Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2-3i)(2+3i)=4-9i^2=$	**3p**
	$=13$	**2p**
2.	$f(3)=5$	**2p**
	$f(f(3))=f(5)=9$	**3p**
3.	$x^2+17=81 \Leftrightarrow x^2=64$	**2p**
	$x_1=-8$ și $x_2=8$, care verifică ecuația	**3p**
4.	Sunt 90 numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 18 numere naturale de două cifre, divizibile cu 5, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{18}{90}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$m_{AB}=\dfrac{2-a}{2}$ și $m_{BC}=1$	**2p**
	$m_{AB}=m_{BC} \Leftrightarrow a=0$	**3p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{4}=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\ A(-1)=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix},\ A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&2a\\2a&4\end{vmatrix}=4-4a^2$	**3p**
	$4-4a^2=0 \Leftrightarrow a_1=-1$ şi $a_2=1$	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&4\\4&4\end{pmatrix},\ \det(A(2))=-12\neq 0 \Rightarrow (A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(8) \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&16\\16&4\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}5&-4\\-1&5\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=2\cdot(-3)\cdot 3-6\cdot(-3)-6\cdot 3+21=$ $=-18+18-18+21=3$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=2xy-6x-6y+18+3=$ $=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}=\left(1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}\right)\circ 3\circ\left(\sqrt{10}\circ\sqrt{11}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}\right)=$ $=3\circ\left(\sqrt{10}\circ\sqrt{11}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}\right)=3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ $f'(x)=3e^x+2x$ și $f'(0)=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=3$	**2p** **3p**
b)	$f(0)=3$, $f'(0)=3$ Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=3x+3$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=3e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)>0$, pentru orice număr real x, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\Big\vert_1^3=$ $=\dfrac{1}{2}(9-1)=4$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)e^x dx=\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^x dx=$ $=2e^2-e-e^x\Big\vert_1^2=e^2$	**3p** **2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^a\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big\vert_1^a=\dfrac{a^2-1}{2}+\ln a$ $\dfrac{a^2-1}{2}+\ln a=4+\ln a\Leftrightarrow a^2=9$ și cum $a>1$, obținem $a=3$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $(2-3i)(2+3i)$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Calculați $f(f(3))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+17)=\log_3 81$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,a)$, $B(3,2)$ și $C(2,1)$. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(2)\cdot X=A(8)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.
5p	**a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.
5p	**b)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Calculați $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^x+x^2$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi ca funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=4$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=a$, are aria egală cu $4+\ln a$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **<u>Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$	**3p**
	$z^2 - 2i = 2i - 2i = 0$	**2p**
2.	$f(3) = 0$	**2p**
	$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(0) = 2015$	**3p**
3.	$x^2 - 5x = 3 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$	**3p**
	$x_1 = -1$ și $x_2 = 3$	**2p**
4.	$C_5^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} =$	**3p**
	$=5$	**2p**
5.	Panta dreptei d este egală cu 2	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y = 2x + 4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta MNP} = \frac{12 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} =$	**3p**
	$= 9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$	**3p**
	$1 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -1$ și $a_2 = 1$	**2p**
c)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 1+ab & -b-a \\ -a-b & ab+1 \end{pmatrix}$, $A(a+b) = \begin{pmatrix} 1 & -a-b \\ -a-b & 1 \end{pmatrix}$, $abI_2 = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$	**3p**
	$A(a+b) + abI_2 = \begin{pmatrix} 1+ab & -a-b \\ -a-b & 1+ab \end{pmatrix} = A(a)A(b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
2.a)	$f(0) = 0^3 - m \cdot 0 + 2 =$	**3p**
	$= 0 - 0 + 2 = 2$	**2p**
b)	Restul este $(3-m)X$	**3p**
	$3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$	**2p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 0$	**2p**
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = m(x_1 + x_2 + x_3) - 6 = m \cdot 0 - 6 = -6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-1$ și $f'(0)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$	**3p**
b)	$e^x\le 1\Leftrightarrow x\le 0$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(0)=0$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	**2p**
	Cum f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$, obținem $f(x)\ge f(0)\Rightarrow e^x\ge x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\int_0^1\left(x^2-2x+5+2x-5\right)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_0^1=\dfrac{1}{3}$	**3p**
b)	$\int_0^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\left.\ln\left(x^2-2x+5\right)\right\|_0^2=$	**3p**
	$=\ln 5-\ln 5=0$	**2p**
c)	$f(x)=(x-1)^2+4\ge 4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\le\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{4}dx=\left.\dfrac{1}{4}x\right\|_{2014}^{2015}=\dfrac{1}{4}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-2i=0$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2015$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x}=5^{3-3x}$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2x+7$.

5p **6.** Determinaţi aria triunghiului MNP, ştiind că $MN=12$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle M)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2+X-2$ este egal cu 0.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x\geq x+1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)+2x-5)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{2014}^{2015}\frac{1}{f(x)}\,dx\leq\frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1 z_2 = (3+i)(3-i) = 9 - i^2 =$	**3p**
	$=10$, care este număr real	**2p**
2.	$f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + a = 1$	**3p**
	$a = 0$	**2p**
3.	$x^3 + 2x - 4 = x^3 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	Mulțimea A are 80 de elemente, deci sunt 80 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 11 numere divizibile cu 7, deci sunt 11 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{11}{80}$	**2p**
5.	$m_{OA} = 2$ și $m_{OB} = \frac{a}{2}$	**2p**
	$m_{OA} = m_{OB} \Leftrightarrow a = 4$	**3p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} =$	**2p**
	$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 =$	**3p**
	$= 4 - 0 = 4$	**2p**
b)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 2$	**2p**
c)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 4+xy & 2x+2y \\ 2x+2y & 4+xy \end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(x+y) + xyI_2 = 2\begin{pmatrix} 2 & x+y \\ x+y & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+xy & 2(x+y) \\ 2(x+y) & 4+xy \end{pmatrix} = A(x)A(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

2.a)	$2*(-2)=3\cdot 2\cdot(-2)+6\cdot 2+6\cdot(-2)+10=$	**3p**
	$=-12+12-12+10=-2$	**2p**
b)	$x*y=3xy+6x+6y+12-2=$	**2p**
	$=3x(y+2)+6(y+2)-2=3(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x*x*x=9(x+2)^3-2$	**2p**
	$9(x+2)^3-2=x \Leftrightarrow x_1=-\frac{7}{3}$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{5}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x+1)'\cdot e^x+(x+1)\cdot\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=2$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=2x+1$	**3p**
c)	$f''(x)=(x+3)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $[-3,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+3x\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\right\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{1}\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\left(x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\ln\left(x^2+1\right)\right)\right\|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{0}^{m}\lvert g(x)\rvert dx=\int_{0}^{m}\frac{2x}{x^2+1}dx=\left.\ln\left(x^2+1\right)\right\|_{0}^{m}=\ln\left(m^2+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(m^2+1\right)=\ln 2\Leftrightarrow m^2+1=2$ și, cum $m>0$, obținem $m=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3+i$ și $z_2 = 3-i$. Arătați că numărul $z_1 z_2$ este real.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x+a$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3+2x-4} = x$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, ..., 80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(2,a)$. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = 4$.
5p	**b)** Determinați numărul real a, știind că $A(1) + A(3) = a\,A(2)$.
5p	**c)** Arătați că $A(x)A(y) = 2A(x+y) + xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.
5p	**a)** Arătați că $2 * (-2) = -2$.
5p	**b)** Arătați că $x * y = 3(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = (x+2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $[-3, +\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-1}^{1} (x^2+1) f(x)\,dx = 0$.
5p	**b)** Arătați că $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.
5p	**c)** Determinați numărul real m, $m > 0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = m$, are aria egală cu $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2 = a_1 + r = 1 + 2 =$ $= 3$	**3p** **2p**
2.	$f(m) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0$ $m = -1$	**3p** **2p**
3.	$x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x_1 = -2$ şi $x_2 = 2$, care verifică ecuația	**2p** **3p**
4.	Mulțimea M are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile În mulțimea M sunt 2 numere divizibile cu 3, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$\frac{a+1}{1} = \frac{4}{2}$ $a = 1$	**3p** **2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2014) = \begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2016) = \begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2015) = \begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}$ $A(2014) + A(2016) = \begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix} = 2A(2015)$	**3p** **2p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - a$ $3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$	**3p** **2p**
c)	$A(2) + xA(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xA(3)) = x + 1$ $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	**3p** **2p**
2.a)	$(-1) * 1 = -(-1) \cdot 1 - (-1) - 1 - 2 =$ $= 1 + 1 - 1 - 2 = -1$	**3p** **2p**
b)	$x * y = -xy - x - y - 1 - 1 =$ $= -x(y+1) - (y+1) - 1 = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**

c)	$(x+2)*(2x-3)=-(x+3)(2x-2)-1$	**2p**
	$x^2+2x=0 \Leftrightarrow x_1=-2$ și $x_2=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-16x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-4\right)=4x(x-2)(x+2),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x^2+16}{x^2+1}=$	**2p**
	$=-8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0$	**2p**
	Coordonatele punctelor sunt $x_1=-2$, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=16$ și $x_3=2$, $y_3=0$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 x f(x)dx=\int_1^2(x+2)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$	**2p**
b)	$F'(x)=(x+2\ln x+2015)'=1+\frac{2}{x}=$	**3p**
	$=\frac{x+2}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^e\|g(x)\|dx=\int_1^e\frac{2}{x}\ln x\,dx=\left.\ln^2 x\right\|_1^e=$	**3p**
	$=\ln^2 e-\ln^2 1=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și rația $r = 2$.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, știind că punctul $A(m,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+4\right) = \log_2 8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, știind că vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Arătați că $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(2014) + A(2016) = 2A(2015)$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(A(a)\right) = 0$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(2) + xA(3)\right) = 0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = -xy - x - y - 2$.

5p **a)** Arătați că $(-1) * 1 = -1$.

5p **b)** Arătați că $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2) * (2x-3) = 5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x) - x^4}{x^2+1}$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_1^2 x f(x)\,dx = \frac{7}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x) = x + 2\ln x + 2015$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \left(f(x) - 1\right)\ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3=3+(3+2)+(3+2\cdot 2)=$	**3p**
	$=15$	**2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=-1$	**2p**
	$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{12}{4}=-3$	**3p**
3.	$x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente este egal cu $C_5^3=$	**3p**
	$=10$	**2p**
5.	$M(-2,3)$	**2p**
	$AM=4$	**3p**
6.	$\cos a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\operatorname{ctg} a=2\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(3))=\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 3=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$A(-2015)=\begin{pmatrix}2&-2015\\1&3\end{pmatrix}$, $A(2015)=\begin{pmatrix}2&2015\\1&3\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(-2015)+A(2015)=\begin{pmatrix}4&0\\2&6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=2A(0)$	**3p**
c)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2&x\\1&3\end{vmatrix}=6-x$	**2p**
	$x^2+x-6=0\Leftrightarrow x_1=-3$ și $x_2=2$	**3p**
2.a)	$f(\hat{0})=\hat{0}^3+a\cdot\hat{0}=$	**2p**
	$=\hat{0}$	**3p**
b)	$f(\hat{3})=\hat{2}+a\cdot\hat{3}$	**2p**
	$\hat{2}+a\cdot\hat{3}=\hat{3}\Rightarrow a=\hat{2}$	**3p**
c)	$\hat{1}+a=\hat{3}+a\cdot\hat{2}\Rightarrow a=\hat{3}$	**2p**
	$f(\hat{3})=\hat{1}$ și $f(\hat{4})=\hat{1}\Rightarrow f(\hat{3})=f(\hat{4})$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x-x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=1$, $f'(1)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,e]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,e]$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in[e,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[e,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+\dfrac{x}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^2+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{x^3}{3}+x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{4}{3}-\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}+\ln 2=\dfrac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)\Rightarrow n=-2$ nu este număr natural şi $n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 3$ și rația $r = 2$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, știind că M este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Calculați $\operatorname{ctg} a$, știind că $\sin a = \frac{1}{3}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(3))$.

5p **b)** Arătați că $A(-2015) + A(2015) = 2A(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = x^2$.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + aX$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și $a \in \mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{0})$.

5p **b)** Determinați $a \in \mathbb{Z}_5$, știind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.

5p **c)** Arătați că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$, are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln(n^2 + n)$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-2+0,75=$	**3p**
	$=-1,25$	**2p**
2.	Punctele de intersecție cu axele de coordonate sunt $A(3,0)$ și, respectiv, $B(0,4)$	**2p**
	Distanța AB este egală cu 5	**3p**
3.	$\left(3^{-1}\right)^{2x+10}=3^4 \Leftrightarrow -2x-10=4$	**3p**
	$x=-7$	**2p**
4.	$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$	**3p**
	$2^n=64 \Leftrightarrow n=6$	**2p**
5.	$MN=4$	**2p**
	$NP=4 \Rightarrow \Delta MNP$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=24$	**2p**
	$p=12$, deci $r=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(2,0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=8$	**2p**
b)	$A(x,a)+A(x,-a)=\begin{pmatrix}x&a&a\\-a&x&a\\-a&-a&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&-a&-a\\a&x&-a\\a&a&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&0&0\\0&2x&0\\0&0&2x\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=2x\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2x\,A(1,0)$, pentru orice numere reale x și a	**3p**
c)	$\det\left(A(x,-3)\right)=\begin{vmatrix}x&-3&-3\\3&x&-3\\3&3&x\end{vmatrix}=x^3+27x$	**3p**
	$x\left(x^2+27\right)=0 \Leftrightarrow x=0$	**2p**
2.a)	$x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=$	**2p**
	$=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$a\circ b=2 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)=1$	**2p**
	Cum a și b sunt numere întregi, obținem $a=-2, b=-2$ sau $a=0, b=0$	**3p**

c)	$(-1)\circ x=-1$, unde x este număr real	**2p**
	$(-1)\circ 0\circ 1\circ ...\circ 2015=(-1)\circ(0\circ 1\circ ...\circ 2015)=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x+xe^x-e^x=$	**3p**
	$=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}-e^x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}+1=1$	**3p**
	Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx=\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(-1)=1\Rightarrow c=1$, deci $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$	**3p**
c)	$\int_0^a f(x)dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)dx=\int_0^a\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx+\frac{1}{a}\int_a^0\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx=$	**2p**
	$=\left(a^4+a^3+a^2+a\right)-\frac{1}{a}\left(a^4+a^3+a^2+a\right)=a^4-1$, pentru orice număr real nenul a	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real care are partea întreagă -2 și partea fracționară $0,75$.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{4}{3}x+4$ cu axa Ox și, respectiv, cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+10}=81$.

5p **4.** Determinați numărul natural n pentru care $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=64$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,1)$, $N(3,1)$ și $P(3,5)$. Arătați că triunghiul MNP este isoscel.

5p **6.** Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC, știind că $AB=6$, $AC=8$ și $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$, unde x și a sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $\det(A(2,0))$.

5p **b)** Arătați că $A(x,a)+A(x,-a)=2x\,A(1,0)$, pentru orice numere reale x și a.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(x,-3))=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele întregi a și b, știind că $a\circ b=2$.

5p **c)** Calculaţi $(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+1$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1)=1$.

5p **c)** Arătați că pentru orice număr real nenul a are loc relația $\int_0^a f(x)\,dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx=a^4-1$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_{2015}=2015+2014\cdot(-1)=$	**3p**
	$=1$	**2p**
2.	$f(2)=-3\Leftrightarrow -4m+5=-3$	**3p**
	$m=2$	**2p**
3.	$x+1-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}+x-1=2\Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-1}$	**3p**
	$x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 3 pătrate perfecte în mulțime, deci sunt $C_3^2=3$ cazuri favorabile	**2p**
	Sunt $C_9^2=36$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$	**2p**
5.	Diagonalele paralelogramului $OABC$ se înjumătățesc, deci $x_A+x_C=x_O+x_B\Rightarrow x_B=6$	**3p**
	$y_A+y_C=y_O+y_B\Rightarrow y_B=0$	**2p**
6.	$AD=3$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 6\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0-16+6-0-2+12=0$	**3p**
b)	$D(x)=\begin{vmatrix}1 & x & 4\\ 0 & -1-x & -1-x\\ 0 & -2-x & x^2-4\end{vmatrix}=-(x+1)(x+2)\begin{vmatrix}1 & x & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & x-2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=-(x+1)(x+2)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & x-2\end{vmatrix}=-(x-1)(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\left(2^x-4\right)\left(2^x-2\right)\left(2^x-1\right)=0$	**2p**
	$x_1=0$, $x_2=1$ și $x_3=2$	**3p**
2.a)	$X(-1)=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $X(1)=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $X(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X(-1)+X(1)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2X(0)$	**2p**

b)	$X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}1+3a & -6a\\ a & 1-2a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+3b & -6b\\ b & 1-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3a+3b+3ab & -6a-6b-6ab\\ a+b+ab & 1-2a-2b-2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+3(a+b+ab) & -6(a+b+ab)\\ a+b+ab & 1-2(a+b+ab)\end{pmatrix}=X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det(X(a))=1+a$	**2p**
	$\det(X(a))=0\Leftrightarrow a=-1$, deci matricea $X(a)$ este inversabilă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2}{x-1}=$	**2p**
	$=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{(x-1)(x-2)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x-1}=0$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1$, deci dreapta de ecuaţie $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	f este continuă în $x=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=f(-1)$	**2p**
	$-2=-2-a+3-4\Leftrightarrow a=-1$	**3p**
b)	$x\le -1\Rightarrow x+1\le 0\Rightarrow e^{x+1}\le e^0$	**2p**
	$e^{x+1}-3\le 1-3\Rightarrow f(x)\le -2\Rightarrow f(x)+2\le 0$, pentru orice $x\le -1$	**3p**
c)	$f(x)=2x^3-4x-4$, $f(0)=-4$ și $f(2)=4$	**3p**
	Cum f este continuă pe $[0,2]$ și $f(0)\cdot f(2)<0$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[0,2]$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați a_{2015}, ştiind că $(a_n)_{n\ge1}$ este progresie aritmetică cu $a_1=2015$ și $r=-1$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(2,-3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+1)x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 9\}$, aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$ și $C(1,2)$. Determinaţi coordonatele punctului B, ştiind că patrulaterul $OABC$ este paralelogram.
5p	**6.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB=3\sqrt{3}$ și $BD=6$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}1 & x & 4\\ 2 & x-1 & 7-x\\ 1 & -2 & x^2\end{vmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $D(1)$.
5p	**b)** Arătaţi că $D(x)=-(x-1)(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D\left(2^x-3\right)=0$.
	2. Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+3a & -6a\\ a & 1-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $X(-1)+X(1)=2X(0)$.
5p	**b)** Arătați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.
5p	**a)** Arătați că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$.
5p	**c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^{x+1}-3, & x\le-1\\ 2x^3+(a-3)x-4, & x>-1\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în $x=-1$.
5p	**b)** Arătaţi că $f(x)+2\le0$, pentru orice $x\le-1$.
5p	**c)** Pentru $a=-1$, arătaţi că ecuația $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0,2]$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_4 - a_3 = 8 - 6 =$	**3p**
	$= 2$	**2p**
2.	Valoarea minimă a funcției este $-\frac{\Delta}{4a} =$	**2p**
	$= -\frac{36}{4} = -9$	**3p**
3.	$x^2 + 3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 3 = 2x + 1$	**3p**
	$x = 1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} =$	**3p**
	$= 21$	**2p**
5.	$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{0-2}$	**3p**
	$y = -x + 3$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} =$	**3p**
	$= 8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 =$	**3p**
	$= 4 - 6 = -2$	**2p**
b)	$B(x) + I_2 = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(x) + I_2) = 7x + 1$	**3p**
	$7x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 1$	**2p**
c)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} x+6 & 14 \\ 3x+12 & 30 \end{pmatrix}$	**2p**
	$B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x+6 & 2x+8 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix} x+6 & 14 \\ 3x+12 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+6 & 2x+8 \\ 21 & 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3$	**1p**
2.a)	$(-7) * 7 = (-7) \cdot 7 - 7 \cdot (-7) - 7 \cdot 7 + 56 =$	**3p**
	$= -49 + 49 - 49 + 56 = 7$	**2p**
b)	$x * y = xy - 7x - 7y + 49 + 7 =$	**2p**
	$= x(y-7) - 7(y-7) + 7 = (x-7)(y-7) + 7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$x*7=7$ și $7*y=7$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\dots*2015=(1*2*\dots*6)*7*(8*9*\dots*2015)=7*(8*9*\dots*2015)=7$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}+1$ și $f'(1)=e\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$	**3p**
b)	$f(1)=e+1$, $f'(1)=e$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=ex+1$	**3p**
c)	$f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\int_0^1(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}-1+\ln2=-\frac{1}{2}+\ln2$	**2p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=\pi\cdot\frac{-1}{x+1}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\pi}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=6$ și $a_4=8$.
5p	**2.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-9$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+3}=x+1$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(0,3)$. Determinaţi ecuația dreptei AB.
5p	**6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=8$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-2$.
5p	**b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(B(x)+I_2\right)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$.
5p	**a)** Arătați că $(-7)*7=7$.
5p	**b)** Arătați că $x*y=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Calculați $1*2*3*\cdots*2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln x+x$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$.
5p	**b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătați că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\frac{3}{2}$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)dx=-\frac{1}{2}+\ln 2$.
5p	**c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.