 + 3 \cdot (200 : 4 - 98 : 2)]\}$.

65. Știind că $a + b = 14$ și $b + c = 9$, calculați:

a) $2 \cdot a + 5 \cdot b + 3 \cdot c$; b) $3 \cdot a + 5 \cdot b + 2 \cdot c$; c) $a + 8 \cdot b + 7 \cdot c$.

66. Aflați x din:

a) $(12 + x) + 14 = 4 \cdot x - 4$; b) $(3 \cdot x + 2) : 4 - 2 = 3$;
c) $[(x + 3) \cdot 3 + 3] \cdot 3 + 3 = 102$; d) $5 \cdot x : 2 = 2525$.

67. Alexandra, Andreea și Adi au împreună 100 de lei. Alexandra și Andreea au împreună 55 de lei, iar Adi și Andreea au împreună 75 de lei. Câți lei rămân fiecăruia dacă la restaurant Alexandra a cumpărat o salată de pui și un suc de mere, Adi o salată de ton și un suc de pere, Andreea o salată de fructe și un suc de pere, iar în lista de prețuri figura: salată de ton 4 lei, salată de pui 3 lei, suc de pere 1 leu, suc de mere 2 lei, salată de fructe 3 lei?

68. Alexandra citește o carte. Luni citește $\frac{1}{4}$ din carte, marți citește $\frac{1}{4}$ din ce i-a mai rămas și așa mai departe, până vineri când schimbă regula, citind câte o treime din ce îi mai rămâne din ziua precedentă. Duminică, după ce a citit $\frac{1}{3}$ din cât mai avea, constată că mai are de citit 24 de pagini. Câte pagini are cartea Alexandrei?

69. Mihaela și Andreea rezolvă probleme din *Gazeta Matematică*. Numărul problemelor rezolvate de Mihaela reprezintă $\frac{7}{4}$ din numărul problemelor rezolvate de Andreea. Se știe, de asemenea, că Andreea a rezolvat cu 120 de probleme mai puțin decât Mihaela. Câte probleme a rezolvat fiecare?

70. a) În anul 2012, la Constanța s-a desfășurat cea de-a 63-a Olimpiadă Națională de Matematică. Scrieți cu cifre romane numărul 63.

b) Ultimul capitol al unei cărți este capitolul XXVIII. Câte capitole are cartea?

PE-PP 2. Modele de teste pentru evaluarea inițială

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 45 de minute.*
- *Se acordă 1 punct din oficiu.*

TESTUL 1

Partea I. La exercițiile 1 și 2 scrieți numai rezultatul. La exercițiul 3 scrieți (A), dacă propoziția este adevărată, și (F), dacă propoziția este falsă.

(2p) **1.** Calculați:

a) 3 047 + 583; b) 2 005 – 379; c) 232 × 47; d) 2 208 : 8.

(0,5p) **2.** Determinați numărul x, știind că: $6\,305 - x = 1\,476$.

3. Precizați, pentru fiecare propoziție, dacă este adevărată sau falsă:

(0,5p) a) Cel mai mare număr par care are trei cifre distincte este 986.

(0,5p) b) Numărul 2 202 este mai mic decât 2 022.

(0,5p) c) Numărul 2 012 este cu 365 mai mare decât 1 647.

(0,5p) d) Numărul care împărțit la 7 dă câtul 28 și restul 5 este 201.

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,9p) **4.** Calculați: $25 - \{54 : [(24 - 18 : 3) : 2] + 54 : 9 \times 3\}$.

(0,9p) **5.** Dacă într-o livadă s-ar mai planta 57 de meri și 83 de pruni, în livadă ar fi 1 100 de pomi. Calculați câți pomi are livada.

(0,9p) **6.** La un centru de colectare a fructelor de pădure, 258 kg de zmeură s-au ambalat în cutii de două kilograme. Calculați câte cutii au fost folosite.

(0,9p) **7.** Aflați numărul a, știind că este un sfert din 840.

(0,9p) **8.** Suma a două numere este 135. Unul dintre numere este cu 15 mai mare decât celălalt. Aflați cele două numere.

TESTUL 2

Partea I. La exercițiile 1 și 2 scrieți numai rezultatul. La exercițiul 3 scrieți (A), dacă propoziția este adevărată, și (F), dacă propoziția este falsă.

(2p) **1.** Calculați:

a) 4 038 + 637; b) 2 007 – 739; c) 275 × 37; d) 2 961 : 7.

(0,5p) **2.** Determinați numărul x, știind că: $3\,024 + x = 5\,219$.

3. Precizați, pentru fiecare propoziție, dacă este adevărată sau falsă:

(0,5p) a) Cel mai mare număr de trei cifre distincte este un număr impar.

(0,5p) b) Numărul 322 323 este mai mic decât 32 323.

(0,5p) c) Numărul 1 647 este cu 365 mai mic decât 2 012.

(0,5p) d) Numărul care împărțit la 8 dă câtul 28 și restul 4 este 228.

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,9p) **4.** Calculaţi: $25 - \{27 : [(36 - 27 : 3) : 3] + 42 : 7 \times 3\}$.

(0,9p) **5.** Dacă într-o livadă se taie cei 57 de meri şi 83 de pruni uscaţi, în livadă mai rămân 1 100 de pomi. Câţi pomi avea livada?

(0,9p) **6.** La un centru de colectare a fructelor de pădure, 315 kg de afine s-au ambalat în cutii de 3 kg. Câte cutii s-au folosit?

(0,9p) **7.** Aflaţi numărul a, ştiind că este o cincime din 840.

(0,9p) **8.** O echipă de pescari a pescuit într-o zi 125 kg de crap şi ştiucă, cantitatea de crap fiind de 4 ori mai mare decât cantitatea de ştiucă. Câte kilograme de peşte de fiecare fel au fost?

TESTUL 3

1. Completaţi spaţiile libere:

(0,5p) a) Cel mai mare număr natural de trei cifre distincte este … .

(0,5p) b) Suma numerelor 12 537 şi 1 023 este … .

(0,5p) c) Numărul 144 micşorat de 6 ori devine … .

(0,5p) d) Suma numerelor impare mai mici decât 10 este … .

(0,5p) e) Dintre numerele 1 705 şi 1 075 mai mare este … .

(0,5p) f) Câtul numerelor 6 642 şi 9 este … .

(1p) **2.** Calculaţi: $136 \cdot 25 - (324 : 2 : 9 \cdot 3 + 41) + 146 - 123 : 3$.

(2p) **3.** Determinaţi valoarea lui a din:

$$[48 + 50 \cdot 100 : (28 : a + 3 \cdot 2) - 14] \cdot [(50 - 4 \cdot 5) + (143 - 4 \cdot 6)] = 42\,316.$$

(1p) **4.** Care număr natural are suma vecinilor săi 2 952?

(2p) **5.** Mama şi fiica au împreună 32 de ani. Calculaţi vârsta fiecăreia, ştiind că mama are de şapte ori vârsta fiicei.

TESTUL 4

1. Completaţi spaţiile libere:

(0,5p) a) Numărul care împărţit la 7 dă câtul 10 şi restul 3 este … .

(0,5p) b) În scrierea numerelor de la 1 la 60 cifra 5 se foloseşte de … ori.

(0,5p) c) Diferenţa dintre triplul numărului 57 şi dublul acestuia este … .

(0,5p) d) Cel mai mic număr care se poate forma cu cifrele 2, 7 şi 3 este … .

(0,5p) e) Dacă $a + b = 5$ şi $b + c = 7$, atunci $2a + 5b + 3c$ este … .

(0,5p) f) Scrierea cu cifre romane a numărului 27 este … .

(1p) **2.** Aşezaţi în ordine crescătoare următoarele numere scrise cu cifre romane:

VI; XX; XC; CD; LXI.

(1p) **3.** Calculaţi valoarea lui a din:

$$a : 3 + (123 \cdot 3 - 54 \cdot 4) = 357 - 124 : 4.$$

(2p) **4.** Calculaţi: $[624 : 4 + (12\,027 - 1\,227) : 25] \cdot 2 + (504 - 124) : 2$.

(2p) **5.** Suma a două numere este 246. Care sunt cele două numere dacă primul este de cinci ori mai mare decât al doilea?

TESTUL 5

Partea I. La aceste exerciţii scrieţi numai rezultatele.

(2p) **1.** Efectuaţi:

a) 2 408 + 307; b) 20 504 – 5 846; c) 524 · 70; d) 1 032 : 3.

(0,5p) **2.** Aflaţi numărul a dacă $a - 62 = 29$.

(0,5p) **3.** Preţul unui kilogram de mere este de 3 lei. Cât costă 15 kg de mere?

(0,5p) **4.** Aflaţi numărul care împărţit la 4 dă câtul 22 şi restul 3.

(0,5p) **5.** Ce rest veţi primi la o bancnotă de 10 lei dacă veţi cumpăra două pixuri a 3 lei bucata?

(0,5p) **6.** Într-o clasă sunt 29 de elevi dintre care 12 sunt fete. Cu cât sunt mai mulţi băieţi decât fete?

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(1p) **7.** Efectuaţi 35 · (160 – 30 · 5) – 8 – (14 + 72 : 9) + 15 · 4 : 6.

(0,5p) **8.** Care este numărul care reprezintă a cincea parte din 535?

(1p) **9.** În trei saci erau 237 kg de cartofi. După ce din fiecare sac s-a vândut aceeaşi cantitate de cartofi, în primul sac au rămas 26 kg, în al doilea 35 kg şi în al treilea 38 kg. Câte kilograme de cartofi au fost la început în fiecare sac?

(1p) **10.** Aflaţi numerele a, b, c, ştiind că $a + b = c$, $a - b = b$ şi $b + c = 32$.

(1p) **11.** Într-o împărţire, diferenţa dintre deîmpărţit şi rest este 3. Aflaţi deîmpărţitul şi împărţitorul. Câte soluţii există?

TESTUL 6

1. Completaţi spaţiile libere:

(0,25p) a) Cel mai mic număr natural de trei cifre distincte este … .

(0,25p) b) Diferenţa numerelor 1 243 şi 756 este … .

(0,25p) c) Produsul numerelor 137 şi 125 este … .

(0,25p) d) Numărul cu 1 325 mai mare decât 23 este … .

(0,25p) e) Fracţiile subunitare cu numitorul 5 sunt … .

(0,25p) f) Aproximarea prin lipsă la ordinul sutelor a numărului 27 537 este … .

2. Rezolvaţi în două moduri:

(0,5p) a) 7 · (123 234 + 2 372);

(0,5p) b) 21 · 47 + 1 532 · 21 – 21 · 12.

(2p) **3.** Diferenţa a două numere este 96. Raportul lor este 5. Calculaţi numerele.

(1p) **4.** Determină valoarea lui a din:

$$(324 : 6 + 345 : 5) \cdot 2 + 1\,237 = 43 \cdot a + 1\,354.$$

(2p) **5.** Un dreptunghi are perimetrul de 50 m, iar lungimea este cu 5 m mai mare decât lăţimea. Calculaţi aria dreptunghiului.

(1,5p) **6.** Mihaela are $\frac{7}{10}$ din suma pe care o are Mihai. Ce sumă are fiecare dacă Mihaela are cu 30 de lei mai puţin decât Mihai?

TESTUL 7

1. Realizaţi transformările:

(0,25p) a) 17 t şi 4 q = … kg;

(0,25p) b) 10 hl şi 4 ℓ = … dl;

(0,25p) c) 450 cm şi 100 mm = … dm;

(0,25p) d) 7 ha şi 4 ari = … m^2;

(0,25p) e) 2 m şi 7 dm = … cm;

(0,25p) f) 1 h şi 40 min = … s.

(1p) **2.** Scrieţi cu cifre romane numerele: 12; 43; 27; 51.

(1,5p) **3.** Determinaţi valoarea lui *a* din:

$$546 + 127 - 96 : 3 + 73 \cdot 2 - (62 : a + 24 : 2) - 5 \cdot 11 = 689.$$

(1p) **4.** Calculaţi: $64 \cdot 11 - 12 + (33 : 3 + 72 : 6) + 144 : 4$.

(2p) **5.** Mihaela, Alexandra şi Costin au strâns împreună o sumă de bani. Mihaela şi Alexandra au împreună suma de 324 de lei, Alexandra şi Costin au împreună suma de 362 de lei, iar Mihaela şi Costin au împreună suma de 312 lei. Ce sumă a pus fiecare?

(2p) **6.** O carte coştă cu 150 de lei mai puţin decât patru cărţi de acelaşi fel. Calculaţi preţul unei cărţi.

Capitolul I
Numere naturale

Introducere

PP Competenţe specifice
Exemple de activităţi de învăţare

1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate

- Scrierea şi citirea numerelor naturale în sistemul de numeraţie zecimal
- Identificarea unor numere naturale într-o diagramă, într-un grafic sau într-un tabel care conţin date referitoare la o situaţie practică
- Identificarea unui număr natural pe baza unor condiţii impuse cifrelor sale
- Identificarea unei metode aritmetice adecvate pentru rezolvarea unei probleme date

2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale folosind operaţiile aritmetice şi proprietăţile acestora

- Efectuarea operaţiilor aritmetice cu numere naturale
- Efectuarea de calcule utilizând factorul comun
- Efectuarea operaţiilor cu puteri utilizând regulile de calcul specifice
- Reprezentarea datelor dintr-o problemă, în vederea aplicării unei metode aritmetice adecvate

3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operaţiilor cu numere naturale şi pentru divizibilitate

- Utilizarea algoritmului împărţirii, cu restul egal sau diferit de zero, în cazul în care deîmpărţitul şi împărţitorul au una sau mai multe cifre
- Aproximarea/estimarea rezultatelor obţinute prin utilizarea algoritmului împărţirii
- Calcularea unor expresii numerice care conţin paranteze (rotunde, pătrate şi acolade), cu respectarea ordinii efectuării operaţiilor
- Aplicarea metodelor aritmetice pentru rezolvarea unor probleme cu numere naturale
- Determinarea unui număr natural pe baza unor condiţii impuse cifrelor sale (de exemplu, determinaţi numerele de forma $\overline{a2b5}$, ştiind că produsul cifrelor sale este 120)

4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăţi referitoare la comparări, aproximări, estimări şi ale operaţiilor cu numere naturale

- Reprezentarea pe axa numerelor a unui număr natural, utilizând compararea şi ordonarea numerelor naturale
- Justificarea estimărilor rezultatelor unor calcule cu numere naturale
- Justificarea scrierii unui număr natural dat sub formă de putere cu baza sau exponentul indicat
- Exprimarea unor numere naturale de două cifre ca produs de numere prime

5.1. Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

- Evidențierea avantajelor folosirii proprietăților operațiilor cu numere naturale în diferite contexte
- Analizarea faptului că un număr este sau nu pătratul unui număr natural (utilizând ultima cifră, încadrarea între pătratele a două numere naturale consecutive)
- Determinarea unor numere naturale care respectă anumite condiții (de exemplu, determinați numerele prime a și b, știind că $3a + 2b = 16$)
- Compararea a două numere naturale scrise sub formă de puteri folosind aducerea la aceeași bază sau la același exponent
- Aplicarea criteriilor de divizibilitate a numerelor naturale pentru situații cotidiene
- Estimarea ordinului de mărime a numerelor de forma $2n$, pornind de la probleme practice (de exemplu, foi de hârtie îndoite consecutiv, povestea tablei de șah)
- Realizarea unor estimări utilizând procente (de exemplu, cunoscând numărul elevilor de gimnaziu dintr-un oraș și faptul că aproximativ 2% dintre aceștia studiază un instrument muzical, estimați numărul de elevi de gimnaziu care studiază un instrument muzical)
- Stabilirea valorii de adevăr a unui enunț matematic cu numere naturale, folosind metode aritmetice

PE-PP 1. Scrierea și citirea numerelor naturale

Numerele se scriu cu ajutorul unor simboluri (semne grafice).

Exemplu: Pentru numărul 10 egiptenii au folosit simbolul „∩", babilonienii au folosit simbolul „<", iar romanii au folosit simbolul „X".

După felul de ordonare și de grupare a simbolurilor folosite, se poate vorbi de două **moduri de scriere a numerelor:**

- scrierea **nepozițională** (de exemplu, scrierea cu simboluri romane);
- scrierea **pozițională** (de exemplu, scrierea cu simboluri arabe).

Scrierea numerelor folosită în clasele I-IV este o scriere pozițională, care folosește **zece simboluri**, numite **cifre arabe**. Acestea sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

În scrierea unui număr, cifrele se pot repeta sau nu. Acest mod de scriere a unui număr natural se numește **scriere în baza zece** sau **scriere în sistemul zecimal**, pentru că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat mai mare (superior).

În acest sistem de numerație, 10 **unități** formează o grupă numită **zece**; 10 grupe de 10 formează o nouă grupă numită **sută**; 10 grupe de o sută formează o nouă grupă numită **mie** etc.

Scrierea în baza 10 este o **scriere pozițională**: fiecare cifră are o anumită **valoare** după locul (poziția) unde este scrisă.

Exemplu: În scrierea numărului 123 437 653, cifra 3 apare de trei ori și, de la dreapta la stânga, ea are următoarele valori: **3 unități, 3 zeci de mii** și **3 milioane**.

Observaţie: Numeraţia în baza 10 se pare că a fost inventată de indieni şi preluată de europeni datorită arabilor. Originea numeraţiei în baza 10 este foarte probabil să fie cele 10 degete de la cele două mâini ale omului.

Un număr natural oarecare de două cifre se reprezintă prin scrierea $\overline{ab}$, unde a şi b desemnează cifre (nu neapărat diferite) şi $a \neq 0$. Adică:

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b.$$

Exemple: $17 = 1 \cdot 10 + 7$; $53 = 5 \cdot 10 + 3$; $77 = 7 \cdot 10 + 7$.

Un număr natural oarecare de trei cifre se reprezintă prin scrierea $\overline{abc}$, unde a, b şi c desemnează cifre (nu neapărat diferite) şi $a \neq 0$ şi aşa mai departe.

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c.$$

Exemple: $357 = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$; $629 = 6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 9$; $888 = 8 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 8$.

Numerele naturale scrise în ordinea: 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, ... formează şirul numerelor naturale.

Dacă n este un număr natural oarecare, atunci $n - 1$ este **predecesorul** său, $n + 1$ este **succesorul** său, iar numerele $n - 1$ şi n, respectiv n şi $n + 1$ se numesc **numere consecutive**.

Pentru a citi un număr natural, scris în baza 10, se grupează cifrele câte trei, de la dreapta la stânga. Aceste grupe sunt numite **clase**. Fiecare clasă se compune din **unităţi, zeci şi sute.** La citirea numerelor în baza 10 se poate folosi schema:

sute	zeci	unităţi	sute	zeci	unităţi	sute	zeci	unităţi	sute	zeci	unităţi
clasa miliardelor			**clasa milioanelor**			**clasa miilor**			**clasa unităţilor**		

Exemplu:

Citiţi numerele: a) 2 043 571; b) 4 001 307 156; c) 157 000 429 000.

Rezolvare: Se grupează cifrele numărului, de la dreapta la stânga, conform schemei de mai sus şi se citeşte:

a) două milioane patruzeci şi trei de mii cinci sute şaptezeci şi unu;

b) patru miliarde un milion trei sute şapte mii o sută cincizeci şi şase;

c) o sută cincizeci şi şapte de miliarde patru sute douăzeci şi nouă de mii.

Observaţii: Romanii foloseau pentru scrierea numerelor naturale următoarele simboluri: I, V, X, L, C, D, M, numite **cifre romane.**

Valorile cifrelor romane sunt: I are valoarea cifrei 1, V are valoarea cifrei 5, X are valoarea numărului 10, L are valoarea numărului 50, C are valoarea numărului 100, D are valoarea numărului 500 şi M are valoarea numărului 1 000.

Sistemul de scriere folosit de romani nu era nici zecimal, nici poziţional.

La citirea şi scrierea numerelor cu ajutorul cifrelor romane trebuie să ţinem cont de următoarele reguli:

1. O cifră cu o valoare **mai mică sau egală** scrisă la dreapta uneia cu o valoare mai mare indică o sumă.

Exemple: XII = 10 + 1 + 1 = 12;
XXV = 10 + 10 + 5 = 25;
MDL = 1 000 + 500 + 50 = 1 550.

2. O cifră cu o valoare **mai mică** scrisă la stânga uneia cu o valoare mai mare indică o diferenţă.

Exemple: IX = 10 – 1 = 9; XL = 50 – 10 = 40; XC = 100 – 10 = 90;
CD = 500 – 100 = 400; CM = 1 000 – 100 = 900.

3. Cifrele I, X, C, M pot fi scrise consecutiv de cel mult trei ori.

4. Nu se pot repeta consecutiv cifrele V, L, D şi nu se pot scădea.

5. Orice cifră (sau grup de cifre) care are o linie deasupra este multiplicată de 1 000 de ori.

Exemple: $\overline{X}$ reprezintă 10 000; $\overline{L}$ reprezintă 50 000; $\overline{XC}$ reprezintă 90 000.

6. Pentru a scrie numere cu cifre romane se poate face divizarea numărului în mii, sute, zeci şi unităţi.

Exemple: 24 = 20 + 4 şi 20 = XX, 4 = IV, iar numărul se scrie 24 = XXIV;
342 = 300 + 40 + 2 şi 300 = CCC, 40 = XL, 2 = II, iar numărul se scrie 342 = CCCXLII;
1 957 = 1 000 + 900 + 50 + 7 şi avem 1 000 = M, 900 = CM, 50 = L, 7 = = VII, iar numărul se scrie 1 957 = MCMLVII.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Scrieţi în baza 10, cu cifre arabe, numerele:
a) două sute trei; b) şapte sute patruzeci;
c) nouă mii nouă; d) cincizeci şi şapte de mii patru sute;
e) trei miliarde patru sute; f) douăzeci şi două de miliarde treizeci.

2. Citiţi următoarele numere naturale:
a) 301; 15 070; 301 007; 2 000 510; 370 501 407;
b) 149 803; 40 731; 450 031 024; 204 030.

3. Scrieţi cu ajutorul cifrelor următoarele numere:
a) o mie opt; b) unsprezece mii şaptezeci şi opt;
c) două sute trei mii şase sute unu; d) un milion şaizeci şi două de mii trei sute cinci.

4. a) Care este cel mai mic număr natural de trei cifre care are cifra zecilor 7?
b) Care este cel mai mare număr natural de patru cifre distincte care are cifra sutelor 6?
c) Care este cel mai mic număr natural de patru cifre care are cifra sutelor 6?

5. Scrieţi toate numerele naturale:
a) mai mici decât 8;
b) mai mici sau cel mult egale cu 12;
c) mai mari decât 5 şi mai mici decât 15;
d) mai mari sau cel puţin egale cu 3 şi mai mici sau cel mult egale cu 17.

6. Scrieţi următoarele numere descompuse în baza 10:
a) 127; b) 2 137; c) 53; d) 27 385;
e) 705; f) 230; g) 20 035; h) 705 102.

7. Fie a, b, c, d cifre în sistemul zecimal. Scrieţi următoarele numere descompuse în baza 10:

a) $\overline{abc}$; b) $\overline{ab}$; c) $\overline{abcd}$; d) $\overline{aab}$;

e) $\overline{aaaa}$; f) $\overline{a0b}$; g) $\overline{ab0cd}$; h) $\overline{aab0c0}$.

8. Scrieţi poziţional, în baza 10, următoarele sume:

a) $3 \cdot 10 + 7 \cdot 1$; b) $5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$;

c) $5 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 1$; d) $4 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10$.

9. Fără a efectua calculele, scrieţi următoarele numere ca numere naturale în sistemul zecimal:

a) $2 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 1$;

b) $3 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3$;

c) $3 \cdot 10\,000\,000 + 5 \cdot 100\,000 + 3 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 10 + 7$.

10. Se ştie că a, b, c, d sunt cifre în sistemul zecimal. Scrieţi următoarele numere ca numere în sistemul zecimal:

a) $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$; b) $a \cdot 1\,000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$;

c) $100a + 10a + a$; d) $1\,000a + 10b + c$;

e) $10\,000a + 1\,000b + 100a + 10b + c$; f) $1\,000a + 100b$;

g) $1\,000a + 10b + c$.

11. Scrieţi cu ajutorul literelor un număr natural:

a) de patru cifre astfel încât primele două cifre sunt identice;

b) de patru cifre cu cifra sutelor 7 şi cifra zecilor 2.

12. Scrieţi cu cifre romane numerele: 37, 42, 735, 1 992, 2 001, 3 757.

13. Scrieţi cu cifre arabe numerele: CIV; CDLXXV; CMXXXVIII; MCMXCVIII.

14. Citiţi numerele: XXVII, XLVI, XIV, XXII, LX, MCM, CIX, DCXX, MCMIV, XLVIII, $\overline{X}$, $\overline{XC}$, $\overline{L}$, $\overline{XL}$, $\overline{XCV}$.

15. Scrieţi cu cifre romane următoarele numere scrise cu cifre arabe:

a) 37; b) 145; c) 2 769; d) 957; e) 2 000.

16. Scrieţi cu cifre arabe următoarele numere scrise cu cifre romane:

a) XIV; b) XXVII; c) MDCCLXXXVI; d) MCMLX.

PE Aplicare şi exersare **

17. Scrieţi toate numerele de trei cifre distincte ce se pot forma utilizând cifrele:

a) 1, 7, 4; b) 5, 0, 9.

18. Aflaţi cel mai mic număr natural în fiecare dintre situaţiile:

a) este de forma $\overline{abc}$; b) este de forma $\overline{abc}$ şi $a \neq b \neq c \neq a$;

c) este de forma $\overline{aab}$; d) este de forma $\overline{aa1bc}$ şi $a \neq b \neq c \neq a$.

19. Aflaţi cel mai mare număr natural în fiecare dintre situaţiile:

a) este de forma $\overline{aa}$; b) este de forma $\overline{abc}$;

c) este de forma $\overline{abc}$ şi $a \neq b \neq c \neq a$; d) este de forma $\overline{a9bb}$ şi $a \neq b$.

20. Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare număr natural de forma $\overline{a1bb}$ cu $a \neq b \neq 1$.

21. Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{xy56}$ pentru care $x + y = 5, x \neq y$.

22. Scrieţi toate numerele naturale de forma $\overline{xyzt}$ în care x, y, z, t sunt:

a) numere consecutive cu $x < y < z < t$;

b) numere consecutive cu $x > y > z > t$.

23. Determinaţi numărul natural de forma $\overline{ab}$ scris în baza 10 pentru care $\overline{ab} = 5a + 3b$.

24. Fie $\overline{abc}$ un număr natural de trei cifre, unde a, b, c sunt cifre impare consecutive.

a) Scrieţi cel mai mic număr de această formă.

b) Scrieţi cel mai mare număr de această formă.

25. Scrieţi toate numerele naturale de trei cifre, formate cu cifre consecutive; ordonaţi-le crescător.

26. a) Scrieţi numerele naturale de două cifre distincte ce se pot forma cu cifrele 0, 2 şi 7.

b) Scrieţi numerele naturale de două cifre ce se pot forma cu cifrele 1, 4 şi 9.

27. Determinaţi toate numerele naturale scrise în baza 10, ştiind că:

a) $\overline{ab} = \overline{ba}$; b) $\overline{ab7} = \overline{b7a}$.

28. Determinaţi x, ştiind că:

a) $\overline{2x3} + 154 = 377$; b) $\overline{1x7} \cdot 7 = 1\,029$.

29. Aflaţi cifra a, ştiind că: $\overline{aa} + a = 72$.

30. Aflaţi cifra a din sistemul zecimal care verifică egalitatea $\overline{aaa} + \overline{aa} + a = 369$.

31. Determinaţi numerele naturale consecutive $\overline{ab}$ şi $\overline{ac}$ pentru care $\overline{ab} + \overline{ac} = 113$.

32. Determinaţi numerele naturale scrise în baza zece de forma $\overline{ab}$ pentru care:

$$\overline{ab} = 4 \cdot (a + b).$$

33. Aflaţi numărul $\overline{abcd}$ care verifică egalitatea: $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 3\,102$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

34. Verificaţi dacă următoarele egalităţi sunt adevărate:

a) $\overline{aa} = 11a$; b) $\overline{abab} = 101 \cdot \overline{ab}$; c) $\overline{a00a} = 1\,001 \cdot a$.

35. Aflaţi toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ astfel încât 5 se împarte exact prin numărul $(a + b)$.

36. Aflaţi cifrele a, b, c (în baza 10), ştiind că: $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$.

37. Calculaţi câte numere scrise în baza 10 de forma $\overline{1a7}$ există. Dar de forma $\overline{ab5}$?

38. Mutaţi o singură cifră la locul potrivit pentru a obţine egalitate:

a) VI + IX = XVII; b) X – VI = VI; c) CC + IX = CCXI;

d) CXC + I = CCXI; e) MIX + IX = M; f) XL – XV = XIV + IX.

39. Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{xyz}$ cu x, y, z distincte şi pentru care $x + z = y$, $y \leq 4$.

40. Scrieţi toate numerele naturale de forma $\overline{xyzt}$ pentru care $x + y = z + t = 4$, iar x, y, z, t să fie distincte.

41. Scrieţi toate numerele naturale de forma $\overline{xyzt}$ pentru care $x + y + z = t$, iar x, y, z, t să fie distincte şi nenule, $t < 7$.

42. Scrieţi toate numerele naturale formate din trei cifre identice astfel încât suma cifrelor să fie cuprinsă între 10 şi 25.

43. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{ab57}$ astfel încât $a + b = 11$.

44. Determinați numerele naturale de forma $\overline{24ab}$ astfel încât suma cifrelor să fie 13.

45. Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ cu cifre distincte astfel încât:

$$a + d = b + c = 7.$$

46. Fie șirul de numere naturale 3, 7, 11, … .

a) Completați șirul cu încă 3 termeni.

b) Determinați al 20-lea termen al șirului.

c) Determinați al câtelea termen în șir este 8 051.

47. Calculați câte numere naturale cuprinse între 100 și 190 conțin:

a) cifra 1; b) cifrele 1 și 5; c) două cifre identice.

48. Fie șirul de numere naturale $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, unde $a_n = 3 \cdot n - 1$, n număr natural nenul.

a) Scrieți primii 5 termeni ai șirului.

b) Scrieți termenii de pe locurile 17, 1 017 și 2 017.

c) Verificați dacă numerele 98, 299 și 6 035 sunt termeni ai acestui șir.

PE-PP **Supermate** ****

49. Determinați cifra de pe poziția 2 013 a numărului $1525535554555 5\ldots 2013\underbrace{55\ldots5}_{2013 \text{ cifre}}$.

50. Determinați al 11-lea număr din șirul de numere 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … .

PE-PP

2. Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; estimări, aproximări

Axa numerelor este o dreaptă d pe care se fixează un punct O, numit **origine**, un **sens pozitiv** și un segment OI, numit **unitate de măsură** (figura 1). În acest fel fiecărui număr natural îi corespunde pe axă un punct (figura 2):

- lui 0 îi corespunde punctul O;
- lui 1 îi corespunde punctul I;
- lui n îi corespunde punctul P, care se obține măsurând pe axă, de la punctul O și în sens pozitiv, n unități de măsură. Se spune că punctul P are **coordonata** n. (În figura 2, O are coordonata 0, I are coordonata 1, A are coordonata 2, N are coordonata 5 etc.)

Fig. 1

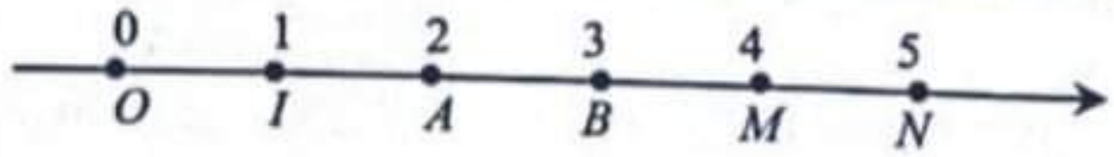


Fig. 2

Observații:

1. Orice număr diferit de 0 se numește **nenul**; dacă a este un număr natural nenul, se scrie $a \neq 0$ și se citește „numărul a este diferit de zero".
2. Urmărind figura 2, se poate observa că oricare **două puncte consecutive de pe axa numerelor se află la aceeași distanță unul de altul.**
3. Pe axă, numerele mai mari sunt așezate la dreapta numerelor mai mici.

Conform observației 3, axa numerelor ne ajută să **comparăm** și să **ordonăm** numerele naturale.

A ordona numerele naturale înseamnă a le așeza în șir crescător sau descrescător.

Exemplu: În șirul numerelor naturale: 0, 1, 2, 3, ..., 19, 20, ..., 53, ..., numărul 20 este situat înaintea numărului 53. Se spune că 20 este mai mic decât 53 și se scrie $20 < 53$ sau că 53 este mai mare decât 20 și se scrie $53 > 20$.

În compararea numerelor naturale se folosesc următoarele semne: $<, =, >, \leq, \geq$.

Pentru oricare două numere naturale a și b, dacă $a < b$ sau $a = b$ se scrie $a \leq b$ și se citește „a este mai mic sau egal cu b"; dacă $a > b$ sau $a = b$ se scrie $a \geq b$ și se citește „a este mai mare sau egal cu b".

Exemple:

a) Numerele naturale mai mici sau egale cu 5 sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

b) Numerele naturale mai mari ca 1 001 și mai mici sau egale cu 1 004 sunt: 1 002, 1 003, 1 004.

c) Numerele naturale de forma $\overline{aaa}$ mai mici decât 500 sunt: 111, 222, 333, 444.

Observații:

1. Dintre două numere naturale care au un număr diferit de cifre, este mai mare numărul care are mai multe cifre (exemplu: $2\,475 > 943$).
2. Dintre două numere naturale care au același număr de cifre, este mai mare numărul care are, pentru același ordin, cifra mai mare, considerat de la stânga la dreapta. (Dacă prima cifră este aceeași, se compară a doua cifră a fiecăruia și așa mai departe, până se ajunge la cifre diferite corespunzătoare aceluiași ordin în fiecare număr; exemplu: $74\,132 < 74\,145$.)

Uneori nu este necesar să se știe exact toate cifrele unui număr, ci numai ordinul său de mărime. Pentru aceasta se înlocuiește numărul cu un alt număr apropiat de el și se spune că s-a folosit **aproximarea** sau **rotunjirea** numărului respectiv. Aproximarea poate fi: **prin lipsă** sau **prin adaos**.

Aproximarea prin lipsă la zeci (sute, mii ș.a.m.d.) este cel mai mare număr natural mai mic sau egal cu numărul respectiv format numai din zeci (sute, mii ș.a.m.d.).

Exemple: 1. Aproximarea prin lipsă până la zeci a numărului 57 873 este 57 870.
2. Aproximarea prin lipsă până la sute a numărului 57 873 este 57 800.
3. Aproximarea prin lipsă până la mii a numărului 57 873 este 57 000.

Aproximarea prin adaos până la zeci (sute, mii ș.a.m.d.) este cel mai mic număr natural mai mare sau egal cu numărul respectiv format numai din zeci (sute, mii ș.a.m.d.).

Exemple: 1. Aproximarea prin adaos până la zeci a numărului 57 873 este 57 880.
2. Aproximarea prin adaos până la sute a numărului 57 873 este 57 900.
3. Aproximarea prin adaos până la mii a numărului 57 873 este 58 000.

Rotunjirea până la zeci (sute, mii ș.a.m.d.) este aproximarea prin lipsă sau prin adaos care este cea mai apropiată de valoarea numărului respectiv.

Exemple: 1. Rotunjirea până la zeci a numărului 57 873 este 57 870.
2. Rotunjirea până la sute a numărului 57 873 este 57 900.
3. Rotunjirea până la mii a numărului 57 873 este 58 000.

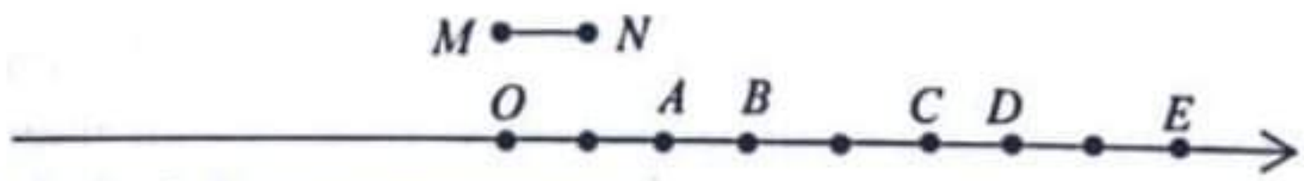
Observaţie: Dacă ambele aproximări prin lipsă şi prin adaos sunt la fel de apropiate de valoarea numărului, atunci rotunjirea se consideră aproximarea prin adaos.

Exemple: 1. Rotunjirea până la zeci a numărului 7 865 este 7 870.
2. Rotunjirea până la sute a numărului 89 350 este 89 400.
3. Rotunjirea până la mii a numărului 38 500 este 39 000.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Ordonaţi crescător numerele: 128, 235, 57, 156, 463, 349.
2. Ordonaţi descrescător numerele: 281, 354, 79, 561, 631, 492.
3. Care număr este mai mic din următoarele perechi de numere:
a) 977, 975; b) 5 323, 5 322; c) 50 001, 500 001;
d) 43 575, 43 757; e) 423, 432; f) 10 011, 10 101?
4. a) Scrieţi toate numerele naturale impare mai mici decât 17.
b) Scrieţi toate numerele naturale pare mai mici decât 11.
5. a) Scrieţi cel mai mic număr par de trei cifre diferite.
b) Scrieţi cel mai mare număr par de trei cifre identice.
c) Scrieţi cel mai mic număr impar de patru cifre identice.
d) Scrieţi cel mai mare număr impar de patru cifre diferite.
6. Desenaţi o axă a numerelor şi reprezentaţi pe ea punctele corespunzătoare următoarelor numere naturale: 2; 4; 6; 9; 11.
7. În figura de mai jos avem o axă a numerelor şi punctele din desen corespund unor numere naturale. Aflaţi aceste numere.



8. Numerele 3, 8 şi 5 sunt reprezentate pe aceeaşi axă a numerelor prin punctele *A*, *B*, respectiv *C*. Stabiliţi valoarea de adevăr pentru fiecare din următoarele propoziţii:
p: „*C* este mai departe de origine ca *B*."
q: „*C* este între *A* şi *B*."
r: „*B* este între *A* şi *C*."
9. Reprezentaţi pe axa numerelor punctele ale căror coordonate sunt numerele naturale:
a) 2; 4; 5; 7; 10; b) cel mult egale cu 7; c) cuprinse între 3 şi 8.
10. Pentru fiecare dintre numerele: 68 372, 29 570, 37 150, 48 500, 53 285 scrieţi:
a) aproximarea prin lipsă până la zeci; b) aproximarea prin adaos până la sute;
c) rotunjirea până la sute; d) rotunjirea până la mii.

PE Aplicare şi exersare **

11. Rotunjiţi numărul 9 732 815 la:
a) zeci; b) sute; c) mii; d) zeci de mii; e) sute de mii.
12. Scrieţi trei numere naturale cuprinse între 17 235 şi 17 582 care, rotunjite la ordinul sutelor, să fie egale cu:
a) 17 300; b) 17 600; c) 17 500.

13. Ordonați crescător numerele naturale a, b, c, d și e, unde $a < d$, $a > c$, $b > d$ și $e < c$.

14. Se consideră numerele naturale de forma $2 \cdot n + 1$, unde n este număr natural.

a) Calculați numerele pentru n luând valorile 3, 0, 7 și 4.

b) Ordonați descrescător numerele obținute la punctul a).

15. Alegeți convenabil unitatea de măsură și reprezentați pe axă numerele: 10, 30, 40, 60.

16. Citiți numerele date, scrieți-le cu cifre arabe și ordonați-le crescător: MMC, XVI, XXIX, MCXX, CXXII, CDXL, MML, CDXI.

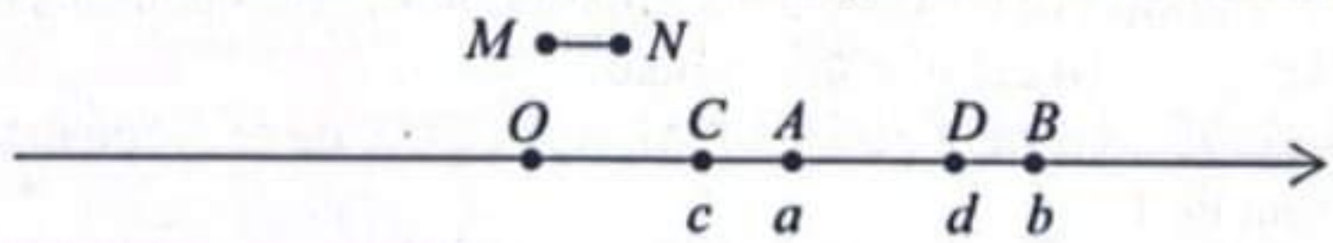
17. Scrieți cu cifre romane perioada de viață a scriitorilor: Mihai Eminescu, Vasile Alecsandri, George Călinescu, Mihail Sadoveanu.

18. Fie numărul 4 715 842.

a) Plasați un 6 între cifrele sale, astfel încât numărul obținut să fie cel mai mic posibil.

b) Ștergeți o cifră a acestui număr, astfel încât numărul obținut să fie cel mai mare posibil.

19. În figura de mai jos avem o axă a numerelor, iar punctele A, B, C, D corespund numerelor naturale a, b, c, respectiv d. Ordonați crescător numerele a, b, c, d.



20. Punctele A, B, C sunt în această ordine pe axa numerelor și ele corespund unor numere naturale consecutive. Punctul D este și el între A și C și corespunde unui număr natural. Comparați numerele care corespund punctelor B și D.

21. Punctele A și D sunt de aceeași paritate și sunt situate între punctele B și C pe axa numerelor. Distanța între B și C este de 3 unități. Comparați numerele care corespund punctelor A și D.

22. Punctele A, B, C corespund numerelor naturale a, b, respectiv c. Stabiliți ordinea punctelor A, B și C pe axa numerelor, știind că a este predecesorul lui b și este succesorul lui c.

23. Se consideră numerele $\overline{23a35}$ și $\overline{2b714}$. Înlocuiți pe a și b cu cifre, astfel încât:

a) primul număr să fie mai mare decât al doilea;

b) primul număr să fie mai mic decât al doilea.

Calculați în fiecare caz câte soluții are problema.

24. Calculați câte numere naturale de forma $\overline{7abc}$ au rotunjirea la sute 7 200.

25. Ordonați crescător toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$, unde a, b și c sunt cifre pare consecutive, cu $a < b < c$.

26. Ordonați descrescător toate numerele naturale impare de forma $\overline{aaa}$, unde a este cifră.

27. a) Stabiliți câte numere de forma $3 \cdot n + 1$ sunt pare, unde n este o cifră oarecare.

b) Stabiliți câte numere de forma $5 \cdot n + 3$ sunt impare, unde n este o cifră oarecare.

28. a) Stabiliți câte numere de forma $\overline{aa}$ mai mici decât 100 există.

b) Stabiliți câte numere de forma $\overline{a5a}$ mai mici decât 1 000 există.

29. Ordonați descrescător toate numerele naturale de forma $\overline{7a4}$ mai mici decât 780.

30. Scrieți toate numerele naturale formate din cifre identice a căror sumă să fie 12.

PE Aprofundare şi performanţă ***

31. a) De câte ori este folosit simbolul I în scrierea numerelor de la I la XX?
b) De câte ori este folosit simbolul V în scrierea numerelor de la I la XXX?
c) De câte ori este folosit simbolul X în scrierea numerelor de la I la XXX?

32. Alegând o unitate de măsură convenabilă, reprezentaţi pe axă numerele: 300, 320, 330, 350, 380, 400.

33. Reprezentaţi pe o axă punctele ale căror coordonate sunt numere naturale care verifică una dintre condiţiile:
a) sunt cel mult egale cu 6; b) sunt cel puţin egale cu 2, dar mai mici decât 8;
c) sunt cuprinse între 1 şi 11 şi sunt impare; d) sunt cuprinse între 2 şi 8 şi sunt pare.

34. a) Aproximaţi prin adaos până la sute numerele de forma $\overline{abba}$, unde a şi b sunt cifre pare consecutive, cu $a < b$.
b) Rotunjiţi la sute numerele de forma $\overline{abba}$, unde a şi b sunt cifre pare consecutive, cu $a < b$.

35. Fie numărul 879 543. Plasaţi cifra 1 între două cifre ale numărului pentru a obţine:
a) cel mai mare număr; b) cel mai mic număr.

36. Pe o axă de coordonate se consideră punctele: M, N, P, Q, R de coordonate: 2, 5, 7, 8, 10, unitatea de măsură fiind de 1 cm.
a) Determinaţi lungimile segmentelor MN, MP, MQ, MR, NP, NQ, NR, PQ, PR, QR.
b) Calculaţi $MR + MQ - 2MN$; $2NP + 3NR - NQ$; $4QR + 5PQ - 2PR$.

37. Pe o axă de coordonate se consideră punctele M şi N astfel încât $ON = 11$ cm şi coordonata punctului M este 2.
a) Determinaţi coordonatele punctelor A, B şi C situate între M şi N în această ordine, astfel încât $MA = 1$ cm, $AB = 5$ cm şi $CN = 2$ cm.
b) Calculaţi lungimile segmentelor MB, BC, BN, AN, MN.

38. Punctele A, B, C reprezentate pe axa numerelor corespund numerelor naturale 5, 11, respectiv x. Aflaţi valorile posibile ale lui x dacă:
a) C este între A şi B; b) A este între C şi B.

39. Punctele A, B şi C de pe axa numerelor corespund unor numere naturale consecutive. Se ştie că A este între B şi C.
a) Dacă B corespunde unui număr par, atunci ce paritate au numerele care corespund punctelor A, respectiv C?
b) Dacă A corespunde unui număr impar, atunci ce paritate au numerele care corespund punctelor B şi C?
c) Dacă C corespunde unui număr impar, atunci ce paritate au numerele care corespund punctelor A şi B?

40. Ordonaţi crescător numerele: $3n$, $n + 3$, $2n + 1$ şi 4, ştiind că $n \geq 2$.

PE-PP Supermate ****

41. Andrei scrie pe tablă toate numerele naturale de la 1 până la 100, adică:

123456789101112131415...979899100.

a) Câte cifre a folosit Andrei în scrierea anterioară?
b) Câte cifre de 1 a folosit Andrei în scrierea anterioară?
c) Care este cifra care se află pe locul 57?

42. Pe o axă a numerelor sunt reprezentate punctele A şi B de coordonate 5 şi, respectiv, 11. Calculaţi coordonata mijlocului segmentului AB.

43. Se consideră cifrele a şi b astfel încât $a < b$. Ordonaţi numerele:

$$\overline{aabb},\ \overline{abab},\ \overline{aaaa},\ \overline{bbbb},\ \overline{bbaa},\ \overline{baba}.$$

44. Ştergeţi două cifre din numărul 25 149 763, astfel încât numărul care rămâne să fie:
a) cel mai mic posibil; b) cel mai mare posibil.

45. Se consideră numărul natural $A = 51015202530\ldots2015$.
a) Explicaţi cum s-a format numărul. b) Calculaţi câte cifre are numărul A.
c) Calculaţi care este cifra de pe poziţia 1 015.

PE-PP 3. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Completaţi şirul 2, 4, 6, … cu numere naturale mai mici decât 17.
2. Determinaţi rotunjirile până la zeci, sute şi mii ale numărului 543 794.
3. Scrieţi predecesorul şi succesorul numărului 2 010.
4. Reprezentaţi pe axa numerelor numerele naturale x care au proprietatea că sunt numere pare şi $x < 8$.
5. Scrieţi numărul natural ce reprezintă scrierea: $5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$.
6. Determinaţi valorile lui x pentru care $\overline{4x2} > 412$.
7. Scrieţi cu cifre arabe numerele scrise cu cifre romane: MDL, MCXCV, CDXV.

TESTUL 2

1. Scrieţi trei numere naturale consecutive impare mai mari decât 2 004.

2. Scrieţi aproximările până la zeci, sute şi mii prin lipsă şi apoi prin adaos ale numărului 47 385.

3. Comparaţi: a) $\overline{x7}$ cu 47; b) $\overline{xy7}$ cu 447.

4. În figura alăturată avem o axă a numerelor, iar punctul A are coordonata 10. Reprezentaţi punctele B, C şi D de coordonate 20, 40 şi respectiv 50.

5. Scrieţi numerele naturale ale căror predecesori sunt: 5; 505; 5 005.

6. Continuaţi şirurile cu încă 4 termeni:
a) 1; 4; 2; 8; 3; 12; …; b) 99; 92; 85; 78; … .

7. Câte numere naturale pare de forma $\overline{ab}$ cu $a < b$ există?

8. Scrieţi numerele naturale de 4 cifre distincte formate cu cifrele 2, 5, 7 şi 0. Precizaţi-l pe cel mai mic şi pe cel mai mare dintre acestea.

TESTUL 3

1. Scrieţi cel mai mic număr natural de trei cifre distincte cu toate cifrele pare.

2. Câte numere naturale de forma $\overline{a21}$ există?

3. Completaţi şirul 3, 6, 9, 12, … cu alţi trei termeni consecutivi. Precizaţi termenul al 7-lea şi al 10-lea.

4. Pe axa numerelor, punctul M are coordonata 14. Precizaţi coordonata mijlocului segmentului OM, unde O este originea axei.

5. Ordonaţi descrescător numerele:
$a = (5 \cdot 4 + 10) : 5$; $b = 2 \cdot (44 : 11 + 6) : 10$; $c = 450 : 9 + 7 \cdot 6 + 4$.
6. Scrieţi numerele naturale ale căror succesori sunt: 1, 101, 1 001.
7. Scrieţi cu cifre romane numerele: 57, 46, 1 982, 1 974.

TESTUL 4

1. Scrieţi toate numerele naturale pare care se pot forma cu cifrele 7, 0, 2.
2. Aproximaţi prin lipsă şi prin adaos la ordinul sutelor numerele 4 375; 97 432.
3. Se ştie că $a < b < c$ şi a, b, c sunt cifre pare consecutive. Câte numere de forma $\overline{abc}$ există?
4. Reprezentaţi pe axa numerelor, luând ca unitate de măsură 5 mm, următoarele numere: 2; 7; 5; 11; 8; 10.
5. Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{aabb}$, ştiind că suma cifrelor este 14 şi $a < b$.
6. Scrieţi cu cifre arabe numerele: MMIV; XXIX; MDCXI; MCLXV.
7. Fie numerele: 2 507; 27 243.
   a) Pentru fiecare număr scrieţi cifra sutelor şi numărul de sute.
   b) Pentru fiecare număr scrieţi cifra zecilor şi numărul de zeci.
8. a) Scrieţi numerele mai mari decât 1 491 care pot fi rotunjite la 1 000.
   b) Scrieţi toate numerele naturale formate din cifre identice a căror sumă să fie 8.

TESTUL 5

1. Continuaţi şirurile cu încă 6 termeni:
   a) 1, 3, 2, 6, 3, 9, ...; b) 1, 4, 7, 10, 13, ...
2. Scrieţi succesorul şi predecesorul numărului 2 018.
3. Scrieţi aproximările până la zeci, sute şi mii prin lipsă ale numărului 17 837.
4. Scrieţi cu cifre arabe numerele scrise cu cifre romane: MCCL; CDXII.
5. Câte numere naturale scrise în baza 10 de forma $\overline{3x2}$ există?
6. Scrieţi cu cifre romane anul naşterii şi anul în care aţi intrat în clasa I.
7. Desenaţi o axă a numerelor şi reprezentaţi pe ea punctele corespunzătoare numerelor naturale: 0, 1, 3, 4, 7, 8.
8. Scrieţi toate numerele naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele 2, 5 şi 7.

TESTUL 6

1. Continuaţi şirurile cu încă 6 termeni:
   a) 2, 3, 4, 6, 6, 9, ...; b) 1, 3, 5, 7, 9, ...
2. Scrieţi succesorul şi predecesorul numărului 2 019.
3. Scrieţi aproximările până la zeci, sute şi mii prin adaos ale numărului 35 483.
4. Scrieţi cu cifre arabe numerele scrise cu cifre romane: MCDL; CDXV.
5. Câte numere naturale scrise în baza 10 de forma $\overline{5x7}$ există?
6. Scrieţi cu cifre romane anul naşterii poetului Mihai Eminescu.
7. Desenaţi o axă a numerelor şi reprezentaţi pe ea punctele corespunzătoare numerelor naturale: 0, 2, 4, 5, 7, 8.
8. Scrieţi toate numerele naturale care se pot forma cu cifrele 1, 4 şi 6.

PE

Nume _____ Clasa _____

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. Completaţi pe fişa de evaluare spaţiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Pe axa numerelor se consideră punctele A, B, C, D ale căror coordonate sunt patru numere consecutive oarecare, respectiv a, b, c şi d. Atunci $4 \cdot AD - 3 \cdot BD$ este egal cu ..... .

(0,5p) **2.** Suma numerelor naturale de forma $\overline{ab}$ pentru care $a - b = 8$ este egală cu ..... .

(0,5p) **3.** Pe 5 mai 1957, Televiziunea Română realizează prima transmisie sportivă în direct: meciul de rugby Anglia-România. Scris cu ajutorul cifrelor romane numărul 1957 este ..... .

(0,5p) **4.** Numărul natural $\overline{ab6c}$ pentru care cifrele lui sunt consecutive este numărul ..... .

II. Încercuiţi pe fişă doar răspunsul corect, ştiind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Pe axa numerelor, cu originea în punctul O, se consideră punctele A şi B, ale căror coordonate sunt numerele 4 şi x. Dacă $AB = 2$, atunci:

A. $x < 2$ B. $x > 2$ şi $x < 6$ C. $14x = 7$ D. $x = 2$ sau $x = 6$

(0,5p) **2.** Suma dintre succesorul şi predecesorul numărului 17 este:

A. 43 B. 34 C. 33 D. 35

(0,5p) **3.** Numărul numerelor naturale de forma $\overline{a7b}$ este:

A. 100 B. 101 C. 90 D. 91

(0,5p) **4.** În anul MCMLXIV, pe 24 decembrie, se inaugurează Teatrul „Ion Creangă" din Bucureşti cu premiera *Povestea lui Harap-Alb*. Rotunjirea numărului MCMLXIV la zeci este:

A. 1 960 B. 1 970 C. 1 860 D. 1 950

III. Uniţi prin săgeţi fiecare enunţ, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Se consideră cifrele a şi b, $a < b$. Numerele $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$, $\overline{aaaa}$, $\overline{bbbb}$, $\overline{baba}$, scrise în ordine crescătoare, formează un şir de numere, în care:

(0,5p) a) primul număr din şir este: 1) $\overline{aabb}$

(0,5p) b) al doilea număr din şir este: 2) $\overline{abab}$

(0,5p) c) al treilea număr din şir este: 3) $\overline{aaaa}$

(0,5p) d) al patrulea număr din şir este: 4) $\overline{bbbb}$

5) $\overline{baba}$

La problemele IV şi V scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(2p) **IV.** Ştiind că $a = 34$, $3 \cdot b + c = 38$ şi $10 \cdot a + 6 \cdot b + 2 \cdot c = \overline{xyz}$, ordonaţi crescător cifrele x, y şi z.

(1p) **V.** Aflaţi suma cifrelor numărului $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

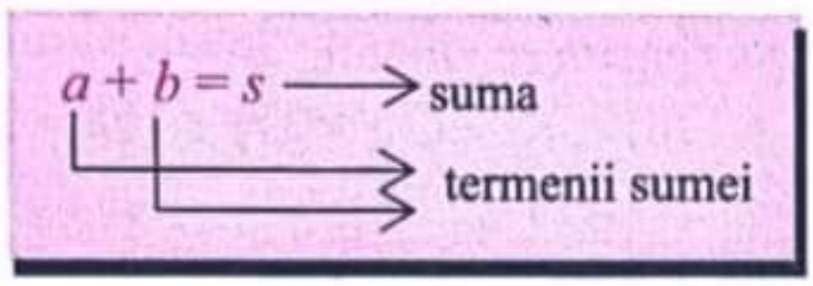
Operaţii cu numere naturale

PE-PP 1. Adunarea numerelor naturale; proprietăţi

În clasele anterioare aţi învăţat că pentru orice două numere naturale se poate calcula **suma** lor.

			3	2	5	+													3	7	9	+					
			2	3	4													1	6	4	5						
			5	5	9													2	0	2	4						
3	2	5	+	2	3	4	=	5	5	9				3	7	9	+	1	6	4	5	=	2	0	2	4		

Oricare ar fi două numere naturale a şi b, există s, număr natural unic, numit **suma** numerelor a şi b. Notăm:



Operaţia prin care se obţine suma a două numere naturale oarecare se numeşte **adunarea numerelor naturale.**

Proprietăţi:

1. Adunarea este **asociativă**, adică oricare ar fi a, b şi c numere naturale, atunci
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$
[Într-o sumă de mai mulţi termeni, rezultatul nu se schimbă dacă grupăm (asociem) termenii diferit.]
2. Numărul 0 este **element neutru** la adunare, adică oricare ar fi numărul natural a, atunci
$$a + 0 = 0 + a = a.$$
[Dacă un termen al unei sume este zero, atunci suma este egală cu celălalt termen.]
3. Adunarea este **comutativă**, adică oricare ar fi numerele naturale a şi b, atunci
$$a + b = b + a.$$
[Suma nu se schimbă dacă schimbăm ordinea termenilor.]

Adunarea numerelor naturale, relaţia de egalitate „=" şi relaţia de ordine „≤" sunt legate prin următoarele proprietăţi:

Oricare ar fi numerele naturale a, b, c şi d,

4. dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$;
[O egalitate se păstrează dacă adăugăm acelaşi număr fiecărui termen.]
5. dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $a + c = b + d$;
[Egalităţile pot fi adunate termen cu termen.]
6. dacă $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$;
[O inegalitate se păstrează dacă adăugăm acelaşi număr fiecărui termen.]
7. dacă $a \leq b$ şi $c \leq d$, atunci $a + c \leq b + d$.
[Inegalităţile de acelaşi tip pot fi adunate termen cu termen.]

Observaţie: Inegalităţile $a \le b$ şi $c \ge d$ nu pot fi adunate deoarece nu sunt de acelaşi tip.

Exemplul 1. Calculaţi: a) (75 + 37) + 128; b) (37 + 128) + 75.

Rezolvare: a) În calcule, de cele mai multe ori, se folosesc parantezele. În acest caz se fac calculele din paranteze:

$$75 + 37 = 112.$$

Rezultă:

$$(75 + 37) + 128 = 112 + 128 = 240.$$

b) Proprietatea de asociativitate ne permite să renunţăm la paranteze. Rezultă:

$$(37 + 128) + 75 = 37 + 128 + 75.$$

Proprietatea de comutativitate ne spune că suma nu se schimbă dacă schimbăm ordinea termenilor. Rezultă:

$$(37 + 128) + 75 = 75 + 37 + 128.$$

Efectuăm operaţiile în ordinea în care sunt scrise. Evidenţiem acest lucru folosind parantezele. Folosind punctul a) găsim rezultatul.

$$(37 + 128) + 75 = (75 + 37) + 128 = 240.$$

Exemplul 2. a) Arătaţi că: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = n(n+1) : 2$.

b) Calculaţi suma: $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Rezolvare:

a) Fie $\left.\begin{array}{l} A = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n \\ \text{Tot } A = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1 \end{array}\right] \Rightarrow A + A = (1 + n) + [2 + (n-1)] + [3 + (n-2)] + \ldots + (n+1) \Rightarrow 2 \cdot A = (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + \ldots + (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1) \Rightarrow 2 \cdot A = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{\text{de } n \text{ ori } (n+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot A = n(n+1) \Rightarrow A = n(n+1) : 2 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = n(n+1) : 2.$

b) Utilizăm rezultatul de la a) pentru $n = 100$: $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = 100(100 + 1) : 2 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 10\,100 : 2 = 5\,050.$

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi:

a) 72 619 + 83 578; b) 512 387 + 97 485 + 783 697;

c) 435 + 721 + 565 + 39; d) 2 537 + 2 308 + 1 105.

2. Descompuneţi în sumă de unităţi, zeci, sute etc., după caz, numerele:

575, 49, 3 754, 125 431, 1 237 403.

3. Scrieţi numărul 7 ca sumă de două numere naturale. Câte soluţii are problema?

4. Efectuaţi, folosind proprietăţile adunării:

a) 73 + 58 + 27 + 42; b) 2 937 + 1 429 + 63;

c) 19 + 46 + 181 + 54; d) 2 301 + 389 + 1 499 + 511.

5. Completați tabelul următor:

a	327	1 239	23 432	57	124 329	37 452	19 624
b	452	327	2 342	2 437	3 247	4 295	5 732
$a+b$	779						

6. Completați căsuțele și denumiți proprietățile utilizate:

a) $14 + \square = 14$; $\square + 24 = 24$; $\square + 0 = 74$; $0 + \square = 99$;

b) $19 + 37 = 37 + \square$; $49 + \square = 54 + 49$;

c) $(16 + 24) + \square = 16 + (24 + \square)$.

7. Completați tabelele:

a)

a	47	529	1 435	132 456	799 457	2 437 560
$a + 325$						

b)

b	12	125	437	24 573	456 124	257 432 124
$b + 5\,237$						

8. Calculați $a + 23\,574$ pentru a luând valorile: 3 205; 25 734; 16 105; 50 037; 94 376.

9. Completați tabelul:

a	29	2 375	537	24 523	1 754	21 375
b	137	123	9 754	41 127	324	41 325
c	453	49	4 375	5 432	5	2 943
$a+b$						
$a+c$						
$b+c$						
$a+b+c$						

10. Calculați, folosind proprietățile adunării:

a) $2 + 97 + 5 + 998 + 3 + 2\,995$;

b) $113 + 124 + 1\,257 + 1\,376 + 1\,387 + 4\,743$;

c) $401 + 4\,502 + 4\,203 + 419 + 4\,018 + 4\,057$.

PE Aplicare și exersare **

11. Scrieți numărul 18 ca o sumă de 8 numere care conțin ca cifră numai cifra 1.

12. a) Suma a 6 numere naturale pare distincte este 30. Aflați numerele.

b) Suma a 10 numere naturale impare distincte este 100. Aflați numerele.

13. Suma a 10 numere naturale impare este 98. Arătați că cel puțin două dintre ele sunt egale.

14. Folosind proprietățile adunării numerelor naturale, calculați:

a) $574 + 875 + 26 + 25$;

b) $2\,036 + 871 + 64 + 329 + 50$;

c) $2\,301 + 3\,698 + 689 + 302$;

d) $[(324 + 76) + 100] + (109 + 16 + 1)$.

15. Calculați următoarele sume:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 80$;

b) $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$;

c) $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$;

d) $3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + 43$.

16. Calculați:

a) $3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 2\,019$;

b) $4 + 8 + 12 + \ldots + 2\,020$;

c) $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 2\,020$;

d) $7 + 14 + 21 + \ldots + 2\,023$.

17. Scrieţi aproximarea prin lipsă şi prin adaos până la mii pentru fiecare rezultat obţinut la adunările:

a) 4 257 + 917;
b) 275 + 7 621;
c) 2 347 + 632;
d) 17 430 + 2 047;
e) 27 570 + 8 129;
f) 48 100 + 6 737.

18. Rotunjiţi până la mii următoarele sume:

a) 789 + 837;
b) 3 578 + 124;
c) 7 431 + 1 242;
d) 14 320 + 5 737;
e) 72 815 + 42 300;
f) 30 147 + 2 354.

PE Aprofundare şi performanţă ***

19. O societate comercială a cheltuit într-o zi pentru procurarea materiei prime suma de 9 475 lei. În următoarea zi a cheltuit cu 1 715 lei mai mult.

a) Calculaţi cât a cheltuit în cele două zile la un loc.
b) Aproximaţi prin lipsă la mii suma cheltuită.
c) Rotunjiţi la mii suma cheltuită.

20. Aflaţi cu cât se modifică suma a două numere *a* şi *b* dacă:

a) unui termen i se adaugă 500;
b) ambilor termeni li se adaugă 500;
c) un termen se dublează;
d) unui termen i se adaugă 500, iar celuilalt i se adaugă 100.

21. Stabiliţi valoarea de adevăr pentru fiecare din următoarele propoziţii:

p: „Suma a 7 numere pare este un număr impar."
q: „Suma a 10 numere impare este un număr par."
r: „Suma a 7 numere impare este un număr impar."

22. Fie *a*, *b*, *c* trei numere naturale, astfel încât $a + b = c$.

a) Dacă *a* şi *b* sunt numere pare, aflaţi ce paritate are numărul *c*.
b) Dacă *a* este număr par şi *b* este număr impar, aflaţi ce paritate are numărul *c*.
c) Dacă *a* este număr par şi *c* este număr par, aflaţi ce paritate are numărul *b*.
d) Dacă *a* este număr par şi *c* este număr impar, aflaţi ce paritate are numărul *b*.

23. Fie şirul de numere 2, 7, 12, 17, … .

a) Completaţi şirul cu încă trei termeni.
b) Aflaţi termenul de pe locul 27.
c) Calculaţi suma primilor 15 termeni.

PE-PP Supermate ****

24. Calculaţi suma: $9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{\text{de 1998 ori 9}}$.

25. Suma unor numere naturale consecutive este 75. Aflaţi numerele.

26. Avem un şir de 2 013 numere naturale consecutive. Ştiind că numărul din mijloc este 2 013, calculaţi primul număr, ultimul număr şi suma termenilor şirului.

PE-PP 2. Scăderea numerelor naturale

În clasele anterioare ați învățat că, dacă a și b sunt două numere naturale, iar $a \geq b$, atunci se poate face **diferența** $a - b$.

			2	3	7	9	–											4	3	0	5	–					
				2	4	5													7	8	9						
			2	1	3	4												3	5	1	6						
2	3	7	9	–	2	4	5	=	2	1	3	4			4	3	0	5	–	7	8	9	=	3	5	1	6

Oricare ar fi două numere naturale a și b, $a \geq b$, există d, număr natural unic, numit **diferența** dintre a și b. Notăm:

Operația prin care se obține diferența a două numere naturale se numește **scădere.**

Observații:

1. Într-o sumă, $a + b = s$, se poate pune în evidență, prin diferență, orice termen al sumei: $a = s - b$; $b = s - a$. Cele trei egalități sunt echivalente (din oricare rezultă celelalte două). Notăm:

$$a + b = s \Leftrightarrow a = s - b \Leftrightarrow b = s - a.$$

2. Într-o diferență, $a - b = d$, se poate pune în evidență orice termen al diferenței:
   - descăzutul: $a = d + b$;
   - scăzătorul: $b = a - d$.

Cele trei egalități sunt echivalente (din oricare rezultă celelalte două). Notăm:

$$a - b = d \Leftrightarrow a = d + b \Leftrightarrow b = a - d.$$

3. Dacă $a < b$, diferența $a - b$ nu este posibilă (rezultatul nu este număr natural).
4. În calcule se folosesc paranteze: **rotunde** (numite și mici), **drepte** (numite și mari) și **acolade**. În acest caz, mai întâi se fac calculele din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte și în final cele din acolade. Dacă sunt numai operații de adunare și de scădere, acestea se fac în ordinea în care sunt scrise. În general, după efectuarea calculelor din parantezele rotunde, acestea se desființează, cele drepte se transformă în rotunde, iar acoladele se transformă în paranteze drepte și se continuă calculele până la dispariția parantezelor și obținerea rezultatului.

Exemplu:

$$9 + \{12 - [18 - (4 + 7 - 3 - 1)] + 1\} =$$
$$= 9 + \{12 - [18 - (11 - 3 - 1)] + 1\} =$$
$$= 9 + \{12 - [18 - (8 - 1)] + 1\} =$$
$$= 9 + [12 - (18 - 7) + 1] =$$
$$= 9 + (12 - 11 + 1) =$$
$$= 9 + (1 + 1) = 9 + 2 = 11.$$

5. Scăderea **nu este asociativă.**

Exemplu: $\left.\begin{array}{l}(14-8)-3=6-3=3\\14-(8-3)=14-5=9\end{array}\right\}\Rightarrow(14-8)-3\neq 14-(8-3).$

Prin urmare: $(a-b)-c\neq a-(b-c)$.

6. Scăderea **nu este comutativă.**

Exemplu: 17 – 7 = 10, iar 7 – 17 nu este posibil.

Prin urmare: $a-b\neq b-a$.

7. Au loc următoarele proprietăţi: Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c, avem:

a) dacă $a=b$, atunci $a-c=b-c$;
b) dacă $a=b$ şi $c=d$, atunci $a-c=b-d$;
c) dacă $a\leq b$, atunci $a-c\leq b-c$;
d) $a-0=a$;
e) $a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c$;
f) $a-(b-c)=(a-b)+c=a-b+c$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Completaţi tabelul:

a	b	$a-b$	$a-325$	$b-124$	$a-b-11$	$a+b-120$
537	237					
1 275	1 055					
3 423	2 403					
11 437	10 107					
132 140	13 200					

2. Calculaţi:

a) 7 093 – 5 197;
b) 56 108 – 17 539;
c) 147 523 – 83 485 – 19 784;
d) 3 892 + 17 437 – 892;
e) 41 375 + 92 387 – 375 – 387;
f) 4 137 + 13 253 – 2 372.

3. Aflaţi valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziţii:

p: „583 + (295 – 187) = 583 + 295 – 187."
q: „607 – (145 + 238) = 607 – 145 – 238."
r: „497 – (375 – 183) = 497 – 375 + 183."

4. Efectuaţi:

a) 45 372 – 23 125 – 12 023;
b) 23 403 103 – 12 413 042 – 7 214 052;
c) 577 775 – 22 222 + 11 999;
d) 10 765 – 9 421 + 237 412.

5. a) Descăzutul este 8 431 şi diferenţa este 3 256. Care este scăzătorul?
b) Scăzătorul este 15 737, iar diferenţa este 15 263. Care este descăzutul?

6. Calculaţi a – 12 753 + 753 pentru a luând valorile:

825 137; 20 000; 137 125; 57 834; 45 723; 834 125.

7. Comparaţi numerele a şi b, ştiind că:

a) $a=780-(140-40)$; $b=(780-140)-40$;
b) $a=725-(375+100)$; $b=(725-375)+100$;
c) $a=270+(20+210)$; $b=(270+20)+210$.

8. Comparaţi numerele x şi y pentru:

a) $x = 320 - (150 - 40)$; $y = (320 - 120) - 40$;

b) $x = 575 - (235 + 100)$; $y = (575 - 235) + 100$;

c) $x = 5200 - [700 - (100 - 30)]$; $y = (5\,200 - 700) + 100 - 30$.

9. Aflaţi diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic număr de cinci cifre distincte.

10. Se ştie că $a + c = 718$ şi $b + d = 523$. Calculaţi:

a) $a + b + c + d$; b) $a - b + c - d$.

PE Aplicare şi exersare **

11. Puneţi paranteze astfel încât rezultatul să fie zero:

a) $530 - 439 - 348 - 257$; b) $880 - 661 - 631 - 412$;

c) $6\,464 - 5\,008 - 3\,552 - 2\,096$; d) $24\,860 - 35\,765 - 15\,680 - 4\,775$.

12. Determinaţi numărul de forma $\overline{xy}$, ştiind că suma cifrelor sale este 10 şi răsturnatul său este cu 36 mai mic decât el.

13. Diferenţa dintre două numere naturale este 23 945, iar cel mai mare dintre aceste numere este 123 945. Care este diferenţa dintre numărul cel mic şi 8 423?

14. Calculaţi:

a) $x + [y - (z + t)]$ pentru $x = 1\,573$, $y = 2\,197$, $z = 235$ şi $t = 957$;

b) $x - [z - (t - y)]$ pentru $x = 1\,754$, $y = 317$, $z = 1\,375$ şi $t = 537$;

c) $(x - y) - (z - t)$ pentru $x = 42\,157$, $y = 29\,793$, $z = 15004$ şi $t = 14\,229$;

d) $x - (y + z - t) - y + t$ pentru $x = 3\,000$, $y = 200$, $z - t = 350$ şi $t = 70$.

15. Fie x, y şi z trei numere naturale astfel încât $x - y = z$.

a) Dacă $x = 1\,253$ şi $y = 937$, calculaţi z.

b) Dacă $x = 21\,737$ şi $z = 11\,253$, calculaţi y.

16. Aflaţi numerele $\overline{ab}$ şi $\overline{ba}$ care verifică egalitatea: $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$.

17. Un elev are o sumă de 300 de lei pe care o cheltuieşte în 3 zile. În prima zi cheltuieşte 78 de lei, iar a doua zi cheltuieşte cu 15 lei mai puţin decât în prima zi.

a) Câţi lei cheltuieşte elevul în primele două zile?

b) Câţi lei cheltuieşte elevul în ultimele două zile?

PE Aprofundare şi performanţă ***

18. Diferenţa a două numere naturale este egală cu 23 954, iar cel mai mare dintre ele este 102 446. Care este diferenţa dintre numărul mic şi 47 124?

19. La plecarea din Bucureşti kilometrajul maşinii lui Mihai indica 12 450 km, iar la sosirea în Deva, 12 839 km. Mihai pleacă apoi la Oneşti şi citeşte la sosire kilometrajul maşinii care indică 13 220 km. Calculaţi distanţele Bucureşti – Deva, Oneşti – Deva şi distanţa totală parcursă de Mihai.

20. Aflaţi numerele naturale de forma $\overline{xy}$ scrise în baza 10 care sunt cu 54 mai mari decât răsturnatele lor.

21. Stabiliţi dacă există două numere naturale care adunate dau ca rezultat un număr par şi scăzute dau ca rezultat un număr impar.

22. Fie a, b două numere naturale astfel încât: $a + x = 2\ 137$ şi $b - x = 1\ 752$. Stabiliţi valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziţii:

p: „Diferenţa numerelor a şi b este număr par."

q: „Diferenţa numerelor a şi b este număr impar."

23. Determinaţi cifrele a şi b astfel încât diferenţa dintre $\overline{a4b}$ scris în baza 10 şi răsturnatul său să fie 99 ($a > b$).

PE-PP **Supermate** ****

24. Stabiliţi dacă există numere naturale a, b, c care verifică simultan egalităţile:

$$a + b = 1\ 973;\ b - c = 1\ 547 \text{ şi } a - c = 147.$$

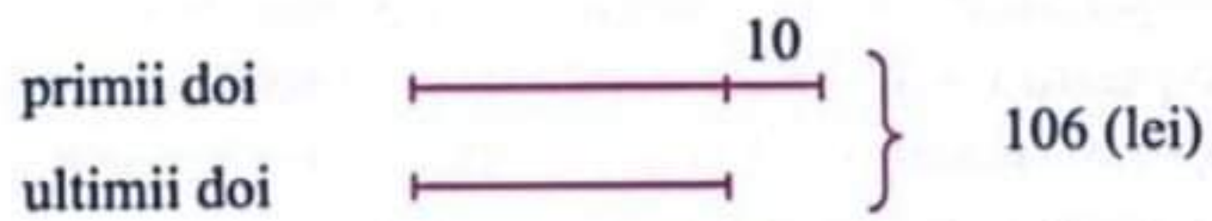
25. Înlocuiţi steluţele cu cifrele corespunzătoare:

a) $7\ *9* - *\ 8*6 = 1\ 558$; b) $4\ *73 - 2\ 85* = *\ 3*4$.

PE-PP 3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul operaţiilor de adunare şi scădere

Exemplul 1: Patru elevi au împreună suma de 106 lei. Împreună, primii doi elevi au cu 10 lei mai mult decât au împreună ultimii doi elevi. Primul are cu 4 lei mai puţin decât al doilea şi al patrulea cu 8 lei mai mult decât al treilea. Câţi lei are fiecare elev?

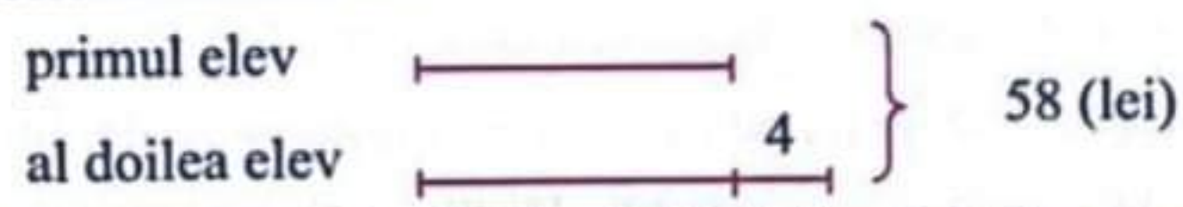
Rezolvare. Reprezentăm prin segmente câţi lei au împreună primii doi şi ultimii doi elevi:



Ultimii doi au împreună $(106 - 10) : 2 = 48$ (lei).

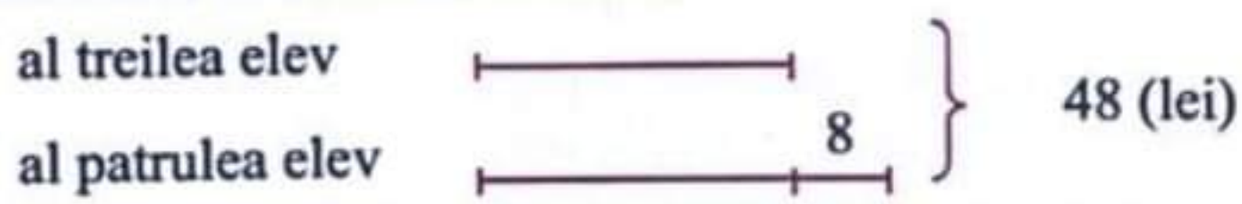
Primii doi au împreună $48 + 10 = 58$ (lei).

Din enunţul problemei rezultă că:



Prin urmare, primul elev are $(58 - 4) : 2 = 27$ (lei), iar al doilea elev are $27 + 4 = 31$ (lei).

Pentru ultimii doi elevi rezultă următoarele:



Prin urmare, al treilea elev are $(48 - 8) : 2 = 20$ (lei), iar al patrulea are $20 + 8 = 28$ (lei).

Deci, elevii au: 27 lei, 31 lei, 20 lei şi 28 lei.

Exemplul 2. Aflaţi numărul natural x ştiind că $x + (x + 4) = 58$.

Rezolvare: Folosind asociativitatea adunării, rezultă:

$$(x + x) + 4 = 58 \Rightarrow 2x + 4 = 58.$$

Punem în evidenţă termenul $2x$. Rezultă:

$$2x = 58 - 4 \Rightarrow 2x = 54,$$

deci $x = 54 : 2 \Rightarrow x = 27$.

Verificare: $27 + (27 + 4) = 27 + 31 = 58$.

Exemplul 3. Aflaţi numărul natural x ştiind că $2 + x \leq 7$.

Rezolvare: $2 + x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq 7 - 2 \Leftrightarrow x \leq 5$, deci x este egal cu 0, 1, 2, 3, 4 sau 5.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Aflaţi numărul x ştiind că:
   a) $x + 37 = 75$;
   b) $4\,275 + x = 11\,111$;
   c) $x - 47 = 93$;
   d) $457 - x = 237$.
2. Aflaţi numărul x ştiind că:
   a) $x + 2\,174 = 5\,074$;
   b) $x - 1\,079 = 32\,105$;
   c) $19\,703 - x = 8\,347$;
   d) $2\,173 + x + 11\,437 = 25\,719$;
   e) $210 + 147 = x + 319$;
   f) $1\,973 + (x - 73) = 2\,135$.
3. Fie x unul dintre numerele 235, 1 372, 12 375. Verifică x egalitatea:
   a) $3\,725 - 1\,968 - (437 - x) = x + 1\,320$;
   b) $12\,375 - 10\,371 - (4\,375 - x) = x - 2\,371$;
   c) $7\,470 - (x - 375) - 6\,845 = 1\,000$?
4. Aflaţi-l pe x ştiind că acesta poate fi 0, 2, 3 sau 7 şi că:
   a) $x + 13 \leq 17$;
   b) $370 \geq x + (251 + 120)$;
   c) $x - 7 \leq 572 - 568$;
   d) $104 - 89 < x + 14 \leq 324 - 304$;
   e) $x + 724 \geq 730$;
   f) $x + 136 \geq 237 - 154$.
5. Aflaţi numerele x care verifică inegalităţile:
   a) $x + 5 < 9$;
   b) $x - 2 \leq 5$;
   c) $x + 1\,997 \leq 2\,000$;
   d) $1\,217 + x \leq 1\,221$;
   e) $182 - 153 \geq x + 19$.
6. Determinaţi valorile numărului natural x ştiind că:
   $$x - 120 \leq 215,\ 250 - x \leq 40 \text{ şi } x + 40 \geq 320.$$
7. Determinaţi termenul necunoscut din:
   a) $235 + 157 - 85 = 375 + x - 207$;
   b) $1\,243 - 755 = 71 + x - 375$;
   c) $483 + 4\,375 - x = 270 + 3\,427 - 197$.
8. Determinaţi-l pe x din:
   a) $x + (49 - 19) = 217$;
   b) $5 - x + 7 = 9$;
   c) $x - (521 - 41) = 29$;
   d) $(623 - 295) - x = 70$;
   e) $57 - (32 + 10 + x) = 10$;
   f) $200 - x + 375 = 156$.
9. Determinaţi-l pe x din:
   a) $80 - (30 + 10 - x) = 60$;
   b) $x - (540 - 420) = 70$;
   c) $(304 - 117 + 27) + x - 15 = 300$;
   d) $(903 - 124 + 31) - x = 400$;
   e) $70 + x - 30 + 120 = 250$;
   f) $376 - (25 + 107 - x) = 319$.
10. Determinaţi valorile numărului natural x pentru care:
   a) $12 \leq x - 3 \leq 27$;
   b) $123 \leq x - 100 \leq 149$;
   c) $225 \leq x + 100 \leq 237$;
   d) $4 \leq 4 + x \leq 9$.

PE Aplicare şi exersare **

11. Un număr este mai mare decât altul cu 121, iar suma lor este 473. Aflaţi numerele.

12. Suma a două numere este 192, iar diferenţa lor este 46. Aflaţi numerele.

13. Aflaţi trei numere naturale a, b, c, care verifică simultan egalităţile:

$$a + b = 28; \quad b + c = 16 \text{ şi } c + a = 20.$$

14. Suma dintre un număr natural de două cifre şi răsturnatul său este 77. Calculaţi numerele.

15. Suma a trei numere naturale impare consecutive este 51. Calculaţi numerele.

16. Aflaţi cifra a, ştiind că $\overline{aaa} + \overline{aa} + a = 861$.

17. Determinaţi numerele naturale care verifică relaţiile:

a) $(x + 3) - (120 - 70) \geq 50$;
b) $(75 - 40) - (x + 5) \geq 0$;
c) $(21 - 17) - (5 - x) < 0$;
d) $(527 - 432) - (x + 15) \geq 50$.

18. Dacă $a + b + c = 32$ şi $a = 15 - b$, aflaţi numărul c.

19. Suma a trei numere naturale este 573. Primul număr este cel mai mare număr par mai mic decât 125, al doilea număr este cu 47 mai mic decât primul. Calculaţi al treilea număr.

20. Determinaţi valorile numărului natural x care verifică inegalitatea:

a) $(x + 3) - (130 - 110) \geq 37$;
b) $(x + 123) - (237 - 157) > 201$;
c) $(67 - 42) - (x + 11) \geq 0$;
d) $(1\,437 - 1\,320) + (250 - x) > 100$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

21. Aflaţi numărul x care verifică egalitatea $1 + 3 + 5 + \ldots + 99 + x = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$.

22. Avem un şir de numere naturale care verifică următoarele condiţii:

i) primul număr din şir este 18;
ii) fiecare termen al şirului este mai mare cu 7 decât cel de dinaintea lui.

Aflaţi ce termen al şirului este situat pe locul 10 şi calculaţi suma primilor 20 de termeni ai şirului.

23. Determinaţi valorile numărului natural x care verifică inegalităţile:

a) $x + 1\,000 \leq 1\,325$ şi $x \geq 124$;
b) $2\,137 + x \leq 2\,514$ şi $x + 43 \geq 57$;
c) $(250 - x) - 130 \geq 70$ şi $x + 50 \geq 70$.

PE-PP Supermate ****

24. Diferenţa a două numere naturale este 2 014.

a) Dacă micşorăm descăzutul cu 201 şi mărim scăzătorul cu 14, calculaţi diferenţa.

b) Calculaţi numerele, ştiind că dacă micşorăm descăzutul cu 258 şi dublăm scăzătorul, diferenţa numerelor este 1 000.

25. Dacă $a + 3b = 26$ şi $b + 2c = 29$, calculaţi:

a) $2a + 9b + 6c$;
b) $3a + 11b + 4c$.

26. Calculaţi în câte moduri se poate scrie numărul 555 ca sumă de cel puţin două numere naturale formate doar din cifre egale cu 5.

27. Suma a trei numere naturale este 5 928. Dacă din fiecare din aceste numere se scade acelaşi număr, se obţin numerele 57, 82 şi, respectiv, 89. Calculaţi cele trei numere.

28. Se consideră numărul A format prin alipirea tuturor cifrelor de la 1 până la 9, adică $A = 123...9$.

a) Scrieţi numerele care se obţin mutând pe rând prima cifră la urmă până când 9 devine prima cifră.

b) Calculaţi suma tuturor numerelor obţinute la punctul a).

29. Fie numerele $A = 3n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, şi $B = 2p$, $p \in \mathbb{N}$.

a) Scrieţi şirul pe care îl obţineţi dând lui n valorile 0, 1, 2, 3, ..., 671.

b) Scrieţi şirul pe care îl obţineţi dând lui p valorile 0, 1, 2, 3, ..., 1 007.

c) Determinaţi numărul termenilor comuni ai celor două şiruri.

PE-PP 4. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Calculaţi:

a) $47 + 259$;

b) $147 - 88$;

c) $2\,000 - (357 + 124 - 49)$;

d) $1 + 2 + 3 + ... + 20$.

2. Aflaţi termenul x din:

a) $x + 1\,237 = 2\,000$;

b) $x - 154 = 1\,732$;

c) $457 - x = 104$;

d) $349 + x = 743$.

3. Alexandra, Andreea şi Adi au împreună 1 600 de lei. Calculaţi ce sumă are fiecare dacă Andreea are cu 200 de lei mai mult decât Adi, iar Alexandra are cât Andreea şi Adi la un loc.

4. Folosind proprietăţile adunării, calculaţi:

a) $347 + 206 + 443 + 194$;

b) $2\,005 + 291 + 995 + 2\,109$.

5. Comparaţi numerele x, y, z, dacă $y - x = 46$ şi $z - x = 21$.

6. Dacă $a + b = 325$ şi $c + d = 137$, calculaţi:

a) $a + b + c + d$;

b) $a + b - c - d$.

TESTUL 2

1. Calculaţi:

a) 208 + 2 027 – 145;

b) (122 + 436) – (64 + 56);

c) 957 – 421 + 327;

d) 2 + 4 + 6 + … + 20.

2. Dacă $a + b + c = 519$ şi $b + c = 119$, calculaţi:

a; $a - (b + c)$; $b + c - 19$; $a + b + c - 500$.

3. Aflaţi două numere naturale a căror sumă este 3 971 şi a căror diferenţă este 7.

4. Calculaţi numărul cu 2 437 mai mare decât 2 005.

5. Calculaţi suma tuturor numerelor naturale de forma $\overline{aa}$.

6. Calculaţi suma numerelor de forma $\overline{37x2}$, ştiind că x este o cifră impară mai mică decât 5.

TESTUL 3

1. Calculaţi:

a) 2 005 – 754 + 107 – 238;

b) 1 + 3 + 5 + … + 19.

2. Calculaţi suma dintre cel mai mic număr natural de trei cifre distincte şi cel mai mare număr natural de două cifre distincte.

3. Calculaţi $a + b - c$ şi $a - b + c$, ştiind că:

$a = 1\,957 + 234$;

$b = 1\,989 - 43$;

$c = 22 + 147$.

4. Ştiind că $a + 7 + b = 37$, calculaţi:

a) $(a + b) + 5$;

b) $a + (b + 11)$;

c) $47 - (a + b)$.

5. Suma dintre suma şi diferenţa a două numere naturale este 160. Calculaţi numerele. Câte soluţii are problema?

6. Găsiţi numerele de două cifre care au suma cifrelor 7.

TESTUL 4

1. Calculaţi:

a) (2 007 – 198) + (3 007 – 123);

b) (2 738 – 724) – (457 – 129).

2. Mihaela, Costin şi Cristina au împreună 160 de lei. Calculaţi câţi lei are fiecare dacă Mihaela şi Costin au împreună 130 de lei, iar Costin şi Cristina au împreună 80 de lei.

3. Cu cât este mai mare suma numerelor 257 şi 105 decât diferenţa lor?

4. Dacă scăzătorul este 1 989, iar diferenţa este 3 166, calculaţi descăzutul.

5. Calculaţi:

a) $27 - 25 + 23 - 21 + \ldots + 7 - 5 + 3 - 1$;

b) $28 - 26 + 24 - 22 + \ldots + 8 - 6 + 4 - 2$.

6. Determinaţi toate numerele scrise în baza 10 de forma $\overline{ab}$ care sunt cu 36 mai mari decât $\overline{ba}$.

TESTUL 5

1. Calculaţi a şi b, unde: $a = 375 - (124 + 76)$ şi $b = 573 - (147 - 97)$.

2. Scrieţi numărul 9 ca sumă de două numere naturale. Câte soluţii are problema?

3. Scrieţi aproximarea prin lipsă şi prin adaos la sute pentru rezultatul obţinut la adunarea:

$$325 + 758 + 75 + 42.$$

4. Calculaţi: $19 + \{12 - [17 - (3 + 7 - 2 - 1)] + 1\}$.

5. Diferenţa dintre două numere naturale este 1 347, iar cel mai mare dintre aceste numere este 4 572. Calculaţi diferenţa dintre numărul cel mic şi 1 225.

6. Determinaţi termenul necunoscut din:

a) $x + 124 = 375$;

b) $537 - x = 245$.

7. Stabiliţi care dintre valorile lui x, 19 sau 49, are proprietatea că:

a) $x - 7 \leq 25$;

b) $x + 2 \leq 50$.

8. Determinaţi numărul de forma $\overline{ab}$, ştiind că suma cifrelor sale este 8 şi răsturnatul său este cu 18 mai mic decât $\overline{ab}$.

9. Suma a trei numere naturale este 3 081. Dacă din fiecare se scade acelaşi număr, se obţin numerele: 1 010, 1 020 şi 1 030. Calculaţi numerele iniţiale.

TESTUL 6

1. Calculaţi a şi b, unde: $a = 275 - (176 + 24)$ şi $b = 423 - (137 - 87)$.

2. Scrieţi numărul 11 ca sumă de două numere naturale. Câte soluţii are problema?

3. Scrieţi aproximarea prin lipsă şi prin adaos la sute pentru rezultatul obţinut la adunarea:

$$235 + 578 + 65 + 22.$$

4. Calculaţi: $17 + \{11 - [15 - (4 + 8 - 3 - 2)] + 1\}$.

5. Diferenţa dintre două numere naturale este 1 437, iar cel mai mare dintre aceste numere este 3 427. Calculaţi diferenţa dintre numărul cel mic şi 1 215.

6. Determinați termenul x din:

a) $x + 214 = 537$;

b) $375 - x = 145$.

7. Stabiliți care dintre valorile lui x, 23 sau 49, au proprietatea că:

a) $x - 5 \leq 44$;

b) $x + 5 \leq 30$.

8. Determinați numărul de forma $\overline{ab}$, știind că suma cifrelor sale este 9 și răsturnatul său este cu 45 mai mic decât $\overline{ab}$.

9. Suma a trei numere naturale este 3 600. Dacă din fiecare se scade același număr, se obțin numerele: 1 120, 1 130 și 1 140. Calculați numerele inițiale.

PE

Nume _____ Clasa _____

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. Completaţi pe fişa de evaluare spaţiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului 1 001 – 372 este numărul ..... .

(0,5p) **2.** Dacă $84 - x - 15 = 60$, atunci numărul natural x este egal cu ..... .

(0,5p) **3.** Dintre numerele 33 şi 31, soluţie a inecuaţiei $x - 7 + 3 < 28$ este numărul ..... .

(0,5p) **4.** Dacă într-o şcoală sunt 534 de băieţi, iar fete sunt cu 19 mai multe, atunci rezultă că numărul elevilor şcolii este ..... .

II. Încercuiţi pe fişă doar răspunsul corect, ştiind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Se ştie că a şi b sunt două numere naturale astfel încât $a+8-b=38$. Atunci rezultatul calculului $(a-b)-7+2$ este egal cu:

A. 32 B. 25 C. 36 D. 38

(0,5p) **2.** Rezultatul calculului $29 + \{32 - [17 - (3 + 7 - 2 - 1)] + 1\}$ este numărul:

A. 50 B. 51 C. 52 D. 53

(0,5p) **3.** Dacă x este unul dintre numerele 42, 50, 51, 62 şi $x+3-(130-110) \geq 37$, atunci x este egal cu:

A. 42 B. 50 C. 51 D. 62

(0,5p) **4.** Suma a trei numere x, y şi z este 573. Dacă x este cel mai mare număr par mai mic decât 125, y este cu 47 mai mic decât x, atunci $z - y$ este egal cu:

A. 290 B. 295 C. 300 D. 305

III. Uniţi prin săgeţi fiecare enunţ, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Dacă $x+y+z+u=106$, $(x+y)-10=z+u$, $x+4=y$ şi $u-8=z$, atunci:

(0,5p)	a) $x + y$ este egal cu:	1) 28
(0,5p)	b) y este egal cu:	2) 20
(0,5p)	c) z este egal cu:	3) 31
(0,5p)	d) u este egal cu:	4) 27
		5) 58

La problemele IV şi V scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(2p) **IV.** Diferenţa a două numere naturale a şi b este 2 016. Mărind descăzutul cu 13 şi scăzătorul cu 3 se obţin alte două numere: x şi, respectiv, y.

a) Calculaţi $x - y$.

b) Cum trebuie mărit descăzutul a şi mărit scăzătorul b astfel încât să avem $x - y = 2\,016$?

(1p) **V.** Se scrie un şir de numere naturale pentru care primul număr din şir este 3 şi orice alt număr al şirului, începând cu cel de-al doilea, este egal cu suma dintre precedentul şi numărul 4. Rezultă astfel şirul de numere: 3, 7, 11, 15, 19, 23, … .
Arătaţi că 147 este al treizeci şi şaptelea număr al şirului.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

PE-PP

5. Înmulţirea numerelor naturale; proprietăţi. Factor comun

În clasele anterioare aţi învăţat că pentru orice două numere naturale se poate calcula **produsul** lor.

																				4	6	7	·					3	4	5	·				
4	6	7	·		6	3	=		2	9	4	2	1								6	3						9	7	2					
																		1	4	0	1						6	9	0					
3	4	5	·	9	7	2	=	3	3	5	3	4	0				2	8	0	2						2	4	1	5					
																	2	9	4	2	1				3	1	0	5						
																									3	3	5	3	4	0				

Oricare ar fi două numere naturale a şi b, există c, număr natural unic, numit **produsul** numerelor a şi b. Notăm:

$a \cdot b = c$ → produsul

a, b → factorii produsului

Operaţia prin care se obţine produsul a două numere naturale se numeşte **înmulţirea numerelor naturale.**

Proprietăţi:

1. Înmulţirea este **asociativă**, adică oricare ar fi a, b şi c numere naturale, atunci
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$
[Într-un produs cu mai mulţi factori, rezultatul nu se schimbă dacă grupăm (asociem) factorii diferit.]
2. Numărul 1 este **element neutru** la înmulţire, adică oricare ar fi numărul natural a, atunci:
$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$
[Dacă un factor al unui produs este 1, atunci produsul este egal cu celălalt factor.]
3. Înmulţirea este **comutativă**, adică oricare ar fi numerele naturale a şi b, atunci
$$a \cdot b = b \cdot a.$$
[Produsul nu se schimbă dacă schimbăm ordinea factorilor.]
4. Oricare ar fi numerele naturale a şi b, atunci:
$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ sau } b = 0.$$
[Un produs de numere naturale este 0 dacă şi numai dacă cel puţin unul dintre factorii produsului este 0.]
5. Oricare ar fi numărul natural a, atunci:
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$
[Dacă unul dintre factorii unui produs este 0, atunci produsul este 0.]
6. Înmulţirea numerelor naturale este **distributivă** faţă de adunare şi scădere, adică oricare ar fi a, b şi c numere naturale, atunci
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ şi } a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Înmulţirea numerelor naturale, relaţia de egalitate „=" şi relaţia de ordine „≤" sunt legate prin următoarele proprietăţi:

Oricare ar fi numerele naturale a, b, c şi d,

1. dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$;
   [O egalitate se păstrează dacă înmulţim fiecare termen al egalităţii cu acelaşi număr.]
2. dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $a \cdot c = b \cdot d$;
   [Egalităţile pot fi înmulţite termen cu termen.]
3. dacă $a \leq b$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot c$;
   [O inegalitate se păstrează dacă înmulţim fiecare termen al inegalităţii cu acelaşi număr.]
4. dacă $a \leq b$ şi $c \leq d$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot d$.
   [Inegalităţile de numere naturale, de acelaşi tip, pot fi înmulţite termen cu termen.]

   Observaţie: Inegalităţile $a \leq b$ şi $c \geq d$ nu pot fi înmulţite deoarece nu sunt de acelaşi tip.

Factor comun

În suma $a \cdot b + a \cdot c$, numărul a se numeşte **factor comun.**

Conform proprietăţii de distributivitate a înmulţirii faţă de adunare, produsul $a \cdot (b + c)$ este suma $a \cdot b + a \cdot c$, adică:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Dacă se scrie $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, se spune că am scos pe a factor comun.

Exemple:

1. În scrierea $2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot c + 2 \cdot d$, numărul 2 este **factor comun;** scoatem pe 2 factor comun şi obţinem: $2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot c + 2 \cdot d = 2 \cdot (a + b - c + d)$.

2. În scrierea $4 \cdot m - 4 \cdot n + 64$, numărul 4 este **factor comun;** scoatem pe 4 factor comun şi obţinem: $4 \cdot m - 4 \cdot n + 64 = 4 \cdot (m - n + 16)$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi:

   a) $17 \cdot 10$; b) $203 \cdot 1\,000$; c) $1\,007 \cdot 100$;
   d) $83 \cdot 9$; e) $907 \cdot 80$; f) $175 \cdot 87$;
   g) $2\,078 \cdot 803$; h) $542 \cdot 237$; i) $785 \cdot 342$.

2. Completaţi tabelul:

a	b	c	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$b \cdot c$	$a \cdot b \cdot c$	$(a \cdot b) \cdot c$
24	32	17					
2	149	372					
14	27	35					

3. Calculaţi numărul de 45 de ori mai mare decât:

   a) 12; b) 29; c) 137; d) 2 354; e) 13 739.

4. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

a) $27 \cdot 43 = 1\,161$; b) $457 \cdot 32 = 14\,624$;

c) $537 \cdot 129 > 69\,273$; d) $1\,237 \cdot 345 = 426\,765$.

5. Folosind proprietăţile înmulţirii, calculaţi cât mai simplu:

a) $25 \cdot 897 \cdot 4$; b) $8 \cdot 9\,037 \cdot 125$; c) $23 \cdot 81 + 77 \cdot 81$;

d) $672 \cdot 47 + 672 \cdot 53$; e) $829 \cdot 153 - 829 \cdot 53$; f) $93 \cdot 67 + 93 \cdot 89 - 93 \cdot 56$.

6. Completaţi tabelul:

a	b	c	$a \cdot b \cdot c$	$a \cdot (b + c)$	$c \cdot (a - b)$	$b \cdot (a - c)$	$a \cdot b - a \cdot c$
3	2	1					
11	9	7					
13	11	7					
17	8	3					
20	15	5					

7. Se ştie că: $x + y = 23$ şi $z = 15$. Calculaţi $xz + yz$.

8. Se ştie că: $x - y = 12$ şi $z = 10$. Calculaţi $xz - yz$.

9. Se ştie că: $ab + ac = 420$ şi $b + c = 14$. Aflaţi a.

10. Se ştie că: $ab - ac = 135$ şi $a = 9$. Aflaţi $b - c$.

PE Aplicare şi exersare **

11. Se ştie că: $ab + ac + a = 165$ şi $b + c = 10$. Aflaţi a.

12. Se ştie că $a + 2b + c = 51$ şi $2a + b + 2c = 42$. Aflaţi $a + b + c$.

13. Dacă a, b, c sunt numere naturale şi $a + b + c = 18$, iar $2a + b + 2c = 25$, calculaţi $(a + c) \cdot (3a + 2b + 3c)$.

14. Calculaţi:

a) $18 \cdot 37 - 15 \cdot 27$; b) $207 + 101 \cdot 32$;

c) $231 + 169 - 16 \cdot 25$; d) $15 + 23 + 10 \cdot [107 + 43 - (106 - 16 \cdot 6) \cdot 10]$.

15. Aflaţi a şi b, ştiind că $(a - 5) \cdot (b - 7) = 0$.

16. Aflaţi două numere ştiind că produsul lor este 56, iar suma lor este 15.

17. Într-un depozit sunt 527 de lăzi cu biscuiţi. Ştiind că în fiecare ladă sunt câte 5 rânduri şi pe fiecare rând sunt câte 4 pachete cu biscuiţi, calculaţi câte pachete cu biscuiţi sunt în depozit.

18. Calculaţi produsul $x \cdot x$, unde x este număr natural şi $5 \leq x < 10$.

19. Ştiind că $x \cdot y = 236$ şi $z = 123$, calculaţi $(x \cdot y) \cdot z$; $x \cdot (y \cdot z)$; $z \cdot (x \cdot y)$; $y \cdot (z \cdot x)$.

20. Produsul a două numere naturale este 12. Aflaţi numerele. Câte soluţii are problema?

21. Stabiliţi valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziţii:

p: „Dacă înmulţim un factor al unui produs cu un număr natural nenul, atunci produsul se măreşte cu acel număr."

q: „Dacă înmulţim un factor al unui produs cu un număr natural nenul, atunci produsul se măreşte de acel număr de ori."

22. Fie produsele:

a) $23 \cdot 17 \cdot 42$; b) $(14 + 36) \cdot 125$; c) $237 \cdot (1\,236 - 206)$; d) $127 \cdot 22 \cdot 155$.

1) Calculaţi produsele. 2) Aproximaţi prin adaos la zeci produsele.

3) Aproximaţi prin lipsă la sute produsele. 4) Rotunjiţi la mii produsele.

23. Scrieţi numărul 36 ca un produs de:

a) două numere naturale; b) două numere naturale egale;

c) trei numere naturale, astfel încât unul dintre ele să fie produsul celorlalte două.

24. Calculaţi în două moduri:

a) $50 \cdot (27 + 3)$; b) $14 \cdot 49 + 71 \cdot 14$;

c) $17 \cdot 7 + 64 \cdot 7 + 7 \cdot 119$; d) $450 \cdot 21 + 550 \cdot 21 - 2\,100$;

e) $736 \cdot 17 - 236 \cdot 17 + 200 \cdot 17$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

25. Folosind faptul că înmulţirea este distributivă faţă de adunare, iar 0 este element neutru, demonstraţi că dacă a este un număr natural, atunci: $a \cdot 0 = 0$.

26. Folosind proprietăţile înmulţirii, demonstraţi regula simplificării:

dacă $a \neq 0$ şi $a \cdot b = a \cdot c$, atunci $b = c$.

27. Folosind proprietăţile înmulţirii şi ale relaţiei de ordine „≤", demonstraţi că dacă a, b, c şi d sunt numere naturale, $a \leq b$ şi $c \leq d$, atunci rezultă: $a \cdot c \leq b \cdot d$.

28. Dacă $a - 5b = 7$, aflaţi x din relaţia:

a) $x + 3a - 15b = 29$; b) $x - 123 + 5a - 25b = 137$;

c) $x - 2a + 10b + 17 = 4$; d) $47 - x + 7a - 35b = 2a - 10b + 4$.

29. Rezolvaţi ecuaţia: $x + 2x + 3x + \ldots + 100x = 50\,500$.

30. Aflaţi numerele naturale a şi b care verifică egalitatea $ab + a = 15$.

31. Dacă $x + y = 8$ şi $y + 2z = 35$, calculaţi:

a) $5x + 13y + 16z$; b) $3y - 2x + 10z$; c) $7x + 10y + 6z$; d) $4 \cdot (2z + y) + 3x + 3y$.

32. Calculaţi cu câte zerouri se termină produsul: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 28$.

PE-PP Supermate ****

33. Determinaţi suma cifrelor nenule a şi b, ştiind că $\overline{ab6} + \overline{3ab} + \overline{b9a} = 1\,173$.

34. Cifrele a, b, c verifică relaţia $2(\overline{ab} + c) = 3(\overline{ab} - c)$. Calculaţi suma tuturor numerelor de forma $\overline{abc}$ ale căror cifre verifică relaţia de mai sus.

PE-PP 6. Împărţirea numerelor naturale

Împărţirea este o scădere repetată.

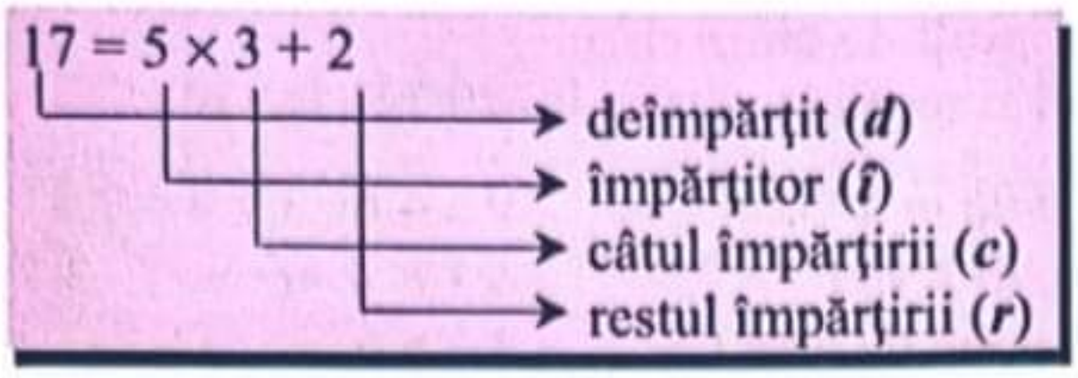
Exemplu: Din fire de garoafe se fac buchete, fiecare cu câte 5 fire. Câte buchete se fac cu 17 fire de garoafe? Rezolvarea este simplă: din cele 17 fire luăm 5 şi facem un buchet. Din cele 12 fire rămase luăm 5 şi facem un al doilea buchet şi aşa mai departe:

$$\underline{17 - 5}$$
$$\underline{12 - 5}$$
$$\underline{7 - 5}$$
$$2$$

Prin urmare, rezultă 3 buchete şi rămân două fire. Se spune că 5 **se cuprinde în** 17 de 3 ori şi rămâne rest 2:

$$5 \times 3 = 15;\ 17 - 15 = 2;\ 2 < 5.$$

Rezultă:



Reţinem: $d = î \cdot c + r$ şi $r < î$.

Dacă $r = 0$, atunci se scrie $d : î = c$ (se citeşte: „**d împărţit la î este egal cu c**").

Algoritmul prin care se află câtul şi restul împărţirii unui număr natural la un alt număr natural se fundamentează pe faptul că împărţirea este o scădere repetată.

Algoritmul de împărţire

1. Împărţitorul are o singură cifră.

Exemplu: Calculaţi câtul şi restul împărţirii lui 44 178 la 6.

Pasul 1: 6 nu se cuprinde în 4.
Pasul 2: 6 se cuprinde în 44 de 7 ori.
Verificăm prin **înmulţire, scădere şi compararea** câtului cu împărţitorul:
$6 \cdot 7 = 42$; $44 - 42 = 2$; $2 < 6$.
Pasul 3: Transformăm restul de mii în sute ⇒
⇒ $20 + 1 = 21$ (de sute);
6 se cuprinde în 21 de 3 ori.
Verificăm prin înmulţire, scădere şi comparare:
$6 \cdot 3 = 18$; $21 - 18 = 3$; $3 < 6$.

Pasul				
1	2	3	4	5

```
4  4  1  7  8 | 6
4  2 ↓          |------------
=  2  1        | 7  3  6  3
   1  8 ↓
   =  3  7
      3  6 ↓
      =  1  8
         1  8
         =  =   (rest 0)
```

Pasul 4: Transformăm restul de sute în zeci ⇒ $30 + 7 = 37$ (de zeci).
6 se cuprinde în 37 de 6 ori. Verificăm prin înmulţire, scădere şi comparare:
$6 \cdot 6 = 36$; $37 - 36 = 1$; $1 < 6$.
Pasul 5: Transformăm restul de zeci în unităţi ⇒ $10 + 8 = 18$ (unităţi).
6 se cuprinde în 18 de 3 ori. Verificăm prin înmulţire, scădere şi comparare:
$6 \cdot 3 = 18$; $18 - 18 = 0$; $0 < 3$.
Prin urmare, **câtul** împărţirii lui 44 178 la 6 este 7 363, iar $44\,178 = 6 \cdot 7\,363 + 0$.
Deoarece restul împărţirii este 0, se scrie $44\,178 : 6 = 7\,363$.

2. Împărţitorul are două cifre.

Exemplu: Calculaţi câtul şi restul împărţirii lui 31 337 la 42.

Pasul 1: 42 nu se cuprinde în 31.
Pasul 2: 42 se cuprinde în 313 cum se cuprinde 4 în 31; cam de 7 ori.
Verificăm prin înmulţire, scădere şi compararea restului cu împărţitorul:
$42 \cdot 7 = 294$; $313 - 294 = 19$, $19 < 42$.
Pasul 3: Transformăm restul de mii în zeci ⇒
⇒ $190 + 3 = 193$ (de zeci). 42 se cuprinde în 193 cum se cuprinde 4 în 19 (cam de 4 ori).
Verificăm.

```
3 1 3 3 7 : 4 2 = 7 4 6
2 9 4 ↓   |←— 7 · 4 2
= 1 9 3
  1 6 8 ↓ ←— 4 · 4 2
  = 2 5 7
    2 5 2 ←— 6 · 4 2
    = = 5 (rest)
```

Pasul 4: Transformăm restul de zeci în unităţi ⇒ $250 + 7 = 257$ (unităţi).
42 se cuprinde în 257 cum se cuprinde 4 în 25 (cam de 6 ori). Verificăm.
Prin urmare, **câtul** împărţirii lui 31 337 la 42 este 746, iar **restul** este 5.
Se scrie: $31\,337 = 42 \cdot 746 + 5$; $5 < 42$.

3. Împărţitorul are mai mult de două cifre.

Exemplu: Calculaţi câtul şi restul împărţirii lui 29 546 la 374.

Pasul 1: 374 nu se cuprinde în 295.
Pasul 2: 374 se cuprinde în 2 954 cum se cuprinde 3 în 29 (cam de 9 ori).
Verificăm: 9 · 374 = 3 366 (prea mare!!).

```
29546 : 374 = 79
2618 ↓ ←——— 7 · 374 = 2618
=3366
 3366 ←——— 9 · 374 = 3366
 ====
```

Cam de 7 ori. Verificăm: 7 · 374 = 2 618; 2 954 – 2 618 = 336; 336 < 374.
Pasul 3: Transformăm restul de mii în unităţi ⇒ 3 360 + 6 = 3 366;
374 se cuprinde în 3 366 cum se cuprinde 3 în 33 (de 11 ori, dar 11 nu este cifră); verificăm cu 9 astfel: 9 · 374 = 3 366.
Prin urmare, **câtul** împărţirii lui 29 546 la 374 este 79, iar restul este 0.
Se scrie 29 546 = 374 · 79 + 0 sau 29 546 : 374 = 79.

Reţineţi:

Împărţirea unui număr natural, numit *deîmpărţit*, la un alt număr natural nenul, numit *împărţitor*, permite găsirea a două numere naturale numite *cât* şi *rest* care verifică condiţiile:

deîmpărţitul = împărţitorul × câtul + restul
restul < împărţitorul

$$d = \hat{i} \cdot c + r;\ 0 \le r < \hat{i}$$

Observaţie: Dacă $r = 0$, atunci se scrie $d : \hat{i} = c$.

Exemple:

1. Calculaţi câtul şi restul împărţirii lui 24 la 6.
Aplicând algoritmul împărţirii găsim câtul 4 şi restul 0. Se scrie 24 : 6 = 4.

2. Calculaţi câtul şi restul împărţirii lui 27 la 8.
Aplicând algoritmul împărţirii găsim câtul 3 şi restul 3. **Scrierea** 27 : 8 = 3 rest 3 **nu este corectă! Corectă este scrierea:** 27 = 8 · 3 + 3, 3 < 8.

3. Pentru simplitate, exerciţiile de mai sus se reformulează astfel:
Calculaţi 24 : 6 şi 27 : 8.

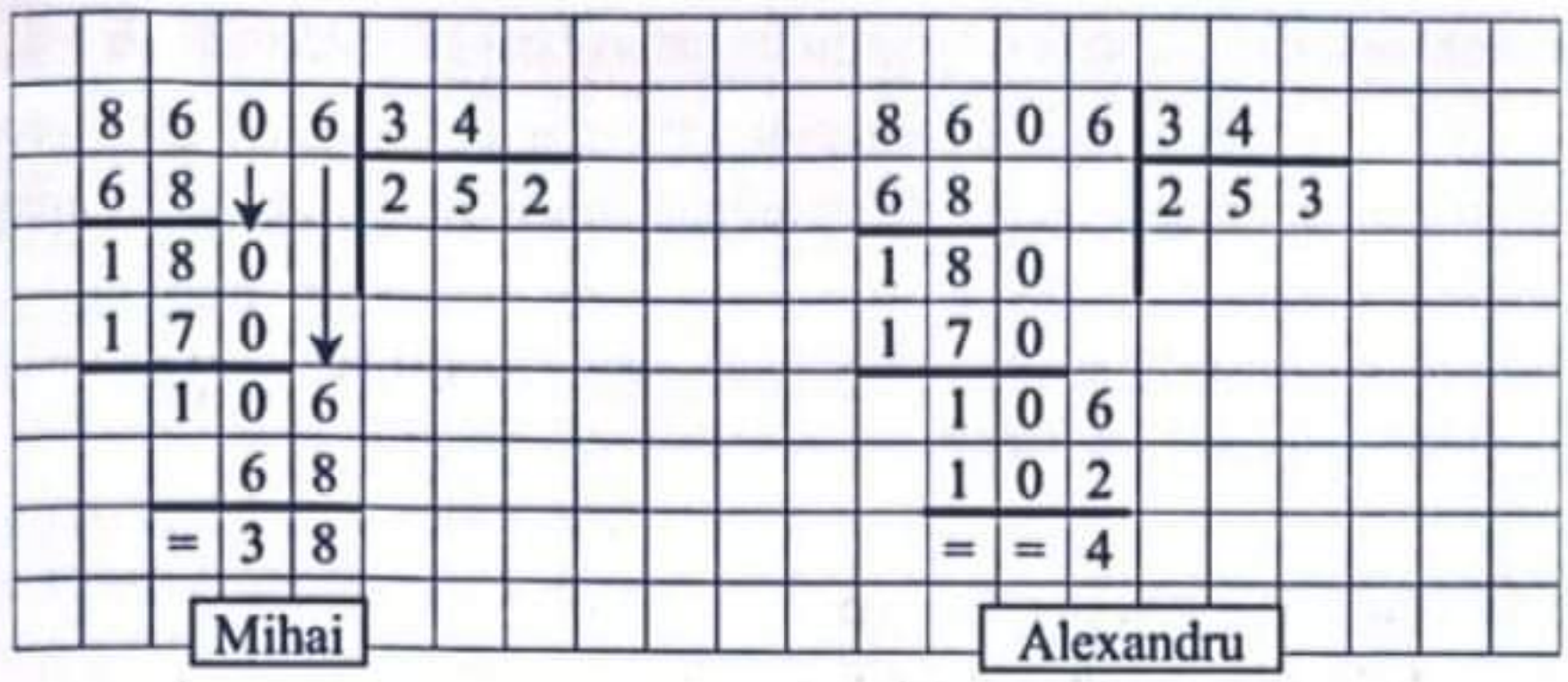
activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Observaţi calculul alăturat!
a) Copiaţi şi completaţi egalitatea: 583 = 7 · … + …
b) Cum se numeşte numărul 583? Dar 7? Dar 83? Dar 2?

```
583 | 7
56  | 83
=23
=21
 =2
```

2. Doi elevi, Mihai şi Alexandru, au efectuat aceeaşi împărţire (vezi extrasele din caietele lor).
a) Care calcul este corect? Justificaţi.
b) Pentru împărţirea cerută, scrieţi egalitatea care pune în evidenţă rezultatele împărţirii.



3. Mihai are o colecţie de 632 de timbre. El doreşte să aranjeze timbrele într-un clasor. Ştiind că pe fiecare pagină Mihai aranjează 25 de timbre, de câte pagini are el nevoie?

4. Calculaţi:

a) 6 125 : 5; b) 73 856 : 6; c) 100 : 9;
d) 630 900 : 9; e) 432 800 : 3; f) 1 000 : 8;
g) 142 905 : 7; h) 73 200 : 4; i) 100 000 : 7.

5. Scrieţi jumătatea, treimea şi sfertul numerelor:

a) 324; b) 1 704; c) 5 496; d) 93 888.

6. Scrieţi numărul:

a) de 4 ori mai mic decât 512; b) de 11 ori mai mic decât 825;
c) de 47 de ori mai mic decât 4 371; d) de 13 ori mai mic decât 3 887.

7. Micşoraţi de 6 ori numerele: 738, 942, 2 622, 5 022.

8. Pentru fiecare egalitate, găsiţi deîmpărţitul, împărţitorul, câtul şi restul împărţirii:

a) $347 \cdot 53 + 67 = 18\,458$; b) $1\,071 = 23 \cdot 45 + 36$;
c) $48 \cdot 19 + 11 = 923$; d) $2\,386 = 41 \cdot 57 + 49$.

9. Efectuaţi:

a) 6 312 : 24; b) 7 044 : 29; c) 82 362 : 43;
d) 1 044 : 37; e) 19 588 : 83; f) 288 860 : 96.

PE Aplicare şi exersare **

10. Găsiţi deîmpărţitul, ştiind că:

a) împărţitorul este 53, câtul este 17, iar restul este 29;
b) împărţitorul este 153, câtul este 98 şi restul este 5.

11. Mihai afirmă că restul împărţirii lui 138 la 19 este 23.

a) Fără a face calculul, Alexandru afirmă că Mihai a greşit împărţirea. Cine are dreptate? Justificaţi răspunsul.
b) Care sunt resturile posibile atunci când se face o împărţire prin 19?

12. Verificaţi egalitatea: $17 \cdot 23 + 19 = 410$.

a) Care este restul împărţirii lui 410 la 23?
b) Din egalitatea de mai sus rezultă care este restul împărţirii lui 410 la 17?
c) Folosiţi egalitatea de mai sus pentru a găsi câtul şi restul împărţirii lui 410 la 17.

13. Compuneţi o problemă care să se rezolve prin următorul calcul: $173 = 28 \cdot 6 + 5$.

14. Pentru a realiza un desen animat, 24 de imagini trebuie să se succeadă într-o secundă. Care este durata, exprimată în minute, a unui desen animat constituit din 14 400 de imagini?

15. Scrieţi câtul împărţirii dintre:

a) 77 şi 7; b) 77 şi 11; c) 777 şi 111;

d) $\overline{aa}$ şi a; e) $\overline{aa}$ şi 11; f) $\overline{aaa}$ şi 111.

16. Micşoraţi:

a) diferenţa numerelor 5 028 şi 1 404 de 3 ori;

b) produsul numerelor 1 836 şi 324 de 18 ori;

c) rezultatul calculului 896 : 4 – 678 : 6 de 3 ori.

17. Calculaţi:

a) de câte ori este mai mare produsul dintre 324 şi 18 faţă de câtul dintre 1 944 şi 36;

b) de câte ori este mai mic câtul numerelor 1 728 şi 144 decât produsul numerelor 12 şi 15.

PE Aprofundare şi performanţă ***

18. Daţi exemplu de o împărţire exactă (restul zero) în care împărţitorul să fie 196.

19. Daţi exemplu de o împărţire exactă (restul zero) în care câtul să fie 532.

20. Calculaţi:

a) 33 : 3; b) 3 333 : 33; c) 333 333 : 333; d) $\underbrace{333...3}_{2014} : \underbrace{333...3}_{1007}$.

21. Calculaţi:

a) $(1 + 2 + 3 + \ldots + 2\,018) : 2\,019$; b) $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2\,019) : 2\,020$.

22. Aflaţi pe x, ştiind că:

a) $x \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) = 60\,600$; b) $(1 + 2 + 3 + \ldots + 100) : x = 101$.

23. Se consideră numărul de forma $\overline{aabb}$. Calculaţi restul împărţirii acestui număr la 11.

24. Calculaţi câtul şi restul împărţirii numărului de forma $\overline{abab}$ la $\overline{ab}$.

25. Calculaţi pe x, ştiind că: $a + b = 15$ şi $x \cdot a + x \cdot b + 3x = 432$.

26. Se consideră numerele naturale a, b şi c. Determinaţi pe a, ştiind că $a \cdot b + a \cdot c = 476$ şi $b + c = 28$.

27. Calculaţi:

a) $(1 + 2 + 3 + \ldots + 14) : (1 + 2 + 3 + \ldots + 6)$;

b) $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15) : (1 + 2 + 3 + \ldots + 15)$.

PE-PP Supermate ****

28. Calculaţi câte zerouri are numărul: $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50)$.

29. Aflaţi numerele a, b, c, ştiind că $a \cdot b = 143$, $b \cdot c = 195$ şi $a \cdot c = 165$.

PE-PP 7. Teorema împărţirii cu rest. Reguli de calcul

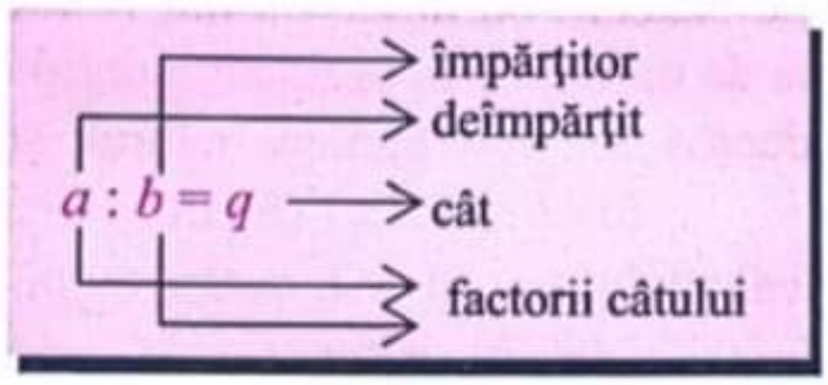
Algoritmul împărţirii a două numere naturale conduce la următoarea **teoremă**:

Oricare ar fi două numere naturale a şi b, $b \neq 0$, există numerele naturale q şi r, unic determinate, astfel încât:

$$a = b \cdot q + r \text{ şi } 0 \leq r < b,$$

unde q este **câtul**, iar r este **restul** împărţirii lui a la b.

Dacă restul împărţirii lui a la b este 0, atunci se spune că **a se împarte exact la b**. Notăm:



Operaţia prin care se obţine câtul a două numere naturale se numeşte **împărţire**.

Observaţii:

1. Într-un produs nenul ($a \cdot b = p$, $p \neq 0$) se poate pune în evidenţă, prin împărţire, orice factor al produsului: $a = p : b$; $b = p : a$. Cele trei egalităţi sunt echivalente (din oricare rezultă celelalte două): dacă $p \neq 0$, atunci:

$$a \cdot b = p \Leftrightarrow a = p : b \Leftrightarrow b = p : a.$$

2. Într-un cât $a : b = c$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ se poate pune în evidenţă:
   - deîmpărţitul: $a = c \cdot b$;
   - împărţitorul: $b = a : c$.

Cele trei egalităţi sunt echivalente:

$$a : b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b \Leftrightarrow b = a : c.$$

3. În calcule se folosesc paranteze: **rotunde** (mici), **drepte** (mari) şi **acolade**. Dacă sunt numai operaţii de înmulţire şi de împărţire, acestea se fac în ordinea în care sunt scrise.

   Exemplu: $[(72 : 4) : 2] \cdot 5 = 72 : 4 : 2 \cdot 5 = (18 : 2) \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45$.

4. Împărţirea **nu este asociativă**.

   Exemplu: $\left.\begin{array}{l}(18:6):3=3:3=1\\ 18:(6:3)=18:2=9\end{array}\right\} \Rightarrow (18 : 6) : 3 \neq 18 : (6 : 3)$.

5. Împărţirea **nu este comutativă**.

   Exemplu: $27 : 3 \neq 3 : 27$ deoarece $27 : 3 = 9$, iar $3 : 27$ **nu se poate efectua în mulţimea numerelor naturale** (este o împărţire cu rest: câtul împărţirii este 0, iar restul împărţirii este 3; conform teoremei împărţirii cu rest: $3 = 0 \cdot 27 + 3$).

Reguli de calcul

- Împărţirea la 0 nu are sens, altfel spus nu este definită. De aceea, pentru orice împărţire se pune condiţia ca împărţitorul să fie diferit de 0. Dacă această condiţie nu este pusă, atunci ea se subînţelege.

- Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c nenule, avem:

1) $a : a = 1$;
2) $0 : a = 0$;
3) $a : 1 = a$;
4) $(a + b) : c = a : c + b : c$;
5) $(a - b) : c = a : c - b : c$;
6) dacă $a = b$, atunci $a : c = b : c$;
7) dacă $a : c = b : c$, atunci $a = b$;
8) dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $a : c = b : d$;
9) dacă $a < b$, atunci $a : c < b : c$;
10) dacă $a : c < b : c$, atunci $a < b$;
11) $(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c) = b \cdot (a : c)$;
12) $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$.

Observaţie: Toate aceste 12 reguli de calcul pot fi demonstrate. Aşa cum am mai spus, demonstraţia este un şir de judecăţi prin care se probează că nu poate fi altfel. Demonstraţia regulilor 1) – 12) se bazează pe faptul că într-o împărţire putem pune în evidenţă deîmpărţitul prin operaţia de înmulţire, apoi folosim regulile de calcul ale înmulţirii.

Exemplu: Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere naturale şi operaţiile au sens, atunci:

(1) $$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c).$$

Demonstraţie: Rezultatul calculului $(a \cdot b) : c$ îl notăm cu p, deci:

$$(a \cdot b) : c = p.$$

Analog, rezultatul calculului $b : c$ îl notăm cu q, deci:

$$b : c = q.$$

Atunci egalitatea de demonstrat se scrie:

(2) $$p = a \cdot q.$$

În împărţirea $b : c = q$ punem în evidenţă deîmpărţitul. Rezultă:

(3) $$b = c \cdot q.$$

Analog, în împărţirea $(a \cdot b) : c = p$ punem în evidenţă deîmpărţitul $(a \cdot b)$. Rezultă:

(4) $$a \cdot b = c \cdot p.$$

Din (3) şi (4) rezultă $a \cdot (c \cdot q) = c \cdot p$. Folosind comutativitatea şi asociativitatea înmulţirii rezultă $c \cdot (a \cdot q) = c \cdot p$. Utilizând regula simplificării, rezultă $a \cdot q = p$, adică (2), ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplu: Demonstraţi că 2 560 000 : 16 000 = 2 560 : 16.

Demonstraţie: $2\,560\,000 : 16\,000 = 2\,560\,000 : (16 \cdot 1\,000) \overset{12)}{=} (2\,560\,000 : 16) : 1\,000.$

Dar $2\,560\,000 : 16 = (2\,560 \cdot 1\,000) : 16 \overset{11)}{=} (2\,560 : 16) \cdot 1\,000$. Deci $2\,560\,000 : 16\,000 = [(2\,560 : 16) \cdot 1\,000] : 1\,000 = (2\,560 : 16) \cdot (1\,000 : 1\,000) = (2\,560 : 16) \cdot 1 = 2\,560 : 16$.

Observaţie: Dacă împărţirea este exactă, în practică se taie zerourile împărţitorului şi tot atâtea zerouri de la deîmpărţit: 2 560 ~~000~~ : 16 ~~000~~ = 2 560 : 16.

Exemple:

1. Fie a şi b două numere naturale nenule şi $x = 6a + 3b + 20$. Aflaţi restul împărţirii numărului x prin 3.

Rezolvare: Din $x = 6a + 3b + 20 = 6a + 3b + 18 + 2 = 3 \cdot (2a + b + 6) + 2$. Cum $2 < 3$, din teorema împărţirii cu rest rezultă că restul împărţirii lui x la 3 este 2.

2. Stabiliţi dacă există numere naturale care împărţite la 5 dau restul 2 şi împărţite la 10 dau restul 8.

Rezolvare: Fie x numărul căutat. Din teorema împărţirii cu rest rezultă:

$$x = 5a + 2 \text{ şi } x = 10b + 8 = 10b + 5 + 3 = 5 \cdot (2b + 1) + 3,\ 3 < 5.$$

Deci, restul împărţirii lui x la 5 ar fi, pe de o parte, 2 şi, pe de altă parte, 3, ceea ce este absurd. Deci, nu există astfel de numere.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi:

a) 816 : 12; b) 95 378 : 103; c) 1 955 : 17;
d) 30 260 : 356; e) 190 320 : 305; f) 32 185 : 157;
g) 190 320 : 624; h) 2 431 100 : 115; i) 133 858 : 127;
j) 205 128 : 407; k) 33 884 400 : 6 040; l) 6 989 : 241;
m) 7 028 : 14; n) 37 884 : 123; o) 3 248 : 112.

2. Aflaţi câtul şi restul următoarelor împărţiri:

a) 2 715 : 37; b) 602 719 : 214; c) 4 156 : 29;
d) 21 700 : 370; e) 2 170 : 37; f) 25 531 : 121;
g) 40 051 : 203; h) 2 057 : 24; i) 4 128 : 101.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

a) 64 : 4 = 128 : 8; b) (1 600 : 8) : 4 = 3 200 : (8 · 4);
c) [(900 : 3) : 3] : 5 = 600 : 4; d) 8 000 : [(80 : 4) : 5] = 144 : 12;
e) 1 440 : 5 : 4 : 3 = 1 440 : (5 · 4 · 3); f) 512 : 16 : 4 = 512 : 4 : 16.

4. Aflaţi ce se întâmplă cu câtul şi restul unei împărţiri în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) dacă mărim deîmpărţitul cu o unitate;
b) dacă micşorăm deîmpărţitul cu o unitate;
c) dacă mărim şi deîmpărţitul, şi împărţitorul de acelaşi număr de ori.

5. Aflaţi un număr natural care împărţit la 17 dă câtul 23 şi restul 11.

6. Aflaţi toate numerele naturale care împărţite la 5 dau câtul 12.

7. Aflaţi toate numerele naturale care împărţite la 7 dau câtul egal cu restul.

8. Aflaţi un număr natural care împărţit la un număr natural de două cifre dă câtul 72 şi restul 98.

9. Suma a două numere este 21. Determinaţi numerele, ştiind că împărţind pe unul la celălalt se obţine câtul 4 şi restul 1.

PE Aplicare şi exersare **

10. Completaţi în căsuţe cu „=", „<" sau „>", astfel încât să obţineţi afirmaţii adevărate:

a) (44 200 : 130) : 2 □ 22 100 : (13 · 5); b) 28 980 : 9 : 5 □ 5 796 : (2 · 9);
c) 52 275 : 17 : 25 □ (90 846 : 63) : 14; d) 376 371 : (31 · 57) □ 2 365 · 23 : 5.

11. Suma a două numere naturale este 86. Determinaţi numerele, ştiind că restul împărţirii celui mare la cel mic este 2 şi câtul este 3.

12. Dacă la un număr de două cifre se adună 4 şi suma se împarte la 7, se obţine acelaşi rezultat ca la împărţirea cu 6 a diferenţei dintre număr şi 9. Care este numărul?

13. Determinați cel mai mare și cel mai mic număr natural de patru cifre care împărțite la 57 să dea restul 7.

14. Suma resturilor obținute prin împărțirea la 6 a unui număr de numere naturale consecutive este 6. Calculați câte numere au fost.

PE Aprofundare și performanță ***

15. Determinați deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul împărțirii unor numere naturale, știind că diferența dintre deîmpărțit și rest este 6.

16. Pentru numerotarea paginilor unei cărți s-au folosit 777 de cifre. Câte pagini are cartea?

17. Calculați restul împărțirii numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 39$ prin 35.

18. Determinați suma tuturor numerelor naturale care dau câtul 130 prin împărțirea la 7.

19. Fie a și b două numere naturale nenule și $x = 15a + 25b + 37$. Aflați restul împărțirii lui x la 5.

20. Fie a și b două numere naturale nenule, cu $a > b$ și $x = 84a - 28b + 57$. Aflați restul împărțirii lui x la 14.

21. Fie a și b două numere naturale nenule, cu $a < 15$ și $x = 35a + 17b + 1$. Se știe că x împărțit la 17 dă câtul 23 și restul 5. Aflați numerele naturale a și b.

22. Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 12 dau restul 4 și împărțite la 18 dau restul 8.

23. Aflați toate numerele naturale care împărțite la 9 dau câtul egal cu pătratul restului.

24. Aflați toate numerele naturale nenule care împărțite la 18 dau restul egal cu pătratul câtului.

25. Se consideră numărul $70a + 37$. Calculați restul împărțirii acestui număr la 7, la 10 și la 14.

PE-PP Supermate ****

26. Aflați numărul natural n astfel încât, împărțind numărul 151 la numărul $(n + 1)$, să se obțină câtul 3 și restul maxim.

27. Arătați că, oricum am alege 5 numere naturale, există cel puțin două care dau același rest la împărțirea cu 4.

PE-PP 8. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor

Operaţiile cu numere naturale pe care le-am studiat sunt: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea. Efectuarea corectă a exerciţiilor presupune o bună cunoaştere a proprietăţilor acestor operaţii (asociativitate, element neutru, comutativitate, distributivitate etc.) şi a tuturor regulilor de calcul studiate. Reamintiţi-vă aceste proprietăţi şi reguli de calcul. Reţinem şi următoarele reguli:

- Dacă nu sunt paranteze, operaţiile se efectuează în următoarea ordine:
  1) înmulţirile şi împărţirile, în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta;
  2) adunările şi scăderile, tot în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.
- Dacă sunt paranteze, atunci ordinea calculelor este următoarea:
  1) se efectuează calculele din parantezele rotunde (mici);
  2) se efectuează calculele din parantezele pătrate (mari);
  3) se efectuează calculele din acolade.

Exemplu: Calculaţi: $\{[1 + (14 + 14 \cdot 3) : 4] + [2 - (20 - 4 \cdot 2) : 12] \cdot 10\} : 5$.

Rezolvare:

Etape:

I. Efectuăm calculele din parantezele rotunde. Ţinem cont de ordinea efectuării operaţiilor:

$$(14 + 14 \cdot 3) = 14 + 42 = 56;$$
$$(20 - 4 \cdot 2) = 20 - 8 = 12.$$

II. Efectuăm calculele din parantezele drepte. Ţinem cont de rezultatele etapei I şi respectăm ordinea efectuării operaţiilor:

$$[1 + 56 : 4] = 1 + 14 = 15;$$
$$[2 - 12 : 12] = 2 - 1 = 1.$$

III. Efectuăm calculele din acoladă. Ţinem cont de rezultatele etapei a II-a şi de ordinea efectuării operaţiilor:

$$\{15 + 1 \cdot 10\} = 15 + 10 = 25.$$

IV. Finalizăm calculul:

$$25 : 5 = 5.$$

Observaţie: Pe caiete şi la tablă, rezolvarea exerciţiului se prezintă astfel (urmăriţi în dreapta etapele calculelor):

$= \{[1 + (14 + 42) : 4] + [2 - (20 - 8) : 12] \cdot 10\} : 5 =$ $= \{[1 + 56 : 4] + [2 - 12 : 12] \cdot 10\} : 5 =$	Etapa I
$= \{[1 + 14] + [2 - 1] \cdot 10\} : 5 =$ $= \{15 + 1 \cdot 10\} : 5 =$	Etapa a II-a
$= \{15 + 10\} : 5 =$ $= 25 : 5 =$	Etapa a III-a
$= 5$	Finalizare

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Efectuaţi:

a) $16 + 16 \cdot 2$;
b) $9 + 3 \cdot 457$;
c) $2 \cdot (1\,400 - 546)$;
d) $6 \cdot [3 + 3 \cdot (4 + 4 \cdot 225)]$;
e) $8 \cdot \{2 + 10 \cdot [542 + 2 \cdot (2 + 2 \cdot 542)]\}$;
f) $(12 \cdot 25 - 5 \cdot 13) + 1\,000 : 8 - 100 : 4$.

2. Dacă $a = 18$ şi $b + c = 57$, calculaţi valoarea expresiilor:

a) $a + b + c$;
b) $a + 5 \cdot b + 5 \cdot c$;
c) $3 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c$;
d) $a \cdot b + a \cdot c + 7 \cdot b + 7 \cdot c$.

3. Completaţi tabelul:

a	237	1 257	4 307	154	3 249	2 374	128
b	128	123	307	46	751	374	22
$a + b$							
$a - b$							
$5 \cdot a - b$							
$(a + b)(a - b)$							

4. Calculaţi, folosind metoda factorului comun:

a) $3 \cdot 7 + 3 \cdot 15 + 3 \cdot 13$;
b) $33 \cdot 117 + 33 \cdot 15 + 33 \cdot 113$;
c) $201 \cdot 327 - 201 \cdot 307 + 201 \cdot 23$;
d) $217 \cdot 407 - 217 \cdot 397 - 217$;
e) $1\,725 \cdot 707 + 324 \cdot 707 - 321 \cdot 707$;
f) $(111 + 222 + 333 + 444) : 111$.

5. Calculaţi în două moduri:

a) $17 \cdot (105 + 95)$;
b) $(24 + 16) \cdot 15$;
c) $32 \cdot (47 - 37)$;
d) $(257 - 17) \cdot 10$;
e) $1\,024 \cdot 379 + 1\,024 \cdot 121 - 1\,024 \cdot 450$;
f) $(111 + 222 + 333 + 444) : 111 + 10$.

6. Calculaţi:

a) $32 : 16 + \{76 - 2 \cdot [(20 + 4 \cdot 5) : 5] - 2 \cdot 6\}$;
b) $(3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18) : (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$;
c) $3 + 10 \cdot \{3 + 10 \cdot [3 + 10 \cdot (3 + 10 \cdot 3) - 3] - 3\} - 3$.

7. Calculaţi, respectând ordinea efectuării operaţiilor:

a) $93 : 3 + 41 \cdot 5 - 45 : 9 + 28 : 7 + 81 : 3 - 2 \cdot 6$;
b) $\{7 + 7 \cdot [7 + 3 \cdot (5 + 225 : 15 - 15)]\} - 161$;
c) $10 \cdot \{2 + 10 \cdot [126 + 10 \cdot (24 + 24 : 2 - 6)]\} - 42\,600$.

PE Aplicare şi exersare **

8. Calculaţi:

a) $(589 + 146) : 15 + (287 - 269) : 3$;
b) $(307 + 533) : 14 - 85 : 17 + 945 : 21$;
c) $22 \cdot 50 - 10\,800 : 45 + (11\,000 - 8\,000) : 50$;
d) $[(5\,008 : 4 + 199 \cdot 2) : 25 + 17] \cdot 1\,095 - 1\,127 : 23$.

9. Ştiind că:

a) $b + c = 21$ şi $a = 7$, calculaţi $a \cdot b + a \cdot c$;
b) $b - c = 31$ şi $a \cdot b - a \cdot c = 837$, calculaţi a;

c) $a \cdot b - a \cdot c = 1\,440$ și $a = 45$, calculați $b - c$;
d) $a + b - c = 48$ și $d = 144 : (95 - 83)$, calculați $a \cdot d + b \cdot d - c \cdot d$;
e) $b - c = 7$, $a = 14$, $b = 21$, calculați $a \cdot (b - c) + a \cdot b$.

10. Determinați numerele naturale a, b, c, știind că:
a) $a + b = 100$, $b + c = 110$, $a + c = 90$;
b) $a + b = 84$, $b + c = 64$, $a + c = 34$.

11. Calculați diferența dintre produsul și suma numerelor x și y, unde:
$x = 3z$, $y = t : 6$, $z = 5 \cdot (126 - 8 \cdot 7 : 14) - 210$,
$t = 60 \cdot 25 - [190 \cdot 5 - (4 \cdot 35 + 27 \cdot 14) : 7] \cdot 37 : 74$.

12. Stabiliți care dintre următoarele relații sunt adevărate și care sunt false:
a) $[530 + 3 \cdot (95 - 5 \cdot 15) : 12] - 14 \cdot 25 = 29$;
b) $[(63 + 991 \cdot 7) : 100 + (37 \cdot 111 - 56 \cdot 37) \cdot 2] : 11 = 37$;
c) $\{[(40 \cdot 20 + 50 \cdot 16) : 200 + 72 : 8] : 17 - 1\} \cdot [2 + 7 \cdot 10 - (30 - 5 \cdot 6) : 2] = 0$.

13. Comparați numerele a și b, unde $a = 1\,001 \cdot 27 + 1\,001 \cdot 23$ și $b = 2\,002 \cdot 13 + 2\,002 \cdot 12$.

14. Efectuați:
a) $1\,320 + [48 \cdot 23 + (340 \cdot 11 - 60 \cdot 5) - 235 \cdot 7]$;
b) $2\,307 + \{3\,702 + [270 : 3 + 3 \cdot (280 \cdot 5 - 3 \cdot 230)]\}$;
c) $31\,975 + 200 \cdot [8 \cdot (1\,270 - 2 \cdot 350) + 2\,340 : 5]$.

15. Efectuați:
a) $785 + 115 + 37 \cdot (15 + 23 \cdot 12)$;
b) $624 - 120 + 2\,025 : (266 - 17 \cdot 13)$;
c) $145 + 47 \cdot [215 \cdot 110 - 83 \cdot (405 - 18 \cdot 16)]$;
d) $512 - 287 + 10 \cdot \{15 + 2 \cdot 3 + [105 : 15 + (120 - 5 \cdot 19) \cdot 10] \cdot 2\}$;
e) $\{123 \cdot 35 + 10 \cdot [47 + 10 \cdot (407 + 2\,405 : 65)] - 2\,785\} \cdot 10$.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Stabiliți dacă numărul $(3x + 2)(x + 3)$ este număr natural par, oricare ar fi x număr natural.

17. Calculați:
a) $2\,017 + 2\,017 \cdot 3$;
b) $2\,017 + 2\,017 \cdot 2\,017 + 2\,018$;
c) $2\,001 \cdot 25 + 75 \cdot (5\,001 - 3\,000)$;
d) $2\,017 + 2\,017 \cdot 2\,018 - 2\,019 \cdot 2\,016$.

18. Calculați: $5a - 3(b + c) + 145 : 5 - 8$ dacă $3a - 2b = b - 2a + 3c$.

19. Ținând cont de ordinea operațiilor, calculați:
a) $10\,657 : \{[(21\,024 : 4 + 255 : 17) \cdot 2 + 2\,119] - 2\,004\} + 4 \cdot 4 : 4$;
b) $7\,747 : [17 + 24 \cdot 3 - (36 : 2 + 893 : 19) + 10 \cdot 3 + 7] - 127$;
c) $4 \cdot (222 \cdot 2 + 555 \cdot 2) - 12 \cdot [(16\,967 : 19 - 34 \cdot 12) - (100 - 75) : 5]$.

PE-PP Supermate ****

20. Arătați că pentru orice număr natural x are loc egalitatea:

$$[756 - (485 - 23 \cdot 21 + x) : (x + 2) - 1] : 377 = 2.$$

21. Aflați x din egalitatea:

$$128 - 4\,320 : x = 8[485 - a : (239 - 8\,126 : 34 + a) - 480],$$

unde a este număr natural nenul.

PE-PP 9. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Calculaţi:

a) $104 : 8$;
b) $207 \cdot 105$;
c) $15 \cdot 27 - 14 \cdot 3$;
d) $(12 \cdot 25 - 10 \cdot 7) : 10$.

2. Determinaţi x din egalităţile:

a) $x \cdot 37 = 444$;
b) $513 : x = 19$;
c) $x : 29 = 46$;
d) $124 \cdot x = 1364$.

3. Aflaţi cel mai mare număr natural care împărţit la 15 dă câtul 11.

4. Dacă $x + 2y = 17$ şi $y - 3z = 4$, calculaţi:

a) $x + 3y - 3z$;
b) $2x + 5y - 3z$;
c) $(3x + 6y) + (2y - 6z)$;
d) $(2x + 4y) \cdot (x + 4y - 6z)$.

5. Adunând descăzutul, scăzătorul şi diferenţa, obţinem numărul 2004. Calculaţi descăzutul.

6. Aflaţi numerele de două cifre al căror produs de cifre este 6.

TESTUL 2

1. Suma a două numere este 35, iar diferenţa lor este 7. Calculaţi produsul numerelor.

2. Calculaţi cât mai rapid:

a) $215 \cdot 89 - 215 \cdot 86 - 215$;
b) $324 \cdot 255 + 324 \cdot 745$.

3. Pentru $a = 50$, calculaţi: $a \cdot (a + 2) - a \cdot (a - 2)$.

4. Calculaţi un număr, ştiind că, dacă din triplul său se scade 7, rezultatul obţinut se împarte la 11, iar noul rezultat se micşorează cu 2, se obţine 5.

5. Calculaţi: $\{200 - [200 - (200 - 199)]\} \cdot 100$.

6. Determinaţi numerele de forma $\overline{ab}$ în baza 10, ştiind că diferenţa dintre $\overline{ab}$ şi răsturnatul său este 45 ($a > b$).

TESTUL 3

1. Suma a două numere este 98, iar unul dintre ele este cu 17 mai mare decât dublul celuilalt. Calculaţi numerele.

2. Calculaţi: $[(219 + 181) : 10 + 5 \cdot (87 - 65)] \cdot (140 : 20 - 2)$.

3. Ştiind că $a \cdot b = 79$ şi $b \cdot c = 49$, calculaţi: $b \cdot (a - c)$.

4. Aflaţi numărul natural x, ştiind că: $2 \cdot (x + 7) - 14 = 28$.

5. Când Mihaela avea 7 ani, mama sa avea 39. Acum mama are de 3 ori vârsta Mihaelei. Calculaţi vârsta Mihaelei şi vârsta mamei.

6. Un număr natural de trei cifre, scris în baza 10, împărţit la răsturnatul său dă câtul 5 şi restul 46. Calculaţi numărul, ştiind că diferenţa dintre cifra zecilor şi cea a unităţilor este 2.

TESTUL 4

1. Mihaela are cu 40 de lei mai mult decât Mihai. Câţi lei trebuie să-i dea Mihaela lui Mihai pentru a avea sume egale?

2. Efectuaţi: $\{100+[100+(100+100)\times 100]\}:100$.

3. M-am gândit la un număr natural, la care adun 5. Suma o înmulţesc cu 2, apoi din produs scad 10. Rezultatul obţinut îl împart la 7 şi obţin câtul 14. La ce număr m-am gândit?

4. Aflaţi numerele naturale $x \geq 4$, pentru care: $3(x-2)+4<16$.

5. Suma a două numere naturale este 18. Produsul lor este maxim. Calculaţi numerele.

6. Arătaţi că numărul $\overline{abcabc}$ se împarte exact prin 1 001.

TESTUL 5

1. Calculaţi $617 \cdot 54$ şi rotunjiţi rezultatul la ordinul sutelor.

2. Aflaţi numărul natural x ştiind că $2 \cdot (3x+1)-1=43$.

3. Aflaţi valorile numărului natural x ştiind că $7x+1 \leq 22$.

4. O carte are 124 de pagini. De câte cifre a fost nevoie pentru numerotarea paginilor?

5. Calculaţi $[(107+13 \cdot 4) \cdot 5-45 \cdot 7]:15$.

6. Mihai parcurge în prima zi 126 km, în a doua zi parcurge cu 27 km mai puţin decât în prima zi, iar în a treia zi parcurge cât în primele două zile la un loc. Calculaţi distanţa parcursă de Mihai în cele trei zile.

7. Efectuaţi împărţirile şi faceţi proba:

a) 2 537 : 15; b) 4 821 : 103.

8. Suma a două numere este 15. Produsul lor este maxim. Calculaţi numerele.

9. Adunând descăzutul, scăzătorul şi diferenţa, se obţine 2 014. Calculaţi descăzutul.

TESTUL 6

1. Calculaţi $761 \cdot 45$ şi rotunjiţi rezultatul la ordinul sutelor.

2. Aflaţi numărul natural x ştiind că $3 \cdot (2x+1)-1=32$.

3. Aflaţi valorile numărului natural x ştiind că $5x+1 \leq 26$.

4. O carte are 114 pagini. De câte cifre a fost nevoie pentru numerotarea paginilor?

5. Calculaţi $[(110 + 11 \cdot 5) \cdot 3 - 22 \cdot 7] : 31$.

6. Costin parcurge în prima zi 106 km, în a doua zi parcurge cu 29 km mai puţin decât în prima zi, iar în a treia zi parcurge cât în primele două zile la un loc. Calculaţi distanţa parcursă de Costin în cele trei zile.

7. Efectuaţi împărţirile şi faceţi proba:

a) 2 357 : 19; b) 2 843 : 117.

8. Suma a două numere este 17. Produsul lor este maxim. Calculaţi numerele.

9. Adunând descăzutul, scăzătorul şi diferenţa, se obţine 2 012. Calculaţi descăzutul.

PE

Nume _____ Clasa _____

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. Completaţi pe fişa de evaluare spaţiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(12\cdot 25-10\cdot 8):10$ este numărul ..... .

(0,5p) **2.** Într-o librărie două cărţi identice se cumpără cu 28 de lei. Atunci 17 cărţi de acelaşi fel se vor cumpăra cu ..... lei.

(0,5p) **3.** Cel mai mare număr natural x pentru care $x+10\cdot 73<734$ este ..... .

(0,5p) **4.** Dacă la o competiţie participă 91 de sportivi, organizaţi în 13 echipe şi fiecare echipă are acelaşi număr de sportivi, atunci numărul sportivilor dintr-o echipă este ..... .

II. Încercuiţi pe fişă doar răspunsul corect, ştiind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă $ab+bc=10$ şi $b=5$, atunci pentru a calcula $5(a+c)$ folosim următoarea proprietate a înmulţirii:

A. asociativitatea B. comutativitatea

C. distributivitatea D. elementul neutru

(0,5p) **2.** Dacă $a(b-c)+a(b+c)=74$, atunci produsul $a\cdot b$ este egal cu:

A. 37 B. 74 C. 36 D. 73

(0,5p) **3.** Numărul natural x pentru care $3(x-6)-13=56$ este:

A. 27 B. 28 C. 29 D. 32

(0,5p) **4.** Într-o împărţire, diferenţa dintre deîmpărţit şi rest este 133 şi diferenţa dintre cât şi împărţitor este 12 . Atunci suma câtului cu împărţitorul este egală cu:

A. 26 B. 46 C. 23 D. 32

III. Uniţi prin săgeţi fiecare enunţ, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Aflaţi numărul natural x din egalitatea:

(0,5p) a) $x\cdot 37=222$

(0,5p) b) $13\cdot x=2\,613$

(0,5p) c) $207:x=23$

(0,5p) d) $x:17=6$

1) 9
2) 201
3) 102
4) 6
5) 8

La problemele IV şi V scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(2p) **IV.** Se notează cu c, respectiv cu r, câtul, respectiv restul împărţirii lui m la n.

a) Calculaţi $c+r+(m-r):c$, ştiind că $m=167$ şi $n=13$.

b) Aflaţi $(m-r):c$, ştiind că $n=2\,016$.

(1p) **V.** Suma cifrelor unui număr de două cifre este 9. Aflaţi numărul, ştiind că împărţindu-l la răsturnatul său se obţine câtul 2 şi restul 18.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

PE-PP

10. Puteri cu exponent natural ale unui număr natural

Dacă n este un număr natural, $n \geq 2$, atunci **puterea a n-a** a numărului natural a se notează cu a^n (citim „a la puterea n") şi este prin definiţie:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}, \text{ deci } a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$

unde a este **baza** puterii, iar n, **exponentul** ei.

Puterea zero a numărului natural nenul a este prin definiţie 1; notăm $a^0 = 1$ şi citim „a la puterea zero este egal cu unu".

Puterea întâi a numărului natural a este a; notăm $a^1 = a$ şi citim „a la puterea întâi este egal cu a".

Observaţie: Nu se defineşte 0^0 sau, altfel spus, 0^0 nu are sens.

Operaţia prin care se obţine puterea unui număr natural se numeşte **ridicarea la putere.**

Oricare ar fi numerele naturale a, m şi n, $a \neq 0$, au loc următoarele **reguli de calcul:**

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	←	– Cum se înmulţesc două puteri care au aceeaşi bază? – Se scrie baza şi se adună exponenţii.
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$	←	– Cum se împart două puteri care au aceeaşi bază? – Se scrie baza şi se scad exponenţii.
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	←	– Cum se ridică o putere la altă putere? – Se scrie baza şi se înmulţesc exponenţii.
4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	←	– Cum se ridică un produs la o putere? – Se ridică fiecare factor al produsului la puterea respectivă.
5. $(a : b)^m = a^m : b^m$	←	– Cum se ridică un cât la o putere? – Se ridică fiecare factor al câtului la puterea respectivă.

Observaţii:

Folosirea parantezelor şi alte reguli de calcul

- Dacă nu sunt paranteze, operaţiile se efectuează de la stânga la dreapta, în următoarea ordine:
  1) ridicările la putere;
  2) înmulţirile şi împărţirile, în ordinea în care sunt scrise;
  3) adunările şi scăderile, în ordinea în care sunt scrise.
- Dacă sunt paranteze, se fac calculele din parantezele rotunde (mici), apoi din cele pătrate şi în final din acolade.
- Pentru efectuarea rapidă a unor calcule se recomandă memorarea unor puteri ale numerelor 2, 3, 4 şi 5.

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$
$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$
$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$

Exemplu: Arătați că $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} < 2^{101}$.

Rezolvare: Fie $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$.

Se calculează: $2x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{100} + 2^{101}$.

Se efectuează $2x - x = 2^{101} - 1 \Rightarrow x = 2^{101} - 1$ și cum $2^{101} - 1 < 2^{101} \Rightarrow x < 2^{101}$, adică $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} < 2^{101}$.

Observație: Analog se calculează sumele de forma: $1 + a + a^2 + \ldots + a^n$, unde a și n sunt numere naturale nenule.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. a) Calculați: 2^4; 3^3; 7^3; 8^2; 1^{2017}; $2\,018^0$; 5^4; $2\,019^1$; 11^3; 12^2; 10^3; 101^2; 17^2; 5^3; 2^7; 45^2; 67^2; 11^2.

b) Calculați: $2^3 + 5^2$; $3^2 - 2^3$; $2^4 \cdot 5^2$; $4^3 : 2^2$; $3^2 \cdot 7 - 1$.

c) Scrieți ca putere a lui 2 numerele: 4, 64, 16, 1, 8, 4^2, 8^3, 64^5.

d) Scrieți ca putere a lui 3 numerele: 1, 81, 9, 27^5, 9^{16}, 81^{14}.

2. Scrieți sub formă de putere:

a) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^0 \cdot 2$; b) $5^3 \cdot 5^5 \cdot 5 \cdot 5^{10}$; c) $27 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 3^0$;

d) $4^2 \cdot 8^3 \cdot 2^5 \cdot 16$; e) $47 \cdot 47^2 \cdot 47^5$; f) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot 125 \cdot 625$.

3. Calculați:

a) $2^5 + 6^3$; b) $5^2 - 3^2$; c) $2^3 + 2^4 + 2^1$;

d) $14^2 - 10^2 - 8^2$; e) $2^5 - 2^3 + 9^0$; f) $7^3 - 14^2 - 7^1$;

g) $5^0 + 5^1 + 5^2$; h) $4^3 - 3^3 + 5^0$; i) $2^3 + 5^3 + 2 \cdot 3$.

4. Efectuați:

a) $(7 - 3)^3$; b) $(2 + 3)^2$; c) $12^2 - 5^2$;

d) $40^2 + 30^2$; e) $50^2 - 30^2$; f) $2^4 + 3^2 \cdot 2 \cdot 5^0$;

g) $5^2 - 3^2 + 4^2$; h) $15^2 - 2^2 \cdot 3^2$; i) $5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2$.

5*. Calculați:

a) $2^{17} \cdot 2^{21}$; b) $3^{45} \cdot 3^{87} \cdot 3^{55}$; c) $7^{19} \cdot 7^{83} \cdot 7$; d) $2^{47} : 2^{39}$;

e) $5^{108} : 5^{72}$; f) $2^{37} \cdot 2^{47} : 2^{50}$; g) $\left(10^{12}\right)^{15}$; h) $\left(2^{17}\right)^8 \cdot 2^{31}$;

i) $3^{108} : \left(3^{15}\right)^6$; j) $\left(3^7 \cdot 5^{12}\right)^2$; k) $\left(2^{10} \cdot 3^7\right)^9 : \left(2^5 \cdot 3^6\right)^{10}$.

6*. Efectuați:

a) $\left(5^{17} \cdot 5^{18} + 7^{23} : 7^{15}\right) : \left(7 \cdot 7^2 \cdot 7^5 + 5^{50} : 5^{15}\right)$;

b) $\left[\left(2^{10}\right)^8 + 6^5 \cdot 3^7 + 2^{32}\right] : \left[\left(2^5\right)^{16} + 6^{12} : 2^7 + 2^9\right]$.

7. Pentru $x = 5$ și $y = 3$, verificați dacă fiecare din următoarele egalități este adevărată:

a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$; b) $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$; c) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

8. Fie egalitatea $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$. Verificați egalitatea pentru:

a) $x = y = z = 10$; b) $x = 2$; $y = 3$; $z = 4$.

* Exercițiile marcate cu * sunt facultative.

PE Aplicare şi exersare **

9. Aflaţi numerele naturale x şi y care verifică egalitatea: $2^x + 2^y = 24$.

10. Aflaţi numerele naturale x, y şi z care verifică egalitatea: $2^x + 2^y + 2^z = 28$.

11. Aflaţi numerele naturale nenule x, y şi z care verifică egalitatea: $2^x + 3^y + 5^z = 68$.

12. Aflaţi numărul natural x ştiind că:

a) $2^x = 8$; b) $2^x \cdot 4 = 32$; c) $8^x \cdot 16 = 128$.

13. Arătaţi că: $2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{50}) < 3^{51}$.

14. Fie numerele a şi b. Arătaţi că $a = b$.

$$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} + 2^{101} \text{ şi } b = 3(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{50}).$$

15. Arătaţi că: $(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1) = a^n - 1$.

16. Scrieţi numărul $2^{10} - 1$ ca o sumă de 10 puteri consecutive ale lui 2.

17. Calculaţi:

a) $(4 + 3)^3 - (4 - 3)^{10}$; b) $(10^3 - 125 \cdot 2^3) : 123^{123}$;

c) $[(10^3 : 5^2 : 8 + 3^2 \cdot 5^2) : 3^0] \cdot 2^{2^0}$; d) $\{[(12^2 + 5^2) : 13]^2 - 2^7 - 2^0\} : 2^3$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

18*. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:

a) $(4^x)^2 = 2^8$; b) $(10^x)^5 \cdot 100 = (2^4 \cdot 5^4)^8$;

c) $(5^2)^{x+3} = 5^{4x} \cdot 5^2$; d) $x : (2^3)^0 = 1$;

e) $(3^x)^5 = 3^{10} \cdot 3^5$; f) $(7^4)^x = (7^5)^{2^2}$;

g) $x : (2^2 \cdot 2^3) = 4$; h) $x + (2^2)^5 = 2^3 \cdot 2^7$.

19. Descompuneţi în produs, folosind factorul comun:

a) $4^5 + 4^8 - 4^4$; b) $3^3 + 6^5 + 3^4$; c) $x^2 + x^3 + x^4$;

d) $5^3 \cdot 6 + 5^4 \cdot 7$; e) $3x^2y + 2xy^2 + 4xy$; f) $7^5 \cdot x + 7^4 \cdot y + 49z$.

20. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:

a) $3^x + 3^{x-1} = 4$; b) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 40$;

c) $5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = 81$; d) $3^{2x+1} - 3^{2x} - 3^{2x-1} - 3^{2x-2} - 3^{2x-3} = 123$.

21. Calculaţi:

a) $(16 \cdot 12^{10} - 4 \cdot 12^{10}) : 12^{11}$; b) $15^2 - (14 \cdot 15 + 15) : 15^2$;

c) $10^3 \cdot 85 - 10^3 \cdot 61 - 3\,000$; d) $5^{11} - (6 \cdot 5^{10} - 2 \cdot 5^{10})$.

22. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:

a) $x^2 : 2^2 = 3^2$; b) $25^2 - x = 24^2$; c) $x : 10^3 = 10^0$;

d) $441 : x = 21^2$; e) $x - 2^5 = 5^3$; f) $324 : x = (3^2 \cdot 2)^2$.

PE-PP Supermate ****

23. Determinaţi numerele naturale x, y şi z ştiind că $x < y < z$ şi $3^x + 2 \cdot 3^y + 2 \cdot 3^z = 225$.

24. Determinaţi numerele naturale a, b şi c care verifică egalitatea $2^{2a+1} + 2^{3b} + 2^{2c} = 112$.

25. Dacă a şi b sunt cifre consecutive în baza zece şi $a > b$, arătaţi că:

$$\overline{aaa} + 333^2 = \overline{111bbb}.$$

PE Aplicare şi exersare **

9. Aflaţi numerele naturale x şi y care verifică egalitatea: $2^x + 2^y = 24$.

10. Aflaţi numerele naturale x, y şi z care verifică egalitatea: $2^x + 2^y + 2^z = 28$.

11. Aflaţi numerele naturale nenule x, y şi z care verifică egalitatea: $2^x + 3^y + 5^z = 68$.

12. Aflaţi numărul natural x ştiind că:

a) $2^x = 8$; b) $2^x \cdot 4 = 32$; c) $8^x \cdot 16 = 128$.

13. Arătaţi că: $2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{50}) < 3^{51}$.

14. Fie numerele a şi b. Arătaţi că $a = b$.

$$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} + 2^{101} \text{ şi } b = 3(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{50}).$$

15. Arătaţi că: $(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1) = a^n - 1$.

16. Scrieţi numărul $2^{10} - 1$ ca o sumă de 10 puteri consecutive ale lui 2.

17. Calculaţi:

a) $(4 + 3)^3 - (4 - 3)^{10}$; b) $(10^3 - 125 \cdot 2^3) : 123^{123}$;

c) $[(10^3 : 5^2 : 8 + 3^2 \cdot 5^2) : 3^0] \cdot 2^{2^0}$; d) $\{[(12^2 + 5^2) : 13]^2 - 2^7 - 2^0\} : 2^3$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

18*. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:

a) $(4^x)^2 = 2^8$; b) $(10^x)^5 \cdot 100 = (2^4 \cdot 5^4)^8$;

c) $(5^2)^{x+3} = 5^{4x} \cdot 5^2$; d) $x : (2^3)^0 = 1$;

e) $(3^x)^5 = 3^{10} \cdot 3^5$; f) $(7^4)^x = (7^5)^{2^2}$;

g) $x : (2^2 \cdot 2^3) = 4$; h) $x + (2^2)^5 = 2^3 \cdot 2^7$.

19. Descompuneţi în produs, folosind factorul comun:

a) $4^5 + 4^8 - 4^4$; b) $3^3 + 6^5 + 3^4$; c) $x^2 + x^3 + x^4$;

d) $5^3 \cdot 6 + 5^4 \cdot 7$; e) $3x^2y + 2xy^2 + 4xy$; f) $7^5 \cdot x + 7^4 \cdot y + 49z$.

20. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:

a) $3^x + 3^{x-1} = 4$; b) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 40$;

c) $5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = 81$; d) $3^{2x+1} - 3^{2x} - 3^{2x-1} - 3^{2x-2} - 3^{2x-3} = 123$.

21. Calculaţi:

a) $(16 \cdot 12^{10} - 4 \cdot 12^{10}) : 12^{11}$; b) $15^2 - (14 \cdot 15 + 15) : 15^2$;

c) $10^3 \cdot 85 - 10^3 \cdot 61 - 3\,000$; d) $5^{11} - (6 \cdot 5^{10} - 2 \cdot 5^{10})$.

22. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:

a) $x^2 : 2^2 = 3^2$; b) $25^2 - x = 24^2$; c) $x : 10^3 = 10^0$;

d) $441 : x = 21^2$; e) $x - 2^5 = 5^3$; f) $324 : x = (3^2 \cdot 2)^2$.

PE-PP Supermate ****

23. Determinaţi numerele naturale x, y şi z ştiind că $x < y < z$ şi $3^x + 2 \cdot 3^y + 2 \cdot 3^z = 225$.

24. Determinaţi numerele naturale a, b şi c care verifică egalitatea $2^{2a+1} + 2^{3b} + 2^{2c} = 112$.

25. Dacă a şi b sunt cifre consecutive în baza zece şi $a > b$, arătaţi că:

$$\overline{aaa} + 333^2 = \overline{111bbb}.$$

PE-PP 11. Compararea şi ordonarea puterilor. Reguli de comparare

O problemă care se pune este aceea de a compara două puteri, a^m şi b^n, unde a, b, m şi n sunt numere naturale.

Se folosesc următoarele două reguli:

1. $m < n \Rightarrow a^m < a^n$	←	Dintre două puteri care au aceeaşi bază, este mai mică cea care are exponentul mai mic.
2. $a < b \Rightarrow a^m < b^m$	←	Dintre două puteri care au acelaşi exponent, este mai mică cea care are baza mai mică.

Pentru a compara două puteri care au baze diferite şi exponenţii diferiţi, dacă este posibil, se aduc puterile fie la acelaşi exponent, fie la aceeaşi bază, şi apoi se compară după regulile enunţate mai sus.

Exemplu: Ordonaţi crescător numerele: 27^9; 9^{13} şi 243^5.

Rezolvare: Descompunem bazele: $27 = 3^3$; $9 = 3^2$; $243 = 3^5$. Rezultă:

$$27^9 = (3^3)^9 = 3^{3 \cdot 9} = 3^{27};\ 9^{13} = (3^2)^{13} = 3^{26};\ 243^5 = (3^5)^5 = 3^{25}.$$

Având aceeaşi bază, comparăm exponenţii. Deoarece $25 < 26 < 27 \overset{(1)}{\Rightarrow} 3^{25} < 3^{26} < 3^{27}$, deci $243^5 < 9^{13} < 27^9$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Comparaţi numerele:

a) 2^{17} şi 2^{31}; b) 5^{101} şi 5^{83}; c) 101^{23} şi 101^{75}; d) 5^{23} şi 7^{23};
e) 11^{47} şi 5^{47}; f) 2^{38} şi 3^{38}; g) 7^{21} şi 5^{17}; h) 3^{19} şi 2^{13};
i) 23^{41} şi 41^{59}; j) 1^{107} şi 1^{203}; k) 0^{43} şi 0^{83}.

2. Comparaţi numerele:

a) 2^{53} şi 4^{29}; b) 9^{51} şi 3^{103}; c) 4^{47} şi 8^{31};
d) 9^{24} şi 27^{16}; e) 125^{43} şi 25^{61}; f) 10^{43} şi 100^{19}.

3. Comparaţi numerele:

a) 2^{30} şi 3^{20}; b) 5^{34} şi 3^{51}; c) 2^{155} şi 3^{93};
d) $2^{111} \cdot 5^{38}$ şi 3^{131}; e) 10^{74} şi 6^{123}.

4. Comparaţi numerele: 2^{302} şi 3^{203}.

5. Comparaţi numerele: $2^{87} + 2^{86} + 2^{85}$ şi $5^{35} + 5^{34}$.

6. Comparaţi numerele: $3^{2n+1} - 9^n$ şi $2^{3n+1} - 8^n$, unde n este un număr natural oarecare.

7. Completaţi în căsuţe simbolul adecvat (<, = sau >):

a) $3^7 \square 3^5$; b) $2^3 \square 2^3 + 3^0$; c) $(3 \cdot 5)^2 \square 3^2 \cdot 5^2$;
d) $(5^2)^3 \square 5^{12} : 5^6$; e) $(7^5)^2 \square (7^4)^2 \cdot 7^2$.

8. Comparaţi numerele:

a) 2^{2^3} cu $(2^2)^3$; b) 3^{2^3} cu $(3^2)^3$;
c) 3^{38} cu $2^{59} - 2^{58} - 2^{57}$; d) 9^{40} cu 81^{20}.

9. Ordonaţi crescător numerele: 2^2, 2^5, 4^2, 2^7, 8.

PE Aplicare şi exersare **

10. Ordonaţi crescător numerele:

a) $(3^9)^4$; $(3^{13})^3$ şi 9^{16};

b) $(2^2)^{30}$; $2^6 \cdot 2^{11} \cdot 2^{14}$ şi $\left(\left(2^2\right)^5\right)^3$.

11. Ordonaţi descrescător numerele:

a) 7^5; 2^{18}; 3^{12};

b) 3^{51}; 2^{102}; 6^{34};

c) 25^{16}; 2^{48}; 16^{20};

d) 3^{54}; $7^{27} - 2^2 \cdot (7^2)^{13}$; 9^{28}.

12. Ordonaţi crescător numerele: 3^{3^3}, $\left(3^3\right)^3$, 33^3, 3^{33}.

13. Ordonaţi descrescător numerele:

a) 3^{40}; 2^{60}; 25^{10}; 7^{20};

b) 3^{2x}; 2^{3x}; 5^x, $x \neq 0$.

14. Fie $a = 4^{103}$ şi $b = (5^{200} - 4 \cdot 5^{199} + 9^{54} : 3^{107} - 5^{199})^{206}$. Verificaţi care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) $a < b$;

b) $a = b$;

c) $a > b$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

15. Determinaţi numerele naturale x astfel încât:

a) $2^x < 3^4$;

b) $2^x = 3^x$;

c) $2^{2x} < 8^4$;

d) $3^{2x} > 27^x$;

e) $8^x = 4^3$;

f) $9^2 > 3^x$;

g) $5^x = 1$;

h) $3^{x+2} = 3^3$;

i) $[(5^2)^3]^x = 5^{12}$.

16. Comparaţi numerele:

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$ cu $2^7 - 1$;

b) 2^{58} cu $3^{39} - 9^{19}$.

17. Comparaţi numerele:

a) $x = 2^{96} + 2^{98} + 2^{100}$ şi $y = 2^{101} + 2^{99} + 2^{97}$;

b) $x = 3^{57} - 3^{55} - 3^{53}$ şi $y = 5^{43} - 125^{14}$.

18. Comparaţi numerele:

a) $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{50}$ şi 2^{2975};

b) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot \ldots \cdot 5^{50}$ şi 2^{2975}.

19. Care dintre numerele: $A = a^{1+2+\ldots+1980}$ şi $B = (a^{990})^{1981}$ este mai mare?

PE-PP Supermate ****

20. Aflaţi câte cifre are numărul 2^{30} scris ca număr natural.

Indicaţie: Se arată că $10^9 < 2^{30} < 10^{10}$.

21. Determinaţi ultimele două cifre ale numărului $a = 2^{4n} + 2^{4n+2}$, unde n este un număr natural nenul.

PE-PP

12. Pătratul şi cubul unui număr natural. Pătrate perfecte

Puterea a doua a unui număr natural n, adică n^2, se mai numeşte **pătratul numărului** n. Astfel, n^2 se citeşte „n la pătrat".

Puterea a treia a numărului natural n, adică n^3, se mai numeşte **cubul numărului** n. Astfel, n^3 se citeşte „n la cub".

Un **pătrat perfect** este pătratul unui număr natural.

Şirul de numere 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... este şirul $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, n^2, \ldots$ şi se numeşte **şirul numerelor naturale pătrate perfecte.**

Fie x un număr natural. Notăm cu $U(x)$ ultima cifră a numărului x. Să analizăm datele din următorul tabel:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$U(x^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Se observă astfel că **ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi** 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. De aici rezultă şi o metodă prin care putem dovedi că un număr nu este pătrat perfect. Dacă ultima cifră a numărului este diferită de 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, atunci numărul nu este pătrat perfect sau, altfel spus, dacă ultima cifră a unui număr este 2, 3, 7 sau 8, atunci sigur numărul nu este pătrat perfect.

Pentru a afla ultima cifră a unui număr vom ţine cont de:

$$U(x+y) = U(U(x) + U(y)),\ U(x \cdot y) = U(U(x) \cdot U(y)) \text{ şi } U(x^n) = U[(U(x))^n].$$

Exemple: $U(78 + 95) = U(8 + 5) = U(13) = 3$; $U(97 \cdot 83) = U(7 \cdot 3) = U(21) = 1$; $U(36^{59}) = U(6^{59}) = 6$.

$0^1 = 0$, $0^2 = 0$

$1^1 = 1$, $1^2 = 1$

$2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$

$3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$

$4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$

$5^1 = 5$, $5^2 = 25$

$6^1 = 6$, $6^2 = 36$

$7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$

$8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4096$, $8^5 = 32768$

$9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729$

Dacă restul este 1, ultima cifră este 2, 3, 7, respectiv 8, dacă restul este 2, ultima cifră este 4, 9, 9, 4, dacă restul este 3, ultima cifră este 8, 7, 3, respectiv 2 şi dacă restul este 0, ultima cifră este 6, 1, 1, respectiv 6.

Exemple:

1. Arătați că numărul $1\,998^{1999}$ nu este pătrat perfect.

Rezolvare: Deoarece $1\,999 = 499 \cdot 4 + 3$, $U(1\,998^{1999}) = U(8^{1999}) = U(8^3) = 2$. Cum ultima cifră a numărului $1\,998^{1999}$ este 2 rezultă că $1\,998^{1999}$ nu este pătrat perfect.

2. Arătați că numărul $67^{38} + 92^{43}$ nu este pătrat perfect.

Rezolvare: $U(67^{38}) = U(7^{38}) = U(7^2) = 9$; $U(92^{43}) = U(2^{43}) = U(2^3) = 8$;

$U(67^{38} + 92^{43}) = U(9 + 8) = U(17) = 7$. Cum ultima cifră a numărului $67^{38} + 92^{43}$ este 7, rezultă că $67^{38} + 92^{43}$ nu este pătrat perfect.

3. Arătați că numărul $2^{20} + 2^{10}$ nu este pătrat perfect.

Rezolvare: $2^{20} + 2^{10} = 2^{10}(2^{10}+1)$ și $(2^{10})^2 < 2^{10}(2^{10}+1) < (2^{10}+1)^2$, deci $2^{10}(2^{10}+1)$ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, deci nu este pătrat perfect.

4. Arătați că numărul $4^{17} \cdot 9^{23}$ este pătrat perfect.

Rezolvare: $4^{17} \cdot 9^{23} = (2^2)^{17} \cdot (3^2)^{23} = 2^{2\cdot 17} \cdot 3^{2\cdot 23} = (2^{17})^2 \cdot (3^{23})^2 = (2^{17} \cdot 3^{23})^2$. Rezultă că $4^{17} \cdot 9^{23}$ este pătrat perfect.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Verificați care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte: 8, 3^5, 4^3, 4^0, 81, 3^{12}, 9^{2003}, 5^{2p}, 27^{2p+3}, 10^{6p}, unde $p \in \mathbb{N}$.

2. Verificați care dintre următoarele numere sunt cuburi perfecte: 2^8, 27, 64, 5^{48}, 7^{225}, 11^{2001}, 17^{2003}.

3. Calculați:

a) pătratul numerelor mai mici decât 20;

b) cubul numerelor mai mici decât 10.

4. Arătați că numărul $2\,018^2 - 2\,018 - 2\,017$ este pătrat perfect.

5. Arătați că numărul $2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ este pătrat perfect.

6. Scrieți numerele 10^2 și 13^2 ca sumă de două pătrate perfecte.

7. Scrieți numărul 36 ca sumă de 3 cuburi perfecte.

8. a) Calculați ultima cifră a numărului a^2, unde a este un număr natural oarecare.

b) Calculați ultima cifră a numerelor: $2a^2$, $3a^2$, $6a^2$.

PE Aplicare și exersare **

9. Scrieți cel mai mic număr natural nenul diferit de 1 care este în același timp cub perfect și pătrat perfect.

10. Calculați ultima cifră a numerelor: 2^{2018}; 3^{2019}; 4^{2017} și 5^{2020}.

11. Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$;

b) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 19$.

12. Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:
a) 2^{1981}; b) 3^{483}; c) 97^{143}; d) $1\,998^{781}$; e) $3^{83} + 8^{68}$.

13. Arătați că numărul $3^{1981} + 4^{1981} + 5^{1981} + 6^{1981}$ nu este pătrat perfect.

14. Arătați că numărul $3^{82} + 3^{83} + 3^{84}$ nu este pătrat perfect.

15. Arătați că numărul $5^{34} + 5^{17}$ nu este pătrat perfect.

16. Arătați că numărul $25^{47} \cdot 49^{17}$ este pătrat perfect.

17. Arătați că numărul $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$ nu este pătrat perfect.

18. Arătați că numărul $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$ este pătrat perfect.

PE Aprofundare și performanță ***

19. Arătați că numărul $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ nu este pătrat perfect.

20. Arătați că numărul $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

21. Arătați că numărul $2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^n$ nu este pătrat perfect, unde n este număr natural.

22. Arătați că dacă n este un număr natural care nu se împarte exact prin 5, atunci numărul $n^4 + 2$ nu este pătrat perfect.

23. Dacă x este un număr natural, arătați că numărul $15x + 7$ nu este pătrat perfect.

24. Dacă x este un număr natural nenul, arătați că numărul $15x - 7$ nu este pătrat perfect.

25. Arătați că numărul $12p + 16q + 6$ nu este pătrat perfect.

26. Determinați pătratele perfecte de forma:
a) $\overline{xyy}$; b) $\overline{xxy}$; c) $\overline{xyx}$.

PE-PP Supermate ****

27. Determinați numărul $\overline{xyz}$ astfel încât $\overline{xyz}$, $\overline{xzy}$ și $\overline{zyx}$ sunt pătrate perfecte.

28. Demonstrați că, dacă numărul $\overline{xx5}$ este pătrat perfect, atunci numerele $2x + 5$, $x^2 + 5$ și $5x - 1$ sunt pătrate perfecte.

29. Demonstrați că numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,017 + 2$ nu este pătrat perfect.

30. Determinați cea mai mică valoare a lui n, număr natural, pentru care numerele următoare sunt pătrate perfecte:
a) $2^n + 17 \cdot 10^2$; b) $5^n + 3 \cdot 10^4$.

PE-PP 13. Operații cu puteri

PE Înțelegere *

1. Calculați:
a) $2^3 \cdot 2^5 : 2^6$; b) $(2^3)^4 : 2^{10}$; c) $(2^9)^3 : (2^3)^8$;
d) $2^{3^2} : (2^2)^3$; e) $3^{2^5} : 3^{5^2}$; f) $(4 + 2^{192} : 2^{188}) : 5$;
g) $(1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^4) : (2^7 + 1)$; h) $\left[\left(3^3\right)^{12} : 3^{2^5} - 56\right] : 5$; i) $8^{16} : (2 \cdot 2^4 \cdot 2^{10})^3 - 2^1 - 2^0$.

2. Efectuați:
a) $10^2 \cdot [4 + 5 \cdot 3^2 - 2^5 + 4^3 \cdot (49 - 3^2) : 2^3]$;
b) $[(2^6)^4 : 2^3 \cdot (2^6 + 2^6) - 4^6 : 2^{10}] : (2^{28} - 2^2) + 9$.

3. Calculați $x^y + y^x$ pentru:

$x = 8^{33} : [4^{32} \cdot 2^{34} + (2^5 \cdot 2^{20})^5 : (16 \cdot 2^{23}) + (7^5 : 7^5 - 1)^{32} \cdot 4]$;

$y = [(11 - 0^{11}) \cdot (3^3 - 3^2) + 1^{2020}] \cdot (3^2 - 2^3) - 3^2 \cdot 2$.

4. Efectuați:

a) $(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{43} - 2^{46} + [3^{148} : 3^{43} - (3^5)^{21}] + 16\}$;

b) $122 + 12 \cdot \{183 : [(2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^4 : (2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}) + (2^8)^9 : 2^{72} - 1^{27} \cdot 5^0] - 9 \cdot (54 - 2^4 \cdot 3)\}$.

5. Efectuați:

a) $[7 \cdot (14 - 2 \cdot 7) : 2]^2$;

b) $(10^2 - 8^2) : 6 : 2 + 1^{2019}$;

c) $[17 \cdot (25 - 8 \cdot 3) \cdot 1^{2021} - 15] \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 3$;

d) $[(9^2 - 2^4 \cdot 5) : 1 + 5^9 : (5^2)^4] \cdot 2^2$;

e) $\{[(169 : 13 - 2^3) : 5 + (7 \cdot 2^3 - 2 \cdot 3) : 5 + 2^3] : 19 + 5\} \cdot 2^3 - 2^4 \cdot 3$;

f) $(3^{32} : 3^2 + 2^2 \cdot 2^{25} - 2\,019^0) : (27^{10} + 8^9 - 324 : 18^2)$.

6. Calculați:

a) $\{[1\,200 \cdot (8 - 200 : 25) + 36] - 3\,096 : 387\} : 2^2$;

b) $13^2 + 5 \cdot \{2\,316 : 579 + [40 + 2^3 \cdot (2^4 \cdot 5^2 : 10 - 2^2 \cdot 3^2)] \cdot 5\} + 11$;

c) $2 \cdot [3^3 \cdot 2^4 : 3 : (148 : 37 + 12)] - 882 : 49$;

d) $[(2^2 \cdot 7 \cdot 2 : 14 - 27 : 3^3) : 1 + 524 : 131] \cdot 6 - 6^2$;

e) $1\,600 : 4 : [3 \cdot 70 - (2 \cdot 45 - 3^2 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3 : 12) : 5^3 \cdot 2^2 + 95 \cdot 2] \cdot 12$.

7. Calculați:

a) $4^{37} : (2 \cdot 2^{71}) + (3 + 3 \cdot 105) : 106$;

b) $3^3 + 3^{10} : 3^8 \cdot 3 + 3 \cdot 3^7 : 3^5 + 2 \cdot 3^{10} : (5 \cdot 3^5 + 3^5) + 9 \cdot 3^3$;

c) $[3^2 \cdot 3^3 + 2^{54} : 2^{52} + (3^5)^4 : 3^{20}] : 31$;

d) $[3^{48} : 3^{18} + (2^4)^5 + 6^{23} : 6^{13}] : \left[(3^5)^2 \cdot (2^2)^5 + 3^{17} \cdot 3^{13} + (2^5)^4\right]$;

e) $10 \cdot \{24^2 : 576 + 3 \cdot [(3^2 \cdot 2)^{15} : (3^{29} \cdot 2^{15}) + 1^{21}]\} : 13$;

f) $2^{100} : [2^{50} \cdot 2^{48} + (2^{10} \cdot 2^{15})^5 : 2^{27} + (5^{76} : 5^{75} - 3)^{90} \cdot 2^8 + 2^{98}]$;

g) $[3^7 \cdot 3^{10} + 2^{203} : 2^{108} - 5 \cdot (5^2)^5] : (3^{17} + 2^{95} - 5^{11})$.

8. Fie a un număr natural. Determinați ultima cifră a numărului a^2 și a numărului $3a^2 + a$.

9. Calculați ultima cifră a numerelor:

a) 2^{47}; 2^{129}; 2^{2020};

b) 21^{324}; 19^{257}; 17^{2020};

c) $5^{2019} + 7^{2020}$;

d) $3^{2020} + 4^{2018} + 5^{2019} + 6^{2021} + 7^{2020}$.

PE Aplicare și exersare **

10. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

a) $2 \cdot 3^2 + 5^2 : 5^0 + 4^2 \cdot 3 - (6^4)^6 : 2^{22} : (3^4)^6 + 5\,655 : 435 = 100$;

b) $(2^6)^5 \cdot \{3^4 \cdot 28 - [3 - (2^3 \cdot 5^3 - 3^2 \cdot 10^2 - 5^2) : (1 + 4)^2] : 10^4 - 2^{2^0} \cdot 3^4\} > 2^7 \cdot 4^5 \cdot 3^{25}$.

11. Calculați:

a) $555^3 - 125 \cdot 111^3$;

b) $(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) : (2^{100} - 1)$.

12. Efectuați:

a) $5^{103} : \left(5^{17} \cdot 5^8\right)^4 + \left(324 : 9^2 + 5 \cdot 2^3\right) \cdot 10^0$;

b) $10^3:5^2+10\cdot\left\{2^{10}:64+2^3\cdot\left[1\,035:(5\cdot3^2)-(2^{37}\cdot7^{37})^2:(4^{36}\cdot49^{37}):2\right]\right\}$;

c) $2\cdot2^3\cdot3^2:18+5\cdot\left\{625:5^3+\left[(3\cdot3^2\cdot5^2)^{17}:(9^{25}\cdot25^{17})+6^5:3^5\right]\cdot2^{3^0}\right\}$;

d) $(2^{3n+2}:8^n)^2+(3^{2n+1}\cdot8^n):(9^n\cdot2^{3n})$, unde n este număr natural;

e) $\left[6^{100}\cdot2^{50}+(3^{17})^{10}+25^{37}\right]:\left[2^{150}\cdot3^{100}+(3^{10})^{17}+5^{74}\right]$;

f) $(2^{n+3}\cdot3^n+2^n\cdot3^{n+1}+6^n):6^n$, unde n este număr natural;

g) $(2^{2n+1}\cdot3^n+4^n\cdot3^{n+2}):12^n$, unde n este număr natural;

h) $(2^{3n+1}\cdot9^n+8^n\cdot3^{2n+1}+6^{2n}\cdot2^{n+3}):13$.

13. Fie numerele a şi b. Calculaţi $2a-2^3\cdot5^3\cdot8b$.

$$a=(1+2+3+\ldots+2\,000):2\,000\cdot4 \quad \text{şi} \quad b=(3^{17}:9^8)^{2000}:3^{2000}.$$

14. Aflaţi câte zerouri are la sfârşit numărul A, unde:

a) $A=(4^2\cdot3^5\cdot16^3\cdot25^5)\cdot(3^4\cdot5^{10}\cdot2^{15})$;

b) $A=1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot\ldots\cdot99^2\cdot100^2$.

15. Fie numerele $x=2^{10}\cdot25^2\cdot7^{10}$ şi $y=2^5\cdot5^7\cdot3^{10}$.

a) Cu câte zerouri se termină fiecare dintre ele?

b) Cu câte zerouri se termină numărul $x\cdot y$?

c) Care este ultima cifră nenulă a numărului $x\cdot y$?

16. Se dă numărul $A=10^{n+3}+2\cdot10^n-1$ scris în baza zece, unde n este un număr natural mai mare decât 1. Determinaţi numărul.

17. Calculaţi $(x-y)^{2000}$ pentru:

$$x=(3^3\cdot20+49\cdot2^2-7):(3^2)^{3^{40}}+\left(1^{2^{34}}+4^{3^{05}}\right) \text{ şi } y=2^5\cdot7^5-14^5+5.$$

18. Determinaţi cifrele numărului $A=2\cdot10^{n+2}+10^n+3\cdot10^{n-3}-1$ şi specificaţi câte cifre sunt din fiecare.

19. Arătaţi că numărul $3+3^2+3^3+\ldots+3^{123}$ se divide cu 13.

PE Aprofundare şi performanţă ***

20. Aflaţi numărul natural n care verifică egalităţile:

a) $2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{55}-2$;

b) $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}=56$.

21. Fie numărul:

$$A=(2+2^2+2^3+\ldots+2^{2000})+(7+7^2+7^3+\ldots+7^{2000})+(9+9^2+9^3+\ldots+9^{2000}).$$

Verificaţi dacă acest număr este pătrat perfect.

22. Determinaţi ultima cifră a numărului:

a) $x=2\,015^{2019}+2\,016^{2019}+2\,017^{2019}+2\,018^{2019}$;

b) $x=2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{2019}+2^{2020}$;

c) $x=2\,017^{2017}+2\,018^{2018}+2\,019^{2019}+2\,020^{2020}$.

23. Fie $a = [27 \cdot 2^2 \cdot 5 + (7 \cdot 2)^2 - 7] : (9)^{3^{2^0}} - \left[1^{3^{2^5}} + (2^2)^{3^{0^7}}\right]^0$ și

$b = (3^{17} : 9^8)^{2020} : (3^5)^{404}$. Calculați $(b - a)^{2021}$.

24. Determinați ultima cifră a numerelor de mai jos, unde n este un număr natural:

a) $2\,014^n + 2\,014^{n+1} + 2\,014^{n(n+1)}$;

b) $2\,015^{2021} + 2\,016^{2021} + 2\,017^{2021} + 2\,018^{2021} + 2\,019^{2021}$;

c) $[(2^7)^2 \cdot (2^2)^8 + 5^{50} : 5^5 - (7^{16})^2] : [(8^5)^2 + (5^3)^{15} - (7^{4^2})^2]$.

25. Aflați câtul și restul împărțirii numărului $2^{n+1} \cdot 9^n + 6^n \cdot 3^{n+1} + 37$ la 5, unde n este un număr natural.

26. Fie numerele a și b:

$$a = \left[\left(2^3\right)^2 - 2\,019^0\right] : 3^{2^{1^{2019}}} - \left(1^{3^4} + 2^{2^{1^{2020}}}\right) \text{ și } b = 81 \cdot 11^4 - 33^4 + 1.$$

Calculați $(a - b)^{2019}$.

27. Fie $a = [4^{11} \cdot (20)^{20}] : [2^{16} \cdot 125 \cdot (2^5)^3 \cdot 5^7]^2 + 2^3 + (7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2021})^0$,

$b = (41^2 - 82 + 1) : 8 : 5 - (2^6 - 2^5 + 2^2 - 2^0)$ și

$c = 3^{90} - 4 \cdot 9^{44} + 2^{208} : (2 \cdot 4^{103}) - 5 \cdot (9^{22})^2$.

Calculați:

a) $a^c + b^c - 5^2$;

b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

c) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

d) $(b - c)(b^2 + bc + c^2)$;

e) $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$.

28. Scrieți numerele 43, 37 și 117 ca sume de puteri ale lui 2.

29. Arătați că diferența dintre un număr de trei cifre și răsturnatul său nu poate fi pătrat perfect.

30. Determinați a și b, știind că $\overline{3a} + \overline{4b}$ este pătrat perfect și $\overline{3a}$, respectiv $\overline{4b}$ sunt numere naturale de două cifre scrise în baza 10.

PE-PP **Supermate** ****

31. a) Arătați că $3^{29} - 3^{27}$ este cub perfect.

b) Scrieți pe 6^2 ca sumă a trei cuburi nenule.

c) Scrieți pe 6^{29} ca sumă a trei cuburi nenule.

32. Demonstrați că numărul $2^n \cdot 5^{n+1}$ se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte, oricare ar fi n număr natural.

33. a) Determinați $x + y$, știind că $2^x \cdot 5^y = 2\,000$.

b) Calculați restul împărțirii la 3 a numărului $2^n + 2^{n+1}$, oricare ar fi n număr natural.

34. Ordonați descrescător numerele:

$a = 2^{2973} \cdot 3^2 - 8^{990} \cdot 48 - 2^{2974}$; $b = 3^{1982} \cdot 4 - 3^{1980} \cdot 18 - (3^{991})^2$;

$c = 7^{993} + 9 \cdot 7^{991} - 7^{992} \cdot 8 - 7^{991}$.

35. Fie numărul $A = 3(n + 2) + 6 \cdot (3n + 1) - n$. Arătați că A nu poate fi pătrat perfect.

PE-PP 14. Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2

Scrierea în baza 10

Numărul 746 se poate scrie sub forma:

$$746 = 700 + 40 + 6 = 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6.$$

Folosind notațiile învățate la puteri, numărul 746 se mai poate scrie:

$$746 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Altfel spus, orice număr natural se poate scrie ca o sumă de produse în care un factor este o putere a lui 10.

Exemple:

$$23 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0;$$
$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0;$$
$$5\,123 = 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

În general, orice număr în baza 10 se poate scrie:

$$\overline{ab} = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0;$$
$$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0;$$
$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0.$$

Observații:

a) Se spune că am folosit în scrierea anterioară **descompunerea numărului în baza 10**.
b) Această scriere, împreună cu operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere constituie **sistemul de numerație zecimal**.
c) Numărul natural 10 este **baza sistemului de numerație zecimal**.
d) Simbolurile care se folosesc în baza 10 sunt cifrele: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
e) Observați legătura dintre exponentul lui 10 și poziția cifrei cu care este înmulțită puterea lui 10 în cadrul numărului.
f) În sistemul de numerație zecimal avem că:
   - 10 elemente numite **unități** formează o grupă numită **zece**;
   - 10 grupe de **zece** formează o nouă grupă numită **sută**;
   - 10 grupe de o **sută** formează o nouă grupă numită **mie** și așa mai departe.

Scrierea în baza 2

Scriem numerele 7, 11, 37 ca puteri ale lui 2. Obținem:

$$7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0;$$
$$11 = 8 + 2 + 1 = 2^3 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0;$$
$$37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0.$$

Altfel spus, orice număr natural se poate scrie ca o sumă de produse în care un factor este o putere a lui 2.

În general, orice număr în baza 2 se poate scrie:

$$\overline{ab}_{(2)} = (a \cdot 2^1 + b \cdot 2^0)_{(10)};$$
$$\overline{abc}_{(2)} = (a \cdot 2^2 + b \cdot 2^1 + c \cdot 2^0)_{(10)};$$
$$\overline{abcd}_{(2)} = (a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0)_{(10)}.$$

Observaţii:

a) Se spune că am folosit în scrierea anterioară **descompunerea numărului în baza 2.** Rezultatul obţinut este un număr în baza 10.

b) Scrierea anterioară, împreună cu operaţiile de adunare, scădere, înmulţire, împărţire şi ridicare la putere constituie **sistemul de numeraţie binar.**

c) Numărul natural 2 este **baza sistemului de numeraţie binar.**

d) Simbolurile care se folosesc în baza 2 sunt cifrele 0 şi 1.

e) Observaţi legătura dintre exponentul lui 2 şi poziţia cifrei cu care este înmulţită puterea lui 2 în cadrul numărului.

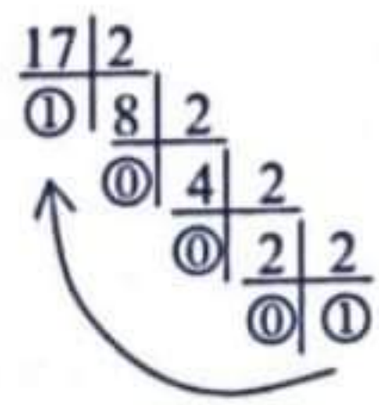
f) Scrierea unui număr natural în sistemul de numeraţie binar are ca suport faptul că două unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior.

g) Dacă am încerca să numărăm în baza 2 am obţine: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ...

<u>Pentru a **transforma** un număr **din baza 2 în baza 10**</u> folosim:

$$101_{(2)} = (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{(10)} = 5_{(10)};$$
$$1101_{(2)} = (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{(10)} = 13_{(10)};$$
$$111011_{(2)} = (1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{(10)} = 59_{(10)}.$$

<u>Pentru a **transforma** un număr **din baza 10 în baza 2**</u> utilizăm un algoritm de calcul bazat pe împărţiri succesive la 2.



Numărul în baza 2 este format din ultimul cât urmat de toate resturile obţinute, luate în ordine inversă, adică $17_{(10)} = 10001_{(2)}$.

Observaţii:

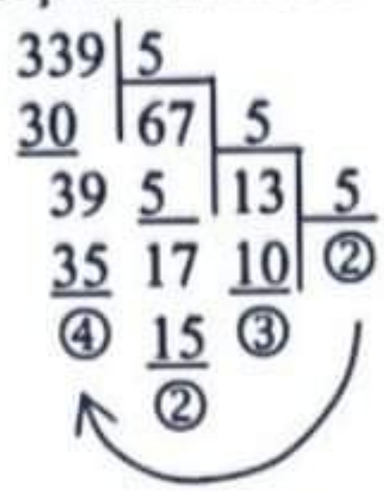
1. Scrierea unui număr natural într-o bază oarecare x, $x > 1$, are ca suport faptul că x unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.
2. Simbolurile folosite într-o bază oarecare x sunt: 0, 1, 2, ..., $x-3$, $x-2$, $x-1$.
3. Trecerea dintr-o bază x în baza 10 se face la fel ca trecerea din baza 2 în baza 10:

$$\overline{ab}_{(x)} = (a \cdot x + b)_{(10)}, a \neq 0;$$
$$\overline{abc}_{(x)} = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)_{(10)}, a \neq 0;$$
$$\overline{abcd}_{(x)} = (a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d)_{(10)}, a \neq 0.$$

4. Pentru a transforma un număr din baza 10 într-o bază x, $x > 1$, se foloseşte **procedeul împărţirilor succesive** prezentat anterior, la trecerea din baza 10 în baza 2.

Exemplu: Scrieţi numărul 339 din baza 10 în baza 5.

Rezolvare:



Deci, $339_{(10)} = 2\,324_{(5)}$.

Verificare: $2\,324_{(5)} = (2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0)_{(10)} = 339_{(10)}$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Scrieţi următoarele numere ca numere naturale în sistemul zecimal:

a) $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1$;
b) $7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$;
c) $5 \cdot 10 + 2$;
d) $3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3$;
e) $7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10$;
f) $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 3$;
g) $5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$;
h) $3 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10 + 7$;
i) $1 \cdot 10^3 + 1$.

2. Se ştie că a, b, c, d sunt cifre în sistemul zecimal. Scrieţi următoarele numere ca numere în sistemul zecimal:

a) $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$;
b) $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$;
c) $a \cdot 10 + b$;
d) $a \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + a$;
e) $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$;
f) $a \cdot 10^3 + b \cdot 10 + c$;
g) $100a + 10b + c$;
h) $100a + 10a + a$;
i) $1\,000a + 100b$;
j) $10\,000a + 1\,000b + 100a + 10b + c$;
k) $1\,000a + 100a + 10b + c$.

3. Scrieţi următoarele numere descompuse în baza 10:

a) 127; b) 2 137; c) 53; d) 27 385;
e) 705; f) 230; g) 20 035; h) 705 102.

4. Fie a, b, c, d cifre în sistemul zecimal. Scrieţi următoarele numere descompuse în baza 10:

a) $\overline{abc}$; b) $\overline{ab}$; c) $\overline{abcd}$; d) $\overline{aab}$;
e) $\overline{aaaa}$; f) $\overline{a0b}$; g) $\overline{ab0cd}$; h) $\overline{aab0c0}$;
i) $\overline{abab}$; j) $\overline{a0b000c}$.

5. Scrieţi poziţional, în baza 10, următoarele sume:

a) $3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$;
b) $5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$;
c) $5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
d) $3 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2$;
e) $7 \cdot 10^9 + 5 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^3$.

6. Scrieţi următoarele numere din baza 10 în baza 2:

a) 23; b) 37; c) 46; d) 24; e) 72; f) 125.

PE Aplicare şi exersare **

7. Scrieţi următoarele numere din baza 2 în baza 10:

a) $11_{(2)}$; b) $1011_{(2)}$; c) $1100_{(2)}$; d) $11001_{(2)}$;
e) $10111_{(2)}$; f) $1101101_{(2)}$; g) $10011_{(2)}$.

8. Ordonaţi crescător numerele:

a) $222_{(3)}, 444_{(5)}, 777_{(8)}$; b) $1011_{(2)}, 312_{(4)}, 2\,021_{(3)}$; c) $3\,185_{(9)}, 445_{(7)}, 241_{(5)}$.

9. Determinaţi baza de numeraţie x, astfel încât să aibă loc egalităţile:

a) $102_{(x)} = 27_{(10)}$; b) $10100_{(x)} = 90_{(10)}$; c) $131_{(x)} = 71_{(10)}$;
d) $24_{(x)} = 14_{(10)}$; e) $1\,201_{(x)} = 46_{(10)}$; f) $2\,301_{(x)} = 326_{(10)}$.

10. Arătaţi că numărul $\overline{abcabc}$ se împarte exact prin 1 001.

PE Aprofundare şi performanţă ***

11. Scrieţi poziţional, în baza 10, numerele naturale care se obţin din scrierea:

$$3 \cdot 10^n + 7 \cdot 10^{n+1} + 5 \cdot 10^{n+2}$$

pentru n luând valorile 1, 3, 5.

12. Stabiliţi în ce bază de numeraţie are loc relaţia: $32_{(x)} = 23_{(10)}$.

13. Determinaţi în ce bază de numeraţie are loc relaţia: $13_{(x)} + 31_{(x)} = 20_{(10)}$.

14. Demonstraţi că numărul $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ nu este pătrat perfect.

15. Comparaţi numerele: $2^{37} + 2^{19}$ şi $2^{29} + 2^{23} + 2^{15}$.

Indicaţie: Se compară în baza 2.

16. Verificaţi dacă următoarea inegalitate este adevărată: $\underbrace{111...1_{(2)}}_{\text{de 1998 ori}} > 2^{1998}$.

17. Scrieţi numerele 45, 39 şi 166 ca sume de puteri ale lui 2.

18. Determinaţi x ştiind că:

a) $\overline{2x3} + 145 = 378$; b) $\overline{1x7} \cdot 41 = 5\,617$.

19. Calculaţi:

a) $110_{(2)} + 101_{(2)} + 100_{(2)}$; b) $13_{(7)} + 42_{(6)} + 32_{(5)}$.

20. Determinaţi baza de numeraţie x, dacă:

a) $10001_{(x)} = 17_{(10)}$; b) $21_{(x)} = 17_{(10)}$.

PE-PP Supermate ****

21. Arătaţi că $111 \mid (\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab})$, unde a, b, c sunt cifre nenule în baza 10.

22. Cercetaţi dacă $\left(\overline{x9x} + \overline{x6}\right) \mid 2\left(\overline{xx9} + \overline{8x} + 7\right)$, unde x este cifră în baza 10.

23. Determinaţi cifrele a, b, c astfel încât: $\overline{abc}_{(7)} = \overline{bca}_{(6)} + \overline{bc}_{(8)} - b_{(10)}$.

24. În ce bază de numeraţie avem $24_{(x)} + 35_{(x)} = 39_{(10)}$?

15. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Scrieţi pătratele numerelor:

a) 7; b) 11; c) 17.

2. Comparaţi:

a) 5^8 cu $2^{15}+2\cdot 4^7$; b) 5^{14} cu 3^{21}.

3. Calculaţi:

a) $(5^2-2^5:2):3-1^{2019}$; b) $(3^2\cdot 2^6-2^5\cdot 6):12-2^5$; c) $(7^4-7^3):(7^2-7)-2^3\cdot 5$.

4. Transformaţi următoarele numere din baza 10 în baza 2:

a) 9; b) 43; c) 137.

5. Efectuaţi calculele şi apoi scrieţi rezultatul în baza 2:

a) $307+43$; b) $2^5+2^3+2^2$; c) 2^4+2^2+1.

6. Determinaţi ultima cifră a numărului n, unde $n=1+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2018}$.

7. Arătaţi că numărul $2\,015+2\cdot(1+2+3+\ldots+2\,014)$ este pătrat perfect.

8. Determinaţi numărul natural x, pentru care $x^2+3^4=15^2$.

9. Aflaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care au ultima cifră 0 sau 5 şi $a^2=9$. Calculaţi suma acestora.

TESTUL 2

1. Scrieţi cubul numerelor:

a) 4; b) 5; c) 7.

2. Calculaţi:

a) $2\,019^0$; 1^{2019}; 17^2; 3^5; b) $(7^2-3^2):2^2+7^2-1^{2019}+0^{2020}$;

c) $[(14^2-13^2):27-2^0]\cdot 2+2\,018^0$.

3. Arătaţi că $5^7+6^{2019}+11^{2020}$ nu este pătrat perfect.

4. Transformaţi următoarele numere din baza 2 în baza 10:

a) $110_{(2)}$; b) $1110_{(2)}$; c) $1101101_{(2)}$.

5. Demonstraţi că numărul $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ se divide cu 37.

6. Calculaţi: $(2^4)^4:2^{2^4}\cdot(3^2-1)-2\,020^0\cdot 2^2$.

7. Aflaţi numerele naturale x, ştiind că: $(2^3\cdot 3)^2+5^2\cdot x\le 606$.

8. Calculaţi restul împărţirii numărului $436^{2004}+4$ la 10.

9. Calculaţi ultima cifră a numărului: $16^{2019}+17^{2019}+18^{2020}+19^{2019}+20^{2020}$.

TESTUL 3

1. Calculaţi:

a) 19^2; b) 3^4; c) $2^1+2\,019^0$; d) $2^{25}:2^{24}\cdot 2$; e) 3^0+1^7; f) $32:4^2$.

2. Comparaţi puterile:

a) $11\cdot 7^3$ cu 7^4; b) 3^{34} cu 2^{51}; c) 4^{75} cu 2^{145}; d) 10^6 cu $2^6\cdot 5^7$.

3. Scrieţi trei numere naturale care să fie pătrate perfecte şi trei numere naturale care să fie cuburi perfecte.

4. Aflaţi baza de numeraţie x, ştiind că $121_{(x)}=16_{(10)}$.

5. Scrieţi în baza 10 numerele: $111_{(2)}$, $222_{(3)}$ şi $333_{(4)}$.

6. Ştiind că $a=100-(7^2+3^3)$ şi $b=25^4:5^8$, calculaţi b^a.

7. Determinaţi cifrele nenule şi distincte a şi b în baza 10, astfel încât numărul natural: $n=\overline{aaa}-\overline{abb}+3(b-a)$ să fie pătrat perfect.

8. Calculaţi ultima cifră a numărului 7^{2021}.

9. Calculaţi:

a) $3^{101}:9^{50}$; b) $(3^{57}:9^{25}\cdot 3^{10}):3^{15}$; c) $2\cdot 4\cdot 2^{43}-2^{46}+[9^{74}:3^{43}-(3^{15})^6]^0$.

TESTUL 4

1. Calculaţi:

a) suma pătratelor perfecte mai mici decât 50;

b) suma cuburilor perfecte mai mici decât 100.

2. Efectuaţi, dând factor comun:

a) $3^2\cdot 5+3^2\cdot 7$; b) $2\,025^{2019}-2\,024\cdot 2\,025^{2018}$;

c) $(7^{10}-7^9):(7^9-7^8)$; d) $5^3\cdot 2^6-5^3\cdot 7^2$.

3. Calculaţi x, astfel încât: $3^{37}-27^{12}=2\cdot 81^{10}:x^2$.

4. Calculaţi ultima cifră a numărului $3^{2018}+5^{2019}+1^{2017}$.

5. Scrieţi numărul natural care în baza 2 are descompunerea $1\cdot 2^3+1\cdot 2+1$.

6. Câte zerouri are la sfârşit numărul: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 50$?

7. Stabiliţi dacă:

a) 9^7 şi 4^5 sunt pătrate perfecte; b) $(7^4+7^5)\cdot 49$ este cub perfect.

8. Verificaţi dacă: $1^3+2^3+3^3=6^2$.

9. Arătaţi că numărul: $n=100+2\cdot(1+2+3+\ldots+99)$ este pătrat perfect.

TESTUL 5

1. Scrieţi pătratele perfecte cuprinse între 100 şi 200.
2. Care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte ale unor numere naturale:
$$16;\ 8;\ 90;\ 2^6;\ 3^4;\ 4 \cdot (3^2 + 3^3);\ 2^4 + 9;\ 121?$$
3. Care dintre următoarele numere sunt cuburi perfecte ale unor numere naturale:
$$1\,000;\ 8;\ 3^5;\ 5^{3n};\ 2 \cdot 9 + 3^2;\ 3^3 + 7 \cdot 3^5?$$
4. Calculaţi ultima cifră a numărului $2^{2020} + 6^{2019} + 2\,018^0$.
5. Efectuaţi $147_{(10)} + 101_{(2)}$:
   a) în baza 10; b) în baza 2.
6. Scrieţi pătratele perfecte de două cifre.
7. Calculaţi:
   a) $2^0 + 2^2 + 2^3$; b) $10 + 10^2 + 10^3$; c) $17^0 + 17$;
   d) $3 + 3 \cdot 3^2$; e) $(27 - 7) : 2^2$; f) $(127 - 3 \cdot 3^2) : 10^2$.
8. Efectuaţi:
   a) $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4$; b) $4^4 - 3^3 - 2^2 - 1$;
   c) $1^{2^3} + 3^{1^2} + 2^{3^1}$; d) $(2 + 2^2 + 2^3) : (10^1 - 3)$.
9. Calculaţi:
   a) $(16 \cdot 12^{10} - 4 \cdot 12^{10}) : 12^{11}$; b) $15^2 - (14 \cdot 15 + 15) : 15^2$;
   c) $10^3 \cdot 85 - 10^3 \cdot 61 - 3\,000$; d) $5^{11} - (6 \cdot 5^{10} - 2 \cdot 5^{10})$.

TESTUL 6

1. Comparaţi numerele:
   a) 2^{15} cu 2^{51}; b) 5^{101} cu 5^{11}; c) 11^{23} cu 11^{73};
   d) 1^{101} cu 1^{1001}; e) $(7^4)^0$ cu 7^{4^0}; f) 3^{47} cu 3^{74}.
2. Comparaţi numerele:
   a) 2^4 cu 3^4; b) 11^7 cu 17^7; c) 101^2 cu 110^2;
   d) 27^{101} cu 17^{101}; e) 48^4 cu 84^4; f) 23^7 cu 32^7.
3. Ordonaţi crescător numerele: $2^2, 2^5, 4^2, 2^7$.
4. Determinaţi baza de numeraţie x, astfel încât să aibă loc egalităţile:
   a) $10000_{(x)} = 16_{(10)}$; b) $212_{(x)} = 57_{(10)}$; c) $155_{(x)} = 71_{(10)}$.
5. Scrieţi în baza 2 puterile lui 2 cu exponent mai mic sau egal cu 4 şi stabiliţi o regulă pentru scrierea lui 2^n în baza 2 ($n \in \mathbb{N}^*$).
6. Ordonaţi descrescător numerele: 3^{3^3}; $(3^3)^3$; 33^3; 3^{33}.
7. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:
   a) $x^2 : 2^2 = (3^2)^2$; b) $25^2 - x^2 = 24^2$; c) $x : 10^3 = 10^2$;
   d) $144 : x = 3^2$; e) $3^2 + x^2 = 5^2$; f) $324 : 5^x = (3^2 \cdot 2)^2$.
8. Verificaţi dacă:
   a) $(2^3 + 2 \cdot 2^4 + 2^9) : (8 + 2^{12} : 2^3 + 2^5) = 1$;
   b) $(5 + 2 \cdot 2^8 + 2^{48} : 2^{18}) : [5 + 2^{12} : 2^3 + (2^5)^6] = 2$.
9. Arătaţi că, oricare ar fi numărul natural x, $5x + 2$ nu poate fi pătrat perfect.

PE

Nume _____ Clasa _____

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. Completați pe fișa de evaluare spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Numărul 35 scris în baza 2 este egal cu ..... .

(0,5p) **2.** Dacă $2^{29} \cdot 5^{29} = x^{29}$, atunci numărul natural x este egal cu ..... .

(0,5p) **3.** Dintre numerele $14 \cdot 15^{14}$ și 14^{15}, mai mare este numărul ..... .

(0,5p) **4.** Dintre numerele 12^{13} și 13^{12}, pătrat perfect este numărul ..... .

II. Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect, știind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă $7^x + 7^{x+1} = 2^3 \cdot 7^{2016}$, atunci numărul natural x este egal cu:

A. $2\,016 + 3$ B. $2\,016 - 3$ C. $2\,016$ D. $2\,016 : 3$

(0,5p) **2.** Dacă $3^{65} : 3^x = 3^{21}$, atunci:

A. $x > 65$ B. $x = 65$ C. $x < 65$ și $x \neq 44$ D. $x = 44$

(0,5p) **3.** Dacă $2 + 6 + 10 + 14 + ... + 30 = 2 \cdot x^3$, atunci x este:

A. impar B. pătrat perfect C. par și diferit de 4 D. cub perfect

(0,5p) **4.** Dacă $3^8 - 3^6 = x^3$, atunci:

A. $x < 15$ B. $x = 16$ C. $x = 17$ D. $x \geq 18$

III. Uniți prin săgeți fiecare enunț, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Determinați numărul natural x pentru care:

(0,5p) a) $x^2 : (3^2)^2 = 2^2$

(0,5p) b) $196 : x^2 = 7^4 : 7^2$

(0,5p) c) $111_{(x)} = 73_{(10)}$

(0,5p) d) $324 : 5^x = (2 \cdot 3^2)^2$

1) 8

2) 0

3) 18

4) 2

5) 1

La problemele IV şi V scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(1p) **IV.** Calculaţi: $\left\{2\cdot 3^2-3^2+3\cdot\left[3+3\cdot\left(3^3-3^5:3^3\right)\right]\right\}:\left(2\,017^0+0^{2017}+2^1\right)$.

(2p) **V.** a) Aflaţi numărul natural n pentru care $2^n\cdot 5^{n-1}=2\,000$.

b) Calculaţi restul împărţirii numărului $2+2^n+2^{n+1}$ la 3, pentru orice număr natural n.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

PE-PP 16. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

Metoda figurativă

Problema 1. Suma a trei numere este 1 080. Primul număr este de două ori mai mare decât al doilea şi de trei ori mai mic decât al treilea. Aflaţi numerele.

Rezolvare:

primul număr
al doilea număr
al treilea număr

Cum în total sunt 9 părţi, o parte este 1 080 : 9 = 120.

Primul număr este 2 · 120 = 240, al doilea număr este 120, iar al treilea număr este 6 · 120 = 720.

Problema 2. Maria, Alexandra şi Andreea au împreună 200 de lei. Jumătate din suma Andreei este egală cu o treime din suma Alexandrei şi cu o cincime din suma Mariei. Aflaţi ce sumă are fiecare dintre cele trei fete.

Rezolvare:

suma Andreei
suma Alexandrei
suma Mariei

Cum în total sunt 10 părţi, o parte este 200 : 10 = 20.

Andreea are 2 părţi, adică 2 · 20 = 40 (lei).

Alexandra are 3 părţi, adică 3 · 20 = 60 (lei).

Maria are 5 părţi, adică 5 · 20 = 100 (lei).

Metoda reducerii la unitate

Problema 3. Calculaţi cât costă 7 m de dantelă, dacă 5 m de dantelă costă 200 de lei.

Rezolvare:

Se scriu datele problemei astfel:

5 m ..... 200 lei
1 m ..... 200 : 5 = 40 (lei)
7 m ..... 7 · 40 = 280 (lei)

Deci, cei 7 m de dantelă costă 280 de lei.

Problema 4. Dacă 6 tractoare ară o suprafaţă de teren în 4 zile, calculaţi în câte zile ară aceeaşi suprafaţă de teren 4 tractoare de acelaşi tip.

Rezolvare:

• 6 tractoare ară suprafaţa de teren în 4 zile. Prin urmare, unui singur tractor îi trebuie un număr de zile de 6 ori mai mare pentru a ara aceeaşi suprafaţă.	6 tractoare ..... 4 zile 1 tractor ..... 6 · 4 = 24 (zile)
• 4 tractoare vor ara suprafaţa de teren într-un interval de timp de 4 ori mai mic decât timpul în care un tractor ară suprafaţa respectivă.	4 tractoare ..... 24 : 4 = 6 (zile)

Metoda comparației

Problema 5. Se știe că 10 creioane și 3 pixuri costă 35 de lei, iar 2 creioane și 5 pixuri costă 29 de lei. Calculați prețul unui creion și al unui pix.

Rezolvare:

Se scriu datele problemei astfel:

10 creioane .....3 pixuri ..... 35 lei
2 creioane .....5 pixuri ..... 29 lei

Ne propunem să avem același număr de creioane sau pixuri. Pentru aceasta multiplicăm de un număr convenabil de ori datele din cele două șiruri.

Dacă se multiplică de 5 ori datele din șirul al doilea, se obține:

10 creioane .....3 pixuri ..... 35 lei
10 creioane .....25 pixuri ..... 145 lei

Analizând, se observă că 25 – 3 = 22 (pixuri) au costat 145 – 35 = 110 (lei).

Prețul unui pix a fost 110 : 22 = 5 (lei).

Prețul a 3 pixuri a fost 3 · 5 = 15 (lei).

Prețul a 10 creioane a fost 35 – 15 = 20 (lei).

Prețul unui creion a fost 20 : 10 = 2 (lei).

Deci, un pix a costat 5 lei, iar un creion a costat 2 lei.

Metoda falsei ipoteze

Problema 6. Într-un bloc de locuințe sunt 21 de apartamente cu două, respectiv trei camere. Calculați câte apartamente cu două camere sunt, dacă în bloc se află 49 de camere.

Rezolvare:

Presupunem că toate apartamentele ar fi cu 3 camere.

Ar fi 21 · 3 = 63 (camere). Diferența 63 – 49 = 14 (camere) a apărut deoarece există și apartamente cu două camere. Diferența de camere dintre un apartament de 3 camere și unul de 2 camere este de 2 – 1 = 1 (cameră).

În bloc sunt 14 : 1 = 14 (apartamente) cu 2 camere și 21 – 14 = 7 (apartamente) cu 3 camere.

Verificare: 7 + 14 = 21 (apartamente).

Metoda mersului invers

Problema 7. Mihai se gândește la un număr. Scade din el 8, împarte rezultatul la 4, iar la cât adună 15, înmulțește noul rezultat cu 5 și anunță că a obținut numărul 105. Aflați la ce număr s-a gândit Mihai.

Rezolvare:

Ultima operație efectuată de Mihai este înmulțirea cu 5; în urma acesteia el obține 105.

- Numărul pe care Mihai îl înmulțește cu 5 pentru a obține 105 este 105 : 5 = 21.
- Numărul la care Mihai adună 15 pentru a obține 21 este 21 – 15 = 6.
- Numărul pe care Mihai îl împarte la 4 pentru a obține 6 este 6 · 4 = 24.
- Numărul din care Mihai scade 8 pentru a obține 24 este 24 + 8 = 32.

Prin urmare, numărul la care s-a gândit Mihai este 32.

Verificare:

1. 32 – 8 = 24 2. 24 : 4 = 6 3. 6 + 15 = 21 4. 21 · 5 = 105

Observaţie:

Pornim de la egalitatea 4 :

$$21 \cdot 5 = 105.$$

Înlocuim în aceasta numărul 21 în conformitate cu 3 şi rezultă:

$$(6 + 15) \cdot 5 = 105.$$

Înlocuim apoi pe 6 în conformitate cu 2 şi rezultă:

$$[(24 : 4) + 15] \cdot 5 = 105.$$

Apoi înlocuim pe 24 în conformitate cu 1 şi se obţine egalitatea:

$$\{[(32 - 8) : 4] + 15\} \cdot 5 = 105.$$

Cum 32 este numărul la care s-a gândit Mihai, dacă notăm acest număr cu x, obţinem **transpunerea în limbaj matematic** sau **modelul matematic** al problemei 7, care este o nouă problemă:

Aflaţi numărul x ştiind că: $\{[(x - 8) : 4] + 15\} \cdot 5 = 105$.

Rezolvare:

Se aplică **metoda mersului invers**:

Numărul $\{[(x - 8) : 4] + 15\}$ este $105 : 5 = 21$; altfel spus $[(x - 8) : 4] + 15 = 21$.

Numărul $[(x - 8) : 4]$ este $21 - 15 = 6$; altfel spus $(x - 8) : 4 = 6$.

Numărul $(x - 8)$ este $6 \cdot 4 = 24$. Prin urmare $x - 8 = 24$.

Numărul x este $24 + 8 = 32$; altfel spus $x = 32$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Suma a patru numere naturale consecutive este 50. Aflaţi numerele.

2. Se ştie că 3 lalele şi 5 crizanteme costă 34 de lei, iar 9 lalele şi 4 crizanteme costă 47 de lei. Calculaţi cât costă o lalea şi cât costă o crizantemă.

3. Suma a două numere este 184. Calculaţi numerele, ştiind că unul din ele este de 7 ori mai mare decât celălalt.

4. Trei elevi au împreună 200 de timbre. Primul are cu 35 de timbre mai mult decât al doilea, iar al treilea are cu 45 de timbre mai mult decât al doilea. Calculaţi câte timbre are fiecare elev.

5. Într-o clasă sunt 29 de elevi. Calculaţi câţi băieţi şi câte fete sunt în clasă, ştiind că numărul fetelor întrece cu 3 numărul băieţilor.

6. Împărţiţi 235 kg de fructe în două grămezi astfel încât triplul cantităţii din prima grămadă să fie cât dublul cantităţii de fructe din grămada a doua.

7. Suma a trei numere este 170. Al doilea număr este dublul primului, iar diferenţa dintre al treilea şi al doilea număr este 20. Aflaţi cele trei numere.

8. Ştiind că 4 eşarfe costă 80 de lei, calculaţi cât costă 7 eşarfe de acelaşi fel.

9. Din 20 kg de portocale se obţin 12 ℓ de suc. Din câte kilograme de portocale se vor obţine 6 ℓ de suc?

10. Se ştie că 12 muncitori termină o lucrare în 16 ore. În câte ore termină lucrarea 4 muncitori?

PE Aplicare şi exersare **

11. 14 robinete umplu cu apă un rezervor în 6 ore. După 2 ore, 2 robinete sunt închise. În câte ore vor umple rezervorul robinetele rămase deschise?

12. Vârsta mamei este de 3 ori mai mare decât vârsta fiicei. Ştiind că suma vârstelor este 72, calculaţi vârsta fiecăreia.

13. Aflaţi două numere, ştiind că al doilea număr este de 7 ori mai mare decât primul, iar suma dintre dublul primului număr şi triplul celui de-al doilea este 460.

14. La un concert s-au vândut 200 de bilete la preţul de 4 lei şi, respectiv, de 6 lei biletul, încasându-se în total 980 de lei. Câte bilete de fiecare fel au fost vândute?

15. Un elev cumpără caiete la preţul de 2 lei şi, respectiv, 4 lei bucata, cheltuind 200 de lei. Ştiind că a cumpărat 63 de caiete, calculaţi câte caiete a cumpărat la preţul de 2 lei bucata şi câte caiete a cumpărat la preţul de 4 lei bucata.

16. Un elev are o sumă de bani. După ce dublează această sumă, cheltuieşte 5 lei. Dublează suma rămasă şi cheltuieşte 10 lei. Dublează din nou suma rămasă şi cheltuieşte 160 de lei, iar în final elevul constată că mai are 200 de lei. Calculaţi suma iniţială.

17. Dintr-un coş cu mere se ia o treime din numărul acestora, apoi o treime din numărul merelor rămase şi apoi o doime din numărul merelor rămase, constatându-se astfel că în coş mai sunt 4 mere. Calculaţi câte mere au fost la început în coş şi câte mere s-au luat de fiecare dată.

PE Aprofundare şi performanţă ***

18. a) Calculaţi suma tuturor numerelor care împărţite la 7 dau câtul 147.

b) Suma a două numere este 10 173. Aflaţi numerele, ştiind că împărţind numărul mare la cel mic se obţin câtul 4 şi restul 123.

19. Două echipe de muncitori au de efectuat o lucrare. Prima echipă lucrează 4 zile, iar a doua, 6 zile şi se termină lucrarea. Lucrarea se termină şi dacă prima echipă lucrează 2 zile, iar a doua echipă lucrează 9 zile. În câte zile termină lucrarea fiecare echipă, lucrând singură?

20. Compuneţi o problemă al cărei model matematic să fie egalitatea: $3x + 2 \cdot (x + 3) = 41$.

PE-PP Supermate ****

21. Aflaţi x din egalitatea: $(2\,013^0 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}) \cdot x = 2^{101}$.

22. Aflaţi numerele naturale x şi y, ştiind că :

a) $(x - 1)(y + 1) = 10$; b) $x + y = xy$; c) $xy - 2y + 3x = 21$.

23. Determinaţi valorile numărului natural nenul n, ştiind că $4^n \cdot 81 + 2^{2n} \cdot 56 - 2^{2n} \cdot 56 \leq 12^4$.

24. Aflaţi valorile numărului natural x, ştiind că $2^{2013} < 2x - 2 < 2^{2014}$.

PE-PP 17. Media aritmetică a două numere naturale cu rezultat număr natural

Media aritmetică a două numere naturale este un concept pe care îl întâlnim în numeroase activităţi cotidiene.

Exemplu: O gospodină cumpără de la piaţă 1 kg de mazăre, pentru care plăteşte 3 lei, şi 1 kg de fasole, pentru care plăteşte 5 lei. Cât plăteşte gospodina pentru un kilogram de legume?

Rezolvare: Raţionamentul este următorul:

- pentru 2 kg de legume, gospodina plăteşte: 3 lei + 5 lei = 8 lei;
- pentru 1 kg de legume, gospodina plăteşte: 8 lei : 2 = 4 lei.

Deci, pentru un kilogram de legume gospodina plăteşte: (3 + 5) : 2 = 4 (lei).

Media aritmetică a preţului unui kilogram de legume este de 4 lei.

Reţinem:

Media aritmetică a două numere naturale *a* şi *b* este numărul care se obţine împărţind la 2 suma lor:

$$m_a = (a + b) : 2$$

Exemple:

1. Media aritmetică a numerelor 3 şi 17 este numărul: $m_a = (3 + 17) : 2 = 20 : 2 = 10$.
2. Media aritmetică a numerelor 4 şi 14 este numărul: $m_a = (4 + 14) : 2 = 18 : 2 = 9$.

Media aritmetică a *n* numere naturale este numărul care se obţine împărţind la *n* suma lor. Dacă cele *n* numere naturale sunt $a_1, a_2, \ldots, a_n$, atunci:

$$m_a = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : n$$

Exemple:

1. Timp de 5 zile, Alexandra citeşte în fiecare zi la prânz, temperatura indicată de termometru şi găseşte valorile: 15°C, 12°C, 14°C, 10°C şi 9°C. Rezultă că temperatura medie pe perioada celor 5 zile este:

$$m_a = (15 + 12 + 14 + 10 + 9) : 5 = 12\ (°C).$$

2. Mihai are la biologie următoarele note: 8, 9, 9, 10. Atunci media notelor este:

$$m_a = (8 + 9 + 9 + 10) : 4 = 36 : 4 = 9.$$

3. Media aritmetică a două numere este 20. Ştiind că unul este triplul celuilalt, aflaţi numerele.

Rezolvare: Fie x şi y numerele. Atunci $(x + y) : 2 = 20$. Rezultă $x + y = 40$. Cum $x = 3 \cdot y$ se obţine $3 \cdot y + y = 40$, de unde $4 \cdot y = 40$, iar de aici rezultă $y = 40 : 4 = 10$ şi $x = 3 \cdot y = 3 \cdot 10 = 30$. Numerele sunt 10 şi 30.

Observaţii:

1. Media aritmetică a două sau mai multe numere naturale nu este întotdeauna număr natural.

2. Media aritmetică a *n* numere naturale distincte este mai mare decât cel mai mic dintre numere şi este mai mică decât cel mai mare dintre numere.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi media aritmetică a numerelor:
a) 8 şi 18; b) 11 şi 31; c) 203 şi 507; d) 457 şi 393.

2. Calculaţi media aritmetică a numerelor:
a) 2; 7 şi 24; b) 9; 13 şi 8; c) 9; 19; 17 şi 3; d) 6; 12; 21; 33 şi 3.

3. Media aritmetică a numerelor 17 şi x este 35. Calculaţi x.

4. Cristina are la geografie notele 5, 7 şi 9. Calculaţi media Cristinei la geografie.

5. În săptămâna 7-13 mai, temperaturile măsurate de Maria au fost: 14°C, 17°C, 21°C, 19°C, 17°C, 18°C, 20°C. Calculaţi media temperaturilor din cele 7 zile.

6. Media aritmetică a două numere este 16. Unul dintre ele este 20. Calculaţi celălalt număr.

7. Media aritmetică a trei numere este 75. Calculaţi suma numerelor.

PE Aplicare şi exersare **

8. Ana are la limba engleză notele 7 şi 10. Ce notă trebuie să mai ia Ana pentru a avea la limba engleză media 9 fără rotunjire?

9. Media aritmetică a trei numere este 77. Primele două numere sunt 41 şi 126. Calculaţi cel de-al treilea număr.

10. Media aritmetică a trei numere este 14, iar al patrulea număr este 22. Calculaţi media aritmetică a celor patru numere.

11. Calculaţi media aritmetică a numerelor:
a) $2x$; $5x$; $11x$; b) $21x$; $37x$; $32x$.

12. Media aritmetică a numerelor x, 1 şi $3x$ este 11. Calculaţi x.

13. Media aritmetică a patru numere este 8. Calculaţi media aritmetică a primelor două numere, ştiind că media aritmetică a ultimelor două numere este 6.

14. Media aritmetică a trei numere este egală cu 12, iar media aritmetică a primelor două numere este 10. Calculaţi cel de-al treilea număr.

15. Media aritmetică a două numere este 24. Calculaţi numerele, ştiind că raportul lor este 3.

16. Media aritmetică a trei numere este 21, iar media aritmetică a primelor două numere este 25. Calculaţi numerele, ştiind că al treilea număr este cu 7 mai mic decât dublul primului număr.

PE Aprofundare şi performanţă ***

17. Trei numere naturale au proprietatea că fiecare dintre ele este media aritmetică a celorlalte două. Ce puteţi spune despre cele trei numere? Justificaţi!

18. Media aritmetică a 7 numere naturale distincte este 10. Care este cea mai mare valoare posibilă pe care o poate lua unul dintre numere?

19. În urma unui test de evaluare la matematică, cei 25 de elevi ai clasei a V-a D au obţinut următoarele note: 4 elevi nota 7; 6 elevi nota 8; 8 elevi nota 9; 4 elevi nota 10 şi 3 elevi nota 4. Calculaţi media clasei.

20. Calculaţi media aritmetică a numerelor 2^{17}; 2^{18} şi $3 \cdot 2^{19}$.

21. Media aritmetică a trei numere naturale nenule distincte este 37. Calculați care poate fi cel mai mic și cel mai mare dintre ele.

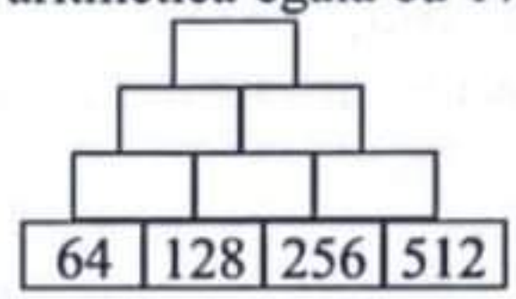
22. Media aritmetică a 7 numere naturale este 23. Știind că primul număr este 11, calculați media aritmetică a celorlalte 6 numere.

PE-PP **Supermate** ****

23. Știind că media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_{90}$ este 573, iar media aritmetică a numerelor $a_{91}, a_{92}, \ldots, a_{100}$ este 243, calculați media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$.

24. Aflați trei numere naturale, știind că două câte două au media aritmetică egală cu 17, 23, respectiv 25.

25. În figura alăturată, în fiecare casetă se scrie media aritmetică a celor două numere situate în casetele de sub ea. Aflați numărul situat în vârful piramidei.



26. Aflați cifrele x și y, știind că media aritmetică a numerelor $\overline{xx}$, $\overline{yy}$, $\overline{xyx}$ și $\overline{xyyx}$ este 2 799.

PE-PP 18. Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Dacă $3x - 1 = 14$, atunci numărul natural x este egal cu:
a) 2; b) 5; c) 3; d) 7.

2. Dacă $3x - 7 \leq 23$, atunci numărul natural x este egal cu:
a) 4; b) 23; c) 10; d) 7.

3. Aflați x știind că are loc egalitatea:
a) $x - 134 = 427$; b) $326 + x = 507$.

4. Aflați x știind că are loc egalitatea:
a) $108 : x = 18$; b) $72 : x + 2 = 6$.

5. Aflați numerele naturale x pentru care $3(x + 1) \leq 137 - 131$.

6. Aflați numerele naturale x pentru care $3^{x+1} \leq 81$.

7. Aflați numărul natural x pentru care

$$3 \cdot \{10 + 2 \cdot [40 - 2 \cdot (28 - 3 \cdot 5)]\} - 7x = 51.$$

8. Suma a patru numere naturale consecutive este 118. Determinați numerele.

9. Andreea rezolvă zilnic cu două probleme mai mult decât în ziua precedentă. Știind că în trei zile consecutive Andreea a rezolvat 15 probleme, determinați câte probleme a rezolvat în prima zi.

TESTUL 2

1. Dacă $5x - 2 = 13$, atunci numărul x este egal cu:
a) 5; b) 1; c) 3; d) 7.

2. Dacă $2x - 5 > 15$, atunci numărul x nu poate fi:
a) 11; b) 17; c) 3; d) 15.

3. Aflaţi numărul x ştiind că:
a) $x - 314 = 742$; b) $236 + x = 304$.

4. Aflaţi numărul x ştiind că:
a) $144 : x = 36$; b) $27 : x + 5 = 14$.

5. Aflaţi valorile numărului natural x ştiind că $2(x + 3) < 307 - 251$.

6. Aflaţi valorile numărului natural x ştiind că $2^{x+1} \leq 16$.

7. Aflaţi numărul x ştiind că: $2 \cdot \{12 + 3 \cdot [60 - 3 \cdot (27 - 4 \cdot 3)]\} - 5x = 64$.

8. Suma a patru numere naturale consecutive este 90. Determinaţi numerele.

9. Adi rezolvă zilnic cu 3 probleme mai mult decât în ziua precedentă. Ştiind că în 3 zile consecutive Adi a rezolvat 18 probleme, determinaţi câte probleme a rezolvat în prima zi.

TESTUL 3

1. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea: $x + 23 = 42$.

2. Care dintre următoarele valori ale lui x verifică egalitatea: $7x + 1 = 29$?
a) 2; b) 3; c) 5; d) 4.

3. Aflaţi numărul natural x dacă: $2x + x \cdot a + x \cdot b = 32$ şi $a + b = 6$.

4. Determinaţi numărul natural x dacă: $(132x - 50x) : 41 = 60$.

5. Se consideră inegalitatea $3x - 5 \leq 13$, unde x este un număr natural. Stabiliţi care dintre valorile lui x de mai jos verifică inegalitatea:
a) 0; b) 3; c) 6; d) 2.

6. Aflaţi valorile numărului natural nenul x ştiind că $3x - 1 < x + 3$.

7. Media aritmetică a trei numere naturale x, y, z este 28. Determinaţi suma lor.

8. Aflaţi numărul natural x dacă: $3 + 6 + 9 + \ldots + 297 = 150x$.

9. Aflaţi două numere naturale, ştiind că diferenţa lor este 43 şi numărul mai mare este cu 44 mai mic decât dublul numărului mai mic.

TESTUL 4

1. Care dintre valorile lui x verifică egalitatea $3x - 8 = 13$?
a) 13; b) 7; c) 11; d) 5.

2. Aflaţi numărul natural x ştiind că $(8 + 3x) \cdot 14 - 30 = 1\,762$.

3. Calculaţi media aritmetică a numerelor: 38, 47, 125.

4. Care dintre valorile lui x verifică inegalitatea $7x + 12 \leq 26$?
a) 3; b) 5; c) 7; d) 9.

5. Aflaţi valorile numărului natural x care verifică egalitatea $(3x + 5x) : 4 < 10$.

6. Determinaţi un număr natural x cu proprietatea că, dacă se înmulţeşte cu 15, se obţine acelaşi rezultat ca atunci când se adună cu 84.

7. Aflaţi numerele naturale x şi y, ştiind că: $(x - 3)(y + 4) = 12$.

8. Determinaţi numărul natural x, dacă: $4 + 8 + 12 + \ldots + 396 = 200x$.

9. La un magazin s-au adus 120 de pâini. Câţi lei costă întreaga cantitate de pâine, dacă pentru 10 pâini se plătesc 80 de lei?

PE

Nume _____ Clasa _____

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. Completaţi pe fişa de evaluare spaţiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Numărul x pentru care $2x+13=3(x+2)$ este egal cu ..... .

(0,5p) **2.** Media aritmetică a trei numere consecutive este 23. Atunci numărul din mijloc este egal cu ..... .

(0,5p) **3.** Dacă pentru cumpărarea a patru eşarfe se plătesc 320 de lei, atunci pentru a cumpăra trei eşarfe de acelaşi fel se vor plăti ..... lei.

(0,5p) **4.** Cel mai mic număr natural pentru care $\left[3\cdot(x+19)\right]:3\geq 31$ este..... .

II. Încercuiţi pe fişă doar răspunsul corect, ştiind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă $a\cdot x+b\cdot x+4x=64$ şi $x=2$, atunci media aritmetică a numerelor a şi b este:

A. 28 B. 14 C. 24 D. 12

(0,5p) **2.** Se consideră trei numere naturale nenule consecutive astfel încât media aritmetică dintre cel mai mare şi cel mai mic să fie un număr impar. Câte dintre cele trei numere sunt pare?

A. toate B. două C. unul D. unul sau două

(0,5p) **3.** Se consideră numărul a astfel încât $3\leq 4(a-8)-3\leq 6$. Atunci:

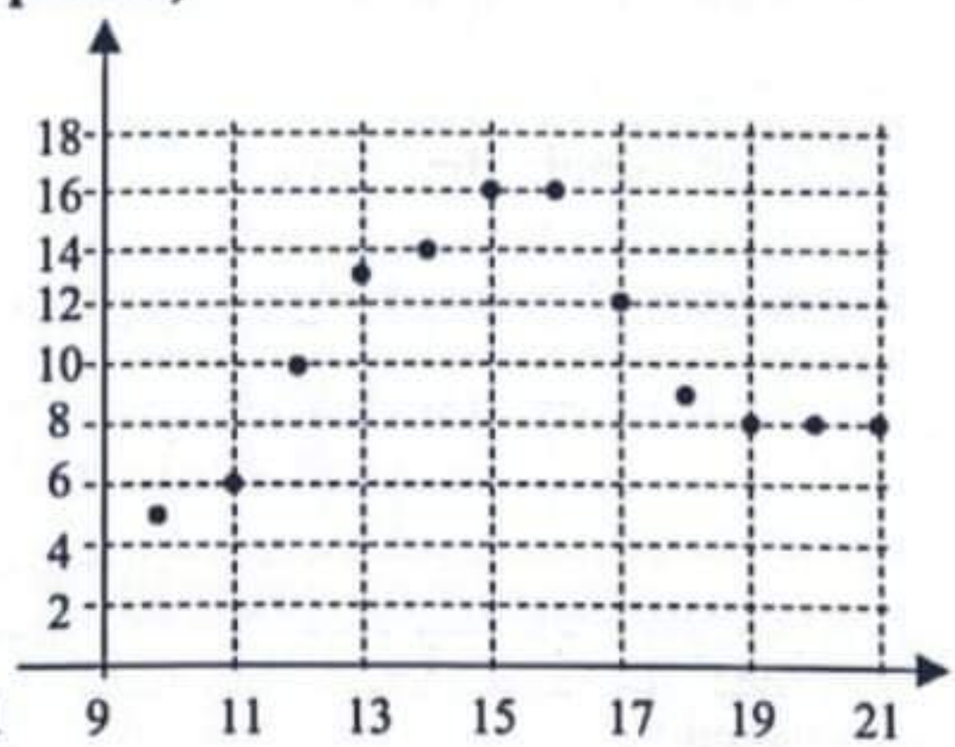
A. $a\leq 8$ B. $a=9$ C. $a=10$ D. $a\geq 11$

(0,5p) **4.** De trei ori media aritmetică a numerelor 3^{x-1}, 3^{x} şi 3^{x+1} este cât produsul numerelor 13 şi 9. Atunci numărul x este:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

III. Uniţi prin săgeţi fiecare enunţ, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

La o staţie meteo a fost înregistrată temperatura din aer între orele 10 şi 21. A rezultat diagrama alăturată, unde orele sunt marcate pe linia de jos, iar temperatura, pe coloana din stânga. Precizaţi intervalul de timp în care temperatura aerului:



(0,5p) a) creşte

(0,5p) b) staţionează

(0,5p) c) descreşte

(0,5p) d) este maximă

1) 11-17

2) 10-15

3) 15-16 şi 19-21

4) 16-19

5) 15-16

La problemele IV şi V scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(1p) **IV.** La o brutărie cantitatea de făină existentă s-a consumat în trei zile astfel: marţi cu 34 kg mai puţin decât luni, iar miercuri 20 de kg, adică de 5 ori mai puţin decât marţi. Calculaţi cantitatea de făină consumată luni.

(2p) **V.** Mihai şi Mihaela cumpără creioane şi pixuri de acelaşi fel. Pentru 20 de creioane şi 6 pixuri Mihai a plătit 70 de lei. Pentru 4 creioane şi 10 pixuri Mihaela a plătit 58 de lei.

a) Calculaţi media aritmetică a costului cumpărăturilor celor doi copii.

b) Aflaţi cât costă un pix şi cât costă un creion.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

Divizibilitatea numerelor naturale

PE-PP

1. Divizor. Multiplu. Divizor comun. Multiplu comun

Fie a şi b două numere naturale. Spunem că b este **divizor** al lui a dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

În această situaţie, despre a se spune că este un **multiplu** al lui b şi se utilizează una dintre următoarele scrieri:

$b \mid a$	se citeşte „*b divide a*”
$a \vdots b$	se citeşte „*a este divizibil cu b*”

Se mai folosesc simbolurile: $\nmid$ (nu divide); $\not\vdots$ (nu este divizibil cu).

Exemple:

1. $2 \mid 12$ deoarece există numărul natural c astfel încât $12 = 2 \cdot c$ (numărul natural c este 6). Deci, 2 este divizor al lui 12 şi 12 este multiplu al lui 2.
2. Fie a un număr natural oarecare; $a \mid 0$ deoarece există numărul natural c astfel încât $0 = a \cdot c$ (numărul natural c este 0).
3. $0 \mid 0$ deoarece există numărul natural c astfel încât $0 = 0 \cdot c$ (numărul natural c poate fi orice număr natural).

Observaţie: **Pentru a şi b două numere naturale cu $b \neq 0$, se spune că b divide pe a sau că a este divizibil cu b dacă a se împarte exact la b.**

Exemple:

1. $4 \mid 32$ deoarece $32 : 4 = 8$.
2. $6 \nmid 27$ deoarece împărţind 27 la 6, restul împărţirii nu este 0; altfel spus, $27 : 6$ nu este număr natural.

Observaţie: Reţinem următoarele exprimări echivalente:

1. b este divizor al lui a;
2. a este un multiplu al lui b;
3. b divide pe a;
4. a este divizibil cu b;
5. a se împarte exact la b (numai pentru $b \neq 0$).

Cum se află multiplii unui număr natural?

Pentru a afla multiplii unui număr natural a, **multiplicăm** numărul a, adică înmulţim pe rând numărul a cu toate numerele naturale.

Exemplu: Multiplii numărului 3 sunt: $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7, \ldots$. Prin urmare, multiplii numărului 3 sunt: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, … .

Relaţia de divizibilitate are următoarele **proprietăţi:**

– este **reflexivă**: oricare ar fi numărul natural a, atunci $a \mid a$;
– este **antisimetrică**: dacă a şi b sunt numere naturale, atunci din $a \mid b$ şi $b \mid a$ rezultă $a = b$;
– este **tranzitivă**: dacă a, b, c sunt numere naturale, atunci din $a \mid b$ şi din $b \mid c$ rezultă $a \mid c$.

Un număr natural care are exact doi divizori se numeşte **număr prim**.

Exemple: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sunt numere prime.

Un număr natural nenul şi diferit de 1 care nu este număr prim se numeşte **număr compus.**

Exemple: Numerele 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16 sunt numere compuse deoarece fiecare are mai mult de doi divizori.

Observaţii:

- Numerele naturale 0 şi 1 nu sunt nici prime şi nici compuse.
- Orice număr natural n are cel puţin doi divizori: 1 şi n, adică pe 1 şi pe el însuşi. Aceştia sunt numiţi **divizori improprii**. Orice divizor a lui n care nu este impropriu este numit **divizor propriu**.
- Singurul număr prim şi par este 2.

Numărul natural a, $a \neq 0$, se numeşte **divizor comun** al numerelor naturale b şi c dacă $b \vdots a$ şi $c \vdots a$.

Numărul natural d, $d \neq 0$, este **cel mai mare divizor comun** al numerelor naturale nenule a şi b, dacă îndeplineşte condiţiile:

1. d divide pe a şi d divide pe b;
2. d se divide cu orice divizor comun al numerelor a şi b.

Numărul natural a se numeşte **multiplu comun** al numerelor naturale nenule b şi c dacă $a \vdots b$ şi $a \vdots c$.

Numărul natural m, $m \neq 0$, este **cel mai mic multiplu comun** al numerelor naturale a şi b dacă îndeplineşte condiţiile:

1. m se divide cu a şi m se divide cu b;
2. orice multiplu comun al numerelor naturale nenule a şi b se divide cu m.

Problemă:

a) Scrieţi divizorii numărului 18.
b) Scrieţi divizorii proprii ai numărului 30.
c) Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor 18 şi 30.
d) Scrieţi multiplii numărului 18.
e) Scrieţi multiplii numărului 30.
f) Aflaţi cel mai mic multiplu comun al numerelor 18 şi 30.

Rezolvare:

a) Divizorii numărului 18 sunt: 1, 2, 3, 6, 9 şi 18 (numerele la care se împarte exact 18).
b) Divizorii numărului 30 sunt: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 şi 30. Divizorii proprii sunt: 2, 3, 5, 6, 10, 15. Divizorii improprii sunt: 1 şi 30.
c) Din a) şi b) rezultă că cel mai mare divizor comun al numerelor 18 şi 30 este 6.
d) Multiplicând numărul 18, obţinem: $18 \cdot 0$, $18 \cdot 1$, $18 \cdot 2$, $18 \cdot 3$, $18 \cdot 4$, $18 \cdot 5$, $18 \cdot 6$, $18 \cdot 7$, … . Deci, multiplii numărului 18 sunt:

0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, ...

e) Multiplicând numărul 30, obţinem:

0, 30, 60, 90, 120, 150, …

f) Din d) şi e) rezultă că cel mai mic multiplu comun al numerelor 18 şi 30 este 90.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Scrieţi toţi divizorii numerelor: 12, 27, 31.

2. Scrieţi 5 divizori ai numărului 100.

3. Scrieţi 3 multipli ai numărului 6 mai mari decât 6.

4. a) Scrieţi toţi multiplii mai mici decât 50 ai numărului 7.
b) Scrieţi toţi multiplii lui 7 cuprinşi între 15 şi 65.

5. Scrieţi 3 multipli comuni pentru numerele 12 şi 18.

6. Aflaţi toţi divizorii comuni ai numerelor 12 şi 18 şi precizaţi care este cel mai mare dintre ei.

7. Care este cel mai mic număr natural nenul, multiplu comun pentru numerele 6 şi 9?

8. Care este cel mai mic număr natural nenul, multiplu comun pentru numerele 2, 3 şi 5?

9. Care este cel mai mare număr natural, divizor comun al numerelor 42 şi 70?

PE Aplicare şi exersare **

10. Câţi divizori are numărul 18? Dar 28?

11. Care este cel mai mic număr natural care are exact doi divizori?

12. Aflaţi cel mai mare număr natural de 3 cifre care este multiplu de 23.

13. Aflaţi cel mai mic număr natural de 4 cifre care este multiplu de 47.

14. Care este cel mai mic număr natural care are exact 3 divizori?

15. Un număr natural a este divizibil cu 12. Scrieţi 3 divizori diferiţi ai numărului a.

16. Folosind cifrele 0, 5 şi 4 scrieţi toate numerele de trei cifre divizibile cu:
a) 2; b) 5; c) 10.

17. Numerele naturale nenule a şi b au divizor comun numai pe 1. Care este cel mai mic număr nenul, multiplu comun pentru numerele a şi b?

PE Aprofundare şi performanţă ***

18. Un număr natural nenul a are printre divizorii săi numerele 3, 5 şi 7. Scrieţi încă 4 divizori diferiţi de aceştia ai numărului a.

19. Câte numere naturale de două cifre se divid cu 7?

20. a) Ştiind că $a \mid b$ şi $b \mid c$, arătaţi că $a \mid c$.
b) Ştiind că $a \mid b$ şi $b \mid a$, arătaţi că $a = b$.

21. a) Ştiind că a, b şi d sunt numere naturale nenule, $a > b$, $d \mid a$ şi $d \mid b$, arătaţi că $d \mid (a - b)$.
b) Ştiind că a, b, d sunt numere naturale nenule, $d \mid (a + b)$ şi $d \mid a$, arătaţi că $d \mid b$.

PE-PP Supermate ****

22. Aflaţi numerele naturale prime a, b, c care verifică egalitatea:

$$a + 2b + 10c = 82.$$

23. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 100. Ileana şi Tudor şterg pe rând, începând cu Tudor, câte un număr. Pierde copilul care este obligat să şteargă primul un multiplu al lui 2 sau al lui 5. Cine câştigă?

PE-PP 2. Aplicaţii ale divizibilităţii (Numere pare şi numere impare)

Din teorema împărţirii cu rest rezultă că oricare ar fi n un număr natural, restul împărţirii lui n la 2 este 0 sau 1. Deci, orice număr natural este de forma $2r$ sau $2r + 1$, unde r este un număr natural. Numerele de forma $2r$ se împart exact la 2 şi se numesc **numere pare**, iar cele de forma $2r + 1$ dau la împărţirea cu 2 restul 1 şi se numesc **numere impare.**

Şirul numerelor pare este:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ..., 100, 102, 104, ..., 1 000, 1 002, 1 004, ...

Şirul numerelor impare este:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., 99, 101, 103, ..., 999, 1 001, 1 003, ...

Pentru a obţine un număr natural par, este suficient să luăm un număr natural r oarecare şi să calculăm $2r$; dacă vom calcula $2r + 1$ vom obţine un număr natural impar.

Dacă a şi b sunt două numere naturale de aceeaşi paritate sau de parităţi diferite, paritatea sumei, diferenţei şi produsului rezultă din următorul tabel:

a	b	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$
par	par	par	par	par
par	impar	impar	impar	par
impar	par	impar	impar	par
impar	impar	par	par	impar

Observaţii: 1. Despre paritatea câtului $a : b$ (dacă împărţirea se face exact) nu se poate spune nimic.

2. Suma şi diferenţa au aceeaşi paritate.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Fie numerele 16, 24, 29, 40, 53, 71, 121, 3 004.
a) Scrieţi care dintre aceste numere sunt pare.
b) Scrieţi care dintre aceste numere sunt impare.

2. Scrieţi şirul numerelor naturale pare şi calculaţi al câtelea termen al şirului este:
a) 20; b) 1 002; c) 24 736.

3. Scrieţi şirul numerelor naturale impare şi calculaţi al câtelea termen al şirului este:
a) 21; b) 441; c) 9 261.

4. Calculaţi suma numerelor pare şi suma numerelor impare mai mari decât 2 437 şi mai mici decât 3 712.

5. a) Aflaţi trei numere naturale pare consecutive, ştiind că suma lor este 978.
b) Aflaţi trei numere naturale impare consecutive, ştiind că suma lor este 1 719.

6. Scrieţi numărul 15 ca suma a două numere naturale consecutive.

7. Scrieţi numărul 26 ca suma a două numere naturale pare consecutive.

8. Scrieţi numărul 36 ca suma a două numere impare consecutive.

9. Scrieţi numărul 50 ca suma a cinci numere pare consecutive.

10. Scrieţi numărul 96 ca suma a şase numere naturale impare consecutive.

PE Aplicare şi exersare **

11. Suma dintre un număr prim şi un număr par este 76. Aflaţi numerele.

12. Suma dintre un număr prim şi un număr impar este 371. Aflaţi numerele.

13. Dacă a şi b sunt două numere naturale, $x = 2a + 6b$ şi $y = 4a + 10b + 17$, aflaţi ce paritate au următoarele numere:

a) x; b) y; c) $x + y$; d) $x \cdot y$; e) $7x$; f) $6y$; g) $3x + y + 7$.

14. Suma a 10 numere naturale nenule pare distincte este 110. Aflaţi numerele.

15. Suma a 10 numere naturale nenule pare este 108. Arătaţi că două dintre numere sunt egale.

16. Suma a 10 numere naturale nenule pare distincte este 112. Arătaţi că cel mai mare dintre ele este un număr mai mare decât 20.

17. Suma a 10 numere naturale impare distincte este 100. Aflaţi numerele.

18. Suma a 10 numere naturale impare este 96. Arătaţi că două dintre ele sunt egale.

19. Suma a 10 numere naturale impare distincte este 102. Arătaţi că cel mai mare dintre ele este un număr mai mare decât 20.

20. Stabiliţi dacă există 15 numere naturale pare care, adunate, să aibă suma 1 999.

PE Aprofundare şi performanţă ***

21. Stabiliţi dacă există 12 numere naturale impare care, adunate, să aibă suma 2 001.

22. Avem 5 numere naturale nenule. Se ştie că suma primelor două numere este un număr impar şi suma ultimelor trei numere este un număr par. Arătaţi că produsul celor cinci numere este divizibil cu 4.

23. Suma a 10 numere naturale nenule distincte este 98. Arătaţi că produsul celor 10 numere este un număr par.

24. Suma mai multor numere pare consecutive este 54. Aflaţi numerele. Câte soluţii are problema?

25. Aflaţi ce paritate are numărul $n(n + 1)$, unde n este număr natural.

26. Aflaţi ce paritate are numărul $n(n + 1) + 17$, unde n este un număr natural diferit de zero.

27. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr par. Cel mai mic dintre ele este par sau impar?

28. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr impar. Cel mai mic dintre ele este par sau impar?

29. Aflaţi numerele naturale a, b, c, ştiind că a este număr prim, iar:

$$a + b + c = 61 \text{ şi } b - c = 25.$$

30. Aflaţi numerele naturale a şi b care verifică egalitatea:

$$a + b = a \cdot b.$$

PE-PP Supermate ****

31. Se consideră numărul $a = 20 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n + 25 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}$.

a) Arătaţi că $29 \mid a$.

b) Determinaţi numărul natural n pentru care $a = 97\,875$.

32. a) Calculaţi câte numere de trei cifre divizibile cu 37 există.

b) Calculaţi suma tuturor numerelor de trei cifre divizibile cu 37.

c) Arătaţi că suma calculată la punctul b) se divide cu 375.

33. Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $a = (2n + 1)(3n + 1)(4n + 1)$ este număr par.

34. Dacă x şi y sunt numere naturale şi $a = 3x + 4y + 3$ şi $b = x + 2y + 3$, stabiliţi paritatea numerelor $a + b$ şi $a - b$.

35. a) Arătaţi că suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3.

b) Arătaţi că produsul a trei numere naturale consecutive este divizibil cu 6.

PE-PP 3. Criterii de divizibilitate

Fie n un număr natural. Ne interesează să stabilim condiţia pe care trebuie să o îndeplinească numărul n pentru ca acesta să fie divizibil cu un alt număr natural m. O astfel de condiţie se numeşte **criteriu de divizibilitate.**

- **Criteriul de divizibilitate cu 2:** un număr natural este divizibil cu 2 dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0, 2, 4, 6 sau 8.
- **Criteriul de divizibilitate cu 5:** un număr natural este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5.
- **Criteriul de divizibilitate cu 10:** un număr natural este divizibil cu 10 dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0.
- **Criteriul de divizibilitate cu 10^n ($n \geq 2$):** un număr natural este divizibil cu 10^n dacă şi numai dacă ultimele n cifre ale numărului sunt zerouri.
- **Criteriul de divizibilitate cu 3:** un număr natural este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor numărului este divizibilă cu 3.
- **Criteriul de divizibilitate cu 9:** un număr natural este divizibil cu 9 dacă şi numai dacă suma cifrelor numărului este divizibilă cu 9.

Exemple:

1. $250 \vdots 10$ (deoarece ultima cifră a lui 250 este 0);
   $134 \vdots 2$ (deoarece ultima cifră a lui 134 este 4);
   $725 \vdots 5$ (deoarece ultima cifră a lui 725 este 5).
2. $\overline{ab} \vdots 10 \Rightarrow b = 0$;
   $\overline{ab} \vdots 5 \Rightarrow b = 0$ sau $b = 5$;
   $\overline{ab} \vdots 2 \Rightarrow b$ este una dintre cifrele 0, 2, 4, 6 sau 8.
3. $1\,278 \vdots 3$ (deoarece suma cifrelor numărului este $1 + 2 + 7 + 8 = 18$, care este un număr divizibil cu 3; de asemenea $1\,278 \vdots 9$ pentru că $1 + 2 + 7 + 8 = 18$ şi $18 \vdots 9$).
4. $102 \vdots 3$ pentru că $1 + 0 + 2 = 3$ şi $3 \vdots 3$; dar $102 \not\vdots 9$ pentru că $1 + 0 + 2 = 3$ şi $3 \not\vdots 9$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Fie următoarele numere naturale: 6, 10, 15, 17, 20, 24, 86, 95, 112, 130.

a) Scrieţi numerele divizibile cu 10.

b) Scrieţi numerele divizibile cu 5.

c) Scrieţi numerele divizibile cu 2.

d) Scrieţi numerele care nu sunt divizibile cu niciunul dintre numerele 10, 5 şi 2.

2. Folosind criteriul de divizibilitate cu 3, arătaţi că fiecare dintre numerele 42, 786, 603, 51, 411, 27, 2013 este divizibil cu 3.

3. Folosind criteriul de divizibilitate cu 9, arătaţi că fiecare dintre numerele 423, 621, 603, 54, 828, 27, 7038 este divizibil cu 9.

4. Scrieţi cel mai mare număr de patru cifre:

a) divizibil cu 2; b) divizibil cu 3; c) divizibil cu 5;

d) divizibil cu 9; e) divizibil cu 10; f) divizibil cu 2 şi cu 9; g) divizibil cu 100.

5. Determinaţi numărul natural de forma $\overline{53x}$ care este divizibil şi cu 2 şi cu 3.

PE Aplicare şi exersare **

6. a) Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{12x}$ divizibile cu 2.

b) Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{3xy}$ divizibile cu 5.

c) Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{7xy}$ divizibile cu 2 şi cu 5.

7. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{3x26}$ care sunt divizibile cu 3 şi nu sunt divizibile cu 9.

8. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{5x1y}$ care sunt divizibile cu 3 şi nu sunt divizibile cu 9

9. Dacă a şi b sunt numere naturale şi $x = 3a + 6b$, arătaţi că x este multiplu de 3.

PE Aprofundare şi performanţă ***

10. Scrieţi cel mai mic şi cel mai mare număr de forma $\overline{7xx}$ divizibil cu 2.

11. Scrieţi numerele de forma $\overline{xx7y}$ divizibile cu:

a) 2; b) 5; c) 10.

12. Arătaţi că:

a) produsul a două numere naturale consecutive se divide cu 2;

b) produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 3.

13. a) Daţi trei exemple de numere naturale care sunt divizibile cu 2, dar nu sunt divizibile cu 5.

b) Daţi trei exemple de numere naturale care sunt divizibile cu 5, dar nu sunt divizibile cu 2.

14. Arătaţi că:

a) $2\,007 \mid (1 + 2 + 3 + \ldots + 2\,007)$;

b) $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) \vdots 37$.

PE-PP **Supermate** ****

15. Determinaţi numerele naturale n, ştiind că suma divizorilor lui n este $n + 7$.

16. a) Arătaţi că oricum am alege 4 numere naturale, există printre ele cel puţin două a căror diferenţă este divizibilă cu 3.

b) Arătaţi că oricum am alege 6 numere naturale, există printre ele cel puţin două a căror diferenţă este divizibilă cu 5.

17. a) Daţi exemple de trei numere naturale a, b, c pentru care a este divizibil cu b, a este divizibil cu c, dar a nu este divizibil cu produsul $b \cdot c$.

b) Demonstraţi că, pentru orice a număr natural, dacă a este divizibil cu 2 şi a este divizibil cu 3, atunci a este divizibil cu produsul $2 \cdot 3$.

PE-PP 4. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Scrieţi multiplii lui 3 mai mici decât 20.

2. Scrieţi divizorii lui 18 mai mari decât 5.

3. Scrieţi cel mai mic număr natural de 3 cifre distincte divizibil cu 5.

4. Scrieţi cel mai mare număr natural de trei cifre distincte divizibil cu 2.

5. Calculaţi suma numerelor pare de forma $\overline{aaa}$.

6. Calculaţi suma numerelor impare de forma $\overline{aaa}$.

7. Câţi divizori are numărul 16?

8. Folosind criteriile de divizibilitate cu 2, 5 sau 10, stabiliţi restul împărţirii numărului 2 005 la:

a) 2; b) 5; c) 10.

9. Stabiliţi care dintre următoarele numere sunt divizibile cu 2:

a) $2n + 1$; b) $5n + 2$; c) $2n + 3$; d) $n(n + 1)$.

TESTUL 2

1. Scrieţi toate numerele de forma $\overline{132x}$ divizibile cu 2.

2. Scrieţi toţi divizorii comuni ai numerelor 12 şi 28.

3. Scrieţi toate numerele naturale mai mici decât 25 care au exact 2 divizori.

4. Scrieţi cel mai mic număr natural care are exact 3 divizori.

5. Stabiliţi dacă:

a) $17 + 213$ se divide cu 10;

b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 20$ se divide cu 7.

6. a) Scrieţi numerele impare cuprinse între 14 şi 21.

b) Scrieţi toate numerele impare cuprinse între $2n$ şi $2n + 7$.

7. Câte numere de forma $\overline{1xy}$, $x \neq y$ sunt divizibile cu 10?

8. Scrieţi toate numerele pare, divizibile cu 5, mai mici decât 30.

9. Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{xyzz}$, ştiind că sunt divizibile cu 2, $x + y = 8$ şi $x < y$.

TESTUL 3

1. Stabiliţi paritatea numărului natural a, ştiind că $5a + 4b - 22 = 0$, unde b este număr natural.
2. Scrieţi divizorii comuni ai numerelor 12 şi 18.
3. Determinaţi numerele naturale x pentru care $(x+1) \mid 8$.
4. Scrieţi 3 multipli comuni ai numerelor 2 şi 7.
5. Aflaţi numerele $\overline{21x}$, scrise în baza 10, divizibile cu 2.
6. Determinaţi cifra x, astfel ca numărul $\overline{xx}$, scris în baza 10, să fie un multiplu al lui 3.
7. Scrieţi multiplii numărului 17 mai mari decât 21 şi mai mici decât 70.
8. Demonstraţi că numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, se divide cu 3, dacă $a + b + c$ se divide cu 3.
9. Scrieţi numerele de forma $\overline{14xy}$ care se divid cu 10 şi nu se divid cu 100.

TESTUL 4

1. La împărţirea numărului natural n la 38, se obţine restul 19. Demonstraţi că n se divide cu 19.
2. Calculaţi numerele naturale x, ştiind că $2(x + 1) - 1$ este divizor al numărului 15.
3. Demonstraţi că dacă $10 \mid (3a + 7b)$, atunci $10 \mid (7a + 3b)$.
4. Scrieţi multiplii numărului 6 cel puţin egali cu 12 şi cel mult egali cu 30.
5. Determinaţi cifra x a numărului natural $\overline{77x}$ divizibil cu 5.
6. Suma a trei numere pare consecutive este 42. Calculaţi numerele.
7. Câte numere de forma $\overline{21x}$ cu cifre diferite există?
8. Demonstraţi că numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, se divide cu 9, dacă $a + b + c$ se divide cu 9.
9. La concursul „Ziua Pământului" participă 108 fete şi 45 de băieţi. Participanţii sunt grupaţi în echipe care au acelaşi număr de membri şi fiecare echipă are acelaşi număr de băieţi. Arătaţi că:
   a) se pot forma 3 echipe;
   b) nu se pot forma 5 echipe.

TESTUL 5

1. Scrieţi divizorii mai mari decât 7 ai numărului 24.
2. Scrieţi multiplii mai mici decât 23 ai numărului 5.
3. Verificaţi care dintre numerele 138, 225 şi 1 943 este divizibil cu 3.
4. Scrieţi toate numerele naturale pare divizibile cu 7, mai mici decât 43.
5. Într-o cutie sunt 12 bomboane. La câţi copii pot fi împărţite în mod egal bomboanele din cutie? Dar bomboanele din 3 cutii?
6. Scrieţi toate numerele de forma $\overline{x7x}$ divizibile cu 2.

7. Scrieţi cel mai mic număr natural de trei cifre care este divizibil cu 3.

8. Scrieţi toate numerele impare cuprinse între $2n$ şi $2n + 9$, unde n este număr natural.

9. Arătaţi că dacă două numere naturale sunt divizibile cu acelaşi număr, atunci şi suma lor este divizibilă cu acel număr.

TESTUL 6

1. Scrieţi divizorii mai mari decât 5 ai numărului 28.

2. Scrieţi multiplii mai mici decât 29 ai numărului 7.

3. Verificaţi care dintre numerele 381, 252 şi 1 493 este divizibil cu 3.

4. Scrieţi toate numerele naturale pare divizibile cu 5, mai mici decât 32.

5. Într-o cutie sunt 18 bomboane. La câţi copii pot fi împărţite în mod egal bomboanele din cutie? Dar bomboanele din 2 cutii?

6. Scrieţi toate numerele de forma $\overline{x3y}$ divizibile cu 5.

7. Scrieţi cel mai mare număr natural de trei cifre distincte care este divizibil cu 3.

8. Scrieţi toate numerele pare cuprinse între $2n - 1$ şi $2n + 7$, unde n este număr natural.

9. Arătaţi că dacă două numere naturale sunt divizibile cu acelaşi număr, atunci şi diferenţa lor este divizibilă cu acel număr.

PE

Nume _____ Clasa _____

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. Completaţi pe fişa de evaluare spaţiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Cel mai mic număr natural de trei cifre divizibil cu 2, 3 şi 5 este ..... .

(0,5p) **2.** Suma divizorilor lui 18 mai mari decât 7 este egală cu ..... .

(0,5p) **3.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 şi 18 este ..... .

(0,5p) **4.** Dintre numerele 19 423, 19 033, 19 333, 19 332, divizibil cu 3 este numărul .... .

II. Încercuiţi pe fişă doar răspunsul corect, ştiind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Dintre numerele n, $n+1$, $n\cdot(n+1)$ şi $n+(n+1)$, pentru orice număr natural n, divizibil cu 2 este numărul:

A. n B. $n+1$ C. $n\cdot(n+1)$ D. $n+(n+1)$

(0,5p) **2.** Câte numere naturale de forma $\overline{43xy}$ sunt divizibile cu 3 şi $x+y=2$?

A. unul B. două C. trei D. niciunul

(0,5p) **3.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 3 şi 7 mai mare decât 43 este:

A. 61 B. 62 C. 63 D. 84

(0,5p) **4.** Numărul $2^{2015}\cdot 3^{2015}+2^{2016}\cdot 3^{2016}+6^{2015}\cdot 2^{4}$ se divide cu:

A. 46 B. 37 C. 35 D. 15

III. Uniţi prin săgeţi fiecare enunţ, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Aflaţi numărul x ştiind că:

(0,5p) a) $x+5$ divide pe 15

(0,5p) b) $31 \vdots 2x+7$

(0,5p) c) $7 \mid 1\,001+x$ şi $x<14$

(0,5p) d) $\overline{xx}$ este divizibil cu 2 şi 3

1) $x=6$
2) $x=0$ sau $x=10$
3) $x=0$ sau $x=7$
4) $x=12$
5) $x=7$ sau $x=10$

La problemele IV şi V scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(2p) **IV.** Se consideră trei cifre nenule a, b şi c.

a) Arătaţi că numărul $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ este un multiplu al lui 111 şi că este divizibil cu suma celor trei cifre.

b) Verificaţi afirmaţia precedentă în cazul $a = 2$, $b = 3$ şi $c = 1$.

(1p) **V.** Se aleg şase numere naturale consecutive şi se scriu în ordine crescătoare. Se notează cu S suma ultimelor trei numere din cele şase şi cu s suma primelor trei. Este $S - s$ divizibilă cu 6? Dar $S + s$? Justificaţi răspunsurile alese.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

Capitolul II
Fracţii ordinare. Fracţii zecimale

PP Competenţe specifice
Exemple de activităţi de învăţare

1.2. Identificarea fracţiilor ordinare sau zecimale în contexte variate

- Utilizarea unor reprezentări grafice variate pentru ilustrarea fracţiilor echiunitare, subunitare, supraunitare
- Verificarea echivalenţei a două fracţii prin diferite reprezentări
- Scrierea unui procent sub formă de fracţie ordinară (de exemplu, 20% se scrie 20/100)
- Identificarea unor date statistice din diagrame, tabele sau grafice

2.2. Efectuarea de calcule cu numere naturale folosind operaţiile aritmetice şi proprietăţile acestora

- Efectuarea de calcule cu fracţii folosind proprietăţi ale operaţiilor aritmetice
- Introducerea şi scoaterea întregilor dintr-o fracţie ordinară
- Înmulţirea şi împărţirea unei fracţii zecimale cu un număr finit de zecimale nenule cu 10, 100, 1 000
- Scrierea unei fracţii zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ca un produs dintre un număr zecimal şi o putere a lui 10; scrierea unei fracţii zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ca un cât dintre un număr zecimal şi o putere a lui 10
- Calcularea unei fracţii echivalente cu o fracţie dată, prin amplificare sau simplificare
- Simplificarea unei fracţii ordinare în vederea obţinerii unei fracţii ireductibile (prin simplificări succesive, dacă este cazul)
- Efectuarea de operaţii cu numere raţionale exprimate sub formă de fracţie zecimală şi/sau ordinară

3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operaţiilor cu fracţii ordinare sau zecimale

- Aplicarea algoritmilor de împărţire a unei fracţii zecimale la un număr natural sau la o fracţie zecimală cu un număr finit de zecimale nenule
- Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale şi invers
- Aplicarea metodelor aritmetice pentru rezolvarea unor probleme cu fracţii

4.2. Utilizarea limbajului specific fracţiilor/procentelor în situaţii date

- Încadrarea unei fracţii zecimale între două numere naturale consecutive
- Utilizarea limbajului specific pentru determinarea unei fracţii dintr-un număr natural n, multiplu al numitorului fracţiei
- Utilizarea limbajului adecvat pentru exprimarea unor transformări monetare (inclusiv schimburi valutare)

6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracţiile, a unei situaţii date, în context intra şi interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)

- Formularea unor probleme cu fracţii, pe baza unor scheme sau reguli date şi rezolvarea acestora prin metode aritmetice (metoda reducerii la unitate, metoda comparaţiei, metoda mersului invers etc.)
- Reprezentarea datelor statistice folosind softuri matematice
- Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme pornind de la un set de informaţii cu caracter cotidian sau ştiinţific (fizic, economic etc.)

PE-PP 1. Fracţii ordinare; reprezentarea fracţiilor prin desene

Fracţia ordinară (pe scurt fracţia) este o pereche de numere naturale m şi n, cu $n \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{m}{n}$, unde m este **numărătorul** fracţiei şi n este **numitorul** fracţiei.

Numărătorul este separat de numitor prin **linia de fracţie**.

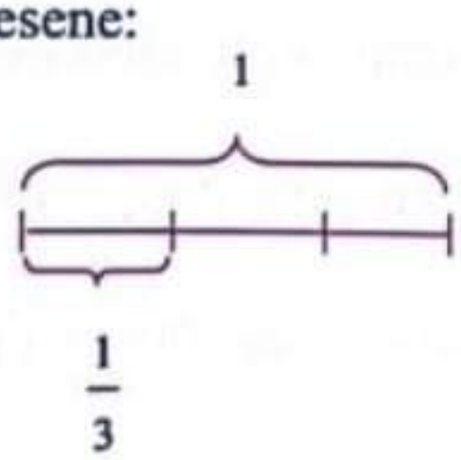
Numitorul unei fracţii arată în câte părţi egale a fost împărţit întregul, iar numărătorul arată câte părţi au fost luate din întreg.

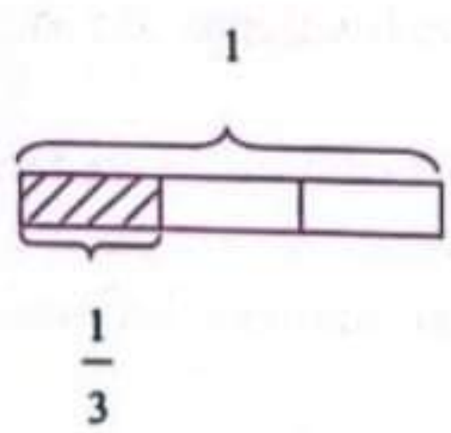
Observaţie: Fracţia $\frac{m}{n}$ este definită dacă şi numai dacă $n \neq 0$.

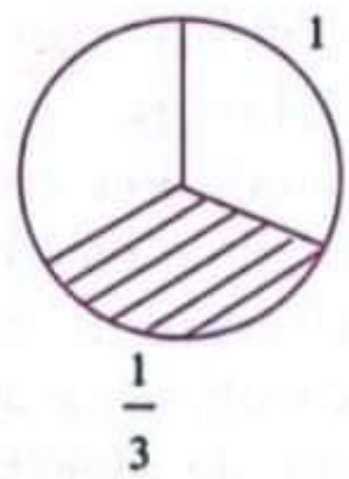
Oricare ar fi n un număr natural, avem:

$$\frac{0}{n} = 0 \ (n \neq 0) \text{ şi } \frac{n}{1} = n.$$

Fracţiile pot fi reprezentate cu ajutorul unor desene. De exemplu, fracţia $\frac{1}{3}$ din următoarele desene:







activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Scrieţi fracţiile corespunzătoare pentru:

a) două treimi; b) cinci pătrimi; c) o doime;
d) patru cincimi; e) trei doimi; f) opt zecimi;
g) trei şesimi; h) şapte doimi; i) nouă treimi.

2. Scrieţi cu ajutorul fracţiilor ce parte din întreg reprezintă partea haşurată în figurile:

a)

Fig. 1

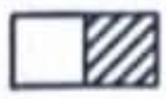


Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

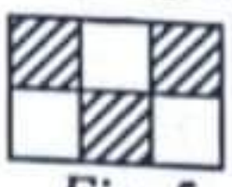


Fig. 5

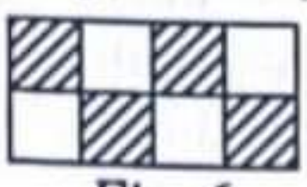


Fig. 6

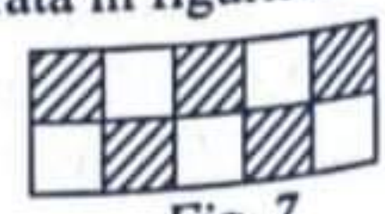


Fig. 7

b)

Fig. 1 *Fig. 2* *Fig. 3* *Fig. 4* *Fig. 5* *Fig. 6*

3. Scrieţi fracţiile reprezentate în următoarele desene:

Fig. 1 *Fig. 2* *Fig. 3* *Fig. 4*

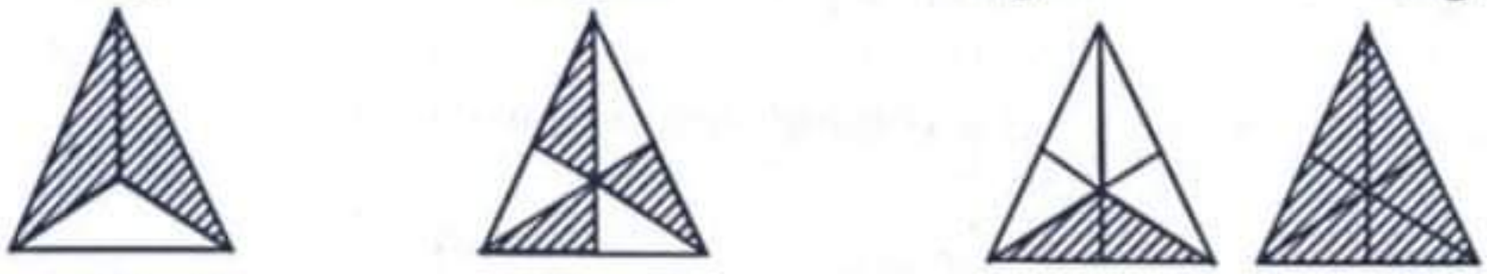


Fig. 5 *Fig. 6* *Fig. 7*

4. Reprezentaţi cu ajutorul unor desene următoarele fracţii:

a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{7}$; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{2}{7}$; g) $\frac{3}{4}$; h) $\frac{1}{2}$; i) $\frac{3}{5}$; j) $\frac{2}{3}$.

5. Completaţi spaţiile libere pentru a obţine un întreg în scrierile:

$$\frac{\quad}{17};\ \frac{\quad}{23};\ \frac{7}{\quad};\ \frac{29}{\quad};\ \frac{\quad}{57};\ \frac{19}{\quad}.$$

6. Desenaţi segmente de dreaptă cu următoarele lungimi:

a) $\frac{1}{5}$ dm; b) $\frac{5}{2}$ cm; c) $\frac{1}{4}$ dm; d) $\frac{1}{10}$ dm.

PE Aplicare şi exersare **

7. Câte cincimi sunt în:

a) un întreg; b) trei întregi; c) cinci întregi?

8. Ce parte dintr-o oră reprezintă:

a) un minut; b) 10 minute; c) 45 de minute;
d) 20 de minute; e) 50 de minute; f) 90 de minute?

9. Ce parte dintr-o săptămână reprezintă:

a) o zi; b) trei zile; c) cinci zile; d) 28 de zile?

10. Ce parte dintr-un an reprezintă:

a) o lună; b) 4 luni; c) 6 luni?

11. Scrieţi toate fracţiile de forma $\frac{a}{b}$, cunoscând că a este egal cu 1, 3 sau 5, iar b este egal cu 2 sau 7.

12. Scrieţi fracţiile care au numitorul 18, iar numărătorii sunt divizorii naturali ai lui 18.

13. Scrieţi fracţiile care au:

a) numitorul pătrat perfect de două cifre şi numărătorul cu 7 mai mic decât acesta;
b) numitorul 10 şi numărătorul de o cifră impară;
c) numărătorul de forma $\overline{x2}$, unde $\overline{x2} \vdots 3$ şi numitorul cu 5 mai mare decât acesta.

PE Aprofundare și performanță ***

14. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{\overline{1x}}{\overline{3y}}$, $x \neq y$, unde $\overline{1x}$, $\overline{3y}$ sunt prime.

15. Determinați $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{18}{x}$ să fie număr natural.

16. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale nenule, $a \leq 3$ și $b < 4$.

17. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{\overline{3x}}{47}$, unde $5 \mid \overline{3x}$.

18. Determinați toate fracțiile cu numărătorul 3 și numitorul de forma $\overline{x5}$, unde $2 < x \leq 7$.

19. Determinați toate fracțiile de forma $\frac{\overline{2x0}}{\overline{35y}}$, unde $x \neq y$, $2 \mid \overline{2x0}$ și $3 \mid \overline{35y}$.

20. Determinați numerele naturale x pentru care sunt definite fracțiile:

$$\frac{18}{x-3};\ \frac{1}{x+1};\ \frac{35}{x};\ \frac{24}{12-x};\ \frac{17}{2x-2};\ \frac{57}{x(x-1)};\ \frac{19}{(x+7)(x-2)}.$$

PE-PP Supermate ****

21. Scrieți toate fracțiile de forma:

a) $\frac{a-1}{a+1}$, unde a este număr natural și $3 \leq a \leq 9$;

b) $\frac{a}{b}$, unde a este egal cu 1 sau 2 și b este egal cu 5 sau 7.

22. Fie fracția $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$. Scrieți a_1, a_2, a_3 și a_{100}.

23. Se consideră șirul de fracții: $\frac{1}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{7}; \ldots$

a) Scrieți următoarele trei fracții din șir.
b) Scrieți a 100-a fracție din șir.
c) Scrieți fracția aflată pe locul n în șirul dat.

PE-PP 2. Fracții subunitare, echiunitare și supraunitare. Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție

Fracții subunitare, echiunitare și supraunitare

O **fracție subunitară** este o fracție care are numărătorul mai mic decât numitorul.

O **fracție echiunitară** este o fracție care are numărătorul egal cu numitorul.

O **fracție supraunitară** este o fracție care are numărătorul mai mare decât numitorul.

Fie fracţia ordinară $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$).

Dacă $a < b$, atunci $\frac{a}{b} < 1$ (fracţia este **subunitară**).

Dacă $a = b$, atunci $\frac{a}{b} = 1$ (fracţia este **echiunitară**).

Dacă $a > b$, atunci $\frac{a}{b} > 1$ (fracţia este **supraunitară**).

Scoaterea întregilor din fracţie

Fie $\frac{a}{b}$ o fracţie supraunitară ($a > b$). Împărţind pe a la b obţinem **câtul** c şi **restul** r. Conform teoremei împărţirii cu rest, rezultă $a = b \cdot c + r$ ($r < b$).

Deci, $\frac{a}{b} = \frac{b \cdot c + r}{b} = \frac{b \cdot c}{b} + \frac{r}{b} = c + \frac{r}{b}$.

Din egalitatea $\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$ rezultă că fracţia $\frac{a}{b}$ are c întregi şi r unităţi fracţionare, ceea ce se scrie astfel: $\boxed{\frac{a}{b} = c\frac{r}{b}}$. Se spune că **am scos întregii din fracţie**.

Exemplu: Scoateţi întregii din fracţia $\frac{235}{17}$.

Rezolvare. Efectuăm împărţirea:

$$\begin{array}{r|l} 235 & 17 \\ \underline{17} & \overline{13} \\ =65 & \\ \underline{51} & \\ 14 & \text{(restul)} \end{array}$$

Rezultă $235 = 17 \cdot 13 + 14$.

Prin urmare: $\frac{235}{17} = 13\frac{14}{17}$.

Introducerea întregilor în fracţie

$c\frac{r}{b} = c + \frac{r}{b} = \frac{c \cdot b}{b} + \frac{r}{b} = \frac{c \cdot b + r}{b} = \frac{a}{b}$. Reţinem: $\boxed{c\frac{r}{b} = \frac{c \cdot b + r}{b}}$

Exemplu: O fracţie are 4 întregi şi 3 cincimi. Introduceţi întregii în fracţie.

Rezolvare: $4\frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 4 + 3}{5} = \frac{23}{5}$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Daţi trei exemple de fracţii:
   a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.
2. Fie fracţiile: $\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{17}{4}; \frac{23}{6}; \frac{3^3}{27}; \frac{2^4}{16}; \frac{1}{7}; \frac{15}{17}; \frac{37}{24}; \frac{12^0}{5}$. Scrieţi fracţiile:
   a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.
3. Scrieţi fracţiile subunitare cu numitorul 4.
4. Scrieţi fracţiile subunitare cu numărătorul 2 şi numitorul cel mult 8.

5. Ştiind că a este egal cu 1, 2 sau 5, iar b este egal cu 2, 3 sau 7, scrieţi:

a) toate fracţiile subunitare de forma $\frac{a}{b}$;

b) toate fracţiile echiunitare de forma $\frac{a}{b}$;

c) toate fracţiile supraunitare de forma $\frac{a}{b}$.

PE Aplicare şi exersare **

6. Determinaţi numărul natural x pentru care fiecare dintre fracţiile următoare este supraunitară:

a) $\frac{5}{x}$; b) $\frac{7}{x+2}$; c) $\frac{4}{x-1}$; d) $\frac{2x}{x+5}$.

7. Scrieţi toate fracţiile echiunitare care au numitorul şi numărătorul mai mici decât 5.

8. Fie a şi b numere naturale nenule, $a \le 5$, $b < 7$. Determinaţi toate fracţiile de forma $\frac{a}{b}$ care să fie:

a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

9. Determinaţi numerele naturale x astfel încât fracţia $\frac{7}{x}$ să fie:

a) supraunitară; b) echiunitară;
c) subunitară cu numitorul mai mic decât 11.

10. Se consideră fracţiile cu numărătorul 4 şi numitorul mai mic sau egal cu 7. Scrieţi fracţiile:

a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

11. Scrieţi toate fracţiile supraunitare cu numărătorul 5.

12. Câte fracţii supraunitare au numitorul 7? Scrieţi trei dintre acestea.

13. Determinaţi numărul natural x pentru care fiecare din fracţiile următoare să fie supraunitară:

a) $\frac{5}{x-1}$; b) $\frac{9}{x+7}$; c) $\frac{12}{x^2+5}$; d) $\frac{x^2-7}{9}$; e) $\frac{5x+2}{3x+4}$.

14. Scrieţi toate fracţiile supraunitare care au numitorul 11 şi numărătorul mai mic decât 14.

15. Determinaţi x astfel încât fracţia $\frac{\overline{1x}+\overline{x2}}{67}$ să fie echiunitară, unde numerele $\overline{1x}$ şi $\overline{x2}$ sunt scrise în baza 10.

16. Scrieţi câte trei fracţii care au numitorul pătrat perfect mai mic decât 50 şi care să fie:

a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

17. Scrieţi câte trei fracţii care să aibă numărătorul cub perfect mai mic decât 70 şi care să fie:

a) subunitare; b) echiunitare; c) supraunitare.

18. Determinaţi toate fracţiile de forma: $\frac{\overline{3x}}{\overline{y2}}$ ştiind că $\overline{3x} \vdots 5$ şi $\overline{y2} \vdots 3$.

19. Fie fracția $\frac{2n+7}{3n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$. Determinați valorile numărului natural n în fiecare dintre situații:

a) fracția este subunitară; b) fracția este echiunitară; c) fracția este supraunitară.

20. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare propoziție.

p: $\frac{2^{93}}{3^{62}}$ este fracție supraunitară; q: $\frac{3^{201}}{2^{301}}$ este fracție subunitară; r: $\frac{8^{15}}{32^{9}}$ este fracție echiunitară.

PE Aprofundare și performanță ***

21. Fie fracția $\frac{2\,070-2\,069+2\,068-2\,067+...+4-3+2-1}{1+2+3+...+n}$. Determinați numărul n astfel încât fracția să fie echiunitară.

22. Scoateți întregii din următoarele fracții:

a) $\frac{15}{4}$; b) $\frac{201}{11}$; c) $\frac{3\,457}{97}$; d) $\frac{7\,213}{107}$; e) $\frac{3\,297}{431}$.

23. Introduceți întregii în fracțiile:

a) $4\frac{3}{29}$; b) $2\frac{11}{43}$; c) $11\frac{23}{57}$; d) $41\frac{19}{701}$; e) $121\frac{3}{119}$.

24. Determinați valorile numărului natural n pentru care următoarele fracții reprezintă numere naturale:

a) $\frac{n+2}{n+1}$; b) $\frac{2n+3}{n+1}$; c) $\frac{3n+11}{n+3}$; d) $\frac{6n+5}{2n+1}$; e) $\frac{2n^2+6n+5}{n^2+3n}$.

25. Determinați tripletele (x, y, z) de numere naturale pentru care fracția $\frac{9}{x^2+y^2+z^2}$ este:

a) supraunitară; b) echiunitară.

PE-PP Supermate ****

26. Determinați numărul natural n astfel încât fracția $\frac{1+2+3+...+n}{2\,013}$ să fie:

a) subunitară; b) supraunitară.

27. Determinați numărul natural n astfel încât fracția $\frac{1+2+2^2+...+2^{100}}{2^n}$ să fie:

a) subunitară; b) supraunitară.

28. Studiați fracțiile următoare și stabiliți dacă sunt subunitare, echiunitare sau supraunitare:

a) $\frac{2^{145}}{4^{75}}$; b) $\frac{10^6}{2^6 \cdot 5^7}$; c) $\frac{3^{114}}{3^{171}}$.

29. Introduceți întregii în fracțiile următoare:

a) $2\frac{n}{n+3}$; b) $5\frac{n+1}{n+2}$.

30. Scoateți întregii din următoarele fracții:

a) $\frac{17}{5}$; b) $\frac{n+2}{n+1}$; c) $\frac{3n+5}{n+1}$; d) $\frac{6n+9}{2n+3}$.

PE-PP 3. Aflarea unei fracţii dintr-un număr natural. Procent

Pentru a afla o fracţie dintr-un număr natural se înmulţeşte fracţia cu acel număr:

$$\frac{a}{b} \text{ din } n \text{ este egal cu } \frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}.$$

Exemple: a) $\frac{1}{2}$ din 50 kg este egal cu $\frac{1}{2} \cdot 50 = \frac{50}{2} = 25$ (kg);

b) $\frac{3}{7}$ din 140 m este egal cu $\frac{3 \cdot 140}{7} = \frac{420}{7} = 60$ (m);

c) $\frac{2}{3}$ din 75 ℓ este egal cu $\frac{2 \cdot 75}{3} = \frac{150}{3} = 50$ (ℓ).

Procentul se exprimă sub forma unei fracţii cu numitorul 100 $\left(\frac{p}{100}\right)$.

Observaţie: Procentul $\frac{p}{100}$ se mai scrie $p\%$ şi se citeşte **„p la sută"** sau **„p procente"**.

$$p\,\% \text{ din } n \text{ este egal cu } \frac{p \cdot n}{100}.$$

Exemple: a) 25% din 300 este egal cu $\frac{25 \cdot 300}{100} = 75$;

b) 71% din 21 300 este egal cu $\frac{71 \cdot 21\,300}{100} = 15\,123$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi:

a) o doime din: 430 kg; 250 minute; 128 m; 324 lei;

b) o treime din: 21 m; 39 kg; 102 ℓ; 504 lei;

c) un sfert din: 16 kg; 64 m; 120 cm; 536 t.

2. Calculaţi:

a) $\frac{7}{2}$ din 3 124; b) $\frac{2}{7}$ din 1 400; c) $\frac{3}{5}$ din 175;

d) $\frac{7}{9}$ din 3 240; e) $\frac{9}{4}$ din 4 200; f) $\frac{4}{11}$ din 583.

3. Calculaţi:

a) $\frac{4}{8}$ din 258; b) $\frac{6}{9}$ din 732; c) $\frac{18}{6}$ din 121;

d) $\frac{48}{36}$ din 927; e) $\frac{125}{75}$ din 624; f) $\frac{36}{27}$ din 540.

PE Aplicare şi exersare **

4. Suma de 150 de lei se împarte la doi copii astfel: primul primeşte $\frac{2}{5}$ din toată suma, iar al doilea restul. Calculaţi ce sumă a primit fiecare copil.

5. Pe eticheta unui produs scrie 200 ml ± 1%. Cum interpretaţi această afirmaţie?

6. Scrieţi următoarele fracţii ca raport procentual:

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{11}{25}$; c) $\frac{93}{50}$; d) $\frac{27}{10}$.

7. Calculaţi:

a) $\frac{1}{2}$ din 2 500 lei; b) $\frac{3}{5}$ din 240 kg; c) $\frac{2}{7}$ din 700 m;

d) $\frac{2}{3}$ din 420 m; e) $\frac{5}{6}$ din 210; f) $\frac{3}{8}$ din 400.

8. Calculaţi 17% din:

a) 2 400; b) 52 400; c) 12 300; d) 7 100.

9. Un călător are de parcurs distanţa de 125 km. El a parcurs $\frac{7}{25}$ din distanţă. Calculaţi:

a) ce distanţă a parcurs; b) ce distanţă mai are de parcurs.

10. Mihai afirmă că preţul unei cărţi s-a micşorat cu 10 procente. Calculaţi preţul pe care trebuie să îl plătească Mihai, ştiind că preţul iniţial a fost 10 lei.

11. Ana are un penar pe care a dat 20 de lei. Preţul penarului s-a mărit cu 20 de procente.

a) Calculaţi cu câţi lei s-a mărit preţul penarului.

b) Calculaţi cât costă penarul după scumpire.

12. Preţul unui articol a fost redus cu 5%. După o perioadă de timp, preţul acelui articol s-a redus din nou cu 40 de procente. Iulia afirmă că preţul iniţial al obiectului s-a redus cu 45 de procente. Nina spune că, de fapt, după cele două reduceri succesive preţul s-a redus cu 43 de procente. Care dintre cele două fete are dreptate?

13. În clasa a V-a A sunt 28 de elevi dintre care 7 sunt băieţi.

a) Care este procentul băieţilor din clasă?

b) Care este procentul fetelor din clasă?

14. Din cantitatea de 1 000 kg de grâu aflată într-un depozit s-au consumat 37 de procente pentru hrana animalelor.

a) Câte procente din cantitatea iniţială de grâu mai sunt în depozit?

b) Câte kilograme de grâu s-au consumat pentru hrana animalelor?

c) Câte kilograme de grâu au rămas în depozit?

15. Un teren agricol are 2 400 de hectare. Din acesta $\frac{5}{8}$ s-a cultivat cu porumb, $\frac{4}{9}$ din rest s-a cultivat cu grâu, iar restul cu sfeclă.

a) Calculaţi suprafaţa cultivată cu porumb şi apoi suprafaţa cultivată cu grâu.

b) Scrieţi sub formă de procent suprafaţa cultivată cu sfeclă.

16. Dintr-un depozit se livrează $\frac{3}{7}$ din cele 8 750 tone de marfă.

a) Ce cantitate de marfă s-a livrat?

b) Ce cantitate de marfă a rămas în depozit?

PE Aprofundare şi performanţă ***

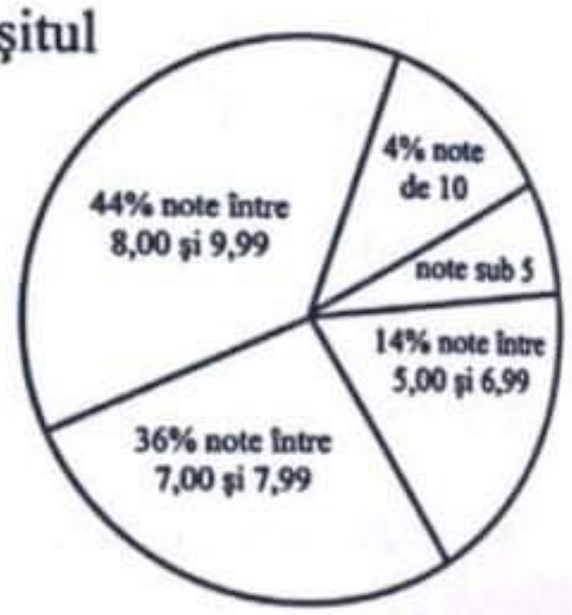
17. Prin sortarea legumelor se pierde 7% din cantitate. Câte kilograme de legume rămân după sortarea a 13 700 kg de legume?

18. Venitul lunar net (fără impozit) al unei familii este de 1 000 de lei. Cheltuielile lunare ale familiei respective sunt: 20% chiria, 7% transportul, 30% hrana, 5% energia electrică, 4% energia termică, 15% îmbrăcămintea şi 19% diverse. Completaţi tabelul ce urmează cu sumele aferente şi întocmiţi o diagramă sub formă de cerc în care să treceţi aceste sume.

Cheltuieli în lei	chirie	transport	hrană	energie electrică	energie termică	îmbrăcăminte	diverse

19. În diagrama alăturată este reprezentată situaţia notelor la sfârşitul anului şcolar. Ştiind că şcoala are 1 500 de elevi, calculaţi:

a) cât la sută dintre elevi au note sub 5;
b) câţi elevi au note de 10;
c) câţi elevi au note între 8,00 şi 9,99;
d) câţi elevi au note între 7,00 şi 7,99;
e) câţi elevi au note între 5,00 şi 6,99.



PE-PP Supermate ****

20. Calculaţi:

a) $\frac{1}{2}$ din $\left(\frac{1}{2}\text{ din }\left(\frac{1}{2}\text{ din }320\right)\right)$;

b) $\frac{3}{5}$ din $\left(\frac{3}{5}\text{ din }\left(\frac{3}{5}\text{ din }625\right)\right)$;

c) $\frac{1}{2}$ din $\left(\frac{2}{3}\text{ din }\left(\frac{3}{4}\text{ din }\left(\ldots\text{ din }\left(\frac{99}{100}\text{ din }1000\right)\ldots\right)\right)\right)$.

21. Calculaţi un număr, ştiind că:

a) $\frac{3}{100}$ din el este 6;

b) 11% din el este 132.

22. După ce a cheltuit 30% din suma pe care o avea, Ionuţ constată că mai are 875 de lei.

a) Calculaţi ce sumă a avut Ionuţ iniţial.
b) Calculaţi ce sumă a cheltuit Ionuţ.

23. La teza de matematică din semestrul al doilea, elevii claselor a V-a dintr-o şcoală aveau următoarele note: 7% note între 5 şi 5,99; 11% note între 6 şi 6,99; 25% note între 7 şi 7,99; 31% note între 8 şi 8,99; 16% note între 9 şi 9,99; 10% note de 10.

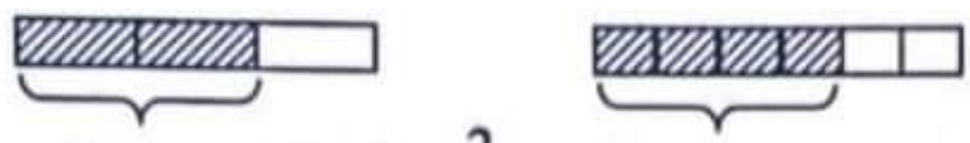
Ştiind că în clasa a V-a la şcoala respectivă erau 300 de elevi, aflaţi câţi elevi aveau note între 5 şi 5,99, câţi aveau note între 6 şi 6,99, câţi aveau note între 7 şi 7,99, câţi aveau note între 8 şi 8,99, câţi aveau note între 9 şi 9,99 şi câţi aveau nota 10 în teză şi apoi realizaţi un tabel în care să introduceţi aceste date.

24. În diagrama alăturată găsiţi distribuţia elevilor unei şcoli pe olimpiade şcolare. Ştiind că şcoala are 1200 de elevi, calculaţi câţi elevi au participat la fiecare olimpiadă.

PE-PP 4. Fracţii echivalente

Aceeaşi parte dintr-un întreg poate fi ilustrată prin **reprezentări echivalente.**

De exemplu, reprezentările de mai jos sunt echivalente, deoarece ilustrează aceeaşi parte dintr-un întreg.



Prima reprezentare ilustrează fracţia $\frac{2}{3}$, iar a doua ilustrează fracţia $\frac{4}{6}$.

Două fracţii sunt egale dacă reprezentările lor sunt echivalente. Deci, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.

Pentru a stabili dacă două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt egale, calculăm $a \cdot d$ şi $b \cdot c$.

- Dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci **fracţiile sunt egale**, adică: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
- Dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$, atunci **fracţiile nu sunt egale**, deci: $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Stabiliţi dacă următoarele egalităţi de fracţii sunt adevărate:

$\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$; $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$; $\frac{1}{12}=\frac{5}{30}$; $\frac{3}{17}=\frac{6}{34}$; $\frac{11}{4}=\frac{33}{22}$.

2. Scrieţi câte două fracţii egale cu fracţiile:

a) $\frac{12}{28}$; b) $\frac{125}{15}$; c) $\frac{2^3}{8}$; d) $\frac{1}{3}$.

3. Completaţi spaţiile punctate pentru a obţine propoziţii adevărate:

a) $\frac{3}{7}=\frac{9}{...}$; b) $\frac{5}{4}=\frac{...}{16}$; c) $\frac{1}{...}=\frac{3}{27}$; d) $\frac{...}{4}=\frac{7}{7}$.

PE Aplicare şi exersare **

4. Determinaţi fracţia $\frac{a}{b}$, ştiind că este egală cu fracţia $\frac{2}{3}$ şi că $a+b=10$.

5. Determinaţi fracţia $\frac{a}{b}$, ştiind că este egală cu fracţia $\frac{3}{4}$ şi că $b-a=11$.

6. Determinaţi fracţia $\frac{a}{b}$, ştiind că este egală cu fracţia $\frac{7}{5}$ şi că $a \cdot b = 1\,260$.

7. Determinaţi x astfel încât $\frac{\overline{x7}}{\overline{1x}}=\frac{9}{4}$.

8. Scrieţi toate fracţiile cu numitorul divizor al lui 66 echivalente cu fracţia $\frac{1}{2}$.

9. Scrieţi toate fracţiile cu numărătorul mai mic decât 15 echivalente cu fracţia $\frac{2}{3}$.

10. Scrieţi câte două fracţii echivalente cu fracţiile:

a) $\frac{1\cdot 2^2+1}{1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1}$; b) $\frac{1\cdot 5^2+3\cdot 5+4}{2\cdot 4^3+3\cdot 4^2+1}$.

11. Daţi exemple de fracţii de forma $\frac{\overline{xy}}{\overline{zt}}$ care să fie egale cu fracţiile:

a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{11}{37}$; c) $\frac{41}{23}$; d) $\frac{19}{41}$; e) $\frac{12}{5}$.

12. Determinaţi x astfel încât fiecare din următoarele fracţii să fie egală cu fracţia $\frac{3}{7}$:

a) $\frac{x}{28}$; b) $\frac{45}{x}$; c) $\frac{2x+1}{21}$; d) $\frac{51}{38+x^2}$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

13. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, rezultă $a=1$ şi $b=2$?

14. Determinaţi x, astfel încât $28a=35b$ şi $\frac{a}{b}=\frac{x}{36}$.

15. Dacă a şi b sunt numere naturale şi $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$, arătaţi că $51a=34b$.

16. Fie a, b, c, d, x, y numere naturale nenule astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ şi $c\cdot y=d\cdot x$. Stabiliţi dacă

$$a\cdot y=b\cdot x.$$

17. Fie a, b, c, d, x, y numere naturale nenule astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ şi $a\cdot y=b\cdot x$. Arătaţi că

$$\frac{a}{c+x}=\frac{b}{d+y}.$$

PE-PP Supermate ****

18. Determinaţi numerele naturale x şi y astfel încât fracţiile $\frac{2}{x}$ şi $\frac{y+1}{3}$ să fie egale.

19. Aflaţi numărul natural x care verifică egalitatea: $\frac{15}{x^2+4x}=\frac{5}{4}$.

PE-PP

5. Amplificarea şi simplificarea fracţiilor. Fracţii ireductibile

● **A amplifica** o fracţie $\frac{a}{b}$ cu un număr natural nenul n înseamnă a înmulţi şi numărătorul, şi numitorul fracţiei cu n. Prin amplificare se obţine o **fracţie egală** cu cea dată.

Notăm: $\frac{a}{b}^{n)} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$.

● **A simplifica** o fracţie $\frac{a}{b}$ cu un număr natural nenul n înseamnă a împărţi şi numărătorul, şi numitorul fracţiei la n. Prin simplificare se obţine o **fracţie egală** cu cea dată.

Notăm: $\frac{a}{b}^{(n} = \frac{a:n}{b:n}$.

● O fracţie este **fracţie ireductibilă** dacă singurul divizor comun numitorului şi numărătorului este 1. Calea cea mai scurtă pentru a obţine dintr-o fracţie o fracţie ireductibilă este aceea de a simplifica fracţia cu cel mai mare divizor comun al numărătorului şi numitorului.

Exemplu: Fie fracţia $\frac{18}{30}$. Cel mai mare divizor comun al lui 18 şi 30 este 6. Simplificând fracţia $\frac{18}{30}$ cu 6 obţinem fracţia $\frac{3}{5}$, care este ireductibilă: $\frac{18}{30}^{(6} = \frac{18:6}{30:6} = \frac{3}{5}$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Amplificaţi cu 3 următoarele fracţii: $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{2x}{5y}$; $\frac{x+2}{y+1}$; $\frac{a+b}{x+y}$.

2. Amplificaţi cu numărul natural nenul n fracţiile: $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{3a}{7b}$; $\frac{a+1}{b+3}$; $\frac{a+b}{x+y}$.

3. Aflaţi cu ce număr trebuie amplificată fiecare dintre următoarele fracţii, astfel încât să obţinem de fiecare dată fracţii cu numitorul 48: $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{19}{12}$; $\frac{11}{16}$; $\frac{17}{24}$.

4. Aflaţi cu ce număr trebuie amplificată fiecare dintre următoarele fracţii, astfel încât să obţinem de fiecare dată fracţii cu numărătorul 32: $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{17}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{16}{23}$; $\frac{1}{10}$.

PE Aplicare şi exersare **

5. Aflaţi numărul natural x, astfel încât fiecare dintre următoarele egalităţi să fie adevărată:

a) $\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$; b) $\frac{7}{x} = \frac{21}{15}$; c) $\frac{x+2}{x+7} = \frac{3x+6}{48}$.

6. Aflați numerele naturale x și y, astfel încât fracțiile $\frac{2}{3}$; $\frac{x+1}{6}$ și $\frac{10}{2y+1}$ să fie egale.

7. Simplificați prin 5 următoarele fracții: $\frac{10}{15}$; $\frac{15}{45}$; $\frac{5a}{10b}$; $\frac{10a+10b}{25x+25y}$; $\frac{2^2\cdot 5}{3\cdot 5}$.

8. Simplificați fracțiile, astfel încât să obțineți fracții ireductibile:

$$\frac{20}{30};\ \frac{250}{350};\ \frac{2\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 11};\ \frac{2^3}{2^5};\ \frac{2^7\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 11};\ \frac{5\,200}{18\,200};\ \frac{1\,716}{4\,290};\ \frac{72a}{108a};\ \frac{34a+34b}{51a+51b}.$$

9. Aflați numerele naturale x și y, astfel încât fiecare dintre următoarele egalități să fie adevărată:

a) $\frac{6}{8}=\frac{3}{y}$; b) $\frac{x+1}{15}=\frac{2}{3}$; c) $\frac{7x+21}{x+2}=\frac{x+3}{5}$.

10. Aflați numerele naturale x și y, astfel încât următoarele fracții să fie echivalente:

$$\frac{24}{36};\ \frac{12}{x+2} \text{ și } \frac{y+1}{6}.$$

11. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{375\,375}{871\,871}$; b) $\frac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}{\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}}$; c) $\frac{\overline{ab0ab}}{17\,017}$.

12. Dintre fracțiile de forma $\frac{\overline{1a\,7b}}{\overline{c\,51d}}$ și care se simplifică prin 36, determinați fracția cea mai mică și pe cea mai mare.

PE Aprofundare și performanță ***

13. Arătați că fracția $\frac{x^2+x}{2x+4}$ este reductibilă, oricare ar fi x număr natural.

14. Arătați că fracția $\frac{ab(a+b)}{x^2-x+6}$ este reductibilă oricare ar fi a, b, x numere naturale nenule.

15. Arătați că fracția $\frac{n}{n+1}$ este ireductibilă oricare ar fi n număr natural.

16. Arătați că fracția $\frac{n}{3n+1}$ este ireductibilă oricare ar fi n număr natural.

17. Arătați că fracția $\frac{7n+10}{5n+7}$ este ireductibilă oricare ar fi n număr natural.

18. Arătați că fracția $\frac{4n+3}{6n+4}$ este ireductibilă oricare ar fi n număr natural.

19. Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{n+4}{n+6}$ este reductibilă.

20. Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{4n+3}{7n+6}$ este reductibilă.

PE-PP **Supermate** ****

21. Determinați x număr natural, astfel încât următoarele fracții să fie echivalente:

a) $\frac{x+7}{5}$ și $\frac{84}{35}$; b) $\frac{3}{2x-1}$ și $\frac{7}{21}$.

22. Determinați numerele naturale x și y, astfel încât:

a) $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$ și $x+y=98$; b) $\frac{x}{y}=\frac{3}{7}$ și $y-x=24$.

23. a) Calculați câte fracții echivalente cu fracția $\frac{3}{5}$ și care au numitorul mai mic decât 100 există.

b) Calculați câte fracții echivalente cu fracția $\frac{2}{7}$ cu numărătorul mai mic decât 100 există.

24. Simplificați fracțiile următoare, astfel încât să obțineți fracții ireductibile:

a) $\frac{\overline{a3}+\overline{3a}}{\overline{7a}+\overline{a7}}$; b) $\frac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}{5a+5b+5c}$.

25. Dacă n este un număr natural nenul, simplificați fracția:

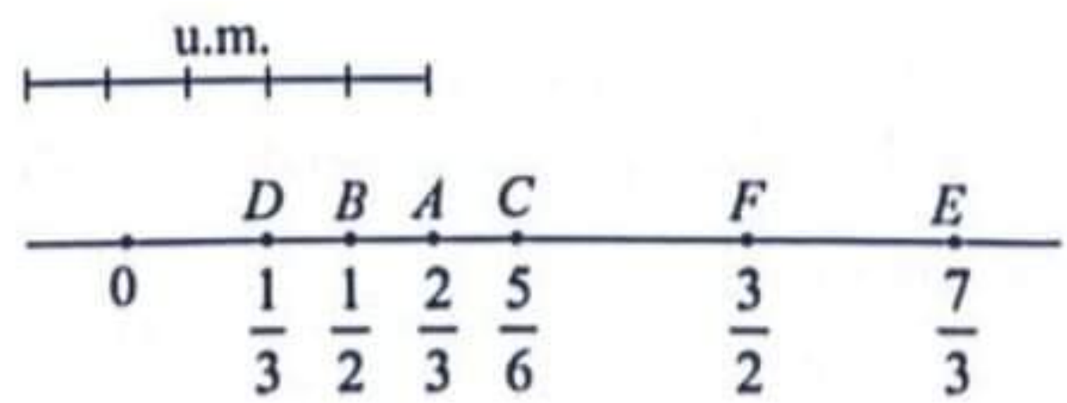
a) $\frac{17^n+17^{n+1}}{7^n+7^{n+1}}$; b) $\frac{36\cdot 6^n-2^{n+2}\cdot 3^{n+1}-2^{n+1}\cdot 3^{n+2}}{36\cdot 6^n-6\cdot 6^n-21\cdot 6^n}$.

PE-PP 6. Reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare

Fiecărei fracții ordinare îi corespunde un punct pe axa numerelor.

Pentru a reprezenta fracția $\frac{a}{b}$ pe axă, se procedează astfel: se împarte unitatea de măsură în b părți egale și se iau apoi a astfel de părți.

Exemplu:



Fracției $\frac{2}{3}$ îi corespunde pe axă punctul A,

fracției $\frac{1}{2}$ îi corespunde pe axă punctul B,

fracției $\frac{5}{6}$ îi corespunde pe axă punctul C,

fracției $\frac{1}{3}$ îi corespunde pe axă punctul D, fracției $\frac{7}{3}$ îi corespunde pe axă punctul E,

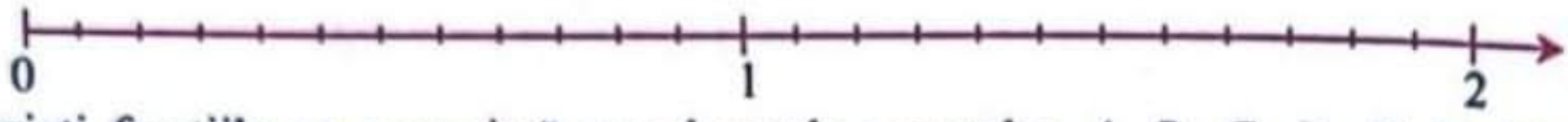
iar fracției $\frac{3}{2}$ îi corespunde pe axă punctul F.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Copiaţi în caiet desenul de mai jos şi reprezentaţi pe axa numerelor fracţiile ordinare:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}.$$



2. Scrieţi fracţiile ce reprezintă coordonatele punctelor A, B, C, D, E, F, G şi H din desenul de mai jos.

3. Alegeţi o unitate de măsură convenabilă pentru a reprezenta fracţiile ordinare:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}.$$

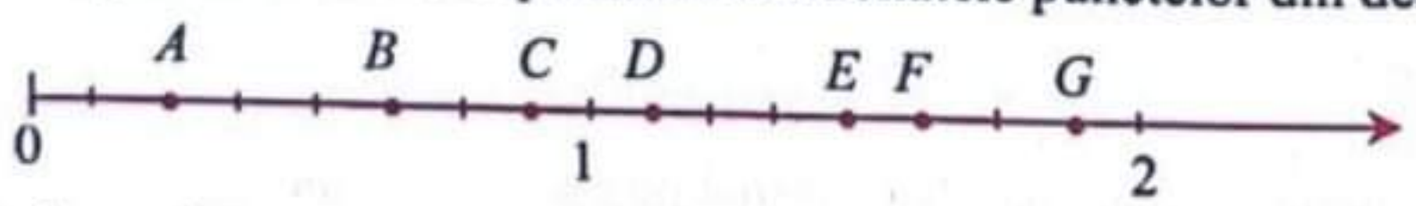
4. Reprezentaţi pe axa numerelor fracţiile: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}$.

PE Aplicare şi exersare **

5. Se consideră o axă a numerelor şi pe aceasta se ia un segment $OA = 4$ cm. Împărţiţi segmentul OA în 8 segmente de lungimi egale şi apoi reprezentaţi pe axă fracţiile:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}.$$

6. Scrieţi fracţiile ordinare ce reprezintă coordonatele punctelor din desenul de mai jos:



7. Scrieţi câte trei fracţii egale pentru fiecare coordonată a punctelor reprezentate în figura de la problema 6.

8. Reprezentaţi pe axa numerelor fracţiile subunitare de forma $\frac{2x+1}{5}$, unde x este număr natural.

9. Reprezentaţi pe axa numerelor fracţiile supraunitare de forma $\frac{11}{3x+2}$, unde x este număr natural.

10. Ştiind că fracţia $\frac{a}{b}$ este egală cu $\frac{11}{6}, \frac{7}{3}$ sau $\frac{5}{2}$:

a) alegeţi o unitate de măsură convenabilă şi reprezentaţi fracţia $\frac{a}{b}$ pe axa numerelor;

b) aflaţi numerele naturale consecutive m şi n pentru care $m < \frac{a}{b} < n$.

PE-PP

7. Adunarea şi scăderea fracţiilor

Fracţii cu acelaşi numitor

Pentru a aduna două fracţii ordinare care au acelaşi numitor, se adună numărătorii şi se păstrează numitorul comun. Fracţia obţinută se aduce la forma ireductibilă.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}.$$

Exemplu: $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=\frac{3+5}{10}=\frac{8^{(2}}{10}=\frac{4}{5}$

Pentru a scădea două fracţii ordinare care au acelaşi numitor, se scad numărătorii şi se păstrează numitorul comun. Fracţia obţinută se aduce la forma ireductibilă.

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Exemplu: $\frac{7}{16}-\frac{3}{16}=\frac{7-3}{16}=\frac{4^{(4}}{16}=\frac{1}{4}$

Fracţii cu numitori diferiţi

Pentru a aduna sau scădea două fracţii care au numitorii diferiţi se aduc mai întâi fracţiile la acelaşi numitor şi apoi se aplică regula de adunare, respectiv scădere de mai sus.

Pentru a aduce fracţiile la acelaşi numitor se parcurg următoarele etape:

- se calculează cel mai mic multiplu comun al numitorilor;
- se stabileşte numitorul comun care este cel mai mic multiplu comun al numitorilor;
- se amplifică fiecare fracţie cu câtul dintre numitorul comun determinat şi numitorul fracţiei respective.

Exemplu: Pentru a calcula suma $\frac{17}{20}+\frac{7}{15}$ sau diferenţa $\frac{17}{20}-\frac{7}{15}$ se procedează astfel:

- se calculează cel mai mic multiplu comun al numitorilor:
  - multiplii lui 20 sunt: 20, 40, 60, 80, ...;
  - multiplii lui 15 sunt: 15, 30, 45, 60, 75, ...

Rezultă că cel mai mic multiplu comun al numitorilor este 60. Aşadar:

- numitorul comun este 60.
- Se amplifică fracţia $\frac{17}{20}$ cu câtul dintre 60 şi 20, adică cu 3, şi se obţine $^{3)}\frac{17}{20}=\frac{51}{60}$.

Se amplifică şi fracţia $\frac{7}{15}$ cu câtul dintre 60 şi 15, adică cu 4, şi se obţine $^{4)}\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$.

Atunci:

– **suma** fracţiilor $\frac{17}{20}$ şi $\frac{7}{15}$ este

$$^{3)}\frac{17}{20}+{}^{4)}\frac{7}{15}=\frac{51}{60}+\frac{28}{60}=\frac{79}{60};$$

– **diferenţa** fracţiilor $\frac{17}{20}$ şi $\frac{7}{15}$ este

$$^{3)}\frac{17}{20}-{}^{4)}\frac{7}{15}=\frac{51}{60}-\frac{28}{60}=\frac{23}{60}.$$

Observaţii:

1. Dacă fracţiile care se adună sau se scad nu sunt ireductibile, este preferabil să se simplifice până devin ireductibile şi apoi să se aducă la acelaşi numitor.

2. Rezultatul adunării sau scăderii trebuie, de asemenea, să fie exprimat printr-o fracţie ireductibilă.

3. Să remarcăm că, pentru două fracţii oarecare $\frac{a}{m}$ şi $\frac{b}{n}$, dacă amplificăm prima fracţie cu numitorul celei de a doua şi pe a doua cu numitorul primei fracţii, obţinem două fracţii care au acelaşi numitor $m \cdot n$. Într-adevăr:

$$^{n)}\frac{a}{m}=\frac{a\cdot n}{m\cdot n} \text{ şi } ^{m)}\frac{b}{n}=\frac{m\cdot b}{m\cdot n}.$$

Această remarcă poate fi utilizată la adunarea şi scăderea fracţiilor.

Exemplu:

$$\frac{17}{20}+\frac{7}{15}={}^{15)}\frac{17}{20}+{}^{20)}\frac{7}{15}=\frac{17\cdot 15}{20\cdot 15}+\frac{7\cdot 20}{20\cdot 15}=$$
$$=\frac{255}{300}+\frac{140}{300}=\frac{395}{300}^{(5}=\frac{79}{60}$$

Exemplu:

$$\frac{17}{20}-\frac{7}{15}={}^{15)}\frac{17}{20}-{}^{20)}\frac{7}{15}=\frac{17\cdot 15}{20\cdot 15}-\frac{7\cdot 20}{20\cdot 15}=$$
$$=\frac{255}{300}-\frac{140}{300}=\frac{115}{300}^{(5}=\frac{23}{60}$$

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Efectuaţi adunările:

a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$; b) $\frac{37}{53}+\frac{69}{53}$; c) $\frac{17}{40}+\frac{3}{40}$; d) $\frac{93}{137}+\frac{44}{137}$.

2. Efectuaţi scăderile:

a) $\frac{11}{7}-\frac{4}{7}$; b) $\frac{48}{74}-\frac{11}{74}$; c) $\frac{50}{91}-\frac{43}{91}$; d) $\frac{219}{107}-\frac{5}{107}$.

3. Calculaţi:

a) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$; b) $\frac{1}{63}+\frac{3}{63}+\frac{5}{63}$; c) $\frac{17}{152}+\frac{49}{152}+\frac{86}{152}$;

d) $\frac{29}{77}-\frac{13}{77}-\frac{5}{77}$; e) $\frac{11}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}$; f) $\frac{137}{371}-\frac{35}{371}-\frac{49}{371}-\frac{51}{371}$.

4. Calculaţi:

a) $\frac{a}{19}+\frac{11a}{19}+\frac{7a}{19}$; b) $\frac{3a}{23}+\frac{17a}{23}+\frac{26a}{23}$; c) $\frac{11x}{49}+\frac{13x}{49}+\frac{25x}{49}$;

d) $\frac{15b}{7}-\frac{3b}{7}-\frac{5b}{7}$; e) $\frac{21y}{11}-\frac{7y}{11}-\frac{3y}{11}$; f) $\frac{29c}{47}-\frac{21c}{47}-\frac{8c}{47}$.

5. Calculaţi şi exprimaţi rezultatul printr-o fracţie ireductibilă:

a) $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{9}+\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$; d) $\frac{10}{39}+\frac{9}{117}$;

e) $\frac{1}{5}+\frac{7}{15}+\frac{5}{8}$; f) $\frac{1}{4}+\frac{7}{24}+\frac{5}{8}$; g) $3+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$; h) $\frac{3}{11}+\frac{4}{3}+\frac{7}{12}$;

i) $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$; j) $\frac{7}{20}-\frac{5}{18}$; k) $\frac{8}{13}-\frac{5}{39}$; l) $3-\frac{2}{5}$.

6. Calculaţi şi exprimaţi rezultatul printr-o fracţie ireductibilă:

a) $5\frac{1}{4}+6\frac{1}{10}$; b) $6\frac{1}{4}+5\frac{2}{3}+1\frac{17}{24}$; c) $4\frac{5}{6}-2\frac{1}{4}$; d) $4\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}$.

PE Aplicare şi exersare **

7. Efectuaţi calculele:

a) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}, a+b\neq 0$; b) $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}, a+b+c\neq 0$.

8. Scrieţi ca o sumă de fracţii ordinare cu acelaşi numitor:

a) $\frac{7}{11}$; b) $\frac{5}{9}$; c) $\frac{24}{17}$; d) $\frac{6a}{23}$; e) $\frac{2a+5}{5a}$; f) $\frac{a+9}{a+1}, a\in \mathbb{N}^*$.

9. a) Calculaţi fracţia cu $\frac{2}{3}$ mai mare decât fracţia $\frac{4}{3}$.

b) Calculaţi fracţia cu $\frac{19}{29}$ mai mică decât fracţia $\frac{49}{29}$.

10. Scrieţi fracţiile $\frac{5}{6}, \frac{37}{54}, \frac{109}{324}$ ca:

a) sumă de fracţii ordinare cu acelaşi numitor; găsiţi trei posibilităţi;
b) diferenţă de fracţii ordinare cu acelaşi numitor; găsiţi trei posibilităţi.

11. a) Diferenţa a două fracţii ordinare este $\frac{4}{19}$, iar scăzătorul este $\frac{15}{19}$. Calculaţi descăzutul.

b) Descăzutul a două fracţii ordinare este $\frac{41}{11}$, iar diferenţa este $\frac{30}{11}$. Calculaţi scăzătorul.

12. Determinaţi fracţia cu $\frac{119}{435}$ mai mare decât fracţia:

a) $\frac{316}{435}$; b) $\frac{55}{435}$; c) $\frac{751}{435}$.

13. Determinaţi fracţia cu $\frac{83}{537}$ mai mică decât fracţia:

a) $\frac{620}{537}$; b) $\frac{991}{537}$; c) $\frac{100}{537}$.

14. Calculaţi suma:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$.

15. Efectuaţi:

a) $\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}$; b) $\frac{3}{20}+\frac{47}{180}+\frac{4}{15}+\frac{7}{60}$; c) $\frac{3}{25}+\frac{7}{60}+\frac{11}{50}+\frac{13}{100}$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

16. Se consideră fracţiile ordinare $x=\frac{52}{2010}$; $y=\frac{27}{2010}$; $z=\frac{20}{2010}$. Calculaţi:

a) $x+y+z$; b) $x+y-z$; c) $x-y+z$; d) $x-y-z$.

17. Un muncitor realizează într-o zi $\frac{4}{17}$ din lucrare. A doua zi realizează cu $\frac{1}{17}$ mai mult decât în prima zi. Cât din lucrare mai are de realizat muncitorul?

18. Găsiţi cinci posibilităţi de a scrie fracţia $\frac{11}{57}$ ca o sumă de fracţii ordinare cu numitorul 57.

19. Calculaţi:

a) $\frac{1}{946}+\frac{2}{946}+\frac{3}{946}+...+\frac{43}{946}$; b) $\frac{2}{255}+\frac{4}{255}+\frac{6}{255}+...+\frac{100}{255}$.

20. Un muncitor lucrând singur termină o lucrare în 24 de ore, al doilea în 40 de ore, iar al treilea în 15 ore.

a) Cât lucrează într-o oră fiecare muncitor?

b) Cât lucrează într-o oră cei trei muncitori împreună?

c) Calculaţi în câte ore termină lucrarea cei trei muncitori lucrând împreună.

PE-PP Supermate ****

21. Calculaţi:

a) $\frac{1}{7}+\frac{11}{77}+\frac{111}{777}+\frac{1111}{7\,777}+...+\frac{1111111}{7\,777\,777}$;

b) $\frac{57}{75}+\frac{5\,757}{7\,575}+\frac{575\,757}{757\,575}+\frac{57\,575\,757}{75\,757\,575}+\frac{5\,757\,575\,757}{7\,575\,757\,575}$.

22. Se consideră numerele:

$$x=\frac{1}{5}+\frac{2}{10}+\frac{3}{15}+\frac{4}{20}+...+\frac{2\,014}{10\,070}+\frac{2\,015}{10\,075};$$

$$y=\frac{3}{5}+\frac{6}{10}+\frac{9}{15}+\frac{12}{20}+...+\frac{6\,042}{10\,070}+\frac{6\,045}{10\,075}.$$

a) Calculaţi cele două numere.

b) Arătaţi că $2x+y$ este număr natural.

23. Arătaţi că numărul $a=\frac{17}{73}+\frac{1\,717}{7\,373}+\frac{171\,717}{737\,373}+...+\frac{1717...17}{\underbrace{7373...73}_{2482\text{ cifre}}}$ este pătrat perfect.

24. Efectuaţi calculele şi simplificaţi rezultatul:

a) $\frac{1}{2\,013}+\frac{2}{2\,013}+\frac{3}{2\,013}+...+\frac{2\,012}{2\,013}$;

b) $\frac{1}{2\,015}+\frac{2}{2\,015}+\frac{3}{2\,015}+\frac{4}{2\,015}+...+\frac{2\,013}{2\,015}+\frac{2\,014}{2\,015}$.

25. Calculaţi:

a) $1000+\frac{1}{1000}+\frac{2}{1000}+\frac{3}{1000}+...+\frac{999}{1000}$;

b) $1000-\frac{1}{1000}-\frac{2}{1000}-\frac{3}{1000}-...-\frac{999}{1000}$.

26. Calculaţi: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{89\cdot 90}$.

PE-PP 8. Înmulţirea fracţiilor

Înmulţirea unei fracţii cu un număr natural

Pentru a înmulţi o fracţie cu un număr natural, se înmulţeşte numărul cu numărătorul şi se păstrează numitorul:

$$\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a\cdot n}{b}$$

Exemple: a) $\frac{5}{24}\cdot 4=\frac{5\cdot 4}{24}=\frac{20^{(4}}{24}=\frac{5}{6}$;

b) $\frac{11}{21}\cdot 12=\frac{11\cdot 12}{21}=\frac{132^{(3}}{21}=\frac{44}{7}$.

Înmulţirea a două fracţii ordinare

Pentru a înmulţi două fracţii ordinare, înmulţim numărătorii între ei şi numitorii între ei:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Exemple: a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}=\frac{4^{(2}}{6}=\frac{2}{3}$;

b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{6}=\frac{3\cdot 15}{5\cdot 6}=\frac{45^{(5}}{30}=\frac{9^{(3}}{6}=\frac{3}{2}$.

Observaţie: Calculele devin mult mai uşoare dacă se fac simplificările înainte de a efectua produsul.

Exemple: a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$; b) $\frac{24}{56}\cdot\frac{49}{3}=\frac{\overset{8}{\cancel{24}}\cdot\overset{7}{\cancel{49}}}{\underset{7}{\cancel{56}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{1\cdot 7}{1\cdot 1}=7$;

c) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3^{(3}}{6\cdot 4}=\frac{5}{8}$.

Proprietăţile operaţiei de înmulţire

În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii, o fracţie oarecare va fi notată cu o singură literă, de exemplu cu a. Altfel spus, prin fracţia oarecare a vom înţelege că a este de forma $\frac{m}{n}$, unde m şi n sunt numere naturale, $n\neq 0$.

Înmulţirea fracţiilor are aceleaşi proprietăţi ca şi înmulţirea numerelor naturale, adică este comutativă, asociativă şi distributivă faţă de adunare şi scădere. De asemenea fracţia $\frac{1}{1}$, adică 1, este element neutru la înmulţire. În plus, pentru orice fracţie a nenulă, există o altă fracţie a' astfel încât $a \cdot a' = a' \cdot a = 1$. Fracţia a' este inversa fracţiei a. Într-adevăr, dacă $a = \frac{m}{n}$, unde m şi n sunt numere naturale nenule, atunci inversa ei este fracţia $a' = \frac{n}{m}$, iar $a \cdot a' = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$ şi $a' \cdot a = \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} = 1$.

Reţinem:

1. **Produsul a două fracţii este o fracţie**, adică oricare ar fi a şi b două fracţii, $a \cdot b$ este o fracţie.
2. **Înmulţirea fracţiilor este comutativă**, adică oricare ar fi fracţiile a şi b,
$$a \cdot b = b \cdot a.$$
3. **Numărul 1 este elementul neutru la înmulţirea fracţiilor**, adică oricare ar fi fracţia a,
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$
4. **Orice fracţie nenulă a are o inversă a'** şi
$$a \cdot a' = a' \cdot a = 1.$$
5. **Înmulţirea fracţiilor este asociativă**, adică oricare ar fi fracţiile a, b şi c,
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$
6. **Înmulţirea fracţiilor este distributivă faţă de adunare şi scădere**, adică oricare ar fi fracţiile a, b şi c, avem:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ şi } a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi ca adunare repetată:

a) $2 \cdot \frac{3}{5}$; b) $3 \cdot \frac{2}{5}$; c) $7 \cdot \frac{2}{5}$; d) $2 \cdot \frac{7}{5}$;

e) $6 \cdot \frac{3}{4}$; f) $3 \cdot \frac{3}{2}$; g) $20 \cdot \frac{7}{25}$; h) $\frac{1}{36} \cdot 21$.

2. Scrieţi următoarele adunări cu ajutorul înmulţirii şi apoi efectuaţi calculele:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; b) $\frac{7}{13} + \frac{7}{13} + \frac{7}{13} + \frac{7}{13}$;

c) $\frac{3}{16} + \frac{3}{16} + ... + \frac{3}{16}$ (5 termeni); d) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{5}$ (10 termeni);

e) $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{10}$ (50 de termeni); f) $\frac{5}{23} + \frac{5}{23} + ... + \frac{5}{23}$ (100 de termeni).

3. Calculaţi:

a) $2 \cdot \frac{3}{7}$ şi $2\frac{3}{7}$; b) $4 \cdot \frac{1}{8}$ şi $4\frac{1}{8}$; c) $3 \cdot \frac{2}{9}$ şi $3\frac{2}{9}$;

d) $5 \cdot \frac{1}{4}$ şi $5\frac{1}{4}$; e) $7 \cdot \frac{1}{4}$ şi $7\frac{1}{4}$; f) $12 \cdot \frac{5}{6}$ şi $12\frac{5}{6}$.

4. Calculaţi:

a) $7 \cdot \frac{3}{5}$; b) $2 \cdot \frac{5}{8}$; c) $\frac{1}{3} \cdot 12$; d) $\frac{7}{56} \cdot 14$; e) $\frac{3}{5} \cdot 1$; f) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$;

g) $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}$; h) $\frac{4}{5} \cdot \frac{11}{8}$; i) $\frac{17}{10} \cdot \frac{20}{3}$; j) $1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$; k) $3\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{15}$; l) $\frac{9}{8} \cdot 1\frac{3}{5}$.

PE Aplicare şi exersare **

5. Folosind proprietăţile înmulţirii, calculaţi:

a) $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{21}{18}$; b) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{21}{18}\right)$; c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{21}{18}$;

d) $\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)$; e) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}$; f) $\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}$.

6. a) Ştiind că $a \cdot b = \frac{3}{7}$ şi $c = \frac{14}{15}$, calculaţi $a \cdot (b \cdot c)$.

b) Ştiind că $a \cdot b = \frac{21}{17}$ şi $c = \frac{51}{14}$, calculaţi $(a \cdot b) \cdot c$.

c) Ştiind că $a \cdot b = \frac{42}{5}$ şi $c \cdot d = \frac{35}{77}$, calculaţi $a \cdot (b \cdot c) \cdot d$.

7. Calculaţi în două moduri:

a) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right)$; b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{24}\right)$; c) $\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{7}{15} - \frac{3}{10}\right)$.

8. a) Ştiind că $a \cdot b = \frac{3}{7}$ şi $a \cdot c = \frac{15}{28}$, calculaţi $a \cdot (b + c)$.

b) Ştiind că $a \cdot b = \frac{33}{121}$ şi $a \cdot c = \frac{3}{11}$, calculaţi $(b + c) \cdot a$ şi $(b - c) \cdot a$.

c) Ştiind că $a \cdot b = 1\frac{7}{8}$, $a \cdot c = \frac{1}{20}$ şi $a \cdot d = \frac{7}{12}$, calculaţi:

$a \cdot (b + c - d)$, $a \cdot (b - c + d)$ şi $a \cdot (b + c + d)$.

9. Calculaţi scoţând factor comun:

a) $\frac{3}{7} \cdot 77 + \frac{2}{5} \cdot 77$; b) $3 \cdot 5 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{17}{16}$; c) $\frac{2}{5} \cdot 7 + 3 \cdot 7 - 7 \cdot \frac{12}{5}$;

d) $\frac{3}{19} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{19} \cdot \frac{4}{7}$; e) $\frac{2}{23} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{46}$; f) $5 \cdot \frac{7}{11} + 5 \cdot \frac{3}{22} - 5 \cdot \frac{1}{2}$.

10. Efectuaţi: $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot 1\frac{1}{100}$.

11. Calculaţi $a \cdot b$, unde: $a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{19}{20}$ şi $b = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{20}{21}$.

12. Determinaţi produsele:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{15}{2}$; b) $3\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4}$; c) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot 1\frac{1}{2}$; d) $\frac{5}{6} \cdot 3\frac{4}{5} \cdot \frac{30}{19}$.

13. Efectuaţi:

a) $9\frac{2}{14} \cdot \frac{42}{128} \cdot 11\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{68}$; b) $102 \cdot \frac{3}{204} \cdot 2\frac{1}{9} \cdot \frac{6}{19}$; c) $\frac{55}{44} \cdot \frac{88}{77} \cdot \frac{33}{22} \cdot \frac{70}{25}$.

14. Un automobil are viteza de 70 km pe oră. Ce distanţă va parcurge în:

a) $3\frac{1}{5}$ ore; b) $7\frac{2}{7}$ ore?

PE Aprofundare şi performanţă ***

15. Notăm $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{100}} = S$. Calculaţi:

a) $S - \frac{1}{2}S$; b) S.

16. Dacă a este o fracţie supraunitară, arătaţi că: $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

17. Se ştie că dacă a, b, c sunt trei fracţii oarecare, atunci:

1) $a + 0 = 0 + a = a$ (0 este element neutru la adunare);
2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c$ (înmulţirea este distributivă faţă de adunare);
3) dacă $a + b = a + c$ atunci $b = c$ (regula reducerii).

Folosind numai cele trei proprietăţi, demonstraţi că, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$, $a \cdot 0 = 0$.

18. Calculaţi: $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot 1\frac{1}{1\,000}$.

19. Arătaţi că numărul A este pătrat perfect, unde:

$$A = (2 + 4 + 6 + \ldots + 4\,034) \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2\,017 \cdot 2\,018}\right).$$

PE-PP Supermate ****

20. a) Calculaţi $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2\,017}{2\,018}\right) \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2\,018}{2\,017}\right)$.

b) Calculaţi $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{2\,017}{2\,018}\right) + \left(\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{2\,018}{2\,017}\right)$.

21. Se dau numerele $a = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{34}{35}$, $b = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{35}{36}$. Arătaţi că $a \cdot b + \frac{8}{9} = 1$.

PE-PP 9. Împărţirea fracţiilor

Să ne reamintim că **inversa fracţiei** $\frac{a}{b}$ este fracţia $\frac{b}{a}$.

Exemple: a) inversul lui 7, adică al fracţiei $\frac{7}{1}$, este fracţia $\frac{1}{7}$; b) inversa fracţiei $\frac{1}{5}$ este fracţia $\frac{5}{1}$, adică numărul natural 5; c) inversa fracţiei $\frac{3}{5}$ este fracţia $\frac{5}{3}$.

Observaţie: Pentru orice numere naturale nenule a şi b are loc relaţia $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$.

Câtul a două fracţii se obţine înmulţind prima fracţie cu inversa celei de a doua

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Operaţia prin care se obţine câtul a două fracţii se numeşte **împărţirea fracţiilor**.

Exemple: a) $\frac{4}{5}:\frac{6}{35}=\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{6}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot\underset{3}{\cancel{6}}}=\frac{2\cdot 7}{1\cdot 3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$;

b) $\frac{3}{2}:\frac{9}{14}=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{14^{7}}{\cancel{9}_{3}}=\frac{1\cdot 7}{1\cdot 3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$.

Observaţie: De multe ori la împărţirea fracţiilor în locul scrierii $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ se utilizează scrierea $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$. Altfel spus $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$. De exemplu $\frac{5}{\frac{1}{5}}=5:\frac{1}{5}=5\cdot 5=25$ şi $\frac{\frac{1}{5}}{5}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{1}}=\frac{1}{25}$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Completaţi tabelul următor:

Fracţia	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{6}{5}$	$2\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{3}$					
Inversa fracţiei							5	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{7}$

2. Calculaţi:

a) $3:\frac{5}{2}$; b) $5:\frac{3}{4}$; c) $8:\frac{1}{2}$; d) $2:3\frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{3}:4$; f) $\frac{8}{7}:6$; g) $\frac{1}{3}:3$; h) $2\frac{3}{2}:2$.

3. Calculaţi:

a) $\frac{2}{11}:\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{4}:\frac{7}{5}$; c) $\frac{5}{6}:\frac{7}{3}$; d) $\frac{1}{3}:\frac{2}{9}$;

e) $\frac{5}{9}:\frac{1}{6}$; f) $\frac{2}{7}:1\frac{1}{3}$; g) $5\frac{1}{2}:\frac{4}{3}$; h) $5\frac{1}{2}:10\frac{1}{4}$.

PE Aplicare şi exersare **

4. Calculaţi:

a) $\frac{2}{7}:\frac{3}{5}$; b) $3\frac{1}{3}:1\frac{1}{9}$; c) $\frac{65}{8}:4\frac{1}{16}$; d) $1:3\frac{1}{7}$.

5. Efectuaţi:

a) $\frac{5}{21}:\frac{15}{28}$; b) $3\frac{4}{17}:\frac{55}{51}$; c) $\frac{\frac{1}{7}:\frac{3}{5}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}}$; d) $\frac{\frac{72}{24}}{\frac{32}{12}}$; e) $\frac{\frac{35}{108}}{\frac{385}{324}}$; f) $\frac{2\frac{19}{49}}{5\frac{4}{7}}$.

6. Efectuaţi:

a) $\frac{5}{7}:\frac{15}{42}$; b) $\frac{17}{150}:\frac{34}{300}$; c) $11:20\frac{1}{6}$.

7. Calculaţi şi completaţi tabelul:

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$	$\frac{c}{d}:\frac{a}{b}$
$\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{3}$		
$3\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{4}$		

8. Calculaţi:

a) $\frac{\frac{3}{5}}{2\frac{1}{10}}$; b) $\frac{\frac{8}{13}}{\frac{40}{26}}$; c) $\frac{\frac{1}{16}}{5}$; d) $\frac{\frac{3}{6}}{11}$; e) $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{5}{14}}$; f) $\frac{3\frac{1}{7}}{\frac{22}{21}}$.

9. Efectuaţi:

a) $\frac{19}{130}:\frac{38}{260}$; b) $17:31\frac{1}{6}$; c) $14:3\frac{1}{2}$; d) $3\frac{5}{6}:1\frac{11}{12}$;

e) $3\frac{4}{5}:1\frac{2}{17}$; f) $\frac{4}{5}:1\frac{2}{3}\cdot2\frac{1}{12}$; g) $31\frac{1}{4}:20\frac{5}{6}$; h) $20\frac{2}{3}:15\frac{2}{4}$.

10. Calculaţi:

a) $\left(\frac{17}{3}:\frac{21}{4}\right):\frac{34}{7}$; b) $\left(\frac{36}{13}:4\right):\left(\frac{5}{26}:\frac{7}{36}\right)$; c) $\left(3\frac{1}{2}:2\frac{1}{3}\right):\left(6:\frac{12}{19}\right)$.

11. Determinaţi câtul fracţiilor:

a) 121 şi 22; b) $\frac{12}{32}$ şi $\frac{72}{20}$; c) 19 şi $\frac{19}{5}$.

12. Aflaţi fracţia care înmulţită cu $\frac{56}{90}$ dă fracţia $\frac{35}{27}$.

13. Împărţind o fracţie la $\frac{21}{220}$, se obţine $5\frac{5}{42}$. Care este această fracţie?

PE Aprofundare şi performanţă ***

14. La fabricarea pâinii, făina absoarbe apă în cantitate de $\frac{3}{5}$ din masa ei şi prin coacere pierde $\frac{3}{25}$ din masă. Câte kilograme de pâine se vor fabrica din 2 500 kg de făină? Câte pâini de 400 g se vor fabrica?

15. La o fermă agricolă a fost cultivat grâu pe două hectare şi s-a obţinut o producţie de 3 600 kg la hectar. Din grâul obţinut s-au măcinat două cincimi. Jumătate din grâul rămas a fost vândut cu 4 lei, iar din cantitatea de făină obţinută s-a vândut $\frac{3}{10}$ cu 10 lei kilogramul. Câţi lei s-au încasat pe grâul şi făina vândute, ştiind că prin măcinare grâul pierde $\frac{1}{18}$ din greutate? Câte kilograme de grâu şi câte kilograme de făină au mai rămas?

PE-PP Supermate ****

16. a) Demonstraţi că pentru orice n, număr natural nenul, are loc egalitatea:

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

b) Folosind egalitatea demonstrată la punctul a), calculaţi:

$$\left(\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{2}{8\cdot9\cdot10}\right):\frac{1}{2}.$$

17. a) Demonstraţi că $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

b) Calculaţi $1+3+5+\ldots+2\,017$.

18. Dacă $\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+\ldots+\frac{1}{1+3+5+\ldots+199}=a$ şi $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}=b$, calculaţi $a:b+b:a$.

PE-PP

10. Puteri

Puterea unui număr este o înmulţire repetată. De exemplu, în loc de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ se scrie 2^6 şi se citeşte „doi la puterea a şasea". Altfel spus, $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. În general:

Dacă a este un număr şi n este număr natural, $n \geq 2$, se defineşte **„puterea a n-a a numărului a"** sau **„a la puterea n"** astfel:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

Prin convenţie, $a^0 = 1$ (pentru $a \neq 0$) şi $a^1 = a$.
În scrierea a^n, numărul a se numeşte **bază**, iar n se numeşte **exponent**.

Observaţii:

1. Nu se atribuie niciun sens pentru 0^0. Altfel spus, 0^0 nu se defineşte. Se mai spune că 0^0 nu are sens.

2. a^2 se mai citeşte „a la pătrat", iar a^3 se mai citeşte „a la cub". Aceasta se explică prin faptul că aria unui pătrat cu latura de lungime a este $a \cdot a = a^2$, iar volumul unui cub cu latura de lungime a este $a \cdot a \cdot a = a^3$.

Exemple:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$.

În general, dacă $\frac{a}{b}$ este o fracţie şi n este un număr natural nenul, atunci:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}. \text{ Deci: } \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.}$$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$;

3. $\left(\frac{25}{100}\right)^3 = \left(\frac{25^{(25}}{100}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$;

4. $\left(\frac{6}{9}\right)^3 = \left(\frac{6^{(3}}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

Reguli de calcul cu puteri

Dacă a, b sunt fracţii, iar m şi n sunt numere naturale, atunci în calculele cu puteri se aplică următoarele reguli:

1. Înmulţirea puterilor cu aceeaşi bază: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$
(se scrie baza şi se adună exponenţii)

Exemplu: $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^{7+8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$.

2. Împărţirea puterilor care au aceeaşi bază:
(se scrie baza şi se scad exponenţii)

$a^m : a^n = a^{m-n}$

Exemplu: $\left(\frac{1}{3}\right)^{15} : \left(\frac{1}{3}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{15-13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$.

3. Puterea unei puteri:
(se scrie baza şi se înmulţesc exponenţii)

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplu: $\left[\left(2\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{5} = \left(2\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 5} = \left(2\frac{1}{3}\right)^{10}$.

4. Puterea unui produs:
(se ridică la putere fiecare factor al produsului)

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemplu: $\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{8}\right)^{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{2}$.

5. Puterea unui cât:
(se ridică la putere fiecare factor al câtului)

$(a : b)^n = a^n : b^n$

Exemple: $\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$;

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}\right)^{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{3}}.$$

Observaţie:

Să reţinem că am definit următoarele operaţii cu fracţii: adunarea, înmulţirea, scăderea, împărţirea şi ridicarea la putere. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor este aceeaşi ca şi în cazul operaţiilor cu numere naturale, adică:

- întâi se efectuează ridicările la putere, apoi înmulţirile şi împărţirile, în ordinea în care apar, şi apoi adunările şi scăderile, în ordinea în care apar;
- dacă exerciţiul conţine paranteze, se efectuează mai întâi calculele din parantezele rotunde (mici), apoi cele din parantezele pătrate (mari) şi în final cele din acolade.

Adunarea şi scăderea sunt operaţii de ordinul întâi, înmulţirea şi împărţirea sunt operaţii de ordinul al doilea şi ridicarea la putere este operaţie de ordinul al treilea.

Exemplu: Calculaţi: $1-\left\{\frac{1}{8}+\left[\left(\frac{1}{16}+\frac{2}{15}\right)-\frac{1}{6}\right]:\frac{3}{2}\right\}\cdot\frac{5}{2}$.

Rezolvare: Notăm cu S rezultatul calculului.

- Efectuăm calculele din paranteza rotundă:

$\overset{15)}{\frac{1}{16}}+\overset{16)}{\frac{2}{15}}=\frac{15}{240}+\frac{32}{240}=\frac{47}{240}$. Rezultă: $S=1-\left\{\frac{1}{8}+\left[\frac{47}{240}-\frac{1}{6}\right]:\frac{3}{2}\right\}\cdot\frac{5}{2}$.

- Efectuăm calculele din paranteza pătrată:

$\frac{47}{240}-\overset{40)}{\frac{1}{6}}=\frac{47}{240}-\frac{40}{240}=\frac{7}{240}$.

Rezultă: $S=1-\left\{\frac{1}{8}+\frac{7}{240}:\frac{3}{2}\right\}\cdot\frac{5}{2}=1-\left\{\frac{1}{8}+\frac{7}{\cancel{240}_{120}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{3}\right\}\cdot\frac{5}{2}=1-\left\{\frac{1}{8}+\frac{7}{360}\right\}\cdot\frac{5}{2}$.

- **Efectuăm calculele din acoladă:**

$\overset{45)}{\frac{1}{8}}+\overset{1)}{\frac{7}{360}}=\frac{45}{360}+\frac{7}{360}=\frac{52}{360}\overset{(4}{=}\frac{13}{90}$.

Rezultă: $S=1-\frac{13}{\cancel{90}_{18}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{2}=1-\frac{13}{36}=\frac{36}{36}-\frac{13}{36}=\frac{23}{36}$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Scrieţi cu ajutorul puterilor:

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$; c) $\left(2\frac{1}{7}\right)\cdot\left(2\frac{1}{7}\right)\cdot\left(2\frac{1}{7}\right)\cdot\left(2\frac{1}{7}\right)$.

2. Scrieţi puterea care are:

a) baza $\frac{1}{7}$ şi exponentul 2; b) baza $\frac{11}{9}$ şi exponentul 5;

c) baza $\frac{3}{10}$ şi exponentul 16; d) baza $2\frac{1}{3}$ şi exponentul 4.

3. Scrieţi, utilizând notaţiile matematice corespunzătoare:

a) puterea a 5-a a numărului $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}$ la puterea a 3-a; c) $\frac{9}{10}$ la cub;

d) cubul lui $\frac{1}{2}$; e) $\frac{5}{2}$ la pătrat; f) pătratul lui $\frac{7}{10}$.

4. Calculaţi:

a) 2^6; b) 5^3; c) 19^1; d) 18^2; e) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; g) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; h) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$; i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; j) $\left(\frac{132}{131}\right)^0$;

k) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; l) $\left(\frac{13}{14}\right)^1$; m) $\left(\frac{1}{9}\right)^2$; n) $\left(\frac{24}{90}\right)^2$; o) $\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

5. Scrieţi, folosind o singură putere:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^7$; b) $\left(\frac{4}{10}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^5$; c) $\left(2\frac{9}{7}\right)^3\cdot\left(2\frac{9}{7}\right)^{15}$; d) $\left(\frac{15}{90}\right)^3\cdot\left(\frac{15}{90}\right)^4$;

e) $\left(\frac{5}{7}\right)^3:\left(\frac{5}{7}\right)^2$; f) $\left(\frac{125}{100}\right)^4\cdot\left(\frac{125}{100}\right)^2$; g) $\left[\left(7\frac{11}{90}\right)^3\right]^2$; h) $\left[\left(\frac{2}{10}\right)^3\right]^0$;

i) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^6$; j) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5$; k) $\left(\frac{9}{5}\right)^{15} : \left(\frac{7}{5}\right)^{15}$; l) $\left(\frac{8}{26}\right)^3 : \left(\frac{4}{13}\right)^3$.

6. Arătați că următoarele fracții sunt puteri ale lui $\frac{1}{2}$:

a) $\frac{1}{64}$; b) $\frac{125}{1\,000}$; c) $\frac{3}{24}$; d) $\frac{3}{96}$.

7. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1$; b) $\left(\frac{13}{10}\right)^{12} : \left(\frac{13}{10}\right)^{10}$; c) $\left(\frac{14}{100}\right)^{99} : \left(\frac{14}{100}\right)^{99}$;

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^5 : \left(\frac{5}{4}\right)^3$; e) $\left(4\frac{1}{4}\right)^8 : \left(4\frac{1}{4}\right)^7$; f) $\left(\frac{2}{9}\right)^5 : \left(\frac{6}{27}\right)^4$;

g) $\frac{125}{8} : \left(\frac{5}{2}\right)^2$; h) $\left(\frac{11}{13}\right)^{49} : \left(\frac{11}{13}\right)^{49}$; i) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{36} : \left(\frac{49}{9}\right)^{17}$.

8. Calculați:

a) $\left(\frac{9}{13}\right)^3 \cdot \left(\frac{13}{3}\right)^3$; b) $(16)^5 \cdot \left(\frac{625}{10\,000}\right)^5$; c) $\left(\frac{5}{10}\right)^3 \cdot 2^3$;

d) $(0{,}25)^4 \cdot 4^4$; e) $\left(\frac{12}{100}\right)^{149} \cdot \left(8\frac{1}{3}\right)^{149}$; f) $\left(8\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{24}{10}\right)^4$.

9. Scrieți fracția cu baza indicată:

a) $\frac{125}{8}$ cu baza $\frac{5}{2}$; b) $\frac{343}{27}$ cu baza $\frac{7}{3}$; c) 1 cu baza $\frac{2}{5}$;

d) $\frac{243}{1\,024}$ cu baza $\frac{3}{4}$; e) $\frac{1}{1\,024}$ cu baza $\frac{1}{2}$; f) 0 cu baza 0.

10. Calculați, folosind regulile de calcul cu puteri:

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^{17} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{11} : \left(\frac{2}{7}\right)^{28}$; b) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^7 : \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$; c) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^6 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^8 : \left(\frac{3}{5}\right)^{25}$;

d) $\left[\left(\frac{5}{11}\right)^3\right]^{15} \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^{20} : \left(\frac{5}{11}\right)^{65}$.

PE Aplicare și exersare **

11. Scrieți sub formă de puteri cu aceeași bază:

a) 2^{16} și 8^4; b) 81^5 și 27^3; c) 125^3 și 25^6;

d) $\left(\frac{8}{27}\right)^3$ și $\left(\frac{4}{9}\right)^5$; e) $\left(\frac{125}{27}\right)^3$ și $\left(\frac{5}{3}\right)^4$.

12. Scrieţi ca puteri care au acelaşi exponent:

a) 4^{15} şi 3^{10}; b) 5^{30} şi 7^{20}; c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{24}$ şi $\left(\frac{2}{3}\right)^{36}$;

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{18}$ şi $\left(\frac{3}{5}\right)^{36}$; e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{28}$ şi $\left(\frac{2}{6}\right)^{21}$.

13. Determinaţi numărul natural x, ştiind că:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{32}{243}$; b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{225}{100}$; c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x}=\frac{2}{98}$ d) $\left(\frac{125}{50}\right)^{x}=\frac{125}{8}$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

14. Determinaţi numărul natural x, ştiind că:

a) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{x}\right]^{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3}=\frac{2^7}{5^7}$; b) $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^{x}\right]^{2}:\left(\frac{9}{8}\right)^{4}=\left(\frac{9}{8}\right)^{16}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{2}$;

c) $\left[\left(\frac{4}{10}\right)^{2}\right]^{8}=\left(\frac{6}{15}\right)^{x+13}$; d) $5^7\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^{7}=\left(\frac{13}{11}\right)^{x}\cdot\left(\frac{11}{39}\right)^{x}$;

e) $\left(\frac{1}{9}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=\left(\frac{2}{18}\right)^{10}$; f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}:\left[\left(\frac{4}{10}\right)^{3}\right]^{2}=\left(\frac{4}{10}\right)^{6}$.

15. Determinaţi numerele naturale x pentru care:

a) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\right]^{x}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3}=\left(\frac{4}{10}\right)^{7}$; b) $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{x}\right]^{3}\cdot\left(\frac{25}{10}\right)^{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^{10}$.

PE-PP Supermate ****

16. Se consideră fracţiile: $a=\frac{13}{26}+\frac{103}{206}+\frac{1\,003}{2\,006}+\frac{10\,003}{20\,006}$ şi

$b=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\,014}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2\,013}{2\,014}$. Calculaţi $b-a$.

17. Calculaţi sumele:

a) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{43}{21^2\cdot 22^2}$; b) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{97\cdot 99}$.

18. Calculaţi: $1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{12}\right)^{2}+\frac{1}{6}-\left(\frac{93}{90}-\frac{39}{45}\right)\right]:\frac{3}{2}\right\}\cdot 6$.

11. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Scrieţi ce fracţie din 1 m reprezintă:

a) 5 cm; b) 2 dm; c) 1 m; d) 10 dam.

2. Se consideră şirul de fracţii: $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \ldots$.

a) Scrieţi următoarele patru fracţii din şir.

b) Scrieţi fracţia care se află pe locul 50 în şir.

c) Scrieţi fracţia care se află pe locul $n-1$ în şir.

3. Scoateţi întregii din următoarele fracţii:

a) $\frac{17}{3}$; b) $\frac{247}{11}$.

4. Determinaţi perechile (x, y) de numere naturale pentru care următoarele fracţii sunt echiunitare:

a) $\frac{10}{(x-1)(y+1)}$; b) $\frac{6}{(x+1)(y+2)}$.

5. Amplificaţi fiecare fracţie, astfel încât să obţineţi fracţii cu numitorul 24:

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{n+1}{12}; n \in \mathbb{N}.$$

6. Arătaţi că fracţia $\frac{2n+6}{n^2+n}$ este reductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Calculaţi $\frac{11}{29} + \frac{4}{29} - \frac{8}{29}$.

TESTUL 2

1. Scrieţi ce fracţie din numărul zilelor unui an bisect reprezintă numărul zilelor lunii:

a) ianuarie; b) februarie; c) august.

2. Se consideră şirul de fracţii: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots$.

a) Scrieţi următoarele două fracţii din şir.

b) Scrieţi fracţia care se află pe locul 10 în şir.

c) Scrieţi fracţia care se află pe locul n în şir.

3. Introduceţi întregii în fracţii:

a) $3\frac{1}{7}$; b) $10\frac{4}{17}$.

4. Determinaţi perechile (x, y) de numere naturale distincte pentru care fracţia $\frac{25}{x^2+y^2}$ este:

a) supraunitară; b) număr natural.

5. Simplificaţi prin 5 fracţiile: $\frac{5}{10}$; $\frac{25}{15}$; $\frac{115}{85}$; $\frac{5n}{55}$; $\frac{20n}{10n+5}$.

6. Arătaţi că fracţia $\frac{2n}{2n+1}$ este ireductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

7. Calculaţi $\frac{17}{31}-\frac{11}{31}+\frac{25}{31}$.

TESTUL 3

1. Dintre fracţiile $\frac{7}{3}$ şi $\frac{7}{4}$, mai mică este fracţia ... .

2. Subliniaţi fracţiile subunitare din şirul de fracţii: $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{12}{10}$; $\frac{14}{25}$; $\frac{16}{16}$; $\frac{28}{33}$.

3. Efectuaţi:

a) $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}$; b) $\frac{3}{7}+\frac{11}{7}$.

4. Calculaţi $\frac{7}{13}$ din 390 de lei.

5. Câte fracţii de forma $\frac{462}{89x}$ se simplifică prin 2?

6. Determinaţi numărul x, ştiind că: $\frac{57}{31}-\frac{16}{31}=\frac{x-21}{31}$.

7. Rezolvaţi inecuaţia: $\frac{x+3}{7} \le \frac{5}{7}$, $x \in \mathbb{N}$.

TESTUL 4

1. Scrieţi în ordine descrescătoare fracţiile: $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$.

2. În şirul de fracţii de mai jos, subliniaţi pe acelea care sunt supraunitare:

$$\frac{8}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{10}{12}; \frac{25}{14}; \frac{26}{26}; \frac{17}{13}.$$

3. Calculaţi:

a) $\frac{59}{14}-\frac{31}{14}$; b) $\frac{11}{14}+\frac{3}{14}$.

4. Calculaţi $\frac{5}{8}$ din 640 m^2.

5. Determinaţi numărul natural x, ştiind că: $\frac{7}{11}=\frac{x}{99}$.

6. Determinați perechile de numere naturale x, y, astfel încât fracția $\frac{10}{(x+1)(y+2)}$ să fie echiunitară.

7. O bicicletă costă 420 de lei. Prețul ei se reduce cu 15%. Cât va costa bicicleta după reducere?

TESTUL 5

1. a) Scrieți numărătorii fracțiilor $\frac{7}{3}$; $\frac{0}{36}$; $\frac{1}{9}$.

b) Scrieți numitorii fracțiilor $\frac{7}{2}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{0}{1}$.

2. Scrieți ce tip de fracție este:

a) $\frac{2^3}{3^2}$; b) $\frac{1^{2019}}{2018^0}$; c) $\frac{(2^4)^3}{(3^2)^6}$.

3. Efectuați:

a) $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}$; b) $\frac{31}{13}-\frac{5}{13}$.

4. Determinați numărul x, știind că: $\frac{x+3}{31}-\frac{15}{31}=\frac{19}{31}$.

5. Simplificați următoarele fracții până obțineți fracții ireductibile:

a) $\frac{10}{15}$; b) $\frac{6}{12}$; c) $\frac{72}{64}$.

6. Arătați că numărul $\frac{\overline{xy}+8x+8y}{9}$ este natural, pentru orice x, y cifre date.

7. Un călător a parcurs în prima zi 8 km și încă $\frac{3}{10}$ km, iar a doua zi a parcurs 15 km și încă $\frac{7}{10}$ km, ajungând la destinație. Care este lungimea drumului?

TESTUL 6

1. Amplificați cu 3 fracțiile:

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{9}$; c) $\frac{17}{19}$.

2. Scrieți toate fracțiile supraunitare, folosind câte două dintre numerele: 3; 7; 8.

3. Ordonați crescător șirul: $\frac{5}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{3}$.

4. Efectuați:

a) $\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+1$; b) $\frac{11}{9}-\frac{2}{9}-1$.

5. Determinaţi numărul natural x, ştiind că: $\frac{x+1}{12}=\frac{5}{3}$.

6. După ce a parcurs $\frac{7}{10}$ dintr-un drum, Mugur mai are de parcurs 12 km. Ce lungime are drumul?

7. Determinaţi $x \in \mathbb{N}^*$ pentru care: $\frac{1}{10}<\frac{10}{x}<\frac{1}{9}$.

PE

Nume _____ Clasa _____

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. Completaţi pe fişa de evaluare spaţiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Paisprezece sutimi, ca fracţie ordinară ireductibilă, este ..... .

(0,5p) **2.** Dacă un produs costă 200 lei, după o ieftinire cu 10% produsul va costa..... .

(0,5p) **3.** Fracţia ordinară ireductibilă rezultată din fracţia $\frac{3+6+9+12+...+150}{5+10+15+20+...+250}$ prin simplificarea acesteia este ..... .

(0,5p) **4.** Fracţia care are numitorul 24 şi care este echivalentă cu fracţia $\frac{3}{8}$ are numărătorul egal cu ..... .

II. Încercuiţi pe fişă doar răspunsul corect, ştiind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Suma fracţiilor subunitare de forma $\frac{n}{6}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, este o fracţie:

A. subunitară B. echiunitară C. supraunitară D. mai mare decât $\frac{11}{4}$

(0,5p) **2.** Dacă $a+b=\frac{11}{6}$ şi $b+c=\frac{17}{6}$, atunci $a+2b+c$ este fracţia:

A. $\frac{28}{3}$ B. $\frac{3}{28}$ C. $\frac{14}{3}$ D. $\frac{3}{14}$

(0,5p) **3.** Dacă $\frac{21}{x^2+4x}=\frac{7}{4}$, atunci:

A. $x \geq 6$ B. $x=5$ C. $x=4$ D. $x<3$

(0,5p) **4.** Dacă $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{5}{3}$ şi $c=\frac{6}{5}$, atunci:

A. $a<b<c$ B. $b<a<c$ C. $c<b<a$ D. $a<c<b$

III. Uniţi prin săgeţi fiecare enunţ, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Calculaţi:

(0,5p) a) $\frac{1}{3}$ din 240 kg

(0,5p) b) $\frac{3}{8}$ din $\left(\frac{5}{9}\right.$ din 144 kg$\left.\right)$

(0,5p) c) 25% din 400 kg

(0,5p) d) 75% din (10% din 240 kg)

1) 100 kg

2) 80 kg

3) 40 kg

4) 30 kg

5) 18 kg

La problemele IV şi V scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(2p) **IV.** Fie fracţia ordinară $\frac{6n+20}{2n+1}$, unde n este un număr natural oarecare. Scoateţi întregii din fracţie:

a) dacă $n=8$;

b) dacă $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, ..., 8\}$.

(1p) **V.** Fie un număr natural oarecare de trei cifre $\overline{abc}$. Scrieţi în ordine crescătoare numerele: 2, $\frac{\overline{ab}}{5}$, $\frac{\overline{abc}}{50}$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

PE-PP 12. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. La masa festivă organizată de ziua Alexandrei s-au aşezat în fructieră 35 de fructe: struguri şi caise. S-au socotit câte două caise de copil şi câte un strugure la trei copii. Câţi copii au participat la aniversare?

2. Doi fraţi au împreună 36 de ani. Calculaţi vârsta celor doi fraţi, ştiind că diferenţa vârstelor lor este de 4 ani.

3. Bogdan are o sumă de bani. Andrei îl întreabă:
— Ai 135 de lei pentru a cumpăra o minge?
— Dacă aş avea de trei ori suma pe care o am şi încă 15 lei, am putea cumpăra mingea.
Calculaţi ce sumă de bani avea Bogdan.

4. Într-o clasă cu 35 de elevi, numărul băieţilor este cu 2 mai mare decât jumătate din numărul fetelor. Arătaţi că cel puţin 4 fete sunt născute în aceeaşi zi a săptămânii şi cel puţin 2 băieţi sunt născuţi în aceeaşi lună a anului.

Olimpiada locală, Bihor, 2012

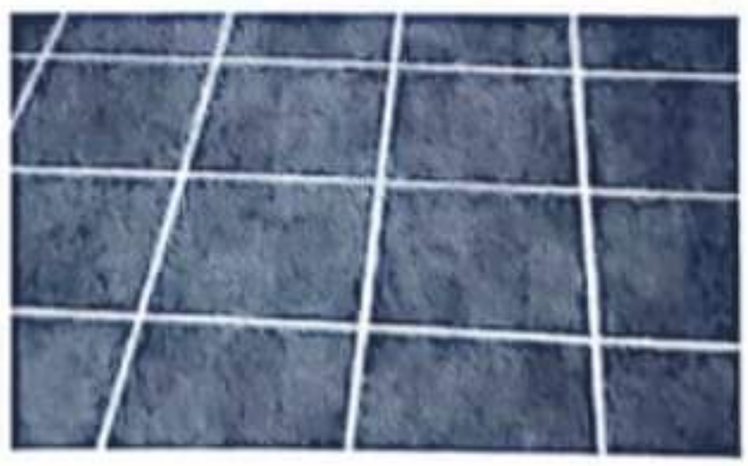
5. La spectacolul „Scufiţa Roşie" s-au vândut 170 de bilete, pentru copii biletul costând 10 lei, iar pentru adulţi 20 de lei. Calculaţi câţi copii şi câţi adulţi au participat la spectacol, ştiind că s-a încasat suma de 2 200 de lei.

6. Ionuţ este în vacanţă la bunici. Astăzi, Ionuţ şi bunicul şi-au propus să urce cele 300 de trepte din parcul din apropierea casei. La un moment dat Ionuţ se opreşte să se odihnească şi bunicul îi spune că dacă mai urcă încă 5 trepte, atunci va mai avea de urcat de două ori mai multe trepte decât au rămas în urmă. Calculaţi pe ce treaptă se afla Ionuţ.

7. Bunicul are atâţia ani cât mine şi părinţii mei la un loc. Determinaţi ce vârstă are fiecare membru al familiei, dacă:
- eu am vârsta egală cu cel mai mare număr format numai din unităţi;
- diferenţa dintre vârstele părinţilor este a treia parte din vârsta mea;
- vârsta bunicului reprezintă cel mai mare număr de două cifre pare identice.

Gazeta Matematică nr. 5/2011

8. Placarea cu gresie a unei pardoseli



Un faianţar trebuie să placheze cu plăci pătrate de gresie pardoseala dreptunghiulară a unei bucătării. Lungimea dreptunghiului este de 360 cm, iar lăţimea de 260 cm. Faianţarul are de ales între două modele de plăci, cu lungimile laturilor de 30 cm, respectiv 15 cm.

Plăcile fiecărui model se vând ambalate în cutii, fiecare cutie având câte 5 plăci de gresie.

a) Câte plăci de gresie din primul model sunt necesare pentru a acoperi lungimea pardoselii? Dar pentru a acoperi lăţimea acesteia?

Câte plăci de gresie din primul model sunt necesare pentru a acoperi toată pardoseala?

Câte pachete cu plăci de gresie din primul model sunt necesare pentru a acoperi toată pardoseala?

b) Aceleaşi întrebări pentru plăcile din modelul al doilea.

c) Deoarece fiecare model presupune o decupare a plăcilor care „depășesc" pardoseala, niciuna dintre cele două variante nu convine faianțarului. Pentru a evita această muncă, faianțarul caută un alt model de plăci de gresie care să se cuprindă exact, atât în lungimea pardoselii, cât și în lățimea acesteia. Noul model trebuie să aibă cea mai mare latură posibilă, între 5 cm și 30 cm. Care este lungimea laturii unei astfel de plăci? Câte pachete din noul model sunt necesare?

9. Calculul mediei semestriale

Potrivit *Regulamentului școlar*, la sfârșitul fiecărui semestru se încheie situația școlară a elevilor. Aceasta presupune calculul **mediei semestriale** (m_s).

La disciplinele la care nu se susține teză, media semestrială este media aritmetică a notelor obținute la evaluările periodice, adică a notelor înscrise în catalog.

La disciplinele la care se susține teză, media semestrială se calculează după formula:

$$m_s = (3 \cdot m_p + T) : 4,$$

unde m_p este **media la evaluarea periodică**, adică media notelor înscrise în catalog, iar T este nota obținută la teză.

Pe semestrul întâi, Mihaela a obținut la evaluarea periodică de la matematică următoarele note: 8, 6, 9, 9, 8, 7, 9, iar la teză a obținut nota 8.

a) Ce pondere are nota 6 în calculul mediei la evaluarea periodică? Dar nota 7? Dar nota 8? Dar nota 9?

b) Ce pondere are nota de la teză în calculul mediei semestriale? Dar media la evaluarea periodică?

c) Calculați media obținută de Mihaela la evaluarea periodică.

d) Calculați media semestrială obținută de Mihaela la matematică.

10. După o poveste a lui Ion Creangă

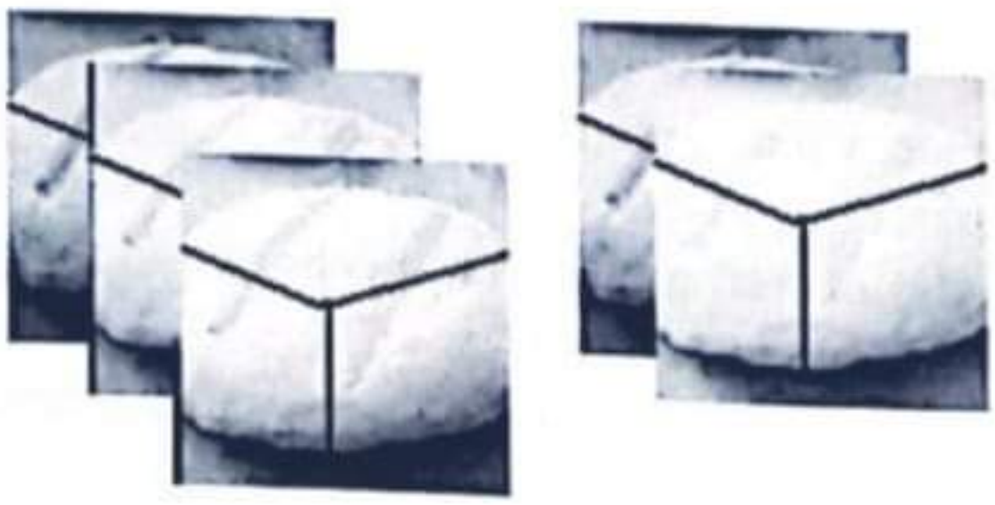
Doi călători se opresc lângă un izvor să se ospăteze și să se răcorească. Unul avea în desagă trei pâini, iar celălalt două. N-au apucat să mănânce că sosește al treilea drumeț, flămând și ostenit. Fiindcă ultimul nu avea nimic de mâncare, primii doi îl poftesc să se ospăteze împreună.

Mulțumindu-le, acesta se așază la masă și, după ce se îndestulează, le dă celor doi oameni binevoitori 5 lei, apoi pleacă la drum.

Problema care trebuie rezolvată este următoarea: **împărțirea echitabilă a celor 5 lei între cei doi drumeți.**

a) Analizați variantele posibile de împărțire a banilor.

b) Priviți imaginea de mai jos. Ea vă sugerează (eventual!) o nouă variantă. Care este aceasta?



c) Dacă nu ați intuit varianta, împărțiți banii după cantitatea de pâine cu care a contribuit fiecare, ținând cont în același timp de faptul că cei trei s-au ospătat în mod egal.

PE-PP Teste recapitulative

Notă (pentru testele 1-10): Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

TESTUL 1

(0,5p) **1.** Calculaţi $3^2 - 2^3$.

(0,5p) **2.** Demonstraţi că dacă cifrele unui număr de trei cifre sunt consecutive, atunci numărul se divide cu 3.

(0,5p) **3.** Comparaţi numerele $a = 128 : 8$ şi $b = 4^2$.

(0,5p) **4.** Ştiind că $4^n = 64$, aflaţi n.

(0,5p) **5.** Suma a patru numere naturale consecutive este 62. Calculaţi numerele.

(1p) **6.** Rotunjiţi la sute numărul 12 379.

(1p) **7.** Aflaţi numărul care împărţit la 7 dă câtul 10 şi restul 5.

(1p) **8.** Ştiind că $a \cdot (b + c) = 3\ 114$ şi $a \cdot b = 1\ 107$, aflaţi $a \cdot c$.

(1p) **9.** Rezolvaţi ecuaţia $24x - 1 = 47$.

10. Calculaţi:

(0,5p) a) $(5^2 - 4^2) : 9$;

(0,5p) b) $12 \cdot 35 - 12 \cdot 24 + 12$;

(0,5p) c) $[9^2 - 2^4 \cdot 5^9 : (5^4)^2] : 2^2$.

(0,5p) **11.** a) Câte numere împărţite la 6 dau câtul cel puţin 2 şi cel mult 5?

(0,5p) b) Câte cifre se folosesc pentru paginarea unei cărţi care are 160 de pagini?

TESTUL 2

(0,5p) **1.** Aflaţi suma tuturor numerelor naturale de forma $\overline{2x5}$ divizibile cu 3.

(0,5p) **2.** Determinaţi câtul împărţirii 459 : 17.

(0,5p) **3.** Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea $3x + 7 = 28$.

(0,5p) **4.** Comparaţi numerele $a = 9^{15}$ şi $b = 27^{11}$.

(0,5p) **5.** Ştiind că $2a + b = 7$, aflaţi $4a + 2b$.

(1p) **6.** Aflaţi valorile numărului natural x pentru care $5x + 2 \leq 7$.

(1p) **7.** Scrieţi numerele pare mai mari ca 15 şi mai mici decât 22.

(1p) **8.** Aflaţi cel mai mare număr natural de două cifre care este cub perfect.

(1p) **9.** Ştiind că suma dintre un număr natural şi triplul acestuia este 16, aflaţi numărul.

10. Calculaţi:

(0,5p) a) $5 \cdot \{7 + 3 \cdot [46 + 6 \cdot (27 - 32 : 4)]\}$;

(0,5p) b) $(2^8)^2 : 2^{2^4} \cdot (3^2 - 1) - 3^0 \cdot 2^2$;

(0,5p) c) $(3^{19} \cdot 25^9)^2 : 15^{36}$.

11. Într-un bloc sunt apartamente cu două şi cu trei camere, în total fiind 41 de camere şi 17 apartamente. Calculaţi câte apartamente sunt:

(0,5p) a) cu 3 camere;

(0,5p) b) cu 2 camere.

TESTUL 3

(0,5p) **1.** Calculaţi $5 + 225 : 15 - 15$.

(0,5p) **2.** Aflaţi suma tuturor numerelor naturale care împărţite la 4 dau câtul egal cu restul.

(0,5p) **3.** Aflaţi numărul cu 17 mai mare decât 4.

(0,5p) **4.** Scrieţi pătratul numărului 5.

(0,5p) **5.** Aflaţi valoarea lui x, astfel încât propoziţia „$18 : x + 4 = 10$" să fie adevărată.

(1p) **6.** Ştiind că $a = 7$, calculaţi $a^2 - 9$.

(1p) **7.** Calculaţi $(3^2 - 2^3)^{2017}$.

(1p) **8.** Demonstraţi că numărul $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ se divide cu 37.

(1p) **9.** Suma a trei numere naturale impare consecutive este 39. Aflaţi numerele.

10. Calculaţi:

(0,5p) a) $125 \cdot 1\,111^3 - 5\,555^3$;

(0,5p) b) $9^5 - (3^5)^2 + 8^4 - (2^4)^3$;

(0,5p) c) $2^7 : 4^3 + 3^3 \cdot 27 : 3^5 + (3^1 \cdot 2^4 - 4^2) : 2^3$.

11. Claudiu şi Cristina sunt fraţi. Suma vârstelor celor doi fraţi este de 41 de ani. În urmă cu 10 ani vârsta Cristinei era jumătate din vârsta lui Claudiu.

(0,5p) a) Ce vârstă are Cristina acum?

(0,5p) b) În urmă cu câţi ani vârsta Cristinei era două treimi din vârsta lui Claudiu?

TESTUL 4

(0,5p) **1.** Calculaţi $(3^2 - 1) : 4 + 3^0 \cdot 1^2$.

(0,5p) **2.** Aflaţi ultima cifră a numărului 2^{2018}.

(0,5p) **3.** Aproximaţi prin adaos la sute numărul 4 175.

(0,5p) **4.** Ştiind că $a \cdot b + a \cdot c = 135$ şi $a = 9$, aflaţi $b + c$.

(0,5p) **5.** Aflaţi numărul care împărţit la 7 dă câtul 4 şi restul 2.

(0,5p) **6.** Ştiind că $a = 3$, calculaţi $2a^2 + 1$.

(1p) **7.** Arătaţi că: $111 \mid (\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab})$, unde a, b, c sunt cifre nenule în baza 10.

(1p) **8.** Aflaţi cel mai mare număr natural de forma $\overline{32x}$ divizibil cu 2.

(1p) **9.** Folosind metoda mersului invers aflaţi numărul natural x din egalitatea:

$$\left[(x-8):2^2+3\right]\cdot 2=22.$$

(0,5p) **10.** a) Scrieţi numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor 9.

(0,5p) b) Scrieţi numerele naturale de două cifre care au diferenţa cifrelor 2.

(0,5p) c) Scrieţi numerele naturale de două cifre care au cifra zecilor de două ori mai mare decât cifra unităţilor.

11. Mai mulţi copii vor să cumpere o minge. Dacă fiecare copil pune câte 7 lei, le mai trebuie 5 lei, iar dacă fiecare copil pune câte 9 lei, sunt în plus 5 lei.

(0,5p) a) Câţi copii vor să cumpere mingea?

(0,5p) b) Cât costă mingea?

(0,5p) c) Câţi lei trebuie să pună fiecare copil pentru a cumpăra mingea?

TESTUL 5

(0,5p) **1.** Calculaţi $8 \cdot 111^3 - 222^3$.

(0,5p) **2.** Scrieţi cu cifre romane numărul 27.

(0,5p) **3.** Aflaţi suma tuturor numerelor naturale impare mai mici sau egale cu 5.

(0,5p) **4.** Aproximaţi prin lipsă la mii numărul 4 257.

(0,5p) **5.** Ştiind că $a + c = 215$ şi $b + d = 115$, aflaţi $a - b + c - d$.

(1p) **6.** Rezolvaţi ecuaţia $x + 27 = 35$.

(1p) **7.** Aflaţi cel mai mare număr natural de două cifre $\overline{ab}$ care verifică inegalitatea $a - b \leq 6$.

(1p) **8.** Aflaţi valorile nenule ale numărului natural x pentru care $4x + 1 \leq 9$.

(1p) **9.** Ştiind că are loc egalitatea $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$ şi că b este multiplu de 4, aflaţi numărul $\overline{ab}$.

(1p) **10.** Mihai îşi propune să citească o carte care are 120 de pagini. Dacă în fiecare zi Mihai ar citi cu 10 pagini mai puţin decât în ziua precedentă, el ar termina de citit cartea în patru zile. Câte pagini trebuie să citească Mihai în prima zi?

11. Se consideră numărul $A = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2011}$.

(0,5p) a) Arătaţi că A este număr impar.

(0,5p) b) Calculaţi ultima cifră a numărului $A + 1$.

(0,5p) c) Calculaţi restul împărţirii numărului $A + 1$ la 5.

TESTUL 6

(0,5p) **1.** Calculaţi $17 - (11 + 45 : 3^2)$.

(0,5p) **2.** Ştiind că $3a + 6b = 18$, aflaţi $a + 2b$.

(0,5p) **3.** Rezolvaţi ecuaţia $3x - 1 = 8$.

(0,5p) **4.** Aflaţi suma divizorilor numărului 6.

(0,5p) **5.** Cercetaţi dacă: $(\overline{x9x} + \overline{x6}) \mid 2(\overline{xx9} + \overline{8x} + 7)$, unde x este cifră în baza 10.

(1p) **6.** Negaţi propoziţia „2 007 se divide cu 3".

(1p) **7.** Aflaţi cel mai mic număr natural de forma $\overline{a3bb}$ cu $a \neq b \neq 1$.

(1p) **8.** Calculaţi $2\,020^1 + 1^{2017} - 2\,019^0$.

(1p) **9.** Suma a două numere este 17, iar diferenţa lor este 5. Calculaţi produsul lor.

(1p) **10.** Rezolvaţi ecuaţia $3^{2^3} = (3^2)^3 \cdot x$.

11. Fie şirul de numere naturale 1, 8, 15, 22, … .

(0,5p) a) Completaţi şirul cu încă trei termeni.

(0,5p) b) Aflaţi termenul de pe locul 15.

(0,5p) c) Calculaţi suma primilor 10 termeni.

TESTUL 7

(0,5p) **1.** Aflaţi numărul de forma $\overline{31x}$ divizibil cu 10.

(0,5p) **2.** Aflaţi ultima cifră a numărului $2\,017^{2019}$.

(0,5p) **3.** Aflaţi numărul natural x care verifică egalitatea $(x - 2^3) : 3^2 = 1^4$.

(0,5p) **4.** Găsiţi suma tuturor numerelor naturale care împărţite la 4 dau câtul 7.

(0,5p) **5.** Rotunjiţi la mii numărul 24 145.

(1p) **6.** Calculaţi $5 \cdot (48 : 3 - 11)$.

(1p) **7.** Produsul dintre un număr natural şi predecesorul său este 72. Aflaţi numărul.

(1p) **8.** Găsiţi valorile lui x pentru care $\overline{x2} > 52$.

(1p) **9.** Determinaţi numărul natural x ştiind că este divizor al lui 6 şi multiplu al lui 2.

(1p) **10.** Determinaţi suma resturilor obţinute la împărţirea oricărui număr natural la 5.

11. Arătaţi că următoarele numere sunt pătrate perfecte:

(0,5p) a) 17^{28};

(0,5p) b) 25^{19};

(0,5p) c) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 55$.

TESTUL 8

(0,5p) **1.** Calculaţi $(12^2 + 5^2) : 13$.

(0,5p) **2.** Comparaţi numerele IX şi XI scrise cu cifre romane.

(0,5p) **3.** Aflaţi predecesorul numărului $(3^2 + 3 \cdot 5^2) : 42$.

(0,5p) **4.** Aflaţi numărul natural x ştiind că $3x - 15 = 18$.

(0,5p) **5.** Determinaţi suma numerelor pare cuprinse între 7 şi 11.

(1p) **6.** Câte numere naturale mai mici decât 5 şi mai mari decât 2 există?

(1p) **7.** Folosind doar cifrele 0, 1 şi 2 scrieţi toate numerele care au două cifre diferite.

(1p) **8.** Ştiind că $a : x + b : x = 20$ şi $a + b = 40$, cu cât este egal x?

(1p) **9.** Arătaţi că numărul $3^{72} + 2 \cdot 3^{73} + 3^{74}$ este pătrat perfect.

(0,5p) **10.** a) Câte numere de forma $\overline{2ab}$ au suma cifrelor 10?

(0,5p) b) Câte numere de două cifre sunt egale cu răsturnatele lor?

11. Dacă $x - y = 27$ şi $z = 3$, calculaţi:

(0,5p) a) $(x - y)^5 : z^{13}$;

(0,5p) b) $x \cdot z - y \cdot z$;

(0,5p) c) $x : z^3 - y : z^3$.

TESTUL 9

(0,5p) **1.** Aflați numărul natural x care verifică egalitatea $3^x = 27$.

(0,5p) **2.** Comparați numerele $a = 3^{20}$ și $b = 2^{30}$.

(0,5p) **3.** Calculați $(3^2 - 1) : 4 + 1^{2017}$.

(0,5p) **4.** Știind că $a + b = 12$, $b + c = 45$ și $c + a = 251$, calculați $(a + b + c) : 2$.

(0,5p) **5.** Aflați suma numerelor impare de forma $\overline{1x}$.

(1p) **6.** Găsiți numărul a cărui descompunere este $10^3 + 2 \cdot 10 + 7$.

(1p) **7.** Scrieți cu cifre romane numărul 37.

(1p) **8.** La ora de educație fizică, elevii clasei a V-a s-au așezat în rânduri de câte 7 elevi. Știind că în clasă sunt 23 de elevi, câți elevi s-au așezat în ultimul rând?

(1p) **9.** Aflați cel mai mic număr natural de forma $\overline{25x}$ divizibil cu 2.

10. Ina și Ana au împreună 125 de timbre. Ina are cu 5 timbre mai mult decât dublul numărului timbrelor Anei.

(0,5p) a) Câte timbre are Ina?

(0,5p) b) Câte timbre are Ana?

(0,5p) c) Câte timbre trebuie să-i dea Ana colegei sale, Ina, ca să aibă o pătrime din numărul timbrelor Inei?

11. Fie numărul $a = 4^n \cdot 3^{2n+1} - 2^{2n} \cdot 9^n$, unde $n \in \mathbb{N}$.

(0,5p) a) Scrieți-l pe a sub formă de produs.

(0,5p) b) Verificați dacă $2a$ este pătrat perfect.

TESTUL 10

(0,5p) **1.** Calculați $(5^2 - 4^2) : 3$.

(0,5p) **2.** Aflați numărul natural x știind că $2 \cdot (x + 1) - 6 = 4$.

(0,5p) **3.** Comparați numerele $a = 6^2$ și $b = (2^3)^2$.

(0,5p) **4.** Aflați cubul numărului 4.

(0,5p) **5.** Găsiți succesorul numărului $18 - 5 \cdot 3$.

(1p) **6.** La împărțirea unui număr natural cu 7 se obțin câtul și restul egale cu 5. Aflați deîmpărțitul.

(1p) **7.** Aflați suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 5 dau câtul egal cu restul.

(1p) **8.** Determinați restul împărțirii numărului $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 50 + 23$ la 24.

(1p) **9.** Diferența a două numere este 7, iar unul dintre ele este dublul celuilalt. Aflați produsul numerelor.

(1p) **10.** Știind că $a \cdot b = 2\,019$ și $a \cdot c = 2\,019$, calculați $a \cdot (b - c)$.

11. Fiecare dintre cei 24 de elevi ai unei clase știe cel puțin o limbă străină. Cunoscând că 16 elevi știu limba engleză și 14 elevi știu limba franceză, calculați:

(0,5p) a) câți elevi știu ambele limbi;

(0,5p) b) câți elevi știu numai limba engleză;

(0,5p) c) câți elevi știu numai limba franceză.

Notă (pentru testele 11-14): Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 120 de minute.

TESTUL 11

(4,5p) **A. Se scriu doar răspunsurile.**

1. Rezultatul calculului $\left[\left(5^3\right)^{12} : 5^{2^5} - 25\right] : 5$ este egal cu … .

2. Ultima cifră a numărului $3^{2020} + 4^{2020} + 7^{2020}$ este … .

3. Într-un bloc sunt 16 apartamente cu două, respectiv trei camere. Ştiind că sunt în total 36 de camere, blocul are … apartamente cu 3 camere.

4. Numărul 12^3 este mai mare decât 7^3 cu … .

5. Dacă fracţiile $\frac{2}{3}$ şi $\frac{x+1}{y-2}$ sunt echivalente, atunci cele mai mici valori ale numerelor x şi y sunt … .

6. Valoarea de adevăr a propoziţiei $(2^3 + 2 \cdot 2^4 + 2^9) : (8 + 2^{12} : 2^3 + 2^5) = 2$ este … .

7. Cel mai mic număr natural care prin împărţirea la 5, 7 şi 8 dă de fiecare dată restul 3 şi câtul diferit de zero este … .

8. Dintre două fracţii cu acelaşi numitor este mai mare aceea cu numărătorul … .

9. Dacă în 8 cutii de acelaşi fel sunt 56 de bomboane, numărul bomboanelor dintr-o cutie este egal cu … .

B. Se scriu rezolvările complete.

(1,5p) **10.** Dacă x este egal cu 2, 3 sau 4 şi y este egal cu 3, 4 sau 5, scrieţi:

a) fracţia supraunitară $\frac{x}{y}$;

b) toate fracţiile $\frac{x}{y}$ echiunitare;

c) toate fracţiile $\frac{x}{y}$ subunitare.

(1,5p) **11.** a) Numărul $1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,999$ este par sau impar? Justificaţi.

b) Determinaţi numerele prime x, y, z, astfel încât $3x + 3y + 4z = 39$.

c) Determinaţi cifrele a, b, c, d, e, f, astfel încât $3 \cdot \overline{abcdef} = \overline{bcdefa}$ în baza 10.

(1,5p) **12.** a) Determinaţi numerele de forma $\overline{xyyz}$, scrise în baza zece, astfel încât:

$$\frac{\overline{xy}}{\overline{yz}} = 2 \ (x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0).$$

b) Determinaţi toate fracţiile de forma $\frac{\overline{1x7}}{\overline{yx}}$ în baza zece care se simplifică cu 3.

c) Arătaţi că numărul $12^n + 3^n \cdot 4^{n+1} + 3^n \cdot 4^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, este divizibil cu 21.

TESTUL 12

(4,5p) **A. Se scriu doar răspunsurile.**

1. Dacă suma a trei numere naturale pare consecutive este 198, atunci numerele sunt … .
2. Un număr natural a împărţit la 5 dă câtul 6 şi restul r. Dacă numărul a este divizibil cu 3 şi nu este divizibil cu 5, atunci restul r este … .
3. Numerele naturale mai mici decât 17 divizibile cu 5 sunt … .
4. Rezultatul calculului $(2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^{13} : 2^5 + 1) : [(2^3)^2 \cdot 8 + 2^0]$ este egal cu … .
5. Cel mai mare număr natural care împărţit la 207 dă câtul şi restul mai mici sau egale cu 203 este … .
6. Dacă un băiat are acum 15 ani, iar mama sa 39 de ani, atunci anul în care mama băiatului avea vârsta de 5 ori mai mare decât vârsta fiului său este … .
7. Dacă mărim şi numărătorul şi numitorul unei fracţii de acelaşi număr de ori, se obţine o nouă fracţie. Cele două fracţii sunt … .
8. Rezultatul calculului $(3^2 + 3 \cdot 3^4 + 3^9) : (9 + 3^7 : 3^2 + 27^3)$ este egal cu … .
9. Ultima cifră a sumei $5^{2019} + 7^{2021}$ este … .

B. Se scriu rezolvările complete.

(1,5p) **10.** O gospodină a cumpărat 15 kg de cartofi şi a plătit 45 de lei. Cât a plătit altă gospodină dacă a cumpărat 8 kg de cartofi de aceeaşi calitate?

(1,5p) **11.** a) Cu ce număr trebuie înmulţit 9 pentru a obţine 1 989?
b) La ce număr trebuie împărţit 1 989 pentru a obţine câtul 9?
c) Prin împărţirea cărui număr la 1 989 se obţine câtul 9?

(1,5p) **12.** a) Determinaţi numerele naturale x şi y dacă suma lor este 2 289 şi prin împărţirea lui x la y se obţine câtul 17 şi restul 111.
b) Câte numere naturale mai mari ca 200 şi mai mici decât 300 împărţite la 7 dau restul 4?
c) Reconstituiţi împărţirea pentru care diferenţa dintre deîmpărţit şi împărţitor este 1 436, câtul este 15 şi restul 64.

TESTUL 13

(4,5p) **A. Se scriu doar răspunsurile.**

1. Suma valorilor numărului natural x pentru care fracţia $\frac{12}{2x+1}$ este număr natural este egală cu … .
2. Proprietăţile adunării în mulţimea numerelor naturale sunt … .
3. Determinaţi numerele naturale x, astfel încât să avem: $\frac{15}{x} > \frac{x}{7} > \frac{13}{15}$.
4. Dacă $x = 3$ şi $y + z = 10$, atunci $15x - 3(y + z)$ este … .
5. Dacă n este un număr natural, atunci ultima cifră a numărului $2\,016^n + 2\,020^{n+1} + 2\,015^{n+2}$ este egală cu … .

6. Rezultatul calculului: $(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{43} - 2^{46} + [3^{148} : 3^{43} - (3^7)^{15}] + 16\}$ este egal cu … .

7. Cel mai mic număr natural care împărţit la 25 dă restul 19 este egal cu … .

8. Dacă $x - \{19\,095 : 335 - 2^2 \cdot [2 \cdot 5 + (2^3 \cdot 5^2)^{25} : (2^{73} \cdot 5^{50})]\} \cdot 5 = 5$, atunci x este egal cu … .

9. Ultima cifră a numărului $11^3 + 22^3 + \ldots + 99^3$ este egală cu … .

B. Se scriu rezolvările complete.

(1,5p) **10.** a) Scrieţi numerele naturale $\overline{xy}$ care sunt egale cu $\overline{yx}$.

b) Scrieţi numerele naturale $\overline{x1y}$ care sunt egale cu $\overline{y1x}$.

c) Scrieţi toate numerele de trei cifre distincte ce se pot forma cu cifrele 0, 2 şi 3.

(1,5p) **11.** Fie numerele $a = 2 \cdot (10^{75} - 1)$ şi $b = 3 \cdot (10^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi prima şi ultima cifră a acestor numere.

b) Câte cifre de 9 se folosesc în scrierea fiecărui număr?

c) Din câte cifre este format fiecare număr?

(1,5p) **12.** a) Determinaţi numărul natural de două cifre care se împarte exact la suma cifrelor sale, dând câtul 3.

b) Arătaţi că nu există niciun număr natural care împărţit la 16 să dea restul 4 şi împărţit la 20 să dea restul 5.

c) Scrieţi numărul 400 ca o sumă de puteri ale lui 2.

TESTUL 14

(4,5p) **A. Se scriu doar răspunsurile.**

1. Numărul 18^3 este mai mare decât numărul $2 \cdot 9^3$ de … ori.

2. Dacă în 8 ore un muncitor realizează 56 de piese de acelaşi fel, atunci numărul de piese realizate de muncitor într-o oră este egal cu … .

3. Rezultatul calculului:

$(7\,174 : 34 + 124\,840 : 8 - 121 \cdot 46 - 70 \cdot 5) : (11 \cdot 51 + 13 \cdot 14 + 357)$ este … .

4. Cel mai mic număr natural de două cifre care împărţit pe rând la 2, la 3 şi la 4 dă de fiecare dată restul 1 este … .

5. Diferenţa dintre un număr natural par şi un număr prim este 1 000. Numerele sunt … .

6. Întrebat câţi porumbei are, Mihai a răspuns: „Eu am porumbei şi iepuri, în total 51 de capete şi 132 de picioare.” Numărul porumbeilor lui Mihai este … .

7. Numărul divizorilor lui 72 este egal cu … .

8. Dacă dintr-un număr de trei cifre scădem 7, rezultatul obţinut se divide la 7; dacă scădem 8 rezultatul se divide la 8, iar dacă scădem 9 rezultatul obţinut se divide la 9. Numărul căutat este egal cu … .

9. Scrierea în cifre a numărului două milioane două sute de mii doi este … .

B. Se scriu rezolvările complete.

(1,5p) **10.** a) Fie $4^n = 64$. Calculați 2^{2n+2} și 2^{4n}.

b) Calculați $10 \cdot [2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 - 5^{24} : 5^{22} + (2^4)^5 : 2^{19}]$.

c) Fie numărul $a = 9 \cdot 10^{n+3} + 10^n + 10^{n-2} - 1$ scris în baza 10. Găsiți cifrele numărului și precizați câte cifre din fiecare fel sunt.

(1,5p) **11.** a) Determinați cifrele x, y, z, t în sistemul de numerație zecimal, astfel încât să avem egalitatea: $\frac{1}{x+y+z+t} = \frac{\overline{xyz}}{10^4}$.

b) Determinați două numere de două cifre terminate cu 7, astfel ca produsul lor să aibă primele două și ultimele două cifre egale.

c) Arătați că suma dintre un număr de patru cifre scris în baza zece și răsturnatul său este divizibilă cu 11.

(1,5p) **12.** Fie numărul de șase cifre $a = \overline{xxxyyy}$.

a) Arătați că numărul a se divide cu 37.

b) Arătați că dacă $x = y$, atunci a se divide cu 7, 11 și 13.

PE-PP Probleme date la concursuri școlare

1. a) Aflați numerele de două cifre care împărțite la 4 dau câtul de o cifră și restul trei.

b) Fie șirul de numere naturale 3, 7, 11, 15, ...

i) Verificați dacă 1 231 și 2 009 sunt numere din șir.

ii) Determinați al 100-lea termen al șirului.

2. Diferența a două numere este 3. Aflați numerele, știind că unul dintre ele este cu 11 mai mic decât triplul celuilalt.

3. Determinați a, b, c, știind că $5a + 3b = 57$, $a \cdot c = 72$, iar $b \cdot c = 108$.

4. Determinați numerele naturale a, b, c, d, e, f, g, nenule, distincte, cele mai mici posibile, din pătratul alăturat, pentru a face un pătrat magic (suma numerelor pe linii, pe coloane și pe diagonale să fie aceeași). Niciun număr nu trebuie să se repete în pătrat. Justificați fiecare alegere.

a	4	3	b
6	11	c	9
d	7	8	e
5	f	g	2

5. Andrei poate mânca o pizza în 30 de minute, Alex în 15 minute, iar Adrian în 10 minute. În cât timp pot mânca cei trei băieți împreună 6 pizze? Justificați răspunsul dat.

6. a) Arătați că suma a 7 numere naturale consecutive este divizibilă cu 7.

b) Arătați că dacă n este număr natural impar, atunci suma a n numere naturale consecutive este divizibilă cu n.

7. a) Numerele naturale m, n, p, x, y, z verifică relația:

$$2\,005^m + 2\,007^n + 2\,009^n = 2\,006^x + 2\,008^y + 2\,010^z.$$

Calculați $2\,009^{mnpxyz}$.

Ioan Miclea, *TMMATE* nr. 6/2009

b) Determinați cifrele a, b, c, d, e cu proprietatea că:

$$\overline{abc}^{\overline{abc}} = 2^{\overline{cde}}.$$

Andrei Eckstein, *TMMATE* nr. 6/2009

8. a) Aflați restul împărțirii numărului $B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,009 + 3$ la 8.

b) Aflați restul împărțirii numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,009 - 3$ la 8.

Prelucrare, *Gazeta Matematică* nr. 9/2008

9. a) Scrieți numărul 2 009 ca un produs în care un factor este pătrat perfect supraunitar.

b) Determinați numărul natural nenul n, știind că $n^4 - n^3 - n^2$ este un număr egal cu suma celor mai mari resturi posibile la împărțirea cu 2 000, cu 10 și, respectiv, cu 2.

Petria-Elena Boldea

10. a) Calculați ultima cifră a numărului $C = 2^n + 4^n + 6^n + 8^n$, unde n este un număr natural nenul oarecare.

b) Fie n un număr natural nenul oarecare. Cercetați dacă numărul:

$D = 2^n + 4^n + 6^n + \ldots + 2\,008^n$ este divizibil cu 10.

RMT nr. 4/2008

11. Arătați că numărul $A = 2\,000^0 + 2\,001^1 + 2\,002^2 + \ldots + 2\,009^9 + 2$ este multiplu de 10.

Nicolae Baciu, ISJ Satu Mare

12. Arătați că numărul $B = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 100 \cdot 101) - 5\,050$ poate fi scris ca suma pătratelor a o sută de numere naturale.

Anca Raluca Șteț, Șc. Tășnad

13. Suma a trei numere naturale este egală cu 1 015. Dacă din fiecare număr se scade acelaşi număr, se obţin, respectiv, numerele 15, 132 şi 346. Care sunt cele trei numere?

14. Câte zerouri are la sfârşit numărul $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 60$? Justificaţi răspunsul.

Vasile Chiorean, Şc. „V. Lucaciu", Carei

15. Într-un hotel sunt 20 de camere. Cu ocazia unui simpozion de matematică sosesc 211 participanţi. Precizaţi dacă este posibil ca aceştia să fie cazaţi în cele 20 de camere, astfel încât să nu existe două camere cu acelaşi număr de persoane. Justificaţi răspunsul.

Nicolae Baciu, ISJ Satu Mare

16. Într-o familie de 4 persoane, suma vârstelor acestora este de 97. Băiatul s-a născut când tatăl avea 23 de ani, iar fata s-a născut când mama avea 22 de ani şi fratele său 4 ani. Puteţi afla ce vârstă are fiecare acum?

Mariana Drăghici, Reşiţa

17. Arătaţi că diferenţa dintre jumătatea lui 4^{57} şi sfertul lui 16^{28} este divizibilă cu 14, iar suma dintre treimea lui 9^{45} şi 27^{29} este divizibilă cu 10.

Emilia-Dana Schiha, Berzasca

18. Considerăm mulţimea tuturor numerelor naturale care împărţite la 101 dau câtul egal cu restul. Arătaţi că dublul sumei elementelor acestei mulţimi se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Vasile Chiş, Reşiţa

19. Numerele naturale a, b, c îndeplinesc simultan condiţiile:

$$a + b + c = 72 \text{ şi } a + 3b - 2c = 50.$$

a) Arătaţi că $3a + 5b = 194$.

b) Determinaţi numerele a, b, c, ştiind că b are cea mai mică valoare posibilă.

20. Dublul unui număr este egal cu triplul altui număr, iar diferenţa lor este 16. Aflaţi cele două numere.

Valer Pop, *Gazeta Matematică* nr. 6/2007

21. Fie n un număr natural astfel încât $13n + 8$ dă restul 13 la împărţirea cu 80, iar $8n + 5$ dă restul 5 la împărţirea cu 50. Determinaţi ultimele două cifre ale lui n.

Nicolae Stănică

22. Un număr natural se numeşte „bipătrat" dacă suma şi produsul cifrelor sale sunt pătrate perfecte nenule.

a) Determinaţi toate bipătratele de două cifre.

b) Suma tuturor bipătratelor de trei cifre se împarte exact la 37? Justificaţi răspunsul.

Valentin Damian

23. Două eleve de clasa a V-a au cumpărat portocale şi kiwi. O elevă, pentru 5 kg de portocale şi 4 kg de kiwi, a plătit 140 de lei, iar a doua elevă, pentru 7 kg de portocale şi 2 kg de kiwi, a plătit 106 lei. Cât costă 4 kg de portocale şi 5 kg de kiwi?

Ioan Todea, Lic. T. „Gh. Şincai"

24. Pentru un concurs de matematică au fost propuse 40 de probleme. Pentru o problemă corect rezolvată se acordă 5 puncte, iar pentru o problemă greşit rezolvată se scad 3 puncte din totalul de puncte. Ştim că un elev promovează la faza următoare dacă a rezolvat corect cel puţin 20 de probleme şi a rezolvat greşit mai puţin de 5 probleme. Verificaţi dacă un elev care a rezolvat 38 de probleme şi a obţinut 102 puncte a promovat la faza următoare.

25. Se consideră $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2011}$ şi $S_2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2\,009$. Arătaţi că $S_1 - S_2$ se divide cu 10.

Ioan Pop, Şc. „O. Goga"

26. Suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 25. Calculaţi suma cifrelor numărului $\overline{abc}+2$.

Vasile Şerdean, Şc. Nr. 1, Gherla

27. Arătaţi că suma numerelor naturale care dau câtul 2 009 la împărţirea cu 2 009 nu este pătrat perfect.

Iulia Brătfălean-Igna, Şcoala Internaţională Cluj

28. a) Care puteri ale numărului 2 se scriu cu patru cifre (în baza 10)?

b) Fie n un număr natural nenul. Arătaţi că există cel puţin trei puteri ale lui 2 care se scriu cu n cifre (în baza 10).

Olimpiada de matematică, 2012

29. Aflaţi numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care împărţite la 36 dau restul un pătrat perfect.

Victor Săceanu, *Gazeta Matematică* nr. 11/2012

30. Se consideră numărul $n=\overline{3a}+\overline{a3}$.

a) Determinaţi cifra a pentru care n este pătrat perfect.

b) Arătaţi că nu există a, astfel încât n să fie cub perfect.

c) Determinaţi a pentru care restul împărţirii lui n la 9 este egal cu 3.

Heidi Feil, *Gazeta Matematică* nr. 6-7-8/2012

31. Aflaţi cel mai mare număr prim de forma $\overline{abcd}$, ştiind că:

$$c+d=a \text{ şi } a+b+c+d=4.$$

Marius Şandru, *Gazeta Matematică* nr. 6-7-8/2012

32. Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care se divid cu 17, ştiind că $12a-6b+c$ se divide cu 17.

Alfred Eckstein şi Viorel Tudoran, Arad

33. Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la 30. Se şterg două numere şi se scrie pe tablă suma lor. Este posibil ca prin repetarea acestui procedeu, la un moment dat, suma numerelor de pe tablă să fie 465? Justificaţi! Dar 366? Justificaţi!

34. Restul împărţirii unui număr natural a la 6 este 4. Restul împărţirii unui număr natural b la 9 este 7.

a) Calculaţi restul împărţirii numărului $4b+3a$ la 18.

b) Calculaţi restul împărţirii numărului $4b-3a$ la 18.

35. Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n, numărul $3^{2n}\cdot 7^{2n}\cdot 5+3^{2n}\cdot 7^{2n+2}$ se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte.

36. Fie numerele $a_1=1$, $a_2=2\cdot 3$, $a_3=4\cdot 5\cdot 6$, $a_4=7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$, ... şi suma

$$S=a_1+a_3+\ldots+a_{100}.$$

a) Calculaţi ultima cifră a lui S.

b) Determinaţi restul împărţirii lui S la 6.

Concursul „Dan Barbilian", 2011

37. Se consideră şirul de numere naturale definit astfel: primul termen este 2, iar următorii termeni, începând cu al doilea, se obţin prin mărirea termenului precedent cu 5.

a) Aflaţi termenul care se află pe poziţia 100 în şir.

b) Verificaţi dacă 2013 este termen al şirului.

c) Calculaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.

38. Se consideră perechea de numere naturale (a_n, b_n), unde $a_n=2\cdot(n+1)$ şi $b_n=3\cdot(n-1)$, pentru $n\geq 2$.

a) Scrieţi perechile de numere naturale (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4).

b) Scrieţi perechea (a_{2013}, b_{2013}).

c) Dacă $(a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$ este un şir de perechi de numere naturale, determinaţi:

1) x, dacă perechea $(x, 300)$ face parte din şir;

2) y, dacă perechea $(2000, y)$ face parte din şir.

39. Se dau numerele $a = 2^{n+2} - 3 \cdot 2^n$ şi $b = 2^2 \cdot 3^{m+2} - 3^{m+3}$. Determinaţi numerele naturale n şi m, astfel încât numerele a şi b să ocupe locurile 65, respectiv 730 în şirul numerelor naturale.

E:13727, *Gazeta Matematică* nr. 11/2008

40. Aflaţi numerele de trei cifre care se micşorează de nouă ori dacă li se şterge cifra din mijloc.

Olimpiadă Bucureşti, 2012

41. Se consideră n numere naturale consecutive. Suma resturilor împărţirii celor n numere la 7 este 156. Aflaţi toate valorile posibile ale lui n.

Gazeta Matematică nr. 11/2011

42. Fie a cel mai mare număr natural format din cifre nenule a căror sumă este 2 012. Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui a la 101.

Ioana Crăciun şi Gheorghe Crăciun

Indicații și răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

1. Exerciții și probleme recapitulative

1. a) 414 090; 88 006; 200 205; 703 023; b) 6 405; 500 032; 9 007; 51 008. **2.** a) 7; 20 347; b) 4; 2 034; c) 3; 203; d) 0; 20; e) 2; 2. **3.** a) <; b) >; c) <; d) >; e) <; f) =. **4.** 99; 97. **5.** a) 102; b) 111; c) 123; d) 106. **6.** 741; 147. **7.** 20; 25; 50; 52. **8.** 77; 75; 72; 57; 55; 52; 27; 25; 22. **9.** a) 245 190; 245 100; 245 000; 69 320; 69 300; 69 000; 137 250; 137 200; 137 000; b) 245 200; 245 200; 246 000; 69 330; 69 400; 70 000; 137 260; 137 300; 138 000; c) 245 200; 245 200; 245 000; 69 330; 69 300; 69 000; 137 250; 137 300; 137 000. **10.** 876. **11.** 102 și 104. **12.** 72, 73 și 74. **13.** a) 56 973; b) 1 836; c) 13 754; d) 10 725. **14.** 1 644; 8 725; 24 794. **15.** $c = 135$, $r = 3$ și $948 = 7 \times 135 + 3$; $c = 179$, $r = 2$ și $897 = 5 \times 179 + 2$; $c = 93$, $r = 4$ și $562 = 93 \times 6 + 4$. **16.** $8 \times (30 + 20) = 8 \times 50 = 400$ și $8 \times (30 + 20) = 8 \times 30 + 8 \times 20 = 240 + 160 = 400$; $24 \times 32 + 24 \times 18 - 24 \times 10 = 24(32 + 18 - 10) = 24 \times 40 = 960$ și $24 \times 32 + 24 \times 18 - 24 \times 10 = 768 + 432 - 240 = 1\,200 - 240 = 960$. **17.** 608; 3 942; 7. **18.** a) 369; b) 4 499; c) 2 508; d) 390. **19.** a) 1 300; b) 30 060; c) 8 309; d) 39 877; e) 15; f) 3 366 501; g) 24; h) 21. **20.** a) 7 235, 7 253, 7 325, 7 352, 7 523, 7 532; 6 numere; b) $7\,235 < 7\,253 < 7\,325 < 7\,352 < 7\,523 < 7\,532$. **21.** 2 177. **22.** 3 978. **23.** 1 950. **24.** Alexandra 100 lei și Costin 70 lei. **25.** Caietul costă 6 lei, cartea costă 36 lei și stiloul costă 48 lei. **26.** Pentru cărți 940 lei și pentru caiete 1 034 lei. **27.** 106. **28.** 968. **29.** 520. **30.** I, V, L, VI, IV, LV, LI, LIV, LVI. **31.** a) XLIX, LXV, LXXXIV; b) CCCLVII, DLXVIII, CMLXXVI; c) MCCC, MMII, MMMXXV. **32.** 4 bancnote de 100 lei. **33.** 1119. **34.** 15 lei. **35.** 30 lei. **36.** 12 000 un număr și 12 375 celălalt număr. **37.** 18 fete și 6 băieți. **38.** a) 36 m; b) 34 m. **39.** $\overline{ab} = 84$. **40.** 7 și 35. **41.** a) 75; b) 14. **42.** 17 048; 51 144; 4 262. **43.** 5 zile. **44.** 15 lei; 17 lei. **45.** 60 meri; 40 pruni; 70 piersici. **46.** 250 garoafe albe și 750 garoafe roșii. **47.** 5 ani fiul și 30 de ani tatăl. **48.** 6 portocale. **49.** 120 de elevi de la ciclul primar și 360 elevi de la ciclul gimnazial. **50.** 24 pachete și, respectiv, 16 pachete. **51.** 37 volume, 41 volume și 27 volume. **52.** 160 mere și 84 portocale. **53.** Primul are 20 de timbre; al doilea are 141 de timbre, iar al treilea are 27 de timbre. **54.** 468. **55.** 15 pagini. **56.** a) 13 min; b) 30 min; c) 14 400 s; d) 15 min; e) 420 min; f) 1 200 s; g) 2 zile; h) 45 min. **57.** 375 kl. **58.** 8 600; 17 200; 17 457. **59.** a) 610 dg; b) 560 g; c) 35 cg; d) 580 dag; e) 47 q; f) 449 hg; g) 45 t; h) 18 dg. **60.** a) 123; b) 621; c) 68. **61.** 2 elevi au primit nota 9 și 10 elevi au primit nota 7. **62.** $a = 91$; $b = 204$; $c = 168$ și a) 893; b) 513; c) 340. **63.** $a = 50$; $b = 5$; $c = 1$ și $5 \cdot a + 4 \cdot b - 3 \cdot c + 33 = 300$. **64.** $D = 529$; $B = 1\,710$; $A = 6\,416$; $C = 7\,922$. **65.** a) $2(a + b) + 3(b + c) = 55$; b) $3(a + b) + 2(b + c) = 60$; c) $(a + b) + 7(b + c) = 77$. **66.** a) 10; b) 6; c) 7; d) 1 010. **67.** Adi avea 45 lei, Alexandra 25 lei, iar Andreea 30 lei. Le-au rămas: Alexandrei 20 lei; Andreei 26 lei; lui Adi 40 lei. **68.** 256 pagini. **69.** 160 probleme rezolvate de Andreea și 280 probleme rezolvate de Mihaela. **70.** a) LXIII; b) 28.

2. Modele de teste pentru evaluarea inițială

TESTUL 1

I. 1. a) 3 630; b) 1 626; c) 10 904; d) 276. **2.** 4 829. **3.** a) A; b) F; c) A; d) A.
II. 4. 1. **5.** 960 pomi. **6.** 129 cutii. **7.** 210. **8.** 60 și 75.

TESTUL 2

I. 1. a) 4 675; b) 1 268; c) 10 175; d) 423. **2.** 2 195. **3.** a) A; b) F; c) A; d) A.
II. 4. 4. **5.** 1 240. **6.** 105 cutii. **7.** 168. **8.** 25 kg de știucă și 100 kg de crap.

TESTUL 3

1. a) 987; b) 13 560; c) 24; d) 25; e) 1 705 > 1 075; f) 738. **2.** 3 410. **3.** $a = 2$. **4.** 1 476. **5.** Fiica 4 ani și mama 28 de ani.

TESTUL 4

1. a) 73; b) de 16 ori; c) 57; d) 237; e) 31; f) XXVII. **2.** VI, XX, LXI, XC, CD. **3.** $a = 519$. **4.** 1 366. **5.** 205 și 41.

TESTUL 5

I. 1. a) 2 715; b) 14 658; c) 36 680; d) 344. **2.** 91. **3.** 45 lei. **4.** 91. **5.** 4 lei. **6.** 5.

II. 7. 330. **8.** 107. **9.** 72; 81; 84. **10.** 16; 8; 24. **11.** $d = \hat{t} \cdot c + r$. Rezultă $\hat{t} \cdot c = 3$. Există patru soluții.

TESTUL 6

1. a) 102; b) 487; c) 17 125; d) 1 348; e) $\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$; f) 27 500. **2.** a) 879 242; b) 32 907. **3.** 120 și 24. **4.** $a = 3$. **5.** 15 m și 10 m, $\mathcal{A} = 150$ m^2. **6.** 70 lei are Mihaela și 100 lei are Mihai.

TESTUL 7

1. a) 17 400 kg; b) 10 040 dl; c) 46 dm; d) 70 400 m^2; e) 270 cm; f) 6 000 s. **2.** XII, XLIII, XXVII, LI. **3.** $a = 2$. **4.** 751. **5.** 175 lei a pus Costin, 187 lei a pus Alexandra și 137 lei a pus Mihaela. **6.** 50 lei.

CAPITOLUL I. NUMERE NATURALE

1. Scrierea și citirea numerelor naturale

1. a) 203; b) 740; c) 9 009; d) 57 400; e) 3 000 000 400; f) 22 000 000 030. **2.** a) trei sute unu; cincisprezece mii șaptezeci; trei sute unu mii șapte; două milioane cinci sute zece; trei sute șaptezeci milioane cinci sute unu mii patru sute șapte; b) o sută patruzeci și nouă de mii opt sute trei; patruzeci de mii șapte sute treizeci și unu; patru sute cincizeci de milioane trezeci și unu de mii douăzeci și patru; două sute patru mii treizeci. **3.** a) 1 008; b) 11 078; c) 203 601; d) 1 062 305. **4.** a) 170; b) 9 687; c) 1 600. **5.** a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; c) 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14; d) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. **6.** a) $1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7$; b) $2 \cdot 1\,000 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7$; c) $5 \cdot 10 + 3$; d) $2 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5$; e) $7 \cdot 100 + 5$; f) $2 \cdot 100 + 3 \cdot 10$; g) $2 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 10 + 5$; h) $7 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 1\,000 + 1 \cdot 100 + 2$. **7.** a) $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$; b) $10 \cdot a + b$; c) $1\,000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$; d) $100 \cdot a + 10 \cdot a + b$; e) $1\,000 \cdot a + 100 \cdot a + 10 \cdot a + a$; f) $100 \cdot a + b$; g) $10\,000 \cdot a + 1\,000 \cdot b + 10 \cdot c + d$; h) $100\,000 \cdot a + 10\,000 \cdot a + 1\,000 \cdot b + 10 \cdot c$. **8.** a) 37; b) 523; c) 5 271; d) 40 520. **9.** a) 2 571; b) 35 753; c) 30 530 057. **10.** a) $\overline{abc}$; b) $\overline{abcd}$; c) $\overline{aaa}$; d) $\overline{a0bc}$; e) $\overline{ababc}$; f) $\overline{ab00}$; g) $\overline{a0bc}$. **11.** a) $\overline{aabc}$; b) $\overline{a72b}$. **12.** XXXVII, XLII, DCCXXXV, MCMXCII, MMI, MMMDCCLVII. **13.** 104, 475, 938, 1 998. **14.** 27, 46, 14, 22, 60, 1900, 109, 620, 1904, 48, 10 000, 90 000, 50 000, 40 000, 95 000. **15.** a) XXXVII; b) CXLV; c) MMDCCLXIX; d) CMLVII; e) MM. **16.** a) 14; b) 27; c) 1 786; d) 1 960. **17.** a) 174, 147, 741, 714, 417, 471; b) 509, 590, 905, 950. **18.** a) 100; b) 102; c) 110; d) 11 102. **19.** a) 99; b) 999; c) 987; d) 9 988. **20.** 2 100 și 9 188. **21.** 5 056, 4 156, 1 456, 3 256, 2 356. **22.** a) 1 234, 2 345, 3 456, 4 567, 5 678, 6 789; b) 9 876, 8 765, 7 654, 6 543, 5 432, 4 321, 3 210. **23.** 25. **24.** a) 135; b) 579. **25.** 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789. **26.** a) 27, 72, 20, 70; b) 11, 44, 99, 14, 19, 49, 41, 91, 94. **27.** a) 11; 22; 33; ...; 99; b) 777. **28.** a) $x = 2$; b) $x = 4$. **29.** $a = 6$. **30.** $a = 3$. **31.** 56; 57. **32.** 48, 36, 24, 12. **33.** 1 998. **34.** Toate sunt adevărate. **35.** 10; 14; 23; 32; 41; 50. **36.** $a = 1$; $b = 9$; $c = 8$. **37.** 10 numere; 90 de numere. **38.** a) VII + IX = XVI; b) XI – V = VI; c) CC + XI = CCXI; d) CCX + I = CCXI; e) MI + IX = MX; f) XL – XXV = XIV + I. **39.** 132, 231, 143, 341. **40.** 4 013, 4 031, 1 304, 1 340, 3 104, 3 140. **41.** 1 236, 1 326, 2 316, 2 136, 3 126, 3 216. **42.** 444, 555, 666, 777, 888. **43.**

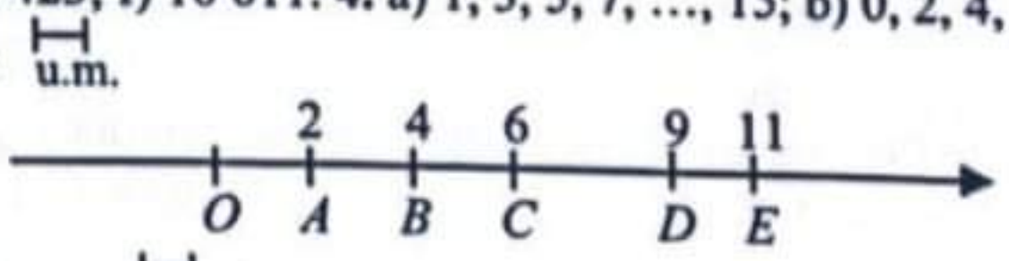
a	5	6	4	7	3	8	9	2
b	6	5	7	4	8	3	2	9
$\overline{ab57}$	5 657	6 557	4 757	7 457	3 857	8 357	9 257	2 957

44. $a + b = 7$ și se rezolvă analog cu exercițiul 43. **45.** Analog exercițiul 43. **46.** a) 15, 19, 23; b) 79; c) 2 013. **47.** a) 89; b) 18; c) 24. **48.** a) 2, 5, 8, 11, 14; b) $a_{17} = 50$, $a_{1017} = 3\,050$, $a_{2017} = 6\,050$; c) $a_{33} = 98$, $a_{100} = 299$, $a_{2012} = 6\,035$. **49.** Regula de formare a numărului este 15; 255; 3 555; ...; $2103\underbrace{55...5}_{2013} \Rightarrow 152553555...2103\underbrace{55...5}_{2013}$. Numărul format din primele 2 013 cifre ale acestui număr are forma $\underbrace{152553555...n55...5}_{2013}$, unde 55...5 are $n - p$ cifre și $0 \le p \le n$. Numărul $152553555...9\underbrace{55...5}_{9}$ are $2 + 3 + 4 + ... + 10 = 44$ cifre. Rezultă că numărul n are cel puțin 2 cifre. Numărul $152553555...100\underbrace{55...5}_{100}$ are $2 + 3 + 4 + ... + 10 + 12 + 13 + ... + 101 + 103 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 103) - (1 + 11 + 102) = 5\,356 - 114 = 5\,242$ cifre. Rezultă că numărul n are cel mult 2 cifre. Deci numărul n are 2 cifre. Trebuie aflat cel mai mare număr natural n pentru care numărul $152553555...(n-1)\underbrace{55...5}_{n-1}$ are mai puțin de 2013 cifre. Cum n are 2 cifre $\Rightarrow n - 1$ are tot 2 cifre; $2 + 3 + 4 + ... + 9 + 10 + 12 + 13 + ... + (n + 1) = [1 + 2 + 3 + 4 + ... (n + 1)] - (1 + 11) = (n + 1) \cdot (n + 2) : 2 - 12$. Deci $(n + 1)(n + 2) : 2 - 12 < 2\,013$; $(n + 1)(n + 2) : 2 < 2\,025$; $(n + 1)(n + 2) < 4\,050$ și avem $60 \cdot 60 = 3\,600$; $60 \cdot 61 = 3\,660$; $61 \cdot 62 = 3\,782$; $62 \cdot 63 = 3\,906$; $63 \cdot 64 = 4\,032$; $64 \cdot 65 = 4\,060 \Rightarrow n + 1 = 63 \Rightarrow n = 62$. Pentru $n = 62$ numărul $152553555...62\underbrace{55...5}_{7}$ are $2 + 3 + 4 + ... + 10 + 12 + 13 + ... + 64 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 64) - (1 + 11) = 64 \cdot 65 : 2 - 12 = 2\,080 - 12 = 2\,068$ cifre. Dar $2\,068 > 2\,013$. Are $2\,068 - 2\,013 = 55$ cifre mai mult; $62 - 55 = 7$ cifre de 5 rămân. Deci numărul format din primele 2 013 cifre este $152553555...62\underbrace{55...5}_{7}$ și cifra de pe locul 2 013 este 5. **50.** 89.

2. Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; estimări, aproximări

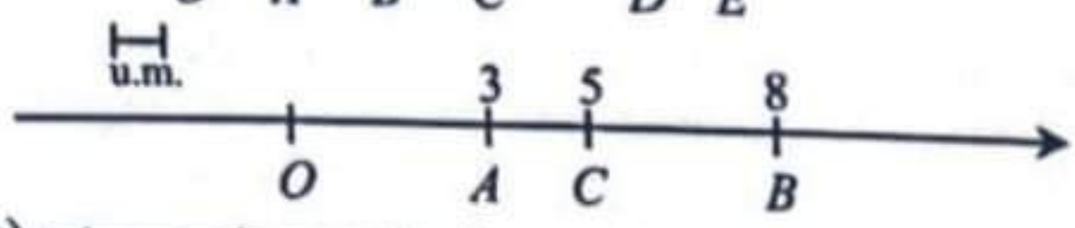
1. 57, 128, 156, 235, 349, 463. **2.** 631, 561, 492, 354, 281, 79. **3.** a) 975; b) 5 322; c) 50 001; d) 43 575; e) 423; f) 10 011. **4.** a) 1, 3, 5, 7, ..., 15; b) 0, 2, 4, ..., 10. **5.** a) 102; b) 888; c) 1 111; d) 9 875.

6.



7. $A(2)$; $B(3)$; $C(5)$; $D(6)$; $E(8)$.

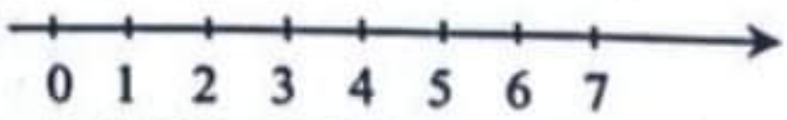
8.



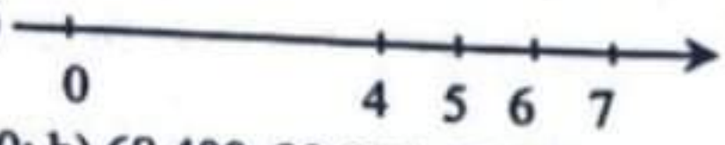
p(F); q(A); r(F).

9. a)

b)



c)



10. a) 68 370, 29 570, 37 150, 48 500, 53 280; b) 68 400, 29 600, 37 200, 48 500, 53 300; c) 68 400, 29 600, 37 200, 48 500, 53 300; d) 68 000, 30 000, 37 000, 49 000, 53 000. **11.** a) 9 732 820; b) 9 732 800; c) 9 733 000; d) 9 730 000; e) 9 700 000. **12.** a) 17 253; 17 254; 17 257; b) 17 557; 17 562; 17 570; c) 17 470; 17 529; 17 456. **13.** *e, c, a, d, b*. **14.** a) 7, 1, 15, 9; b) 15, 9, 7, 1. **15.** Se alege unitatea de măsură de 1 mm. **16.** 2 100; 16; 29; 1 120; 122; 440; 2 050; 411 și ordonate crescător: 16; 29; 122; 411; 440; 1 120; 2 050; 2 100. **18.** a) 46 715 842; b) 715 842. **19.** $c < a < d < b$. **20.** $A(n)$; $B(n + 1)$; $C(n + 2)$ și $D(x)$. D este între A și $C \Rightarrow n < x < n + 2 \Rightarrow x = n + 1$.

21.

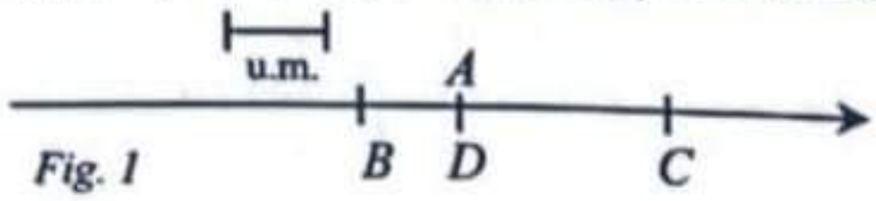


Fig. 1

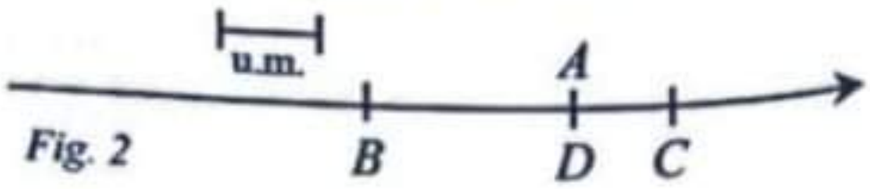
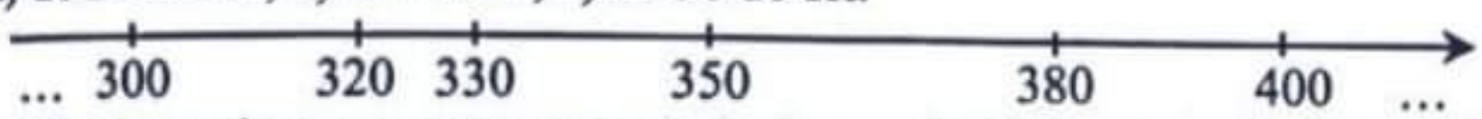


Fig. 2

Reprezentarea este ca în figura 1 sau ca în figura 2. În fiecare reprezentare, numerele care corespund punctelor A şi D sunt egale. **22.** a este predecesorul lui $b \Rightarrow a < b$ şi cum a este succesorul lui $c \Rightarrow$ $\Rightarrow c < a$. Rezultă ordonarea: $c < a < b$. **23.** a) b poate fi 2 sau 1 sau 0, iar a poate fi orice cifră, adică sunt câte 10 soluţii pentru fiecare valoare a lui b amintită anterior şi încă pentru $b = 3$ se obţin 3 variante pentru a, şi anume 7, 8 sau 9; b) Pentru $b = 3$, a poate fi 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, iar pentru b luând valori de la 4 inclusiv până la 9 inclusiv, a poate fi orice cifră, adică sunt în total 67 de soluţii. **24.** Dacă $a = 2$, b poate fi 4, 3, 2, 1 sau 0, iar c orice cifră, iar pentru $a = 1$, b poate fi 5, 6, 7, 8 sau 9, iar c poate fi orice cifră. În total sunt 100 de numere naturale care îndeplinesc condiţiile problemei. **25.** 246, 468. **26.** 999, 777, 555, 333, 111. **27.** a) Numerele pare de forma $3 \cdot n + 1$ sunt 4, 10, 16, 22 şi 28, deci sunt 5 astfel de numere; b) Numerele de forma $5 \cdot n + 3$, impare, sunt 3, 13, 23, 33 şi 43, deci sunt 5 astfel de numere. **28.** a) Numerele sunt 99, 88, ..., 11 şi sunt 9 astfel de numere; b) 9 numere. **29.** 774 > 764 > 754 > 744 > 734 > 724 > 714 > 704. **30.** $\underbrace{111...1}_{12\text{ cifre}}$, $\underbrace{222...2}_{6\text{ cifre}}$, 3 333, 444, 66.

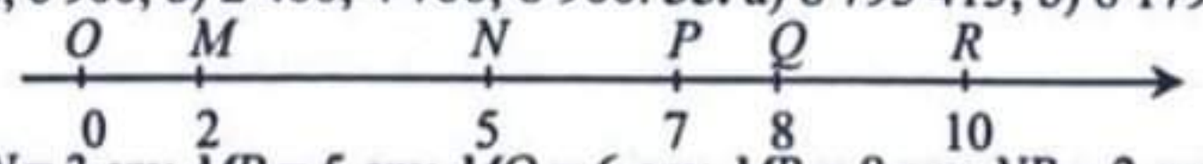
31. a) de 28 de ori; b) de 15 ori; c) de 36 de ori.

32.



33. a) Se reprezintă pe axă numerele 0, 1, ..., 6; b) Se reprezintă pe axă numerele 2, 3, 4, ..., 7; c) Se reprezintă pe axă numerele 3, 5, 7, 9; d) Se reprezintă pe axă numerele 4 şi 6. **34.** a) 2 500; 4 700; 6 900; b) 2 400; 4 700; 6 900. **35.** a) 8 795 413; b) 8 179 543.

36.

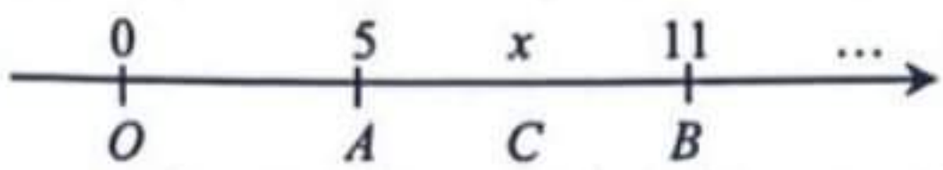


a) $MN = 3$ cm; $MP = 5$ cm; $MQ = 6$ cm; $MR = 8$ cm; $NP = 2$ cm; $NQ = 3$ cm; $NR = 5$ cm; $PQ = 1$ cm; $PR = 3$ cm; $QR = 2$ cm; b) $MR + MQ - 2MN = 8 + 6 - 2 \cdot 3 = 8$ cm; $2NP + 3NR - NQ = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 3 = 16$ cm; $4QR + 5PQ - 2PR = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 7$ cm.

37.

a) 3, 8 şi 9; b) $MB = 6$ cm, $BC = 1$ cm, $BN = 3$ cm, $AN = 8$ cm, $MN = 9$ cm.

38. a)



b)

La a), x poate fi: 6, 7, 8, 9 sau 10, iar la b) x poate fi: 0, 1, 2, 3 sau 4.

39.

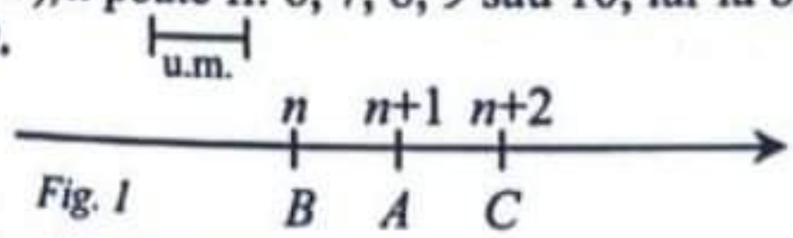


Fig. 1

sau

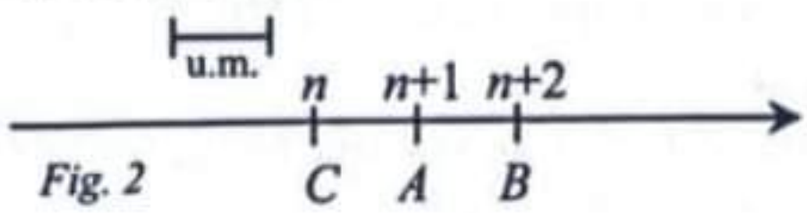


Fig. 2

Cazul I. Vezi figura 1

a) B corespunde unui număr par $\Rightarrow$ A corespunde unui număr impar şi C corespunde unui număr par.

b) A corespunde unui număr impar $\Rightarrow$ B şi C corespund unor numere pare.

c) C corespunde unui număr impar $\Rightarrow$ A corespunde unui număr par şi B corespunde unui număr impar.

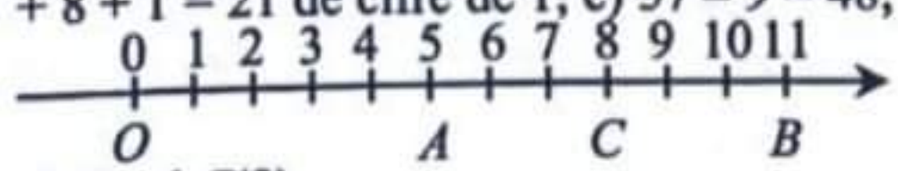
Cazul II. Vezi figura 2

a) B corespunde unui număr par $\Rightarrow$ A corespunde unui număr impar şi C corespunde unui număr par.

b) A corespunde unui număr impar $\Rightarrow$ B şi C corespund unor numere pare.

c) C corespunde unui număr impar $\Rightarrow$ A corespunde unui număr par şi B corespunde unui număr impar.

40. $n \geq 2 \Rightarrow 2 \leq n \Rightarrow 4 \leq n + 2$ şi $n + 2 < n + 3 \Rightarrow 4 < n + 3$ (1); $2 \leq n \Rightarrow n + 2 \leq 2n \Rightarrow n + 3 \leq$ $\leq 2n + 1$ (2); $2n = 2n$ şi $2 \leq n \Rightarrow 2n + 2 \leq 3n$ şi $2n + 1 < 2n + 2 \Rightarrow 2n + 1 < 3n$ (3). Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow$ $\Rightarrow 4 < n + 3 \leq 2n + 1 < 3n$. **41.** a) 1, 2, ..., 9 sunt 9 cifre; 10, 11, ..., 99 sunt $(99 - 9) \cdot 2 = 90 \cdot 2 =$ $= 180$ cifre; 100 sunt 3 cifre; $9 + 180 + 3 = 192$ de cifre; b) de la 1 la 9 – o dată; de la 10 la 19 – de 11 ori; la 21, 31, ..., 91 – de 8 ori; la 100 – o dată; $1 + 11 + 8 + 1 = 21$ de cifre de 1; c) $57 - 9 = 48$; $48 : 2 = 24$; $\underbrace{123...9}_{9}\underbrace{1011...24}_{24}$, deci pe locul 57 este 4. **42.**



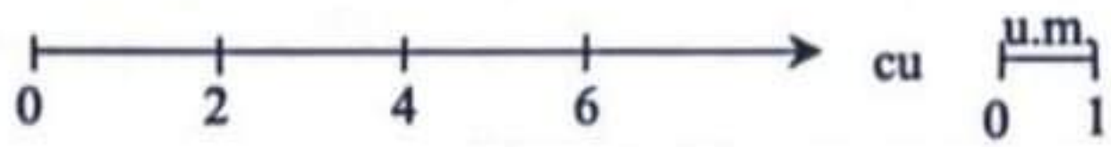
C mijlocul lui AB; $AB = 11 - 5 = 6$; $6 : 2 = 3$; $AC = 5 + 3 = 8$. Deci $C(8)$.

43. Deoarece $a < b$ rezultă $\overline{aaaa} < \overline{aabb} < \overline{abab} < \overline{baba} < \overline{bbaa} < \overline{bbbb}$. **44.** a) 149 763; b) 549 763. **45.** a) 51015202530...2015 = 5(5 + 5)(5 + 5 + 5)(5 + 5 + 5 + 5)...(5 + 5 + ... + 5), deci 403 de 5; b) De la 10 la 95 sunt 95 : 5 – 1 = 19 – 1 = 18 numere de 2 cifre; de la 100 la 995 sunt 995 : 5 – 19 = = 199 – 19 – 1 = 180 numere de 3 cifre; de la 1 000 la 2 015 sunt 2 015 : 5 – 180 – 18 – 1 = 403 – – 199 = 204 numere de 4 cifre. În total sunt 1 + 18 · 2 + 180 · 3 + 204 · 4 = 1 + 36 + 540 + 816 = = 1 393 cifre; c) 1 015 : 5 – 199 = 203 – 199 = 4; $\underbrace{51015...10001001100210 03}_{1015 \text{ cifre}}$...2015. Deci, cifra de pe locul 1 015 este 3.

3. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. 8, 10, 12, 14, 16. **2.** 543 790; 543 800; 544 000. **3.** 2 009 şi 2 011.

4. 

5. 5 327. **6.** $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **7.** 1 550; 1 195; 415.

TESTUL 2

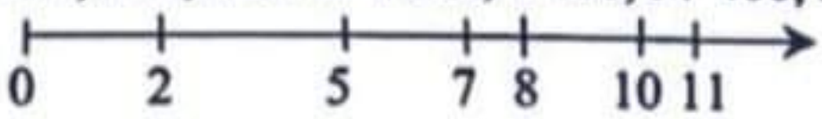
1. 2 005; 2 007; 2 009. **2.** Prin lipsă: 47 380; 47 300; 47 000; prin adaos: 47 390; 47 400; 48 000. **3.** a) Dacă $x = 4 \Rightarrow \overline{x7} = 47$; dacă $x < 4 \Rightarrow \overline{x7} < 47$ şi dacă $x > 4 \Rightarrow \overline{x7} > 47$; b) Dacă $x = y = 4 \Rightarrow \overline{xy7} = 447$; dacă $x < 4 \Rightarrow \overline{xy7} < 447$ oricare ar fi y cifră; dacă $x = 4$ şi $y < 4 \Rightarrow \overline{xy7} < 447$; dacă $x = 4$ şi $y > 4 \Rightarrow \overline{xy7} > 447$ şi dacă $x > 4$ atunci $\overline{xy7} > 447$. **4.** Se ia între vârfurile compasului distanţa OA şi se aşază de 2 ori, de 4 ori, respectiv de 5 ori de la origine spre dreapta. **5.** 6; 506; 5 006. **6.** a) 4; 16; 5; 20; 6; 24; 7; 28; b) 71; 64; 57; 50. **7.** Pentru $a = 1 \Rightarrow b \in \{2, 4, 6, 8\}$; pentru $a = 2 \Rightarrow b \in \{4, 6, 8\}$; pentru $a = 3 \Rightarrow b \in \{4, 6, 8\}$ ş.a.m.d. $\Rightarrow$ 16 posibilităţi. **8.** Cel mai mic este 2 057; cel mai mare este 7 520.

TESTUL 3

1. 204. **2.** 9 numere. **3.** 15; 18; 21. **4.** Fie P mijlocul segmentului $\Rightarrow P(7)$. **5.** $a = 6$; $b = 2$; $c = 96 \Rightarrow c > a > b$. **6.** 0, 100, 1 000. **7.** LVII, XLVI, MCMLXXXII, MCMLXXIV.

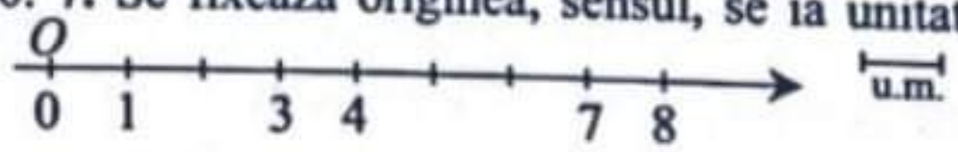
TESTUL 4

1. 270; 702; 720. **2.** 4 300, 4 400, 97 400, 97 500. **3.** 2 numere.

4. 

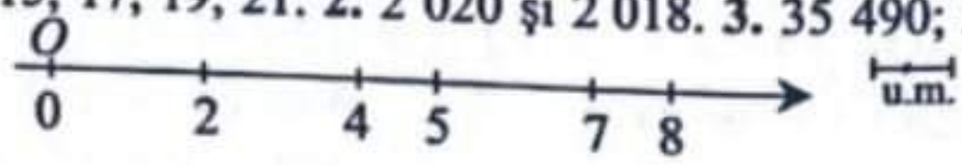
5. 1 166; 2 255; 3 344. **6.** 2 004; 29; 1 611; 1 165. **7.** a) 5 şi 25; 2 şi 272; b) 0 şi 250; 4 şi 2 724.

TESTUL 5

1. a) 4, 12, 5, 15, 6, 18; b) 16, 19, 22, 25, 28, 31. **2.** 2 019 şi 2 017. **3.** 17 830; 17 800; 17 000. **4.** 1 250; 412. **5.** 10. **7.** Se fixează originea, sensul, se ia unitatea de măsură de o pătrăţică şi se reprezintă astfel: 

8. 257, 275, 527, 572, 725, 752.

TESTUL 6

1. a) 8, 12, 10, 15, 12, 18; b) 11, 13, 15, 17, 19, 21. **2.** 2 020 şi 2 018. **3.** 35 490; 35 500; 36 000. **4.** 1 450; 415. **5.** 10. **6.** MDCCCL. **7.** 

8. 146, 164, 416, 461, 641, 614.

OPERAŢII CU NUMERE NATURALE

1. Adunarea numerelor naturale; proprietăţi

1. a) 156 197; b) 1 393 569; c) 1 760; d) 5 950. **2.** 575 = 500 + 70 + 5 şi analog pentru celelalte.

3.

a	0	7	1	6	2	5	3	4
b	7	0	6	1	5	2	4	3

4. a) 200; b) 4 429; c) 300; d) 4 700. **5.** 1 566; 25 774; 2 494; 127 576; 41 747; 25 356. **6.** a) 0 este element neutru la adunare; b) comutativitatea; c) asociativitatea. **7.** a) 372; 854; 1 760; 132 781; 799 782; 2 437 885; b) 5 249; 5 362; 5 674; 29 810; 461 361; 257 437 361. **8.** 26 779; 49 308; 39 679; 73 611; 117 950. **10.** a) 4 100; b) 9 000; c) 17 600. **11.** 18 = 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. **12.** a) Calculăm suma celor mai mici 6 numere naturale pare distincte: 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30. Suma oricăror alte şase numere naturale pare distincte este mai mare decât 30. Deci, numerele sunt 0, 2, 4, 6, 8 şi 10; b) Calculăm suma celor mai mici 10 numere naturale impare distincte: 1 + 3 + 5 + + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100. Suma oricăror alte zece numere naturale impare distincte este mai mare decât 100. Deci, numerele sunt: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. **13.** Conform rezultatului din problema 12, suma celor mai mici 10 numere naturale impare distincte este 100, ceea ce înseamnă că valoarea cea mai mică posibilă dacă numerele sunt distincte este 100. Cum 98 < 100 înseamnă că numerele nu sunt distincte toate, deci, cel puţin două din ele sunt egale. **14.** a) 1 500; b) 3 350; c) 6 990; d) 626. **15.** a) 3 240; b) 2 550; c) 2 500; d) 253. **16.** a) 680 403; b) 511 060; c) 409 050; d) 293 335. **17.** a) 5 000; 6 000; b) 7 000; 8 000; c) 2 000; 3 000; d) 19 000; 20 000; e) 35 000; 36 000; f) 54 000; 55 000. **18.** a) 2 000; b) 4 000; c) 9 000; d) 20 000; e) 115 000; f) 33 000. **19.** a) 20 665 lei; b) 20 000 lei; c) 21 000 lei. **20.** a) 500; b) 1 000; c) *a* sau *b*; d) 600. **21.** *p*(F); *q*(A); *r*(A). **22.** a) *c* este număr par; b) *c* este număr impar; c) *b* este număr par; d) *b* este număr impar. **23.** a) 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, ...; b) 132; c) 555. **24.** $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{1998} = 10 - 1 + 100 - 1 + 1\,000 - 1 + \ldots + 1\underbrace{0\ldots0}_{1998} - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{1998}0 - 1998 = \underbrace{11\ldots1}_{1994}09112$. **25.** Sunt 5 soluţii: (37; 38); (24, 25, 26); (13, 14, 15, 16, 17); (10, 11, 12, 13, 14, 15) şi (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12). **26.** 1 007; 1 008; 1 009; ...; 2 011; 2 012; 2 013; 2 014; 2 015; ...; 3 017; 3 018; 3 019 şi $S = 4\,052\,169$.

2. Scăderea numerelor naturale

1. $a - b$ este: 300, 220, 1 020, 1 330, 118 940; $a - 325$ este: 212, 950, 3 098, 11 112, 131 815; $a - b - 11$ este: 289, 209, 1 009, 1 319, 118 929; $a + b - 120$ este: 654, 2 210, 5 706, 21 424, 145 220. **2.** a) 1 896; b) 38 569; c) 44 254; d) 20 437; e) 133 000; f) 15 018. **3.** *p*(A); *q*(A); *r*(A). **4.** a) 10 224; b) 3 776 009; c) 567 552; d) 238 756. **5.** a) 5 175; b) 31 000. **6.** 813 137; 8 000; 125 125; 45 834; 33 723; 822 125. **7.** a) $a = 680$; $b = 600$; b) $a = 250$; $b = 450$; c) $a = 500$; $b = 500$. **8.** a) $x > y$; b) $x < y$; c) $x = y$. **9.** 98 765 – 10 234 = 88 531. **10.** a) $a + b + c + d = 1\,241$; b) $a - b + c - d = 195$. **11.** a) (530 – 439) – (348 – 257); b) (880 – 661) – (631 – 412); c) (6 464 – 5 008) – (3 552 – 2 096); d) 24 860 – (35 765 – 15 680) – 4 775. **12.** 73. **13.** 91 577. **14.** a) 2 578; b) 599; c) 11 589; d) 2 320. **15.** a) 316; b) 10 484. **16.** 31 – 13 = 18; 42 – 24 = 18; 53 – 35 = 18; 64 – 46 = 18; 75 – 57 = 18; 86 – 68 = 18; 97 – 79 = 18. **17.** a) 141 lei; b) 222 lei. **18.** 31 368. **19.** Bucureşti-Deva 389 km, Oneşti-Deva 381 km şi distanţa totală 770 km. **20.** 71, 82, 93. **21.** Notând cu *p* numărul par şi cu *i* numărul impar se poate întocmi tabelul:

a	*b*	*a + b*	*a – b*
p	*p*	*p*	*p*
p	*i*	*i*	*i*
i	*p*	*i*	*i*
i	*i*	*p*	*p*

Din tabel rezultă că suma şi diferenţa au aceeaşi paritate. Deci, nu există astfel de numere.

22. p(F); q(A). **23.** a şi b pot fi 2 şi 1; 3 şi 2; 4 şi 3; 5 şi 4; 6 şi 5; 7 şi 6; 8 şi 7; 9 şi 8. **24.** Cum $a + b = 1\,973$, rezultă că a şi b au parităţi diferite. Cum $b - c = 1\,547$, rezultă că b şi c au parităţi diferite. Deci a şi c au aceeaşi paritate şi $a - c \neq 147$, adică nu există astfel de numere. **25.** a) $7\,394 - 5\,836 = 1\,558$; b) $4\,173 - 2\,859 = 1\,314$.

3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul operaţiilor de adunare şi scădere

1. a) 38; b) 6 836; c) 140; d) 220. **2.** a) 2 900; b) 33 184; c) 11 356; d) 12 109; e) 38; f) 235. **3.** a) toate; b) toate; c) niciunul. **4.** a) 0, 2, 3; b) niciunul; c) toate; d) 2 şi 3; e) 7; f) toate. **5.** a) 0, 1, 2, 3; b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; c) 0, 1, 2, 3; d) 0, 1, 2, 3, 4; e) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. **6.** 280, 281, ..., 335. **7.** a) 139; b) 792; c) 1 358. **8.** a) 187; b) 3; c) 509; d) 258; e) 5; f) 419. **9.** a) 20; b) 190; c) 101; d) 410; e) 90; f) 75. **10.** a) 15, 16, ..., 30; b) 223, 224, ..., 249; c) 125, 126, ..., 137; d) 0, 1, 2, ..., 5. **11.** 297; 176. **12.** 119; 73. **13.** $a = 16$; $b = 12$; $c = 4$. **14.** 16, 61, 25, 52, 34, 43. **15.** 15; 17; 19. **16.** $a = 7$. **17.** a) 97, 98, ...; b) 0, 1, ..., 30; c) 0; d) 0, 1, ..., 30. **18.** $c = 17$. **19.** 372. **20.** a) $x \geq 54$; b) $x > 158$; c) $x \leq 14$; d) $x < 267$. **21.** $x = 50$. **22.** 81; 1690. **23.** a) 124, 125, ..., 325; b) 14, 15, ..., 377; c) 20, 21, 22, ..., 50. **24.** a) Cum $a - b = 2014 \Rightarrow (a - 201) - (b + 14) = 2\,014 - 201 - 14 = 1\,799$; b) $(a - 258) - 2b = 1\,000 \Rightarrow (a - 258) - b - b = 1\,000$; $(a - 258) - b = 2\,014 - 258 = 1\,756$; $1\,756 - b = 1\,000 \Rightarrow b = 1\,756 - 1\,000 = 756 \Rightarrow b = 756$; $a - 756 = 2\,014 \Rightarrow a = 2\,014 + 756 \Rightarrow a = 2\,770$. **25.** a) Dacă $a + 3b = 26 \Rightarrow 2(a + 3b) = 52 \Rightarrow 2a + 6b = 52$; $b + 2c = 29 \Rightarrow 3(b + 2c) = 87 \Rightarrow 3b + 6c = 87 \Rightarrow 2a + 9b + 6c = 139$; b) Cum $a + 3b = 26 \Rightarrow 3(a + 3b) = 78 \Rightarrow 3a + 9b = 78$; $b + 2c = 29 \Rightarrow 2(b + 2c) = 58 \Rightarrow 2b + 4c = 58 \Rightarrow 3a + 11b + 4c = 136$. **26.** $555 : 5 = 111$; $555 = \underbrace{5+5+...+5}_{111 \text{ de } 5}$; $(555 - 55) : 5 = 500 : 5 = 100$; $555 = 55 + \underbrace{5+5+...+5}_{100 \text{ de } 5}$; $(555 - 2 \cdot 55) : 5 = (555 - 110) : 5 = 445 : 5 = 89$; $555 = 55 + 55 + \underbrace{5+5+...+5}_{89 \text{ de } 5}$; $(555 - 3 \cdot 55) : 5 = (555 - 165) : 5 = 390 : 5 = 78$; $555 = 55 + 55 + 55 + \underbrace{5+5+...+5}_{78 \text{ de } 5}$; $(555 - 4 \cdot 55) : 5 = (555 - 220) : 5 = 335 : 5 = 67$; $555 = 55 + 55 + 55 + 55 + \underbrace{5+5+...+5}_{67 \text{ de } 5}$; ...; $(555 - 10 \cdot 55) : 5 = (555 - 550) : 5 = 5 : 5 = 1$; $555 = \underbrace{55+55+...+55}_{10} + 5$. Sunt 11 moduri posibile. **27.** $57 + 82 + 89 = 228$; $5\,928 - 228 = 5\,700$; $5\,700 : 3 = 1\,900$ este numărul care se scade; $57 + 1\,900 = 1\,957$; $82 + 1\,900 = 1\,982$; $89 + 1\,900 = 1\,989$.

28. a) $A = 123...9$;

23...91
34...12
45...23
56...34
67...45
78...56
89...67
91...78

b) $S = (123...9 + 23...91 + 31...12 + ... + 91...78) - 123...9$; $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$; $S = 4876543206$.

$$\begin{array}{r} 123456789\,+ \\ 234567891 \\ 345678912 \\ \vdots \\ 912345678 \\ \hline 4999999995\,- \\ 123456789 \\ \hline 4876543206 \end{array}$$

29. a) $a = 3n + 1$; $3 \cdot 0 + 1, 3 \cdot 1 + 1, 3 \cdot 2 + 1, 3 \cdot 3 + 1, ..., 3 \cdot 671 + 1$; 1, 4, 7, 10, ..., 2 014; b) $b = 2p$; $2 \cdot 0$; $2 \cdot 1$; $2 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; ..., $2 \cdot 1\,007$; 0, 2, 4, 6, ..., 2 014; c) Termenii comuni sunt numerele pare din primul şir; numărul termenilor comuni este $672 : 2 = 336$.

4. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. a) 306; b) 59; c) 1 568; d) 210. **2.** a) 763; b) 1 886; c) 353; d) 394. **3.** Adi 300 lei; Andreea 500 lei; Alexandra 800 lei. **4.** a) 1 190; b) 5 400. **5.** Cum $y = x + 46$ şi $z = x + 21 \Rightarrow x < z < y$. **6.** a) 462; b) 188.

TESTUL 2

1. a) 2 090; b) 438; c) 863; d) 110. **2.** $a = 400$; $b + c - 19 = 100$ și $a + b + c - 500 = 19$. **3.** 1 982 și 1 989. **4.** 4 442. **5.** 495. **6.** x poate fi 1 sau 3. Suma este 7 444.

TESTUL 3

1. a) 1 120; b) 100. **2.** 200. **3.** $a = 2\ 191$; $b = 1\ 946$; $c = 169$; $a + b - c = 3\ 968$; $a - b + c = 414$. **4.** a) 35; b) 41; c) 17. **5.** 81 de soluții (un număr este 80, iar celălalt orice număr natural mai mic sau egal cu 80). **6.** 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70.

TESTUL 4

1. a) 4 693; b) 1 686. **2.** Mihaela 80 lei, Costin 50 lei, iar Cristina 30 lei. **3.** 210. **4.** 5 155. **5.** a) 14; b) 14. **6.** $\overline{ab} = 36 + \overline{ba}$ implică $a = b + 4$; $\overline{ab}$ poate fi: 51, 62, 73, 84, 95.

TESTUL 5

1. $a = 175$; $b = 523$. **2.** $9 = 9 + 0 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4 = 4 + 5 = 3 + 6 = 2 + 7 = 1 + 8 = 0 + 9$ (10 soluții). **3.** 1 200. **4.** 22. **5.** 2 000. **6.** a) 251; b) 292. **7.** a) 19; b) 19. **8.** $\overline{ab} = 53$. **9.** 1 017, 1 027, 1 037.

TESTUL 6

1. $a = 75$; $b = 373$. **2.** $11 = 0 + 11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 6 + 5 = 7 + 4 = 8 + 3 = 9 + 2 = 10 + 1 = 11 + 0$ (12 soluții). **3.** 900. **4.** 21. **5.** 775. **6.** a) 323; b) 230. **7.** a) 23 și 49; b) 23. **8.** $\overline{ab} = 72$. **9.** 1 190, 1 200, 1 210.

5. Înmulțirea numerelor naturale; proprietăți. Factor comun

1. a) 170; b) 203 000; c) 100 700; d) 747; e) 72 560; f) 15 225; g) 1 668 634; h) 128 454; i) 268 470. **3.** a) 540; b) 1 305; c) 6 165; d) 105 930; e) 618 255. **4.** c) falsă și restul adevărate. **5.** a) 89 700; b) 9 037 000; c) 8 100; d) 67 200; e) 82 900; f) 9 300. **7.** 345. **8.** 120. **9.** 30. **10.** 15. **11.** 15. **12.** 31. **13.** 301. **14.** a) 261; b) 3 439; c) 0; d) 538. **15.** $a = 5$, $b = 7$. **16.** 7 și 8. **17.** 10 540. **18.** 25, 36, 49, 64, 81. **19.** 29 028. **20.** (1, 12); (2, 6); (3, 4); (12, 1); (6, 2); (4, 3). **21.** p(F); q(A). **23.** a) $2 \cdot 18$; b) $6 \cdot 6$; c) $2 \cdot 3 \cdot 6$. **24.** a) Efectuând calculele sau folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare se obține 1 500; b), c), d), e) se efectuează calculele sau se scoate factor comun și se obține: 1 680; 1 400; 18 900; 11 900. **25.** Deoarece $0 = 0 + 0$, rezultă $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$. Înmulțirea fiind distributivă față de adunare, rezultă $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Suma numărului $a \cdot 0$ cu numărul $a \cdot 0$ fiind $a \cdot 0$, punem în evidență unul dintre termenii sumei $a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$. **26.** Din $a \cdot b = a \cdot c$ rezultă $a \cdot b - a \cdot c = 0$. Folosind distributivitatea înmulțirii față de scădere, rezultă $a \cdot (b - c) = 0$. Dar un produs este 0 dacă și numai dacă unul dintre factorii produsului este 0. Cum $a \neq 0$, rezultă $b - c = 0 \Rightarrow b = c$. *Observație*: Proprietatea demonstrată este foarte importantă în calcule, fiind cunoscută sub denumirea de regula simplificării. **27.** Înmulțind inegalitatea $a \leq b$ cu c rezultă: $ac \leq bc$ (1). Înmulțind inegalitatea $c \leq d$ cu b rezultă: $bc \leq bd$ (2). Din (1) și (2), conform tranzitivității relației „$\leq$", rezultă $ac \leq bd$. **28.** a) 8; b) 225; c) 1; d) 78. **29.** 10. **30.** ($a = 1$; $b = 14$); ($a = 3$; $b = 4$); ($a = 5$; $b = 2$); ($a = 15$; $b = 0$). **31.** a) 320; b) 159; c) 161; d) 164. **32.** 6. **33.** 6. **34.** 2 244.

6. Împărțirea numerelor naturale

1. a) $583 = 7 \cdot 83 + 2$; b) deîmpărțit; împărțitor; cât; rest. **2.** a) calculul lui Alexandru; restul trebuie să fie mai mic decât împărțitorul; b) $8\ 606 = 34 \cdot 253 + 4$. **3.** 26 pagini. **4.** a) 1 225; b) $73\ 856 = 6 \cdot 12\ 309 + 2$; c) $100 = 11 \cdot 9 + 1$; d) 70 100; e) $432\ 800 = 144\ 266 \cdot 3 + 2$; f) 125; g) 20 415; h) 18 300; i) $100\ 000 = 14\ 285 \cdot 7 + 5$. **5.** a) 162; 108; 81; b) 852; 568; 426; c) 2 748; 1 832; 1 374; d) 46 944; 31 296; 23 472. **6.** a) 128; b) 75; c) 93; d) 299. **7.** 123; 157; 437; 837. **8.** a) $d = 18\ 458$; $f = 347$; $c = 53$; $r = 67$; b) $d = 1\ 071$; $f = 45$; $c = 23$; $r = 36$; c) $d = 923$; $f = 48$; $c = 19$; $r = 11$ sau $f = 19$; $c = 48$; $r = 11$; $d = 923$; d) $d = 2\ 386$; $f = 57$; $c = 41$; $r = 49$. **9.** a) 263; b) $7\ 044 = 242 \cdot 29 + 26$; c) $82\ 362 = 1\ 915 \cdot 43 + 17$; d) $1\ 044 = 28 \cdot 37 + 8$; e) 236; f) $288\ 860 = 3\ 008 \cdot 96 + 92$.

10. a) 930; b) 14 999. **11.** a) Alexandru are dreptate, deoarece restul trebuie să fie mai mic decât împărţitorul şi $23 > 19$; b) $r \in \{18, 17, 16, \ldots, 2, 1, 0\}$. **12.** a) $r = 19$; b) nu; c) $17 \cdot 23 + 19 = 17 \cdot 23 + 17 + 2 = 17(23 + 1) + 2 = 17 \cdot 24 + 2 \Rightarrow c = 24$ şi $r = 2$. **13.** Andreea dă celor 28 de colegi de clasă câte 6 timbre şi apoi constată că i-au mai rămas 5 timbre. Calculaţi câte timbre a avut Andreea. **14.** 10 min. **15.** a) 11; b) 7; c) 7; d) 11; e) a; f) a. **16.** a) 1 208; b) 33 048; c) 37. **17.** a) 108; b) 15. **18.** $59\,192 = 196 \cdot 302$. **19.** $9\,044 = 532 \cdot 17$. **20.** a) 11; b) 101; c) 1 001; d) $1\underbrace{00\ldots0}_{1006}1$. **21.** a) 1 009; b) 2 019. **22.** a) 12; b) 50. **23.** $\overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b}$. **24.** 101. **25.** $x = 24$. **26.** $a = 17$. **27.** a) 5; b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 14$. **28.** 12 zerouri. **29.** $a = 11$, $b = 13$, $c = 15$.

7. Teorema împărţirii cu rest. Reguli de calcul

1. a) 68; b) 926; c) 115; d) 85; e) 624; f) 205; g) 305; h) 21 140; i) 1 054; j) 504; k) 5 610; l) 29; m) 502; n) 308; o) 29. **2.** a) 73 (rest 14); b) 2 816 (rest 95); c) 143 (rest 9); d) 58 (rest 240); e) 58 (rest 24); f) 211 (rest 0); g) 197 (rest 60); h) 85 (rest 17); i) 40 (rest 88). **3.** False b), c) şi d). Adevărate a), e) şi f). **4.** a) ***Cazul 1.*** Dacă restul împărţirii şi împărţitorul sunt numere consecutive, atunci câtul creşte cu o unitate şi restul este 0. ***Cazul 2.*** Dacă restul împărţirii şi împărţitorul nu sunt numere consecutive, atunci câtul rămâne neschimbat şi restul creşte cu o unitate; b) ***Cazul 1.*** Dacă restul împărţirii este 1, atunci câtul rămâne neschimbat şi restul devine 0. ***Cazul 2.*** Dacă restul este diferit de 1, atunci câtul rămâne neschimbat şi restul se micşorează cu 1; c) Câtul rămâne neschimbat, iar restul se măreşte de acelaşi număr de ori. **5.** 402. **6.** 60, 61, 62, 63, 64. **7.** 8, 16, 24, 32, 40, 48. **8.** 7 226. **9.** 17 şi 4. **10.** a) „<"; b) „>"; c) „>"; d) „<". **11.** 65 şi 21. **12.** 87. **13.** 9 982 şi 1 033. **14.** 3 sau 4. **15.** $6 = 2 \cdot 3 + 0$; $7 = 2 \cdot 3 + 1$; $7 = 3 \cdot 2 + 1$; $8 = 3 \cdot 2 + 2$. **16.** 295 de pagini. **17.** Restul este 4. **18.** 6 391. **19.** 2. **20.** 1. **21.** $a = 4$ şi $b = 15$. **22.** Prin împărţire la 6 ar da resturile 4 şi 2. **23.** 10, 38, 84, 148, 230, 330, 448, 584. **24.** 19, 40, 63, 88. **25.** 2, 7 şi 9. **26.** 37. **27.** Deoarece prin împărţirea la 4 putem obţine patru resturi (0, 1, 2, 3), iar noi alegem cinci numere, rezultă că cel puţin două dintre ele dau acelaşi rest la împărţirea cu 4 (principiul cutiei).

8. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor

1. a) 48; b) 1 380; c) 1 708; d) 16 290; e) 217 136; f) 335. **2.** a) 75; b) 303; c) 168; d) 1 425. **4.** a) 105; b) 8 085; c) 8 643; d) 1 953; e) 1 221 696; f) 10. **5.** a) $17 \cdot 105 + 17 \cdot 95 = 1\,785 + 1\,615 = 3\,400$ sau $17 \cdot (105 + 95) = 17 \cdot 200 = 3\,400$; b) 600; c) 320; d) 2 400; e) 51 200; f) 20. **6.** a) 50; b) 3; c) 33 000. **7.** a) 250; b) 0; c) 20. **8.** a) 55; b) 100; c) 920; d) 90 836. **9.** a) 147; b) 27; c) 32; d) 576; e) 392. **10.** a) $c = 50$, $b = 60$, $a = 40$; b) $c = 7$, $b = 57$, $a = 27$. **11.** $x = 1\,200$; $y = 177$; $z = 400$; $t = 1\,062$; $x \cdot y = 212\,400$; $x + y = 1\,377$, iar $x \cdot y - (x + y) = 211\,023$. **12.** a) şi b) false, c) adevărată. **13.** $a = b$. **14.** a) 4 219; b) 8 229; c) 1 037 575. **15.** a) 11 667; b) 549; c) 655 278; d) 5 575; e) 463 900. **16.** Se consideră cazurile x par, adică $x = 2k$ şi x impar, adică $x = 2k + 1$ şi se calculează $(3x + 2)(x + 3)$. **17.** a) 8 068; b) $2\,018^2 = 4\,072\,324$; c) 200 100; d) 2 019. **18.** 21, indiferent de valorile lui a, b, c. **19.** a) 5; b) 0; c) 456. **20.** Avem $[756 - (x + 2) : (x + 2) - 1] : 377 = 754 : 377 = 2$. **21.** 45.

9. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. a) 13; b) 21 735; c) 363; d) 23. **2.** a) 12; b) 27; c) 1 334; d) 11. **3.** $D = \hat{I} \cdot C + R$, $R < \hat{I} \Rightarrow \Rightarrow R = 14$ şi $D = 15 \cdot 11 + 14 = 179$. **4.** a) 21; b) 38; c) 59; d) 850. **5.** 1 002. **6.** 16; 61; 23; 32.

TESTUL 2

1. 294. **2.** a) 430; b) 324 000. **3.** 200. **4.** 28. **5.** 100. **6.** 61; 72; 83; 94.

TESTUL 3

1. 71 şi 27. **2.** 750. **3.** 30. **4.** 14. **5.** 16 ani şi 48 de ani. **6.** 731.

TESTUL 4

1. 20 lei. **2.** 202. **3.** 49. **4.** 4 şi 5. **5.** 9 şi 9. **6.** $\overline{abc} \cdot 1001$.

TESTUL 5

1. 33 300. **2.** $x = 7$. **3.** $x \leq 3$. **4.** 264. **5.** 32. **6.** 450 km. **7.** a) $2\,537 = 15 \cdot 169 + 2$; b) $4\,821 = 46 \cdot 103 + 83$. **8.** 7 şi 8. **9.** 1 007.

TESTUL 6

1. 34 200. **2.** $x = 5$. **3.** $x \leq 5$. **4.** 234. **5.** 11. **6.** 366 km. **7.** a) $2\,357 = 19 \cdot 124 + 1$; b) $2\,843 = 117 \cdot 24 + 35$. **8.** 8 şi 9. **9.** 1 006.

10. Puteri cu exponent natural ale unui număr natural

1. a) 16; 27; 343; 64; 1; 1; 625; 2 019; 1 331; 144; 1 000; 10 201; 289; 125; 128; 2 025; 4 489; 121; b) 33; 1; 400; 16; 62; c) 2^2; 2^6; 2^4; 2^0; 2^3; 2^4; 2^9; 2^{30}; d) 3^0; 3^4; 3^2; 3^{15}; 3^{32}; 3^{56}. **2.** a) 2^6; b) 5^{19}; c) 3^{10}; d) 2^{22}; e) 47^8; f) 5^{10}. **3.** a) 248; b) 16; c) 26; d) 32; e) 25; f) 140; g) 31; h) 38; i) 139. **4.** a) 64; b) 25; c) 119; d) 2 500; e) 1 600; f) 34; g) 32; h) 189; i) 64. **5.** a) 2^{38}; b) 3^{187}; c) 7^{103}; d) 2^8; e) 5^{36}; f) 2^{34}; g) 10^{180}; h) 2^{167}; i) 3^{18}; j) $3^{14} \cdot 5^{24}$; k) $2^{40} \cdot 3^3$. **6.** a) 1; b) 1. **7.** a) A; b) A; c) A. **8.** a) A; b) A. **9.** $x = 3$; $y = 4$ sau $x = 4$; $y = 3$. **10.** $x = 2$; $y = 3$; $z = 4$ şi toate combinaţiile posibile (permutări). **11.** $x = 4$; $y = 3$; $z = 2$. **12.** a) $x = 3$; b) $x = 3$; c) $x = 1$. **14.** $a = b$ (A). **16.** $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$. **17.** a) 342; b) 0; c) 460; d) 5. **18.** a) 2; b) 6; c) 2; d) 1; e) 3; f) 5; g) 128; h) 0. **19.** a) $4^4 \cdot (4 + 4^4 - 1)$; b) $3^3 \cdot (1 + 2^5 \cdot 3^2 + 3^1)$; c) $x^2 \cdot (1 + x + x^2)$; d) $5^3 \cdot (6 + 5 \cdot 7)$; e) $xy \cdot (3x + 2y + 4)$; f) $7^2 \cdot (7^3 \cdot x + 7^2 \cdot y + z)$. **20.** a) 1; b) 3; c) 3; d) 2. **21.** a) 1; b) 224; c) 21 000; d) 5^{10}. **22.** a) 6; b) 49; c) 1 000; d) 1; e) 157; f) 1. **23.** $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$. **24.** $a = b = c = 2$. **25.** Se înlocuieşte $\overline{aaa}$, respectiv $\overline{111bbb}$ cu $100 \cdot a + 10 \cdot a + a$ ... şi se ţine cont că $a = b + 1$.

11. Compararea şi ordonarea puterilor. Reguli de comparare

1. a) $2^{17} < 2^{31}$; b) $5^{83} < 5^{101}$; c) $101^{23} < 101^{75}$; d) $5^{23} < 7^{23}$; e) $5^{47} < 11^{47}$; f) $2^{38} < 3^{38}$; g) $5^{17} < 7^{21}$; h) $2^{13} < 3^{19}$; i) $23^{41} < 41^{59}$; j) $1^{107} = 1^{203}$; k) $0^{43} = 0^{83}$. **2.** a) $2^{53} < 4^{29}$; b) $9^{51} < 3^{103}$; c) $8^{31} < 4^{47}$; d) $9^{24} = 27^{16}$; e) $25^{61} < 125^{43}$; f) $100^{19} < 10^{43}$. **3.** a) $2^{30} < 3^{20}$; b) $5^{34} < 3^{51}$; c) $3^{93} < 2^{155}$; d) $3^{131} = 3^{74} \cdot 3^{57} = 9^{37} \cdot 27^{19}$ şi $2^{111} \cdot 5^{38} = 8^{37} \cdot 25^{19}$, de unde $2^{111} \cdot 5^{38} < 3^{131}$; e) $10^{74} < 6^{123}$. **4.** $2^{302} < 3^{203}$. **5.** $2^{87} + 2^{86} + 2^{85} > 5^{35} + 5^{34}$. **6.** $2^{3n+1} - 8^n < 3^{2n+1} - 9^n$. **7.** a) >; b) <; c) =; d) =; e) =. **8.** a) $2^{2^3} > \left(2^2\right)^3$; b) $3^{2^3} > \left(3^2\right)^3$; c) $3^{38} > 2^{59} - 2^{58} - 2^{57}$; d) $9^{40} = 81^{20}$. **9.** 2^2, 8, 4^2, 2^5, 2^7. **10.** a) $9^{16} < (3^9)^4 < (3^{13})^3 \Leftrightarrow 3^{32} < 3^{36} < 3^{39}$; b) $\left(\left(2^2\right)^5\right)^3 < 2^6 \cdot 2^{11} \cdot 2^{14} < (2^2)^{30} \Leftrightarrow 2^{30} < 2^{31} < 2^{60}$. **11.** a) $3^{12} > 2^{18} > 7^5$; b) $64^{17} > 36^{17} > 27^{17} \Leftrightarrow 2^{102} > 6^{34} > 3^{51}$; c) $32^{16} > 25^{16} > 8^{16} \Leftrightarrow 16^{20} > 25^{16} > 2^{48}$; d) $9^2 \cdot 9^{26} > 9 \cdot 9^{26} > 3 \cdot 7^{26} \Leftrightarrow 9^{28} > 3^{54} > 7^{26}(7 - 4)$. **12.** $3^9 < 33^3 < 3^{3^3} < 3^{33}$. **13.** a) 3^{40}, 2^{60}, 7^{20}, 25^{10}; b) 3^{2x}; 2^{3x}; 5^x. **14.** a). **15.** a) $x < 7$; b) $x = 0$; c) $x < 6$; d) nu are soluţie; e) $x = 2$; f) $x < 4$; g) $x = 0$; h) $x = 1$; i) $x = 2$. **16.** a) egale; b) $3^{39} - 9^{19} = 3^{39} - (3^2)^{19} = 3^{39} - 3^{38} = 3^{38}(3 - 1) = 3^{38} \cdot 2 = 2 \cdot (3^2)^{19} > 2 \cdot (2^3)^{19} = 2 \cdot 2^{57} = 2^{58}$. **17.** a) $x < y$; b) $x < y$. **18.** a) $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{50} < 2^{2975}$; b) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot \ldots \cdot 5^{50} < 2^{2975}$. **19.** $A = B$. **20.** Are 10 cifre. **21.** 80.

12. Pătratul şi cubul unui număr natural. Pătrate perfecte

1. $4^3 = (2^3)^2$; $4^0 = 1^2$; $81 = 9^2$; $3^{12} = (3^6)^2$; $9^{2003} = (3^{2003})^2$; $5^{2p} = (5^p)^2$; $10^{6p} = (10^{3p})^2$. **2.** $27 = 3^3$; $64 = 4^3$; $5^{48} = (5^{16})^3$; $7^{225} = (7^{75})^3$; $11^{2001} = (11^{667})^3$. **3.** a) $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$ etc.; b) $1^3 = 1$, $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$. **4.** 2017^2. **5.** $\underbrace{2 + 2^1} + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 \cdot 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \underbrace{2^2 + 2^2} + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 \cdot 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \underbrace{2^3 + 2^3} + 2^4 + 2^5 = 2 \cdot 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^4 + 2^4 + 2^5 = 2 \cdot \underbrace{2^4 + 2^5} = 2^5 + 2^5 = 2 \cdot 2^5 = 2^6 = (2^3)^2 = 8^2$, care este pătrat perfect. Se putea arăta şi prin calcul direct. **6.** $10^2 = 6^2 + 8^2$; $13^2 = 12^2 + 5^2$. **7.** $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$. **9.** 64. **10.** $U(2^{2018}) = U(2^{4 \cdot 504+2}) = U(2^2) = 4$; $U(3^{2019}) = U(3^{4 \cdot 504+3}) = U(3^3) = 7$; $U(4^{2017}) = U(4^{2 \cdot 1008+1}) = U(4^1) = 4$; $U(5^{2020}) = 5$. **11.** Folosind formula $1 + 2 + 3 + \ldots + n = [n(n + 1)] : 2$, se calculează

$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2n + 1) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) = (2n + 1)(2n + 2) : 2 - 2(1 + 2 + \ldots + n) = (2n + 1)(n + 1) - 2n(n + 1) : 2 = (2n + 1)(n + 1) - n(n + 1) = (n + 1) \cdot (2n + 1 - n) = (n + 1)(n + 1) = (n + 1)^2$, adică $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n + 1 = (n + 1)^2$ (este pătrat perfect) și avem: a) $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot 5 + 1) = (5 + 1)^2 = 6^2$; b) $1 + 3 + \ldots + (2 \cdot 9 + 1) = (9 + 1)^2 = 10^2$. **12.** a) $U(2^{1981}) = 2$; b) $U(3^{483}) = 7$; c) $U(97^{143}) = 3$; d) $U(1998^{781}) = 8$; e) $U(3^{83} + 8^{68}) = 3$. **13.** Ultima cifră este 8. **14.** Ultima cifră este 7. **15.** Se scrie $5^{17}(5^{17} + 1)$ ș.a.m.d. **16.** $(5^{47})^2 \cdot (7^{17})^2 = (5^{47} \cdot 7^{17})^2$ = pătrat perfect. **17.** $50 \cdot 51$ este cuprins între 50^2 și 51^2. **18.** 50^2 = pătrat perfect. **19.** $n(n + 1)$ este cuprins între n^2 și $(n + 1)^2$. **20.** n^2. **21.** $6^n \cdot 5$ se împarte la 5 și nu se împarte la 25. **22, 23, 24.** Se află ultima cifră. **25.** Prin împărțire la 4 dă restul 2. **26.** a) 100, 144, 400, 900; b) 225, 441; c) 484, 676, 121. **27.** 169, 196, 961. **28.** Numărul $\overline{xx5} = 225$ și $2x + 5 = 9$, $x^2 + 5 = 9$, $5x - 1 = 9$ și deci sunt pătrate perfecte. **29.** Ultima cifră este 2, deci nu este pătrat perfect. **30.** a) $n = 6$; b) $n = 4$.

13. Operații cu puteri

1. a) 4; b) 4; c) 8; d) 8; e) 3^7; f) 4; g) 1; h) 5; i) 5. **2.** a) 33 700; b) 10. **3.** $x = 1$, $y = 181$ și $x^y + y^x = 1^{181} + 181^1 = 182$. **4.** a) 128; b) 206. **5.** a) 0; b) 4; c) 4; d) 24; e) 0; f) 1. **6.** a) 7; b) 2 000; c) 0; d) 6; e) 12. **7.** a) 7; b) 405; c) 8; d) 1; e) 10; f) 1; g) 1. **8.** Ultima cifră a lui a^2 poate fi: 0, 1, 4, 5, 6, 9, iar a numărului $3a^2 + a$ poate fi: 0, 2, 4. **9.** a) 8, 2, 6; b) 1, 9, 1; c) 6; d) 9. **10.** a) adevărată; b) falsă. **11.** a) 0; b) 1. **12.** a) 169; b) 1 880; c) 383; d) 19; e) 1; f) 12; g) 11; h) 72^n. **13.** 4. **14.** a) 20; b) 48. **15.** a) 4 zerouri; 5 zerouri; b) 11 zerouri; c) 6. **16.** $1001\underbrace{99...99}_{n \text{ cifre}}$. **17.** $x = 6$, $y = 5$ și $(x - y)^{2000} = 1$.

18. $A = 201002\underbrace{99...99}_{n-3 \text{ cifre}}$. **19.** Se folosește faptul că $1 + 3 + 3^2 = 13$. **20.** a) $n = 54$; b) $n = 3$. **21.** Nu, deoarece $A = M_4 + 2$. **22.** a) 6; b) 1; c) 0. **23.** 1. **24.** a) 6; b) 5; c) 1. **25.** Câtul este $18^n + 7$, iar restul este 2. **26.** $a = (2^6 - 1) : 3^2 - (1 + 4) = (64 - 1) : 9 - 5 = 63 : 9 - 5 = 7 - 5 = 2$ și $b = 3^4 \cdot 11^4 - 33^4 + 1 = 1 \Rightarrow (a - b)^{2019} = 1$. **27.** $a = 10$, $b = 5$, $c = 2$ și a) 100; b) 3 375; c) 1 125; d) 117; e) 27. **28.** $2^5 + 2^3 + 2 + 2^0$; $2^5 + 2^2 + 2^0$; $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$. **29.** $\overline{abc} - \overline{cba} = 9 \cdot 11(a - c)$, iar $a - c \neq 11$. **30.** $a \in \{5, 6\}$, $b \in \{6, 5\}$. **31.** a) $3^{29} - 3^{27} = 3^{27}(3^2 - 1) = 3^{27} \cdot 8 = (3^9)^3 \cdot 2^3 = (3^9 \cdot 2)^3$ = cub perfect; b) $6^2 = 36 = 1 + 8 + 27 = 1^3 + 2^3 + 3^3$; c) $6^{29} = 6^2 \cdot 6^{27} = (1^3 + 2^3 + 3^3) \cdot (6^9)^3 = 1^3 \cdot (6^9)^3 + 2^3 \cdot (6^9)^3 + 3^3 \cdot (6^9)^3 = (6^9)^3 + (2 \cdot 6^9)^3 + (3 \cdot 6^9)^3$. **32.** Dacă $n = 2k$, k număr natural ($k \in \mathbb{N}$), $2^n \cdot 5^{n+1} = 2^{2k} \cdot 5^{2k+1} = 5 \cdot 2^{2k} \cdot 5^{2k} = (1 + 4) \cdot (2^k \cdot 5^k)^2 = (1^2 + 2^2) \cdot (2^k \cdot 5^k)^2 = (2^k \cdot 5^k)^2 + (2 \cdot 2^k \cdot 5^k)^2 = (2^k \cdot 5^k)^2 + (2^{k+1} \cdot 5^k)^2$. Dacă $n = 2k + 1$, k număr natural ($k \in \mathbb{N}$), $2^n \cdot 5^{n+1} = 2^{2k+1} \cdot 5^{2k+2} = (1 + 1) \cdot (2^k \cdot 5^{k+1})^2 = (2^k \cdot 5^{k+1})^2 + (2^k \cdot 5^{k+1})^2$. **33.** a) $2^x \cdot 5^y = 2\,000$; $2\,000 = 2 \cdot 1\,000 = 2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 5^3 \Rightarrow x = 4$ și $y = 3 \Rightarrow x + y = 4 + 3 = 7$; b) $2^n + 2^{n+1} = 2^n(1 + 2) = 2^n \cdot 3 \Rightarrow$ restul este 0; $(2^n \cdot 3) : 3 = 2^n$. **34.** $a = 2^{2973} \cdot 3^2 - 8^{990} \cdot 48 - 2^{2974} = 2^{2973} \cdot 9 - (2^3)^{990} \cdot 16 \cdot 3 - 2^{2974} = 2^{2973} \cdot 9 - 2^{2970} \cdot 2^4 \cdot 3 - 2^{2974} = 2^{2973} \cdot 9 - 2^{2974} \cdot 3 - 2^{2974} = 2^{2973}(9 - 6 - 2) = 2^{2973}$; $b = 3^{1982} \cdot 4 - 3^{1980} \cdot 18 - (3^{991})^2 = 3^{1982} \cdot 4 - 3^{1980} \cdot 9 \cdot 2 - 3^{1982} = 3^{1982} \cdot 4 - 3^{1980} \cdot 3^2 \cdot 2 - 3^{1982} = 3^{1982} \cdot 4 - 3^{1982} \cdot 2 - 3^{1982} = 3^{1982}(4 - 2 - 1) = 3^{1982}$; $c = 7^{993} + 9 \cdot 7^{991} - 7^{992} \cdot 8 - 7^{991} = 7^{991}(7^2 + 9 - 7 \cdot 8 - 1) = 7^{991}(49 + 9 - 56 - 1) = 7^{991}$; $a = 2^{2973} = 2^{991 \cdot 3} = (2^3)^{991} = 8^{991}$; $b = 3^{1982} = 3^{2 \cdot 991} = (3^2)^{991} = 9^{991}$; $c = 7^{991}$; $7^{991} < 8^{991} < 9^{991} \Rightarrow b > a > c$. **35.** $A = 3(n + 2) + 6(3n + 1) - n = 3n + 6 + 18n + 6 - n = 20n + 12$; $U(20n) = 0 \Rightarrow U(20n + 12) = 2 \Rightarrow U(A) = 2 \Rightarrow A$ nu este pătrat perfect.

14. Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2

1. a) 2571; b) 723; c) 52; d) 35753; e) 750; f) 2053; g) 57020; h) 30530057; i) 1001. **2.** a) $\overline{abc}$; b) $\overline{abcd}$; c) $\overline{ab}$; d) $\overline{aabcda}$; e) $\overline{aba}$; f) $\overline{a0bc}$; g) $\overline{abc}$; h) $\overline{aaa}$; i) $\overline{ab00}$; j) $\overline{ababc}$; k) $\overline{aabc}$. **3.** a) $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$; b) $2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7$; c) $5 \cdot 10 + 3$; d) $2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$; e) $7 \cdot 10^2 + 5$; f) $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10$; g) $2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10 + 5$; h) $7 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2$.

4. a) $100a + 10b + c$; b) $10a + b$; c) $1000a + 100b + 10c + d$; d) $100a + 10a + b$; e) $1000a + 100a + 10a + a$; f) $100a + b$; g) $10000a + 1000b + 10c + d$; h) $100000a + 10000a + 1000b + 10c$; i) $1000a + 100b + 10a + b$; j) $1000000a + 10000b + c$. **5.** a) 37; b) 523; c) 5271; d) 30142700; e) 7050003000. **6.** a) $10111_{(2)}$; b) $100101_{(2)}$; c) $101110_{(2)}$; d) $11000_{(2)}$; e) $1001000_{(2)}$; f) $1111101_{(2)}$. **7.** a) 3; b) 11; c) 12; d) 25; e) 23; f) 109; g) 19. **8.** a) $222_{(3)} < 444_{(5)} < 777_{(8)}$; b) $1011_{(2)} = 11_{(10)}$; $312_{(4)} = 54_{(10)}$; $2021_{(3)} = 61_{(10)} \Rightarrow 1011_{(2)} < 312_{(4)} < 2021_{(3)}$; c) $3185_{(9)} = 2345_{(10)}$; $445_{(7)} = 229_{(10)}$; $241_{(5)} = 71_{(10)} \Rightarrow 241_{(5)} < 445_{(7)} < 3185_{(9)}$. **9.** a) $x = 5$; b) $x = 3$; c) $x = 7$; d) $x = 5$; e) $x = 3$; f) $x = 5$. **10.** $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$. **11.** $n = 1 \Rightarrow 5730$; $n = 3 \Rightarrow 573000$; $n = 5 \Rightarrow 57300000$. **12.** 7. **13.** $x = 4$. **14.** $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$, care nu poate fi pătrat perfect. **15.** $2^{37} + 2^{19} > 2^{29} + 2^{23} + 2^{15}$. **16.** Falsă. **17.** $2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$; $2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$; $2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^1$. **18.** a) $x = 3$; b) $x = 3$. **19.** a) $15_{(10)}$; b) $53_{(10)}$. **20.** a) $x = 2$; b) $x = 8$. **21.** $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c) \Rightarrow 111 \mid (\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab})$. **22.** $\overline{x9x} + \overline{x6} = 100x + 90 + x + 10x + 6 = 111x + 96$; $\overline{xx9} + \overline{8x} + 7 = 100x + 10x + 9 + 80 + x + 7 = 111x + 96 \Rightarrow (\overline{x9x} + \overline{x6}) \mid 2(\overline{xx9} + \overline{8x} + 7)$. **23.** $(a, b, c) \in \{(3, 4, 0); (1, 1, 2); (4, 5, 2); (2, 2, 4)\}$. **24.** $x = 6$.

15. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. a) 49; b) 121; c) 289. **2.** a) 5^8 cu 2^{16}, adică 5^8 cu $(2^2)^8 = 4^8 \Rightarrow 5^8 > 2^{16}$; b) $25^7 < 27^7 \Rightarrow 5^{14} < 3^{21}$. **3.** a) 2; b) 0; c) 9. **4.** a) 1001; b) 101011; c) 10001001. **5.** a) 101011110; b) 101100; c) 10101. **6.** $U(n) = 8$. **7.** $2\,015 + 2 \cdot (2\,014 \cdot 2\,015) : 2 = 2\,015 + 2\,014 \cdot 2\,015 = 2\,015(1 + 2\,014) = 2\,015^2$, adică pătrat perfect. **8.** $x = 12$. **9.** 300, 305, 310, 315, 320, ..., 385, 390, 395. Suma este 6 950.

TESTUL 2

1. a) 64; b) 125; c) 343. **2.** a) 1; 1; 289; 243; b) 58; c) 1. **3.** Ultima cifră a numărului este 2 şi, ca urmare, nu poate fi pătrat perfect. **4.** a) 6; b) 14; c) 109. **5.** $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 37 \cdot 3 \cdot (a + b + c) \Rightarrow S \vdots 37$. **6.** 4. **7.** 0 şi 1. **8.** 0. **9.** 4.

TESTUL 3

1. a) 361; b) 81; c) 3; d) 4; e) 2; f) 2. **2.** a) $11 \cdot 7^3 > 7^4$; b) $(3^2)^{17}$ cu $(2^3)^{17}$, adică 9^{17} cu $8^{17} \Rightarrow 3^{34} > 2^{51}$; c) $4^{75} > 2^{145}$; d) $10^6 < 2^6 \cdot 5^7$. **3.** $14^2 = 196$; $24^2 = 576$; $7^2 = 49$ şi $3^3 = 27$; $5^3 = 125$; $7^3 = 343$. **4.** $x = 3$. **5.** 7, 26 şi 63. **6.** $a = 24$, $b = 1$ şi $b^a = 1^{24} = 1$. **7.** $a = b + 2$ sau $a = b + 8$. **8.** 7. **9.** a) 3; b) 9; c) 1.

TESTUL 4

1. a) 140; b) 100. **2.** a) 108; b) $2\,025^{2018}$; c) 7; d) 1 875. **3.** $x = 9$. **4.** Ultima cifră a puterilor numărului 3 se repetă din 4 în 4 şi $U(3^{2018}) = U(3^{504 \cdot 4+2}) = U(3^2) = 9$; $U(5^{2019}) = 5$; $U(1^{2017}) = 1$ şi $U(3^{2018} + 5^{2019} + 1^{2017}) = U(9 + 5 + 1) = U(15) = 5$. **5.** $1011_{(2)}$. **6.** 12. **7.** a) $9^7 = (3^7)^2$ şi $4^5 = (2^5)^2$; b) $(7^2 \cdot 2)^3 = 98^3$. **8.** Egalitatea se verifică. **9.** $n = 100^2$.

TESTUL 5

1. 121, 144, 169, 196. **2.** 16; 2^6; 3^4; $2^4 + 9$; $4(3^2 + 3^3)$; 121. **3.** 1 000, 8; 5^{3n}; $2 \cdot 9 + 3^2$; $3^3 + 7 \cdot 3^5$. **4.** $U(2^1) = 2$; $U(2^2) = 4$; $U(2^3) = 8$; $U(2^4) = 6$; $U(2^5) = 2$. Ultima cifră a puterilor numărului 2 se repetă din 4 în 4 şi $U(2^{2020}) = 6$; $U(6^{2019}) = 6$; $U(2\,018^0) = 1$ şi $U(2^{2020} + 6^{2019} + 2\,018^0) = U(6 + 6 + 1) = U(13) = 3$. **5.** a) $152_{(10)}$; b) $10011000_{(2)}$. **6.** 16, 25, 36, 49, 64, 81. **7.** a) 13; b) 1 110; c) 18; d) 30; e) 5; f) 1. **8.** a) 288; b) 224; c) 12; d) 2. **9.** a) 1; b) 224; c) 21 000; d) 5^{10}.

TESTUL 6

1. a) $2^{15} < 2^{51}$; b) $5^{101} > 5^{11}$; c) $11^{23} < 11^{73}$; d) $1^{101} = 1^{1001}$; e) $(7^4)^0 < 7^{4^0}$; f) $3^{47} < 3^{74}$. **2.** a) $2^4 < 3^4$; b) $11^7 < 17^7$; c) $101^2 < 110^2$; d) $27^{101} > 17^{101}$; e) $48^4 < 84^4$; f) $23^7 < 32^7$. **3.** $2^2 < 4^2 < 2^5 < 2^7$. **4.** a) $x = 2$;

b) $x = 5$; c) $x = 6$. **5.** $2_{(10)} = 10_{(2)}$; $2^2_{(10)} = 100_{(2)}$; $2^3_{(10)} = 1000_{(2)}$; ...; $2^n_{(10)} = \underbrace{1000...0}_{n \text{ zerouri}}{}_{(2)}$. **6.** $(3^3)^3 < 33^3 <$ $< 3^{3^3} < 3^{33}$. **7.** a) $x = 18$; b) $x = 7$; c) $x = 10^5$; d) $x = 16$; e) $x = 4$; f) $x = 0$. **8.** Prima egalitate se verifică, a doua nu. **9.** Cum $U(5x) = \{0, 5\}$, rezultă $U(5x + 2) = \{2, 7\}$, deci nu e pătrat perfect.

16. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

1. 11; 12; 13; 14. **2.** laleaua 3 lei și crizantema 5 lei. **3.** 23 și 161. **4.** 75 de timbre, 40 de timbre și 85 de timbre. **5.** 13 băieți și 16 fete. **6.** 94 și 141. **7.** 30, 60 și 80. **8.** 140 lei. **9.** 10 kg. **10.** 48 ore. **11.** 4 h și 40 min. **12.** 18 ani și 54 de ani. **13.** 20 și 140. **14.** 110 bilete de 4 lei și 90 de bilete de 6 lei. **15.** 26 de caiete de 2 lei și 37 de caiete de 4 lei. **16.** 50 lei. **17.** 18 și s-au luat 6 mere, 4 mere și 4 mere. **18.** a) 7224; b) 2010 și 8163. **19.** 8 zile și 12 zile. **21.** $(2013^0 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}) \cdot x = 2^{101}$; $2013^0 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$; $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$; $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{101} \Rightarrow 2S - S = 2^{101} - 1 \Rightarrow S = 2^{101} - 1 \Rightarrow 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} =$ $= 2^{101} - 1 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{100} = 2^{101} \Rightarrow 2^{101} \cdot x = 2^{101} \Rightarrow x = 1$. **22.** a) $(x - 1)(y + 1) =$ $= 10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10 \cdot 1 \Rightarrow x = 2, y = 9$ sau $x = 3, y = 4$ sau $x = 6, y = 1$ sau $x = 11, y = 0$; b) $x + y = xy \Rightarrow \begin{cases}(x+y) \vdots x \\ (x+y) \vdots y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \vdots x \\ x \vdots y\end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow x + x = x^2 \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) =$ $= 0 \Rightarrow x = y = 0$ sau $x = y = 2$; c) $xy - 2y + 3x = 21 \Rightarrow xy - 2y + 3x - 6 = 21 - 6 \Rightarrow y(x - 2) +$ $+ 3(x - 2) = 15 \Rightarrow (x - 2)(y + 3) = 15 \Rightarrow 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \Rightarrow x = 3, y = 12$ sau $x = 5, y = 2$ sau $x =$ $= 7, y = 0$. **23.** $4^n \cdot 81 + 2^{2n} \cdot 56 - 2^{2n} \cdot 56 \le 12^4 \Rightarrow 2^{2n} \cdot 81 + 2^{2n} \cdot 56 - 2^{2n} \cdot 56 \le 12^4$; $2^{2n} \cdot 3^4 \le$ $\le (2^2 \cdot 3)^4 \Rightarrow 2^{2n} \cdot 3^4 \le 2^8 \cdot 3^4 \Rightarrow 2^{2n} \le 2^8 \Rightarrow 2n \le 8 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **24.** $2^{2013} < 2x - 2 < 2^{2014} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^{2013} + 2 < 2x < 2^{2014} + 2 \Rightarrow 2(2^{2012} + 1) < 2x < 2(2^{2013} + 1) \Rightarrow 2^{2012} + 1 < x < 2^{2013} + 1$, deci x este egal cu: $2^{2012} + 2$, $2^{2012} + 3$, ..., sau 2^{2013}.

17. Media aritmetică a două numere naturale cu rezultat număr natural

1. a) 13; b) 21; c) 355; d) 425. **2.** a) 11; b) 10; c) 12; d) 15. **3.** 53. **4.** 7. **5.** 18°C. **6.** 12. **7.** 225. **8.** 10. **9.** 64. **10.** 16. **11.** a) $6x$; b) $30x$. **12.** $x = 8$. **13.** 10. **14.** 16. **15.** 12 și 36. **16.** 10; 40; 13. **17.** $a = b = c$. **18.** 49. **19.** 8. **20.** $2^{17} \cdot 5$. **21.** 1, 108. **22.** 25. **23.** 540. **24.** $a = 19, b = 15, c = 31$. **25.** 216. **26.** $x = y = 9$.

18. Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. $x = 5$. **2.** $x = 4$; $x = 7$ sau $x = 10$. **3.** a) $x = 561$; b) $x = 181$. **4.** a) $x = 6$; b) $x = 18$. **5.** $x = 0$ sau $x = 1$. **6.** $x + 1 \le 4 \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = 2$ sau $x = 3$. **7.** $x = 9$. **8.** 28; 29; 30; 31. **9.** 3 probleme.

TESTUL 2

1. $x = 3$. **2.** 3. **3.** a) $x = 1\,056$; b) $x = 68$. **4.** a) $x = 4$; b) $x = 3$. **5.** $x < 25$. **6.** $x = 0, x = 1, x = 2$ sau $x = 3$. **7.** $x = 10$. **8.** 21; 22; 23; 24. **9.** 3 probleme.

TESTUL 3

1. $x = 19$. **2.** d) 4. **3.** $x = 4$. **4.** $x = 30$. **5.** Toate. **6.** $x = 1$. **7.** 84. **8.** $x = 99$. **9.** 130; 87.

TESTUL 4

1. b) 7. **2.** $x = 40$. **3.** 70. **4.** Niciuna. **5.** x poate fi 0, 1, 2, 3 sau 4. **6.** $x = 6$. **7.** 4 și 8; 5 și 2 sau 6 și 0. **8.** $x = 99$. **9.** 960 lei.

b) $x = 5$; c) $x = 6$. **5.** $2_{(10)} = 10_{(2)}$; $2^2_{(10)} = 100_{(2)}$; $2^3_{(10)} = 1000_{(2)}$; ...; $2^n_{(10)} = \underbrace{1000...0}_{n \text{ zerouri}}{}_{(2)}$. **6.** $(3^3)^3 < 33^3 <$ $< 3^{3^3} < 3^{33}$. **7.** a) $x = 18$; b) $x = 7$; c) $x = 10^5$; d) $x = 16$; e) $x = 4$; f) $x = 0$. **8.** Prima egalitate se verifică, a doua nu. **9.** Cum $U(5x) = \{0, 5\}$, rezultă $U(5x + 2) = \{2, 7\}$, deci nu e pătrat perfect.

16. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

1. 11; 12; 13; 14. **2.** laleaua 3 lei și crizantema 5 lei. **3.** 23 și 161. **4.** 75 de timbre, 40 de timbre și 85 de timbre. **5.** 13 băieți și 16 fete. **6.** 94 și 141. **7.** 30, 60 și 80. **8.** 140 lei. **9.** 10 kg. **10.** 48 ore. **11.** 4 h și 40 min. **12.** 18 ani și 54 de ani. **13.** 20 și 140. **14.** 110 bilete de 4 lei și 90 de bilete de 6 lei. **15.** 26 de caiete de 2 lei și 37 de caiete de 4 lei. **16.** 50 lei. **17.** 18 și s-au luat 6 mere, 4 mere și 4 mere. **18.** a) 7224; b) 2010 și 8163. **19.** 8 zile și 12 zile. **21.** $(2013^0 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}) \cdot x = 2^{101}$; $2013^0 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$; $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$; $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{101} \Rightarrow 2S - S = 2^{101} - 1 \Rightarrow S = 2^{101} - 1 \Rightarrow 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} =$ $= 2^{101} - 1 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{100} = 2^{101} \Rightarrow 2^{101} \cdot x = 2^{101} \Rightarrow x = 1$. **22.** a) $(x - 1)(y + 1) =$ $= 10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10 \cdot 1 \Rightarrow x = 2, y = 9$ sau $x = 3, y = 4$ sau $x = 6, y = 1$ sau $x = 11, y = 0$; b) $x + y = xy \Rightarrow \begin{cases}(x+y) \vdots x \\ (x+y) \vdots y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \vdots x \\ x \vdots y\end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow x + x = x^2 \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) =$ $= 0 \Rightarrow x = y = 0$ sau $x = y = 2$; c) $xy - 2y + 3x = 21 \Rightarrow xy - 2y + 3x - 6 = 21 - 6 \Rightarrow y(x - 2) +$ $+ 3(x - 2) = 15 \Rightarrow (x - 2)(y + 3) = 15 \Rightarrow 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \Rightarrow x = 3, y = 12$ sau $x = 5, y = 2$ sau $x =$ $= 7, y = 0$. **23.** $4^n \cdot 81 + 2^{2n} \cdot 56 - 2^{2n} \cdot 56 \le 12^4 \Rightarrow 2^{2n} \cdot 81 + 2^{2n} \cdot 56 - 2^{2n} \cdot 56 \le 12^4$; $2^{2n} \cdot 3^4 \le$ $\le (2^2 \cdot 3)^4 \Rightarrow 2^{2n} \cdot 3^4 \le 2^8 \cdot 3^4 \Rightarrow 2^{2n} \le 2^8 \Rightarrow 2n \le 8 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **24.** $2^{2013} < 2x - 2 < 2^{2014} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^{2013} + 2 < 2x < 2^{2014} + 2 \Rightarrow 2(2^{2012} + 1) < 2x < 2(2^{2013} + 1) \Rightarrow 2^{2012} + 1 < x < 2^{2013} + 1$, deci x este egal cu: $2^{2012} + 2$, $2^{2012} + 3$, ..., sau 2^{2013}.

17. Media aritmetică a două numere naturale cu rezultat număr natural

1. a) 13; b) 21; c) 355; d) 425. **2.** a) 11; b) 10; c) 12; d) 15. **3.** 53. **4.** 7. **5.** 18°C. **6.** 12. **7.** 225. **8.** 10. **9.** 64. **10.** 16. **11.** a) $6x$; b) $30x$. **12.** $x = 8$. **13.** 10. **14.** 16. **15.** 12 și 36. **16.** 10; 40; 13. **17.** $a = b = c$. **18.** 49. **19.** 8. **20.** $2^{17} \cdot 5$. **21.** 1, 108. **22.** 25. **23.** 540. **24.** $a = 19, b = 15, c = 31$. **25.** 216. **26.** $x = y = 9$.

18. Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. $x = 5$. **2.** $x = 4$; $x = 7$ sau $x = 10$. **3.** a) $x = 561$; b) $x = 181$. **4.** a) $x = 6$; b) $x = 18$. **5.** $x = 0$ sau $x = 1$. **6.** $x + 1 \le 4 \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = 2$ sau $x = 3$. **7.** $x = 9$. **8.** 28; 29; 30; 31. **9.** 3 probleme.

TESTUL 2

1. $x = 3$. **2.** 3. **3.** a) $x = 1\,056$; b) $x = 68$. **4.** a) $x = 4$; b) $x = 3$. **5.** $x < 25$. **6.** $x = 0, x = 1, x = 2$ sau $x = 3$. **7.** $x = 10$. **8.** 21; 22; 23; 24. **9.** 3 probleme.

TESTUL 3

1. $x = 19$. **2.** d) 4. **3.** $x = 4$. **4.** $x = 30$. **5.** Toate. **6.** $x = 1$. **7.** 84. **8.** $x = 99$. **9.** 130; 87.

TESTUL 4

1. b) 7. **2.** $x = 40$. **3.** 70. **4.** Niciuna. **5.** x poate fi 0, 1, 2, 3 sau 4. **6.** $x = 6$. **7.** 4 și 8; 5 și 2 sau 6 și 0. **8.** $x = 99$. **9.** 960 lei.

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

1. Divizor. Multiplu. Divizor comun. Multiplu comun

1. Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Divizorii lui 27 sunt: 1, 3, 9, 27, iar ai lui 31 sunt 1 şi 31. **2.** 1, 2, 4, 5, 10. **3.** 12, 18, 24. **4.** a) 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49; b) 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63. **5.** 36, 72, 108. **6.** 1, 2, 3 şi, respectiv, 6. **7.** 18. **8.** 30. **9.** 14. **10.** 6. **11.** 2. **12.** 989. **13.** 1 034. **14.** 4. **15.** 1, 2, 3 sau 2, 3, 4. **16.** a) 540, 504, 450; b) 450, 405, 540; c) 540, 450. **17.** $a \cdot b$. **18.** 1, 15, 21, 35 sau 15, 21, 35, 105. **19.** Toate numerele de la $7 \cdot 2 = 14$ până la $7 \cdot 14 = 98$, adică 13 numere. **20.** a) Din $a \mid b \Rightarrow$ $\Rightarrow b = a \cdot m$, unde m este un număr natural. Din $b \mid c \Rightarrow c = b \cdot n$, unde n este un număr natural. Deci, $c = a \cdot m \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$. Rezultă $a \mid c$; b) Din $a \mid b \Rightarrow a \leq b$ şi din $b \mid a \Rightarrow b \leq a$. Deci $a = b$. **21.** a) Din $d \mid a \Rightarrow a = d \cdot m$, unde m este număr natural. Din $d \mid b \Rightarrow b = d \cdot n$, unde n este număr natural. Deci $a - b = d \cdot m - d \cdot n = d \cdot (m - n)$. Dar $d \cdot (m - n) \vdots d$, deci $(a - b) \vdots d$; b) Analog a). **22.** $a = 2$, $b = 5$ şi $c = 7$. **23.** De la 1 la 100 sunt 50 de multipli de 2, 20 de multipli de 5 şi 10 multipli de 2 şi 5. Avem deci $50 + 20 - 10 = 60$ de numere, din care, dacă unul este şters, copilul pierde jocul. Cum Tudor începe, rămân $100 - 60 = 40$ de numere ce urmează a fi şterse. Dacă nu se fac greşeli, Ileana va şterge ultimul număr permis, deci Tudor va pierde jocul.

2. Aplicaţii ale divizibilităţii (Numere pare şi numere impare)

1. a) 16, 24, 40, 3 004; b) 29, 53, 71, 121. **2.** a) 11; b) 502; c) 12 369. **3.** a) 11; b) 221; c) 4 631. **4.** 1 958 138 şi 1 958 775. **5.** a) 324, 326, 328; b) 571, 573, 575. **6.** $7 + 8 = 15$. **7.** $12 + 14 = 26$. **8.** $17 + 19 = 36$. **9.** 6, 8, 10, 12, 14. **10.** 11, 13, 15, 17, 19, 21. **11.** 2 şi 74. **12.** 2 şi 369. **13.** $x = 2(a +$ $+ 3b) \Rightarrow x =$ nr. par şi $y = 2(2a + 5b + 8) + 1 \Rightarrow y =$ nr. impar. Deci, a) par; b) impar; c) impar; d) par; e) par; f) par; g) par. **14.** $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110$. Deoarece sunt cele mai mici 10 numere naturale pare nenule distincte şi suma lor este 110, înseamnă că acestea sunt numerele cerute. **15.** Cum suma celor mai mici 10 numere naturale pare nenule distincte este 110 şi $108 < 110$, rezultă că cel puţin două din cele 10 numere sunt egale. **16.** Cum suma celor mai mici 10 numere naturale pare nenule distincte este 110 şi cel mai mare dintre ele este 20, iar $112 > 110$, înseamnă că cel puţin unul din numere este mai mare decât 20, căci în caz contrar suma lor ar fi 110. Cu atât mai mult, cel mai mare dintre ele este mai mare decât 20. **17.** $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 +$ $+ 15 + 17 + 19 = 100$. Cum sunt cele mai mici 10 numere naturale impare distincte şi suma lor este 100, înseamnă că acestea sunt numerele cerute. **18.** Cum suma celor mai mici 10 numere naturale impare distincte este 100 şi $96 < 100$, înseamnă că dintre ele cel puţin două sunt egale. **19.** Cum suma primelor 10 numere naturale impare distincte este 100 şi cel mai mare dintre ele este 19, iar $102 >$ > 100, înseamnă că nu pot fi toate mai mici sau egale cu 19. Deci, cel mai mare dintre ele este mai mare decât 20. **20.** Suma a 15 numere pare este un număr par. Deci, nu există. **21.** Suma a 12 numere naturale impare este un număr par. Deci, nu există. **22.** Cum suma primelor două numere este un număr impar, înseamnă că sunt de parităţi diferite, deci, unul din ele este număr natural par. Cum suma ultimelor trei numere este un număr par, înseamnă că nu pot fi toate impare şi deci unul din ele este număr natural par. Cum două din cele 5 numere sunt pare, înseamnă că produsul lor se divide prin 4. **23.** Cum suma celor mai mici 10 numere naturale impare distincte este 100 şi $98 <$ < 100, înseamnă că cel puţin unul din numere este par. Deci, produsul lor este un număr par. **24.** 26 şi 28 sau 16, 18, 20 sau 4, 6, 8, 10, 12, 14. **25.** par. **26.** impar. **27.** impar. **28.** par. **29.** $a = 2$, $b = 42$, $c = 17$. **30.** $a = 2 = b$ sau $a = b = 0$. **31.** $a = 20 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n + 25 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}$; a) $a = 4 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} +$ $+ 25 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}(4 + 25) = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} \cdot 29 \Rightarrow 29 \mid a$; b) $a = 97\,875 \Rightarrow 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} \cdot 29 =$ $= 97\,875 \Rightarrow 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} = 3\,375 \Rightarrow (15)^{n+1} = 15^3 \Rightarrow n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$. **32.** a) $111 = 37 \cdot 3$; $999 =$ $= 37 \cdot 27$; $27 - 2 = 25$ de numere de 3 cifre sunt divizibile cu 37; b) $S = 37 \cdot 3 + 37 \cdot 4 + \ldots + 37 \cdot 27 =$ $= 37 \cdot (3 + 4 + \ldots + 27) = 37 \cdot (27 \cdot 28 : 2 - 1 - 2) = 37 \cdot (378 - 3) = 37 \cdot 375 \Rightarrow S = 13\,875$;

c) Cum $S = 13\,875 = 37 \cdot 375 \Rightarrow S \vdots 375$. **33.** Pentru $n = 0 \Rightarrow a = 1$. Pentru $n = 1 \Rightarrow a = (2 + 1) \cdot (3 + 1)(4 + 1) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ = număr par. Deci $n = 1$. **34.** $a + b = 3x + 4y + 3 + x + 2y + 3 = 4x + 6y + 6 = 2(2x + 3y + 3) \Rightarrow a + b$ = număr par $\Rightarrow a - b$ = număr par. **35.** a) Oricum am lua trei numere naturale consecutive, unul este n, unul este $n + 1$ şi unul este $n + 2$. Deci, suma lor este $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$, deci este multiplu de 3; b) Produsul lor este $n(n + 1)(n + 2)$. Se arată că $n(n + 1)(n + 2)$ este un multiplu al lui 3 şi cum este şi multiplu al lui 2, rezultă că $n(n + 1)(n + 2)$ este multiplu al lui 6.

3. Criterii de divizibilitate

1. a) 10, 20, 130; b) 10, 15, 20, 95, 130; c) 6, 10, 20, 24, 86, 112, 130; d) 17. **2.** $4 + 2 = 6 \Rightarrow 42 \vdots 3$ etc. **3.** $4 + 2 + 3 = 9 \Rightarrow 423 \vdots 9$ etc. **4.** a) 9 998; b) 9 999; c) 9 995; d) 9 999; e) 9 990; f) 9 990; g) 9 900. **5.** 534. **6.** a) 120, 122, 124, 126, 128; b) 300, 310, 320, 330, 340, 350, 360, 370, 380, 390, 305, 315, 325, 335, 345, 355, 365, 375, 385, 395; c) 700, 710, 720, 730, 740, 750, 760, 770, 780, 790. **7.** 3 126; 3426. **8.** 5 010; 5 016; 5 019; 5 115; 5 118; 5 214; 5 217; 5 313; 5 316; 5 412; 5 415; 5 511; 5 514; 5 610; 5 613; 5 619; 5 712; 5 718; 5 811; 5 817; 5 910; 5 916; 5 919. **9.** $x = 3a + 6b = 3 \cdot (a + 2b)$ şi $x \vdots 3$. **10.** 700; 788. **11.** a) 1 170, ..., 9 970; 1 172, ..., 9 972; 1 174, ..., 9 974; 1 176, ..., 9 976; 1 178, ..., 9 978; b) 1 170, ..., 9 970; 1 175, ..., 9 975; c) 1 170, ..., 9 970. **12.** a) Dintre două numere consecutive, totdeauna unul este par şi, ca urmare, produsul lor este totdeauna par; b) Dintre trei numere consecutive, totdeauna unul este multiplu de 3 şi, ca urmare, produsul lor este multiplu de 3. **13.** a) 456; 738; 124; b) 405; 125; 375. **14.** a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 2\,007 = (2\,007 \cdot 2\,008) : 2 = 2\,007 \cdot 1\,004$ şi $2\,007 \mid 2\,007 \cdot 1\,004$; b) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = 111a + 111b + 111c = 111 \cdot (a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c) \vdots 37$. **15.** Suma divizorilor proprii ai lui n este 6. Cum divizorii proprii sunt cel puţin egali cu 2, iar 6 nu se poate scrie ca suma a trei numere naturale distincte mai mari sau egale cu 2, studiem două cazuri: i) n are un singur divizor propriu; atunci el este 6, fals, căci 6 se divide cu 2, deci ar mai trebui să aibă un divizor propriu, ceea ce contrazice ipoteza; ii) n are doi divizori proprii, p şi q. Avem $p + q = 6$, $2 \le p \le q \le 5$. Găsim $p = 2$, $q = 4$, de unde divizorii lui n sunt 1, 2, 4 şi n. Imediat $n = 2 \cdot 4 = 8$. **16.** a) Dintre patru numere naturale împărţite la 3, există cel puţin două numere care dau acelaşi rest. Fie $m = 3p + r$, $n = 3p' + r$ cele două numere (m, p, p', n, r sunt numere naturale). Atunci $m - n = 3(p - p')$, adică $3 \mid m - n$; b) Analog a). **17.** a) $a = 12$, $b = 6$, $c = 3$.

4. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18. **2.** 6, 9 şi 18. **3.** 105. **4.** 986. **5.** 2 220. **6.** 2 775. **7.** $16 = 2^4$ are $4 + 1 = 5$ (divizori). **8.** a) 1; b) 0; c) 5. **9.** b) dacă n este par; d) indiferent că n este par sau impar.

TESTUL 2

1. 1 320; 1 322; 1 324; 1 326; 1 328. **2.** 1, 2, 4. **3.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. **4.** $4 = 2^2$ are ca divizori pe 1, 2, 2^2. **5.** a) $230 \vdots 10$; b) $(20 \cdot 21) : 2 = 210 \vdots 7$. **6.** a) 15, 17, 19; b) $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$. **7.** $\overline{1xy} \vdots 10 \Leftrightarrow y = 0$ şi x poate fi orice cifră $\Rightarrow$ 9 numere. **8.** 0, 10, 20. **9.** 1 700, 2 600, 3 500, 1 722, 2 622, 3 522, 1 744, 2 644, 3 544, 1 766, 2 666, 3 566, 1 788, 2 688, 3 588.

TESTUL 3

1. a este număr par. **2.** 1, 2, 3, 6. **3.** 0, 1, 3, 7. **4.** 14, 28, 42. **5.** 210, 212, 214, 216, 218. **6.** $x \in \{3, 6, 9\}$. **7.** 34, 51, 68. **8.** $(a + b + c) \vdots 3 \Rightarrow a + b + c = 3k$ (k număr natural) şi calculăm $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + (a + b + c) = 99a + 9b + 3k = 3(\underbrace{33a + 3b + k}_{p}) = 3p \vdots 3$. **9.** 1 410; 1 420; 1 430; 1 440; 1 450; 1 460; 1 470; 1 480; 1 490.

TESTUL 4

1. $n = 38q + 19 = 19 \cdot (2q + 1) \vdots 19$. **2.** 0; 1; 2; 7. **3.** Din $10 \mid (3a + 7b)$ și $10 \mid (10a + 10b) \Rightarrow$ $\Rightarrow 10 \mid (7a + 3b)$. **4.** 12, 18, 24, 30. **5.** 0 sau 5. **6.** 12; 14; 16. **7.** 8. **8.** Analog 8 Testul 3. **9.** a) $45 \vdots 3$ și $153 \vdots 3$; b) $45 \vdots 5$, dar $153 \not\vdots 5$.

TESTUL 5

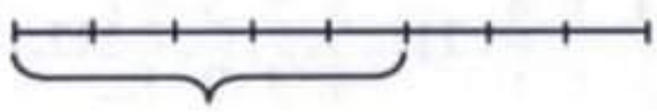
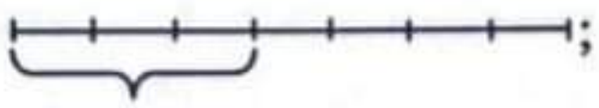
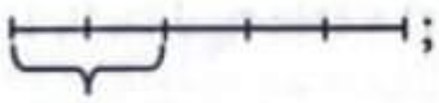
1. 8, 12 și 24. **2.** 0, 5, 10, 15, 20. **3.** 138 și 225. **4.** 0, 14, 28, 42. **5.** La 1 copil, 2 copii, 3 copii, 4 copii, 6 copii și 12 copii. **6.** 272, 474, 676, 878. **7.** 102. **8.** $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, $2n + 7$. **9.** Fie a și b două numere naturale divizibile cu d. Înseamnă că există alte două numere naturale m și n, astfel încât $a = d \cdot m$ și $b = d \cdot n \Rightarrow a + b = d \cdot m + d \cdot n = d \cdot (m + n)$ care se divide cu d.

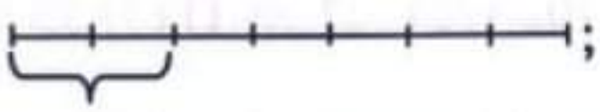
TESTUL 6

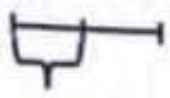
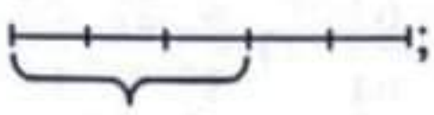
1. 7, 14, 28. **2.** 0, 7, 14, 21, 28. **3.** 381 și 252. **4.** 0, 10, 20, 30. **5.** 1 copil, 2 copii, 3 copii, 6 copii, 9 copii și 18 copii. **6.** 130, 135, 230, 235, 330, 335, 430, 435, 530, 535, 630, 635, 730, 735, 830, 835, 930, 935. **7.** 981. **8.** $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$. **9.** Fie a și b, $a \geq b$, două numere naturale divizibile cu d. Înseamnă că există alte două numere naturale m și n, astfel încât $a = d \cdot m$ și $b = d \cdot n \Rightarrow a - b = d \cdot m - d \cdot n = d \cdot (m - n)$ care se divide cu d.

CAPITOLUL II. FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

1. Fracții ordinare; reprezentarea fracțiilor prin desene

1. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{4}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{4}{5}$; e) $\frac{3}{2}$; f) $\frac{8}{10}$; g) $\frac{3}{6}$; h) $\frac{7}{2}$; i) $\frac{9}{3}$. **2.** a) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$; b) $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$. **3.** $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{8}{12}$. **4.** a)  ; b) ; c)  ; d)  ;

e) ; f)  ; g) ;

h)  ; i)  ; j) . **5.** 17, 23, 7, 29, 57, 19.

7. a) 5; b) 15; c) 25. **8.** a) $\frac{1}{60}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{5}{6}$; f) $\frac{3}{2}$. **9.** a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{5}{7}$; d) $\frac{28}{7}$.

10. a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{4}{12}$; c) $\frac{6}{12}$. **11.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{2}, \frac{3}{7}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}$. **12.** $\frac{1}{18}, \frac{2}{18}, \frac{3}{18}, \frac{6}{18}, \frac{9}{18}, \frac{18}{18}$.

13. a) $\frac{9}{16}, \frac{18}{25}, \frac{29}{36}, \frac{42}{49}, \frac{57}{64}, \frac{74}{81}$; b) $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$; c) $\frac{12}{17}, \frac{42}{47}, \frac{72}{77}$. **14.** $\frac{13}{31}, \frac{11}{37}, \frac{13}{37}, \frac{17}{31}, \frac{19}{31}, \frac{19}{37}$. **15.** 1, 2, 3, 6, 9, 18. **16.** $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}$. **17.** $\frac{30}{47}, \frac{35}{47}$.

18. $\frac{3}{35}, \frac{3}{45}, \frac{3}{55}, \frac{3}{65}, \frac{3}{75}$. **19.** $\frac{200}{351}, \frac{220}{351}, \frac{230}{351}, \frac{240}{351}, \frac{250}{351}, \frac{260}{351}, \frac{270}{351}, \frac{280}{351}, \frac{290}{351}, \frac{200}{354}, \frac{210}{354}, \frac{220}{354}, \frac{230}{354}, \frac{250}{354}, \frac{260}{354}, \frac{270}{354}, \frac{280}{354}, \frac{290}{354}, \frac{200}{357}, \frac{210}{357}, \frac{220}{357}, \frac{230}{357}, \frac{240}{357}, \frac{250}{357}, \frac{260}{357}, \frac{280}{357}, \frac{290}{357}$. **20.** $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. Analog celelalte: $x \in \mathbb{N}$; $x \neq 0$; $x \neq 12$; $x \neq 1$; $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; $x \neq 2$.

21. a) a este egal cu 3, 4, 5, 6, 7, 8 sau 9; $a = 3 \Rightarrow x = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $a = 4 \Rightarrow x = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$; $a = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{5-1}{5+1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; $a=6\Rightarrow x=\frac{6-1}{6+1}=\frac{5}{7}$; $a=7\Rightarrow x=\frac{7-1}{7+1}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$; $a=8\Rightarrow x=\frac{8-1}{8+1}=\frac{7}{9}$; $a=9\Rightarrow x=\frac{9-1}{9+1}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$. Rezultă fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$. **22.** Pentru $n=1\Rightarrow a_1=\frac{2^1-1}{2^1+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$. Analog $a_2=\frac{2^2-1}{2^2+1}=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$; $a_3=\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{7}{9}$; $a_{100}=\frac{2^{100}-1}{2^{100}+1}$.

23. a) $\frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}$; b) Forma generală este $\frac{2n-1}{2n+1}$, $n=100\Rightarrow\frac{200-1}{200+1}=\frac{199}{201}$; c) $\frac{2n-1}{2n+1}$.

2. Fracții subunitare, echiunitare și supraunitare. Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție

1. a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{17}, \frac{24}{31}$; b) $\frac{2}{2}, \frac{7}{7}, \frac{57}{57}$; c) $\frac{29}{7}, \frac{37}{4}, \frac{123}{9}$. **2.** a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{7}, \frac{15}{17}, \frac{12^0}{5}$; b) $\frac{3^3}{27}, \frac{2^4}{16}$; c) $\frac{17}{4}, \frac{23}{6}, \frac{37}{24}$. **3.** $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$. **4.** $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}$. **5.** a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}$; b) $\frac{2}{2}$; c) $\frac{5}{2}, \frac{5}{3}$. **6.** a) x este egal cu 1, 2, 3 sau 4; b) x este egal cu 0, 1, 2, 3 sau 4; c) x este egal cu 2, 3 sau 4; d) x este mai mare decât 5. **7.** $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$. **8.** a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$; c) $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$. **9.** a) $\frac{7}{6}, \frac{7}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{7}{1}$; b) $\frac{7}{7}$; c) $\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}$. **10.** a) $\frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}$; b) $\frac{4}{4}$; c) $\frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{4}{1}$. **11.** $\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{5}{1}$. **12.** $\frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}, \ldots, \frac{n}{7}$. **13.** a) x este egal cu 5, 4, 3 sau 2; b) x este egal cu 0 sau 1; c) x este egal cu 0, 1, 2 ; d) x este egal cu 5, 6, 7, …; e) x este egal cu 2, 3, 4, 5, 6, … . **14.** $\frac{13}{11}, \frac{12}{11}$. **15.** $\overline{1x}+\overline{x2}=67\Rightarrow 10+x+10x+2=67\Rightarrow 11x=55\Rightarrow x=5$. **16.** a) $\frac{1}{49}, \frac{5}{36}, \frac{11}{25}$; b) $\frac{16}{16}, \frac{4}{4}, \frac{1}{1}$; c) $\frac{23}{9}, \frac{15}{4}, \frac{17}{16}$. **17.** a) $\frac{1}{25}, \frac{8}{37}, \frac{27}{49}$; b) $\frac{8}{8}, \frac{27}{27}, \frac{64}{64}$; c) $\frac{8}{3}, \frac{27}{5}, \frac{64}{17}$. **18.** $\frac{30}{12}, \frac{30}{42}, \frac{30}{72}, \frac{35}{12}, \frac{35}{42}, \frac{35}{72}$. **19.** a) $n>6$; b) $n=6$; c) $n<6$. **20.** r este adevărată, iar q și p sunt false. **21.** $n=45$. **22.** a) $3\frac{3}{4}$; b) $18\frac{3}{11}$; c) $35\frac{62}{97}$; d) $67\frac{44}{107}$; e) $7\frac{280}{431}$. **23.** a) $\frac{119}{29}$; b) $\frac{97}{43}$; c) $\frac{650}{57}$; d) $\frac{28\,760}{701}$; e) $\frac{14\,402}{119}$. **24.** a) $n=0$; b) $n=0$; c) nu există; d) 0. **25.** a) (0, 0, 1); (0, 0, 2); (0, 1, 0); (0, 2, 0); (1, 0, 0); (2, 0, 0); (0, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2); b) (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2); (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3). **26.** $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow\frac{1+2+3+\ldots+n}{2013}=\frac{n(n+1)}{4026}$.

a) Cum $62\cdot 63=3\,906$ și $63\cdot 64=4\,032$, din $\frac{n(n+1)}{4026}<1\Rightarrow n$ este egal cu 1, 2, 3, 4, …, 62;

b) Analog, din $\frac{n(n+1)}{4026}>1$ rezultă că $n\geq 63$. **27.** $\frac{1+2+2^2+\ldots+2^{100}}{2^n}=\frac{2^{101}-1}{2^n}$; a) Din $\frac{2^{101}-1}{2^n}<1$ rezultă $n\geq 101$; b) $\frac{2^{101}-1}{2^n}>1\Rightarrow n$ este egal cu 0, 1, 2, 3, …, 100. **28.** a) $\frac{2^{145}}{4^{75}}=\frac{2^{145}}{2^{150}}<1\Rightarrow$

$\Rightarrow$ subunitară; b) $\frac{10^6}{2^6 \cdot 5^7} = \frac{2^6 \cdot 5^6}{2^6 \cdot 5^7} < 1 \Rightarrow$ subunitară; c) $\frac{3^{114}}{3^{171}} < 1 \Rightarrow$ subunitară. **29.** a) $\frac{3n+6}{n+3}$; b) $\frac{6n+11}{n+2}$. **30.** a) $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$; b) $\frac{n+2}{n+1} = 1\frac{1}{n+1}$; c) $\frac{3n+5}{n+1} = \frac{3n+3+2}{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{n+1} = 3\frac{2}{n+1}$; d) $\frac{6n+9}{2n+3} = \frac{3(2n+3)}{2n+3} = 3$.

3. Aflarea unei fracţii dintr-un număr natural. Procent

1. a) 215 kg; 125 minute; 64 m; 162 lei; b) 7 m; 13 kg; 34 litri; 168 lei; c) 4 kg; 16 m; 30 cm; 134 t. **2.** a) 10 934; b) 400; c) 105; d) 2 520; e) 9 450; f) 212. **4.** 60 lei şi 90 lei. **6.** a) 80%; b) 44%; c) 186%; d) 270%. **8.** a) 408; b) 8 908; c) 2 091; d) 1 207. **9.** a) 35 km; b) 90 km. **10.** 9 lei. **11.** a) 4 lei; b) 24 lei. **13.** a) 25%; b) 75%. **14.** a) 63%; b) 370 kg; c) 630 kg. **15.** a) 1 500 ha de porumb; 400 ha de grâu; b) aproximativ 21%. **16.** a) 3 750 t; b) 5 000 t. **17.** 12 741 kg. **18.** chirie: 200 lei; transport: 70 lei; hrană: 300 lei; energie electrică: 50 lei; energie termică: 40 lei; îmbrăcăminte: 150 lei; diverse: 190 lei. **19.** a) 2% dintre elevi; b) 60 elevi; c) 660 elevi; d) 540 elevi; e) 210 elevi. **20.** a) $\frac{1}{2}$ din $\left(\frac{1}{2}\right.$ din $\left.\left(\frac{1}{2}\right.\right.$ din 320$\left.\left.\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 320 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 160 = \frac{1}{2} \cdot 80 = 40$; b) $\frac{3}{5}$ din $\left(\frac{3}{5}\right.$ din $\left.\left(\frac{3}{5}\right.\right.$ din 625$\left.\left.\right)\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 625 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 375 = \frac{3}{5} \cdot 225 = 135$; c) $\frac{1}{2}$ din $\left(\frac{2}{3}\right.$ din $\left(\frac{3}{4}\right.$ din $\left(\ldots\right.$ din $\left.\left(\frac{99}{100}\right.\right.$ din 1000$\left.\left.\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} \cdot 1000 = \frac{1}{100} \cdot 1\,000 = 10$. **21.** a) $\frac{3}{100}$ din el este $6 \Rightarrow \frac{3}{100} \cdot x = 6 \Rightarrow x = (6:3) \cdot 100 = 200$; b) $\frac{11}{100}$ din el este $132 \Rightarrow \frac{11}{100} \cdot x = 132 \Rightarrow x = 132 : 11 \cdot 100 = 12 \cdot 100 = 1\,200$. **22.** a) $100\% - 30\% = 70\%$; $\frac{70}{100} \cdot x = 875 \Rightarrow x = (875 : 70) \cdot 100 = 87\,500 : 70 = 1\,250$ (lei); b) $\frac{30}{100}$ din $1\,250 = \frac{30}{100} \cdot 1\,250 = 375$ (lei). **23.** $\frac{7}{100}$ din $300 = \frac{7}{100} \cdot 300 = 21$ (elevi); $\frac{11}{100}$ din $300 = \frac{11}{100} \cdot 300 = 33$ (elevi); $\frac{25}{100}$ din $300 = \frac{25}{100} \cdot 300 = 75$ (elevi); $\frac{31}{100}$ din $300 = \frac{31}{100} \cdot 300 = 93$ (elevi); $\frac{16}{100}$ din $300 = \frac{16}{100} \cdot 300 = 48$ (elevi); $\frac{10}{100}$ din $300 = \frac{10}{100} \cdot 300 = 30$ (elevi).

Nota	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9-9,99	10
Nr. elevi	21	33	75	93	48	30

24. Limbi străine: $\frac{25}{100} \cdot 1\,200 = 300$ (elevi); matematică: $\frac{20}{100} \cdot 1\,200 = 240$ (elevi); fizică: $\frac{12}{100} \cdot 1\,200 = 144$ (elevi); chimie: $\frac{10}{100} \cdot 1\,200 = 120$ (elevi); alte concursuri: $\frac{18}{100} \cdot 1\,200 = 216$ (elevi); limba română: $\frac{15}{100} \cdot 1\,200 = 180$ (elevi).

4. Fracţii echivalente

1. $4 \cdot 3 = 12$ şi $2 \cdot 6 = 12$; $5 \cdot 21 = 105$ şi $7 \cdot 15 = 105$; $1 \cdot 30 = 30$ şi $12 \cdot 5 = 60$, $60 \neq 30$; $3 \cdot 34 = 102$ şi $17 \cdot 6 = 102$; $11 \cdot 22 = 242$ şi $4 \cdot 33 = 132$, $132 \neq 242$. **2.** a) $\frac{12}{28} = \frac{3}{7} = \frac{21}{49}$; b) $\frac{125}{15} = \frac{25}{3} = \frac{75}{9}$; c) $\frac{2^3}{8} = \frac{7}{7} = \frac{90}{90}$; d) $\frac{1}{3} = \frac{40}{120} = \frac{5}{15}$. **3.** a) 21; b) 20; c) 9; d) 4. **4.** $\frac{a}{b} = \frac{4}{6}$. **5.** $\frac{a}{b} = \frac{33}{44}$. **6.** $\frac{a}{b} = \frac{42}{30}$. **7.** $x = 2$. **8.** $\frac{3}{6}, \frac{11}{22}, \frac{33}{66}$. **9.** $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}$. **10.** a) $\frac{5}{13} = \frac{10}{26} = \frac{15}{39}$; b) $\frac{44}{177} = \frac{132}{531} = \frac{220}{885}$. **11.** a) $\frac{30}{70}$; b) $\frac{22}{74}$; c) $\frac{82}{46}$; d) $\frac{38}{82}$; e) $\frac{24}{10}$. **12.** a) $x = 12$; b) $x = 105$; c) $x = 4$; d) $x = 9$.

13. Nu obligatoriu. Poate fi, de exemplu, $a = 10$, $b = 20$. **14.** $x = 45$. **15.** $3a = 2b \mid \cdot 17 \Rightarrow 51a = 34b$.

16. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$ şi cum $c \cdot y = d \cdot x \Rightarrow a \cdot d \cdot c \cdot y = b \cdot c \cdot d \cdot x \mid : (c \cdot d) \Rightarrow a \cdot y = b \cdot x$.

17. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Cum $a \cdot y = b \cdot x \Rightarrow a \cdot d + a \cdot y = b \cdot c + b \cdot x \Rightarrow a \cdot (d + y) = b \cdot (c + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{c+x} = \frac{b}{d+y}$. **18.** $x = 1, y = 5$; $x = 6, y = 0$; $x = 2, y = 2$; $x = 3, y = 1$. **19.** $x = 2$.

5. Amplificarea şi simplificarea fracţiilor. Fracţii ireductibile

1. $\frac{3}{6}; \frac{15}{21}; \frac{3a}{3b}; \frac{6x}{15y}; \frac{3x+6}{3y+3}; \frac{3a+3b}{3x+3y}$. **2.** $\frac{3n}{4n}; \frac{7n}{2n}; \frac{an}{bn}; \frac{3an}{7bn}; \frac{an+n}{bn+3n}; \frac{an+bn}{xn+yn}$. **3.** 24, 16, 8, 4, 3, 2. **4.** 8, 16, 4, 2, 32. **5.** a) $x = 6$; b) $x = 5$; c) $x = 9$. **6.** $x = 3, y = 7$. **7.** $\frac{2}{3}; \frac{3}{9}; \frac{a}{2b}; \frac{2(a+b)}{5(x+y)}; \frac{2^2}{3}$.

8. $\frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{2}{11}; \frac{1}{4}; \frac{25}{33}; \frac{2}{7}; \frac{2}{5}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}$. **9.** a) $y = 4$; b) $x = 9$; c) $x = 33$. **10.** $x = 16, y = 3$. **11.** a) $\frac{375}{871}$; b) $\frac{a+b+c}{x+y+z}$; c) $\frac{\overline{ab}}{17}$. **12.** *Indicaţie:* $\overline{1a7b} \vdots 36$ şi $\overline{c51d} \vdots 36$. **13.** $\frac{x^2+x}{2x+4} = \frac{x(x+1)}{2(x+2)}$; x, $x + 1$ sunt numere naturale consecutive $\Rightarrow x(x+1) \vdots 2$ şi $2(x+2) \vdots 2 \Rightarrow$ fracţia se simplifică prin 2, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.

14.

a	b	$a \cdot b$	$a + b$	$ab(a + b)$
p	p	p	p	p
p	i	p	i	p
i	p	p	i	p
i	i	i	p	p

p = număr par
i = număr impar

Din acest tabel rezultă că $ab(a + b) \vdots 2$. Dar x, $x - 1$ sunt numere naturale consecutive $\Rightarrow$ $\Rightarrow x(x-1) \vdots 2 \Rightarrow x(x-1) + 6 \vdots 2 \Rightarrow (x^2 - x + 6) \vdots 2$. Deci, fracţia se simplifică prin 2, oricare ar fi $a, b, x \in \mathbb{N}^*$. **15.** Notăm $(n; n+1) = d \Rightarrow d \mid n+1$ şi $d \mid n \Rightarrow d \mid (n+1-n) \Rightarrow d \mid 1$. Cum $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ $\Rightarrow d = 1 \Rightarrow (n; n+1) = 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1}$ este ireductibilă. **16, 17, 18.** asemănătoare cu **15. 19.** Notăm cu $d = (n+4; n+6) \Rightarrow d \mid n+6$ şi $d \mid n+4 \Rightarrow d \mid (n+6-n-4) \Rightarrow \left.\begin{matrix} d \mid 2 \\ d \neq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = 2 \Rightarrow n+4 \vdots 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 2k, k \in \mathbb{N}$. **20.** Analog 19. **21.** a) $\frac{x+7}{5} = \frac{84}{35} \Rightarrow \frac{7(x+7)}{35} = \frac{84}{35} \Rightarrow 7(x+7) = 84 \Rightarrow x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$; b) $\frac{3}{2x-1} = \frac{7}{21} \Rightarrow \frac{3}{2x-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{2x-1} = \frac{3}{9} \Rightarrow 2x - 1 = 9 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$.

22. $\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 5k \end{cases} \Rightarrow 2k + 5k = 98 \Rightarrow 7k = 98 \Rightarrow k = 14 \Rightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 70 \end{cases}$; b) $\frac{x}{y} = \frac{3}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 7k \end{cases} \Rightarrow 7k - 3k = 24 \Rightarrow 4k = 24 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 42 \end{cases}$. **23.** a) $\frac{3}{5} = \frac{3k}{5k}$ și $5k < 100 \Rightarrow k < 20 \Rightarrow k$ poate fi: 2, 3, ..., 19 $\Rightarrow$ 18 fracții; b) $\frac{2}{7} = \frac{2p}{7p}$ și $2p < 100 \Rightarrow p \le 49 \Rightarrow p$ poate fi: 2, 3, ..., 49 $\Rightarrow$ 48 fracții.

24. a) $\frac{\overline{a3} + \overline{3a}}{\overline{7a} + \overline{a7}} = \frac{10a + 3 + 30 + a}{70 + a + 10a + 7} = \frac{11a + 33}{11a + 77} = \frac{11(a+3)}{11(a+7)} = \frac{a+3}{a+7}$; b) $\frac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{5a + 5b + 5c} = \frac{100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b}{5(a+b+c)} = \frac{111a + 111b + 111c}{5(a+b+c)} = \frac{111(a+b+c)}{5(a+b+c)} = \frac{111}{5}$.

25. a) $\frac{17^n + 17^{n+1}}{7^n + 7^{n+1}} = \frac{17^n(1+17)}{7^n(1+7)} = \frac{17^n \cdot 18}{7^n \cdot 8} = \frac{17^n \cdot 9}{7^n \cdot 4}$; b) $\frac{36 \cdot 6^n - 2^{n+2} \cdot 3^{n+1} - 2^{n+1} \cdot 3^{n+2}}{36 \cdot 6^n - 6 \cdot 6^n - 21 \cdot 6^n} = \frac{36 \cdot 6^n - 2 \cdot 6^{n+1} - 3 \cdot 6^{n+1}}{6^n(36 - 6 - 21)} = \frac{6^n(36 - 12 - 18)}{6^n(36 - 6 - 21)} = \frac{6^n \cdot 6}{6^n \cdot 9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

6. Reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare

2. $A\left(\frac{2}{10}\right)$; $B\left(\frac{3}{10}\right)$; $C\left(\frac{6}{10}\right)$; $D\left(\frac{7}{10}\right)$; $E\left(\frac{9}{10}\right)$; $F\left(\frac{13}{10}\right)$; $G\left(\frac{15}{10}\right)$; $H\left(\frac{18}{10}\right)$. **8.** $2x + 1 < 5 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x$ este egal cu 0 sau 1, deci fracțiile sunt: $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$. **9.** $3x + 2 < 11 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x$ este egal cu 0, 1 sau 2, deci fracțiile sunt: $\frac{11}{2}$; $\frac{11}{5}$; $\frac{11}{8}$.

7. Adunarea și scăderea fracțiilor

1. a) 1; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) 1. **2.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{13}$; d) 2. **3.** a) 1; b) $\frac{1}{7}$; c) 1; d) $\frac{1}{7}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{2}{371}$. **4.** a) a; b) $2a$; c) x; d) b; e) y; f) 0. **7.** a) 1; b) 1. **8.** a) $\frac{4}{11} + \frac{3}{11} = \frac{1}{11} + \frac{6}{11} = \ldots$; b) $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \ldots$; c) $\frac{24}{17} = \frac{7}{17} + \frac{17}{17} = \ldots$; d) $\frac{6a}{23} = \frac{a}{23} + \frac{5a}{23} = \ldots$; e) $\frac{2a+5}{5a} = \frac{a}{5a} + \frac{a+5}{5a} = \ldots$; f) $\frac{a+9}{a+1} = \frac{a}{a+1} + \frac{9}{a+1} = \ldots$. **9.** a) $\frac{6}{3}$; b) $\frac{30}{29}$. **10.** a) $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{0}{6} + \frac{5}{6}$ și analog pentru celelalte; b) $\frac{5}{6} = \frac{7}{6} - \frac{2}{6} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{9}{6} - \frac{4}{6}$ și analog și pentru celelalte. **11.** a) 1; b) 1. **12.** a) 1; b) $\frac{174}{435}$; c) 2. **13.** a) 1; b) $\frac{908}{537}$; c) $\frac{17}{537}$. **16.** a) $\frac{99}{2010}$; b) $\frac{59}{2010}$; c) $\frac{45}{2010}$; d) $\frac{5}{2010}$. **17.** $\frac{8}{17}$. **19.** a) 1; b) 10. **21.** a) $\frac{1}{7} + \frac{11^{(1)}}{77} + \frac{111^{(111)}}{777} + \frac{1111^{(1111)}}{7777} + \ldots + \frac{1111111^{(111111)}}{7777777} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$;

b) $\frac{57}{75}^{(3} + \frac{5757}{7575}^{(303} + \frac{575757}{757575}^{(30303} + \frac{57575757}{75757575}^{(3030303} + \frac{5757575757}{7575757575}^{(303030303} = \frac{19}{25}+\frac{19}{25}+\frac{19}{25}+\frac{19}{25}+$

$+\frac{19}{25} = \frac{95}{25} = \frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}$. **22.** a) $x = \frac{1}{5} + \frac{2}{10}^{(2} + \frac{3}{15}^{(3} + \frac{4}{20}^{(4} + \ldots + \frac{2014}{10070}^{(2014} + \frac{2015}{10075}^{(2015} =$

$= \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}_{2015} = \frac{2015}{5} = 403$; $y = \frac{3}{5}+\frac{6}{10}^{(2} + \frac{9}{15}^{(3} + \frac{12}{20}^{(4} + \ldots + \frac{6042}{10070}^{(2014} + \frac{6045}{10075}^{(2015} =$

$= \underbrace{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}}_{2015} = \frac{2015\cdot 3}{5} = \frac{6045}{5} = 1\,209$; b) $2x + y = 2\cdot 403 + 1\,209 = 806 + 1\,209 =$

$= 2\,015 \in \mathbb{N}$. **23.** $a = \frac{17}{73} + \frac{1717}{7373}^{(101} + \frac{171717}{737373}^{(10101} + \ldots + \frac{1717\ldots17}{\underbrace{7373\ldots73}_{2482}}^{(1010\ldots101} = \underbrace{\frac{17}{73}+\frac{17}{73}+\frac{17}{73}+\ldots+\frac{17}{73}}_{1241} =$

$= \frac{1241\cdot 17}{73}^{(73} = 17\cdot 17 = 17^2$ – pătrat perfect. **24.** a) $\frac{1}{2013} + \frac{2}{2013} + \frac{3}{2013} + \ldots + \frac{2012}{2013} =$

$= \frac{1+2+3+\ldots+2012}{2013} = \frac{\frac{2012\cdot 2013}{2}}{2013} = \frac{2012\cdot 2013}{2\cdot 2013} = 1\,006$; b) $\frac{1}{2015}+\frac{2}{2015}+\frac{3}{2015}+\frac{4}{2015}+\ldots+$

$+\frac{2013}{2015} + \frac{2014}{2015} = \frac{1+2+3+4+\ldots+2013+2014}{2015} = \frac{\frac{2014\cdot 2015}{2}}{2015} = \frac{2014\cdot 2015}{2\cdot 2015} = 1\,007.$

25. a) $1000 + \frac{1}{1000}+\frac{2}{1000}+\frac{3}{1000}+\ldots+\frac{999}{1000} = 1000 + \frac{1+2+3+\ldots+999}{1000} = 1000 + \frac{\frac{999\cdot 1000}{2}}{1000} =$

$= 1000 + \frac{999\cdot 1000}{2\cdot 1000} = 1000 + 499\frac{1}{2} = 1499\frac{1}{2}$; b) $1000 - \frac{1}{1000} - \frac{2}{1000} - \frac{3}{1000} - \ldots - \frac{999}{1000} = 1000 -$

$-\left(\frac{1}{1000}+\frac{2}{1000}+\frac{3}{1000}+\ldots+\frac{999}{1000}\right) = 1000 - 499\frac{1}{2} = 500\frac{1}{2}$.

8. Înmulţirea fracţiilor

1. a) $\frac{3}{5}+\frac{3}{5} = \frac{6}{5}$; b) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5} = \frac{6}{5}$; c) $\frac{14}{5}$; d) $\frac{14}{5}$; e) $\frac{9}{2}$; f) $\frac{9}{2}$; g) $\frac{28}{5}$; h) $\frac{7}{12}$. **2.** a) $3\cdot\frac{1}{3} = 1$; b) $4\cdot\frac{7}{13} = \frac{28}{13}$; c) $5\cdot\frac{3}{16} = \frac{15}{16}$; d) $10\cdot\frac{1}{5} = 2$; e) $50\cdot\frac{1}{10} = 5$; f) $100\cdot\frac{5}{23} = \frac{500}{23}$. **3.** a) $2\cdot\frac{3}{7} = \frac{2\cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$ şi $2\frac{3}{7} = \frac{2\cdot 7+3}{7} = \frac{14+3}{7} = \frac{17}{7}$; Analog b) $\frac{1}{2}$ şi $\frac{33}{8}$; c) $\frac{2}{3}$ şi $\frac{29}{9}$; d) $\frac{5}{4}$ şi $\frac{21}{4}$; e) $\frac{7}{4}$ şi $\frac{29}{4}$; f) 10 şi $\frac{77}{6}$. **4.** a) $\frac{21}{5}$; b) $\frac{5}{4}$; c) 4; d) $\frac{7}{4}$; e) $\frac{3}{5}$; f) $\frac{6}{35}$; g) $\frac{1}{15}$; h) $\frac{11}{10}$; i) $\frac{34}{3}$; j) 1; k) $\frac{10}{21}$; l) $\frac{9}{5}$. **5.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{4}{35}$; e) $\frac{4}{35}$; f) $\frac{4}{35}$. **6.** a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{9}{2}$; c) $\frac{42}{11}$. **7.** a) $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right) =$

$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{9}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9} = \frac{3}{45}+\frac{12}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ şi $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right) = \frac{{}^{1}\cancel{3}}{{}_{1}\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{42}$. **8.** a) $\frac{27}{28}$;

b) $\frac{6}{11}$ şi 0; c) $\frac{161}{120}$; $\frac{289}{120}$; $\frac{301}{120}$. **9.** a) $77\cdot\left(\overset{5)}{\frac{3}{7}}+\overset{7)}{\frac{2}{5}}\right) = 77\cdot\frac{15+14}{35} = \overset{11}{\cancel{77}}\cdot\frac{29}{\cancel{35}_5} = \frac{319}{5} =$

$= 63\frac{4}{5}$; b) $\frac{303}{16} = 18\frac{15}{16}$; c) 7; d) $\frac{3}{19}$; e) $\frac{3}{115}$; f) $\frac{15}{11} = 1\frac{4}{11}$. **10.** $\frac{101}{2} = 50\frac{1}{2}$. **11.** $\frac{1}{21}$. **12.** a) 5;

b) $\frac{1}{2}$; c) 3; d) 5. **13.** a) 3; b) 1; c) 6. **14.** a) 224 km; b) 510 km. **15.** a) $S - \frac{1}{2}S =$

$= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-...-\frac{1}{2^{100}}-$

$-\frac{1}{2^{101}} = 1-\frac{1}{2^{101}}$; b) $\frac{1}{2}S = 1-\frac{1}{2^{101}} \mid \cdot 2 \Rightarrow S = 2-\frac{1}{2^{100}}$. **16.** Notăm $S = 1+a+a^2+a^3+...+a^n \Rightarrow$

$\Rightarrow a\cdot S = a+a^2+a^3+...+a^n+a^{n+1} \Rightarrow aS - S = a^{n+1}-1 \Rightarrow S\cdot(a-1) = a^{n+1}-1 \Rightarrow S = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

17. Din $a\cdot 0 = a\cdot(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0 \Rightarrow a\cdot 0 + 0 = a\cdot 0 + a\cdot 0 + 0 \Rightarrow 0 = a\cdot 0 \Rightarrow a\cdot 0 = 0$.

18. $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot...\cdot\frac{1001}{1000} = \frac{1001}{2} = 500\frac{1}{2}$. **19.** $A = 2017^2$, deci este pătrat perfect. **20.** a) 1; b) Se grupează cele care au acelaşi numitor: $\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$; $\frac{2}{3}+\frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$; ...; $\frac{2016}{2017}+\frac{2018}{2017} = 2$ şi astfel am obţinut $2\cdot 2016 + \frac{2}{1} + \frac{2017}{2018} = 4034 + \frac{2017}{2018}$. **21.** $a\cdot b + \frac{8}{9} = \frac{4}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{6}_1}\cdot\frac{\cancel{6}^1}{\cancel{7}_1}\cdot\frac{\cancel{7}^1}{\cancel{8}_1}\cdot\frac{\cancel{8}^1}{\cancel{9}_1}\cdot$

$\cdot\frac{\cancel{9}^1}{\cancel{10}_1}\cdot...\cdot\frac{\cancel{34}^1}{\cancel{35}_1}\cdot\frac{\cancel{35}^1}{36}+\frac{8}{9} = \frac{4}{36}^{(4} + \frac{8}{9} = \frac{1}{9}+\frac{8}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

9. Împărţirea fracţiilor

1. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 7$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$; $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{6}$; $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}$; $\left(4\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^{-1} =$

$= \frac{3}{14}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{15}$. **2.** a) $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$; b) $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$; c) 16; d) $\frac{4}{7}$; e) $\frac{5}{12}$; f) $\frac{4}{21}$; g) $\frac{1}{9}$; h) $\frac{7}{4}$.

3. a) $\frac{10}{33}$; b) $\frac{5}{28}$; c) $\frac{5}{14}$; d) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; e) $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$; f) $\frac{3}{14}$; g) $\frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$; h) $\frac{22}{41}$. **4.** a) $\frac{10}{21}$; b) 3;

c) 2; d) $\frac{7}{22}$. **5.** a) $\frac{4}{9}$; b) 3; c) $\frac{2}{3}$; d) $1\frac{1}{8}$; e) $\frac{3}{11}$; f) $\frac{3}{7}$. **6.** a) 2; b) 1; c) $\frac{6}{11}$. **7.** $\frac{9}{28}$ şi $\frac{28}{9}$, respectiv

$\frac{64}{25}$ şi $\frac{25}{64}$. **8.** a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{5}{16}$; d) $5\frac{1}{2}$; e) $\frac{2}{5}$; f) 3. **9.** a) 1; b) $\frac{6}{11}$; c) 4; d) 2; e) $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$; f) 1;

g) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; h) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. **10.** a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{7}{10}$; c) $\frac{3}{19}$. **11.** a) $5\frac{1}{2}$; b) $\frac{5}{48}$; c) 5. **12.** $2\frac{1}{12}$. **13.** $\frac{43}{88}$.

14. 3 700 kg de pâine şi 9 250 pâini. **15.** S-au recoltat 7 200 kg grâu. S-au măcinat $\frac{2}{5}$ din cantitate, adică 2 880 kg grâu şi s-au obţinut $\frac{17}{18}\cdot 2\,880 = 2\,720$ kg făină. S-au vândut $\frac{3}{10}$ din cantitate, adică $\frac{3}{10}\cdot 2\,720 = 816$ kg făină şi s-au încasat 8 160 lei, iar lor le-au rămas $2\,720 - 816 = 1\,904$ kg făină.

Dacă 2 880 kg s-au măcinat, înseamnă că au rămas 7 200 – 2 880 = 4 320 kg grâu. Jumătate, adică 4 320 : 2 = 2 160 kg s-au vândut cu 4 lei/kg și s-au încasat 8 640 lei, iar cealaltă jumătate, 2 160 kg, a rămas. **16.** a) $\overset{n+2)}{\frac{1}{n\cdot(n+1)}}-\overset{n)}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=\frac{n+2-n}{n\cdot(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n\cdot(n+1)(n+2)}$; b) Din $\frac{2}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}$; $\frac{2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}$; ...; $\frac{2}{8\cdot9\cdot10}=\frac{1}{8\cdot9}-\frac{1}{9\cdot10}\Rightarrow\left(\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+...+\right.$ $\left.+\frac{2}{8\cdot9\cdot10}\right):\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{1\cdot2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}+\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot4}}+...+\cancel{\frac{1}{8\cdot9}}-\frac{1}{9\cdot10}\right)\cdot2=\left(\overset{45)}{\frac{1}{1\cdot2}}-\frac{1}{9\cdot10}\right)\cdot2=$ $=\frac{45-1}{\cancel{90}_{45}}\cdot\cancel{2}^{1}=\frac{44}{45}$. **17.** a) Notăm $S = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ și $S = (2n - 1) + (2n - 3) +$ $+ ... + 1$, de unde rezultă că $2S = (2n - 1 + 1) + (2n - 3 + 3) + ... + (1 + 2n - 1) \Rightarrow 2S =$ $= \underbrace{2n+2n+...+2n}_{n\text{ ori}}$, adică $S=\frac{2n\cdot n}{2}=n^2$; b) Pentru $n = 1\,009$ găsim $1 + 3 + 5 + ... + 2 \cdot 1\,009 - 1 =$ $= 1009^2$, ținând cont de a). **18.** Din 17. a) avem că $1 + 3 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$; ...; $1 + 3 + 5 + ... + 199 = 1 + 3 + 5 + ... + (2 \cdot 100 - 1) = 100^2$ și $a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}\Rightarrow$ $\Rightarrow a : b = b : a = 1$ și $a : b + b : a = 1 + 1 = 2$.

10. Puteri

1. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^6=\frac{3^6}{5^6}$; c) $\left(2\frac{1}{7}\right)^4=\left(\frac{15}{7}\right)^4=\frac{15^4}{7^4}$. **2.** a) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; b) $\left(\frac{11}{9}\right)^5$; c) $\left(\frac{3}{10}\right)^{16}$; d) $\left(2\frac{1}{3}\right)^4=\left(\frac{7}{3}\right)^4$. **3.** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; c) $\left(\frac{9}{10}\right)^3$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; e) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$; f) $\left(\frac{7}{10}\right)^2$. **4.** a) 64; b) 125; c) 19; d) 324; e) $\frac{1}{8}$; f) $\frac{1}{25}$; g) $\frac{9}{16}$; h) $\frac{25}{4}$; i) $\frac{32}{243}$; j) 1; k) $\frac{1}{81}$; l) $\frac{13}{14}$; m) $\frac{1}{81}$; n) $\frac{16}{225}$; o) $\frac{1}{216}$. **5.** a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$; b) $\left(\frac{4}{10}\right)^8$; c) $\left(2\frac{9}{7}\right)^{18}$; d) $\left(\frac{15}{90}\right)^7$; e) $\frac{5}{7}$; f) $\left(\frac{125}{100}\right)^6$; g) $\left(7\frac{11}{90}\right)^6$; h) 1; i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$; j) $\left(\frac{2}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{3}^1}{7}\right)^5=\left(\frac{2}{7}\right)^5$; k) $\left(\frac{9}{5}:\frac{7}{5}\right)^{15}=\left(\frac{9}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{5}^1}{7}\right)^{15}=\left(\frac{9}{7}\right)^{15}$; l) $\left(\frac{8}{26}:\frac{4}{13}\right)^3=\left(\frac{\cancel{8}^2}{\cancel{26}_2}\cdot\frac{\cancel{13}^1}{\cancel{4}_1}\right)^3=$ $=1^3=1$. **6.** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$. **7.** $\left(\frac{3}{2}\right)^3$; b) $\left(\frac{13}{10}\right)^2$; c) 1; d) $\left(\frac{5}{4}\right)^2$; e) $\left(4\frac{1}{4}\right)^1$; f) $\left(\frac{2}{9}\right)^1$; g) $\left(\frac{5}{2}\right)^1$; h) 1; i) $\left[\left(\frac{7}{3}\right)^3\right]^{12}:\left[\left(\frac{7}{3}\right)^2\right]^{17}=\left(\frac{7}{3}\right)^{36}:\left(\frac{7}{3}\right)^{34}=\left(\frac{7}{3}\right)^2$. **8.** a) 27; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) 20^4. **9.** a) $\left(\frac{5}{2}\right)^3$; b) $\left(\frac{7}{3}\right)^3$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^0$; d) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$; e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; f) 0^1. **10.** a) 1; b) $\frac{1}{9}$; c) 1; d) 1. **11.** a) 2^{16} și $(2^3)^4=2^{12}$; b) $81^5=(3^4)^5=3^{20}$ și $27^3=(3^3)^3=3^9$; c) $125^3=(5^3)^3=5^9$ și $25^6=(5^2)^6=5^{12}$;

d) $\left(\frac{8}{27}\right)^3 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^9$ și $\left(\frac{4}{9}\right)^5 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$; e) $\left(\frac{125}{27}\right)^3 = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^3\right]^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^9$ și $\left(\frac{5}{3}\right)^4$.

12. a) $4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ și 3^{10}; b) $5^{30} = 5^{3\cdot 10} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ și $7^{20} = 7^{2\cdot 10} = (7^2)^{10} = 49^{10}$; c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{24} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2\cdot 12} = \left[\left(\frac{1}{7}\right)^2\right]^{12} = \left(\frac{1}{49}\right)^{12}$ și $\left(\frac{2}{3}\right)^{36} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\cdot 12} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{12} = \left(\frac{8}{27}\right)^{12}$; d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{18} = \left(\frac{1}{2}\right)^{36}$ și $\left(\frac{3}{5}\right)^{36}$; e) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^4\right]^7 = \left(\frac{1}{625}\right)^7$ și $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^7 = \left(\frac{1}{27}\right)^7$. **13.** a) $x = 5$; b) $x = 2$; c) $x = 2$; d) $x = 3$. **14.** a) Din $2x + 3 = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$; b) $2x - 4 = 18 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11$; c) $16 = x + 13 \Rightarrow x = 3$; d) $5^7 \cdot 0{,}2^7 = 1 \Rightarrow \left(\frac{13}{11}\cdot\frac{11}{39}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$; e) $5 + x = 10 \Rightarrow x = 5$; f) $x - 6 = 6 \Rightarrow x = 12$. **15.** a) $2x + 3 = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$; b) $3x + 4 = 10 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.

16. Se simplifică fracțiile și se obține: $a = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2$. Se aplică proprietățile de asociativitate și comutativitate obținându-se: $b = 1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2014}+\frac{2013}{2014}\right) = \underbrace{1+1+1+1+\ldots+1}_{2014 \text{ termeni}} = 2014 \Rightarrow b - a = 2012$. **17.** a) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{43}{21^2\cdot 22^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{21^2} - \frac{1}{22^2} = 1 - \frac{1}{22^2} = \frac{22^2-1}{22^2} = \frac{483}{484}$; b) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{97\cdot 99} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{99}\right) = \frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{98}^{49}}{99} = \frac{49}{99}$. **18.** 0.

11. Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. a) $\frac{1}{20}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{1}$; d) $\frac{100}{1}$. **2.** a) $\frac{7}{8}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{13}{14}$; b) $\frac{99}{100}$; c) $\frac{2n-3}{2n-2}$. **3.** a) $5\frac{2}{3}$; b) $22\frac{5}{11}$. **4.** a) (2, 9); (11, 0); (3, 4); (6, 1); b) (0, 4); (1, 1); (2, 0). **5.** $\frac{12}{24}$; $\frac{16}{24}$; $\frac{20}{24}$; $\frac{21}{24}$; $\frac{2(n+1)}{24}$. **6.** $\frac{2n+6}{n^2+n} = \frac{2(n+3)}{n(n+1)}$. Numărătorul și numitorul sunt numere pare și fracția se simplifică cu 2. **7.** $\frac{7}{29}$.

TESTUL 2

1. a) $\frac{31}{366}$; b) $\frac{29}{366}$; c) $\frac{31}{366}$. **2.** a) $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; b) $\frac{10}{11}$; c) $\frac{n}{n+1}$. **3.** a) $\frac{22}{7}$; b) $\frac{174}{17}$. **4.** a) (0,1); (0,2); (0,3); (0,4); (1,0); (2,0); (3,0); (4,0); (1,2); (2,1); (1,3); (3,1); (1,4); (4,1); (2,3); (3,2); (2,4); (4,2). b) (0,1); (1,0); (1,2); (2,1); (3,4); (4,3). **5.** $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{23}{17}$; $\frac{n}{11}$; $\frac{4n}{2n+1}$. **6.** Dacă există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$, astfel încât $d \mid 2n$ și $d \mid 2n+1 \Rightarrow d \mid (2n+1-2n) \Rightarrow d \mid 1$ absurd $\Rightarrow \frac{2n}{2n+1}$ este ireductibilă. **7.** 1.

TESTUL 3

1. $\frac{7}{4}$. **2.** $\frac{4}{7}$; $\frac{14}{25}$; $\frac{28}{33}$. **3.** a) 1; b) 2. **4.** 210 lei. **5.** 5 fracții. **6.** $x = 62$. **7.** $x \in \{0, 1, 2\}$.

TESTUL 4

1. $\frac{3}{2} > \frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{3}{8} > \frac{3}{11}$. **2.** $\frac{8}{4}$; $\frac{25}{14}$; $\frac{17}{13}$. **3.** a) 2; b) 1. **4.** 400 m². **5.** $x = 63$. **6.** $x = 1$, $y = 3$ sau $x = 4$, $y = 0$ sau $x = 0$, $y = 8$. **7.** 357 de lei.

TESTUL 5

1. a) 7, 0, 1; b) 2, 3, 1. **2.** a) subunitară; b) echiunitară; c) subunitară. **3.** a) 1; b) 2. **4.** $x = 31$. **5.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{9}{8}$. **6.** Avem $\frac{\overline{xy}+8x+8y}{9} = \frac{10x+y+8x+8y}{9} = \frac{18x+9y}{9} = \frac{18x}{9} + \frac{9y}{9} = 2x + y \in$ $\in \mathbb{N}$. **7.** 24 km.

TESTUL 6

1. a) $\frac{9}{15}$; b) $\frac{21}{27}$; c) $\frac{51}{57}$. **2.** $\frac{7}{3}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{8}{7}$. **3.** $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{4}{3} < \frac{5}{3} < \frac{7}{3} < \frac{10}{3}$. **4.** a) 4; b) 0. **5.** $x = 19$. **6.** 40 km. **7.** $x \in \{91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}$.

12. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

8. a) 360 : 30 = 12. Deci, pentru acoperirea lungimii sunt necesare 12 plăci de gresie. 260 : 30 = = 8 rest 20. Rezultă 260 = 8 · 30 + 20, deci, pentru acoperirea lățimii sunt necesare 8 + 1 = 9 plăci de gresie. Pentru acoperirea totală a pardoselii sunt necesare 12 · 9 = 108 plăci. Cum 108 : 5 = = 21 rest 3, rezultă 108 = 21 · 5 + 3, deci, sunt necesare 22 de cutii de gresie; b) Pentru lungime: 24 de plăci; pentru lățime: 18 plăci. Pentru acoperirea totală: 24 · 18 = 432 de plăci, adică 87 de pachete; c) Deoarece 260 = 2 · 13 · 2 · 5, divizorii lui 260 între 5 și 30 sunt: 5, 10, 13, 20 și 26. Printre aceștia, divizori ai lui 360 sunt: 5, 10 și 20. Prin urmare, latura plăcii este de 20 cm și sunt necesare: 260 : 20 = 13 plăci pentru lățime, 360 : 20 = 18 plăci pentru lungime și 13 · 18 = 234 de plăci pentru acoperirea totală a pardoselii. **9.** a) 6 are ponderea 1; 7 are ponderea 1; 8 are ponderea 2; 9 are ponderea 3; b) nota la teză are ponderea 1, iar media are ponderea 3; c) $m_p = 8$; d) $m_s = 8$. **10.** *Indicație.* c) Se împarte fiecare pâine în trei părți. Prin urmare, rezultă 15 treimi de pâine. Fiindcă cei trei s-au ospătat în mod egal, înseamnă că fiecare a consumat 5 treimi. Dar două pâini înseamnă 6 treimi, din care „proprietarul" a mâncat 5 treimi. Trei pâini înseamnă 9 treimi, din care „proprietarul" a mâncat 5 treimi. Oaspetele a mâncat și el 5 treimi (una de la cel cu două pâini și patru de la cel cu trei pâini).

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1

1. 1. **2.** Produsul a trei numere naturale consecutive este $n(n + 1)(n + 2)$ unde n este un număr natural oarecare. Restul împărțirii lui n la 3 poate fi 0, 1 sau 2. Deci n este egal cu $3p$, $3p + 1$ sau $3p + 2$. Înlocuind n în $n(n + 1)(n + 2)$ rezultă $n(n + 1)(n + 2) \vdots 3$ **3.** $a = b = 16$. **4.** $n = 3$. **5.** 14, 15, 16, 17. **6.** 12 400. **7.** 75. **8.** $ac = 2\,007$. **9.** $x = 2$. **10.** a) 1; b) 144; c) 0,25. **11.** a) 24; b) 372.

TESTUL 2

1. 765. **2.** 27. **3.** $x = 7$. **4.** $a < b$. **5.** 14. **6.** x este egal cu 0 sau 1. **7.** 16, 18, 20. **8.** 64. **9.** 4. **10.** a) 2 435; b) 4; c) 9. **11.** a) 7; b) 10.

TESTUL 3

1. 5. **2.** 30. **3.** 21. **4.** 25. **5.** $x = 3$. **6.** 40. **7.** 1. **8.** $100a + 10a + a + 100b + 10b + b + 100c + 10c + c =$ $= 111(a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$. **9.** 11, 13, 15. **10.** a) 0; b) 0; c) 9. **11.** a) 17 ani; b) 3 ani.

TESTUL 4

1. 3. **2.** 4. **3.** 4 200. **4.** 15. **5.** 30. **6.** 19. **7.** $111 \mid 111(a+b+c)$. **8.** 328. **9.** 40. **10.** a) 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81; 90; b) 13, 24, 35, 46, 57, 68, 86, 75, 64, 53, 42, 31, 20; c) 21, 42, 63, 84. **11.** a) 5; b) 40 lei; c) 8 lei.

TESTUL 5

1. 0. **2.** XXVII. **3.** 9. **4.** 4 000. **5.** 100. **6.** $x = 8$. **7.** 99. **8.** x este egal cu 1 sau 2. **9.** 64. **10.** 45. **11.** a) sumă de numere impare formată dintr-un număr impar de termeni; b) 0; c) 0.

TESTUL 6

1. 1. **2.** 6. **3.** $x = 3$. **4.** 12. **5.** Afirmația este adevărată deoarece $111x + 96 \mid 2(111x + 96)$. **6.** „2 007 nu se divide cu 3". **7.** 2 300. **8.** 2 020. **9.** 66. **10.** $x = 9$. **11.** a) 29, 36, 43; b) 99; c) 325.

TESTUL 7

1. 310. **2.** 3. **3.** $x = 17$. **4.** 118. **5.** 24 000. **6.** 25. **7.** 9. **8.** $x \in \{6, 7, 8, 9\}$. **9.** x este 2 sau 6. **10.** 10. **11.** a) $17^{28} = \left(17^{14}\right)^2$; b) $25^{19} = \left(5^{19}\right)^2$; c) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 55 = 28^2$.

TESTUL 8

1. 13. **2.** IX < XI. **3.** 1. **4.** $x = 11$. **5.** 18. **6.** 2. **7.** 10, 12, 20, 21. **8.** $x = 2$. **9.** $3^{72} \cdot 16$. **10.** a) 9; b) 9. **11.** a) 9; b) 81; c) 1.

TESTUL 9

1. $x = 3$. **2.** $a > b$. **3.** 3. **4.** 77. **5.** 75. **6.** 1027. **7.** XXXVII. **8.** 2. **9.** 250. **10.** a) 85; b) 40; c) 15. **11.** a) $2^{2n+1} \cdot 3^{2n}$; b) $2a = (2^{n+1} \cdot 3^n)^2$ – pătrat perfect.

TESTUL 10

1. 3. **2.** $x = 4$. **3.** $a < b$. **4.** 64. **5.** 4. **6.** 40. **7.** 60. **8.** 23. **9.** 98. **10.** 0. **11.** a) 6; b) 10; c) 8.

TESTUL 11

A. 1. 120. **2.** 8. **3.** 4. **4.** 1385. **5.** 1 și 5. **6.** falsă. **7.** 283. **8.** mai mare. **9.** 7.

B. 10. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{3}{3}; \frac{4}{4}$; c) $\frac{2}{3}; \frac{2}{4}; \frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$. **11.** a) par; b) 2, 7 și 3 sau 7, 2 și 3; c) Deoarece $\overline{abcdef}$ are tot atâtea cifre câte are $\overline{bcdefa}$, rezultă că $a \le 3$. Pentru $a = 1$, ultima cifră a numărului $3 \cdot f$ este 1 și deci $f = 7$. Ultima cifră a numărului $3 \cdot e + 2$ este 7 și deci $e = 5$. Ultima cifră a numărului $3 \cdot d + 1$ este 5 și deci $d = 8$. Ultima cifră a numărului $3 \cdot c + 2$ este 8 și deci $c = 2$. Ultima cifră a numărului $3 \cdot b$ este 2, adică $b = 4 \Rightarrow a = 1, b = 4, c = 2, d = 8, e = 5, f = 7$. Pentru $a = 2 \Rightarrow b = 8$, $c = 5$, $d = 7$, $e = 1$, $f = 4$. Pentru $a = 3$ nu avem soluții. **12.** a) 4 221, 8 442, 5 226, 9 447; b) $\frac{117}{21}; \frac{117}{51}; \frac{117}{81}; \frac{147}{24}; \frac{147}{54}; \frac{147}{84}; \frac{177}{27}; \frac{177}{57}; \frac{177}{87}$; c) $12^n + 3^n \cdot 4^n \cdot 4 + 3^n \cdot 4^n \cdot 4^2 = 12^n + 12^n \cdot 4 + 12^n \cdot 16 = 12^n(1 + 4 + 16) = 12^n \cdot 21$ și este divizibil cu 21.

TESTUL 12

A. 1. 64, 66, 68. **2.** 3. **3.** 0, 5, 10, 15. **4.** 1. **5.** 42 224. **6.** Cu 9 ani în urmă. **7.** echivalente . **8.** 1. **9.** 2. **B. 10.** 24 lei. **11.** a) 221; b) 221; c) 17 901. **12.** a) $x + y = 2\,289$ și $x = 17y + 111$, $111 < y \Rightarrow x = 2\,289 - y \Rightarrow 2\,289 - y = 17y + 111 \Rightarrow 18y = 2\,178 \Rightarrow y = 121$ și $x = 2\,168$; b) Fie n numărul $\Rightarrow 200 < n < 300$ și $n = 7c + 4$, $c \in \mathbb{N}$. Cum $200 = 7 \cdot 28 + 4 \Rightarrow$ cel mai mic număr căutat este $7 \cdot 29 + 4$ și cum $300 = 7 \cdot 42 + 6 \Rightarrow$ cel mai mare număr căutat este $7 \cdot 42 + 4$. Deci, numerele căutate sunt de forma: $7 \cdot c + 4$, unde c este egal cu 29, 30, ..., sau 42. Rezultă 14 numere; c) Din teorema împărțirii cu rest, notând deîmpărțitul cu a, împărțitorul cu b, câtul cu c și restul cu r, avem: $a = b \cdot c + r$, $0 \le r < b$ și $a - b = 1\,436 \Rightarrow a = 1\,436 + b \Rightarrow 1\,436 + b = 15b + 64 \Rightarrow 14b = 1\,372 \Rightarrow b = 98$ și $a = 1534$, adică: $1\,534 = 98 \cdot 15 + 64$.

TESTUL 13

A. 1. 1. **2.** asociativitatea, comutativitatea, zero este element neutru la adunarea numerelor naturale. **3.** 7, 8, 9, 10. **4.** 15. **5.** 1. **6.** 128. **7.** 19. **8.** 10. **9.** 5. **B. 10.** a) 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99; b) 111, 212, 313, 414, 515, 616, 717, 818, 919; c) 203, 230, 302, 320. **11.** a) prima cifră a lui a este 1, iar ultima este 8; prima cifră a lui b este 2, iar ultima este 7; b) Numărul a conține cifra 9 de 74 de ori, iar numărul b de $n-1$ ori; c) Numărul a are 76 de cifre, iar b are $n+1$ cifre. **12.** a) Fie $\overline{xy}$ numărul. Avem $\overline{xy} = 3\cdot(x+y) \Rightarrow 10x+y = 3x+3y \Rightarrow 7x = 2y$. Cum $x \neq 0 \Rightarrow x = 2, y = 7$ și numărul căutat este 27; b) Fie n numărul căutat, iar c_1, c_2 câturile celor două împărțiri $\Rightarrow n = 16c_1 + 4 \Rightarrow n$ este număr par și, pe de altă parte, $n = 20c_2 + 5 \Rightarrow n$ este număr impar $\Rightarrow$ nu există număr natural cu aceste proprietăți; c) $400 = 256 + 144 = 256 + 128 + 16 = 2^8 + 2^7 + 2^4$.

TESTUL 14

A. 1. 4. **2.** 7. **3.** 9. **4.** 13. **5.** 1 002 și 2. **6.** 36 de porumbei. **7.** $72 = 3^2\cdot 2^3$ are $(2+1)\cdot(3+1) = 3\cdot 4 = 12$ (divizori). **8.** 504. **9.** 2 200 002. **B. 10.** a) $4^n = 4^3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow 2^{2n+2} = 256$ și $2^{4n} = 4\,096$; b) 410; c) $a = 900101\underbrace{000...00}_{n-2\text{ zerouri}} - 1 = 900100\underbrace{999...99}_{n-2\text{ cifre}}$. **11.** a) $\dfrac{1}{x+y+z+t} = \dfrac{\overline{xyz}}{10^4} \Rightarrow \overline{xyz}(x+y+z+t) = 10^4$ sau $\overline{xyz}\,(x+y+z+t) = 2^4\cdot 5^4$. Dar $\overline{xyz} \mid 2^4\cdot 5^4 \Rightarrow \overline{xyz}$ este egal cu 100, 125, 200, 250, 400, 500, 625. Făcând calculele obținem $\overline{xyz} = 625$, deci $x = 6$, $y = 2$, $z = 5$, respectiv $t = 3$; b) $\overline{a7}\cdot\overline{b7} = \overline{cc99}, \overline{cc99} \,\vdots\, 11 \Rightarrow \overline{a7} \,\vdots\, 11$ sau $\overline{b7} \,\vdots\, 7$. Dacă $11 \mid \overline{a7} \Rightarrow a = 7$ și $b = 8$ și analog $\Rightarrow$ numerele sunt 77 și 87; c) Fie $\overline{abcd}$, respectiv $\overline{dcba}$, numărul, respectiv răsturnatul său. Din $\overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ și $\overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a \Rightarrow \overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001a + 110b + 110c + 1001d = 11\cdot(91a+10b+10c+91d) \,\vdots\, 11$. **12.** a) $a = \overline{xxxyyy} = 100000x + 10000x + 1000x + 100y + 10y + y = 111000x + 111y = 111(1000x + y) = 3\cdot 37(1000x + y) \,\vdots\, 37$; b) Dacă $x = y \Rightarrow a = 3\cdot 37(1000x + x) = 3\cdot 37\cdot 1001x = 3\cdot 37\cdot 7\cdot 11\cdot 13x$, care se divide cu 7, 11 și 13.

PROBLEME DATE LA CONCURSURI ȘCOLARE

1. a) 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39; b) i) 1231 este al 308-lea termen al șirului; 2 009 nu este termen al șirului; ii) $a_k = 4k - 1$, termenul general; $a_{100} = 400 - 1 = 399$. **2.** $x - y = 3$; $x + 11 = 3y$, de unde $x = 10$, $y = 7$ numerele căutate. **3.** Avem $abc = 72b$, $abc = 108a$, de unde $108a - 72b = 0$ și cum $5a + 3b = 57$, găsim $a = 6$, $b = 9$, $c = 12$. **4.** Din linia 2 și coloana 3 găsim $6 + 11 + c + 9 = 3 + c + 8 + g$, de unde $g = 15$. Din linia 2 și o diagonală găsim $6 + 11 + c + 9 = b + c + 7 + 5$, de unde $b = 14$. Din linia 1 și coloana 1 găsim $a + 4 + 3 + 14 = a + 6 + d + 5$, de unde $d = 10$. Înlocuind b, d și g, obținem $a + 21 = c + 26 = e + 25 = f + 22$, de unde $a = c + 5$, $e = c + 1$, $f = c + 4$. Cum c trebuie să fie cel mai mic, rezultă că $c = 12$ și apoi $a = 17$, $e = 13$, $f = 16$. **5.** 30 de minute (Andrei, în 30 min. mănâncă 1 pizza; Alex, în 30 min., 2 pizze; Adrian 3 pizze în 30 min.). **6.** a) $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6$ sunt cele 7 numere consecutive; $S = 7x + 21 = 7(x+3)$, deci suma este divizibilă cu 7; b) Fie $n = 2k + 1$. Atunci $S = x + (x+1) + \ldots + (x+2k) = (2k+1)x + \dfrac{(1+2k)2k}{2} = (1+2k)(x+k)$, deci $S \,\vdots\, 2k+1$. **7.** a) Dacă $x\cdot y\cdot z \neq 0$ și $m\cdot n\cdot p \neq 0$, egalitatea din enunț este imposibilă. Urmează că $x\cdot y\cdot z\cdot m\cdot n\cdot p = 0$, de unde $2009^{xyzmnp} = 1$; b) Cazuri: i) $\overline{abc} = 128 = 2^7$. De aici $2^{\overline{cde}} = (2^7)^{2^7} \Rightarrow \overline{cde} = 7\cdot 128 = 896$. Avem $\overline{abc} = 128$, $\overline{cde} = 896$; ii) $\overline{abc} = 256 = 2^8$.

De aici $2^{\overline{cde}} = (2^8)^{2^8} \Rightarrow \overline{cde} = 8 \cdot 256 = 2\,048$, absurd, căci obținem un număr cu 4 cifre. **8.** a) Fie $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,009$; $x \vdots 8 \Rightarrow x = 8k$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow B = 8k + 3$, $3 < 8 \Rightarrow$ restul împărțirii lui B la 8 este 3; b) Analog a), $A = 8k - 3 = 8k - 8 + 5 = 8(k - 1) + 5$, $5 < 8 \Rightarrow$ restul împărțirii lui A la 8 este 5. **9.** a) $2\,009 = 49 \cdot 41 = (7)^2 \cdot 41$; b) Din a), pentru $n = 7$, avem $n^4 - n^3 - n^2 = n^2(n^2 - n - 1) = 7^2 \cdot 41 = 2\,009$. **10.** a) Avem $U(C) = 0$ pentru $n = 4k + 3$; $n = 4k + 2$, $n = 4k + 1$ și $U(C) = 4$ dacă $n = 4k$; b) Din a), numărul D este divizibil cu 10 pentru $n = 4k + 3$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 1$ și nu este divizibil cu 10 pentru $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. **11.** Avem $U(A) = U(2\,000^0) + U(2\,001^1) + U(2\,002^2) + U(2\,003^3) + \ldots + U(2\,009^9) + 2 = 1 + 1 + 4 + 7 + 6 + 5 + 6 + 3 + 6 + 9 + 2 = 0$. **12.** $100 \cdot 101 = 100(100 + 1) = 100^2 + 100$. Analog pentru fiecare termen: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 100 \cdot 101 = 1^1 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \ldots + 100^2 + 100 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2 + (1 + 2 + \ldots + 100) = 1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2 + 5\,050$, de unde, scăzând 5 050, obținem rezultatul dorit $B = 1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$. **13.** $15 + 132 + 346 = 3x$, unde x = numărul care se scade; $3x + 493 = 1015$, adică $3x = 522$, de unde $x = 174$. Numerele vor fi 189, 306, 520. **14.** Numărul de zerouri este dat de puterea la care se găsește 5 în scrierea lui A. Obținem 5^{14}, deci A se va termina în 14 zerouri. **15.** Numărul minim de participanți va fi, în condițiile problemei, $1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 10 \cdot 21 = 210$. Cum avem 211 participanți, nu se pot caza în cele 20 de camere. **16.** Notăm cu x vârsta băiatului în momentul de față. Tatăl are $23 + x$, sora $x - 4$, mama $x + 18$, deci $23 + x + x - 4 + x + 18 + x = 97$, de unde $4x = 60$, adică $x = 15$. Deci, băiatul are 15 ani, tatăl 38, sora 11, mama 33. **17.** $2^{113} - 2^{110} = 7 \cdot 2^{110} = 14 \cdot 2^{109}$; pe de altă parte $3^{89} + 3^{87} = 3^{87}(3^2 + 1) = 10 \cdot 3^{87}$. **18.** Notând cu S suma, avem $S = 102(1 + 2 + \ldots + 100) \Rightarrow 2S = 102 \cdot 101 \cdot 100$. **19.** a) $(2a + 2b + 2c) + (a + 3b - 2c) = 3a + 5b = 2 \cdot 72 + 50 = 194$; b) dacă $b = 1$, $a = 63$, $c = 8$. **20.** Numerele îndeplinesc condițiile $2x - 3y = 0$ și $x - y = 16$, de unde $x = 48$, $y = 32$. **21.** Din $13n + 8 = 80k_1 + 13$ și din $8n + 5 = 50k_2 + 5$ găsim $65n = 400k_1 + 25$ (1), respectiv $64n = 400k_2$ (2). Scăzând (2) din (1), ajungem la $n = 400(k_1 - k_2) + 25$, de unde ultimele două cifre ale lui n sunt $\overline{25}$. **22.** a) $\overline{xy}$ = bipătrat $\Leftrightarrow x + y$ și $x \cdot y$ sunt pătrate perfecte nenule $\Rightarrow x + y$ este egal cu 1, 4, 9 sau 16 și $x \cdot y$ este egal cu 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 sau 81 $\Rightarrow x = y = 2 \Rightarrow \overline{xy} = 22$ sau $x = y = 8 \Rightarrow \overline{xy} = 88$; b) Dacă $\overline{xyz}$ = bipătrat, atunci $\overline{xzy}$, $\overline{yxz}$, $\overline{yzx}$, $\overline{zxy}$, $\overline{zyx}$ sunt bipătrate; $\overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{yzx} + \overline{yxz} + \overline{zxy} + \overline{zyx} = 222(x + y + z)$. Dacă $\overline{x_1y_1z_1}$, $\overline{x_2y_2z_2}$, ..., $\overline{x_ny_nz_n}$ sunt bipătratele de trei cifre care diferă cel puțin printr-o cifră, atunci suma tuturor bipătratelor de trei cifre este: $\overline{x_1y_1z_1} + \overline{x_1z_1y_1} + \overline{y_1x_1z_1} + \overline{y_1z_1x_1} + \overline{z_1x_1y_1} + \overline{z_1y_1x_1} + \ldots + \overline{x_ny_nz_n} + \overline{x_nz_ny_n} + \overline{y_nx_nz_n} + \overline{y_nz_nx_n} + \overline{z_nx_ny_n} + \overline{z_ny_nx_n} = 222(x_1 + y_1 + z_1 + \ldots + x_n + y_n + z_n) = 37 \cdot 6(x_1 + y_1 + z_1 + \ldots + x_n + y_n + z_n)$. **23.** Notăm cu x prețul unui kg de portocale și cu y prețul unui kg de kiwi. Avem $5x + 4y = 140$, respectiv $7x + 2y = 106$, de unde $x = 8$ lei, $y = 25$ lei, de unde $4x + 5y = 157$ lei. **24.** x = nr. problemelor rezolvate corect, y = nr. problemelor greșite. Avem $x + y = 38$; $5x - 3y = 102$, de unde $8x = 216$; rezultă $x = 27$, $y = 11$. Cum elevul a greșit mai mult de 5, nu a promovat. **25.** Avem $S_1 = 2^{2012} - 1$; $S_2 = 2\,009 \cdot 1\,005$; $U(S_1 - S_2) = U(S_1) - U(S_2) = 5 - 5 = 0$, de unde $10 \mid S_1 - S_2$. **26.** Numerele $\overline{abc}$ care îndeplinesc condiția sunt 889, 898, 988, 799, 997, 979. Suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 2$ este 9, 18 sau 27. **27.** Notând S suma căutată, găsim: $S = 2\,009 \cdot 2\,009 + (2\,009 \cdot 2\,009 + 1) + \ldots + (2\,009 \cdot 2\,009 + 2\,008) = 2\,009 \cdot 2\,009 \cdot 2\,009 + 1 + 2 + \ldots + 2\,008 = 2\,009^3 + 2\,009 \cdot 1\,004 = 2\,009(2\,009^2 + 1\,004)$, care nu este pătrat perfect. **28.** a) Puterile lui 2 care se scriu cu patru cifre sunt: $2^{10} = 1\,024$, $2^{11} = 2\,048$, $2^{12} = 4\,096$ și $2^{13} = 8\,192$; b) Se arată că există o putere a lui 2 cu n cifre. În caz contrar există $p \in \mathbb{N}$ cu $2^p < 10^{n-1} < 10^n < 2^{p+1}$. Din ultima inegalitate rezultă că $5 \cdot 10^{n-1} < 2^p$, ceea ce

conduce la $5 \cdot 10^{n-1} < 10^{n-1}$, absurd. Fie $a = 2^m$ prima putere a lui 2 scrisă cu n cifre. Se observă că prima cifră a numărului a este 1, astfel $a > 2 \cdot 10^{n-1}$ şi $\frac{a}{2} = 2^{m-1} > 10^{n-1}$ este o putere mai mică a lui 2, scrisă tot cu n cifre. Ca urmare, avem: $a < 2 \cdot 10^{n-1}$, $2a < 4 \cdot 10^{n-1}$ şi $4a < 8 \cdot 10^{n-1}$, ceea ce înseamnă că 2^m, 2^{m+1} şi 2^{m+2} sunt trei puteri ale lui 2 cu n cifre. **29.** $\overline{ab}$ este egal cu 16, 25, 37, 40, 45, 52, 61, 73, 76, 81, 88 sau 97. **30.** a) $a = 8$; b) $n \vdots 11$ şi $n \not\vdots\ 11^3$; c) $a = 3$. **31.** 2 011. **32.** Dacă $\overline{abc}$ se divide cu 17, atunci $100a + 10b + c = \mathcal{M}_{17}$. Cum şi $12a - 6b + c = \mathcal{M}_{17}$, scăzând relaţiile se obţine că $88a + 16b = \mathcal{M}_{17}$. Din faptul că $88a + 16b = \mathcal{M}_{17}$ şi $85a + 17b = \mathcal{M}_{17}$ se obţine că $3a - b = \mathcal{M}_{17}$. Cea mai mare valoare pentru $3a - b$ se obţine pentru $a = 9$ şi $b = 0$ şi $3a - b \leq 27$. Se deduce că $3a - b$ poate fi 0 sau 17. Din $3a - b = 0$ rezultă că $b = 3a$ şi numerele pot fi $\overline{13c}$; $\overline{26c}$; $\overline{39c}$. De unde se obţin soluţiile 136 şi 391. Din $3a - b = 17$ rezultă $3a = 17 + b$ şi numerele pot fi $\overline{61c}$; $\overline{74c}$; $\overline{87c}$, obţinându-se soluţiile 612 şi 748. **33.** $1 + 2 + 3 + \ldots + 30 = 465$. Suma rămâne aceeaşi; a) Da; b) Nu. **34.** a) 4; b) 16. **35.** $(3^n \cdot 7^n)^2 + (3^n \cdot 7^n \cdot 2)^2 + (3^n \cdot 7^n \cdot 7)^2$. **36.** a) 7; b) 1. **37.** a) 497; b) Nu; c) 24 950. **38.** a) (6; 3); (8; 6); (10; 9); b) (4 028; 6 036); c) 1) $x = 204$; 2) $y = 2\,994$. **39.** $n = 6$; $m = 4$. **40.** 135; 225; 315; 405. **41.** 51 sau 52. **42.** $a = \underbrace{111\ldots1}_{2012} = \underbrace{1111\ 1111\ 1111\ldots1111}_{503 \text{ grupe de } 1111} = 1\,111 \cdot 10^{2008} + 1\,111 \cdot 10^{2004} + 1\,111 \cdot 10^{2000} + \ldots + 1\,111 \cdot 1 = 1\,111(10^{2008} + 10^{2004} + 10^{2000} + \ldots + 1) = 101 \cdot 11(10^{2008} + 10^{2004} + 10^{2000} + \ldots + 1) = 101 \cdot 11 \cdot (1\underbrace{00\ldots0}_{2008} + 1\underbrace{00\ldots0}_{2004} + 1\underbrace{00\ldots0}_{2000} + \ldots + 1) = 101 \cdot (11\underbrace{00\ldots00}_{2008} + 11\underbrace{00\ldots00}_{2004} + 11\underbrace{00\ldots00}_{2000} + \ldots + 11) = 101 \cdot \underbrace{110011001100\ldots11}_{2010}$. Deci câtul este $\underbrace{110011001100\ldots11}_{2010}$ şi restul este 0.

Cuprins

RECAPITULARE ŞI EVALUARE INIŢIALĂ 5
1. Exerciţii şi probleme recapitulative 5
2. Modele de teste pentru evaluarea iniţială 10
Capitolul I. NUMERE NATURALE 14
Introducere 14
1. Scrierea şi citirea numerelor naturale 15
2. Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor. Compararea şi ordonarea numerelor naturale; estimări, aproximări 20
3. Recapitulare şi sistematizare prin teste 25
Test de autoevaluare 27
Operaţii cu numere naturale 29
1. Adunarea numerelor naturale; proprietăţi 29
2. Scăderea numerelor naturale 33
3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul operaţiilor de adunare şi scădere 36
4. Recapitulare şi sistematizare prin teste 39
Test de autoevaluare 43
5. Înmulţirea numerelor naturale; proprietăţi. Factor comun 45
6. Împărţirea numerelor naturale 48
7. Teorema împărţirii cu rest. Reguli de calcul 53
8. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor 57
9. Recapitulare şi sistematizare prin teste 60
Test de autoevaluare 63
10. Puteri cu exponent natural ale unui număr natural 65
11. Compararea şi ordonarea puterilor. Reguli de comparare 68
12. Pătratul şi cubul unui număr natural. Pătrate perfecte 70
13. Operaţii cu puteri 72
14. Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2 76
15. Recapitulare şi sistematizare prin teste 80
Test de autoevaluare 83
16. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor 85
Metoda figurativă 85
Metoda reducerii la unitate 85
Metoda comparaţiei 86
Metoda falsei ipoteze 86
Metoda mersului invers 86
17. Media aritmetică a două numere naturale cu rezultat număr natural 89
18. Recapitulare şi sistematizare prin teste 91
Test de autoevaluare 93
Divizibilitatea numerelor naturale 95
1. Divizor. Multiplu. Divizor comun. Multiplu comun 95
2. Aplicaţii ale divizibilităţii (Numere pare şi numere impare) 98
3. Criterii de divizibilitate 100
4. Recapitulare şi sistematizare prin teste 102
Test de autoevaluare 105

Capitolul II. FRACŢII ORDINARE. FRACŢII ZECIMALE 107
1. Fracţii ordinare; reprezentarea fracţiilor prin desene 108
2. Fracţii subunitare, echiunitare şi supraunitare. Introducerea şi scoaterea întregilor dintr-o fracţie 110
3. Aflarea unei fracţii dintr-un număr natural. Procent 114
4. Fracţii echivalente 117
5. Amplificarea şi simplificarea fracţiilor. Fracţii ireductibile 119
6. Reprezentarea pe axa numerelor a unei fracţii ordinare 121
7. Adunarea şi scăderea fracţiilor 123
8. Înmulţirea fracţiilor 127
9. Împărţirea fracţiilor 131
10. Puteri 134
11. Recapitulare şi sistematizare prin teste 139
Test de autoevaluare 143
12. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană 145
TESTE RECAPITULATIVE 147
PROBLEME DATE LA CONCURSURI ŞCOLARE 156
INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI 160

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Piteşti, jud. Argeş, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro
sau accesaţi www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Seria de lucrări
MATE 2000+ CONSOLIDARE,
destinată claselor de gimnaziu, respectă toate cerințele programei referitoare la *competențe generale, competențe specifice* și *conținuturi*, oferind *sugestii metodologice* dintre cele mai atractive.

Prin urmare, pentru fiecare capitol din programă sunt prevăzute:

- **un text teoretic succint, obligatoriu** (rezumat al conținuturilor învățării propuse de programă),care cuprinde **noțiuni și relații** (introduse prin definiții și notații corespunzătoare), **proprietăți** (teoreme, propoziții etc.), **metode** (reguli de calcul, algoritmi de lucru etc.). Pentru a fi bine înțelese și reținute de elevi, noțiunile teoretice sunt însoțite de exemple și modele de rezolvări;
- **un text teoretic neobligatoriu**, destinat aprofundării suplimentare de către elevii preocupați de performanță a conținuturilor propuse de programă, în vederea obținerii unor rezultate deosebite la concursuri și olimpiade școlare;
- **activități de consolidare a învățării**, pentru lucrul la clasă și pentru acasă (afterschool, homeschooling), care grupează tipuri diverse de exerciții și probleme pe trei niveluri progresive: **1) înțelegere; 2) aplicare și exersare; 3) aprofundare și performanță.** Această abordare modulară permite aplicarea metodei interactive moderne de învățare centrată pe elev *știu / vreau să știu / am învățat*;
- utilizarea algoritmilor și conceptelor matematice de bază în activitatea practică (**matematica aplicată în viața cotidiană**) ca metodă modernă de învățare;
- **evaluări ale progresului învățării** prin teste conforme cu **standardele** Ministerului Educației;
- **aplicație destinată învățării în sistem online**; prin scanarea QR CODE-ului prezent în interiorul volumului tipărit, se oferă (în premieră pe piața cărții din România) acces la activități de predare aflate în strânsă legătură atât cu conținuturile programei, cât și cu cele ale volumului tipărit.

ISBN 978-973-47-3640-9
Partea I ISBN 978-973-47-3641-6
9 789734 736416 >
edituraparalela45.ro

Aplicația **MATE2000+** poate fi descărcată din magazinele AppStore și Google Play

Available on the App Store
Google Play

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL