Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)=\log_7\left[\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\right]=$	**3p**
	$=\log_7 7=1$	**2p**
2.	$A(2,3)\in G_f \Rightarrow f(2)=3 \Rightarrow 4+2a+b=3$	**2p**
	$B(-1,0)\in G_f \Rightarrow f(-1)=0 \Rightarrow 1-a+b=0$	**2p**
	$a=0, b=-1$	**1p**
3.	$3^x+3\cdot 3^x=36$	**2p**
	$3^x=9$	**2p**
	$x=2$	**1p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numerele divizibile cu 4: 12, 16,…,96 $\Rightarrow$ 22 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{22}{90}=\dfrac{11}{45}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{i}+3\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$	**3p**
	Coordonatele sunt $(1,2)$	**2p**
6.	$A=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$	**3p**
	$l=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A_0(1,1),\ A_1(2,3)$	**1p**
	$A_0A_1:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$	**2p**
	$A_0A_1: y=2x-1$	**2p**
b)	$A_1(2,3),\ A_2(4,9),\ A_3(8,27)$	**1p**
	Verificarea faptului că $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 8 & 27 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$	**4p**

c)	$A=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$	**1p**
	$\Delta=\begin{vmatrix}2^n & 3^n & 1\\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1\\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1\end{vmatrix}=2\cdot 6^n$	**3p**
	$\frac{2\cdot 6^n}{2}=216\Rightarrow n=3$	**1p**
2.a)	$x\circ 3=\frac{1}{2}(x\cdot 3-x-3+3)=x$	**2p**
	$3\circ x=\frac{1}{2}(3\cdot x-3-x+3)=x$	**2p**
	3 este element neutru	**1p**
b)	Căutăm $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\circ 2=2\circ a=3$	**1p**
	$2\circ a=a\circ 2$	**1p**
	$\frac{1}{2}(2a-2-a+3)=3$	**1p**
	$a+1=6\Rightarrow a=5$	**2p**
c)	Fie $x,y\in H\Rightarrow x=2k+1, y=2p+1,\ k,p\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$x\circ y=\frac{1}{2}(4kp+2k+2p+1-2k-1-2p-1+3)$	**2p**
	$x\circ y=2kp+1\in H$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}+e^x$	**3p**
	Finalizare	**2p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f'(1)=1+e,\ f(1)=e$	**2p**
	$y=(e+1)x-1$	**1p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+e^x}{1}=$	**3p**
	$=+\infty$	**2p**
2.a)	$A=\int_0^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1(3x^2+2x+1)dx=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	Fie g o primitivă a funcției $f\Rightarrow g'(x)=f(x)$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$g''(x)=f'(x)=6x+2$	**1p**
	$x<-\frac{1}{3}\Rightarrow g''(x)<0$, deci g este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	**2p**
c)	$\int_0^a f(x)dx=(x^3+x^2+x)\Big\vert_0^a=a^3+a^2+a$	**2p**
	$a^3+a^2+a\ge 3a^2+2\Leftrightarrow(a-2)(a^2+1)\ge 0$, adevărată oricare ar fi $a\ge 2$	**3p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale *a* şi *b* pentru care graficul funcției *f* conține punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{10,11,12,\ldots,99\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $M(2,-1)$ şi $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

5p **6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră punctele $A_n\left(2^n,3^n\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare.

5p **c)** Determinați numărul natural *n* pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)$.

5p **a)** Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$” este $e=3$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$”.

5p **c)** Arătați că mulțimea $H=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+e^x$.

5p **a)** Arătați că $xf'(x)=1+xe^x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției *f*, axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că, oricare ar fi $a\geq 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)dx\geq 3a^2+2$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1<\sqrt{2}<2$	**2p**
	$2<\sqrt{5}<3$	**2p**
	Rezultă că 2 este singurul număr întreg din intervalul dat	**1p**
2.	Axa de simetrie a parabolei este dreapta de ecuație $x=x_V=-\dfrac{b}{2a}$	**2p**
	$-\dfrac{m}{2}=2\Rightarrow m=-4$	**3p**
3.	$x-\dfrac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	**3p**
	$x\in\left\{\dfrac{\pi}{3},\pi\right\}$	**2p**
4.	$A_n^2=n(n-1)$	**2p**
	$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$n(n-1)=12\Rightarrow n=4$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{-2}$	**3p**
	$a=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
6.	$\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=2$	**2p**
	$1=2\sin x\cdot\cos x$	**2p**
	$\sin 2x=1$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y & (x+y)^2\\ 0 & 1 & 2(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**4p**

b)	$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2(x-y)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**1p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2(x-y)^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^3=O_3 \Rightarrow \left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$	**2p**
c)	Matricea A este inversabilă	**1p**
	$\left(A(x)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(-x)$	**4p**
2.a)	$f(-1)=-1+1-\alpha-i(\alpha-2)+\alpha+(\alpha-2)i$	**2p**
	Finalizare: $f(-1)=0$	**3p**
b)	Rădăcinile lui g sunt de forma $x_1=u+iv$ şi $x_2=u-iv$, unde $u,v\in\mathbb{R}$	**1p**
	Din relațiile lui Viète rezultă $x_1+x_2=-p$ şi $x_1x_2=q$	**1p**
	$p=-2u\in\mathbb{R}$ şi $q=u^2+v^2\in\mathbb{R}$	**2p**
	Ecuația $x^2+px+q=0$, cu $p,q\in\mathbb{R}$, are soluții distincte complex conjugate dacă şi numai dacă $\Delta<0$, de unde $p^2<4q$	**1p**
c)	$f=\left(X+1\right)\left(X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\right)$	**2p**
	Polinomul $h=X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte complex conjugate	**1p**
	Conform punctului **b)**, rezultă $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{R}$, de unde $\alpha=2$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	**1.a)** $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{-2}{x^2-1}$	**3p**
	$f'(x)<0$ pentru orice $x>1$, de unde concluzia	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală	**2p**
	f este continuă pe $(1,\infty)$, deci nu are alte asimptote verticale	**1p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{x^{-1}}$ - nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$	**2p**
	Cu regula lui l'Hospital, limita este $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{-1}-(x-1)^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$	**3p**
2.a)	$\int_1^4(x-3\sqrt{x}+2)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2x\right)\Big\vert_1^4=$	**4p**
	$=-\frac{1}{2}$	**1p**
b)	$A=\int_1^2\left\vert\frac{f(x)}{x}\right\vert dx=-\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx$, deoarece $f\le0$ pe intervalul [1, 2],	**2p**
	$=-\int_1^2 xdx+3\int_1^2 dx-\int_1^2\frac{2}{x}dx=$	**1p**

	$=\frac{3}{2}-2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^2 f^n(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)'f^n(x)dx=\frac{1}{2}(2x-3)(x^2-3x+2)^n\Big\|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)^2 nf^{n-1}(x)dx=$	**3p**
	$=-\frac{n}{2}\int_1^2(4x^2-12x+8+1)f^{n-1}(x)dx=-\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx$, de unde concluzia	**2p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\cap\mathbb{Z}=\{2\}$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x=2$ este axa de simetrie a parabolei $y=x^2+mx+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2+A_n^2=18$.

5p **5.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: ax+y+2011=0$ și $d_2: x-2y=0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie x un număr real care verifică egalitatea $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$. Arătați că $\sin 2x=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $\alpha\in\mathbb{C}$ și polinomul $f=X^3+(1-\alpha)X^2+(\alpha-2)iX+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Arătați că polinomul f are rădăcina -1.

5p **b)** Arătați că, dacă p,q sunt numere complexe și polinomul $g=X^2+pX+q\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte, complex conjugate, atunci p și q sunt numere reale și $p^2<4q$.

5p **c)** Determinați $\alpha\in\mathbb{C}$ pentru care polinomul f are două rădăcini distincte, complex conjugate.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.

5p **a)** Calculați $\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)dx$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g:[1;2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ și de axa Ox.

5p **c)** Arătați că $(4n+2)\int_1^2 f^n(x)dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=0$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2(x+1)=x-1+3x-1$	**3p**
	$2x=4\Rightarrow x=2$	**2p**
2.	$f(5)=0$	**3p**
	$f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**2p**
3.	Condiții $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x-3\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[3,+\infty)$	**1p**
	$x-1=(x-3)^2\Rightarrow x^2-7x+10=0$	**2p**
	$x=2$ sau $x=5$	**1p**
	$2\notin[3,+\infty)\Rightarrow x=5$	**1p**
4.	Numărul de submulțimi ordonate este A_7^2	**2p**
	$A_7^2=\frac{7!}{5!}=42$	**3p**
5.	$\begin{cases}2x-y-6=0\\ -x+2y-6=0\end{cases}\Rightarrow x=y=6$	**2p**
	$d=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}$	**2p**
	$d=5$	**1p**
6.	$\cos M=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2\cdot MN\cdot MP}$	**3p**
	$\cos M=\frac{1}{8}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$	**3p**
	$3A=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$	**1p**
	$A^2-3A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	**1p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2+bA+aA+abA^2=$	**2p**
	$=I_2+aA+bA+3abA=$	**1p**
	$=I_2+(a+b+3ab)A=X(a+b+3ab)$	**2p**

c)	$X(a)=I_2+aA=\begin{pmatrix}1+a & -a\\ -2a & 1+2a\end{pmatrix}$ $X(a)$ matrice inversabilă $\Leftrightarrow \det X(a)\neq 0$ $1+3a\neq 0\Rightarrow a\neq -\frac{1}{3}$ Deoarece $-\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow X(a)$ este matrice inversabilă oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	Din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2+x_3=-2$ şi $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=-5$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3)=$ $=14$	**2p** **2p** **1p**
b)	$x_1x_2x_3=-m$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3}{x_1\cdot x_2\cdot x_3}=\frac{5}{m}$ $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$	**1p** **2p** **2p**
c)	$\Delta=(x_1+x_2+x_3)\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)=$ $=-2(-5-14)=38\in\mathbb{N}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ $f'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=e^2+\frac{1}{4}$	**2p** **2p** **1p**
b)	$f'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ crescătoare pe $[1,+\infty)$ $f(1)=e-1>0\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in[1,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow$ graficul nu admite asimptotă orizontală $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\Rightarrow$ graficul nu admite asimptotă oblică	**2p** **3p**
2.a)	$V=\pi\int_0^3 g^2(x)dx=\pi\int_0^3\left(x^2+10\right)dx$ $V=\pi\left(\frac{x^3}{3}+10x\right)\Big\|_0^3=39\pi$	**2p** **3p**
b)	$F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p** **3p**
c)	$\int_{-10}^{10}f(x)dx=\int_{-10}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{10}f(x)dx=$	**2p**

	$=\int_{10}^{0}\left(-f(t)\right)dt+\int_{0}^{10}f\left(x\right)dx=$	**2p**
	$=2\int_{0}^{10}f\left(x\right)dx$	**1p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ şi $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ şi $d_2: -x+2y-6=0$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului *M* al triunghiului *MNP*, ştiind că $MN=4$, $MP=5$ şi $NP=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați A^2-3A.

5p **b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Arătați că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

2. Polinomul $f=X^3+2X^2-5X+m$, cu $m\in\mathbb{R}$ are rădăcinile x_1, x_2 şi x_3.

5p **a)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care $x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$.

5p **c)** Arătați că determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătați că $f(x)>0$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că graficul funcției *f* nu admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+10}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă *F* a funcției f este crescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{10} f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\begin{cases} a_2 = 5 \\ a_4 = 11 \end{cases} \Rightarrow r = 3$	**3p**
	$a_6 = 17$	**2p**
2.	Din ipoteză reiese $a+b=c+d$ şi $3a+b=3c+d$	**2p**
	Deducem $a=c,\ b=d$	**2p**
	Finalizare $f(5)=g(5)$	**1p**
3.	$S = x_1 + x_2 = 5$	**1p**
	$P = x_1 \cdot x_2 = 3$	**1p**
	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$	**2p**
	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{3}$	**1p**
4.	$x^2 + x + 2 = 4$, deci $x^2 + x - 2 = 0$	**3p**
	$S = \{-2, 1\}$	**2p**
5.	$\frac{AM}{MB} = 3,\ M \in [AB]$	**2p**
	$\frac{AN}{NC} = 3,\ N \in [AC]$	**2p**
	$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 3 \Rightarrow MN \parallel BC$	**1p**
6.	$AC = BC \cdot \operatorname{ctg} A$	**3p**
	$AC = 6\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

a)	$y * x = yx - 2y - 2x + 6 =$	**2p**
	$= xy - 2x - 2y + 6 = x * y$	**2p**
	Finalizare: $y * x = x * y$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$	**1p**
b)	$(x*y)*z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$	**2p**
	$x*(y*z) = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$	**2p**
	$(x*y)*z = x*(y*z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$	**1p**
c)	$x*y = (2-x)(2-y) + a \Rightarrow xy - 2x - 2y + 6 = (2-x)(2-y) + a$	**2p**
	Finalizare: $a = 2$	**3p**
d)	$x*x = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = x$	**3p**
	$x = 2$ sau $x = 3$	**2p**
e)	Căutăm $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x*e = e*x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$	**1p**
	$x*e = e*x = xe - 2x - 2e + 6$	**2p**
	$xe - 2x - 2e + 6 = x \Rightarrow e = 3 \in \mathbb{R}$	**2p**

f)	$(x+2)*\left(\frac{1}{x}+2\right)=(2-x-2)\left(2-\frac{1}{x}-2\right)+2=$	**3p**
	$=(-x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+2=1+2=3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

a)	$A+I_3=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & -a\\ -a & 0 & 1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\det\left(A+I_3\right)=1+a^3$	**3p**
	Finalizare: $a=0$	**1p**
b)	${}^tA=\begin{pmatrix}0 & 0 & -a\\ a & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}$	**1p**
	$A+{}^tA=\begin{pmatrix}0 & a & -a\\ a & 0 & -a\\ -a & -a & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A+{}^tA\right)=2a^3$	**2p**
c)	$a=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $\det A=1\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă	**2p**
	Finalizare: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
d)	$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -a^2\\ a^2 & 0 & 0\\ 0 & -a^2 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}a^3 & 0 & 0\\ 0 & a^3 & 0\\ 0 & 0 & a^3\end{pmatrix}=a^3\cdot I_3$	**3p**
e)	$\left(A+I_3\right)\left(A^2-A+I_3\right)=A^3+I_3$	**3p**
	Finalizare: $A^3+I_3=2I_3$	**2p**
f)	$A+{}^tA+I_3=\begin{pmatrix}1 & a & -a\\ a & 1 & -a\\ -a & -a & 1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\det\left(A+{}^tA+I_3\right)=2a^3-3a^2+1$	**2p**
	$2a^3-3a^2+1=1\Leftrightarrow a^2\left(2a-3\right)=0$, deci $a=0$ sau $a=\frac{3}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2 = 5$ şi $a_4 = 11$. Calculați a_6.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = cx + d$, unde a,b,c,d sunt numere reale. Arătați că, dacă $f(1) = g(1)$ şi $f(3) = g(3)$, atunci $f(5) = g(5)$.

5p **3.** Se notează cu x_1 şi x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2 - 5x + 3 = 0$. Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

5p **4.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_2\left(x^2 + x + 2\right) = 2$.

5p **5.** Se consideră un triunghi ABC şi punctele M, N, astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\cdot\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN} = 3\cdot\overrightarrow{NC}$. Arătați că dreptele MN şi BC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră un triunghi ABC în care unghiurile A şi C au măsurile egale cu 30°, respectiv 90°. Ştiind că $BC = 6$, calculați lungimea laturii AC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este comutativă.
5p **b)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.
5p **c)** Determinați numărul real a pentru care are loc egalitatea $x * y = (2 - x)(2 - y) + a$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
5p **d)** Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $x * x = x$.
5p **e)** Determinați elementul neutru al legii „$*$”.
5p **f)** Arătați că $(x+2) * \left(\frac{1}{x} + 2\right) = 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(A + I_3\right) = 1$.
5p **b)** Calculați $\det\left(A + {}^tA\right)$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.
5p **c)** Pentru $a = 1$, determinați inversa matricei A.
5p **d)** Arătați că $A^3 = a^3 \cdot I_3$.
5p **e)** Pentru $a = 1$, verificați egalitatea $\left(A + I_3\right)\left(A^2 - A + I_3\right) = 2I_3$.
5p **f)** Determinați valorile numărului real a pentru care $\det\left(A + {}^tA + I_3\right) = 1$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_6 3+\log_6 12=\log_6 36$	**3p**
	$\log_6 36=\log_6 6^2=2$	**2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}$	**2p**
	$\Delta=-23$	**1p**
	$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{23}{8}$	**2p**
3.	$7^x+7^{x+1}=392 \Leftrightarrow 7^x+7^x\cdot 7=392$	**1p**
	$7^x\cdot 8=392 \Leftrightarrow 7^x=49$	**2p**
	$x=2$	**2p**
4.	$\frac{n!}{2!(n-2)!}=4\frac{n!}{(n-1)!}$	**2p**
	$\frac{n-1}{2}=4$	**2p**
	$n=9$	**1p**
5.	$\sqrt{(4-0)^2+(m+2)^2}=5$	**1p**
	$m^2+4m-5=0$	**2p**
	$m=-5$ sau $m=1$	**2p**
6.	$\cos 140^\circ=\cos\left(180^\circ-40^\circ\right)=-\cos 40^\circ$	**3p**
	$\cos 40^\circ+\cos 140^\circ=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=m^2-2+1-m-2m+1=$	**3p**
	$=m^2-3m$	**2p**
b)	$\begin{cases} -m-2+5=0 \\ -1+2m-5=0 \\ -1-4+5=0 \end{cases}$	**3p**
	$m=3$	**2p**

c)	$\det A \neq 0$ $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$	**2p** **3p**
2.a)	$(x*y)*z=(xy+x+y)*z=xyz+xz+yz+xy+x+y+z$ $x*(y*z)=x*(yz+y+z)=xyz+xy+xz+x+yz+y+z$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	$x*e=e*x=xe+x+e$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $ex+e=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $e=0$	**2p** **1p** **2p**
c)	$x^2*2=3x^2+2$ $x*4=5x+4$ $x^2*2=x*4 \Leftrightarrow 3x^2-5x-2=0$ $x_1=-\frac{1}{3}$ şi $x_2=2$	**1p** **1p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x-1)^2-2(x-1)(x+2)}{(x-1)^4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Finalizare	**3p** **2p**
b)	f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ şi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}=+\infty$ $x=1$ este ecuația asimptotei verticale	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0 \Rightarrow x=-5$ $x=-5$ punct de minim global pe $(-\infty,1)$ $f(x) \geq f(-5), \forall x \in (-\infty,1) \Rightarrow f(x) \geq -\frac{1}{12}, \forall x \in (-\infty,1) \Rightarrow f(x)+\frac{1}{12} \geq 0, \forall x \in (-\infty,1)$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}dx=\int_2^e \frac{1}{x}dx=\ln x \Big\vert_2^e=$ $=1-\ln 2$	**3p** **2p**
b)	$g(x)=\frac{x-1}{x}$, $x \in (0,1]$ $\int g(x)\,dx=x-\ln x+C$ $G(x)=x-\ln x+c$, $c \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției g pe intervalul $(0,1]$ $A(1,5)$ aparține graficului funcției $G \Rightarrow G(1)=5 \Rightarrow c=4$ $G(x)=x-\ln x+4$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
c)	$\int_{\frac{1}{2}}^e f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1}{x}dx+\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1}{x}dx=\frac{1}{2}-\ln 2$	**2p** **1p**

	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x \Big\|_1^e = \frac{1}{2}$	**1p**
	$\int_{\frac{1}{2}}^e f(x) dx = 1 - \ln 2$	**1p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_6 3+\log_6 12$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x+7^{x+1}=392$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2=4A_n^1$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ şi $B(4,m)$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB=5$.

5p **6.** Calculați $\cos 40^\circ+\cos 140^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$, unde m este parametru real.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care tripletul $(-1,2,5)$ este o soluție a sistemului.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul admite doar soluția $(0,0,0)$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii „$*$”.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2*2=x*4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-x-5}{(x-1)^3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)+\dfrac{1}{12}\geq 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,1)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x}, & x>1 \\ \dfrac{x-1}{x}, & 0<x\leq 1 \end{cases}$.

5p **a)** Calculați $\displaystyle\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}dx$.

5p **b)** Fie $g:(0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$. Determinați primitiva funcției g, primitivă al cărei grafic conține punctul $A(1,5)$.

5p **c)** Calculați $\int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)dx$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3 = b_1 q^2,\ b_4 = b_1 q^3$	**2p**
	$24 = 6q^2$	**2p**
	$q = 2$	**1p**
2.	$1 - a^2 = 0$	**3p**
	$a = 1$ sau $a = -1$	**2p**
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$	**1p**
	Deoarece $\frac{3}{2} > 1$, inecuația devine $x < -x$	**2p**
	$S = (-\infty, 0)$	**2p**
4.	$T_{k+1} = C_{10}^k \sqrt{2}^k,\ k \in \{0,1,\ldots,10\}$	**2p**
	$T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k$ par	**2p**
	Sunt 6 termeni raționali	**1p**
5.	$BC:\ x + y - 1 = 0$	**2p**
	Distanța este $\frac{\lvert 2+2-1 \rvert}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$	**3p**
6.	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	**2p**
	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A =$	**2p**
	$= 10$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	**4p**
	Aşadar $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$	**1p**
b)	$(A^n)^2 = A^{2n} = (A^2)^n =$	**2p**
	$= A^n$, deci $A^n \in H$	**3p**
c)	Matricele $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin lui H pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**4p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	Restul împărțirii polinomului f la $X - i$ este $f(i)$	**2p**
	$f(i) = (2i)^{10} = -2^{10}$	**3p**

b)	$f=\sum_{k=0}^{10}\left(C_{10}^{k}X^{10-k}i^{k}+C_{10}^{k}X^{10-k}(-i)^{k}\right)=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}X^{10-k}i^{k}\left(1+(-1)^{k}\right)$ $a_{2p+1}=0\in\mathbb{R}$, pentru orice $p\in\{0,1,2,3,4\}$ $a_{2p}=C_{10}^{2p}i^{2p}\left(1+(-1)^{2p}\right)=2C_{10}^{2p}\cdot(-1)^{p}\in\mathbb{R}$, pentru orice $p\in\{0,1,2,3,4,5\}$	**2p** **1p** **2p**
c)	Dacă z este rădăcină, atunci $(z+i)^{10}=-(z-i)^{10}$, deci $\|z+i\|=\|z-i\|$ Punctul de afix z este egal depărtat de punctele de afixe $\pm i$, deci aparține axei reale	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ $f'(x)=5x^4-5$ $f'(2)=75$	**2p** **2p** **1p**
b)	$f''(x)=20x^3$ se anulează în 0 Deoarece f'' are semne opuse de o parte şi de cealaltă a lui 0, rezultă că 0 este punct de inflexiune	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x^4-1=0\Rightarrow x=\pm1$ Tabelul de variație a funcției f Finalizare	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big\|_0^1=$ $=\frac{e-1}{e}$	**3p** **2p**
b)	Cu schimbarea de variabilă $x^3=t$ se obține $\frac{1}{3}\int_0^1 t\cdot e^{-t}dt=$ $=-\frac{1}{3}te^{-t}\Big\|_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-t}dt=\frac{e-2}{3e}$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}g\left(x^3\right)dx=\int_n^{n+1}e^{-x^3}dx\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este crescător $0\leq I_n\leq\int_1^n e^{-x}dx=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^n}<\frac{1}{e}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit Deoarece şirul este monoton şi mărginit, el este convergent	**2p** **2p** **1p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 6$ și $b_3 + b_4 = 24$.

5p **2.** Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (1-a^2)x + 4$ este constantă.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

5p **4.** Determinați numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(1+\sqrt{2}\right)^{10}$.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(1,0)$ și $C(0,1)$.

5p **6.** Triunghiul ABC are măsura unghiului A de 60°, $AB = 4$ și $AC = 5$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulțimea $H = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A \right\}$.

5p **a)** Arătați că $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $A \in H$, atunci $A^n \in H$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că mulțimea H este infinită.

2. Se consideră polinomul $f = (X+i)^{10} + (X-i)^{10}$, având forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \ldots + a_1X + a_0$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_{10} \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Determinați restul împărțirii polinomului f la $X - i$.

5p **b)** Arătați că toți coeficienții polinomului f sunt numere reale.

5p **c)** Demonstrați că toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x + 4$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătați că graficul funcției f are un punct de inflexiune.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $m \in (0,8)$, ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 g(x)\,dx$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x^5 g(x^3)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n = \int_1^n g(x^3)\,dx$ este convergent.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases} a_2 = 6 \\ a_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow r = -1$	**2p**
	$a_6 = 2$	**3p**
2.	$2x^2 - x - 3 \le 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$	**3p**
	$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$	**2p**
3.	Condiții de existență $\begin{cases} x+2>0 \\ x-4>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (4, +\infty)$	**1p**
	$\log_3\left(\frac{x+2}{x-4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-4} = 3$	**2p**
	$x = 7 \in (4, +\infty)$	**2p**
4.	Se notează cu x prețul inițial	
	$\frac{5}{100} \cdot x = 12$	**3p**
	$x = 240$ lei	**2p**
5.	Se notează cu M mijlocul lui $[AB]$ şi cu d mediatoarea segmentului $[AB]$. Obținem $M(3,2)$	**1p**
	$m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = 1$	**2p**
	$d: y - 2 = 1 \cdot (x-3) \Rightarrow d: y = x - 1$	**2p**
6.	Din teorema sinusurilor $\Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A}$	**2p**
	$\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$R = 3\sqrt{3}$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(-1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2$	**3p**
b)	$D(x,2010) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2010 \\ 1 & x+1 & 2011 \end{vmatrix} =$	**1p**
	$= x - 2010$	**2p**
	$x - 2010 = 1 \Rightarrow x = 2011 \in \mathbb{Z}$	**2p**

c)	$D(x,y)=x-y$ $D(x,-y)=x+y$ şi $D\left(x^2,y^2\right)=x^2-y^2$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$x*y=2xy-6x-6y+21=2x(y-3)-6(y-3)+3=$ $=(y-3)(2x-6)+3=2(x-3)(y-3)+3$	**3p** **2p**
b)	$(x*y)*z=4(x-3)(y-3)(z-3)+3$ $x*(y*z)=4(x-3)(y-3)(z-3)+3$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
c)	$x*3=3*x=3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $(1*2)*3*(4*...*2011)=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2+2x+1+3^x\ln 3$ $f'(0)=1+\ln 3$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=3x^2+2x+1+3^x\ln 3=2x^2+(x+1)^2+3^x\ln 3>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ f este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p** **2p**
c)	f crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $a\le b\Rightarrow f(a)\le f(b)$ $a^3+a^2+a+3^a\le b^3+b^2+b+3^b$ $a^3+a^2+a-b^3-b^2-b\le 3^b-3^a$	**3p** **1p** **1p**
2.a)	$\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x}dx=\int_0^1 x\,dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 x\cdot e^x dx=\left.x\cdot e^x\right\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=$ $=e-\left.e^x\right\|_0^1=$ $=1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$\int_0^1 f_n\left(x^2\right)dx=\int_0^1 x^{2n}e^{x^2}dx$ $e^{x^2}\ge 1\Rightarrow\int_0^1 x^{2n}e^{x^2}dx\ge\int_0^1 x^{2n}dx$ $\int_0^1 x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}$	**1p** **2p** **2p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 6$ şi $a_3 = 5$. Calculați a_6.

5p **2.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $2x^2 - x - 3 \leq 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+2) - \log_3(x-4) = 1$.

5p **4.** După o scumpire cu 5%, prețul unui produs creşte cu 12 lei. Calculați prețul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ şi $B(5,0)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $BC = 9$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați $D(-1,1)$.

5p **b)** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $D(x, 2010) = 1$.

5p **c)** Demonstrați că $D(x,y) \cdot D(x,-y) = D(x^2, y^2)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p **a)** Arătați că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Calculați $1 * 2 * \ldots * 2011$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3^x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că $a^3 + a^2 + a - b^3 - b^2 - b \leq 3^b - 3^a$, oricare ar fi numerele reale a, b cu $a \leq b$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^x$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x} dx$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x) dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 f_n(x^2) dx \geq \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(5+\sqrt{17}\right)+\log_2\left(5-\sqrt{17}\right)=\log_2\left(\left(5+\sqrt{17}\right)\left(5-\sqrt{17}\right)\right)=$ $=\log_2 8=$ $=3$	**2p** **2p** **1p**
2.	$4!=24,\ C_4^1=4,\ A_5^1=5$ $\dfrac{4!-C_4^1}{A_5^1}=4$	**3p** **2p**
3.	Dreapta de ecuație $x=2$ este axă de simetrie a parabolei Dacă $A(x_1,0)$ şi $B(5,0)$ sunt punctele de intersecție, atunci $\dfrac{x_1+5}{2}=2$, deci $x_1=-1$	**2p** **3p**
4.	$2^{x+3}=2^{-2}$ $x+3=-2$ $x=-5\in\mathbb{Z}$	**2p** **1p** **2p**
5.	Panta dreptei d este egală cu $\dfrac{1}{2}$ Panta dreptei AB este $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-2$ Deoarece $m_d\cdot m_{AB}=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)=-1$, se deduce $AB\perp d$	**2p** **1p** **2p**
6.	$\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\dfrac{AB}{\sin C}=2R$ $R=\dfrac{AB}{2\cdot\sin C}=2\sqrt{3}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

a)	$(x*y)*z=x+y+z-2$ $x*(y*z)=x+y+z-2$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	$x*e=e*x=x+e-1$ $x+e-1=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ Finalizare: $e=1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$x\circ y=\dfrac{1}{2}(xy-x-y+1+2)=\dfrac{1}{2}(xy-x-y+1)+1$ Finalizare	**3p** **2p**
d)	$\dfrac{1}{2}\cdot\left(2^x-1\right)\cdot 2+1=1$ $2^x=1$ $x=0$	**2p** **2p** **1p**

e)	$\begin{cases} x+y=3 \\ 4x+y=6 \end{cases}$ $x=1$ şi $y=2$	**3p** **2p**
f)	$(x*y)\circ z=\frac{1}{2}(xz+yz-x-y-2z+4)$ $(x\circ z)*(y\circ z)=\frac{1}{2}(xz-x-z+3)*\frac{1}{2}(yz-y-z+3)=\frac{1}{2}(xz+yz-x-y-2z+4)$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a)	$\begin{cases} 1+2+a=6 \\ 2+a+1=6 \\ a+1+2=6 \end{cases}$ $a=3$	**3p** **2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix} a^2+5 & 3a+2 & 3a+2 \\ 3a+2 & a^2+5 & 3a+2 \\ 3a+2 & 3a+2 & a^2+5 \end{pmatrix}$ $(a^2+5)I_3=\begin{pmatrix} a^2+5 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+5 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+5 \end{pmatrix}$ $(3a+2)B=\begin{pmatrix} 0 & 3a+2 & 3a+2 \\ 3a+2 & 0 & 3a+2 \\ 3a+2 & 3a+2 & 0 \end{pmatrix}$ Finalizare: $A^2-(a^2+5)I_3=(3a+2)B$	**2p** **1p** **1p** **1p**
c)	Suma elementelor matricei A^2 este $3a^2+18a+27$ $3a^2+18a+27=0 \Rightarrow a=-3$	**3p** **2p**
d)	Pentru $a=-3$, sistemul este $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-3y+z=6 \\ -3x+y+2z=6 \end{cases}$ Adunând ecuațiile, se obține $0=18$ Sistemul (S) este incompatibil	**1p** **3p** **1p**
e)	Pentru $a=0$, sistemul este $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+z=6 \\ y+2z=6 \end{cases}$ Soluția sistemului este $(2,2,2)$	**2p** **3p**
f)	$\det B=2\neq 0 \Rightarrow B$ este inversabilă $B^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_2\left(5+\sqrt{17}\right)+\log_2\left(5-\sqrt{17}\right)$.

5p **2.** Calculați $\dfrac{P_4-C_4^1}{A_5^1}$.

5p **3.** Graficul unei funcții de gradul al II-lea este o parabolă care are abscisa vârfului egală cu 2 şi intersectează axa Ox în două puncte distincte. Dacă unul dintre acestea are abscisa egală cu 5, atunci determinați abscisa celuilalt punct de intersecție.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $2^{x+3}=\dfrac{1}{4}$.

5p **5.** Arătați că dreapta determinată de punctele $A(1,-2)$ şi $B(-2,4)$ este perpendiculară pe dreapta d de ecuație $x-2y+3=0$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC în care $AB=6$ şi $m\left(\sphericalangle BCA\right)=60^o$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ şi $x\circ y=\dfrac{1}{2}\left(xy-x-y+3\right)$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Determinați elementul neutru al mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Arătați că $x\circ y=\dfrac{1}{2}\left(x-1\right)\left(y-1\right)+1$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x\circ 3=1$.

5p **e)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases}\left(x+1\right)*y=3\\ \left(2x\right)\circ\left(y-1\right)=xy-1\end{cases}$.

5p **f)** Demonstrați că $\left(x*y\right)\circ z=\left(x\circ z\right)*\left(y\circ z\right)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\2&a&1\\a&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații liniare

$(S)\begin{cases}x+2y+az=6\\2x+ay+z=6\\ax+y+2z=6\end{cases}$, unde a este un parametru real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care tripletul $\left(1,1,1\right)$ este soluție a sistemului $\left(S\right)$.

5p **b)** Arătați că $A^2-\left(a^2+5\right)I_3=\left(3a+2\right)B$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care suma elementelor matricei A^2 este egală cu 0.

5p **d)** Arătați că, pentru $a=-3$, sistemul $\left(S\right)$ este incompatibil.

5p **e)** Pentru $a=0$, rezolvați sistemul $\left(S\right)$.

5p **f)** Determinați inversa matricei B.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **MODEL**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left\|1-i\sqrt{3}\right\|=\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{4}=2$	**2p**
2.	$x^2+x+1-y=0$	**1p**
	$\Delta=4y-3\geq 0$	**2p**
	$\operatorname{Im}_f=\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$	**2p**
3.	$b_1=\dfrac{3}{2}$	**1p**
	$q^2=4$	**2p**
	$b_7=96$	**2p**
4.	$\log_a x=\log_a 9-\log_a 8$	**2p**
	$\log_a x=\log_a \dfrac{9}{8}\Rightarrow x=\dfrac{9}{8}$	**3p**
5.	$m_d=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow m_{d'}=2$ unde $d\perp d'$	**2p**
	Ecuația dreptei d' este $y=2x-4$	**3p**
6.	$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{1}{9}$	**2p**
	$\cos x=\pm\dfrac{1}{3}$	**1p**
	$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \cos x=-\dfrac{1}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)-A(0)=\begin{pmatrix}0 & -4 & 16\\ 0 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\left(A(2)-A(0)\right)^3=O_3$	**2p**
	$\left(A(2)-A(0)\right)^{2010}=O_3$	**1p**

b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1 & -2x-2y & 4y^2+8xy+4x^2\\ 0 & 1 & -4x-4y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	Finalizare	**2p**
c)	$\det(A(x))=1\neq 0$, deci matricea este inversabilă	**1p**
	$A(x)A(-x)=A(0)=I_3$	**2p**
	$A^{-1}(x)=A(-x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 4x^2\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*x=x, \forall x\in G$	**1p**
	Verificare	**3p**
	Legea "$*$" are element neutru $e=\frac{1}{2}$	**1p**
b)	Orice element din G este simetrizabil şi $x'=1-x$	**3p**
	$0<x'<1$, deci $x'\in G$	**2p**
c)	Justificarea faptului că funcția f este bijectivă	**2p**
	$f(x*y)=\frac{1}{x*y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$	**2p**
	$f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=f(x*y)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 5}(x-2)(x-3)(x-4)=$	**2p**
	$=6$	**1p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{n-1}{n-5}$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n-5}\right)^n=$	**1p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=$	**1p**
	$=e^4$	**2p**
c)	$f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=1,\ f(5)=1$	**1p**
	f continuă pe intervalele $[2,3],[3,4],[4,5]$	**1p**
	f derivabilă pe intervalele $(2,3),(3,4),(4,5)$	**1p**
	Din teorema lui Rolle şi din faptul că f' este de gradul trei rezultă că $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte	**2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1\frac{1-x}{x^2+1}dx=$	**1p**

	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx\Big\vert_0^1 = \frac{\pi}{4}$	**1p**
	$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$	**2p**
	$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	**1p**
b)	$I_2 - I_0 = \int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)^2 - 1}{x^2+1}dx =$	**1p**
	$= \int_0^1 \left(x^2+2x+2\right)dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2+1}dx =$	**1p**
	$= \frac{10}{3} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$	**1p**
	$= \frac{10}{3} - \frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$	**2p**
c)	X^2+1 divide $\left(X^2+X+1\right)^{4n+1} - X$	**2p**
	$\frac{\left(x^2+x+1\right)^{4n+1} - x}{x^2+1} = g(x)$, unde $g \in \mathbb{Z}[X]$	**1p**
	$\int_0^1 g(x)dx \in \mathbb{Q}$	**2p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ MODEL

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z = 1 - i\sqrt{3}$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Ştiind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 6$ şi $b_5 = 24$, determinați termenul b_7.

5p **4.** Determinați $x > 0$, ştiind că $\log_a x = 2\log_a 3 - 3\log_a 2$, unde $a > 0,\ a \neq 1$.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $A(3, 2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d: x + 2y + 5 = 0$.

5p **6.** Ştiind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $\left(A(2) - A(0)\right)^{2010}$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y) = A(x+y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă şi calculați inversa matricei $A(x)$.

2. Pe mulțimea $G = (0,1)$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

5p **a)** Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f: G \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$.

5p **a)** Calculați $f'(5)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)^n - x}{x^2+1}\,dx$.

5p **a)** Calculați I_0.

5p **b)** Verificați dacă $I_2 - I_0 \in \mathbb{Q}$.

5p **c)** Arătați că $I_{4n+1} \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-1 \le \frac{x+1}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 \le x+1 < 3$	**2p**
	$-4 \le x < 2$	**2p**
	$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$	**1p**
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x-1 = x^2-2x+3$	**1p**
	$\Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$	**2p**
	punctul de intersecție este $A(2,3)$	**2p**
3.	$\sqrt{2-x} = 2-x$	**1p**
	Condiție $2-x \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$	**1p**
	Ecuația dată este echivalentă cu: $2-x = 4-4x+x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**2p**
	$x \in \{1,2\}$	**1p**
4.	$P_5 = 5! = 120,\ C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10,\ A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$	**3p**
	$\frac{P_5}{C_5^2 + A_6^2} = \frac{120}{40} = 3$	**2p**
5.	$\frac{y-3}{0-3} = \frac{x-2}{-1-2}$	**3p**
	Ecuația dreptei $AB: y = x+1$	**2p**
6.	Prin aplicarea teoremei cosinusului în triunghiul MNP se obține $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos(\sphericalangle NMP)$	**2p**
	$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \Rightarrow NP^2 = 19 \Rightarrow NP = \sqrt{19}$	**2p**
	Perimetrul este egal cu $5+\sqrt{19}$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	**2p**
	$= 1 - 0 = 1$	**3p**

b)	$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	**1p**
c)	$X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}$	**1p**
	$X^2=A\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\b(a+d)=2\\c(a+d)=0\\d^2+bc=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\a=d\\ab=1\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\a=d\\ab=1\\c=0\end{cases}$	**3p**
	Se obțin soluțiile $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	**1p**
2.a)	$(x-3)(y-3)+3=xy-3x-3y+9+3$	**3p**
	$=x*y, \forall x,y\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$x*x=19\Rightarrow(x-3)^2+3=19$	**2p**
	$(x-3)^2=16\Rightarrow x\in\{-1,7\}$	**3p**
c)	$x*3=3*x=3, \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{2011}=\left(\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{26}\right)*3*\left(\sqrt[3]{28}*\sqrt[3]{29}*...*\sqrt[3]{2011}\right)$	**2p**
	$=3$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x-x\right)'=e^x-1$	**3p**
	$f'(x)-f(x)=\left(e^x-1\right)-\left(e^x-x\right)=x-1$	**2p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=1, f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y=1$	**1p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{x}=-1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$	**2p**
	Ecuația asimptotei este $y=-x$	**1p**
2.a)	$\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{1}{x}\mathrm{d}x$	**2p**
	$=\ln x\Big\|_1^e$	**2p**
	$=1$	**1p**

b)	$A=\int_1^2 \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x=$	**2p**
	$=\left(\ln x+\ln(x+1)\right)\Big\vert_1^2=$	**2p**
	$=\ln 3$	**1p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x=$	**1p**
	$=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x(x+1)}\right)\mathrm{d}x=$	**1p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+2\ln\frac{x}{x+1}\right)\Big\vert_1^2=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{2}{3}+2\ln\frac{4}{3}\right)$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **Model**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele întregi x care verifică relația $-1 \le \frac{x+1}{3} < 1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2-2x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-\sqrt{2-x}=x$.

5p **4.** Calculați $\frac{P_5}{C_5^2+A_6^2}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$. Scrieți ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului MNP ştiind că $MN=2,\ MP=3$ şi $m(\sphericalangle NMP)=120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Calculați A^2-2A+I_2.

5p **c)** Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2=A$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy-3x-3y+12$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=(x-3)(y-3)+3,$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=19$.

5p **c)** Ştiind că legea "$*$" este asociativă, calculați $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{2011}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Demonstrați că $f'(x)-f(x)=x-1,$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuație $x=1$ şi $x=2$.

5p **c)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **MODEL**

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\log_3 3=-\frac{1}{2}$	**2p**
	$\log_2\sqrt{2}+\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=0$	**1p**
2.	$f(a)=b+1$ şi $g(a)=b+1$	**1p**
	$b+1=2a+5$ şi $b+1=a+1$	**2p**
	$a=b=-4$	**2p**
3.	Numerele iraţionale sunt $\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{8},\sqrt{10},\sqrt{12},\sqrt{14}$	**3p**
	$p=\frac{3}{4}$	**2p**
4.	$A_x^3=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$, $x\geq 3$	**2p**
	$x\cdot(x-1)\cdot(x-2)=2x$	**1p**
	$x=3$	**2p**
5.	Triunghiul este dreptunghic $b^2=a^2+c^2$	**2p**
	$A_\Delta=\frac{a\cdot c}{2}=30$	**3p**
6.	$x=-\cos 135^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$y=2\sin 45^\circ=\sqrt{2}$	**1p**
	$m_g=\sqrt{xy}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

a)	Suma elementelor matricei $A(x)$ este $2x$	**3p**
	$2x=2010\Rightarrow x=1005$	**2p**
b)	$A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix}$, $A(y)=\begin{pmatrix}1 & y-1\\ 0 & y\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(x)\circ A(y)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & y-1\\ 0 & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y-1\\ 0 & x+y\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(x)\circ A(y)=A(x+y)$	**1p**
c)	Fie $A(e)\in M$ elementul neutru: $A(e)\circ A(x)=A(x+e)$	**2p**

	$A(x)=A(x+e)\Rightarrow e=0\Rightarrow A(e)=A(0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	3p
d)	$\left(A(x)\circ A(y)\right)\circ A(z)=A(x+y+z)$ $A(x)\circ\left(A(y)\circ A(z)\right)=A(x+y+z)$ Legea este asociativă	2p 2p 1p
e)	$A(2)\circ A(x^3)=A(2+x^3)$ $A(2+x^3)=A(10)\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2\in[0,+\infty)$	2p 3p
f)	$A(x)\circ A(x)\circ A(x)\circ A(x)\circ A(x)=A(5x)$ $A(5x)=A(10)\Rightarrow x=2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a)	$\det(A)=2m^2+2m$	5p
b)	$A+I_3=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1-m & 1\\ 1 & 1 & 1-m\end{pmatrix}$, $\det(A+I_3)=3m^2-4m$ $3m^2-4m=-1\Rightarrow m\in\left(1,\frac{1}{3}\right)$	1p 2p 2p
c)	Scrierea sistemului pentru $m=2$ Finalizare: tripletul este soluție a sistemului	2p 3p
d)	Pentru $m=1$ avem $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $\det(A)=4\neq 0$	2p 3p
e)	$D_x=4, D_y=4, D_z=0$ Finalizare: $x=1, y=1, z=0$	2p 3p
f)	Sistemul este $\begin{cases}2x+y+z=3\\ x+z=0\\ x+y=2\end{cases}$ Adunând ecuațiile 2 şi 3 se obține că $2x+y+z=0$, contradicție cu $2x+y+z=3$	2p 3p

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Probă scrisă la MATEMATICĂ – Proba E. c)

MODEL

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_2 \sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5p **2.** Determinați $a,b \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(a,b+1)$ aparține graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$.

5p **3.** Calculați probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $\{\sqrt{2},\sqrt{4},\sqrt{6},\sqrt{8},\sqrt{10},\sqrt{12},\sqrt{14},\sqrt{16}\}$ acesta să fie număr irațional.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $A_x^3 = x\cdot 2$.

5p **5.** Calculați aria triunghiului care are laturile $a=12,\ b=13,\ c=5$.

5p **6.** Calculați media geometrică a numerelor $x=-\cos 135^\circ$, $y=2\sin 45^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Se consideră mulțimea de matrice $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix} \middle|\ x\in[0,+\infty)\right\}$. Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se defineşte legea de compoziție $X\circ Y = X+Y-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Determinați $x\in[0,+\infty)$ pentru care suma elementelor matricei $A(x)$ este egală cu 2010.

5p **b)** Arătați că $A(x)\circ A(y)=A(x+y)$, pentru oricare $A(x),A(y)\in M$.

5p **c)** Determinați elementul neutru în raport cu legea „$\circ$” pe mulțimea M.

5p **d)** Arătați că legea „$\circ$” este asociativă, pe mulțimea M.

5p **e)** Rezolvați în mulțimea M ecuația $A(2)\circ A(x^3)=A(10)$.

5p **f)** Rezolvați în mulțimea M ecuația $A(x)\circ A(x)\circ A(x)\circ A(x)\circ A(x)=A(10)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -m & 1\\ 1 & 1 & -m\end{pmatrix}$ şi sistemul (S) $\begin{cases}2x+y+z=3\\ x-my+z=0\\ x+y-mz=2\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi m este un parametru real.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A+I_3)=-1$.

5p **c)** Verificați dacă pentru $m=2$ tripletul $\left(\frac{5}{4},\frac{7}{12},-\frac{1}{12}\right)$ este soluție a sistemului (S).

5p **d)** Pentru $m=1$, arătați că $\det(A)\neq 0$.

5p **e)** Pentru $m=1$, rezolvați sistemul (S).

5p **f)** Arătați că pentru $m=0$ sistemul este incompatibil.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi modulul numărului complex $z=(3+4i)(5-12i)$.

5p **2.** Punctul $V(2,3)$ este vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax+b$. Calculaţi $f(3)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left|\sqrt{x}-1\right|=2$.

5p **4.** Determinaţi numerele naturale *n*, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2\leq 4\cdot A_n^1$.

5p **5.** Fie $G(1,0)$ centrul de greutate al triunghiului *ABC*, unde $A(2,5)$ şi $B(-1,-3)$. Determinaţi coordonatele punctului *C*.

5p **6.** Calculaţi raza cercului înscris în triunghiul *ABC* ştiind că $AB=AC=5$ şi $BC=8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Arătaţi că rang $A=3$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Determinaţi valorile întregi ale lui *a* ştiind că matricea A^{-1} are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră numerele reale a,b,c şi polinomul $f=X^4+aX^3+bX^2+cX+36\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Calculaţi $a+b+c$ în cazul în care restul împărţirii lui *f* la $X-1$ este 40.

5p **b)** Determinaţi $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Arătaţi că dacă $a=6$ şi $b=18$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-4\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia *f* este strict descrescătoare pe $(0,1]$.

5p **b)** Determinaţi asimptotele verticale ale graficului funcţiei *f*.

5p **c)** Demonstraţi că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există un unic număr $x_n\in(0,1]$ pentru care $f(x_n)=n$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$.

5p **a)** Calculaţi aria suprafeţei determinate de graficul funcţiei *f*, axa *Ox* şi de dreptele de ecuaţii $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n(x)\,dx$ este convergent.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Comparați numerele $a=\log_2 4$ şi $b=\sqrt[3]{27}$.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3x^2-11x+6\le 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+x+1}=3^{5x-2}$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=15$.

5p **5.** Determinați numerele reale m, pentru care punctul $A_m\left(2m-1,m^2\right)$ se află pe dreapta $d:x-y+1=0$.

5p **6.** Calculați $\cos x$, ştiind că $0^\circ<x<90^\circ$ şi $\sin x=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{N}\right\}$.

5p **a)** Determinați numerele naturale *m* şi *n* pentru care matricea $\begin{pmatrix} 4 & m^2\\ 9 & n^2\end{pmatrix}\in G$.

5p **b)** Arătați că dacă $U,V\in G$, atunci $U\cdot V\in G$.

5p **c)** Calculați suma elementelor matricei $U\in G$, ştiind că suma elementelor matricei U^2 este egală cu 8.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3-4X^2+2X+4$.

5p **a)** Arătați că restul împărțirii polinomului f prin polinomul $g=X-\sqrt{2}$ este egal cu 0.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=0$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x-8^x-4\cdot 4^x+2\cdot 2^x+4=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x}, & x\in(1,+\infty)\\ x+1, & x\in(0,1]\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\le 4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x\cdot\ln x$ şi $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{e^x}{x}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 x\cdot g(x)\,dx$.

5p **b)** Calculați $\int_{e}^{e^2} \frac{f(x)}{x \cdot e^x}\, dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{1}^{e} \left(f(x) + g(x) \right) dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)=\log_7\left[\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\right]=$	**3p**
	$=\log_7 7=1$	**2p**
2.	$A(2,3)\in G_f \Rightarrow f(2)=3 \Rightarrow 4+2a+b=3$	**2p**
	$B(-1,0)\in G_f \Rightarrow f(-1)=0 \Rightarrow 1-a+b=0$	**2p**
	$a=0, b=-1$	**1p**
3.	$3^x+3\cdot 3^x=36$	**2p**
	$3^x=9$	**2p**
	$x=2$	**1p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numerele divizibile cu 4: 12, 16,…,96 $\Rightarrow$ 22 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{22}{90}=\dfrac{11}{45}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{i}+3\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$	**3p**
	Coordonatele sunt $(1,2)$	**2p**
6.	$A=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$	**3p**
	$l=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A_0(1,1),\ A_1(2,3)$	**1p**
	$A_0A_1:\begin{vmatrix}x & y & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$	**2p**
	$A_0A_1: y=2x-1$	**2p**
b)	$A_1(2,3),\ A_2(4,9),\ A_3(8,27)$	**1p**
	Verificarea faptului că $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 9 & 1\\ 8 & 27 & 1\end{vmatrix}\neq 0$	**4p**

c)	$A=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$ $\Delta=\begin{vmatrix}2^n & 3^n & 1\\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1\\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1\end{vmatrix}=2\cdot 6^n$ $\frac{2\cdot 6^n}{2}=216\Rightarrow n=3$	**1p** **3p** **1p**
2.a)	$x\circ 3=\frac{1}{2}\left(x\cdot 3-x-3+3\right)=x$ $3\circ x=\frac{1}{2}\left(3\cdot x-3-x+3\right)=x$ 3 este element neutru	**2p** **2p** **1p**
b)	Căutăm $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\circ 2=2\circ a=3$ $2\circ a=a\circ 2$ $\frac{1}{2}\left(2a-2-a+3\right)=3$ $a+1=6\Rightarrow a=5$	**1p** **1p** **1p** **2p**
c)	Fie $x,y\in H\Rightarrow x=2k+1, y=2p+1,\ k,p\in\mathbb{Z}$ $x\circ y=\frac{1}{2}\left(4kp+2k+2p+1-2k-1-2p-1+3\right)$ $x\circ y=2kp+1\in H$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}+e^x$ Finalizare	**3p** **2p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $f'(1)=1+e,\ f(1)=e$ $y=(e+1)x-1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+e^x}{1}=$ $=+\infty$	**3p** **2p**
2.a)	$A=\int_0^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1\left(3x^2+2x+1\right)dx=$ $=3$	**3p** **2p**
b)	Fie g o primitivă a funcției $f\Rightarrow g'(x)=f(x)$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ $g''(x)=f'(x)=6x+2$ $x<-\frac{1}{3}\Rightarrow g''(x)<0$, deci g este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	**2p** **1p** **2p**
c)	$\int_0^a f(x)dx=\left(x^3+x^2+x\right)\Big\|_0^a=a^3+a^2+a$ $a^3+a^2+a\ge 3a^2+2\Leftrightarrow(a-2)(a^2+1)\ge 0$, adevărată oricare ar fi $a\ge 2$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale *a* şi *b* pentru care graficul funcției *f* conține punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{10,11,12,\ldots,99\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $M(2,-1)$ şi $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

5p **6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră punctele $A_n\left(2^n,3^n\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)$.

5p **a)** Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$” este $e=3$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$”.

5p **c)** Arătați că mulțimea $H=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+e^x$.

5p **a)** Arătați că $xf'(x)=1+xe^x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției *f*, axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că, oricare ar fi $a\geq 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)dx\geq 3a^2+2$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1<\sqrt{2}<2$	**2p**
	$2<\sqrt{5}<3$	**2p**
	Rezultă că 2 este singurul număr întreg din intervalul dat	**1p**
2.	Axa de simetrie a parabolei este dreapta de ecuație $x=x_V=-\dfrac{b}{2a}$	**2p**
	$-\dfrac{m}{2}=2\Rightarrow m=-4$	**3p**
3.	$x-\dfrac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	**3p**
	$x\in\left\{\dfrac{\pi}{3},\pi\right\}$	**2p**
4.	$A_n^2=n(n-1)$	**2p**
	$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$n(n-1)=12\Rightarrow n=4$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{-2}$	**3p**
	$a=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
6.	$\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=2$	**2p**
	$1=2\sin x\cdot\cos x$	**2p**
	$\sin 2x=1$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&y&y^2\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\begin{pmatrix}1&x&x^2\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&y&y^2\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**4p**

b)	$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2(x-y)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**1p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2(x-y)^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^3=O_3\Rightarrow\left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$	**2p**
c)	Matricea A este inversabilă	**1p**
	$\left(A(x)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(-x)$	**4p**
2.a)	$f(-1)=-1+1-\alpha-i(\alpha-2)+\alpha+(\alpha-2)i$	**2p**
	Finalizare: $f(-1)=0$	**3p**
b)	Rădăcinile lui g sunt de forma $x_1=u+iv$ şi $x_2=u-iv$, unde $u,v\in\mathbb{R}$	**1p**
	Din relaţiile lui Viète rezultă $x_1+x_2=-p$ şi $x_1x_2=q$	**1p**
	$p=-2u\in\mathbb{R}$ şi $q=u^2+v^2\in\mathbb{R}$	**2p**
	Ecuaţia $x^2+px+q=0$, cu $p,q\in\mathbb{R}$, are soluţii distincte complex conjugate dacă şi numai dacă $\Delta<0$, de unde $p^2<4q$	**1p**
c)	$f=\left(X+1\right)\left(X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\right)$	**2p**
	Polinomul $h=X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte complex conjugate	**1p**
	Conform punctului **b)**, rezultă $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{R}$, de unde $\alpha=2$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	**1.a)** $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{-2}{x^2-1}$	**3p**
	$f'(x)<0$ pentru orice $x>1$, de unde concluzia	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală	**2p**
	f este continuă pe $(1,\infty)$, deci nu are alte asimptote verticale	**1p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{x^{-1}}$ - nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$	**2p**
	Cu regula lui l'Hospital, limita este $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{-1}-(x-1)^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$	**3p**
2.a)	$\int_1^4(x-3\sqrt{x}+2)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2x\right)\Big\vert_1^4=$	**4p**
	$=-\frac{1}{2}$	**1p**
b)	$A=\int_1^2\left\lvert\frac{f(x)}{x}\right\rvert dx=-\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx$, deoarece $f\le0$ pe intervalul [1, 2],	**2p**
	$=-\int_1^2 xdx+3\int_1^2 dx-\int_1^2\frac{2}{x}dx=$	**1p**

	$=\frac{3}{2}-2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^2 f^n(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)'f^n(x)dx=\frac{1}{2}(2x-3)(x^2-3x+2)^n\Big\vert_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)^2 nf^{n-1}(x)dx=$	**3p**
	$=-\frac{n}{2}\int_1^2(4x^2-12x+8+1)f^{n-1}(x)dx=-\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx$, de unde concluzia	**2p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui *m* pentru care dreapta $x = 2$ este axa de simetrie a parabolei $y = x^2 + mx + 4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

5p **4.** Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care $C_n^2 + A_n^2 = 18$.

5p **5.** Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1 : ax + y + 2011 = 0$ şi $d_2 : x - 2y = 0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie *x* un număr real care verifică egalitatea $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$. Arătați că $\sin 2x = 1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x) - A(y)\right)^{2011} = O_3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră $\alpha \in \mathbb{C}$ şi polinomul $f = X^3 + (1 - \alpha)X^2 + (\alpha - 2)iX + \alpha + (\alpha - 2)i \in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Arătați că polinomul f are rădăcina -1.

5p **b)** Arătați că, dacă p, q sunt numere complexe şi polinomul $g = X^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte, complex conjugate, atunci *p* şi *q* sunt numere reale şi $p^2 < 4q$.

5p **c)** Determinați $\alpha \in \mathbb{C}$ pentru care polinomul f are două rădăcini distincte, complex conjugate.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$.

5p **a)** Arătați că funcția *f* este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției *f*.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x)$.

2. Se consideră funcția $f : [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$.

5p **a)** Calculați $\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right) dx$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g : [1; 2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x}$ şi de axa *Ox*.

5p **c)** Arătați că $(4n + 2)\int_1^2 f^n(x)dx + n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx = 0$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2(x+1)=x-1+3x-1$	**3p**
	$2x=4\Rightarrow x=2$	**2p**
2.	$f(5)=0$	**3p**
	$f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**2p**
3.	Condiții $\begin{cases}x-1\geq 0\\x-3\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[3,+\infty)$	**1p**
	$x-1=(x-3)^2\Rightarrow x^2-7x+10=0$	**2p**
	$x=2$ sau $x=5$	**1p**
	$2\notin[3,+\infty)\Rightarrow x=5$	**1p**
4.	Numărul de submulțimi ordonate este A_7^2	**2p**
	$A_7^2=\frac{7!}{5!}=42$	**3p**
5.	$\begin{cases}2x-y-6=0\\-x+2y-6=0\end{cases}\Rightarrow x=y=6$	**2p**
	$d=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}$	**2p**
	$d=5$	**1p**
6.	$\cos M=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2\cdot MN\cdot MP}$	**3p**
	$\cos M=\frac{1}{8}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$	**3p**
	$3A=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$	**1p**
	$A^2-3A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	**1p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2+bA+aA+abA^2=$	**2p**
	$=I_2+aA+bA+3abA=$	**1p**
	$=I_2+(a+b+3ab)A=X(a+b+3ab)$	**2p**

c)	$X(a)=I_2+aA=\begin{pmatrix}1+a & -a\\ -2a & 1+2a\end{pmatrix}$ $X(a)$ matrice inversabilă $\Leftrightarrow \det X(a)\neq 0$ $1+3a\neq 0 \Rightarrow a\neq -\frac{1}{3}$ Deoarece $-\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow X(a)$ este matrice inversabilă oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	Din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2+x_3=-2$ şi $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=-5$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3)=$ $=14$	**2p** **2p** **1p**
b)	$x_1x_2x_3=-m$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3}{x_1\cdot x_2\cdot x_3}=\frac{5}{m}$ $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$	**1p** **2p** **2p**
c)	$\Delta=(x_1+x_2+x_3)\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)=$ $=-2(-5-14)=38\in\mathbb{N}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ $f'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=e^2+\frac{1}{4}$	**2p** **2p** **1p**
b)	$f'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ crescătoare pe $[1,+\infty)$ $f(1)=e-1>0\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in[1,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow$ graficul nu admite asimptotă orizontală $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\Rightarrow$ graficul nu admite asimptotă oblică	**2p** **3p**
2.a)	$V=\pi\int_0^3 g^2(x)dx=\pi\int_0^3\left(x^2+10\right)dx$ $V=\pi\left(\frac{x^3}{3}+10x\right)\Big\|_0^3=39\pi$	**2p** **3p**
b)	$F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p** **3p**
c)	$\int_{-10}^{10}f(x)dx=\int_{-10}^{0}f(x)dx+\int_0^{10}f(x)dx=$	**2p**

	$=\int_{10}^{0}\left(-f(t)\right)dt+\int_{0}^{10}f\left(x\right)dx=$	**2p**
	$=2\int_{0}^{10}f\left(x\right)dx$	**1p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ şi $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ şi $d_2: -x+2y-6=0$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului *M* al triunghiului *MNP*, ştiind că $MN=4$, $MP=5$ şi $NP=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați A^2-3A.

5p **b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Arătați că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

2. Polinomul $f=X^3+2X^2-5X+m$, cu $m\in\mathbb{R}$ are rădăcinile x_1, x_2 şi x_3.

5p **a)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.

5p **c)** Arătați că determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătați că $f(x)>0$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că graficul funcției *f* nu admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+10}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă *F* a funcției *f* este crescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{10} f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\begin{cases} a_2 = 5 \\ a_4 = 11 \end{cases} \Rightarrow r = 3$	**3p**
	$a_6 = 17$	**2p**
2.	Din ipoteză reiese $a+b=c+d$ şi $3a+b=3c+d$	**2p**
	Deducem $a=c,\ b=d$	**2p**
	Finalizare $f(5)=g(5)$	**1p**
3.	$S = x_1 + x_2 = 5$	**1p**
	$P = x_1 \cdot x_2 = 3$	**1p**
	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$	**2p**
	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{3}$	**1p**
4.	$x^2 + x + 2 = 4$, deci $x^2 + x - 2 = 0$	**3p**
	$S = \{-2, 1\}$	**2p**
5.	$\frac{AM}{MB} = 3,\ M \in [AB]$	**2p**
	$\frac{AN}{NC} = 3,\ N \in [AC]$	**2p**
	$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 3 \Rightarrow MN \parallel BC$	**1p**
6.	$AC = BC \cdot \operatorname{ctg} A$	**3p**
	$AC = 6\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

a)	$y * x = yx - 2y - 2x + 6 =$	**2p**
	$= xy - 2x - 2y + 6 = x * y$	**2p**
	Finalizare: $y * x = x * y$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$	**1p**
b)	$(x*y)*z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$	**2p**
	$x*(y*z) = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$	**2p**
	$(x*y)*z = x*(y*z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$	**1p**
c)	$x*y = (2-x)(2-y) + a \Rightarrow xy - 2x - 2y + 6 = (2-x)(2-y) + a$	**2p**
	Finalizare: $a = 2$	**3p**
d)	$x*x = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = x$	**3p**
	$x = 2$ sau $x = 3$	**2p**
e)	Căutăm $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x*e = e*x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$	**1p**
	$x*e = e*x = xe - 2x - 2e + 6$	**2p**
	$xe - 2x - 2e + 6 = x \Rightarrow e = 3 \in \mathbb{R}$	**2p**

f)	$(x+2)*\left(\frac{1}{x}+2\right)=(2-x-2)\left(2-\frac{1}{x}-2\right)+2=$	**3p**
	$=(-x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+2=1+2=3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

a)	$A+I_3=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & -a\\ -a & 0 & 1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\det\left(A+I_3\right)=1+a^3$	**3p**
	Finalizare: $a=0$	**1p**
b)	${}^tA=\begin{pmatrix}0 & 0 & -a\\ a & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}$	**1p**
	$A+{}^tA=\begin{pmatrix}0 & a & -a\\ a & 0 & -a\\ -a & -a & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A+{}^tA\right)=2a^3$	**2p**
c)	$a=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $\det A=1\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă	**2p**
	Finalizare: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
d)	$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -a^2\\ a^2 & 0 & 0\\ 0 & -a^2 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}a^3 & 0 & 0\\ 0 & a^3 & 0\\ 0 & 0 & a^3\end{pmatrix}=a^3\cdot I_3$	**3p**
e)	$\left(A+I_3\right)\left(A^2-A+I_3\right)=A^3+I_3$	**3p**
	Finalizare: $A^3+I_3=2I_3$	**2p**
f)	$A+{}^tA+I_3=\begin{pmatrix}1 & a & -a\\ a & 1 & -a\\ -a & -a & 1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\det\left(A+{}^tA+I_3\right)=2a^3-3a^2+1$	**2p**
	$2a^3-3a^2+1=1\Leftrightarrow a^2\left(2a-3\right)=0$, deci $a=0$ sau $a=\frac{3}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2 = 5$ şi $a_4 = 11$. Calculați a_6.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = cx + d$, unde a, b, c, d sunt numere reale. Arătați că, dacă $f(1) = g(1)$ şi $f(3) = g(3)$, atunci $f(5) = g(5)$.

5p **3.** Se notează cu x_1 şi x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2 - 5x + 3 = 0$. Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

5p **4.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_2\left(x^2 + x + 2\right) = 2$.

5p **5.** Se consideră un triunghi ABC şi punctele M, N, astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\cdot\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN} = 3\cdot\overrightarrow{NC}$. Arătați că dreptele MN şi BC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră un triunghi ABC în care unghiurile A şi C au măsurile egale cu 30°, respectiv 90°. Ştiind că $BC = 6$, calculați lungimea laturii AC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este comutativă.
5p **b)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.
5p **c)** Determinați numărul real a pentru care are loc egalitatea $x * y = (2 - x)(2 - y) + a$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
5p **d)** Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $x * x = x$.
5p **e)** Determinați elementul neutru al legii „$*$”.
5p **f)** Arătați că $(x + 2) * \left(\frac{1}{x} + 2\right) = 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(A + I_3\right) = 1$.
5p **b)** Calculați $\det\left(A + {}^tA\right)$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.
5p **c)** Pentru $a = 1$, determinați inversa matricei A.
5p **d)** Arătați că $A^3 = a^3 \cdot I_3$.
5p **e)** Pentru $a = 1$, verificați egalitatea $\left(A + I_3\right)\left(A^2 - A + I_3\right) = 2I_3$.
5p **f)** Determinați valorile numărului real a pentru care $\det\left(A + {}^tA + I_3\right) = 1$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_6 3+\log_6 12=\log_6 36$	**3p**
	$\log_6 36=\log_6 6^2=2$	**2p**
2.	$x_V=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{4}$	**2p**
	$\Delta=-23$	**1p**
	$y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{23}{8}$	**2p**
3.	$7^x+7^{x+1}=392 \Leftrightarrow 7^x+7^x\cdot 7=392$	**1p**
	$7^x\cdot 8=392 \Leftrightarrow 7^x=49$	**2p**
	$x=2$	**2p**
4.	$\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=4\dfrac{n!}{(n-1)!}$	**2p**
	$\dfrac{n-1}{2}=4$	**2p**
	$n=9$	**1p**
5.	$\sqrt{(4-0)^2+(m+2)^2}=5$	**1p**
	$m^2+4m-5=0$	**2p**
	$m=-5$ sau $m=1$	**2p**
6.	$\cos 140^\circ=\cos\left(180^\circ-40^\circ\right)=-\cos 40^\circ$	**3p**
	$\cos 40^\circ+\cos 140^\circ=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=m^2-2+1-m-2m+1=$	**3p**
	$=m^2-3m$	**2p**
b)	$\begin{cases} -m-2+5=0 \\ -1+2m-5=0 \\ -1-4+5=0 \end{cases}$	**3p**
	$m=3$	**2p**

c)	$\det A \neq 0$ $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$	**2p** **3p**
2.a)	$(x*y)*z=(xy+x+y)*z=xyz+xz+yz+xy+x+y+z$ $x*(y*z)=x*(yz+y+z)=xyz+xy+xz+x+yz+y+z$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	$x*e=e*x=xe+x+e$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $ex+e=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $e=0$	**2p** **1p** **2p**
c)	$x^2*2=3x^2+2$ $x*4=5x+4$ $x^2*2=x*4 \Leftrightarrow 3x^2-5x-2=0$ $x_1=-\frac{1}{3}$ şi $x_2=2$	**1p** **1p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2-2(x-1)(x+2)}{(x-1)^4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Finalizare	**3p** **2p**
b)	f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ şi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{(x-1)^2}=+\infty$ $x=1$ este ecuația asimptotei verticale	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0 \Rightarrow x=-5$ $x=-5$ punct de minim global pe $(-\infty,1)$ $f(x) \geq f(-5), \forall x \in (-\infty,1) \Rightarrow f(x) \geq -\dfrac{1}{12}, \forall x \in (-\infty,1) \Rightarrow f(x)+\dfrac{1}{12} \geq 0, \forall x \in (-\infty,1)$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$\displaystyle\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}dx=\int_2^e \frac{1}{x}dx=\ln x \Big\vert_2^e=$ $=1-\ln 2$	**3p** **2p**
b)	$g(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $x \in (0,1]$ $\int g(x)\,dx=x-\ln x+C$ $G(x)=x-\ln x+c$, $c \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției g pe intervalul $(0,1]$ $A(1,5)$ aparține graficului funcției $G \Rightarrow G(1)=5 \Rightarrow c=4$ $G(x)=x-\ln x+4$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
c)	$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^e f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1}{x}dx+\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1}{x}dx=\frac{1}{2}-\ln 2$	**2p** **1p**

	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x \Big\vert_1^e = \frac{1}{2}$	**1p**
	$\int_{\frac{1}{2}}^e f(x)dx = 1 - \ln 2$	**1p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_6 3 + \log_6 12$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x+7^{x+1}=392$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2=4A_n^1$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ şi $B(4,m)$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB=5$.

5p **6.** Calculați $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$, unde m este parametru real.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care tripletul $(-1,2,5)$ este o soluție a sistemului.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul admite doar soluția $(0,0,0)$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii „$*$”.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2*2=x*4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-x-5}{(x-1)^3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)+\dfrac{1}{12}\geq 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,1)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x}, & x>1 \\ \dfrac{x-1}{x}, & 0<x\leq 1 \end{cases}$.

5p **a)** Calculați $\displaystyle\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}dx$.

5p **b)** Fie $g:(0,1] \to \mathbb{R}, g(x)=f(x)$. Determinați primitiva funcției g, primitivă al cărei grafic conține punctul $A(1,5)$.

5p **c)** Calculați $\int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)dx$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3 = b_1 q^2,\ b_4 = b_1 q^3$	**2p**
	$24 = 6q^2$	**2p**
	$q = 2$	**1p**
2.	$1 - a^2 = 0$	**3p**
	$a = 1$ sau $a = -1$	**2p**
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$	**1p**
	Deoarece $\frac{3}{2} > 1$, inecuația devine $x < -x$	**2p**
	$S = (-\infty, 0)$	**2p**
4.	$T_{k+1} = C_{10}^k \sqrt{2}^k,\ k \in \{0,1,\ldots,10\}$	**2p**
	$T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k$ par	**2p**
	Sunt 6 termeni raționali	**1p**
5.	$BC:\ x + y - 1 = 0$	**2p**
	Distanța este $\frac{\lvert 2+2-1 \rvert}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$	**3p**
6.	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	**2p**
	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A =$	**2p**
	$= 10$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	**4p**
	Aşadar $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$	**1p**
b)	$(A^n)^2 = A^{2n} = (A^2)^n =$	**2p**
	$= A^n$, deci $A^n \in H$	**3p**
c)	Matricele $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin lui H pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**4p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	Restul împărțirii polinomului f la $X - i$ este $f(i)$	**2p**
	$f(i) = (2i)^{10} = -2^{10}$	**3p**

b)	$f=\sum_{k=0}^{10}\left(C_{10}^{k}X^{10-k}i^{k}+C_{10}^{k}X^{10-k}(-i)^{k}\right)=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}X^{10-k}i^{k}\left(1+(-1)^{k}\right)$	**2p**
	$a_{2p+1}=0\in\mathbb{R}$, pentru orice $p\in\{0,1,2,3,4\}$	**1p**
	$a_{2p}=C_{10}^{2p}i^{2p}\left(1+(-1)^{2p}\right)=2C_{10}^{2p}\cdot(-1)^{p}\in\mathbb{R}$, pentru orice $p\in\{0,1,2,3,4,5\}$	**2p**
c)	Dacă z este rădăcină, atunci $(z+i)^{10}=-(z-i)^{10}$, deci $\lvert z+i\rvert=\lvert z-i\rvert$	**3p**
	Punctul de afix z este egal depărtat de punctele de afixe $\pm i$, deci aparține axei reale	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$	**2p**
	$f'(x)=5x^4-5$	**2p**
	$f'(2)=75$	**1p**
b)	$f''(x)=20x^3$ se anulează în 0	**3p**
	Deoarece f'' are semne opuse de o parte şi de cealaltă a lui 0, rezultă că 0 este punct de inflexiune	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x^4-1=0\Rightarrow x=\pm 1$	**1p**
	Tabelul de variație a funcției f	**2p**
	Finalizare	**2p**
2.a)	$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{e-1}{e}$	**2p**
b)	Cu schimbarea de variabilă $x^3=t$ se obține $\frac{1}{3}\int_0^1 t\cdot e^{-t}dt=$	**2p**
	$=-\frac{1}{3}te^{-t}\Big\vert_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-t}dt=\frac{e-2}{3e}$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}g\left(x^3\right)dx=\int_n^{n+1}e^{-x^3}dx\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este crescător	**2p**
	$0\leq I_n\leq\int_1^n e^{-x}dx=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^n}<\frac{1}{e}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit	**2p**
	Deoarece şirul este monoton şi mărginit, el este convergent	**1p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_2=6$ şi $b_3+b_4=24$.

5p **2.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-a^2)x+4$ este constantă.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

5p **4.** Determinați numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(1+\sqrt{2}\right)^{10}$.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(1,0)$ şi $C(0,1)$.

5p **6.** Triunghiul *ABC* are măsura unghiului *A* de 60°, $AB=4$ şi $AC=5$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulțimea $H=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid A^2=A\right\}$.

5p **a)** Arătați că $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\in H$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $A\in H$, atunci $A^n\in H$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că mulțimea *H* este infinită.

2. Se consideră polinomul $f=(X+i)^{10}+(X-i)^{10}$, având forma algebrică $f=a_{10}X^{10}+a_9X^9+...+a_1X+a_0$, unde $a_0,a_1,...,a_{10}\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Determinați restul împărțirii polinomului f la $X-i$.

5p **b)** Arătați că toți coeficienții polinomului f sunt numere reale.

5p **c)** Demonstrați că toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x+4$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătați că graficul funcției *f* are un punct de inflexiune.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $m\in(0,8)$, ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 g(x)\,dx$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x^5 g(x^3)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_1^n g(x^3)\,dx$ este convergent.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases} a_2 = 6 \\ a_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow r = -1$	**2p**
	$a_6 = 2$	**3p**
2.	$2x^2 - x - 3 \le 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$	**3p**
	$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$	**2p**
3.	Condiții de existență $\begin{cases} x+2>0 \\ x-4>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (4, +\infty)$	**1p**
	$\log_3\left(\frac{x+2}{x-4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-4} = 3$	**2p**
	$x = 7 \in (4, +\infty)$	**2p**
4.	Se notează cu x prețul inițial	
	$\frac{5}{100} \cdot x = 12$	**3p**
	$x = 240$ lei	**2p**
5.	Se notează cu M mijlocul lui $[AB]$ și cu d mediatoarea segmentului $[AB]$. Obținem $M(3,2)$	**1p**
	$m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = 1$	**2p**
	$d: y - 2 = 1 \cdot (x-3) \Rightarrow d: y = x - 1$	**2p**
6.	Din teorema sinusurilor $\Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A}$	**2p**
	$\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$R = 3\sqrt{3}$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(-1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2$	**3p**
b)	$D(x,2010) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2010 \\ 1 & x+1 & 2011 \end{vmatrix} =$	**1p**
	$= x - 2010$	**2p**
	$x - 2010 = 1 \Rightarrow x = 2011 \in \mathbb{Z}$	**2p**

c)	$D(x,y)=x-y$ $D(x,-y)=x+y$ şi $D\left(x^2,y^2\right)=x^2-y^2$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$x*y=2xy-6x-6y+21=2x(y-3)-6(y-3)+3=$ $=(y-3)(2x-6)+3=2(x-3)(y-3)+3$	**3p** **2p**
b)	$(x*y)*z=4(x-3)(y-3)(z-3)+3$ $x*(y*z)=4(x-3)(y-3)(z-3)+3$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
c)	$x*3=3*x=3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $(1*2)*3*(4*...*2011)=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2+2x+1+3^x\ln 3$ $f'(0)=1+\ln 3$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=3x^2+2x+1+3^x\ln 3=2x^2+(x+1)^2+3^x\ln 3>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ f este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p** **2p**
c)	f crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $a\le b\Rightarrow f(a)\le f(b)$ $a^3+a^2+a+3^a\le b^3+b^2+b+3^b$ $a^3+a^2+a-b^3-b^2-b\le 3^b-3^a$	**3p** **1p** **1p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f_1(x)}{e^x}dx=\int_0^1 xdx=\left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 x\cdot e^x dx=x\cdot e^x\Big\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=$ $=e-e^x\Big\|_0^1=$ $=1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$\int_0^1 f_n\left(x^2\right)dx=\int_0^1 x^{2n}e^{x^2}dx$ $e^{x^2}\ge 1\Rightarrow\int_0^1 x^{2n}e^{x^2}dx\ge\int_0^1 x^{2n}dx$ $\int_0^1 x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}$	**1p** **2p** **2p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 6$ şi $a_3 = 5$. Calculaţi a_6.

5p **2.** Determinaţi soluţiile întregi ale inecuaţiei $2x^2 - x - 3 \leq 0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+2) - \log_3(x-4) = 1$.

5p **4.** După o scumpire cu 5%, preţul unui produs creşte cu 12 lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ şi $B(5,0)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.

5p **6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $BC = 9$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculaţi $D(-1,1)$.

5p **b)** Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $D(x, 2010) = 1$.

5p **c)** Demonstraţi că $D(x,y) \cdot D(x,-y) = D(x^2, y^2)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p **a)** Arătaţi că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Calculaţi $1 * 2 * ... * 2011$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3^x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(0)$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătaţi că $a^3 + a^2 + a - b^3 - b^2 - b \leq 3^b - 3^a$, oricare ar fi numerele reale a, b cu $a \leq b$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcţia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^x$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x} dx$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 f_1(x) dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^1 f_n(x^2) dx \geq \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(5+\sqrt{17}\right)+\log_2\left(5-\sqrt{17}\right)=\log_2\left(\left(5+\sqrt{17}\right)\left(5-\sqrt{17}\right)\right)=$ $=\log_2 8=$ $=3$	**2p** **2p** **1p**
2.	$4!=24, C_4^1=4, A_5^1=5$ $\frac{4!-C_4^1}{A_5^1}=4$	**3p** **2p**
3.	Dreapta de ecuație $x=2$ este axă de simetrie a parabolei Dacă $A(x_1,0)$ şi $B(5,0)$ sunt punctele de intersecție, atunci $\frac{x_1+5}{2}=2$, deci $x_1=-1$	**2p** **3p**
4.	$2^{x+3}=2^{-2}$ $x+3=-2$ $x=-5\in\mathbb{Z}$	**2p** **1p** **2p**
5.	Panta dreptei d este egală cu $\frac{1}{2}$ Panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-2$ Deoarece $m_d\cdot m_{AB}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$, se deduce $AB\perp d$	**2p** **1p** **2p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{AB}{\sin C}=2R$ $R=\frac{AB}{2\cdot\sin C}=2\sqrt{3}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

a)	$(x*y)*z=x+y+z-2$ $x*(y*z)=x+y+z-2$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	$x*e=e*x=x+e-1$ $x+e-1=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ Finalizare: $e=1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+1+2)=\frac{1}{2}(xy-x-y+1)+1$ Finalizare	**3p** **2p**
d)	$\frac{1}{2}\cdot\left(2^x-1\right)\cdot 2+1=1$ $2^x=1$ $x=0$	**2p** **2p** **1p**

e)	$\begin{cases} x+y=3 \\ 4x+y=6 \end{cases}$	**3p**
	$x=1$ şi $y=2$	**2p**
f)	$(x*y)\circ z=\frac{1}{2}(xz+yz-x-y-2z+4)$	**2p**
	$(x\circ z)*(y\circ z)=\frac{1}{2}(xz-x-z+3)*\frac{1}{2}(yz-y-z+3)=\frac{1}{2}(xz+yz-x-y-2z+4)$	**2p**
	Finalizare	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a)	$\begin{cases} 1+2+a=6 \\ 2+a+1=6 \\ a+1+2=6 \end{cases}$	**3p**
	$a=3$	**2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix} a^2+5 & 3a+2 & 3a+2 \\ 3a+2 & a^2+5 & 3a+2 \\ 3a+2 & 3a+2 & a^2+5 \end{pmatrix}$	**2p**
	$(a^2+5)I_3=\begin{pmatrix} a^2+5 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+5 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+5 \end{pmatrix}$	**1p**
	$(3a+2)B=\begin{pmatrix} 0 & 3a+2 & 3a+2 \\ 3a+2 & 0 & 3a+2 \\ 3a+2 & 3a+2 & 0 \end{pmatrix}$	**1p**
	Finalizare: $A^2-(a^2+5)I_3=(3a+2)B$	**1p**
c)	Suma elementelor matricei A^2 este $3a^2+18a+27$	**3p**
	$3a^2+18a+27=0\Rightarrow a=-3$	**2p**
d)	Pentru $a=-3$, sistemul este $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-3y+z=6 \\ -3x+y+2z=6 \end{cases}$	**1p**
	Adunând ecuațiile, se obține $0=18$	**3p**
	Sistemul (S) este incompatibil	**1p**
e)	Pentru $a=0$, sistemul este $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+z=6 \\ y+2z=6 \end{cases}$	**2p**
	Soluția sistemului este $(2,2,2)$	**3p**
f)	$\det B=2\neq 0\Rightarrow B$ este inversabilă	**2p**
	$B^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	**3p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_2\left(5+\sqrt{17}\right)+\log_2\left(5-\sqrt{17}\right)$.

5p **2.** Calculați $\frac{P_4-C_4^1}{A_5^1}$.

5p **3.** Graficul unei funcții de gradul al II-lea este o parabolă care are abscisa vârfului egală cu 2 şi intersectează axa Ox în două puncte distincte. Dacă unul dintre acestea are abscisa egală cu 5, atunci determinați abscisa celuilalt punct de intersecție.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $2^{x+3}=\frac{1}{4}$.

5p **5.** Arătați că dreapta determinată de punctele $A(1,-2)$ şi $B(-2,4)$ este perpendiculară pe dreapta d de ecuație $x-2y+3=0$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC în care $AB=6$ şi $m\left(\sphericalangle BCA\right)=60^o$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ şi $x\circ y=\frac{1}{2}\left(xy-x-y+3\right)$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Determinați elementul neutru al mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Arătați că $x\circ y=\frac{1}{2}(x-1)(y-1)+1$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x\circ 3=1$.

5p **e)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases}(x+1)*y=3\\(2x)\circ(y-1)=xy-1\end{cases}$.

5p **f)** Demonstrați că $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\2&a&1\\a&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații liniare

$(S)\begin{cases}x+2y+az=6\\2x+ay+z=6\\ax+y+2z=6\end{cases}$, unde a este un parametru real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care tripletul $(1,1,1)$ este soluție a sistemului (S).

5p **b)** Arătați că $A^2-\left(a^2+5\right)I_3=(3a+2)B$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care suma elementelor matricei A^2 este egală cu 0.

5p **d)** Arătați că, pentru $a=-3$, sistemul (S) este incompatibil.

5p **e)** Pentru $a=0$, rezolvați sistemul (S).

5p **f)** Determinați inversa matricei B.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **MODEL**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left\lvert 1-i\sqrt{3}\right\rvert=\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=$ $=\sqrt{4}=2$	**3p** **2p**
2.	$x^2+x+1-y=0$ $\Delta=4y-3\geq 0$ $\mathrm{Im}_f=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$	**1p** **2p** **2p**
3.	$b_1=\frac{3}{2}$ $q^2=4$ $b_7=96$	**1p** **2p** **2p**
4.	$\log_a x=\log_a 9-\log_a 8$ $\log_a x=\log_a \frac{9}{8}\Rightarrow x=\frac{9}{8}$	**2p** **3p**
5.	$m_d=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_{d'}=2$ unde $d\perp d'$ Ecuația dreptei d' este $y=2x-4$	**2p** **3p**
6.	$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{1}{9}$ $\cos x=\pm\frac{1}{3}$ $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{3}$	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)-A(0)=\begin{pmatrix}0 & -4 & 16\\ 0 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\left(A(2)-A(0)\right)^3=O_3$ $\left(A(2)-A(0)\right)^{2010}=O_3$	**2p** **2p** **1p**

b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1 & -2x-2y & 4y^2+8xy+4x^2\\ 0 & 1 & -4x-4y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Finalizare	**3p** **2p**
c)	$\det\left(A(x)\right)=1\neq 0$, deci matricea este inversabilă $A(x)A(-x)=A(0)=I_3$ $A^{-1}(x)=A(-x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 4x^2\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*x=x, \forall x\in G$ Verificare Legea "$*$" are element neutru $e=\frac{1}{2}$	**1p** **3p** **1p**
b)	Orice element din G este simetrizabil şi $x'=1-x$ $0<x'<1$, deci $x'\in G$	**3p** **2p**
c)	Justificarea faptului că funcția f este bijectivă $f(x*y)=\frac{1}{x*y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$ $f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=f(x*y)$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=$ $=\lim\limits_{x\to 5}(x-2)(x-3)(x-4)=$ $=6$	**2p** **2p** **1p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{n-1}{n-5}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n-5}\right)^n=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=$ $=e^4$	**1p** **1p** **1p** **2p**
c)	$f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=1,\ f(5)=1$ f continuă pe intervalele $[2,3],[3,4],[4,5]$ f derivabilă pe intervalele $(2,3),(3,4),(4,5)$ Din teorema lui Rolle şi din faptul că f' este de gradul trei rezultă că $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte	**1p** **1p** **1p** **2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1\frac{1-x}{x^2+1}dx=$	**1p**

	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx \Big\|_0^1 = \frac{\pi}{4}$	**1p**
	$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\|_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$	**2p**
	$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	**1p**
b)	$I_2 - I_0 = \int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)^2 - 1}{x^2+1}dx =$	**1p**
	$= \int_0^1 \left(x^2+2x+2\right)dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2+1}dx =$	**1p**
	$= \frac{10}{3} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$	**1p**
	$= \frac{10}{3} - \frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$	**2p**
c)	X^2+1 divide $\left(X^2+X+1\right)^{4n+1} - X$	**2p**
	$\frac{\left(x^2+x+1\right)^{4n+1} - x}{x^2+1} = g(x)$, unde $g \in \mathbb{Z}[X]$	**1p**
	$\int_0^1 g(x)dx \in \mathbb{Q}$	**2p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **MODEL**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.
- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z = 1 - i\sqrt{3}$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$.

5p **3.** Ştiind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 6$ şi $b_5 = 24$, determinați termenul b_7.

5p **4.** Determinați $x > 0$, ştiind că $\log_a x = 2\log_a 3 - 3\log_a 2$, unde $a > 0,\ a \neq 1$.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $A(3, 2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d: x + 2y + 5 = 0$.

5p **6.** Ştiind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $\left(A(2) - A(0)\right)^{2010}$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y) = A(x+y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă şi calculați inversa matricei $A(x)$.

2. Pe mulțimea $G = (0,1)$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

5p **a)** Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f: G \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$.

5p **a)** Calculați $f'(5)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)^n - x}{x^2+1}\,dx$.

5p **a)** Calculați I_0.

5p **b)** Verificați dacă $I_2 - I_0 \in \mathbb{Q}$.

5p **c)** Arătați că $I_{4n+1} \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **Model**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-1 \le \frac{x+1}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 \le x+1 < 3$	**2p**
	$-4 \le x < 2$	**2p**
	$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$	**1p**
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x-1 = x^2 - 2x + 3$	**1p**
	$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$	**2p**
	punctul de intersecție este $A(2,3)$	**2p**
3.	$\sqrt{2-x} = 2-x$	**1p**
	Condiție $2 - x \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$	**1p**
	Ecuația dată este echivalentă cu: $2 - x = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$	**2p**
	$x \in \{1,2\}$	**1p**
4.	$P_5 = 5! = 120,\ C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10,\ A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$	**3p**
	$\frac{P_5}{C_5^2 + A_6^2} = \frac{120}{40} = 3$	**2p**
5.	$\frac{y-3}{0-3} = \frac{x-2}{-1-2}$	**3p**
	Ecuația dreptei $AB: y = x+1$	**2p**
6.	Prin aplicarea teoremei cosinusului în triunghiul MNP se obține $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos(\sphericalangle NMP)$	**2p**
	$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \Rightarrow NP^2 = 19 \Rightarrow NP = \sqrt{19}$	**2p**
	Perimetrul este egal cu $5 + \sqrt{19}$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	**2p**
	$= 1 - 0 = 1$	**3p**

b)	$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$ $A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	**2p** **2p** **1p**
c)	$X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}$ $X^2=A\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\b(a+d)=2\\c(a+d)=0\\d^2+bc=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\a=d\\ab=1\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\a=d\\ab=1\\c=0\end{cases}$ Se obțin soluțiile $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	**1p** **3p** **1p**
2.a)	$(x-3)(y-3)+3=xy-3x-3y+9+3$ $=x*y, \forall x,y\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$x*x=19\Rightarrow(x-3)^2+3=19$ $(x-3)^2=16\Rightarrow x\in\{-1,7\}$	**2p** **3p**
c)	$x*3=3*x=3, \forall x\in\mathbb{R}$ $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{2011}=\left(\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{26}\right)*3*\left(\sqrt[3]{28}*\sqrt[3]{29}*...*\sqrt[3]{2011}\right)$ $=3$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x-x\right)'=e^x-1$ $f'(x)-f(x)=\left(e^x-1\right)-\left(e^x-x\right)=x-1$	**3p** **2p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $f(0)=1, f'(0)=0$ Ecuația tangentei este $y=1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{x}=-1$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ Ecuația asimptotei este $y=-x$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx$ $=\ln x\Big\|_1^e$ $=1$	**2p** **2p** **1p**

b)	$A=\int_1^2 \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x=$	**2p**
	$=\left(\ln x+\ln(x+1)\right)\Big\vert_1^2=$	**2p**
	$=\ln 3$	**1p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x=$	**1p**
	$=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x(x+1)}\right)\mathrm{d}x=$	**1p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+2\ln\frac{x}{x+1}\right)\Big\vert_1^2=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{2}{3}+2\ln\frac{4}{3}\right)$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **Model**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele întregi x care verifică relația $-1 \le \frac{x+1}{3} < 1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-\sqrt{2-x}=x$.

5p **4.** Calculați $\frac{P_5}{C_5^2+A_6^2}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$. Scrieți ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului MNP ştiind că $MN=2$, $MP=3$ şi $m(\sphericalangle NMP)=120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Calculați A^2-2A+I_2.

5p **c)** Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2=A$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy-3x-3y+12$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=19$.

5p **c)** Ştiind că legea "$*$" este asociativă, calculați $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{2011}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Demonstrați că $f'(x)-f(x)=x-1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuație $x=1$ şi $x=2$.

5p **c)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ MODEL

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$ $\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\log_3 3=-\frac{1}{2}$ $\log_2\sqrt{2}+\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=0$	**2p** **2p** **1p**
2.	$f(a)=b+1$ şi $g(a)=b+1$ $b+1=2a+5$ şi $b+1=a+1$ $a=b=-4$	**1p** **2p** **2p**
3.	Numerele iraționale sunt $\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{8},\sqrt{10},\sqrt{12},\sqrt{14}$ $p=\frac{3}{4}$	**3p** **2p**
4.	$A_x^3=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$, $x\geq 3$ $x\cdot(x-1)\cdot(x-2)=2x$ $x=3$	**2p** **1p** **2p**
5.	Triunghiul este dreptunghic $b^2=a^2+c^2$ $A_\Delta=\frac{a\cdot c}{2}=30$	**2p** **3p**
6.	$x=-\cos 135^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $y=2\sin 45^\circ=\sqrt{2}$ $m_g=\sqrt{xy}=1$	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

a)	Suma elementelor matricei $A(x)$ este $2x$ $2x=2010\Rightarrow x=1005$	**3p** **2p**
b)	$A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix}$, $A(y)=\begin{pmatrix}1 & y-1\\ 0 & y\end{pmatrix}$ $A(x)\circ A(y)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & y-1\\ 0 & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y-1\\ 0 & x+y\end{pmatrix}$ $A(x)\circ A(y)=A(x+y)$	**2p** **2p** **1p**
c)	Fie $A(e)\in M$ elementul neutru: $A(e)\circ A(x)=A(x+e)$	**2p**

	$A(x)=A(x+e)\Rightarrow e=0\Rightarrow A(e)=A(0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	3p
d)	$\big(A(x)\circ A(y)\big)\circ A(z)=A(x+y+z)$ $A(x)\circ\big(A(y)\circ A(z)\big)=A(x+y+z)$ Legea este asociativă	2p 2p 1p
e)	$A(2)\circ A(x^3)=A(2+x^3)$ $A(2+x^3)=A(10)\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2\in[0,+\infty)$	2p 3p
f)	$A(x)\circ A(x)\circ A(x)\circ A(x)\circ A(x)=A(5x)$ $A(5x)=A(10)\Rightarrow x=2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a)	$\det(A)=2m^2+2m$	5p
b)	$A+I_3=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1-m & 1\\ 1 & 1 & 1-m\end{pmatrix}$, $\det(A+I_3)=3m^2-4m$ $3m^2-4m=-1\Rightarrow m\in\left(1,\frac{1}{3}\right)$	1p 2p 2p
c)	Scrierea sistemului pentru $m=2$ Finalizare: tripletul este soluție a sistemului	2p 3p
d)	Pentru $m=1$ avem $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $\det(A)=4\neq 0$	2p 3p
e)	$D_x=4, D_y=4, D_z=0$ Finalizare: $x=1, y=1, z=0$	2p 3p
f)	Sistemul este $\begin{cases}2x+y+z=3\\ x+z=0\\ x+y=2\end{cases}$ Adunând ecuațiile 2 şi 3 se obține că $2x+y+z=0$, contradicție cu $2x+y+z=3$	2p 3p

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Probă scrisă la MATEMATICĂ – Proba E. c)

MODEL

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_2 \sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5p **2.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(a, b+1)$ aparține graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x+5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x+1$.

5p **3.** Calculați probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \sqrt{16}\right\}$ acesta să fie număr irațional.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $A_x^3 = x \cdot 2$.

5p **5.** Calculați aria triunghiului care are laturile $a = 12$, $b = 13$, $c = 5$.

5p **6.** Calculați media geometrică a numerelor $x = -\cos 135^\circ$, $y = 2\sin 45^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \; x \in [0, +\infty) \right\}$. Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se defineşte legea de compoziție $X \circ Y = X + Y - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Determinați $x \in [0, +\infty)$ pentru care suma elementelor matricei $A(x)$ este egală cu 2010.

5p **b)** Arătați că $A(x) \circ A(y) = A(x+y)$, pentru oricare $A(x), A(y) \in M$.

5p **c)** Determinați elementul neutru în raport cu legea „$\circ$” pe mulțimea M.

5p **d)** Arătați că legea „$\circ$” este asociativă, pe mulțimea M.

5p **e)** Rezolvați în mulțimea M ecuația $A(2) \circ A(x^3) = A(10)$.

5p **f)** Rezolvați în mulțimea M ecuația $A(x) \circ A(x) \circ A(x) \circ A(x) \circ A(x) = A(10)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ şi sistemul (S) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - my + z = 0 \\ x + y - mz = 2 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi m este un parametru real.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A + I_3) = -1$.

5p **c)** Verificați dacă pentru $m = 2$ tripletul $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{12}, -\frac{1}{12}\right)$ este soluție a sistemului (S).

5p **d)** Pentru $m = 1$, arătați că $\det(A) \neq 0$.

5p **e)** Pentru $m = 1$, rezolvați sistemul (S).

5p **f)** Arătați că pentru $m = 0$ sistemul este incompatibil.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(3+4i)(5-12i)$.

5p **2.** Punctul $V(2,3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax+b$. Calculați $f(3)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left|\sqrt{x}-1\right|=2$.

5p **4.** Determinați numerele naturale *n*, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2\leq 4\cdot A_n^1$.

5p **5.** Fie $G(1,0)$ centrul de greutate al triunghiului *ABC*, unde $A(2,5)$ şi $B(-1,-3)$. Determinați coordonatele punctului *C*.

5p **6.** Calculați raza cercului înscris în triunghiul *ABC* ştiind că $AB=AC=5$ şi $BC=8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că rang A = 3, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Determinați valorile întregi ale lui *a* ştiind că matricea A^{-1} are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră numerele reale a,b,c şi polinomul $f=X^4+aX^3+bX^2+cX+36\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Calculați $a+b+c$ în cazul în care restul împărțirii lui *f* la $X-1$ este 40.

5p **b)** Determinați $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Arătați că dacă $a=6$ şi $b=18$, atunci polinomul *f* nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că funcția *f* este strict descrescătoare pe $(0,1]$.

5p **b)** Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției *f*.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există un unic număr $x_n\in(0,1]$ pentru care $f(x_n)=n$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției *f*, axa *Ox* şi de dreptele de ecuații $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Demonstrați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n(x)dx$ este convergent.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Comparați numerele $a=\log_2 4$ și $b=\sqrt[3]{27}$.

5p 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3x^2-11x+6\le 0$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+x+1}=3^{5x-2}$.

5p 4. Determinați $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=15$.

5p 5. Determinați numerele reale m, pentru care punctul $A_m\left(2m-1,m^2\right)$ se află pe dreapta $d: x-y+1=0$.

5p 6. Calculați $\cos x$, știind că $0^\circ<x<90^\circ$ și $\sin x=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{N}\right\}$.

5p a) Determinați numerele naturale m și n pentru care matricea $\begin{pmatrix} 4 & m^2\\ 9 & n^2\end{pmatrix}\in G$.

5p b) Arătați că dacă $U,V\in G$, atunci $U\cdot V\in G$.

5p c) Calculați suma elementelor matricei $U\in G$, știind că suma elementelor matricei U^2 este egală cu 8.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3-4X^2+2X+4$.

5p a) Arătați că restul împărțirii polinomului f prin polinomul $g=X-\sqrt{2}$ este egal cu 0.

5p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=0$.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x-8^x-4\cdot 4^x+2\cdot 2^x+4=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x}, & x\in(1,+\infty)\\ x+1, & x\in(0,1]\end{cases}$.

5p a) Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x_0=1$.

5p b) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p c) Demonstrați că $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\le 4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x\cdot\ln x$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{e^x}{x}$.

5p a) Calculați $\int_1^2 x\cdot g(x)\,dx$.

5p **b)** Calculați $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x \cdot e^x} dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^e \left(f(x)+g(x)\right)dx = e^e$.