Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$	**2p**
	$2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6=6\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$f(0)=1$	**2p**
	$(f\circ f)(0)=f(1)=4$	**3p**
3.	$x^2+1=5$	**3p**
	Rezultă $x=-2$ sau $x=2$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Se notează cu x preţul iniţial $\Rightarrow 20\%\cdot x=200$	**2p**
	$x=1000$, deci preţul după ieftinire este 800 de lei	**3p**
5.	$\vec{u}=-\vec{v}\Rightarrow a-1=-2$	**3p**
	$a=-1$	**2p**
6.	M mijlocul lui $(BC)\Rightarrow AM=\dfrac{BC}{2}$	**3p**
	$AM=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$1-2+2\cdot 1=a$, $2\cdot 1-2=0$ şi $2-1=1$	**3p**
	$a=1$	**2p**
b)	Determinantul sistemului este $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+4+0-0-0-2=3$	**3p**
c)	$x=0$	**2p**
	$y=0$	**2p**
	$z=-1$	**1p**
2.a)	$f=X^3-X-2\Rightarrow f(2)=2^3-2-2=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2$	**3p**
c)	$k\in\mathbb{Z}$ este rădăcină a lui $f\Rightarrow k^3-k+a=0$	**2p**
	$a=-(k-1)\cdot k\cdot(k+1)\Rightarrow a$ este număr întreg multiplu de 6, deoarece este divizibil cu trei numere întregi consecutive	**3p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\left(\dfrac{2}{x}+\ln x\right)'=2\left(\dfrac{1}{x}\right)'+\dfrac{1}{x}=$	**2p**
	$=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**

b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ $f'(x)<0$, pentru $x\in(0,2)$ şi $f'(x)>0$, pentru $x\in(2,+\infty)$ Punctul de extrem este $x=2$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f''(x)=\left(\dfrac{x-2}{x^2}\right)'=\dfrac{1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{4-x}{x^3}$ $x\in(0,4)\Rightarrow 4-x>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(0,4)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_2^4 (x-1)f(x)dx=\int_2^4 \dfrac{1}{x+1}dx=$ $=\ln(x+1)\Big\vert_2^4=\ln\dfrac{5}{3}$	**2p** **3p**
b)	$\int_2^3 \left(x^3-1\right)\dfrac{1}{x^2-1}dx=\int_2^3 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}dx=$ $=\int_2^3\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big\vert_2^3=\dfrac{5}{2}+\ln\dfrac{4}{3}$	**2p** **3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_2^3 \lvert f(x)\rvert dx=\int_2^3\dfrac{1}{x^2-1}dx=$ $=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\Big\vert_2^3=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $\sqrt{8}-2\left(\sqrt{2}-3\right)$ este natural.

5p **2.** Calculaţi $(f\circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+1\right)=\log_2 5$.

5p **4.** După o ieftinire cu 20% preţul unui produs scade cu 200 de lei. Calculaţi preţul produsului după ieftinire.

5p **5.** Determinaţi numărul real *a* pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$ sunt opuşi.

5p **6.** Calculaţi lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x-y+2z=a\\2x-y=0\\y-z=1\end{cases}$, unde a este un număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a știind că $(x,y,z)=(1,2,1)$ este soluție a sistemului.

5p **b)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **c)** Rezolvați sistemul pentru $a=-2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X+a$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Pentru $a=-2$, calculaţi $f(2)$.

5p **b)** Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătaţi că, dacă polinomul f are o rădăcină întreagă, atunci a este multiplu de 6.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,4)$.

2. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_2^4 (x-1)f(x)\,dx=\ln\frac{5}{3}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_2^3\left(x^3-1\right)f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătaţi că aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=2$ şi $x=3$, este egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(1+i)=2+2i$ $x=2\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.	$f(2)=0$ $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)=0$	**3p** **2p**
3.	$x^2+1=x^2+2x+1$ Rezultă $x=0$, care verifică ecuaţia	**2p** **3p**
4.	Numerele de două cifre având produsul cifrelor egal cu 5 sunt 15 şi 51 $\Rightarrow$ 2 cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{45}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+3\vec{j}$ $AC=\sqrt{4^2+3^2}=5$	**3p** **2p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=1\cdot5-2\cdot3=$ $=5-6=-1$	**3p** **2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 18 & 31\end{pmatrix}$ $A^2-6A=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 18 & 31\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 12\\ 18 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p** **3p**
c)	$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det B=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$	**2p** **3p**
2.a)	$2*2=\sqrt{2^2+2^2+4}=$ $=\sqrt{12}$	**2p** **3p**
b)	$\sqrt{x^2+x^2+4}=\sqrt{12}\Leftrightarrow 2x^2+4=12$ $x=-2$ sau $x=2$	**2p** **3p**

c)	$\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1\text{ de }8\text{ ori}}=\sqrt{8\cdot 1^2+4\cdot(8-1)}=\sqrt{36}$	**3p**
	$\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1\text{ de }8\text{ ori}}=6\in\mathbb{Z}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(x^2-6x+9\right)+e^x\left(x^2-6x+9\right)'=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-6x+9\right)+e^x(2x-6)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f''(x)=e^x\left(x^2-2x-1\right)$	**2p**
	$f(x)+f''(x)=e^x\left(2x^2-8x+8\right)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,1)$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(1,3)$ și $f'(x)>0$ pentru $x\in(3,+\infty)$	**2p**
	Punctele de extrem sunt $x_1=1$ şi $x_2=3$	**1p**
2.a)	$\int_0^1(x+1)f(x)dx=\int_0^1\frac{x(x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 xdx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\|_0^1=\frac{1}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^1 x^2f(x)dx+\int_0^1 x^3f(x)dx=\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^4}{x+1}dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\frac{x^3(x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\|_0^1=\frac{1}{4}$	**3p**
c)	$V=\pi\int_1^2 h^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$	**3p**
	$=\pi\left(x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right)\Big\|_0^1=\pi\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $x=2(1+i)-2i$ este real.

5p **2.** Calculaţi $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+1}=x+1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+\vec{j}$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\sin x+\cos\dfrac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Arătaţi că $A^2-6A=I_2$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $B=A-6I_2$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x*y=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

5p **a)** Calculaţi $2*2$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=\sqrt{12}$.

5p **c)** Arătaţi că numărul $\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1\text{ de }8\text{ ori}}$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Verificaţi dacă $f(x)+f''(x)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx+\int_0^1 x^3 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(1-i)=3-3i$ $x=3\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow x=1$ sau $x=2$ Distanţa este egală cu 1	**3p** **2p**
3.	$2x+3=3$ $x=0$	**3p** **2p**
4.	Numerele din mulţimea A divizibile cu 4 sunt 4, 8, 12, 16 şi $20\Rightarrow 5$ cazuri favorabile Numărul de elemente ale mulţimii A este $20\Rightarrow 20$ de cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{4}$	**2p** **1p** **2p**
5.	Mijlocul segmentului (AC) este $M(0,4)$ $BM=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$	**2p** **3p**
6.	$A=\frac{\pi}{2}$ $AC=\frac{1}{2}\cdot BC=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(M(2))=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=$ $=4-1=3$	**2p** **3p**
b)	$M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix} xy+(1-x)(1-y) & x(1-y)+(1-x)y \\ (1-x)y+x(1-y) & (1-x)(1-y)+xy \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} 2xy-x-y+1 & 1-(2xy-x-y+1) \\ 1-(2xy-x-y+1) & 2xy-x-y+1 \end{pmatrix}=M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$M(a)\cdot M(x)=M(a)\Leftrightarrow M(2ax-a-x+1)=M(a)$, pentru orice număr real x $2ax-a-x+1=a$, pentru orice număr real x $a=\frac{1}{2}$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$0\circ(-2)=0\cdot(-2)+2\cdot 0+2\cdot(-2)+2=$ $=-2$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=xy+2x+2y+2=x(y+2)+2(y+2)-2=$ $=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$x\circ x\circ x=(x+2)^3-2$ $(x+2)^3-2=6\Rightarrow x=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=2$, deoarece $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f'(2)=0$; $f'(x)<0$, pentru $x\in(1,2)$ şi $f'(x)>0$, pentru $x\in(2,+\infty)$	**2p**
	Punctul de extrem este $x=2$	**1p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-1$	**2p**
	Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=x-1$	**1p**
2.a)	$\int_1^2\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 xdx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\|_1^2=\frac{3}{2}$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\right)'=x^{\frac{3}{2}}=x\sqrt{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^4\|f(x)\|dx=\int_1^4 x\sqrt{x}dx=$	**2p**
	$=\frac{2}{5}\cdot x^2\sqrt{x}\Big\|_1^4=\frac{62}{5}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $x = 3(1-i)+3i$ este real.

5p **2.** Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+3}=8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea $A=\{1,2,3,...,20\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(3,0)$ şi $C(2,5)$. Calculaţi lungimea medianei din B a triunghiului ABC.

5p **6.** Determinaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{6}$ şi $C=\frac{\pi}{3}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(M(2))$.

5p **b)** Verificaţi dacă $M(x)\cdot M(y)=M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi numărul real a astfel încât $M(a)\cdot M(x)=M(a)$, pentru orice număr real x.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y = xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Calculaţi $0\circ(-2)$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x=6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=4$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(2+5i)=6+15i$ $5(1+3i)=5+15i$ $a=1\in\mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow(x+5)^2=0$ $x=-5$ şi $y=0$	**2p** **3p**
3.	$x^2+x+1=x+2$ Rezultă $x=-1$ sau $x=1$, care verifică ecuaţia	**3p** **2p**
4.	Se notează cu x preţul înainte de ieftinire $\Rightarrow x-\frac{10}{100}\cdot x=90$ $x=100$	**3p** **2p**
5.	$d \parallel h\Rightarrow m_d=m_h=1$ $d: y-2=1\cdot(x-2)$, deci $d: y=x$	**3p** **2p**
6.	$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}=$ $=\frac{1}{5}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)+A(6)=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\6&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&2\\2&-2&2\end{pmatrix}=$ $=2A(4)$	**3p** **2p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&0\\x&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=3-x$ $3-x=0\Rightarrow x=3$	**3p** **2p**
c)	$\det(A(2))=1$ $(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&-1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$	**2p** **3p**
2.a)	$f(-1)=-1+1-m+m=0$ Rezultă $X+1$ divide polinomul f	**2p** **3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-1,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2m$ $1-2m=11\Rightarrow m=-5$	**2p** **2p** **1p**

c)	$x_1=-1\Rightarrow \lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$	**2p**
	$x_1x_2x_3=-m$	**1p**
	$\lvert m\rvert=1\Rightarrow m=-1$ sau $m=1$; ambele valori verifică cerința	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(\ln x)'=$	**2p**
	$=1-\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=1$, $f'(1)=0\Rightarrow$ ecuaţia tangentei este $y=1$	**3p**
c)	$f'(1)=0$, $f'(x)<0$, pentru $x\in(0,1)$ şi $f'(x)>0$, pentru $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\geq f(1)\Rightarrow x\geq \ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\int_2^3 (x+1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right\rvert_2^3=$	**3p**
	$=\frac{15}{2}-4=\frac{7}{2}$	**2p**
b)	$f(x)=x^3-x\Rightarrow$ primitiva F a funcției f este $F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=-1\Rightarrow c=-\frac{3}{4}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\int_2^e x\ln x dx=$	**2p**
	$=\left.\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\right\rvert_2^e-\frac{1}{2}\int_2^e x dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $a=3(2+5i)-5(1+3i)$ este real.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10x+25$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2+x+1\right)=\log_5(x+2)$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10% preţul unui produs este 90 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuație $y=x-1$ şi punctul $A(2,2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este paralelă cu h.

5p **6.** Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=5$, $AC=6$ şi $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(2)+A(6)=2A(4)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X^2+mX+m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătaţi că f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m știind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x\ge \ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f ştiind că $F(1)=-1$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

- **SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

1.	$a_2 - a_1 = r \Rightarrow r = -1$ $a_3 = 0$ Finalizare: produsul este egal cu 0	**2p** **2p** **1p**
2.	$\Delta = 4 + 4m < 0$ $m \in (-\infty, -1)$	**3p** **2p**
3.	$x(x-1) = 12 \Rightarrow x = -3$ sau $x = 4$ $x = 4$ convine, $x = -3$ nu convine	**3p** **2p**
4.	$p = \dfrac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$ Numărul numerelor $\overline{abc}$ pentru care $a \cdot b \cdot c = 3$ este egal cu $3 \Rightarrow 3$ cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de trei cifre este de $900 \Rightarrow 900$ cazuri posibile $p = \dfrac{1}{300}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$	**3p** **2p**
6.	$B(0,1)$ și $C(3,1) \Rightarrow BC \parallel Ox$, deci $x_H = x_A = 1$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC $BH \perp AC \Rightarrow m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \dfrac{y_H - 1}{1} \cdot \dfrac{-2}{2} = -1$ $y_H = 2$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Suma elementelor matricei A este egală cu $1 + (2n+1) + n + 1 + \left(2n^2 + 1\right) + n^2 + 1 =$ $= 3n^2 + 3n + 5$	**3p** **2p**
b)	$\det A = n^2 - n$ Finalizare: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	**2p** **3p**
c)	$A = \dfrac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$ $n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n = 2$ sau $n = -3$ Finalizare: $n = 2$	**1p** **3p** **1p**
2.a)	$2011 \circ 2012 = 2011 + 2012 + 1 =$ $= 4024$	**3p** **2p**
b)	$(x \circ y) \circ z = x + ay + az + 2$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ $x \circ (y \circ z) = x + ay + a^2 z + a + 1$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$	**2p** **2p** **1p**

c)	$2^x = t \Rightarrow t^2 - t = 0$ Finalizare: $x = 0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$ $f'(x) = (x+\ln x)' = 1+\dfrac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	$y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $f(1)=1,\ f'(1)=2$ Ecuația tangentei este $y = 2x-1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ $f''(x) < 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int_0^1 f_1(x)\,dx = (x+1)e^x\Big\|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$ $= \left((x+1)e^x - e^x\right)\Big\|_0^1 = e$	**2p** **3p**
b)	f_{2011} derivabilă și $f_{2011}'(x) = \left((x+2011)e^x\right)' = e^x + (x+2011)e^x = (x+2012)e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $f_{2011}' = f_{2012}$	**3p** **2p**
c)	$(x+n)e^x \ge (x+n)(x+1)$, pentru orice $x\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}^*$ $\int_0^1 (x+n)e^x\,dx \ge \int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx$ $\int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx = \left(\dfrac{x^3}{3} + (n+1)\dfrac{x^2}{2} + nx\right)\Big\|_0^1 = \dfrac{9n+5}{6}$ Finalizare	**1p** **1p** **2p** **1p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2 - 2x - m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_2 12$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.

5p **5.** Calculați $\vec{a} \cdot \vec{b}$, știind că $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

5p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(0,1)$ și $C(3,1)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați suma elementelor matricei A.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(2n+1, n)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Determinați valorile numărului natural n, $n \geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu $n^2 - 3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + ay + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 1$ calculați $2011 \circ 2012$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $a = -1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x \circ 2^x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+n)e^x$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că funcția f_{2011} este o primitivă a funcției f_{2012}.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \frac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n, folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ $2\sqrt{7}+2-2\sqrt{7}=2$	**3p** **2p**
2.	$f(1)+f(2)+...+f(10)=2(1+2+...+10)-10=$ $=100$	**3p** **2p**
3.	$4^{x+1}=4^2$ $x+1=2\Rightarrow x=1$	**3p** **2p**
4.	Multiplii lui 7 din mulţimea A sunt 7 şi $14\Rightarrow 2$ cazuri favorabile Numărul de elemente ale mulţimii A este $15\Rightarrow 15$ cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{15}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3\vec{i}$ $AC=3$	**3p** **2p**
6.	$\sin x=\cos x$ $x=\dfrac{\pi}{4}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(2))=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{vmatrix}=$ $=5$	**2p** **3p**
b)	$A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}5&5&5\\5&5&5\\5&5&5\end{pmatrix}=5A(1)$	**2p** **3p**
c)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=2x^3-3x^2+1$ $\det(A(x))=0\Leftrightarrow(2x+1)(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ sau $x=1$	**2p** **3p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-2X+3$ $f(1)=1-2-2+3=0$	**2p** **3p**
b)	$f(2)=2\Rightarrow 8-8-4+m=2$ $m=6$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2$, $x_1x_2x_3=-4$	**3p**
	$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=2\cdot\frac{-2}{-4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$	**2p**
b)	$\int_0^1 xf'(x)dx=xf(x)\Big\vert_0^1-\int_0^1 f(x)dx=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$	**3p**
c)	$V=\pi\int_0^1 h^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=\frac{28\pi}{15}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $2\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{28}$ este natural.

5p **2.** Calculaţi $f(1)+f(2)+...+f(10)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x+1}=16$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea $A=\{1,2,3,...,15\}$, acesta să fie multiplu de 7.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos x}=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det\left(A(2)\right)$.

5p **b)** Arătaţi că $A(1)\cdot A(2)=5A(1)$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=3$, calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 2.

5p **c)** Pentru $m=4$, arătaţi că $\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 x f(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 2$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 x f'(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{f(x)}$.