8

partea a II-a

Scanează **codul QR** din interior pentru a activa conținutul aplicației **MATE 2000+**

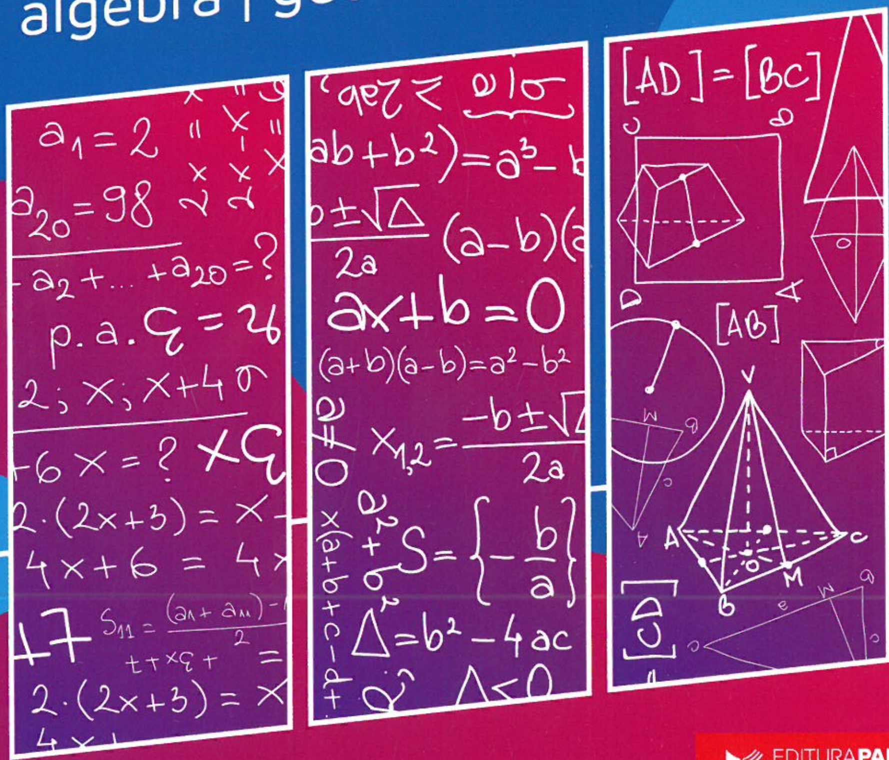
MATE 2000+
Consolidare

AVIZAT ME

Anton Negrilă, Maria Negrilă

MATEMATICĂ

algebră | geometrie



EDITURA **PARALELA 45**
EDUCAȚIONAL

Scanează acest cod QR pentru a activa conţinutul aplicaţiei Mate 2000+, pe care o poţi descărca din Apple Store sau Play Store.

MATE 2000+ Consolidare

Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Școală: ....

....

EDITURA PARALELA 45 EDUCAȚIONAL

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene, Andreea Roșca
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu, Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Ed. a 12-a, reviz. – Pitești : Paralela 45, 2023
2 vol.
ISBN 978-973-47-3887-8
Partea 2. – 2023. – ISBN 978-973-47-3919-6

I. Negrilă, Maria

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VIII-a

partea a II-a

ediția a XII-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția Mate 2000+!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, MATE 2000+ a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta Aplicația MATE 2000+. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicației MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

*	**Inițiere (înțelegere)**
**	**Consolidare (aplicare și exersare)**
***	**Excelență (aprofundare și performanță)**
****	**Supermate**

Legendă

PE = **portofoliul elevului**

PP = **portofoliul profesorului**

PE-PP = **portofoliul elevului - portofoliul profesorului**

Algebră

Capitolul I
Calcul algebric în $\mathbb{R}$

PP **Competenţe specifice**

- C1. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- C2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- C3. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat şi a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor
- C4. Exprimarea matematică a unor situaţii concrete prin calcul algebric
- C5. Interpretarea unei situaţii date utilizând calcul algebric
- C6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuaţiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

PE-PP 1. Operaţii cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere

PE-PP 1.1. ADUNAREA ŞI SCĂDEREA

Suma (diferența) a două **rapoarte** algebrice este tot un **raport** algebric. Operația de adunare (scădere) a două rapoarte algebrice se poate face în două situații:

a) dacă ambele rapoarte au **același numitor**, suma lor este un raport algebric care are ca numitor numitorul comun al celor două rapoarte și ca numărător suma (diferența) numărătorilor celor două rapoarte;

b) dacă cele două rapoarte au **numitori diferiți**, se amplifică, aducându-se la același numitor și se adună (se scad) conform regulii de mai sus.

Observație:

Operația de adunare (scădere) a rapoartelor algebrice are aceleași proprietăți ca operația de adunare (scădere) a fracțiilor ordinare.

Exemple:

a) $\frac{5x-3}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x^2+12}{4}=\frac{5x-3+x+x^2+12}{4}=\frac{x^2+6x+9}{4}=\frac{(x+3)^2}{4}$;

b) $\frac{2x+7}{3x}+\frac{x-3}{2x^2}+\frac{4x+5}{6}=\frac{2x(2x+7)}{6x^2}+\frac{3(x-3)}{6x^2}+\frac{x^2(4x+5)}{6x^2}=\frac{4x^3+9x^2+17x-9}{6x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Efectuați:

a) $\frac{x}{5}+\frac{2}{5}$; b) $\frac{3x+2}{7}+\frac{4x+5}{7}$; c) $\frac{2-3x}{11}+\frac{9-8x}{11}$;

d) $\frac{4x+6}{3}+\frac{x+3}{3}$; e) $\frac{x-3}{2}+\frac{3x+4}{2}+\frac{4x+7}{2}$; f) $\frac{x+5}{3}+\frac{2-7x}{2}+\frac{2x-4}{5}$.

2. Efectuați calculele:

a) $\frac{7x-6}{x-2}+\frac{2-5x}{x-2}$; b) $\frac{17x+9}{x+1}+\frac{8}{x+1}$;

c) $\frac{x}{x-3}+\frac{5}{x-3}+\frac{2x-14}{x-3}$; d) $\frac{6x}{3x-2}+\frac{5-3x}{3x-2}-\frac{7}{3x-2}$.

3. Efectuați calculele:

a) $\frac{1}{2}+\frac{x+2}{3x}-\frac{5x^2+4}{6x^2}$; b) $\frac{2x}{x^2+x}+\frac{2}{x^2+x}$; c) $\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{3x+2}{x^2-1}$;

d) $\frac{x(x-1)}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2-4}$; e) $\frac{x^2}{x^2-2x}+\frac{2-3x}{x^2-2x}$; f) $\frac{x^2+3}{x^2+2x-3}+\frac{4x}{x^2+2x-3}$;

g) $\frac{x(x-3)}{x^2-16}+\frac{2x-5}{x^2-16}-\frac{11-x}{x^2-16}$.

PE Aplicare și exersare **

4. Efectuați:

a) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}$; b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}$;

c) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2-4}$; d) $\frac{4}{x+2}-\frac{x+10}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}$;

e) $\frac{1-3x}{x^2-x}+\frac{2}{x-1}+\frac{5}{3x}$; f) $\frac{3x+1}{2x^2-6x}-\frac{x+2}{3x-9}+\frac{2x-1}{6x}$.

5. Calculați:

a) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+4}{x^2+3x+2}-\frac{x-1}{x+2}$; b) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}+\frac{1-x}{x+1}$;

c) $\frac{2x+1}{x-2}+\frac{1-2x}{x+2}+\frac{x^2+16}{x^2-4}$; d) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}+\frac{5-x^2}{x^2+3x+2}$.

6. Calculați:

a) $\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{24}{x^2-9}$;

b) $\dfrac{x+1}{x-4}+\dfrac{16-6x}{x^2-16}-\dfrac{x-1}{x+4}$;

c) $\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-4}+\dfrac{5}{x^2-7x+12}$;

d) $\dfrac{x-5}{x-2}-\dfrac{x+1}{x-4}-\dfrac{6}{x^2-6x+8}$.

PE Aprofundare și performanță ***

7. Efectuați calculele:

a) $\dfrac{x^2+4}{x^2-4}-\left[\dfrac{5}{x-2}-\left(\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x}{x+2}\right)\right]$;

b) $\dfrac{4x+5}{x^2-1}-\left[\dfrac{2}{x-1}-\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)\right]$;

c) $\dfrac{x^2-27}{x^2-9}-\left[\dfrac{5}{x+3}-\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+1}{x+3}\right)\right]$;

d) $\dfrac{x}{x^2-25}-\left[\dfrac{3}{x-5}-\left(\dfrac{x+1}{x-5}-\dfrac{3}{x+5}+\dfrac{x^2}{25-x^2}\right)\right]$.

8. Fie expresia $E(x)=\dfrac{3}{4x^2-9}-\dfrac{x+1}{2x+3}-\dfrac{x}{2x-3}$.

a) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Aflați $n\in\mathbb{N}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{N}$.

9. Se consideră expresia $F(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}$.

a) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $F(x)$ nu este definită.

b) Arătați că $G(x)=(x+1)\cdot F(x)$ este număr natural.

c) Calculați suma: $F(2)\cdot F(3)+F(3)\cdot F(4)+\ldots+F(2020)\cdot F(2021)$.

PE-PP Supermate ****

10. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{12}{x^2-9}+\dfrac{x}{x-3}\right)-\left[\dfrac{x+1}{x+3}+\left(\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x}{x+3}\right)\right]$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați valorile lui $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{Z}$.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{x}{x+4}+\dfrac{24}{x^2-16}\right)-\left[\dfrac{x+3}{x+4}-\left(\dfrac{x-1}{x-4}-\dfrac{x-2}{x+4}\right)\right]$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{Z}$.

1.2. Înmulțirea. Împărțirea. Ridicarea la putere

PE-PP

Produsul a două rapoarte algebrice, **câtul** a două rapoarte algebrice, **puterea a n-a** a unui raport algebric, $n \in \mathbb{Z}$, sunt tot rapoarte algebrice.

Produsul a două rapoarte algebrice este raportul algebric care are ca numărător produsul numărătorilor rapoartelor date, iar ca numitor produsul numitorilor rapoartelor date.

Exemple: a) $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{9y^2}{8x^3} = \frac{3y}{2x}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$; b) $\frac{3x}{5x+5} \cdot \frac{10x+10}{18x^2} = \frac{1}{3x}$, $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

Inversul unui raport algebric este raportul algebric care are ca numărător numitorul raportului dat, iar ca numitor numărătorul raportului dat.

Exemple: a) $\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{-1} = \frac{x^2+1}{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\left(\frac{3xz}{19ab}\right)^{-1} = \frac{19ab}{3xz}$, $x, z, a, b \in \mathbb{R}^*$.

Câtul a două rapoarte algebrice este raportul algebric obținut prin înmulțirea primului raport, numit deîmpărțit, cu inversul celui de-al doilea raport, numit împărțitor.

Exemple: a) $\frac{4x^2+8}{9x} : \frac{2x^2+4}{27x^2} = 6x$, $x \in \mathbb{R}^*$; b) $\frac{10x^2}{7y^6} : \left(-\frac{15x^3}{14y^4}\right) = -\frac{4}{3y^2x}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$.

Puterea a n-a a unui raport algebric este raportul care are ca numărător puterea a n-a a numărătorului raportului dat, iar ca numitor puterea a n-a a numitorului raportului dat.

Exemple: a) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^2 = \frac{4x^2}{9y^2}$, $y \in \mathbb{R}^*$; b) $\left(\frac{x+1}{y^2+1}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{(y^2+1)^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

activități de învățare

PE **Înțelegere ***

1. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor:

a) $\frac{2x}{7x+7} \cdot \frac{14x+14}{4x^2}$; b) $\frac{2x+6}{5x^2} \cdot \frac{10x}{4x+12}$; c) $\frac{3x+6}{7x^2} \cdot \frac{14x^2+28x}{x^2+4x+4}$;

d) $\frac{x^2-2x}{5x^2} \cdot \frac{5x+10}{x^2-4}$; e) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2-3x}{x^2+x}$; f) $\frac{3x+9}{x^2+2x} \cdot \left(-\frac{3x+6}{2x+6}\right)$.

2. Efectuați calculele, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor algebrice:

a) $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-6x+9}$; b) $\frac{4x+8}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{4x-8}$;

c) $\frac{x^2+4x}{x^2-16} \cdot \frac{3x-12}{5x+25}$; d) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{4x+4}$;

e) $\frac{7x+35}{x^2-25} \cdot \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x+4}$; f) $\frac{x^2-4}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4x+4}$.

PE Aplicare și exersare **

3. Calculați, stabilind valorile reale ale lui x pentru care rapoartele sunt definite:

a) $\dfrac{3x^2-12x}{x^2-8x+16}:\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12}$;

b) $\dfrac{x^2+5x}{x^2-4x+4}:\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-4}$;

c) $\dfrac{3x^2+6x}{x^2+5x+6}:\dfrac{4x-12}{x^2-9}$;

d) $\dfrac{6x-18}{x^2-6x+9}:\dfrac{x^2-25}{x^2-8x+15}$;

e) $\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-25}:\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+8x+15}$;

f) $\dfrac{x^2-9}{x^2-7x+12}:\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-16}$.

4. Efectuați calculele:

a) $\dfrac{x^2-8x+16}{5x-15}:\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-x-6}$;

b) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+7x+12}:\dfrac{x^2-10x+24}{x^2-16}$;

c) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-25}:\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+8x+15}$;

d) $\dfrac{x^2+12x+32}{x^2+16x+64}:\dfrac{x^2+11x+28}{x^2-64}$;

e) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-9}:\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-x-12}$;

f) $\dfrac{x^2-25}{x^2+9x+20}:\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+7x+12}$.

5. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al fiecărui raport:

a) $\left(\dfrac{2x}{3x+1}\right)^3\cdot\dfrac{3x+1}{2x}:\left(\dfrac{4x^2}{3x+1}\right)^2$;

b) $\left[\dfrac{(2x-3)^3}{(x+2)^2}\right]^2\cdot\left(\dfrac{x+2}{2x-3}\right)^7:\left[\dfrac{(x+2)^2}{2x-3}\right]^2$;

c) $\left[\dfrac{(x-1)^2}{(3x-2)^3}\right]^3:\left[\dfrac{x-1}{(3x-2)^2}\right]^4\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}$;

d) $\left[\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^2\right]^3:\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^5\cdot\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^2$;

e) $\left(\dfrac{3x-1}{2x}\right)^5:\left[\dfrac{(3x-1)^2}{4x^2}\right]^2:\dfrac{3x^2-x}{5x^2}$;

f) $\dfrac{3x^2-2x}{4x^2}\cdot\left[\left(\dfrac{2x-5}{3x-2}\right)^2\right]^3:\left(\dfrac{2x-5}{3x-2}\right)^5$.

PE Aprofundare și performanță ***

6. Efectuați calculele:

a) $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{3x^2+12x}{x^2-6x+9}$;

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}\cdot\dfrac{x+5}{x-7}$;

c) $\dfrac{x(x+5)+6}{x^2+3x+2}:\dfrac{x(x+8)+15}{x^2+6x+5}$;

d) $\dfrac{x^2+8x+12}{x^2+4x+4}:\dfrac{x^2+3x-18}{x^2-4}$;

e) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}:\dfrac{x^2-1}{x^2+4x}$;

f) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-24}:\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-30}\cdot\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-6x+9}$.

7. Calculați:

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{4x^2-25}\cdot\dfrac{2x+5}{4x-12}:\dfrac{7x-21}{4x^2-20x+25}$;

b) $\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-5x+6}:\dfrac{5x+20}{4x-8}$;

c) $\dfrac{x^2+4x}{x^2-6x+9}:\dfrac{x^2+9x+20}{x^2-7x+12}\cdot\dfrac{2x+10}{3x-12}$;

d) $\dfrac{2x^2+5x+3}{3x^2+7x+4}\cdot\dfrac{3x^2+10x+8}{2x^2+9x+9}$.

8. Calculați:

a) $\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+2x-8}\cdot\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+9x+18}:\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2+6x}$;

b) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-15}:\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-6x+5}\cdot\dfrac{4x+12}{6x^2-18x}$;

c) $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+3}{x+4}:\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+6x+8}:\dfrac{x+3}{x+5}$.

PE-PP Supermate ****

9. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right):\dfrac{2x+6}{x^2+5x+6}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n)$ este număr întreg.

10. Fie expresia $E(x)=10-\dfrac{x}{x-5}\cdot\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{x+1}{x^2+5x}\right):\dfrac{1}{(x-5)^2}$.

a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{N}$.

d) Arătați că, dacă $x\in[0;+\infty)$, atunci $E(x)\in(1;9]$.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{x}{x-3}-1\right)\cdot\dfrac{x+3}{12x+18}$.

a) Pentru ce valori reale ale lui x nu are sens expresia?

b) Arătați că, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$, $E(x)\notin\mathbb{Z}$.

c) Scrieți ca interval mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|(x-3)^2\cdot E(x)|\le\dfrac{1}{3}\right\}$.

PE-PP 1.3. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAŢIILOR ŞI FOLOSIREA PARANTEZELOR

Cu **rapoartele algebrice** se efectuează următoarele **tipuri de operații**:

- de ordinul I (**adunarea** și **scăderea**);
- de ordinul al II-lea (**înmulțirea** și **împărțirea**);
- de ordinul al III-lea (**ridicarea la putere**).

Calculul cu rapoarte algebrice se face respectând următoarele reguli:

- când avem operații de **același ordin**, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise;
- când avem operații de **ordine diferite**, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul al III-lea, apoi cele de ordinul al II-lea și, în final, cele de ordinul I;
- când avem exerciții în care apar **paranteze**, se efectuează mai întâi operațiile dintre parantezele rotunde, apoi operațiile dintre cele pătrate și, în final, cele dintre acolade.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Efectuați calculele, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor:

a) $\dfrac{4x-12}{x^2-9}-\dfrac{x+2}{x-3}:\dfrac{x^2+5x+6}{x-3}$;   b) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-16}\cdot\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{2x+14}{x+4}$;

c) $\dfrac{x^2+9x+20}{x^2-25}\cdot\dfrac{x-5}{x+3}-\dfrac{x-3}{x^2-9}$;   d) $\dfrac{5x+6}{x^2-4}-\dfrac{x+3}{x-2}:\dfrac{x^2+5x+6}{x-2}$;

e) $\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+14x+49}:\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-16}+\dfrac{x^2-2x-35}{x^2-49}$;

f) $\dfrac{x^2-49}{x^2-7x}-\dfrac{2x+7}{x^2+x}:\dfrac{1}{x+1}$.

2. Aduceți expresiile la forma cea mai simplă, stabilind de fiecare dată domeniul lor de existență:

a) $E(x)=\left(1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right):\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

b) $E(x)=\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x^2-4}\right):\dfrac{2x+2}{x^2+3x+2}$;

c) $E(x)=\left(\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{x-3}{x^2-1}\right)\cdot\dfrac{x^3-x}{x^2-4}$;

d) $E(x)=\left[\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+2}-\dfrac{25}{(x+2)(x-3)}\right]:\dfrac{5}{x+2}$;

e) $E(x)=\left(\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}\right):\dfrac{2}{x-1}$;

f) $E(x)=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{x+2}{x+1}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{6}{x-2}\right)$.

3. a) Fie $E(x)=\dfrac{(x+3)^2-16}{x^2-49}:\dfrac{x-1}{x-7}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-7, 1, 7\}$. Arătați că $E(x)=1$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{-7, 1, 7\}$.

b) Fie $E(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}:\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 2\}$. Arătați că $E(x)=1$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 2\}$.

PE Aplicare și exersare **

4. Efectuați calculele, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al expresiilor algebrice:

a) $\left[\dfrac{5}{2x+1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(2x+1)}\right]:\dfrac{3x-6}{2x^2-x-1}$;

b) $\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2-4}\right):\frac{2x+6}{x^3-4x}$;

c) $\left(\frac{1}{3x-2}-\frac{4}{3x+2}-\frac{3x-7}{4-9x^2}\right)\cdot\frac{3x^2+5x+2}{1-2x}$;

d) $\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{1-x}+\frac{3}{x+1}\right):\frac{2}{x-1}$;

e) $\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{3}{1-x^2}-\frac{2}{x^2+x}\right):\frac{1}{x^2-x}$.

5. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al expresiilor algebrice:

a) $\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\left(\frac{3}{x+2}-\frac{2x+8}{x^2+5x+6}\right)+\frac{5}{x+3}$;

b) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+2}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x+2}-\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$;

c) $\left(\frac{x+1}{x}-\frac{x-1}{x+1}+\frac{1-x}{x^2+x}\right):\frac{2x-4}{x^2+3x}$;

d) $\left(\frac{x^2-x}{x^2-25}-\frac{x-2}{x+5}+\frac{x-3}{5-x}\right)\cdot\frac{x^2+2x-15}{x^2-x-2}$;

e) $\left(\frac{5}{1+x}+\frac{5x}{1-x}+\frac{10x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

6. Efectuați calculele:

a) $\left(\frac{2x}{1+x}+\frac{2}{x-1}+\frac{4x}{x^2-1}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4x}{x^2-1}\right)$;

b) $\left(\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x^2-3x+2}\right):\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}$;

c) $\left(\frac{x+1}{2x+3}-\frac{x-2}{2x-3}+\frac{x-4}{4x^2-9}\right)\cdot\frac{2x^2-x-3}{x^2-1}$;

d) $\left(4-\frac{8x}{x+2}\right):\left(\frac{x}{x-2}+\frac{4}{x+2}-\frac{2x+4}{x^2-4}\right)$.

PE Aprofundare și performanță ***

7. Efectuați calculele:

a) $\frac{x-1}{2}\cdot\left[\frac{x+3}{x+1}-\frac{x+1}{x+4}\cdot\left(\frac{2x+3}{x-1}-1\right)\right]$;

b) $\frac{6x-12}{3x+10}\cdot\left[\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+3}{x+1}\cdot\left(\frac{3x+5}{x+2}-2\right)\right]$;

c) $\frac{x^2+x-2}{5x+5}\cdot\left[\left(\frac{2x+5}{x+3}-1\right)\cdot\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right]$;

d) $\frac{x^2-3x+2}{9x^2-4}\cdot\left[\left(\frac{3x+5}{x+1}-2\right)\cdot\frac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6}-\frac{x-3}{x-2}\right]$.

8. Calculați:

a) $\left(\frac{2}{x+2}+\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{3x+1}{x^2-4x+4}\right):\frac{14}{4-x^2}$;

b) $\left(\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2x-3}{x^2-2x+1}+\dfrac{1}{x+1}\right):\dfrac{4-x^2}{x^3+x^2-x-1}$;

c) $\left(\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-15}:\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-6x+5}\right):\dfrac{3x-5}{x^2+x-6}$;

d) $\left(\dfrac{36}{x^2-16}+\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}-\dfrac{x+2}{x-4}\right)\cdot\left(\dfrac{4x-4}{3x-8}-1\right)$.

9. Se consideră expresia $E(x)=\left(x-2-\dfrac{x^2-4}{x+3}\right):\dfrac{x-2}{x+3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 2\}$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Arătați că $7 \mid A$, unde

$$A=E(x)+[E(x)+1]+[E(x)+1]^2+[E(x)+1]^3+\ldots+[E(x)+1]^{2015}.$$

10. Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1-x}{x+1}\right):\dfrac{x}{x^2-1}$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Arătați că $E(x)=4$ pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 1\}$.

11. Fie expresia $E(x)=(x^2-1):\left(x+\dfrac{x^2-4}{2x-4}\cdot\dfrac{2x+4}{x^2+4x+4}\right)$.

a) Determinați domeniul de definiție al expresiei.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Arătați că $E(x)\in\mathbb{N}$ pentru orice $x\in\mathbb{N}^*$.

12. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{1-x}+\dfrac{3}{x+1}\right):\dfrac{2}{x-1}$.

a) Determinați domeniul de definiție al expresiei.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{N}$.

13. Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{10}{x^2-4}\right):\dfrac{x}{x^2+x-2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 0, 1, 2\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$.

b) Determinați elementele mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid E(x)\in\mathbb{Z}\}$.

14. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{10}{4x^2-1}\right):\dfrac{2x-5}{6x^2+13x+5}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{3x+5}{2x-1}$.

b) Determinați mulțimea $A=\{n\in\mathbb{Z}^* \mid E(n)\in\mathbb{Z}\}$.

15. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1-x}{x^2+x}\right):\dfrac{2x-4}{x^2+3x}$.

a) Stabiliți domeniul de definiție al expresiei.

b) Arătați că $E(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

c) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

16. Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1-x+2x^2}{1-x^2}\right):\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x}$.

a) Stabiliți domeniul de definiție al expresiei.

b) Arătați că $E(x) = \dfrac{x}{x+1}$. c) Rezolvați ecuația: $\dfrac{1}{E(x)}=2$.

17. Fie expresia $E(x) = \left(\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{13-5x}{1-x^2}-\dfrac{2x+10}{x^2+6x+5}\right):\dfrac{x-3}{x^2+3x+2}$.

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care expresia este definită.

b) Arătați că $E(x) = \dfrac{7(x+2)}{x-3}$. c) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

18. Fie $E(x)=\left(\dfrac{x+2}{x^2-x}+\dfrac{x-3}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2+x}\right):\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-2x^2+x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$. b) Rezolvați ecuația: $E(x) = \dfrac{3(x+1)}{x+2}$.

19. Fie $E(x)=\dfrac{x}{x+4}\cdot\left(\dfrac{2x^2-8}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}-\dfrac{x+7}{x-3}\right)-\dfrac{x^2+4x-12}{x^2+2x-8}$.

a) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 2, 3\}$, arătați că $E(x)=-\dfrac{6}{x+4}$.

b) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

20. Fie $E(x) = \left[\left(\dfrac{3x+5}{x+2}-2\right)\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+3}-\dfrac{x+2}{x-3}+\dfrac{8}{x^2-9}\right]\cdot\dfrac{x^2-5x+6}{4-5x}$.

a) Stabiliți domeniul de existență al expresiei.

b) Verificați dacă $E(x) = \dfrac{2x-4}{x+3}$.

c) Determinați valorile naturale ale lui x pentru care $E(x) \in \mathbb{N}$.

21. Fie $E(x) = \left[\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+1}+\dfrac{2x^2}{x^3-x^2+x-1}\right):\dfrac{x^2}{x^2-1}\right] : \dfrac{5x^2+12x+7}{2x^2+3x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{7}{5}, -1, 0, 1\right\}$.

a) Descompuneți în produs de factori ireductibili: $x^3 - x^2 + x - 1$ și $5x^2 + 12x + 7$.

b) Arătați că $E(x) = \dfrac{2x+3}{5x+7}$.

22. Fie $E(x)=\left(\dfrac{x+5}{x-1}+2\right)\cdot\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x+2}-\dfrac{x+7}{x+2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\}$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Rezolvați ecuația: $(x+2)\cdot E(x)=3x+7$.

23. Fie $E(x)=\left[\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x(x+5)}{x^2+5x+6}\right]:\dfrac{x^2-2x-24}{x^2+7x+12}$.

a) Stabiliți valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Arătați că $E(x)=-\dfrac{1}{x+2}$.

c) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $9\cdot E(x)\in\mathbb{Z}$.

24. Fie $E(x)=\left[\left(\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{x+3}\right):\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+7x+12}+\dfrac{4}{x+1}\right]\cdot\dfrac{5x-15}{5x+3}$.

a) Stabiliți mulțimea valorilor pentru care expresia nu are sens.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid E(x)\in\mathbb{Z}\}$.

25. Fie $E(x)=\left[\left(\dfrac{x+5}{x-5}\right)^2+1+\dfrac{2x+10}{x-5}\right]\cdot\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}\cdot\dfrac{x-5}{2x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2,5\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{2x}{x+2}$.

b) Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$.

26. Fie expresia $E(x)=\left[\dfrac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)+16}-\dfrac{1}{25-(5-x)(5+x)}\right]:2\cdot\left(\dfrac{x+1}{x^4}\right)^{-1}$,

unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{1-x}{2}$.

b) Calculați suma: $E(-3)+E(-5)+E(-7)+\ldots+E(-2009)$.

27. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(\frac{5}{2x-1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x^2-3x+1}\right):\frac{3x-5}{3x^2-5x+2},\text{ unde } x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},1,\frac{5}{3}\right\}.$$

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{3x-2}{2x-1}$, pentru orice număr $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},1,\dfrac{5}{3}\right\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui a pentru care $E(a)=\dfrac{4}{2a-1}$.

28. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(\frac{3}{x^2+2x}+\frac{1}{4-x^2}+\frac{2}{x^2-2x}\right):\frac{2}{x^3-4x},\text{ unde } x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}.$$

a) Arătați că $E(x)=2x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$.

b) Determinați cardinalul mulțimii A, unde $A=\{n\in\mathbb{Z}\mid E(n)\geq n^2-4\}$.

29. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(\frac{1}{3x-2}-\frac{4}{3x+2}-\frac{3x-7}{4-9x^2}\right)\cdot\frac{3x^2+5x+2}{3-6x},\text{ unde } x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}.$$

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{x+1}{3x-2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n)$ este număr întreg.

30. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(1-\frac{x^2-x-2}{x^2-1}\right):\left(\frac{x-4}{x^2-x}-\frac{x-3}{1-x^2}-\frac{x-1}{x^2+x}\right),\text{ unde } x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1,5\}.$$

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{x}{x-5}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1,5\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui a pentru care $E(a)=\dfrac{2}{3}$.

31. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(\frac{3}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}+\frac{10}{1-4x^2}\right):\frac{2x-5}{6x^2+13x+5},\text{ unde } x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}.$$

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{3x+5}{2x-1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{3},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right\}$.

b) Determinați valorile numerelor naturale n, pentru care $(2n-1)\cdot E(n)\geq n(n-3)+10$.

32. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2+x}-\frac{x+2}{1-x^2}\right):\frac{x^2-16}{x^3-x},\text{ unde } x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-1,0,1,4\}.$$

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{x}{x-4}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-1,0,1,4\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui a, pentru care $E(-a^2)=\dfrac{9}{10}$.

33. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(\frac{2x}{x+1}-\frac{4x^2}{x^2-1}+\frac{3x+6}{x^2+x-2}\right):\frac{1}{2x-2x^2},\text{ unde } x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0,1\}.$$

a) Arătați că $E(x)=2x(2x-3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0,1\}$.

b) Determinați minimul lui A, unde $A=E(x)-6x+13$ și valoarea lui x pentru care se realizează acest minim.

34. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{2-x}-\frac{2}{x^2-3x+2}\right):\frac{x+2}{x^3+2x^2-3x},\text{ unde } x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,0,1,2\}.$$

a) Arătați că $E(x)=x(x+3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,0,1,2\}$.

b) Determinați maximul lui P, unde $P=-E(x)+9x+4$ și valoarea lui x pentru care se realizează acest maxim.

5}
2}.

3) + 10.

tru care se

1, 2}.

ıtru care se

35. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2+x}\right) : \frac{2x+4}{x^3 - x^2 - 6x},\ \text{unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 3\}.$$

a) Arătați că $E(x) = x - 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 3\}$.

b) Determinați cardinalul mulțimii A, unde $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid E(n) \geq n^2 - 3n\}$.

36. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{2}{x+1} - \frac{4x}{x^2-1} + \frac{3x+6}{2-x-x^2}\right) : \frac{5}{x-x^3},\ \text{unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}.$$

a) Arătați că $E(x) = x(x+1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui n, pentru care $E(n) \geq n(2n+5) - 5$.

37. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x+2}{x^2-x} - \frac{x-3}{1-x^2} - \frac{x-1}{x^2+x}\right) : \frac{x+1}{2x^3 - 4x^2 + 2x},\ \text{unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

a) Arătați că $E(x) = 2x - 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

b) Determinați valoarea numărului real a, pentru care $E(a\sqrt{2}) - E(-a\sqrt{2}) = 2(a\sqrt{2} + 4)$.

38. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{2x^2 - x + 2}{4x^2 - 1} - \frac{1+x}{1-2x} - \frac{x-1}{2x+1}\right) \cdot \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 2x - 8},\ \text{unde } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\right\}.$$

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\right\}$.

b) Determinați valoarea numărului real a, pentru care $E(a\sqrt{2}) = \dfrac{3}{4}$.

39. Se consideră expresia:

$$E(x) = x + \left(\frac{1}{x-4} + \frac{8-x^2}{x-2} \cdot \frac{1}{x-4}\right) : \frac{x+2}{2x-4} + \frac{2}{x-4},\ \text{unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}.$$

a) Arătați că $E(x) = x - 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui n, pentru care $E(n) + 3\sqrt{7} = \dfrac{1}{E(n) - 3\sqrt{7}}$.

40. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x-3}{x-1} + \frac{x-1}{x-3} - 2\right) : \frac{2}{x^2 - 4x + 3} - 2x(x-2),\ \text{unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}.$$

a) Arătați că $E(x) = -2x^2 + 4x + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

b) Determinați maximul lui $A = E(x) + 4x$ și valoarea lui x pentru care se realizează acest maxim.

41. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{1-x+2x^2}{1-x^2}\right) : \frac{x+1}{2x^4 - 2x^2},\ \text{unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

a) Arătați că $E(x) = 2x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

b) Determinați valoarea numărului real a, pentru care $E(a\sqrt{2}+2) - E(a\sqrt{2}-2) = 4(3a\sqrt{2}+2)$.

42. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-2}{x+1} + \frac{6}{x^2-x-2}\right) : \frac{3(2x+1)}{2x^2-3x-2}, \text{ unde } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 2\right\}.$$

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 2\right\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui a, pentru care $E(a^2) = 1{,}9$.

43. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} + \frac{x-5}{x^2-4}\right) : \frac{x-4}{2x^4-8x^2}, \text{ unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2, 4\}.$$

a) Arătați că $E(x) = 2x(x-1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2, 4\}$.

b) Calculați cardinalul mulțimii A, unde $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid E(n) \leq n(n+2) + 12\}$.

PE-PP Supermate ****

44. Fie expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-24} : \frac{x^2+x-6}{x^2-x-30} - \frac{x^2+3x-18}{x^2+2x-8} \cdot \frac{x^2-6x+8}{x^2+9x+18}\right) : \frac{x^2+2x-15}{(x-1)(x^2+7x+12)}.$$

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.

45. Fie expresia:

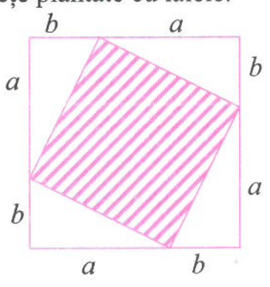
$$E(x) = \left[\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12}\right] : \frac{x+3}{x^3+7x^2+12x}.$$

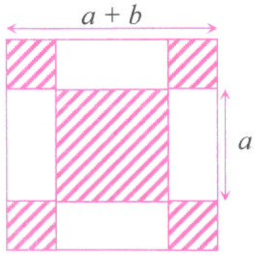
a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ este definită.

b) Arătați că $E(x)$ este număr natural pentru oricare x din domeniul de definiție.

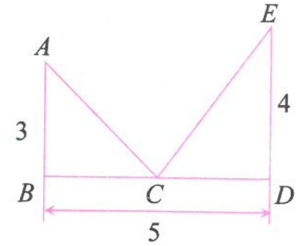
PE-PP Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1. Desenele de mai jos reprezintă schematic două grădini în formă de pătrat de latură $a + b$, unde a și b sunt numere pozitive. Suprafețele hașurate sunt plantate cu lalele. Comparați ariile celor două suprafețe plantate cu lalele.

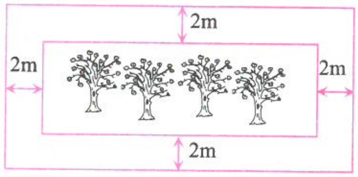




2. Cinci copii, Alina, Bogdan, Costin, Dan şi Elena, iau parte la un joc. Ei sunt poziţionaţi ca în desenul de mai jos. La ce distanţă faţă de Dan trebuie să stea Costin, pe dreapta BD, pentru a fi egal depărtat de Alina şi Elena?



3. Dan deţine un teren în formă de dreptunghi, care are lungimea egală cu triplul lăţimii, ca în desenul alăturat. Terenul este înconjurat de o alee, care are lăţimea de 2 m. Ştiind că aria aleii este de 496 m^2, aflaţi dimensiunile terenului.



PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Se consideră rapoartele $E_1(x) = \dfrac{x^2+11x+30}{x^2+9x+18}$ şi $E_2(x) = \dfrac{x^2+10x+25}{x^2+8x+15}$.

a) Stabiliţi valorile reale ale lui x pentru care rapoartele sunt definite.
b) Arătaţi că fracţiile sunt echivalente.

2. Fie $E(x) = \dfrac{x^2+8x+15}{x^2+x-20} : \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-16}$.

a) Stabiliţi domeniul de existenţă al expresiei.
b) Aduceţi expresia la forma cea mai simplă.
c) Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

3. Se consideră raportul $E(x) = \dfrac{(2x+1)^2 - x^2}{x^2+4x+3}$.

a) Stabiliţi domeniul de existenţă al raportului.
b) Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

4. Fie $E(x) = \left(\dfrac{x+2}{x^2-x} + \dfrac{x-3}{x^2-1} - \dfrac{x-1}{x^2+x}\right) : \dfrac{x^2+3x+2}{x^3-2x^2+x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

a) Arătaţi că $E(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.
b) Rezolvaţi ecuaţia: $E(x) = \dfrac{3(x+1)}{x+2}$.

5. Fie $E(x) = \left(\dfrac{x+1}{2x-1} + \dfrac{2x^2-x+2}{4x^2-1} - \dfrac{x-1}{2x+1}\right) \cdot \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-2x-8}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 4\right\}$.

a) Arătaţi că $E(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$.
b) Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

TESTUL 2

1. Se consideră rapoartele $E(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-4x+4}$ și $F(x)=\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-4}$.

a) Stabiliți valorile reale ale lui x pentru care rapoartele sunt definite.

b) Arătați că cele două rapoarte sunt echivalente.

2. Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x^2-9}{(x+1)^2-4}$.

a) Stabiliți domeniul de definiție al expresiei.

b) Arătați că $E(2)+E(-1)\in\mathbb{N}$.

c) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

d) Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$.

3. Fie expresia: $E(x)=\dfrac{x+3}{x-4}-\dfrac{x^2-16}{x^2+4x}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x^2-8x+16}$.

a) Stabiliți domeniul de existență al expresiei.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$.

4. Fie $E(x)=\left(\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{2x}{6-3x}+\dfrac{8x}{x^2-4}\right):\dfrac{4x^2-16x}{3x^2+3x-18}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,0,2,4\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{x+3}{x-4}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$.

5. Fie $E(x)=\left(\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4-x}{x^2-9}\right)\cdot\left(\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{4x+13}{4-x^2}\right):\left(\dfrac{1}{4x+8}-\dfrac{1}{2x^2+4x}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus$ $\setminus\{-3,-2,0,2,3\}$.

a) Arătați că $E(x)=4x$.

b) Rezolvați ecuația: $\dfrac{x+3}{4x^2-8x}\cdot E(x)=3-\dfrac{x-7}{x-2}$.

2, 4}.

le $x \in \mathbb{R} \setminus$

PE

Nume ______________________________ **Clasa** ________

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, rezultatul calculului $\frac{x-2}{3x}+\frac{2}{3x}$ este ....

(0,5p) **2.** Pentru $x, y \in \mathbb{R}^*$, rezultatul calculului $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^2 : \frac{x^3}{4y^2}$ este ....

(0,5p) **3.** Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, rezultatul calculului $\frac{x^2+2x+1}{2x^2-2} \cdot \frac{2x}{x+1}$ este ....

(0,5p) **4.** Pentru $x \in \mathbb{R}^*$, rezultatul calculului $\frac{10}{3x}-\frac{x}{3}+\frac{5}{x}$ este ....

(0,5p) **5.** Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, rezultatul calculului $\frac{x^2-4}{(x+2)^2} \cdot \frac{x^2+2x}{x(x-2)}$ este ....

(0,5p) **6.** Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, forma simplificată a expresiei:

$E(x)=\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}$ este ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Se consideră expresiile $E(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ și $F(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Valoarea calculului $E(a) + F(-a)$ este egală cu:

A. 2 B. –2 C. 0 D. $\frac{2}{a-1}$

(0,5p) **2.** Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$, rezultatul calculului $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25} \cdot \frac{x}{x-5}+\frac{5}{x+5}$ este egal cu:

A. 1 B. $\frac{x-5}{x+5}$ C. $\frac{2}{x+5}$ D. $\frac{x+5}{x-5}$

(0,5p) **3.** Calculând $\left(-\frac{x^4}{y^8}\right):\left(-\frac{x^6}{y^{10}}\right)$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$, obținem:

A. $\frac{x^2}{y^2}$ B. $\frac{1}{x^2y^2}$ C. $\frac{y^2}{x^2}$ D. x^2y^2

(0,5p) **4.** Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ și $x = a^2 + a$, $y = a - 1$, $z = a^2 - 1$. Atunci $\frac{x \cdot y}{z}$ este:

A. a^2 B. a C. $a + 1$ D. 1

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Fie expresia $E(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{(x+1)^2-x}$. Arătați că $E(n)$ este număr natural impar pentru oricare $n \in \mathbb{N}$.

(1p) **2.** Fie expresiile $F(x)=\dfrac{1}{1-x}-1$ și $E(x)=\left[F(x):\left(1-\dfrac{1-2x^2}{1-x}\right)\right]\cdot(4x^2-4x+1)$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}$. Câte elemente are mulțimea $A=\{a\in\mathbb{N}\mid E(a)\le 2014\}$?

(1p) **3.** Aduceți expresia $E(x)=\dfrac{x}{2x-1}\cdot\left[\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{x+1}{x+3}\cdot\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x+1}\right)\right]$ la forma cea mai simplă, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3,-2,-1,0,\dfrac{1}{2}\right\}$.

(1p) **4.** Arătați că $(x+1)^2>x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

2. Ecuaţii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) este echivalentă cu ecuația

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\text{, adică:}$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \text{ sau } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Putem descompune membrul stâng în produs de factori numai dacă numărul $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$. Semnul acestui număr este același cu semnul numărătorului $b^2 - 4ac$. De aceea, numărul $b^2 - 4ac$ este numit **discriminantul ecuației**. El se notează, de obicei, cu litera grecească Δ (se citește „delta”).

Distingem trei cazuri:

1. $\Delta > 0$. În acest caz, ecuația are două soluții:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\text{, unde } \Delta = b^2 - 4ac;$$

2. $\Delta = 0$. În acest caz, ecuația are cele două soluții confundate: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

3. $\Delta < 0$. În acest caz, ecuația nu are nicio soluție reală.

Exemple:

1. Determinați numărul real a pentru care ecuația $(a + 1)x^2 + (2a + 3)x - a = 0$ are soluția $x = \frac{1}{3}$. Determinați cea de-a doua soluție pentru valoarea lui a determinată anterior.

Soluție: Dacă $x = \frac{1}{3}$, înlocuind în ecuație, se obține ecuația $\frac{a+1}{9} + \frac{2a+3}{3} - a = 0$, care are ca soluție $a = 5$. Prin înlocuirea lui a în ecuație se obține ecuația $6x^2 + 13x - 5 = 0$. Se calculează $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 289$, iar $\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17$. Atunci soluțiile ecuației sunt:

$$x_1 = \frac{-13-17}{12} = \frac{-30^{(6}}{12} = -\frac{5}{2} \text{ și } x_2 = \frac{-13+17}{12} = \frac{4^{(4}}{12} = \frac{1}{3}.$$

2. Rezolvați ecuația $\frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x+1}$.

Soluție: Ecuația este definită pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Se înmulțește ecuația cu $(x^2 - 1)$ și se obține ecuația echivalentă $6 - 2(x + 1) = 2(x - 1)(x + 1) - (x + 4)(x - 1)$. Prin desfacerea parantezelor și trecerea termenilor în același membru se obține ecuația echivalentă $x^2 - x - 2 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ și, cum $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, rezultă doar soluția $x = 2$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Rezolvați ecuațiile:

a) $x(x + 7) = 0$;
b) $(x - 1)(x + 2) = 0$;
c) $(x - 3)(x + 4) = 0$;
d) $(x + 1)(x - 6) = 0$;
e) $(x + 3)(x - 2) = 0$;
f) $(2x - 1)(2x + 3) = 0$;
g) $(2x + 5)(5x + 2) = 0$;
h) $(3x - 8)(2x + 9) = 0$;
i) $(4x + 3)(7x - 2) = 0$.

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 + 3x = 0$;
b) $x^2 - 2x = 0$;
c) $3x^2 + 9x = 0$;
d) $4x^2 - 8x = 0$;
e) $6x^2 - x = 0$;
f) $-5x^2 + 8x = 0$;
g) $-0{,}6x^2 + 3{,}6x = 0$;
h) $-0{,}5x^2 - 2{,}5x = 0$;
i) $0{,}4x^2 - 2{,}4x = 0$.

3. Determinați mulțimea soluțiilor reale pentru fiecare dintre ecuațiile:

a) $x^2 - 1 = 0$;
b) $x^2 - 4 = 0$;
c) $4x^2 - 9 = 0$;
d) $25x^2 - 16 = 0$;
e) $64x^2 - 81 = 0$;
f) $36x^2 - 25 = 0$;
g) $5x^2 - 45 = 0$;
h) $3x^2 - 12 = 0$;
i) $6x^2 - 216 = 0$;
j) $x^2 + 4 = 0$;
k) $-x^2 - 16 = 0$;
l) $x^2 + 25 = 0$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$;
b) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
c) $x^2 + 5x - 14 = 0$;
d) $x^2 - 8x - 20 = 0$;
e) $x^2 + 4x - 12 = 0$;
f) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
g) $x^2 - 9x + 14 = 0$;
h) $x^2 - 10x + 16 = 0$;
i) $x^2 + 7x + 10 = 0$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
b) $x^2 + x - 6 = 0$;
c) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
d) $x^2 + x - 12 = 0$;
e) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
f) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
g) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
h) $x^2 + 2x - 24 = 0$;
i) $x^2 - 4x - 21 = 0$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x - 1)^2 - 4 = 0$;
b) $(x + 2)^2 - 9 = 0$;
c) $(x - 3)^2 - 16 = 0$;
d) $(x + 4)^2 - 25 = 0$;
e) $(x - 2)^2 - 100 = 0$;
f) $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 - 12 = 0$.

PE Aplicare și exersare **

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x+2)^2 - 25 = 0$; b) $x^2 + 6x + 9 = 1$;
c) $x^2 + 4x + 4 = -1$; d) $x^2 + 4x + 4 = 0$;
e) $x^2 + 10x + 25 = 9$; f) $x^2 - 8x + 16 = 0$.

8. Determinați valoarea lui $a \in \mathbb{R}$, știind că ecuația $2x^2 + ax - 4 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, are soluția $x = -4$. Determinați cealaltă soluție a ecuației pentru valoarea lui a determinată anterior.

9. Știind că 2 este soluție a ecuației $ax^2 - 3x + a - 4 = 0$, determinați valoarea lui $a \in \mathbb{R}$. Pentru a determinat, rezolvați ecuația.

10. Ecuația $(a-1)x^2 + 7x + a = 0$ are soluția $x = -3$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ în această condiție și rezolvați apoi ecuația obținută.

11. Aflați numărul real m, știind că ecuația $6x^2 + (m-1)x - m = 0$ are soluția $x = \dfrac{1}{2}$. Rezolvați apoi ecuația obținută pentru valoarea lui m determinată.

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2x^2 + x - 3 = 0$; b) $2x^2 - x - 15 = 0$;
c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
e) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; f) $2x^2 - x - 3 = 0$;
g) $3x^2 + x - 2 = 0$; h) $3x^2 + 4x - 7 = 0$;
i) $2x^2 + x - 1 = 0$.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 + 9x + 20 = 0$; b) $x^2 + 11x + 30 = 0$;
c) $x^2 + 14x + 48 = 0$; d) $x^2 - 15x + 56 = 0$;
e) $x^2 - 12x + 27 = 0$; f) $x^2 - 6x - 27 = 0$;
g) $x^2 - 8x - 33 = 0$; h) $x^2 - 11x - 26 = 0$;
i) $x^2 + x - 56 = 0$.

14. Rezolvați ecuațiile:

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$;
c) $6x^2 - 7x + 2 = 0$; d) $3x^2 - x - 2 = 0$;
e) $4x^2 + 5x - 6 = 0$; f) $2x^2 - 5x - 12 = 0$;
g) $3x^2 + 4x - 4 = 0$; h) $2x^2 - 9x + 4 = 0$;
i) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; j) $2x^2 + 7x + 3 = 0$;
k) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; l) $6x^2 + x - 2 = 0$.

15. Determinați mulțimea soluțiilor pentru ecuațiile:

a) $3x^2 + 7x = 5(x+1)$; b) $2x^2 + 10x = 6(x+1)$;
c) $3x^2 + 13x = 8(x+1)$; d) $2x^2 - 5(x-1) = 2$;
e) $3x^2 - 4(x+1) = -3x$; f) $(x+2)^2 - 5x = 6$;
g) $(2x-3)^2 = 6 - 5x$; h) $(2x+1)^2 + 3x = -2$.

PE Aprofundare și performanță ***

16. a) Determinați ecuația de forma $x^2 + bx + c = 0$, știind că soluțiile ecuației sunt -3 și -2.

b) Determinați ecuația de forma $x^2 + bx + c = 0$, știind că mulțimea soluțiilor este $S = \{-5, -3\}$.

c) Determinați ecuația de forma $x^2 + bx + c = 0$, știind că soluțiile ecuației sunt -7 și 2.

d) Determinați ecuația de forma $x^2 + bx + c = 0$, știind că mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{4, 5\}$.

e) Determinați ecuația de forma $(x - m)(x - n) = 0$, știind că mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-3, 5\}$.

f) Determinați ecuația de forma $(x - a)(x - b) = 0$, știind că soluțiile ecuației sunt $\frac{1}{2}$ și 3.

17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)^2$;
b) $(x + 3)^2 - 1 = 3x - (x + 5)(x - 1)$;
c) $4x(x + 1) + 4 = 3(x^2 + 2x + 4)$;
d) $3x(x - 1) + 2(x + 4) = x(2x + 3) + 8$;
e) $2x^2 + (x + 3)^2 + (x - 1)^2 = 3x^2 + 2x + 10$;
f) $(x - 3)^2 + 2(x - 1)^2 = 4x + 3$.

18. Rezolvați ecuațiile:

a) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 - 2(x - 3)^2 = 5x^2$;
b) $(x + 1)^2 + (x - 2)(x + 3) = (x - 1)(x + 1)$;
c) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 - (x - 5)^2 = 17(x + 1) + 7$;
d) $(x + 4)(x - 1) - 5(x - 3)(x + 2) = (x + 1)^2 - (x - 3)^2 - 2$;
e) $(x + 5)(x - 4) + 3(x - 3)(x + 2) = (x + 2)^2 + 2(x + 9)$;
f) $(2x + 1)^2 - 3(x + 2)(x - 2) = x(x + 3) - (x^2 - 15)$.

19. a) Determinați valorile reale ale lui m și n pentru care ecuațiile $(2x + 1)^2 + 7x + 9 = 3(x + 2)^2$ și $(m - n)x^2 - (m - 2)x - n = 0$ sunt echivalente.

b) Determinați numerele reale m și n pentru care ecuațiile $(x - 2)^2 + 8 = 3x$ și $(m - n)x^2 - (m + n)x + 2m + n + 1 = 0$ sunt echivalente.

20. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{3}{2}$;
b) $\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x}{6}$;
c) $\frac{x^2 + 1}{2} = 5(x - 2)$;
d) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$;
e) $\frac{x^2 + 2}{x^2 + 4} = \frac{3}{4}$;
f) $\frac{(x - 1)^2}{3} = 2x - 5$;
g) $\frac{3x + 1}{x + 2} = \frac{x - 1}{x - 2}$;
h) $\frac{5x + 1}{x + 1} = \frac{x + 2}{x}$;
i) $\frac{x - 7}{3x + 1} = \frac{x}{x - 3}$.

21. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{2x-5}{x-1}-\frac{5x-3}{3x+5}=0$;

b) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2-x}=0$;

c) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{2-x}{x+2}=3$;

d) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x+1}=2\frac{1}{12}$.

22. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}+\frac{3x^2}{4(x-2)(x-5)}=0$;

b) $\frac{3x-4}{x-1}=\frac{2x+5}{x+2}-\frac{1}{x-1}$;

c) $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$;

d) $\frac{2x-1}{x+7}-\frac{3x+4}{x-1}=0$;

e) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x^2}{(x-3)(x-1)}=0$;

f) $\frac{(x+3)^2}{5}+2-\frac{(3x-1)^2}{5}=2x(x-1)-x$;

g) $\frac{3x}{2(9x+3)}=\frac{x+2}{3x-1}-\frac{8x^2+3}{9x^2-1}$.

PE-PP Supermate ****

23. Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $(m-1)x^2-2(m+1)x+m=0$, $m \neq 1$, are soluții reale.

24. Arătați că ecuația $(a+1)x^2+(a^2+2a+2)x+a+1=0$ are soluții reale pentru oricare $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

25. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2+(m+1)x+m=0$, $m>1$.

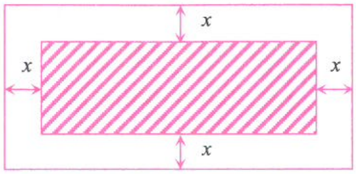
PE-PP Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. Un teren agricol de forma unui dreptunghi are lungimea egală cu dublul lățimii. Aflați dimensiunile acestui teren, știind că, dacă mărim lățimea cu 1 m și lungimea cu 3 m, aria terenului este egală cu 78 m^2.

2. O terasă avea formă pătratică. Proprietarul a mărit o latură cu 1 m, iar cealaltă latură cu 5 m. După modificare, terasa are o suprafață dreptunghiulară de 45 m^2. Care a fost dimensiunea inițială a laturii terasei?

3. Un triunghi dreptunghic are dimensiunile laturilor exprimate în metri: $5-x$, $6-x$ și 5. Aflați valoarea lui x pentru care aria triunghiului este minimă.

4. O grădină are formă dreptunghiulară cu lungimea de 32 m şi lăţimea de 12 m, ca în desenul alăturat. Grădina este înconjurată de o alee cu aceeaşi lăţime. Determinaţi lăţimea pe care o are aleea, ştiind că suprafaţa haşurată este de 300 m^2.



PE

Nume ______________________ Clasa ________

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 36 = 0$ este $S = \{$..$\}$.

(0,5p) **2.** Dacă -2 este soluție a ecuației $3x^2 + ax - 4 = 0$, atunci valoarea lui a este ....

(0,5p) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 + 4x - 21 = 0$ este $S = \{$....................................$\}$.

(0,5p) **4.** Dacă 1 este soluție a ecuației $2x^2 + (m + 1)x - 2m - 5 = 0$, atunci valoarea lui m este ....

(0,5p) **5.** Mulțimea soluțiilor ecuației $8x^2 - 2x - 15 = 0$ este $S = \{$.................................$\}$.

(0,5p) **6.** Mulțimea soluțiilor ecuației $(2x + 1)^2 = 5x + 6$ este $S = \{$...............................$\}$.

II. Încercuiți răspunsul corect. **(2 puncte)**

(0,5p) **1.** Mulțimea soluțiilor ecuației $49x^2 - 0,25 = 0$ este:

A. $S = \left\{\pm\frac{5}{7}\right\}$ B. $S = \left\{\pm\frac{1}{14}\right\}$ C. $S = \left\{\pm\frac{5}{14}\right\}$ D. $S = \left\{\pm\frac{10}{7}\right\}$

(0,5p) **2.** Dacă numărul rațional $\frac{1}{2}$ este soluție a ecuației $(m + 1)x^2 - (m + 2)x + (m - 3) = 0$, atunci $|m|$ este egal cu:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

(0,5p) **3.** Dacă $S = \{-4, 3\}$ este mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 + (m - n)x - (m + n + 5) = 0$, atunci perechea (m, n) este:

A. $(4, 3)$ B. $(3, 4)$ C. $(3, 5)$ D. $(4, 5)$

(0,5p) **4.** Mulțimea soluțiilor ecuației $(x - 3)^2 = 7 - 3x$ este:

A. $S = \{-2, -1\}$ B. $S = \{1, 2\}$ C. $S = \{-4, -3\}$ D. $S = \{2, 4\}$

III. Scrieți rezolvările complete. **(4 puncte)**

(1p) **1.** Rezolvați ecuația: $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-7}{2x+1}$.

(1p) **2.** Determinați valorile reale ale lui m și n pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$(x+5)(x-1)-1=3x-(x+3)^2$ și $(m-n)x^2+(m+n-1)x+m-n+1=0$.

(1p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $(x+4)^2-2=4-(x+3)(x-2)$.

(1p) **4.** Arătați că, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}^*$, ecuația $mx^2+2(m-1)x+m-2=0$ are rădăcini reale și distincte.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Capitolul II
Funcții

PP **Competențe specifice**

- C1. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
- C2. Descrierea unor dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
- C3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
- C4. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
- C5. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
- C6. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală

Fie A și B două mulțimi nevide. Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca *fiecărui* element din mulțimea A să-i corespundă *un singur* element din mulțimea B, spunem că am definit o funcție de la A la B.

Mulțimea A se numește **domeniu de definiție** al funcției, iar mulțimea B se numește **codomeniul** sau mulțimea în care funcția ia valori. În general, o funcție f definită pe A cu valori în mulțimea B va fi notată $\boldsymbol{f : A \to B}$. Citim „f definită pe A cu valori în B". Funcțiile se notează de obicei cu f, g, h, … .

Fiind dată o funcție $f : A \to B$, dacă aceasta face ca elementului $a \in A$ să-i corespundă elementul $b \in B$, scriem $f(a) = b$ și spunem că b este valoarea funcției în a.

Legătura pe care o stabilește funcția între elementele $x \in A$ și valorile corespunzătoare $f(x)$ din B se numește **lege de corespondență**. O funcție se descrie prin trei componente:

- domeniul de definiție;
- codomeniul;
- legea de corespondență.

Legea de corespondență a unei funcții poate fi dată în mai multe moduri:

a) se poate descrie cu ajutorul **diagramelor**;

b) se poate exprima prin indicarea într-un **tabel** a valorilor corespunzătoare elementelor din domeniul de definiție;

c) se poate descrie cu ajutorul unei **formule** prin care se precizează valoarea $f(x)$ pentru oricare x din domeniul de definiție.

Fiind dată o funcție $f : A \to B$, mulțimea punctelor din plan având coordonatele (x, y), unde $x \in A$, iar $y = f(x)$, va fi numită **graficul funcției**. Această mulțime se scrie $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$.

Egalitatea $y = f(x)$, adevărată pentru oricare element $x \in A$, va fi numită **ecuația graficului** funcției f. Se obișnuiește să se noteze $y = f(x)$, $x \in A$.

Fie $f: A \to B$ o funcție. **Imaginea** (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea $\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\mathrm{Im} f \subset B$.

Se mai poate scrie și astfel:

$$\mathrm{Im} f = \{y \in B \mid \text{există } x \in A, \text{ astfel încât } y = f(x)\}.$$

O funcție ale cărei domeniu de definiție și codomeniu sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere) se numește **funcție numerică**.

Două funcții $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Se notează $f = g$.

În general, o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descrisă de formula $f(x) = ax + b$ (unde a și b sunt numere reale) se numește **funcție liniară**. Reprezentarea geometrică a mulțimii grafic pentru o funcție liniară este o dreaptă.

Pentru a trasa graficul unei funcții liniare este suficient să dăm variabilei x două valori distincte.

Observații:

1. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = ax$, ale căror grafice conțin originea axelor de coordonate.

2. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = b$, ale căror grafice sunt drepte paralele cu axa Ox. Funcțiile de acest fel sunt numite funcții constante nenule.

3. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = b = 0$, se obține o funcție $f(x) = 0$, al cărei grafic coincide cu axa Ox.

4. Uneori, pentru trasarea graficului unei funcții liniare este mai comod să se stabilească punctele în care graficul intersectează axele de coordonate.

$$G_f \cap Oy = A(0; f(0)) \Leftrightarrow G_f \cap Oy = A(0; b);\ G_f \cap Ox = B\left(-\frac{b}{a};\ 0\right).$$

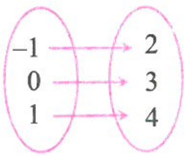
RE.PP 1. Funcții definite pe mulțimi finite

Exemple:

1. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel funcția următoare:

$$f: \{-1, 0, 1\} \to \{2, 3, 4\}, f(x) = x + 3.$$

Soluție: $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(0) = 0 + 3 = 3$, $f(1) = 1 + 3 = 4$.



x	-1	0	1
$f(x)$	2	3	4

2. Explicitați domeniul de definiție pentru funcția

$$f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x} \text{ și } A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 3\}.$$

Soluție: Cum $x \neq 0 \Rightarrow A = \{-1, 1, 2\}$.

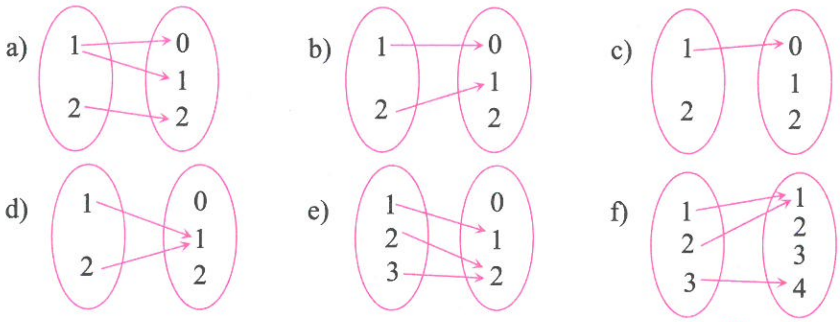
3. Fie funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 2$ și $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \le 2\}$. Determinați valoarea lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care punctul $B(1; -1)$ aparține graficului funcției.

Soluție: $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Dacă $B(1; -1) \in G_f \Rightarrow f(1) = -1$. Cum $f(1) = a + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$.

activități de învățare

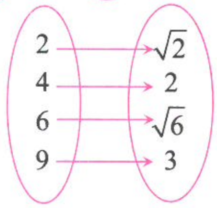
PE Înțelegere *

1. Precizați care dintre diagramele de mai jos definesc funcții:



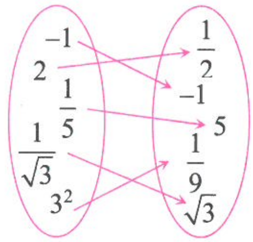
2. Diagrama alăturată definește o funcție.

a) Precizați domeniul și codomeniul funcției.
b) Reprezentați printr-un tabel funcția definită de diagramă.
c) Stabiliți legea de corespondență printr-o formulă.



3. În diagrama alăturată este descrisă o funcție $f: A \to B$.

a) Precizați elementele mulțimilor A și B.
b) Realizați tabelul de valori al funcției f.
c) Descrieți corespondența $x \to f(x)$ printr-o formulă.



4. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel, funcțiile următoare:

a) $f: \{0, 2, 4\} \to \{0, 2, 4, 6\}, f(x) = x + 2$;
b) $g: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}, g(x) = x^2$.

5. Prețul unui kilogram de mere este 2 lei. Completați tabelul:

Cantitatea (kg)	3	4,5	7	10	13	35	96
Prețul total (lei)					26		

a) Stabiliți o formulă pentru corespondența realizată între elementele din tabel.
b) Realizați o diagramă corespunzătoare valorilor din tabel.
c) Definiți o funcție cu formula de la subpunctul a), stabilind domeniul și codomeniul acesteia, conform tabelului.

6. Un automobil are de parcurs un drum de 360 km. Completați tabelul:

Timpul (ore)	6	8	4	9	12	18
Viteza (km/h)		45				

a) Stabiliți o formulă care să vă ajute să completați tabelul.

b) Scrieți funcția definită de această formulă, stabilind domeniul și codomeniul indicate în tabel.

7. Un bazin cu capacitatea de 240 hl se umple cu ajutorul unor robinete cu debitul de 10 hl/h. Completați tabelul:

Numărul de robinete	6	4	2	8	12	24
Timpul de umplere (ore)			12			

a) Stabiliți o formulă care să vă ajute să completați tabelul.

b) Scrieți funcția definită de această formulă, stabilind domeniul și codomeniul indicate în tabel.

8. Care dintre tabelele de mai jos descrie o funcție?

a)

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	3

b)

x	1	2	1
$f(x)$	2	4	5

c)

x	−1	2	4
$f(x)$	0	4	6

d)

x	−2	−1	0	1	−1
$f(x)$	4	5	3	2	1

9. Care dintre următoarele relații nu reprezintă o funcție?

a) $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1\}, f(x) = x^2$.

b) $g : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}, g(x) = x^2$.

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{2}{x}$.

10. Fie funcția $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}, f(x) = |x|$.

a) Stabiliți elementele mulțimii grafic.

b) Stabiliți care dintre punctele $A(-1; 1)$, $B(2; -2)$, $C(1; 1)$, $D(-3; 3)$, $E(0; 0)$ se găsesc pe graficul funcției.

11. Fie funcția $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$. Stabiliți care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției: $A(-2; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(0; 3)$, $D(1; 5)$, $E(2; 6)$.

12. Determinați Im f (mulțimea valorilor funcției) în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$;

b) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$;

c) $f : \{-3, -2, -1, 0, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 2$.

13. Pentru funcțiile următoare, stabiliți codomeniul cu numărul minim de elemente, știind că:

a) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to B$, unde $f(x) = x + 3$;

b) $f : \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\} \to B$, unde $f(x) = x^2 - 2$;

c) $f : \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\} \to B$, unde $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

14. Pentru funcțiile de mai jos, stabiliți domeniul de definiție, știind că fiecare element al codomeniului este imaginea unui element din domeniu:

a) $f: A \to \{-7, -5, -1, 1, 4\}, f(x) = 2x - 3$;

b) $f: A \to \{4, 3, 2, 1, 0, -1\}, f(x) = -x + 1$;

c) $f: A \to \{0, 4, 9, 16\}, f(x) = x^2$.

15. Completați tabelul următor, știind că fiecărei laturi a unui pătrat îi corespunde perimetrul acestuia (toate dimensiunile sunt măsurate în metri).

Latura	8	6	12	9	13	20	36	42
Perimetrul					52			

a) Realizați o diagramă corespunzătoare valorilor din tabel.

b) Stabiliți formula pentru corespondența din tabel și scrieți funcția asociată acestei corespondențe, stabilind domeniul și codomeniul funcției, conform tabelului.

16. Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că:

a) $f: \{-2, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, f(x) = ax - 2$ și $A(1; -3) \in G_f$;

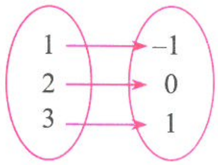
b) $f: \{-2, -1, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + a$ și $A(1; -1) \in G_f$;

c) $f: \{-3, -1, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = ax - 5$ și $A(2; -1) \in G_f$.

17. Care dintre perechile de funcții reprezintă funcții egale?

a) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}, f(x) = x^2$ și $g: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$, $g(y) = |y|$.

b) $f: \{1, 2, 3\} \to \{-1, 0, 1\}, f(x) = x - 2$ și $g(x)$ este reprezentată prin diagrama alăturată.



PE Aplicare și exersare **

18. Fie mulțimile $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$, iar $f: A \to B, f(x) = |x|$.

a) Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției.

b) Scrieți elementele mulțimii G_f.

c) Reprezentați geometric mulțimea G_f.

19. Pentru funcțiile următoare, stabiliți mulțimea grafic și apoi reprezentați-o într-un sistem de axe de coordonate:

a) $f: \{-2, 0, 1, 2\} \to \{-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, f(x) = x + 3$;

b) $f: \{-3, -2, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

c) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{Z}, f(x) = 2x + 1$.

20. Pentru funcțiile următoare, scrieți mulțimea grafic și reprezentați-o într-un sistem de axe de coordonate:

a) $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$;

b) $f: \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } x < -1 \\ -2x, & \text{dacă } x \geq -1 \end{cases}$;

c) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \begin{cases} 2x-2, & \text{dacă } x \leq -1 \\ x+1, & \text{dacă } x \in \{0, 1\} \\ 3x-2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.

21. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 3$;

b) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| - 2$;

c) $f: \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{Z}, f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{dacă } x < -1 \\ x+2, & \text{dacă } x \geq -1 \end{cases}$.

22. Pentru fiecare dintre funcțiile care urmează, stabiliți inițial domeniul de definiție, apoi reprezentați-le grafic:

a) $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 2$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$;

b) $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| \leq 2\}$;

c) $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq \frac{3x-1}{5} < 1\}$.

23. Se consideră funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x^2, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$. Determinați numerele reale a, b, c și d, știind că punctele $A(-2; a)$, $B(-1; b)$, $C(1; c + 4)$ și $D(3; 6d)$ aparțin graficului funcției.

24. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: \{-2, -1, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{x}$;

b) $f: \{-3, -1, 0, 3\} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$;

c) $f: \{-2, -1, 1, 4\} \to \mathbb{R}, f(x) = -|x|$.

PE Aprofundare și performanță ***

25. Se consideră funcția $f: \{-3, -2, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, știind că punctele $A(-2; -8)$ și $B(2; 4)$ aparțin graficului funcției. Reprezentați grafic funcția.

26. Demonstrați că nu există o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice număr real x, să avem $f(x) + f(2 - x) = x + 1$.

27. Considerăm funcția $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, unde $f(n)$ este numărul divizorilor naturali ai lui n, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați numărul divizorilor naturali $f(2), f(4), f(8), f(24), f(36)$.

b) Caracterizați numerele naturale x pentru care $f(x) = 2$, apoi pe cele pentru care $f(x) = 3$.

28. Se consideră funcția $f: A \to \mathbb{Z}$, unde $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \left|\frac{x-1}{2}\right| \leq 2\right\}$, $f(x) = |x|$.

a) Determinați elementele mulțimilor A și $\operatorname{Im} f$.

b) Reprezentați grafic funcția.

c) Calculați suma elementelor mulțimii $\operatorname{Im} f$.

PE-PP Supermate ****

29. Fie funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) =$ ultima cifră a numărului natural x^2.

a) Determinați $\operatorname{Im} f$.
b) Calculați $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(21)$.

30. Fie funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) =$ ultima cifră a lui 3^x.

a) Determinați $\operatorname{Im} f$.
b) Calculați $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(32)$.

PE-PP 2. Funcţia liniară

Exemple:

1. Determinați funcția liniară al cărei grafic trece prin punctele $A(-1; 7)$ și $B(1; -3)$.

Soluție: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Dacă $A(-1; 7) \in G_f \Rightarrow f(-1) = 7$ și cum $f(-1) = -a + b \Rightarrow -a + b = 7$. Dacă $B(1; -3) \in G_f \Rightarrow f(1) = -3$ și cum $f(1) = a + b \Rightarrow a + b = -3$. Adunând cele două relații, se obține $2b = 4$, de unde $b = 2$ și apoi $a = -5 \Rightarrow f(x) = -5x + 2$.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -2x + 3$. Determinați punctul de intersecție a graficelor celor două funcții.

Soluție: $G_f \cap G_g = M(x; y) \Rightarrow f(x) = y$ și $g(x) = y \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 1 = -2x + 3 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(1; 1)$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: [-2; 3) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$;
b) $f: [-3; 2] \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 5$;
c) $f: (-\infty; 3) \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$;
d) $f: [-3; 5) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$;
e) $f: (-6; 5] \to \mathbb{R}, f(x) = 1$;
f) $f: [-4; 4] \to \mathbb{R}, f(x) = -2$.

2. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: (-\infty; 2) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$;
b) $f: [-2; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$;
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$;
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0{,}2x - 3$;
e) $f: [3; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{3} + 1$;
f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}x - 1$.

3. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: [5; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2}{5}x - 2$;
b) $f: (-3; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x$;
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 2$;
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+1}{2}$;
e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -4x$;
f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$.

4. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x - 2$. Trasați în același sistem de axe de coordonate graficele celor două funcții. Ce observați?

5. Fie funcția $f: (-2; 6) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$. Determinați punctul de pe grafic care:

a) are abscisa egală cu -1;
b) are ordonata egală cu 4;
c) are coordonatele egale;
d) are coordonatele numere opuse.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$. Determinați punctul de pe grafic ce are:

a) ordonata egală cu -4;
b) coordonatele egale;
c) abscisa egală cu -2;
d) ordonata egală cu opusa abscisei;
e) ordonata egală cu dublul abscisei.

7. Fie funcția $f: [-4; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Stabiliți care dintre punctele ce urmează aparțin graficului funcției: $A(-1; -1)$, $B(-2; 3)$, $C(1; 3)$, $D(2; 5)$, $E(0; 2)$.

8. Fie funcția $f: (-3; 2) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + a$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A(-2; -3) \in G_f$.

b) Pentru a determinat anterior, reprezentați grafic funcția.

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 2$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1; 3) \in G_f$.

b) Pentru valoarea lui a determinată anterior, trasați graficul funcției.

10. Fie funcția $f: (-2; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + b$.

a) Determinați $b \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(-1; -5) \in G_f$.

b) Pentru $b = -2$, reprezentați grafic funcția.

11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.

a) Calculați $f(-1) + f(2)$.

b) Reprezentați grafic funcția f, în sistemul de coordonate xOy.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 2$.

a) Calculați $f(-2) + f(3)$.

b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină coordonatele mijlocului segmentului AB.

13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$.

a) Arătați că $f(-3) - f(2) = 5$.

b) În sistemul de axe ortogonale xOy, determinați distanța de la punctul $M(-1; 0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.

14. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 2$.

a) Arătați că $f(-2) + f(4) = -2$.

b) În sistemul de axe ortogonale xOy, determinați distanța de la punctul $C(-2; 0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.

15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 4$.

a) Arătați că $f(-3) - f(2) = 15$.

b) În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctele A și B situate pe reprezentarea geometrică a graficului funcției f. Știind că punctul A are abscisa 4 și punctul B are ordonata 4, determinați distanța dintre punctele A și B.

16. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Determinați forma funcției și realizați graficul acestei funcții în fiecare din cazurile prezentate mai jos:

a) $f(-1) = 5$ și $f(2) = -4$;

b) $A(-2; -7) \in G_f$ și $B(4; 5) \in G_f$.

17. Fie funcția $f: [-4; 5) \to \mathbb{R}, f(x) = (m-3)x + 5 - 3m$.

a) Determinați valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care $M(-1; -4) \in G_f$.

b) Pentru $m = 3$, trasați graficul funcției.

18. Determinați valorile numărului real m pentru care punctul $M(m; -1)$ se găsește pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită în fiecare din cazurile de mai jos:

a) $f(x) = -2x + 5$;

b) $f(x) = 4x + 7$;

c) $f(x) = mx - 2$;

d) $f(x) = (m-4)x + 3$.

19. Determinați valorile numărului real m pentru care punctul $M(m; -2)$ se găsește pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în fiecare din cazurile de mai jos:

a) $f(x) = mx - 3m - 12$;

b) $f(x) = mx - 2m - 10$;

c) $f(x) = mx - 5m + 4$;

d) $f(x) = mx - 3m - 6$.

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2m-3)x + 7$.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $M(2; -7) \in G_f$.

b) Pentru $m = -2$, trasați graficul funcției.

21. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a+1)x + 2a + 4$.

a) Determinați valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției conține originea sistemului de axe de coordonate.

b) Pentru $a = -2$, reprezentați grafic funcția.

22. Determinați valorile lui $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care punctul $A(a; 2) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin:

a) $f(x) = -x + 3$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$;

c) $f(x) = -73x - 71$.

23. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2mx - 7m + 3$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care punctul $A(m, 4m - 2)$ aparține graficului funcției f.

24. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (3m-4)x + 9 - 5m, m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valoarea lui m pentru care punctul $M(-1; -3)$ aparține graficului funției f.

b) Pentru $m = 2$, determinați punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele egale.

25. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2-m)x + 3m + 5$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile numărului real m pentru care punctul $A(m; -1)$ aparține graficului funcției f.

b) Pentru $m = -1$ reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m-4)x + 7 - 3m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valoarea lui m pentru care punctul $M(-1; 3)$ aparține graficului funcției date f.

b) Pentru m determinat la punctul a), aflați punctul de pe graficul funcției f, din sistemul de axe de coordonate xOy, care are coordonatele egale.

27. Fie funcția $f: (-5; 5) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$.

a) Trasați graficul funcției într-un sistem de axe de coordonate.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(2a; -3a + 13) \in G_f$.

28. Fie funcția $f: [-5; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 3m + 8$.

a) Determinați valoarea reală a lui m pentru care punctul $A(2m; -m - 4) \in G_f$.
b) Pentru $m = -2$, reprezentați grafic funcția.

29. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m - 2)x + 3m - 7$.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $M(-1; 3)$ se găsește pe graficul funcției.

b) Pentru $m = 4$, reprezentați grafic funcția.

30. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3mx + 5m - 7$, unde $m \in \mathbb{R}^*$. Determinați valoarea lui m pentru care punctul $M(m; m^2 - 3m - 7) \in G_f$.

31. Determinați $a \in \mathbb{Z}^*$ pentru care punctul $A(a; 3) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a - 2)x + a + 3$.

32. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Determinați valorile reale ale lui a și b pentru care reprezentarea grafică a funcției este dreapta OM, unde $M(-1; -3)$.

33. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$.

a) Trasați graficul funcției cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.
b) Calculați distanța de la punctul $M(-2; 0)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției.

34. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{4}x + 3$.

a) Trasați graficul funcției cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.
b) Calculați distanța de la punctul $M(6; 0)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției.

35. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $f(x) = ax + b$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției este dreapta AB, în fiecare dintre cazurile:
a) $A(-1; -7)$ și $B(1; -1)$;
b) $A(-2; -7)$ și $B(2; 1)$;
c) $A(-1; 7)$ și $B(1; 3)$;
d) $A(-2; 10)$ și $B(2; -2)$.

36. Determinați funcțiile liniare ale căror grafice conțin punctele:
a) $A(-1; -1)$ și $B(1; 3)$;
b) $A(-1; 3)$ și $B(1; 1)$;
c) $A(-2; 7)$ și $B(2; -1)$;
d) $A(-2; 4)$ și $B(2; 8)$.

37. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Determinați forma funcției, știind că punctele $A(m; n)$ și $B(c; d)$ aparțin graficului funcției. Reprezentați grafic funcția și determinați distanța de la originea axelor la dreapta ce reprezintă graficul funcției, precum și aria triunghiului determinat de grafic și axele de coordonate.

	a)	b)	c)	d)
m	3	1	–2	–3
n	0	–1	–5	1
c	0	2	1	2
d	6	1	4	6

PE Aplicare și exersare **

38. Stabiliți dacă următoarele puncte sunt coliniare:
a) $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ și $C(5; 7)$;
b) $A(-2; 5)$, $B(1; -1)$ și $C(4; -5)$;
c) $A(-1; 7)$, $B(2; -2)$ și $C(3; -7)$;
d) $A(-2; 3)$, $B(-1; 2)$ și $C(2; -1)$.

39. Reprezentați grafic în același sistem de axe de coordonate funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în fiecare dintre cazurile:

a) $f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = x - 2$; b) $f(x) = -3x + 2$ și $g(x) = -2x - 3$;
c) $f(x) = 3x - 1$ și $g(x) = 4x + 3$; d) $f(x) = x + 5$ și $g(x) = 2x + 7$.

Determinați în fiecare caz coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

40. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 6$.

a) Trasați graficul funcției cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.
b) Calculați distanța de la punctul $M(-3; 0)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției.
c) Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(35)$.

41. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m - 3)x + 2n + 1$.

a) Determinați valorile reale ale lui m și n pentru care graficul funcției trece prin punctele $A(-1; 2)$ și $B(2; 5)$. Trasați graficul.
b) Calculați distanța de la punctul $C(1; 0)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției.
c) Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(40)$.

42. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$.

a) Dacă $A(0; a)$ și $B(b; 0)$ sunt puncte pe graficul funcției, determinați numerele reale a și b.
b) Trasați graficul funcției.
c) Dacă C este simetricul lui B față de axa ordonatelor, arătați că distanța de la C la graficul funcției este segmentul AC.

43. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = bx + a$. Trasați graficul funcției $g(x)$, știind că punctele $A(-1; -5)$ și $B(2; 1)$ se găsesc pe graficul funcției $f(x)$.

44. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x + 3$.

a) Trasați graficele celor două funcții în același sistem de axe de coordonate și aflați coordonatele punctului de intersecție dintre cele două grafice.
b) Calculați suma $S = g(1) + g(2) + \ldots + g(50) - f(1) - f(2) - \ldots - f(50)$.

45. Fie funcțiile $f: [-2; 4) \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$ și $g: (-3; 3] \to \mathbb{R}, g(x) = x - 1$.

a) Trasați graficele celor două funcții în același sistem de axe de coordonate.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

46. Se dau funcțiile $f: [-3; 2) \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 2$ și $g: [-2; 3] \to \mathbb{R}, g(x) = 2x + a$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(a; 3)$ se găsește pe graficele celor două funcții.
b) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

47. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$.

a) Trasați graficul funcției cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.
b) Determinați punctul de pe grafic de coordonate egale.
c) Arătați că, pentru oricare două numere întregi a și b, $\dfrac{f(a) - f(b)}{2} \in \mathbb{Z}$.

48. Fie funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$, unde $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \le \dfrac{2x+3}{5} \le 3\right\}$.

a) Determinați domeniul de definiție al funcției și apoi trasați graficul acesteia într-un sistem de axe de coordonate.

b) Arătați că, pentru oricare $x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 \neq x_2$, rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$.
c) Determinați punctul de pe grafic de coordonate egale.

49. Fie funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 6$, unde $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -4 < \frac{3x+1}{2} \leq 2\right\}$.

a) Determinați domeniul de definiție al funcției și apoi trasați graficul acesteia într-un sistem de axe de coordonate.

b) Arătați că, pentru oricare două numere întregi a și b din A, rezultă $\frac{f(a)-f(b)}{3} \in \mathbb{Z}$.

c) Determinați punctele de pe grafic care au coordonatele numere opuse.

50. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}x - 2$.

a) Trasați graficul funcției cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.
b) Calculați distanța de la originea axelor la graficul funcției.
c) Determinați numerele reale pentru care $f(x) + f(x + 1) \leq f(x - 2) + 4$.

51. Se consideră funcția $f: [-4; 5] \to \mathbb{R}, f(x) = (a - 3)x + 6 - 3a$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că graficul funcției trece prin originea axelor.

b) Trasați graficul funcției.

c) Determinați punctul de intersecție a graficului funcției f cu graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2$.

52. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul $M(2; 5)$ este punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $f(x) = ax - 1$ și $g(x) = -x + b$;
b) $f(x) = ax + a - 1$ și $g(x) = (b - 2)x + b$;
c) $f(x) = ax - (a - 1)$ și $g(x) = (b + 4)x + b$.

53. Stabiliți dacă există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(-3; -7)$ reprezintă intersecția graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în fiecare dintre cazurile:

a) $f(x) = (a - 1)x - 1$ și $g(x) = ax + 2$;
b) $f(x) = (a + 3)x + a$ și $g(x) = (a + 5)x + 5$;
c) $f(x) = (2a - 1)x + a$ și $g(x) = (3a - 2)x + 5$.

54. Determinați numerele reale a și b pentru care punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este $M(a + 1; 2b - 3)$, în fiecare dintre cazurile:

a) $f(x) = x + 5$ și $g(x) = 2x + 1$;
b) $f(x) = -2x + 3$ și $g(x) = -3x + 4$;
c) $f(x) = x + 7$ și $g(x) = -3x - 1$.

55. Determinați numerele reale m și n pentru care $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcții egale, în fiecare dintre cazurile:

a) $f(x) = -3x + 7$ și $g(x) = (2 - m)x + n + 4$;
b) $f(x) = -2x + 2n + 3$ și $g(x) = (3m + 4)x + 5$;
c) $f(x) = (m + 1)x + 2n + 1$ și $g(x) = (4m - 2)x + 3n - 1$.

56. Determinați valorile reale ale lui m și n pentru care reprezentările grafice ale funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au cel puțin două puncte distincte comune, în fiecare dintre cazurile:

a) $f(x) = 5x - 7$ și $g(x) = (2m + 1)x - (2n + 1)$;
b) $f(x) = (2m - 1)x + 3$ și $g(x) = 5x + 4n - 5$;
c) $f(x) = (3m + 2)x + 3n - 7$ și $g(x) = (4m + 3)x + 4n - 9$;
d) $f(x) = (2n + m)x + 2m + 3$ și $g(x) = (n - 1)x + (2m - 3n)$.

57. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

a) Reprezentați grafic funcția în sistemul de axe de coordonate xOy.
b) Determinați distanța de la punctul $P(2; 0)$ la graficul funcției date f.

58. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x - 4$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe de coordonate xOy.
b) Calculați distanța de la punctul O, originea axelor de coordonate, la dreapta ce reprezintă graficul funcției date.

59. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe de coordonate xOy.
b) Calculați distanța de la punctul $M(2; 0)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției date f.

60. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$.

a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe de coordonate xOy.
b) În sistemul de axe de coordonate xOy se consideră punctul $M(-4; 0)$. Calculați distanța de la punctul M la dreapta ce reprezintă graficul funcției date f.

61. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 6$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe de coordonate xOy.
b) În sistemul de coordonate xOy se consideră punctul $P(-2; 0)$. Determinați distanța de la punctul P la dreapta ce reprezintă graficul funcției date f.
c) Calculați sinusul unghiului format de garficul funcției date f cu axa Ox.

62. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - 4$.

a) Reprezentați grafic funcția f cu ajutorul intersecției graficului cu axele de coordonate ale sistemului xOy.
b) Dacă $G_f \cap Ox = \{A\}$ și $G_f \cap Oy = \{B\}$, iar punctul M este mijlocul segmentului AB, calculați lungimea segmentului OM, unde O este originea sistemului de axe xOy.
c) Calculați aria triunghiului AOB.

63. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -4x + 2$.

a) Reprezentați grafic funcția în sistemul de coordonate xOy.
b) Calculați tangenta unghiului format de graficul funcției f cu axa Ox.
c) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate Ox și Oy.

64. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția în sistemul de axe de coordonate xOy.
b) Determinați punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele egale.
c) Calculați sinusul unghiului format de graficul funcției f cu axa Ox.

65. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - 7$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe de coordonate xOy.
b) Determinați punctul de pe graficul funcției g care are coordonatele egale.
c) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

66. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 4$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - 6$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe de coordonate xOy.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
c) Calculați aria figurii cuprinse între graficele celor două funcții și axa Ox.

67. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x - 3$.

a) Determinați punctul de pe graficul lui f care are coordonatele egale.
b) Reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe de coordonate xOy.
c) Calculați aria triunghiului determinat de garficele celor două funcții și axa ordonatelor.

68. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 6$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe de coordonate xOy.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
c) Arătați că graficele celor două funcții sunt două drepte perpendiculare.

69. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe de coordonate xOy.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
c) Calculați aria suprafeței cuprinse între reprezentările grafice ale celor două funcții și axa Oy.

70. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 4$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - 6$.

a) Reprezentați grafic funcțiile date în același sistem de coordonate xOy.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții date.
c) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții f și g și axa absciselor.

PE Aprofundare și performanță ***

71. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.

a) Trasați graficul funcției.
b) Rezolvați ecuația $f(x + 2) - f(2x - 1) = f(x) + f(2)$.
c) Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(20)$.

72. Fie funcția $f: [-5; 5] \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$.

a) Trasați graficul funcției.
b) Rezolvați ecuația $f(2x + 1) + f(3x - 1) = f(x) + f(x + 2) + f(3)$.
c) Determinați punctele de pe grafic care au ordonata egală cu dublul abscisei.

73. Fie funcția $f: [-3; 6) \to \mathbb{R}, f(x) = mx - 2m, m \in \mathbb{N}$.

a) Determinați-l pe m, astfel încât punctul $A(m; 8) \in G_f$.
b) Pentru $m = 4$, reprezentați grafic funcția.
c) Rezolvați ecuația $|f(x)| = 12$, pentru $m = 4$.

74. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.

a) Determinați funcția, știind că punctele $A(-2; -8)$ și $B(2; 0)$ se găsesc pe graficul acesteia.

b) Reprezentați în același sistem de axe de coordonate graficele funcțiilor $f(x)$, $g(x)$ și $h(x)$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + 2)$ și $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x + 4)$. Ce puteți spune despre graficele celor trei funcții?

75. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(2x - 3)$.

a) Determinați funcția g și trasați în același sistem de axe de coordonate graficele celor două funcții.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

76. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a - 1)x + (b + 2)$.

a) Determinați funcția, știind că graficul ei conține punctele $A(1; 5)$ și $B(-2; -1)$.

b) Determinați funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(1 - x)$ și trasați în același sistem de axe graficele celor două funcții.

c) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

77. Se consideră punctele $A(4; 0)$ și $B(0; 4)$.

a) Determinați funcția liniară care are reprezentarea grafică segmentul AB.

b) Calculați distanța de la originea axelor la segmentul AB.

c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $M(a - 2; -2a - 1)$ este coliniar cu A și B.

78. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a + 2)x + 1$.

a) Determinați funcția, știind că punctul $A(-1; 2)$ se găsește pe graficul funcției.

b) Trasați graficul funcției.

c) Arătați că, pentru oricare $m \in \mathbb{R}$, $m[3 - f(m)] + 2 > 0$.

79. Într-un sistem de axe de coordonate se consideră punctele $A(3; 3)$, $B(-3; 0)$ și $C(0; -3)$.

a) Determinați funcțiile liniare care au ca grafice segmentele AB, AC și BC.

b) Aflați aria triunghiului ABC.

80. Se consideră punctele $A(0; 4)$, $B(3; 0)$ și $C(-2; 0)$.

a) Determinați funcțiile liniare care au ca grafice segmentele AB și AC.

b) Calculați aria și perimetrul triunghiului ABC.

c) Calculați sinusul unghiului BAC.

81. Se consideră punctele $A(0; -4)$, $B(3; 0)$ și $C(-3; 0)$.

a) Determinați funcțiile liniare care au ca grafice segmentele AB și AC.

b) Calculați aria și perimetrul triunghiului ABC.

c) Calculați valoarea sinusului unghiului BAC.

82. Verificați dacă reprezentările grafice ale funcțiilor $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt trei drepte concurente:

a) $f(x) = x - 3$, $g(x) = -2x + 3$ și $h(x) = 3x - 7$;

b) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -2x + 5$ și $h(x) = x - 1$;

c) $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = 2x - 3$ și $h(x) = -2x + 5$;

d) $f(x) = -3x + 1$, $g(x) = 3x + 7$ și $h(x) = 2x + 5$.

83. Demonstrați că reprezentările grafice ale următoarelor funcții $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două drepte perpendiculare:

a) $f(x) = x + 2$ și $g(x) = -x + 4$;

b) $f(x) = 3x - 1$ și $g(x) = \frac{-x+7}{3}$;

c) $f(x) = 5x - 2$ și $g(x) = \frac{-x+16}{5}$;

d) $f(x) = -2x + 3$ și $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Indicații: a) $G_f \cap G_g = M(1; 3)$. Se alege pe G_f și G_g câte un punct de coordonate numere întregi, spre exemplu $A(2; 4) \in G_f$ și $B(-1; 5) \in G_g$. Folosind formula distanței dintre două puncte, $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, se calculează $MA = \sqrt{2}$, $MB = 2\sqrt{2}$ și $AB = \sqrt{10}$. Cu reciproca teoremei lui Pitagora: $MA^2 + MB^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta AMB$ este dreptunghic cu $\sphericalangle AMB = 90°$, deci reprezentările grafice ale celor două funcții sunt două drepte perpendiculare.

Exemplu:

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât să fie îndeplinită relația $f(x + 3) = 2x + 5$. Determinați funcția.

Soluție: Notăm $x + 3 = t$; atunci $x = t - 3$ și, înlocuind în relație, obținem $f(t) = 2t - 1$, deci $f(x) = 2x - 1$.

84. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că $f(x + 2) = -2x + 1$, și trasați graficul acesteia, determinând coordonatele punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.

85. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația $f(x - 1) = 2x + 3$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați funcția și reprezentați-o grafic.

b) Rezolvați ecuația: $f(2x - 1) - f(x - 3) = f(x) + f(x + 1)$.

86. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și reprezentați grafic fiecare dintre cazurile următoare:

a) $f(x - 1) = 2x + 2$; b) $f(x - 2) = 3x - 1$; c) $f(x + 2) = 4x + 3$;
d) $f(x + 1) = -3x + 2$; e) $f(2x + 1) = 6x - 4$; f) $f(2x - 1) = 10x - 9$.

87. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinește condiția $f(2 - 5x) = 10x - f(7) - 12$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați funcția și reprezentați-o grafic.

b) Calculați tangenta unghiului format de axa Ox cu graficul funcției.

c) Rezolvați ecuația: $2f(2 - 3x) - 3f(2x + 1) = 4f(x) - 3f(3x - 2) + 11$.

d) Arătați că $m[7 - f(m)] + 5 > 0$, $(\forall)\ m \in \mathbb{R}$.

88. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică relația:

$$f(x - 3) = 2x - 4 - f(2), \text{ pentru } (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați funcția $f(x)$ și reprezentați-o grafic.

b) Arătați că, pentru orice a și $b \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(a) + f(b)}{3} > f\left(\dfrac{a + b}{3}\right)$.

89. Se consideră funcția liniară $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinește condiția:

$$2 \cdot f(1 - 2x) + 3 \cdot f(x) = -2x + 14, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați funcția $f(x)$ și reprezentați-o grafic.

b) Determinați punctele de pe grafic care au coordonatele egale.

90. Se consideră funcțiile liniare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile:

$3 \cdot f(2 - 3x) - 2 \cdot g(2x - 1) = -10x - 3$ și $f(2 - 3x) + 3 \cdot g(2x - 1) = -18x + 10$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați funcțiile f și g și reprezentați-le grafic în același sistem de axe de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

PE-PP Supermate ****

91. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2ax + b - 4$ și $g(x) = (a + 1)x + b$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați numerele reale a și b, știind că graficele celor două funcții trec prin punctul $A(2; 5)$.

b) Pentru $a = 3$ și $b = -3$, reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe de coordonate.

c) Dacă $G_f \cap Oy = \{B\}$ și $G_g \cap Oy = \{C\}$ (pentru $a = 3$ și $b = -3$), calculați distanța de la punctul C la dreapta AB, unde A este punctul comun celor două grafice.

92. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{a}{2-\sqrt{3}}x + \dfrac{b}{2+\sqrt{3}}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Știind că punctul $P(2+\sqrt{3}; 15)$ aparține graficului funcției, determinați punctele de pe grafic cu ambele coordonate raționale.

93. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x - 6$.

a) Reprezentați grafic funcția în sistemul de axe de coordonate xOy.

b) Calculați distanța de la punctul $P(0; 4)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției date f.

c) Determinați valorile numărului real m pentru care punctul $A(-2m, m^2 + 3m - 16)$ este situat pe graficul funcției f.

94. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe de coordonate xOy.

b) Determinați punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele egale.

c) Determinați numerele raționale a și b pentru care $f\left(a\sqrt{2} - 2b\right) = -3b\sqrt{2} + 4a$.

95. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 2$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe de coordonate xOy.

b) Dacă $P(0; -4)$ este un punct în sistemul de coordonate xOy, atunci calculați distanța de la punctul P la dreapta ce reprezintă graficul funcției f.

c) Determinați valoarea numărului real m, astfel încât punctul $M\left(-m\sqrt{2}; 5m\sqrt{2} - 2\right)$ să aparțină graficului funcției date f.

96. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 - 2\sqrt{3}\right)x + 3\sqrt{3}$.

a) Determinați valorile naturale ale lui a, pentru care $f(a) \geq 1 + \sqrt{3}$.

b) Determinați numerele raționale m și n pentru care punctul $M\left(-3m, 2n + 3n\sqrt{3} - 9\right)$ este situat pe graficul funcției date f.

TESTUL 1

Subiectul I

1. Fie $f: [-2; 5] \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 3$. Dacă punctul $A(1; 5) \in G_f$, atunci valoarea reală a lui a este … .

2. Dacă segmentul AB este reprezentarea grafică a funcției $f(x) = ax + b$, unde $A(-3; 9)$ și $B(4; -5)$, atunci valorile reale ale numerelor a și b sunt $a = \ldots$ și $b = \ldots$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 4$. Punctul de coordonate egale de pe graficul funcției este $A(\ldots; \ldots)$.

4. Coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 6$ cu axa absciselor sunt $(\ldots; \ldots)$.

5. Fie $f: [x_1; x_2] \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$. Știind că reprezentarea grafică a funcției este segmentul AB, cu $A(x_1; 4)$ și $B(x_2; -2)$, atunci intervalul $[x_1; x_2]$ este $[\ldots; \ldots]$.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a - 3)x + 8$. Valoarea reală a lui a pentru care punctul $A(2; 6) \in G_f$ este … .

Subiectul al II-lea

1. Fie funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$, unde $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -5 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 4\right\}$.

a) Determinați mulțimea A și reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției cu axa ordonatelor.

c) Calculați lungimea segmentului ce reprezintă graficul funcției.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinește condiția $f(x) = -2x + 5$.

a) Reprezentați grafic funcția cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.

b) Calculați aria triunghiului determinat de axele de coordonate și dreapta ce reprezintă graficul funcției.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 7$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(37)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcțiile $f: [-2; 3) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$ și $g: [-4; 4] \to \mathbb{R}, g(x) = x + 3$.

a) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

b) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

c) Aflați aria triunghiului determinat de axa ordonatelor și de dreptele ce reprezintă graficele celor două funcții.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x + 3)$.

a) Determinați legea de corespondență a funcției g.
b) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.
c) Calculați suma $S = f(-1) + f(-2) + \ldots + f(-25) + g(1) + g(2) + \ldots + g(26)$.

TESTUL 2

Subiectul I

1. Fie $f : \{-2, -1, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. $\operatorname{Im} f$ este $\{\ldots\}$.

2. Lungimea segmentului AB, ce reprezintă graficul funcției $f : [-4; 4] \to \mathbb{R}, f(x) = 2$, este de … cm.

3. Dacă punctul $M(2; -3)$ se găsește pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + b$, atunci intersecția graficului cu axa ordonatelor este punctul $A(\ldots; \ldots)$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2$. Tangenta unghiului format de axa absciselor cu dreapta ce reprezintă graficul funcției este egală cu … .

5. Se consideră punctele $A(-5; -3)$ și $B(5; 7)$. Dacă punctul C este simetricul punctului A față de axa ordonatelor, atunci lungimea segmentului BC este de … cm.

6. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (3a - 1)x + 6 - 2a$. Valoarea lui a pentru care graficul funcției trece prin originea axelor este egală cu … .

Subiectul al II-lea

1. Reprezentarea geometrică a graficului funcției $f(x) = ax - 5$ este segmentul AB, unde $A(-2; -9)$ și $B(3; y)$.

a) Determinați valoarea reală a lui y.
b) Reprezentați grafic funcția.
c) Determinați aria triunghiului determinat de axele de coordonate și de graficul funcției.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x - 5$.

a) Reprezentați grafic funcția.
b) Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția.
b) Rezolvați ecuația $f(x + 1) + f(x - 1) = f(x) + f(3)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcțiile $f : [-2; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$ și $g : (-3; 4) \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 3$.

a) Reprezentați grafic funcțiile, în același sistem de axe de coordonate.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

c) Aflați aria triunghiului determinat de axa ordonatelor și de reprezentările geometrice ale graficelor celor două funcții.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\left(\sqrt{2}-3\right)-\sqrt{2}$.

a) Arătați că punctul $M(1; -3)$ aparține graficului funcției.

b) Determinați numerele raționale a și b, astfel încât punctul $A\left(a;\ b+2b\sqrt{2}\right)$ să se găsească pe graficul funcției.

c) Rezolvați inecuația $f(x) \geq -3$.

TESTUL 3

Subiectul I

1. Se consideră funcția $f: \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$. $\operatorname{Im} f = \{\ldots\}$.

2. Fie $f: [-3; 5] \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 2$. Coordonatele punctelor A și B, care sunt capetele segmentului ce reprezintă graficul funcției, sunt $A(\ldots; \ldots)$ și $B(\ldots; \ldots)$.

3. Fie funcția $f: (-6; 5) \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$. Punctul de pe graficul funcției care are coordonatele numere opuse este $A(\ldots; \ldots)$.

4. Funcția liniară al cărei grafic este segmentul AB, unde $A(-2; 4)$ și $B(3; -1)$, este ... .

5. Dacă punctul $A(2; -5)$ se găsește pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2mx + 3$, atunci valoarea reală a lui m este egală cu ... .

6. Fie funcția $f: [-4; 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x - 2$. Punctul care reprezintă intersecția graficului funcției cu axa absciselor are coordonatele $(\ldots; \ldots)$.

Subiectul al II-lea

1. Fie $f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 3$, unde $A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -8 \leq \frac{3x-4}{2} \leq 7\right\}$.

a) Determinați domeniul de definiție al funcției și apoi reprezentați grafic funcția.

b) Calculați produsul $f(-4) \cdot f(-3) \cdot f(-2) \cdot \ldots \cdot f(6)$.

c) Calculați măsura unghiului format de axa ordonatelor cu reprezentarea grafică a funcției.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 6$.

a) Reprezentați grafic funcția cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.

b) Calculați distanța de la punctul $M(-3; 0)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției.

3. Se consideră funcțiile $f: [-2; 4] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$ și $g: [-1; 6] \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x + 1$.

a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 5$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Calculați suma $S = f(-5) + f(-4) + f(-3) + \ldots + f(10)$.

c) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinește condiția $f(2x - 1) = -4x - f(3) + 4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați funcția.

b) Reprezentați grafic funcția astfel obținută.

c) Rezolvați ecuația $3f(3x - 2) - 2f(1 - 2x) = 4f(x) - 5f(3 - 2x) - 2$.

TESTUL 4

Subiectul I

1. Fie funcția $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 7$. Abscisa punctului de pe grafic care are ordonata egală cu -3 este egală cu ... .

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 5$. Valoarea calculului $f(1) + f(-1) + 2f(1) \cdot f(-1)$ este ... .

3. Fie funcția $f: [-7; 5) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 9$. Punctul de intersecție a graficului funcției cu axa absciselor are coordonatele $(\ldots; \ldots)$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$. Valoarea lui a pentru care este îndeplinită condiția $f(a) + f(a + 1) + f(a - 4) = 0$ este ... .

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 14$. Soluția ecuației $f(x) = f(3)$ este ... .

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 7$. Numerele naturale nenule soluții ale inecuației $f(x) < 5$ sunt $\{\ldots\}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 5$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Calculați media geometrică a numerelor $a = f(\sqrt{7})$ și $b = f(-\sqrt{7})$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x - 3}{5}$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Determinați soluția reală a ecuației $f(x) = 6 + x + f(9)$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 9$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Rezolvați inecuația $f(x) + f(1) \geq f(2x + 1)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: [-5; 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a-5)x + 3$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(a; -3) \in G_f$.

b) Pentru $a = 3$, reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

c) Calculați distanța de la punctul $M(0; -2)$ la graficul funcției.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + b$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + 5$.

a) Determinați numerele reale a și b, știind că $A(-2; 3)$ este punctul de intersecție a celor două grafice.

b) Reprezentați grafic funcțiile în același sistem de axe de coordonate.

c) Calculați numărul $n = f(1) + f(2) + \ldots + f(25) + g(1) + g(2) + \ldots + g(30)$.

PE

Nume ______________________________ Clasa ________

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Fie funcția $f: \{-3, -2, -1, 0, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Im f este $\{$.........................$\}$.

(0,5p) **2.** Fie funcția $f: [-2; 5) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$. Dacă punctul $A(1; y) \in G_f$, atunci $y =$ ....

(0,5p) **3.** Fie funcția $f: [-3; 6] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$. Dacă punctul $A(x; -5) \in G_f$, atunci $x =$ .... .

(0,5p) **4.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}x + 3$. Ordonata punctului de intersecție a graficului funcției cu axa Oy este egală cu ....

(0,5p) **5.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 1$. Dacă punctul $M(-1; -1) \in G_f$, atunci $a =$ ....

(0,5p) **6.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3}x + 1$. Măsura unghiului format de axa absciselor cu graficul funcției este egală cu ....°.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă se dau punctele $A(2; 1)$ și $B(5; 5)$, atunci lungimea segmentului AB este de:

A. 4 B. 6 C. 5 D. 3,5

(0,5p) **2.** Fie $f: [-3; 4] \to \mathbb{R}, f(x) = ax - 2$. Dacă punctul $A(-3; -5) \in G_f$ și punctul $B(4; y) \in$ $\in G_f$, atunci y este egal cu:

A. 3 B. 1 C. 2 D. –2

(0,5p) **3.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$. Aria triunghiului determinat de graficul funcției cu axele de coordonate este egală cu:

A. $\frac{4}{3}(u^2)$ B. $\frac{2}{3}(u^2)$ C. $\frac{1}{6}(u^2)$ D. $3\ (u^2)$

(0,5p) **4.** Funcția liniară al cărei grafic este determinat de punctele $A(1; -2)$ și $B(-1; 6)$ are forma:

A. $f(x) = -4x + 2$ B. $f(x) = 3x - 6$ C. $f(x) = 2x - 4$ D. $f(x) = x - 3$

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Rezolvați ecuația $f(x + 1) + f(x - 2) = f(x) + 5$.

(1p) **2.** Determinați valoarea reală a lui m pentru care punctele $A(1; 3)$, $B(-1; 7)$ și $C(m + 1; 2m - 5)$ sunt coliniare.

(1p) **3.** Determinați funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și reprezentați-o grafic, știind că îndeplinește condiția $f(x - 1) = 3x - 8$, pentru orice x real.

(1p) **4.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Arătați că suma $S = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2013)$ este divizibilă cu 12.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

PE-PP **3. Elemente de statistică**

Populația statistică este o mulțime definită de obiecte de aceeași natură. Acestea formează obiectul unei analize statistice.

Numărul tuturor indivizilor unei populații se numește **efectiv total**.

Caracteristica populației este trăsătura comună a tuturor indivizilor populației.

Elementele unei populații statistice se numesc **unități statistice** sau **indici**.

Se numește **frecvență absolută** a unei valori x a caracteristicii numărul de unități ale populației corespunzătoare acelei valori.

Media aritmetică simplă a n valori este dată de relația: $M_a = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$.

Media aritmetică ponderată a x_i de ponderi p_i, unde $1 \le i \le n$, este dată de relația:

$$M_p = \frac{X_1 \cdot p_1 + X_2 \cdot p_2 + ... + X_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}.$$

Mediana este acea valoare care împarte seria (ordonată crescător sau descrescător) în două părți egale.

Metoda de calcul al medianei:

1. se ordonează crescător sau descrescător elementele seriei;
2. se calculează valoarea mediană într-una dintre următoarele situații:
   – dacă seria are un număr impar de termeni, atunci $M_e = X_{\frac{n+1}{2}}$;
   – dacă seria are un număr par de termeni, atunci mediana este semisuma termenilor centrali de rang $\dfrac{n}{2}$ și $\dfrac{n}{2} + 1$, adică $M_e = \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

Exemplu: Fie seria de date $\{16, 25, 14, 33, 36, 43, 12\}$. Ordonăm crescător: $\{12, 14, 16, 25, 33, 36, 43\}$. $M_e = 25$, pentru că 25 se află pe locul $\dfrac{7+1}{2} = 4$. Pentru seria $\{16, 25, 14, 33, 36, 43, 12, 57\}$, ordonată crescător $\{12, 14, 16, 25, 33, 36, 43, 57\}$, $M_e = \dfrac{25+33}{2} = 29$.

Modulul (dominanta) reprezintă valoarea caracteristicii care are frecvența cea mai mare. Un set de date poate conține o singură valoare modală, mai multe valori modale (frecvența cea mai mare corespunde la două sau mai multe variabile) sau nu conține valori modale (toate variabilele au aceeași valoare de apariție).

Principalii **indicatori ai tendinței centrale** sunt **valoarea medie**, **valoarea mediană** și **valoarea dominantă** (D) sau modulul.

Exemplu: Notele obținute de șapte elevi la teza la matematică sunt 9, 5, 7, 6, 8, 10, 9. Calculați principalii indicatori ai tendinței centrale.

Soluție: Seria ordonată crescător este $\{5, 6, 7, 8, 9, 9, 10\}$.

$M_a = \dfrac{5+6+7+8+9+9+10}{7} = 7{,}71$.

$M_e = 8$ (se observă că trei elevi au luat note mai mici decât 8 și trei elevi au luat note mai mari decât 8).

$D = 9$ (pentru că apare de două ori).

Reprezentarea grafică a unei serii statistice se realizează prin diagrame.

Amplitudinea unei caracteristici este $A = X_{max} - X_{min}$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Notele obținute de elevii unei clase la o lucrare de verificare la matematică sunt trecute în tabelul următor:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de note	3	4	6	6	3	2	1

Calculați media clasei la această lucrare.

2. Calculați media aritmetică ponderată a numerelor 1, 2, 3, 4 și 5 cu ponderile 1, 2, 3, 4 și, respectiv, 5.

3. Șase muncitori au avut într-o lună următoarele venituri brute: 2160, 1890, 2200, 2250, 3150, 2600. Determinați salariul mediu pe muncitor în acea lună.

4. Măsurându-se greutatea corporală a unui grup de șapte elevi, s-au obținut următoarele date în kilograme: 66, 56, 63, 53, 57, 60, 65.

a) Calculați greutatea medie a unui elev din grupul considerat.

b) Calculați amplitudinea valorilor măsurate.

c) Calculați mediana valorilor înregistrate prin aceste măsurători.

5. Măsurându-se înălțimea unui grup de opt fete, s-au înregistrat următoarele valori în centimetri: 164, 162, 168, 170, 158, 156, 155, 163.

a) Calculați înălțimea medie a unei fete din acest grup.

b) Calculați amplitudinea valorilor măsurate.

c) Calculați mediana valorilor înregistrate prin aceste măsurători.

6. În tabelul următor sunt redate notele obținute de elevii unei clase la o lucrare de verificare la fizică.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de note	2	2	4	5	4	4	4

a) Stabiliți câți elevi au note mai mici decât 6 și calculați ce procent reprezintă din total.

b) Câți elevi au note între 6 și 8 (procent)?

c) Câți elevi au note mai mari sau egale cu 8 (procent)?

d) Reprezentați aceste date printr-o diagramă sub forma unui disc, cu rezultatele subpunctelor a), b), c) indicate prin sectoare de cerc.

e) Calculați media clasei la această lucrare.

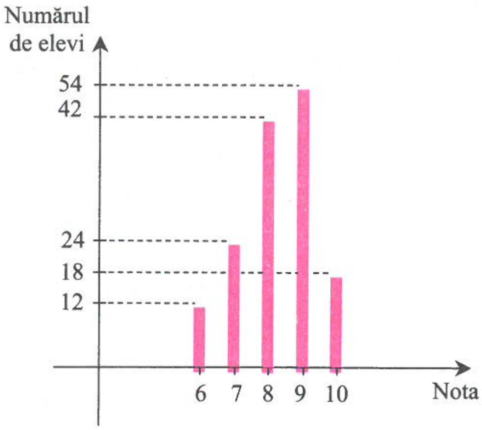
f) Determinați mediana valorilor înregistrate.

7. Distribuția familiilor într-un bloc după numărul copiilor, la un moment dat, este reprezentată în tabelul următor:

Numărul de copii	0	1	2	3	4	5	6
Numărul de familii	4	15	8	6	5	1	1

Calculați media, mediana și dominanta.

8. Diagrama următoare evidențiază notele obținute de elevii unei școli gimnaziale la matematică în urma unui test.



a) Treceți datele oferite de diagramă într-un tabel în care să fie trecute nota și frecvența.
b) Calculați media la acest test.
c) Care este dominanta?
d) Care este mediana?

9. În tabelul următor sunt trecute temperaturile înregistrate la ora prânzului, în fiecare zi a unei săptămâni din luna iunie.

Ziua	Temperatura (°C)
Luni	17
Marți	20
Miercuri	21
Joi	23
Vineri	26
Sâmbătă	28
Duminică	26

a) Calculați temperatura medie a săptămânii respective.
b) Calculați mediana, dominanta și amplitudinea valorilor cuprinse în tabel.

10. Mediile obținute de elevii unei clase la matematică pe semestrul I sunt următoarele: 5, 6, 6, 7, 8, 8, 5, 7, 7, 9, 9, 10, 6, 5, 8, 8, 9, 10, 7, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 6, 9, 8, 10.
a) Treceți mediile într-un tabel în care să apară media și frecvența apariției ei.
b) Calculați media clasei.
c) Calculați mediana și dominanta reieșite din tabel.

PE Aplicare și exersare **

11. În tabelul următor sunt trecute mediile elevilor unei clase, la matematică, pe cele două semestre ale anului.

Media	5	6	7	8	9	10
Numărul mediilor pe semestrul I	3	6	6	8	4	3
Numărul mediilor pe semestrul II	2	7	4	8	6	3

a) Calculați media clasei pe fiecare semestru.

b) Stabiliți mediana pe fiecare semestru și comparați-le între ele.
c) Stabiliți dominanta pe fiecare semestru și comparați-le între ele.

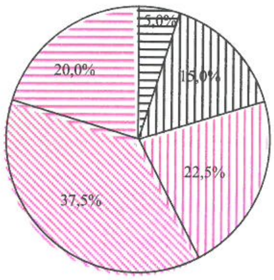
12. Media la chimie a unei clase pe semestrul întâi a fost 7, iar pe al doilea semestru a fost 8. Creșterea medie s-a datorat faptului că patru elevi au urcat cu câte un punct, cinci elevi cu câte două puncte, patru elevi cu câte trei puncte și numai unul a scăzut cu un punct, iar ceilalți și-au păstrat media de pe primul semestrul. Câți elevi sunt în clasă?

13. În tabelul următor sunt trecute retribuțiile pe luna martie ale salariaților unei societăți comerciale.

Retribuția	Numărul de salariați
2430	7
2706	10
3240	9
3600	18
4200	16
4320	10

a) Care este salariul mediu pe luna respectivă?
b) Care este mediana și care este dominanta ce reies din tabel?
c) Realizați o diagramă care să reflecte situația din tabel.

14. Structura unui eșantion de 120 de copii după nivelul maxim atins la un joc pe calculator este redată în următoarea diagramă:



a) Alcătuiți un tabel corespunzător datelor din diagramă.
b) Realizați într-o reprezentare grafică poligonul frecvențelor.

15. În urma înregistrării de date privind timpul petrecut la televizor, obținute pe un eșantion de 400 de persoane, s-a realizat următorul tabel:

Timpul (minute)	30	31-60	61-90	91-120	121-180	181-240
Numărul de persoane	25	50	80	160	50	35

a) Conform datelor din tabel, câte minute stă o persoană la televizor, în medie, pe zi?
b) Realizați o diagramă procentuală, circulară, pentru datele din tabel.
c) Realizați într-o reprezentare grafică poligonul frecvențelor.

16. În urma înregistrării de date privind vârsta copilului din familie, pe un eșantion de 30 de familii tinere, s-a realizat următorul tabel:

Vârsta copilului (v)	$2 < v < 4$	$4 < v < 6$	$6 < v < 8$	$8 < v < 10$
Numărul de familii	6	3	12	9

a) Calculați media de vârstă a copiilor din aceste familii.
b) Realizați o diagramă procentuală conformă cu datele din tabel.
c) Construiți poligonul frecvențelor pentru datele din tabel.

17. La examenul de evaluare, cei 180 de elevi absolvenți dintr-o școală au obținut la limba română rezultatele din tabelul de mai jos.

Nota	4-4,99	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9-10
Numărul de note	8	12	34	20	65	41

a) Calculați media notelor la examenul de limba română.
b) Realizați o diagramă procentuală, circulară, conformă cu datele din tabel.
c) Construiți poligonul frecvențelor pentru datele din tabel.

18. În tabelul următor sunt trecute rezultatele obținute într-o cursă de 100 m de către cei 50 de participanți.

Timpul (*t*) în secunde	Numărul de alergători	Timpul (s)	Numărul de alergători
$10{,}5 < t < 10{,}7$	1	$11{,}5 < t < 11{,}7$	9
$10{,}7 < t < 10{,}9$	1	$11{,}7 < t < 11{,}9$	7
$10{,}9 < t < 11{,}1$	2	$11{,}9 < t < 12{,}1$	5
$11{,}1 < t < 11{,}3$	6	$12{,}1 < t < 12{,}3$	6
$11{,}3 < t < 11{,}5$	9	$12{,}3 < t < 12{,}5$	4

a) Realizați o diagramă procentuală, circulară, pentru datele din tabel.
b) Stabiliți timpul mediu realizat pe 100 m de către cei 50 de alergători.
c) Construiți poligonul frecvențelor pentru datele din tabel.

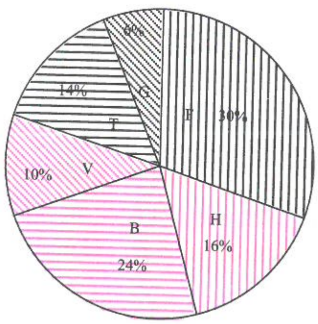
19. În tabelul următor este prezentată repartiția după înălțime a unui grup de 50 de persoane.

Clasele de valori (m)	Numărul de persoane
1,60-1,65	3
1,66-1,70	8
1,71-1,75	15
1,76-1,80	11
1,81-1,85	6
1,86-1,90	7

a) Calculați înălțimea medie a acestui grup.
b) Precizați mediana și dominanta.
c) Realizați o diagramă procentuală, circulară, conform datelor din tabel.

20. Rezultatele unui sondaj realizat pe un eșantion de 150 de copii, în privința sportului pe care preferă să-l practice, sunt trecute în diagrama de mai jos.

F – fotbal
H – handbal
B – baschet
V – volei
T – tenis
G – gimnastică

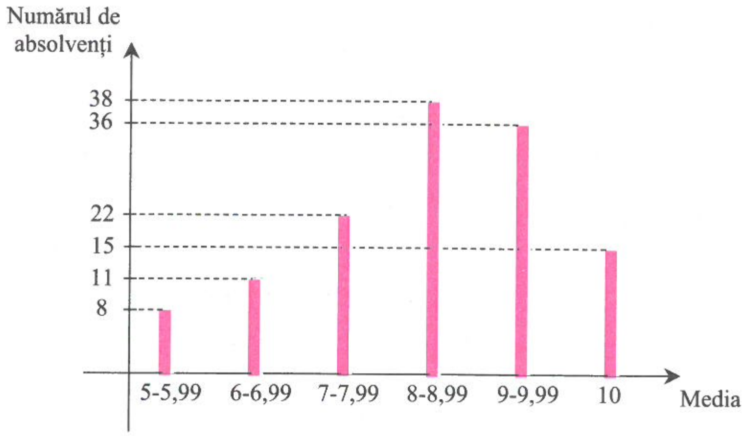


a) Realizați un tabel în care să fie cuprinse datele numerice privitoare la grupele de copii care practică un anumit sport.

b) Realizați o diagramă cu batoane care să redea situația din tabel.

c) Construiți poligonul frecvențelor pentru datele din tabel.

21. Situația mediilor generale ale unor absolvenți de clasa a VIII-a dintr-o unitate școlară este redată în următoarea diagramă:



a) Realizați un tabel în care să fie redată situația din diagramă.

b) Care este media pe școală la această serie de elevi?

c) Ce procent din numărul absolvenților reprezintă elevii cu media generală peste 8?

d) Calculați mediana și dominanta.

22. În tabelul următor sunt trecute încasările zilnice ale unui supermarket pe parcursul unei săptămâni:

Ziua	Suma încasată (lei)
Luni	14000
Marți	28000
Miercuri	21000
Joi	32000
Vineri	31000
Sâmbătă	35000
Duminică	42000

a) Realizați o diagramă cu batoane care să redea situația din tabel.

b) Care este valoarea medie a încasărilor pe această săptămână?

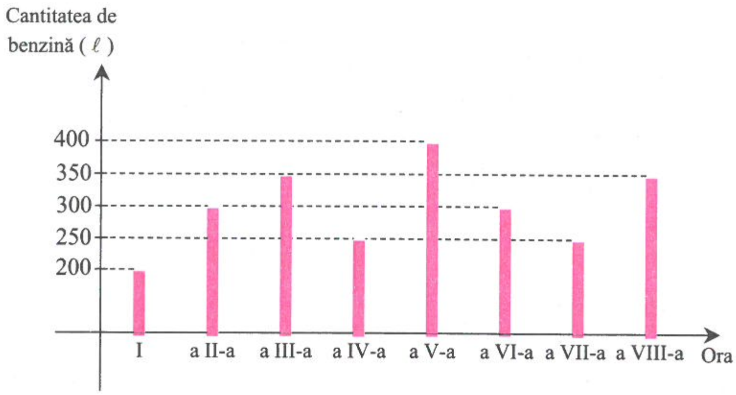
c) Construiți poligonul frecvențelor pentru datele din tabel.

d) Determinați mediana și amplitudinea.

23. În graficul următor sunt prezentate vânzările de benzină pe parcursul a opt ore dintr-o zi.

a) Care este media vânzărilor din această zi?

b) Determinați mediana, dominanta și amplitudinea.



24. În tabelul următor este înregistrat numărul de participanți la concursurile școlare organizate într-o școală în ultimii cinci ani calendaristici.

Anul	Numărul de participanți
2015	320
2016	300
2017	280
2018	330
2019	290

a) Conform datelor din tabel, calculați numărul mediu de participanți la concursuri școlare în cei cinci ani.

b) Realizați o diagramă cu batoane care să redea situația din tabel.

c) Realizați o diagramă procentuală, circulară, cu datele din tabel.

d) Calculați mediana și amplitudinea.

25. În tabelul de mai jos sunt trecute datele referitoare la vârsta și numărul participanților la un maraton.

Vârsta (ani)	10	11	12	13	14	15
Numărul de participanți	18	15	27	20	15	25

a) Realizați o diagramă cu batoane care să redea datele din tabel.

b) Calculați mediana, dominanta și amplitudinea.

c) Realizați o diagramă procentuală, circulară, conform datelor din tabel.

Capitolul III
Teme pentru recapitularea finală în vederea Evaluării Naționale

PE-PP 1. Numere naturale. Puteri cu exponent număr natural. Divizibilitate

1. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că este îndeplinită condiția:

$$\overline{ab} + 5a = 3(a + b + c).$$

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că este îndeplinită condiția:

$$\overline{abc} - \overline{ab} = 13c.$$

3. Determinați numerele naturale a și b, știind că numărul a este prim și $a + 6b = 56$.

4. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, știind că:

$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 444.$$

5. Determinați numărul natural de trei cifre $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că:

$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}.$$

6. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, cu $a > b > c$, știind că este îndeplinită condiția $\overline{abc} - \overline{bc} = 40(b + c + 5)$.

7. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, scris în baza 10, cu $a \neq b$, știind că:

$$\overline{ab} - \overline{ba} = a(b - 1).$$

8. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care are loc egalitatea:

$$\overline{abc} = 3\overline{cba} + a + b + c.$$

9. Determinați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$, știind că sunt divizibile cu 5 și suma cifrelor lor este egală cu 20.

10. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că $\overline{ba} + 5(2a + 3b) = 202$.

11. Calculați suma numerelor naturale $\overline{ab}$ pentru care este îndeplinită condiția:

$$\overline{ab} = 2a + 5b.$$

12. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$, $a \neq b$, care îndeplinesc condiția $\overline{ab} + \overline{ba} = 66$.

13. Arătați că $37 \mid A$, unde $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

14. Arătați că numărul $a = 2 \cdot 3^{12n+5} + 4 \cdot 3^{12n+4} - 14 \cdot 3^{12n+3}$ este divizibil cu 48, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Arătați că numărul $a = 3^{2n+2} \cdot 2^{n+3} + 3^{2n+1} \cdot 2^{n+4} - 9^n \cdot 2^{n+5}$ este divizibil cu 88, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Arătați că numărul $a = 4 \cdot 5^{6n+4} + 6 \cdot 5^{6n+6} - 2 \cdot 5^{6n+5}$ este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Arătați că $11 \mid A$, unde $A = 8^{n+1} \cdot 5^{3n} + 2^{3n+2} \cdot 125^n - 4^n \cdot 5^{2n} \cdot 10^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Arătați că numărul $A = 2^{3n+2} \cdot 25^{n+1} - 8^{n+1} \cdot 5^{2n+1} - 3 \cdot 4^n \cdot 5^{n+1} \cdot 10^n$ este divizibil cu 9, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Fie $a = 4^{2n+3} + 3 \cdot 16^{n+1} + 36 \cdot 4^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că numărul a este pătrat perfect.

20. Arătați că $13 \mid a$, unde $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{48}$.

21. Arătați că $10 \mid a$, unde $a = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{64}$.

22. Demonstrați că numărul $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2011}$ este divizibil cu 15.

23. Arătați că $31 \mid a$, unde $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2019}$.

24. Arătați că numărul $a = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2015}$ este divizibil cu 10.

25. Determinați elementele mulțimii A în fiecare dintre cazurile:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 \mid 12\}$; b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \mid 15\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 \mid 27\}$; d) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 5 \mid 16\}$.

26. Determinați valorile naturale ale lui x pentru care:

a) $x + 1 \mid x + 6$; b) $x + 2 \mid 2x + 29$; c) $2x - 1 \mid 4x + 19$;

d) $2x + 1 \mid 7x + 23$; e) $2x + 5 \mid 7x + 29$; f) $3x + 4 \mid 5x + 17$.

27. Arătați că fracțiile următoare sunt ireductibile, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{3n+11}{4n+15}, \frac{6n+13}{4n+9}, \frac{2n+5}{3n+8}, \frac{4n+9}{5n+11}, \frac{3n+4}{5n+7}, \frac{2n+3}{3n+4}.$$

28. Determinați mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 48 \text{ și } x \mid 32\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 \mid x \text{ și } 14 \mid x, \text{ iar } x < 300\}$ și $C = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

29. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \mid 15\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \mid 18\}$. Determinați $\text{card}(A \cap B)$.

30. Determinați elementele mulțimii A în fiecare dintre situațiile următoare:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{21}{2x+1} \in \mathbb{N}\right\}$; b) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{18}{2x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{7x+9}{2x-1} \in \mathbb{N}\right\}$; d) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{5x+13}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

31. Determinați perechile de numere naturale (a, b) pentru care:

a) $(a; b) = 12$ și $a \cdot b = 2160$; b) $(a; b) = 15$ și $a \cdot b = 3150$;

c) $(a; b) = 15$ și $a + b = 120$; d) $(a; b) = 18$ și $[a; b] = 270$.

32. Aflați cel mai mic număr natural nenul care împărțit la 20, 24 și 28 dă, de fiecare dată, restul 12.

33. Aflați cel mai mic număr natural nenul care împărțit la 12 dă restul 11, împărțit la 16 dă restul 15 și împărțit la 18 dă restul 17.

34. Dacă se numără creioanele dintr-o cutie grupându-le câte 10 sau câte 12 sau câte 15, se observă că rămân de fiecare dată 3 creioane negrupate.

a) În cutie pot fi 63 de creioane?

b) Care este numărul de creioane mai mare decât 150 și mai mic decât 200 care îndeplinește condițiile problemei?

35. Elevii unei şcoli s-au aliniat pe terenul de sport câte 7 şi 5 elevi au rămas nealiniaţi. Când s-au aliniat câte 10, au rămas 8 elevi nealiniaţi, iar când au încercat să se alinieze pe rânduri de câte 15, au rămas 13 elevi nealiniaţi.

a) Care este numărul minim de elevi ce pot fi în şcoală?

b) Dacă numărul elevilor este cuprins între 400 şi 450, atunci care este numărul elevilor din şcoală?

36. Pe un teren de sport sunt mai puţin de 220 de elevi. Dacă aceştia se aşază în coloane de câte 8, rămân pe margine 4 elevi, dacă se aşază în coloane de câte 9, rămân pe margine 5 elevi, iar dacă se dispun în coloane de câte 12, rămân pe margine 8 elevi. Ştiind că toţi elevii se pot aşeza în coloane de câte 5, fără a rămâne vreun elev pe margine, aflaţi câţi elevi sunt pe terenul de sport.

37. Elevii de gimnaziu dintr-o şcoală au organizat concursuri sportive de baschet, volei şi handbal. Numărul elevilor era cuprins între 620 şi 640. Dacă s-ar fi format numai echipe de baschet (câte cinci elevi într-o echipă), ar fi rămas doi elevi necuprinşi în echipe. Dacă s-ar fi format numai echipe de volei (câte şase elevi într-o echipă), ar fi rămas trei elevi pe dinafară şi dacă s-ar fi format numai echipe de handbal (câte şapte elevi în echipă), ar fi rămas patru elevi necuprinşi într-o echipă. Aflaţi numărul echipelor de baschet care se puteau forma.

38. Numerele naturale 1905 şi 445 împărţite prin acelaşi număr natural nenul n dau resturile 15 şi, respectiv, 13. Determinaţi valorile lui n.

39. Într-o grădiniţă, pentru cadourile de Crăciun ale copiilor s-au cumpărat 731 de pachete de biscuiţi şi 835 de ciocolate. Când au fost împărţite în mod egal la toţi copiii din grădiniţă, au rămas 11 pachete de biscuiţi şi 19 ciocolate. Care este cel mai mare număr posibil de copii din grădiniţă?

40. a) Arătaţi că produsul a două numere naturale consecutive se divide cu 2.

b) Arătaţi că produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 6.

41. Arătaţi că numărul $a = n^2 + n + 6$ este număr par.

42. Arătaţi că suma multiplilor naturali de două cifre ai lui 12 este un număr divizibil cu 16.

43. Determinaţi numerele prime a, b şi c care îndeplinesc condiţia:

a) $a + 4b + 2c = 24$; b) $a + 6b + 12c = 117$.

44. Aflaţi numerele naturale x şi y, ştiind că:

a) $(x + 2)(x + 3) = 56$; b) $(x + 4)(y + 6) = 96$;

c) $(x + 2)(x + 3) = 18(x + 2)$; d) $4x + 9y = 84$.

45. Calculaţi suma tuturor numerelor naturale de forma $\overline{abc}$ care verifică egalitatea:

$$3(\overline{ab} + c) = 4(\overline{ab} - c).$$

46. Determinaţi trei numere naturale, ştiind că dacă se calculează mediile aritmetice a câte două dintre ele se obţin valorile 36, 48 şi 54.

PE-PP 2. Rapoarte. Proporţii. Proporţionalitate

1. a) Dacă $\frac{x}{3} = \frac{4}{y}$, calculaţi valoarea numărului $a = 5xy$.

b) Dacă $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, calculaţi valoarea raportului $\frac{2x - y}{5x - 3y}$.

c) Dacă $\frac{5x}{3y} = \frac{10}{9}$, calculaţi valoarea raportului $\frac{5x - 3y}{2x + y}$.

2. a) Știind că $\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$ și $2a-b=24$, aflați valorile naturale ale numerelor a și b.

b) Știind că $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$ și $3a+2b=133$, aflați valorile naturale ale numerelor a și b.

3. Determinați termenul necunoscut din proporțiile:

a) $\frac{x}{0,8}=\frac{0,25}{0,4}$; b) $\frac{x}{2}=\frac{0,125}{0,25}$; c) $\frac{x+1}{12}=\frac{x+8}{15}$;

d) $\frac{x+2}{3}=\frac{x+5}{4}$; e) $\frac{x+1}{2^2\cdot 3}=\frac{3+3^2+3^3}{2^3+5}$; f) $\frac{3^2\cdot 2+2}{2^2\cdot 5}=\frac{x+3}{5^0+5^2}$.

4. Raportul dintre lățimea și lungimea unui dreptunghi este de $\frac{2}{3}$, iar perimetrul său este de 90 cm. Calculați aria dreptunghiului.

5. Raportul dintre vârsta fiului și vârsta tatălui este de $\frac{2}{7}$. În urmă cu 5 ani, tatăl era de 6 ori mai în vârstă decât fiul său. Ce vârstă are fiecare?

6. Se consideră două numere raționale pozitive a și b, care îndeplinesc condiția $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$.

a) Cât la sută din numărul b reprezintă numărul a?

b) Știind că $3a+2b=160$, determinați valorile numerelor a și b.

7. Determinați numerele raționale pozitive a, b, c, știind că sunt direct proporționale cu numerele 5, 6 și 10 și că $5a+2b-3c=84$.

8. O sumă de bani a fost dată ca premiu la trei elevi, x, y, z, direct proporțional cu numerele 2, 3 și, respectiv, 5. Altă dată, aceeași sumă a fost dată ca premiu acelorași elevi, x, y, z, în părți invers proporționale cu 2, 3 și, respectiv, 5. S-a constatat că, după cele două premieri, al treilea elev a încasat cu 132 lei mai mult decât al doilea elev. Calculați suma totală de bani care a fost oferită în cadrul celor două premieri.

9. Determinați trei numere naturale care au media aritmetică egală cu 48, știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 4, 5 și, respectiv, 7.

10. Determinați trei numere naturale care au media aritmetică egală cu 75, iar mediile aritmetice a câte două dintre ele sunt proporționale cu 8, 12 și, respectiv, 10.

11. Se știe că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ și că $\frac{\mathcal{P}_{\Delta ABC}}{\mathcal{P}_{\Delta A'B'C'}}=\frac{5}{7}$, iar laturile triunghiului ABC sunt $AB=15$ cm, $AC=20$ cm și $BC=25$ cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$.

12. Se știe că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, iar raportul de asemănare este $\frac{AB}{A'B'}=\frac{3}{5}$. Știind că $AB=18$ cm, $AC=24$ cm și $B'C'=50$ cm, calculați perimetrele celor două triunghiuri.

13. Aflați numerele raționale pozitive a, b și c, pentru care $6a=8b=12c$ și $4a-5b+6c=91$.

14. Determinați numerele raționale pozitive a, b, c, știind că sunt invers proporționale cu numerele 4, 6 și 9 și că $2a+3b-4c=80$.

15. Trei muncitori au primit pentru o lucrare 9000 lei. Știind că sumele primite de muncitori sunt direct proporționale cu numărul de zile lucrate, 8, 12 și, respectiv, 16, aflați cât a primit fiecare muncitor pentru activitatea depusă.

16. Trei muncitori au primit pentru o lucrare 6300 lei. Știind că sumele primite de muncitori sunt invers proporționale cu numerele 3, 4 și 6, aflați cât a primit fiecare muncitor pentru activitatea depusă.

17. 14 muncitori termină o lucrare în 10 ore. În câte ore ar termina aceeași lucrare 5 muncitori?

18. 12 robinete cu același debit umplu un rezervor în 7 ore. În câte ore ar umple bazinul 14 robinete cu același debit?

19. Un automobil, mergând cu o viteză constantă de 75 km/h, parcurge un drum în 6 ore. În câte ore ar parcurge același drum, dacă ar merge cu o viteză constantă de 90 km/h?

20. 8 camioane transportă o cantitate de nisip făcând câte 12 curse pe zi. Câte camioane sunt necesare pentru a transporta aceeași cantitate de nisip, dacă fiecare camion face câte 16 curse pe zi?

21. O brutărie dispune de o anumită rezervă de făină, care îi ajunge pentru 36 de zile dacă folosește zilnic câte 100 kg. Cât timp i-ar ajunge rezerva de făină dacă ar folosi zilnic câte 120 kg?

22. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că numerele $\overline{abab}$ și $\overline{baba}$ sunt proporționale cu 2 și 9.

PE-PP 3. Procente

1. După ce un turist parcurge 36% din lungimea unui traseu, observă că mai are de parcurs 240 km. Care este lungimea traseului?

2. După ce a fost redus cu 5%, un obiect costă 380 lei. Care a fost prețul inițial al obiectului?

3. După o scumpire de 10%, prețul unui obiect este de 385 lei. Care a fost prețul inițial?

4. Diferența a două numere este 438. Aflați numerele, știind că 2,25% din primul număr este egal cu 8,(3)% din al doilea număr.

5. Prețul unui atlas geografic era de 120 lei. După două reduceri de preț, atlasul costă 89,76 lei. Știind că prima reducere a fost de 15%, aflați cu ce procent s-a redus a doua oară.

6. Un muncitor a încasat un bonus la salariu egal cu 30% din salariul său. Știind că bonusul și salariul fac la un loc 3120 lei, aflați:

a) care este valoarea bonusului; b) care este valoarea salariului.

7. Un turist parcurge un traseu în felul următor: în prima zi 30% din lungimea traseului, în a doua zi 25% din ce i-a rămas de parcurs, iar apoi ultimii 168 km. Care este lungimea întregului traseu?

8. O persoană a cheltuit 30% dintr-o sumă. După ce a mai cheltuit 20% din ce îi rămăsese, a constatat că mai avea 336 lei. Ce sumă a avut inițial?

9. Un obiect costă 240 lei. Acesta se scumpește inițial cu 20%, iar apoi se ieftinește cu 20%.

a) Care este prețul final al obiectului?

b) Ce procent din prețul inițial al obiectului reprezintă ultimul preț?

10. După două creşteri consecutive de preţ, prima de 10% şi a doua de 20%, un obiect costă 2376 lei. Care a fost preţul iniţial?

11. După două reduceri consecutive de preţ, una de 10% şi alta de 15%, un obiect costă 1836 lei. Care a fost preţul iniţial?

12. Preţul unui obiect s-a majorat cu 20%. După o lună, preţul s-a redus cu 20%. După cele două modificări de preţ, obiectul costă 480 lei. Care a fost preţul iniţial al obiectului?

13. Într-o clasă sunt 36 de elevi. Determinaţi numărul băieţilor din clasă, ştiind că numărul fetelor este cu 40% mai mare decât numărul băieţilor.

14. Într-o clasă, numărul băieţilor este cu 40% mai mare decât numărul fetelor. Ştiind că în clasă sunt cu 6 băieţi mai mulţi decât fete, calculaţi numărul de elevi din clasă.

15. La un concurs sportiv au fost 188 participanţi. Câţi băieţi şi câte fete au fost la concurs, dacă numărul băieţilor a fost cu 35% mai mare decât numărul fetelor?

16. După ce s-au împrumutat 18% din numărul total de cărţi existente într-o bibliotecă şcolară şi încă 1700 de volume, a mai rămas în bibliotecă 32% din numărul total de cărţi existente la început. Câte cărţi au fost împrumutate?

17. Marfa dintr-un depozit a fost distribuită astfel: în prima etapă s-a distribuit 50% din totalul de marfă existentă, în a doua etapă 30% din ce mai rămăsese, iar în ultima etapă restul de 140 kg de marfă. Ce cantitate de marfă a fost iniţial în depozit?

18. Un produs s-a scumpit cu 15%. După un timp, produsul s-a scumpit din nou cu 15%, ajungând astfel să coste 7935 lei.

a) Calculaţi preţul iniţial al obiectului.

b) Cu ce procent din preţul iniţial s-a mărit preţul produsului după cele două scumpiri?

19. O persoană a cheltuit în prima zi 25% din suma pe care o avea, iar a doua zi 40% din suma rămasă. Ce sumă a avut iniţial persoana respectivă, dacă în prima zi a cheltuit cu 225 lei mai puţin decât în a doua zi?

20. Venitul unui salariat a crescut în ultimii doi ani, cu 15% în primul an şi apoi cu 20%. În felul acesta, salariatul constată că primeşte în plus la salariu 950 lei. Care a fost salariul iniţial?

21. Un biciclist parcurge în prima zi 24% din întreaga distanţă pe care o are de parcurs. A doua zi parcurge 25% din distanţa rămasă şi constată că mai are 14 km până la jumătatea drumului. Care este lungimea distanţei pe care o are de parcurs?

22. După două reduceri consecutive de preţ cu acelaşi procent, un obiect costă tot atât cât ar fi costat dacă preţul iniţial ar fi fost redus o singură dată cu 36%. Care este procentul cu care s-a modificat preţul iniţial al obiectului?

23. După două măriri succesive de preţ cu acelaşi procent, preţul unui obiect a devenit egal cu cel care ar fi fost înregistrat dacă s-ar fi mărit o singură dată cu 44% din preţul iniţial. Care este procentul cu care s-a modificat preţul iniţial al obiectului?

24. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{bc}$ reprezintă 20% din numărul $\overline{abc}$.

PE-PP 4. Numere reale

1. Determinați $x \in \mathbb{N}$ din proporția $\frac{\sqrt{48}}{4}=\frac{x+1}{\sqrt{3}}$. Pentru x determinat anterior, comparați numerele x^{75} și 3^{50}.

2. Determinați-l pe x din proporțiile:

a) $\frac{x}{2\sqrt{3}+3}=\frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{\sqrt{13+\sqrt{1296}}}{x}=\frac{3^3-3^2-3-3^0}{\sqrt{23+\sqrt{1681}}}$.

3. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor x și y, în fiecare dintre cazurile:

a) $x=\sqrt{(5+3\sqrt{3})^2}$ și $y=|5-3\sqrt{3}|$; b) $x=|3-2\sqrt{3}|$ și $y=\sqrt{21+12\sqrt{3}}$;

c) $x=\frac{4}{6-\sqrt{32}}-\sqrt{8}-5$ și $y=\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}+\sqrt{6}-1$;

d) $x=\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$ și $y=\frac{6(3+\sqrt{3})}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}$.

4. Dacă $a=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+2)$ și $b=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-2)$, calculați media geometrică a celor două numere.

5. Se consideră numerele:

$$a=\left[\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{5}{\sqrt{75}}+\left(\frac{4}{\sqrt{192}}-\frac{12}{\sqrt{108}}\right):2\right]\cdot\frac{12}{\sqrt{6}} \text{ și } b=\left(\frac{3}{\sqrt{12}}-\frac{2}{\sqrt{75}}+\frac{3}{2\sqrt{48}}-\frac{21}{5\sqrt{27}}\right):\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

a) Calculați valorile reale ale numerelor a și b.

b) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

6. Se consideră numerele:

$$a=2\sqrt{6}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)+\frac{18}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \text{ și } b=\frac{10}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}-3\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2}+1.$$

Calculați $(a-b)^{2019}$.

7. Dacă $x=\sqrt{3-\sqrt{3}}$ și $y=\sqrt{3+\sqrt{3}}$, arătați că $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\sqrt{6}$.

8. Se consideră numerele reale:

$$a=\frac{1}{2\sqrt{3}+3}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\right):\frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{12}}+\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} \text{ și } b=\sqrt{3}-\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$$

a) Calculați valorile numerelor reale a și b.

b) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

9. Calculați produsul $a \cdot b$, unde:

$$a=\left(\frac{12}{\sqrt{3}}-\sqrt{108}+\sqrt{147}\right)\cdot\frac{12}{5\sqrt{6}} \text{ și } b=\left(\frac{16}{\sqrt{2}}+\sqrt{72}-\sqrt{162}\right)\cdot\frac{3}{10\sqrt{6}}.$$

10. Arătați că $a \in \mathbb{N}$ în fiecare dintre cazurile:

a) $a = (\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + \sqrt{216} - (-3)^2$;

b) $a = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 - \sqrt{160} - (-2)^3$;

c) $a = \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + (-15)^0$.

11. Calculați media geometrică a numerelor:

$$a = \sqrt{30^2 - 24^2} \text{ și } b = (4 + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{24 - 16\sqrt{2}}.$$

12. Determinați numerele raționale a și b care îndeplinesc condiția:

a) $a(\sqrt{3} + 2) + b(\sqrt{3} - 2) = 3\sqrt{3} - 2$;

b) $a(\sqrt{2} + 1) + b(\sqrt{2} - 1) = 7 - 3\sqrt{2}$;

c) $4a(2 + \sqrt{5}) + b(3 + \sqrt{5}) = 16 + 4\sqrt{5}$;

d) $a(3\sqrt{2} - 2) - b(5\sqrt{2} - 3) = 7\sqrt{2} - 5$.

13. Se consideră numărul $a = \left(\sqrt{5} + 4 - \dfrac{1}{\sqrt{5} - 2}\right) : \left(\sqrt{5} - \dfrac{2}{\sqrt{5} - 2} - \dfrac{1}{\sqrt{5} + 2}\right)$. Arătați că $a \in$ $\in (-1; 0)$.

14. Determinați valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care avem:

$$E(a) + 2\sqrt{6} = \frac{1}{E(a) - 2\sqrt{6}}, \text{ unde } E(a) = a + 2.$$

15. Stabiliți dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, unde $x = \sqrt{6} \cdot \left(\dfrac{6}{2\sqrt{3}} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{24} \cdot \left(\dfrac{7}{4\sqrt{3}} - \dfrac{3}{\sqrt{8}}\right)$.

16. Aflați numărul real x din ecuația:

$$x\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right) = \sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{32}.$$

17. Efectuați calculele:

a) $5\sqrt{108} - 2\sqrt{3} \cdot \left[6\sqrt{3} + (3 - \sqrt{3})^2\right]$;

b) $\sqrt{14} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{7}} - \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} + (\sqrt{7} + 1)^2$;

c) $\left(\dfrac{8}{\sqrt{3}} + \dfrac{7}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{6} - \sqrt{24} \cdot \left(\dfrac{6}{\sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$;

d) $\dfrac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{60}}{\sqrt{32}} + \dfrac{(\sqrt{2} + 3)^2 - 2\sqrt{18}}{\sqrt{50}}$.

18. Determinați mulțimea A în fiecare dintre cazurile:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \,\middle|\, \dfrac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{38 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}}{x + 2} \in \mathbb{Z} \right\}$;

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{\sqrt{21 - 8\sqrt{5}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

19. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor:

$$a = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \text{ și } b = \frac{3}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} - \sqrt{8} + 1.$$

20. Comparați numerele:

$$a = (3-\sqrt{7})\sqrt{16+6\sqrt{7}} \text{ și } b = (4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2.$$

21. Calculați suma inverselor numerelor:

a) $\sqrt{4}+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}+1$;

b) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$, $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ și $\sqrt{8}+\sqrt{7}$;

c) $\sqrt{9}+\sqrt{8}$, $\sqrt{10}+\sqrt{9}$, $\sqrt{11}+\sqrt{10}$ și $\sqrt{12}+\sqrt{11}$.

PE-PP 5. Calcul algebric

1. Se consideră $E(x) = (2-x)(2+x) + (x+3)^2 - 2(2x+1) + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real a pentru care $E(a) = -2$.

2. Se consideră $E(x) = (x+5)^2 - (x+4)(x-4) - 3(2x+5)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a) = -6$.

3. Se consideră $E(x) = (3+2x)(3-2x) - 3(2x-5)^2 + 2(3x-7)^2 + 40(3x+4)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care $E(a) = 2(20a+21)$.

4. Fie expresia $E(x) = (2x-1)^2 - 2(x+2)^2 + (2-x)(x-4)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = (x-3)^2 - 24$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Aflați valoarea lui x pentru care expresia ia valoarea minimă.

5. Se consideră expresia $E(x) = (x+4)^2 + 2(x+4)(x+2) + (x+2)^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(n)$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui t pentru care $E(t)$ are cea mai mică valoare posibilă.

6. Fie $E(x) = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(n)$ este număr natural pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

7. Fie expresia $E(x) = x^3 + (x+2)^2 + 2(x+1)(x-1) - 2(x+1)$, unde x este număr real. Arătați că numărul $E(n)$ este divizibil cu 6, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

8. Fie $E(x) = (x^2-x-1)^2 - (x^2-x)^2 + 3x^2$, unde $x \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(n)$ este pătrat perfect pentru orice număr natural n.

9. Se consideră expresia $E(x) = (2-x)(2+x) + (x+3)^2 - 4(x+1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real a pentru care $E(a) = -5$.

10. Fie $E(x) = (x^2-3x+4)^2 - (x^2-3x)^2 - 7x^2 + 16x$, unde x este număr real. Arătați că $E(n)$ este pătrat perfect pentru orice număr natural n.

11. Fie $E(x) = (x\sqrt{3}+2)^2 - (x\sqrt{3}+2)(x\sqrt{3}-1) - 3(x\sqrt{3}-3)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(n)$ este un număr natural pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

12. Se consideră expresia $E(x) = (3x + 2)^2 + (2x - 3)(x - 2) - 2(2x - 1)^2 - 4(2x + 1) + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = 3x^2 + 5x + 5$, pentru orice număr real x.
b) Demonstrați că $E(n)$ este un număr întreg impar, pentru orice număr întreg n.

13. Se consideră expresia $E(x) = (x + 4)^2 + (2x - 3)(1 - 2x) + 4(x - 6)(x + 2) + 2(3x + 22)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = (x + 3)^2$, pentru orice număr real x.
b) Calculați media geometrică a numerelor $E(-2\sqrt{2})$ și $E(2\sqrt{2})$.

14. Se consideră expresia $E(x) = (2x + 1)^2 - (x - 1)(x + 1) - (x - 3)^2 - 2x(x + 7) + 4$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = -4x - 3$, pentru orice număr real x.
b) Determinați numărul întreg a pentru care $E(a\sqrt{2}-3) + E(a+2) = -a(4\sqrt{2}-3) + 12$.

15. Se consideră expresia $E(x) = 2(x + 3)^2 + (x - 2)(3x + 2) - (2x - 1)^2 - 8(x + 1)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = x^2 + 4x + 5$, pentru orice număr real x.
b) Determinați numărul real a pentru care $E(a\sqrt{2}) - E(a\sqrt{2}-1) = 3a\sqrt{2} - 5$.

16. Se consideră expresia $E(x) = (x\sqrt{2}+3)^2 - (x\sqrt{5}-2)(x\sqrt{5}+2) + 2(x - 2)(x + 4) - 2x\sqrt{2}(3+\sqrt{2}) + 12$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = 9 - x^2$, pentru orice număr real x.
b) Arătați că $a \in \left(-3\sqrt{2}, -2\sqrt{3}\right)$, unde $a = E(2\sqrt{3}) + E(-2\sqrt{3}) + 2$.

17. Se consideră expresia $E(x) = (1+2x\sqrt{2})(2x\sqrt{2}-1) - 2(x\sqrt{2}-2)^2 - 2x(x+2\sqrt{2}) + 13$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = (x\sqrt{2}+2)^2$, pentru orice număr real x.
b) Determinați mulțimea $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid E(n) < 8\}$.

18. Se consideră expresia $E(x) = (x\sqrt{2}-3)^2 - (x\sqrt{2}-2)(x\sqrt{2}+1) + 3(x\sqrt{2}+3) - 13$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = -2x\sqrt{2} + 7$, pentru orice număr real x.
b) Determinați numărul întreg a, știind că $E(a\sqrt{2}) + 2a = 11$.

19. Fie expresia $E(x) = (2x\sqrt{2}+3)^2 + (2-x\sqrt{2})(x\sqrt{2}+2) - 2(x+1)^2 - 6(2x\sqrt{2}+1) - 4$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = (2x - 1)^2$, pentru orice număr real x.
b) Determinați numărul întreg a, pentru care $E(a\sqrt{2}) - E(-a\sqrt{2}) = 4a\sqrt{2} - 12\sqrt{2}$.

20. Fie expresia $E(x) = (x^2 - x\sqrt{2} + 2)^2 - (x^2 - x\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}(2x - 3\sqrt{2}) - (2x - 1)(2x + 3)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = -4x - 5$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numărul întreg a, pentru care $E(a\sqrt{2} - 7) + E(4\sqrt{2}) = -2a + 10$.

21. Fie expresia $E(x) = (2x^2 - x - 2)(2x^2 - x + 1) - (2x^2 - x - 1)^2 - x(2x + 3) + 4$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = -4x + 1$, pentru orice număr real x.

b) Determinați valorile întregi nenule ale lui n, știind că $E(n) < -n^2 + 6$.

22. Se consideră expresia $E(x) = (2x^2 - x + 3)(2x^2 - x + 5) - (2x^2 - x)^2 - 14$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = (4x - 1)^2$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numărul întreg a, pentru care $E\left(\frac{a}{2}\right) - E\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) - 2a\left(a + \sqrt{2}\right) = 2(a - 9)$.

23. Se consideră expresia $E(x) = (3x + 2)^2 - (2x - 5)(3x + 2) - (x + 2)^2 - 2x(x + 8) - 5$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = 3x + 5$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numerele întregi n pentru care $\frac{E(n)}{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

24. Se consideră expresia $E(x) = 3(2x - 1)^2 - 2(x - 3)(x + 3) - 2(x - 3)^2 + (1 - x)(x - 3) + 28$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = 7x^2 + 4x + 28$, pentru orice număr real x.

b) Demonstrați că $E(n) + 3n$ este multiplu de 14, pentru orice număr natural n.

25. Se consideră expresia $E(x) = (2x - 3)^2 - (x - 1)(x + 4) - 2(x - 3)^2 + (1 - x)(x + 1)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = -3x - 4$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numerele întregi n pentru care $\frac{E(n)}{2n-1} \in \mathbb{Z}$.

26. Se consideră expresia $E(x) = (2x + 1)^2 - (3 - x)(2x - 1) - 4(x - 2)^2 - 2x(x + 6) + 20$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = x + 8$, pentru orice număr real x.

b) Determinați valorile naturale nenule ale lui n pentru care $E(n) > 4n - 10$.

27. Se consideră expresia $E(x) = 2(x - 3)^2 - (1 - x)(x + 5) - (x + 2)^2 + x(9 - x) - 2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = x^2 - 3x + 7$, pentru orice număr real x.

b) Determinați cardinalul mulțimii A, unde $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid E(n) < -n + 10\}$.

28. Se consideră expresia $E(x) = (3x + 4)^2 + (1 - x)(3x + 7) - (2x - 3)^2 - 8(4x + 3) + 4$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = 2x^2 - 6$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numerele întregi n pentru care $E(n)$ este număr prim.

29. Se consideră expresia $E(x) = (x + 3)^2 + (x + 2)(2x - 5) + (x - 2)^2 - 3(x + 3)(x - 2) - 15$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = x^2 - 2x + 6$, pentru orice număr real x.

b) Determinați minimul expresiei $E(x)$ și valoarea lui x pentru care se realizează acest minim.

30. Se consideră expresia $E(x) = (2x - 1)^2 - (2 - x)(2x + 5) - (x + 3)^2 + x(9 - 4x) + 18$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = x^2$, pentru orice număr real x.

b) Determinați valorile întregi nenule ale lui n pentru care $E(n) \leq 2(4 - n)$.

31. Arătați că numărul natural a este pătrat perfect pentru oricare valoare a lui $n \in \mathbb{N}$:

a) $a = 2^{2n} + 2^{n+1} + 1$;
b) $a = 3^{2n} + 2^3 \cdot 3^n + 2^4$;
c) $a = 2^{4n} + 4^{n+1} + 2^2$;
d) $a = 5^{2n} + 6 \cdot 5^n + 9$.

32. Dacă $x + y = 4$ și $x^2 + y^2 = 12$, calculați $x - y$.

33. Dacă $x + \frac{1}{x} = 3$, calculați $x^2 + \frac{1}{x^2}$ și $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

34. Stabiliți valoarea minimă a expresiei $E(x) = x^2 + 6x + 11$ și determinați valoarea reală a lui x pentru care expresia ia valoarea minimă.

35. Arătați că $(x - y)^2 + (x + y)^2 + 2(x - y)(x + y) \geq 0$, pentru oricare x și y numere reale.

36. Fie expresia $E(x) = (x + 3)^3 - x - 3$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Descompuneți expresia în produs de factori ireductibili.

b) Arătați că $E(n) \,\vdots\, 6$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

37. Arătați că $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 25 \geq 5$. Pentru ce valori reale ale lui x și y are loc egalitatea?

38. Arătați că numărul real a este pătratul unui număr real, pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

a) $a = (x^2 - 7x + 3)(x^2 - 7x + 7) + 4$;

b) $a = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 10) + 9$.

39. Arătați că:

a) $(2x + 3)^3 - 8x - 12 = (2x + 1)(2x + 3)(2x + 5)$;

b) $(x^2 + x - 4)^2 - 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$;

c) $(x^2 + 5x - 4)(x^2 + 5x - 8) + 4 = (x + 6)^2(x - 1)^2$;

d) $(x + 5)^3 - 9x - 45 = (x + 2)(x + 5)(x + 8)$.

40. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 5x + 6}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.

a) Simplificați fracția.

b) Calculați produsul $E(1) \cdot E(2) \cdot E(3) \cdot \ldots \cdot E(2020)$.

41. Arătați că produsul rapoartelor $\dfrac{2(x-2)^2}{x+3}$ și $\dfrac{x^2-9}{4x-8}$ este număr natural pentru orice $x \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$.

42. Determinați valorile naturale ale lui x pentru care câtul rapoartelor $\frac{7x^2}{x^2+3x+2}$ și $\frac{21x}{2x+2}$ este număr natural pentru orice $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

43. a) Arătați că $\frac{4x-6}{2x+3} : \frac{4x^2-9}{4x^2+12x+9} - \frac{3x+5}{2x+3} = \frac{x+1}{2x+3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

b) Arătați că fracția $\frac{n+1}{2n+3}$ este ireductibilă pentru oricare $n \in \mathbb{N}$.

44. Fie expresia $E(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{4-x^2}\right) : \frac{x+1}{x+2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$.

a) Arătați că $E(x) = \frac{4x-4}{x-2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ inecuația $E(x) \cdot (x-2) \leq 12$.

45. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$.

b) Arătați că $\sqrt{x^2+2x+5} \geq 2$.

c) Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea:

$$\sqrt{x^2+2x+5} + \sqrt{y^2-6y+18} + \sqrt{z^2-4z+20} = 9.$$

46. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{5}{2x-1} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x^2-3x+1}\right) : \frac{3x-5}{3x^2-5x+2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right\}$. Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

47. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x^2+2x} + \frac{1}{4-x^2} + \frac{2}{x^2-2x}\right) : \frac{2}{x^2+2x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

48. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{3x-7}{4-9x^2}\right) \cdot \frac{3x^2+5x+2}{3-6x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$. Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

49. Se consideră expresia $E(x) = \left(1 - \frac{x^2-x-2}{x^2-1}\right) : \left(\frac{x-4}{x^2-x} - \frac{x-3}{1-x^2} - \frac{x-1}{x^2+x}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 5\}$.

a) Arătați că $E(x) = \frac{x}{x-5}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 5\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

50. Fie expresia $E(x) = \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x+2}{1-x^2}\right) : \dfrac{x+4}{3x^2+3x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1, 1\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{3x}{x-1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1, 1\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

51. Se dă expresia $E(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{2}{2-x} - \dfrac{1}{x+2}\right) : \left(x - 2 + \dfrac{6-x^2}{x+2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b) Determinați cardinalul mulțimii $A = \left\{a \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 2\} \;\middle|\; \dfrac{a+1}{2-a} \in \mathbb{Z}\right\}$.

52. Calculați aria unui triunghi ale cărui laturi are măsurile egale cu numerele reale strict pozitive a, b, c, pentru care $\sqrt{a^2-10a+26} + \sqrt{b^2-8b+20} + \sqrt{c^2-6c+18} = 6$.

53. Se consideră expresia $E(x) = x + \left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{13-x^2}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x-2}\right) : \dfrac{x^2-x-12}{3x^2-9x+6}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2, 4\}$. Arătați că $E(x) = x - 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2, 4\}$.

54. Fie expresia $E(x) = \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{2-x} - \dfrac{2}{x^2-3x+2}\right) : \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 1, 2\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 1, 2\}$.

b) Determinați valorile numerelor raționale m și n, pentru care $E(m) \cdot (m+1) = 3(m-3) + 2\sqrt{3}\,(n-3)$.

55. Fie expresia $E(x) = \left(\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2+x} - \dfrac{x+3}{1-x^2}\right) \cdot \dfrac{x^3+4x^2-5x}{x^2-x-6}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 3\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 3\}$.

b) Determinați numerele raționale a și b, astfel încât $E(a) \cdot (a-3) = 2a + b\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$.

PE-PP 6. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $7x + 8 = 2(x + 9)$;
b) $2(x + 3) = 5x + 12$;
c) $4(x + 5) = 7x + 32$;
d) $5(x + 3) = 4 + 3(x + 7)$;
e) $14x + 23 = 5(x - 6) - 1$;
f) $11x + 31 = 6(x - 6) + 2$;
g) $4x + 13 = 3(x + 5)$;
h) $8x + 19 = 5(x + 7) + 2$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3(5x-7)=11x-17$;
b) $17(2-3x)=3(13-19x)+1$;
c) $5(10x+3)=7(7x+3)-1$;
d) $8(3x-2)=5(12-3x)+20x-19$;
e) $5(3x-7)=22x-17+5(3-2x)$;
f) $6(5x-4)=15x-18+3(2x+7)$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2(x+1)-7(x-3)=3(x+10)+1$;
b) $5(x-3)-6(x+2)=7(x+3)-8$;
c) $2(3x+4)-5(1-2x)=7(2x-3)+12$;
d) $3(2x+5)-4(1-2x)=6(2x-3)+17$;
e) $2(3x+4)-5(1+2x)=7(2x+3)+18$;
f) $3(2x+5)-4(1+2x)=6(2x+3)+19$.

4. Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuațiilor:

a) $(x-3)^2-3(x-5)(x+5)=4(x+1)-2(x+1)^2-2$;
b) $(x+1)^2-2(x+3)=(x-3)(x+2)+2(x-5)$;
c) $(x-3)^2+4(x+1)=(x-1)(x+4)+2$;
d) $(x+2)^2-3(x+4)=(x+3)(x-5)-2$;
e) $(x+1)(x+2)-5=(x+3)^2-2(x+5)$;
f) $2(x-1)^2-3(x-2)(x+2)=3(x+3)-(x-2)^2$;
g) $3(x+2)^2-2(x+3)(x-3)=3(2x-1)+(x-1)^2$.

5. Aflați soluțiile reale ale următoarelor ecuații:

a) $\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{x+5}{3}=3{,}5$;
b) $\dfrac{x+7}{2}-\dfrac{x+1}{5}=-2{,}4$;
c) $\dfrac{2x+3}{3}-\dfrac{x+5}{2}=-4{,}5$;
d) $\dfrac{x+5}{6}-\dfrac{x-4}{9}=\dfrac{x+7}{3}$;
e) $\dfrac{x+5}{6}-\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{x-1}{3}$;
f) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{5}{6}$.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale:

a) $|x-5|=7$;
b) $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{4}$;
c) $\sqrt{(2x-1)^2}=5$;
d) $\sqrt{x^2-4x+4}=6$;
e) $|x+3|+5=7$;
f) $\big||x-3|-5\big|=4$;
g) $\big||x-1|-3\big|=2$;
h) $\left|\left|\dfrac{3x-2}{5}\right|-4\right|=2$;
i) $\big||2x-3|-1\big|=8$.

7. Rezolvați ecuațiile, specificând domeniul de definiție:

a) $\dfrac{x-5}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-4}=2$;
b) $\dfrac{1}{x-5}+6=\dfrac{6-x}{x-5}$;
c) $\dfrac{1}{x-2}+3=\dfrac{3-x}{x-2}$;
d) $5+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{5-x}{x-4}$;
e) $\dfrac{3x-5}{x-1}-\dfrac{2x-5}{x-2}=1$;
f) $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x^2}{x^2-4}+\dfrac{6}{x+2}$.

8. Rezolvați ecuațiile, specificând domeniul de definiție:

a) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+9x+20}\cdot\dfrac{x^2-2x-24}{x^2+5x+4}=3\dfrac{1}{2}$;

b) $\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{9-x^2}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{1}{x-3}\right):\dfrac{10-x}{x^2-x+1}-2=\dfrac{3}{x-3}$;

c) $\left(\frac{x^2}{x-2}-\frac{x^2-9}{2x-6}\cdot\frac{x^2+3x}{x^2+6x+9}\right):\frac{3x+6}{4}=\frac{3}{4}$;

d) $\left(\frac{x-3}{x-7}-\frac{x^2+6x+8}{x^2+9x+20}\cdot\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+7}\right):\frac{5x}{x-7}=\frac{3}{x+7}$.

9. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x\sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}=6\sqrt{3}-9$; b) $x\sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2}=10-4\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{5}(x-\sqrt{5})=x(\sqrt{5}-1)$; d) $\sqrt{7}(x-2\sqrt{7})=x(\sqrt{7}-2)$;

e) $\sqrt{3}(x-\sqrt{3})=x(\sqrt{3}+1)+6\sqrt{3}$; f) $3\sqrt{2}x+\sqrt{72}=\sqrt{98}$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2(2x+1)+3|2x+1|=4(x+3)+5$; b) $2(3x+4)+7=3(2x+1)+4\sqrt{(2x-1)^2}$;

c) $\frac{1}{5}\left\{\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\left[\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}-1\frac{4}{5}x\right)\right]\right\}=\frac{2}{5}$; d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}x\right)\right]=3$.

11. Rezolvați ecuațiile:

a) $\sqrt{(2x+1)^2}=15$; b) $\sqrt{1-6x+9x^2}=11$; c) $\sqrt{(4x-1)^2}=9$;

d) $\sqrt{9x^2-12x+4}=7$; e) $x\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}=6-4\sqrt{2}$;

f) $x\sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}=12-9\sqrt{2}$; g) $x^2=(2\sqrt{3}-1)^2+\sqrt{48}$;

h) $x^2=(3\sqrt{2}-2)^2+\sqrt{288}$; i) $x(\sqrt{5}-2)^2-1=\sqrt{20}(2-\sqrt{5})$.

12. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x-2}{6}-\frac{2x+13}{8}=1\frac{13}{24}-\frac{12+x}{4}$; b) $\frac{5x-2}{3}+\frac{8-x}{5}=\frac{x+14}{2}-2\frac{1}{5}$;

c) $\frac{3x-4}{7}-\frac{5(8x+5)}{21}=1\frac{1}{7}-\frac{5x+3}{3}$; d) $\frac{x}{3}+\frac{3x-7}{6}-\frac{2x+5}{15}=\frac{1}{2}-\frac{3(3-2x)}{10}$;

e) $\frac{17(2-3x)}{20}+\frac{5x-6}{4}=\frac{3-8x}{5}+\frac{1}{2}$; f) $\frac{2(5x-1)}{15}-\frac{16x+13}{10}=\frac{1}{3}-\frac{2x+3}{2}$.

PE-PP 7. Probleme de aritmetică ce se pot rezolva cu ajutorul ecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii

1. Media aritmetică a trei numere este 58. Media aritmetică a primelor două numere este 51, iar a ultimelor două este 63. Aflați cele trei numere.

2. Fie a, b și c trei numere naturale. Aflați numerele, știind că mediile aritmetice a câte două dintre ele sunt 90, 99 și, respectiv, 93.

3. În două cutii sunt 820 de creioane. Dacă din prima cutie s-ar transfera 41 de creioane în a doua, atunci în prima cutie ar fi de trei ori mai multe creioane decât în a doua cutie. Câte creioane sunt în fiecare cutie?

4. Tatăl și fiul au împreună 48 de ani. Ce vârstă are fiecare, dacă tatăl este de trei ori mai în vârstă decât fiul? Peste câți ani vârsta tatălui va fi de două ori mai mare decât vârsta fiului?

5. După ce a parcurs $\frac{3}{5}$ din lungimea unui traseu și încă 12 km, un turist mai are de parcurs $\frac{1}{3}$ din traseu. Ce lungime are întregul traseu?

6. Unei persoane, după ce a cheltuit $\frac{2}{5}$ dintr-o sumă și încă 600 lei, i-a mai rămas de cheltuit $\frac{1}{3}$ din suma inițială. Ce sumă a avut inițial?

7. Dacă se adună $\frac{1}{4}$ dintr-un număr cu $\frac{1}{3}$ din același număr, se obține 63. Care este numărul?

8. Suma a două numere este 2490. Aflați aceste numere, știind că 6,5% din primul număr este 8,5% din al doilea număr.

9. Într-un oraș sunt în prezent 48400 locuitori. Se știe că populația acestui oraș a crescut în fiecare an cu 10%. Câți locuitori erau în oraș cu doi ani în urmă?

10. În două biblioteci erau la un loc 4320 de cărți. Din prima bibliotecă au fost împrumutate 30% din volumele existente și din a doua bibliotecă 25% din totalul de cărți existente, în felul acesta numărul total de cărți împrumutate din cele două biblioteci fiind de 1111. Câte cărți erau înregistrate în fiecare bibliotecă?

11. Pe o scară a unui bloc sunt 40 de apartamente cu două sau cu trei camere. Știind că în total sunt 90 de camere, aflați câte apartamente cu două camere sunt pe acea scară.

12. Într-o tabără de elevi erau 148 de copii, băieți și fete. După ce au plecat 14 fete și au venit 16 băieți, numărul băieților a devenit egal cu dublul numărului de fete. Câți băieți și câte fete au fost inițial în tabără?

13. Organizatorul unei petreceri avea la dispoziție pentru aranjamentele florale un număr de vaze și un număr de flori. Așezând prima dată câte trei flori într-o vază, i-au rămas cinci flori neașezate în vaze. A doua oară, așezând câte cinci flori într-o vază, a observat că îi rămâneau cinci vaze fără flori. Câte flori și câte vaze erau?

14. Prețul unui obiect s-a mărit cu 20%. După un timp, noul preț s-a micșorat cu 20%. După cele două modificări de preț, actualul preț al obiectului este 1344 lei. Care a fost prețul inițial al obiectului?

15. Media aritmetică a două numere naturale este egală cu 240. Determinați numerele, știind că o treime dintr-un număr este cu 48 mai mare decât o cincime din al doilea număr.

16. Dacă elevii unei clase s-ar așeza câte doi într-o bancă, ar rămâne trei bănci libere și o bancă ar fi ocupată de un singur elev. Dacă aceiași elevi s-ar așeza câte trei în bancă, ar rămâne nouă bănci libere și într-o bancă ar sta doi elevi. Câți elevi și câte bănci sunt în clasă?

17. Unui grup de copii i s-au oferit bomboane. Patru copii din grup au primit câte 5 bomboane, iar ceilalți copii au primit câte 9 bomboane. Dacă fiecare copil ar fi primit câte 7 bomboane, atunci ar fi rămas 24 de bomboane. Aflați câți copii erau în grup și câte bomboane le-au fost distribuite.

18. Dacă elevii unei clase s-ar așeza câte doi într-o bancă, atunci 5 bănci ar rămâne libere, iar o bancă ar fi ocupată de un singur elev. Dacă aceiași elevi s-ar așeza câte trei într-o bancă, atunci ar rămâne 11 bănci libere, iar o bancă ar fi ocupată de un singur elev. Câte bănci și câți elevi sunt în clasă?

19. Într-o clasă sunt 32 de elevi. Dacă ar pleca trei fete și cinci băieți, numărul fetelor ar fi egal cu dublul numărului de băieți. Care este numărul fetelor din clasă?

20. În două cutii sunt 432 de bile. Dacă din prima cutie s-ar lua 36 de bile, iar în a doua s-ar adăuga 24 de bile, numărul bilelor din prima cutie ar reprezenta două treimi din numărul bilelor din a doua cutie. Câte bile sunt în fiecare cutie?

21. O persoană cheltuiește o sumă de bani în trei zile. În prima zi cheltuiește 40% din întreaga sumă, în a doua zi cheltuiește 50% din ce i-a rămas, iar în a treia zi restul banilor. Știind că suma cheltuită în a treia zi este cu 84 lei mai mică decât suma cheltuită în prima zi, aflați:

a) ce sumă cheltuiește persoana respectivă în prima zi;

b) ce procent din suma inițială reprezintă suma cheltuită în a treia zi.

22. Marfa dintr-un depozit a fost lichidată în trei zile. În prima zi s-a distribuit 40% din stocul existent, a doua zi 60% din cantitatea rămasă în depozit, iar a treia zi cu 96 t mai puțin decât în prima zi, epuizându-se astfel toată cantitatea de marfă din depozit. Care a fost cantitatea inițială?

23. Pe un teren de sport sunt mai puțin de 220 de copii. Dacă aceștia se așază în coloane de câte 8 copii, rămân 4 copii neîncolonați, dacă se așază în coloane de câte 9 copii, rămân 5 copii neîncolonați, iar dacă se așază în coloane de câte 12 copii, rămân 8 copii pe margine. Știind că toți copiii de pe teren pot fi împărțiți în coloane de câte 5 fără să rămână niciun copil pe margine, aflați câți copii sunt pe terenul de sport.

24. Numărul elevilor unei școli era cuprins între 825 și 875. Elevii au participat la o activitate pe terenul de sport al școlii, unde au fost așezați în coloane de câte 6, apoi în coloane de câte 7 și, în final, în coloane de câte 8, de fiecare dată rămânând 4 elevi nedistribuiți. Câți elevi avea școala respectivă?

25. În prima zi a unei excursii, un turist a parcurs 40% din lungimea traseului propus. A doua zi a parcurs $\frac{5}{8}$ din traseul rămas, iar în a treia zi ultimii 72 km. Care a fost lungimea traseului?

26. O sumă de bani a fost cheltuită astfel: în prima etapă 40% din întreaga sumă, în a doua etapă 60% din rest, iar în a treia etapă cu 72 lei mai puțin decât în prima zi, în acest fel epuizându-se toată suma. Care a fost suma inițială?

27. Într-o cutie sunt creioane negre, galbene și roșii. Numărul creioanelor negre reprezintă $\frac{5}{12}$ din numărul total de creioane. Numărul celor galbene reprezintă $\frac{3}{14}$ din rest, iar restul creioanelor sunt roșii. Știind că numărul creioanelor roșii este cu 32 mai mare decât numărul celor galbene, aflați câte creioane de fiecare fel sunt în cutie. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare un creion acesta să nu fie negru?

28. La un concurs, elevii au primit 50 de întrebări. Pentru un răspuns corect au primit 5 puncte, iar pentru un răspuns greșit li s-au scăzut 3 puncte. Un elev a acumulat 106 puncte. La câte întrebări a răspuns corect acel elev?

29. Un bibliotecar observă că, dacă aşază câte 5 cărţi pe un raft, pe ultimul raft îi rămân doar 4 cărţi. Aşezând acelaşi număr de cărţi câte 6 pe raft, îi rămâne un raft cu două cărţi şi un raft gol. Câte cărţi sunt în bibliotecă?

30. Numărul fetelor dintr-o clasă este de 6 ori mai mare decât numărul băieţilor. Dacă ar pleca 10 fete şi ar veni 5 băieţi, atunci numărul băieţilor ar fi jumătate din numărul fetelor. Câţi elevi sunt în clasă?

31. S-a constatat că într-o zi, la o clasă a VIII-a, numărul elevilor absenţi reprezenta $\frac{1}{7}$ din numărul celor prezenţi. A doua zi, numărul elevilor absenţi a crescut cu 2, fiind egal, astfel, cu $\frac{3}{13}$ din numărul elevilor prezenţi în clasă. Câţi elevi sunt în acea clasă?

PE-PP 8. Inecuaţii

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţiile:

a) $3x + 7 \leq 2(x + 1)$; b) $5x + 11 \leq 3(x + 7)$; c) $2x + 5 \geq 3(x + 3)$;
d) $4x + 9 < 5(x + 1)$; e) $2(x + 3) \geq 4x + 10$; f) $5(x + 1) > 6x + 13$.

2. Rezolvaţi inecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $2(x + 5) < 3(x + 1) + 5$; b) $5(x - 4) < 3(x + 2)$; c) $5x + 7 < 3(x + 3) + 2$;
d) $4(x + 2) \geq 2x + 4$; e) $2\sqrt{3}x < \sqrt{27}x - 6$; f) $\sqrt{18}x - 4 < \sqrt{72}x + 2$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţiile:

a) $\frac{3(x+1)-5}{7} > 1$; b) $\frac{2(x-5)+11}{3} < 3$; c) $\frac{3(x-4)-4}{8} \leq 1$;
d) $\frac{2x+7}{-3} > 5$; e) $\frac{4x+9}{-5} < 3$; f) $\frac{3x+5}{-4} \geq 1$.

4. Rezolvaţi inecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $\frac{8-3x+2(x+1)}{-2} < 3$; b) $\frac{3(x-2)-2(x-4)}{-2} \leq 1$;
c) $\frac{2(3-x)+4x-7}{-2} < 1$; d) $\frac{2-5x+3(2x+1)}{-4} < 2$.

5. Rezolvaţi inecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $6x + 2(9 - 2x) < x + 23 - 3(x - 5)$; b) $3(3x - 8) \leq 6(2x - 1) - 5(5x + 8)$;
c) $15(x + 2) - 4(2x + 3) \geq 6(2x + 7) - 5(x + 8)$; d) $8(2x + 9) - 3x < 5(2 - 3x) + 90$;
e) $4(x - 2) - 3(2x + 13) \geq 37 - 6(12 + x) + 5(x + 8)$.

6. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţiile:

a) $(x + 1)^2 \geq x(x + 3)$; b) $(x - 2)^2 \geq x(x - 5)$;
c) $(x + 2)^2 > x(x - 1) - 6$; d) $(x - 3)^2 < x(x - 5) + 11$;
e) $(2x + 1)^2 < 4x(x - 1) - 7$; f) $9x(x + 1) \leq (3x - 1)^2 + 29$;
g) $(x + 4)^2 > x(x + 7) + 13$; h) $(x - 5)^2 \leq x(x - 9) + 21$.

7. Rezolvaţi inecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $(x^2+9)(|x+2|-3) \le 0$; b) $(x^2+2x+3)(|x-1|-1) < 0$;

c) $(2x^2+5)(3-|2x+5|) > 0$; d) $(x^2+4x+7)(2-|x-5|) \ge 0$.

8. Rezolvaţi inecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $|x-2| \cdot (7-|x+3|) \ge 0$; b) $|x+2| \cdot (5-|x+1|) > 0$;

c) $|x+1| \cdot (|2x-3|-7) < 0$; d) $|x-3| \cdot (|3x-2|-11) \le 0$.

PE-PP 9. Funcţii

1. Reprezentaţi grafic funcţiile:

a) $f: (-3; 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-1$; b) $f: [-2; 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x+2$;

c) $f: (-\infty; 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x+2$; d) $f: [2; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+4$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$; f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$.

2. Stabiliţi care dintre punctele următoare se găsesc pe graficul funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x-2$: $A(-1; -5)$; $B(1; 1)$; $C\left(\frac{1}{3}; 2\right)$; $D\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $E(3; -7)$.

3. Fie $f: (-3; 5) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax-2$.

a) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $A(-1; -4) \in G_f$.

b) Pentru $a = 2$, reprezentaţi grafic funcţia.

4. Se consideră funcţia $f: (-3; 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)x-1$.

a) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(-2; -7) \in G_f$.

b) Pentru $a = 2$, reprezentaţi grafic funcţia.

5. a) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2mx - 7m + 3$. Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $A(m; -2) \in G_f$.

b) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2mx - 5m + 2$. Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $A(m; -1) \in G_f$.

6. Fie $f: [-1; 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)x - (a+2)$.

a) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$, ştiind că $A(2; 3) \in G_f$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $f(x+1) + f(x-2) = 2$.

7. Fie funcţia $f: [-4; 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m-3)x+4$.

a) Determinaţi valoarea reală a lui m pentru care $A(2; 6) \in G_f$.

b) Pentru $m = 4$, reprezentaţi grafic funcţia şi determinaţi lungimea segmentului ce reprezintă graficul funcţiei.

8. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = (2m-5)x + 5m + 3$.

a) Determinaţi valoarea reală a lui m pentru care punctul $A(-2; 14) \in G_f$.

b) Pentru $m = 1$, reprezentaţi grafic funcţia.

c) Pentru $m = 1$, determinaţi punctele de pe grafic de coordonate egale.

9. Determinaţi funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$, în fiecare dintre cazurile următoare, ştiind că graficul funcţiei conţine punctele:

a) $A(-2; -8)$ şi $B(3; 7)$; b) $A(-1; 7)$ şi $B(2; 1)$;

c) $A(-3; 16)$ şi $B(4; -5)$; d) $A(-2; -11)$ şi $B(3; 9)$.

10. Stabiliți dacă următoarele puncte sunt coliniare:

a) $A(-2; 7)$, $B(2; -1)$, $C(5; -7)$; b) $A(-3; -11)$, $B(2; -1)$, $C(6; 9)$;

c) $A(-2; -13)$, $B(3; -3)$, $C(7; 14)$.

11. Determinați valorile numărului real m pentru care următoarele puncte sunt coliniare:

a) $A(3; -2)$, $B(-2; 13)$ și $C(2m - 3; m^2 + 2m - 17)$;

b) $A(3; -1)$, $B(-1; 15)$ și $C(3m - 4; m^2 - 3m + 5)$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 6$.

a) Reprezentați grafic funcția cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.

b) Calculați sinusul unghiului format de axa Ox cu dreapta ce reprezintă graficul funcției.

c) Calculați distanța de la punctul $M(-2; 0)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției.

13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6$.

a) Reprezentați grafic funcția cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.

b) Calculați tangenta unghiului format de axa Oy cu dreapta ce reprezintă graficul funcției.

c) Calculați distanța de la punctul $M(-3; 0)$ la dreapta ce reprezintă graficul funcției.

14. Fie funcția $f: [-2; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Determinați distanța de la punctul O de intersecție a axelor la dreapta ce reprezintă graficul funcției.

15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + \frac{3}{2}$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Determinați numărul real a, astfel încât punctul $A\left(3a+4; a+\frac{1}{2}\right)$ să aparțină graficului funcției.

c) Calculați suma $S = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(50)$.

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0{,}25x - 1$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Calculați aria triunghiului determinat de axele de coordonate și dreapta ce reprezintă graficul funcției.

17. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + a + 2$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(-1; 3) \in G_f$.

b) Pentru $a = 3$, reprezentați grafic funcția.

c) Rezolvați ecuația $f(x + 1) + f(3x + 2) = f(1 - 2x) + f(0)$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

18. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2mx - 5m + 2$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(m) = -1$.

b) Pentru $m = 1$, notăm cu M și N proiecțiile punctelor $A(3; f(3))$ și $B(-2; f(-2))$ pe axa Ox a sistemului de axe ortogonale. Calculați aria patrulaterului cu vârfurile în punctele A, M, B și, respectiv, N.

19. Se consideră funcția $f: [-3; 2] \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = (3m - 7)x + 5m - 8$.

a) Determinați valoarea reală a lui m pentru care punctul $A(-2; 4)$ se găsește pe graficul funcției.

b) Pentru $m = 2$, reprezentați grafic funcția.

c) Pentru $m = 2$, determinați măsura unghiului format de axa absciselor cu dreapta ce reprezintă graficul funcției.

20. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m^2 - 1)x + 3m - 7$, unde $m > 0$.

a) Determinați numărul real m, astfel încât $A(1; 2) \in G_f$.

b) Pentru $m = 2$, reprezentați grafic funcția.

c) Pentru $m = 2$, rezolvați ecuația $2f(x - 2) + 4f(x) = 3f(x + 3) - 6$.

21. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 5$.

a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

c) Calculați aria triunghiului determinat de cele două grafice și axa absciselor.

22. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 5$.

a) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

b) Calculați aria triunghiului determinat de cele două grafice și axa absciselor.

23. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x - 5$.

a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

c) Calculați aria triunghiului determinat de axa absciselor și cele două grafice.

24. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2ax - (b + 2)$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = ax - b$.

a) Determinați funcțiile, știind că punctul $A(1; 5 - 2b)$ se găsește pe graficele celor două funcții.

b) Reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe de coordonate.

25. Se consideră funcțiile $f: [-3; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g: [-2; 5] \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 2$.

a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

26. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $f(a) > \dfrac{5-2a}{-3}$.

c) Rezolvați ecuația $2f(2x - 1) - 3f(3 - 2x) - 2 = 4f(x) + 3$.

27. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 4$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 2$.

a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

b) Calculați aria triunghiului determinat de axa absciselor și graficele celor două funcții.

28. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 4$.

a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

b) Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \dots + f(25) + g(1) + g(2) + \dots + g(25)$.

c) Calculați aria triunghiului determinat de graficele celor două funcții și abscisă.

TESTUL 1

Subiectul I

1. Rezultatul calculului $3^2 \cdot 7 - 5 \cdot 2^2$ este ... .
2. Media geometrică a numerelor 8 şi 18 este ... .
3. Cei 9 băieţi dintr-o clasă reprezintă 30% din elevii clasei. Numărul de elevi din clasă este egal cu ... .
4. Valoarea reală a lui x din proporţia $\frac{x}{45} = \frac{36}{60}$ este ... .
5. Rezultatul calculului $2\sqrt{3}(\sqrt{27} - \sqrt{75})$ este ... .
6. Fie mulţimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 15\}$. Probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea A, acesta să fie număr prim este egală cu ... .

Subiectul al II-lea

1. După o reducere de 15%, preţul unui obiect este de 119 lei. Care ar fi fost preţul obiectului, dacă acesta nu s-ar fi redus, ci s-ar fi majorat cu 15%?
2. Rezolvaţi ecuaţia $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(x+3)(x-3)}{3} = \frac{2x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{6}$.
3. Calculaţi media geometrică a numerelor $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ şi $b = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Subiectul al III-lea

1. a) Descompuneţi în produs de factori ireductibili: $x^2 + 5x + 6$ şi $x^2 + 2x - 8$.

   b) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, -2, 2, 4\}$, aduceţi la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{x^2-4}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2+6x+9}{x^2+2x-8} - \frac{x+1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16}.$$

   c) Determinaţi valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcţiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 4$ şi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = bx + 1$.

   a) Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că punctul $A(1; -2)$ este punctul de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

   b) Pentru $a = 2$ şi $b = -3$, reprezentaţi grafic cele două funcţii în acelaşi sistem de axe de coordonate.

   c) Dacă $G_f \cap Ox = \{B\}$ şi $G_g \cap Ox = \{C\}$, calculaţi aria triunghiului ABC.

TESTUL 2

Subiectul I

1. Rezultatul calculului $-3^0 - [24 : (-2^2) + 3]$ este … .

2. Cel mai mic număr natural care împărțit la 16 dă restul 15 și împărțit la 24 dă restul 23 este … .

3. Rezultatul calculului $(x + 2)^2 + (x + 3)(x - 3) - 2(x + 1)^2$ este … .

4. Soluția ecuației $(x - 3)^2 = x(x - 5) + 11$ este … .

5. Dacă $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$, atunci valoarea produsului $-4ab$ este egal cu … .

6. 30% din 60% din 240 este egal cu … .

Subiectul al II-lea

1. Dacă elevii unei clase s-ar așeza câte doi într-o bancă, ar rămâne o bancă ocupată de un singur elev. Dacă aceiași elevi s-ar așeza câte trei într-o bancă, atunci ar rămâne opt bănci libere. Câte bănci și câți elevi sunt în sala de clasă?

2. Comparați numerele $a = (1-2\sqrt{3})\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+5\sqrt{3}\right)$ și $b = \left(8\sqrt{2}-\frac{14}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{2}-7{,}5\cdot 2$.

3. Rezolvați sistemul $\begin{cases} x-5\cdot[2x-3(x-y)]=-24 \\ y-3\cdot[4y-2(y-x)]=-16 \end{cases}$.

Subiectul al III-lea

1. a) Descompuneți în produs de factori ireductibili: $x^2 - x - 6$ și $x^2 - 4x - 5$.

b) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{4}{3}, -1, 3, 5\right\}$, arătați că $E(x) = \frac{5x+7}{3x+4}$, unde:

$$E(x) = \left(\frac{x-3}{x-5} : \frac{x^2-x-6}{x^2-4x-5} + \frac{1}{x+2}\right)\cdot\frac{5x+7}{3x+4}.$$

c) Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{5n+7}{3n+4}$ este ireductibilă.

2. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2m-3)x + 2n + 1$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (-3m+5)x + n + 6$.

a) Determinați numerele reale m și n, știind că punctul $M(4; -1)$ aparține graficelor celor două funcții.

b) Pentru $m = 2$ și $n = -3$, reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe de coordonate.

c) Dacă $G_f \cap Ox = \{A\}$ și $G_g \cap Ox = \{B\}$, calculați aria triunghiului MAB.

TESTUL 3

Subiectul I

1. Rezultatul calculului $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{7}{12}-\frac{2^3}{7}$ este … .

2. Cel mai mic număr natural care împărțit la 12 și la 20 dă, de fiecare dată, restul 5 este … .

3. Rezultatul calculului $(x+3)^2+(x-4)(x+4)-2(x-1)^2$ este … .

4. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$ și $7a-3b=36$, atunci $a=\ldots$ și $b=\ldots$.

5. După o reducere de 20%, un obiect costă 120 lei. Prețul inițial al obiectului a fost de … lei.

6. Soluția inecuației $x(x-5)>(x-2)^2$ este … .

Subiectul al II-lea

1. Unui grup de elevi i s-au împărțit în mod egal 251 de creioane și 169 de caiete, dar au rămas 11 creioane și 25 de caiete nedistribuite. Care este numărul elevilor din grup?

2. Calculați $3xy-2\sqrt{3}$, unde $x=\sqrt{432}\left(\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{48}}\right)$ și $y=\sqrt{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.

3. Rezolvați ecuația $(x+3)^2+(x+5)(x-5)=4(x-3)$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+1)x+b+4$.

a) Determinați funcția, știind că punctele $A(2;5)$ și $B(1;-1)$ se găsesc pe graficul funcției.

b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care punctul $C(m;m^2-2)\in G_f$.

c) Dacă $G_f\cap Ox=\{M\}$, $G_f\cap Oy=\{N\}$ și $P\left(-\frac{5}{6};0\right)$, calculați aria triunghiului MNP.

2. Fie expresia $E(x)=\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+1+\frac{2x-2}{x+1}\right]:\frac{4x^2}{x^2-1}$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

TESTUL 4

Subiectul I

1. Rezultatul calculului $18 - 36 : (-2)^2$ este ... .

2. Raportul dintre media geometrică și media aritmetică a numerelor 6 și 24 este egal cu ... .

3. Un obiect s-a ieftinit cu 84 lei, ceea ce reprezintă 35% din prețul acestuia. Prețul inițial al obiectului este de ... lei.

4. Scrisă sub formă de interval mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq 2x + 3 < 5\}$ este ... .

5. Cel mai mic număr întreg din intervalul $\left[-3,2;\ 2\frac{1}{7}\right]$ este egal cu ... .

6. Valoarea reală a lui x din proporția $\frac{\sqrt{192}}{x} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{18}}$ este ... .

Subiectul al II-lea

1. Dacă elevii unei clase s-ar așeza câte doi într-o bancă, ar rămâne două bănci goale. Dacă aceiași elevi s-ar așeza câte trei într-o bancă, ar rămâne șapte bănci goale și o bancă ar fi ocupată cu un singur elev. Câte bănci și câți elevi sunt în acea clasă?

2. Comparați numerele $a = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$ și $b = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$.

3. Se consideră expresia $E(x) = (x^2 - 5x + 8)^2 - (x^2 - 5x)^2 - 7(x^2 - 5x) + 3(x - 5)$, unde x este un număr real. Demonstrați că $E(n)$ este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$.

a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

b) Determinați punctul de pe grafic care are coordonatele egale.

c) Dacă notăm cu $\{A\} = G_f \cap Oy$ și cu A' simetricul lui A față de axa absciselor, determinați valoarea lui m din scrierea funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 2m$, știind că A' se găsește pe graficul funcției g.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} - \frac{12}{x^2 - 9} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}\right) : \frac{3x + 6}{x^2 - 9}$, unde $x \in$ $\in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 1, 3\}$.

a) Descompuneți în produse de factori ireductibili $x^2 - x - 6$ și $x^2 + 2x - 3$.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

TESTUL 5

Subiectul I

1. Rezultatul calculului $-10-(-2)^2 : 2$ este … .

2. Media aritmetică a două numere este 12, iar unul dintre numere este 10. Al doilea număr este … .

3. Scrisă ca reuniune de două intervale, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| > 3\}$ este … .

4. Soluția, număr natural, a ecuației $2x^2 - 3x - 2 = 0$ este … .

5. Fiind date punctele $A(2; 3)$ și $B(-1; -1)$ într-un sistem de axe ortogonal, lungimea segmentului AB este … .

6. Un obiect costă 150 de lei. După o reducere cu 30% din prețul său, acesta va costa … .

Subiectul al II-lea

1. Un elev a participat la un concurs la care avea de răspuns la 36 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect a primit 6 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit i s-au scăzut 5 puncte. La finalul concursului elevul a obținut 51 de puncte. La câte întrebări a răspuns corect elevul?

2. Se consideră numerele reale

$$x = \left(\frac{5}{\sqrt{75}} + \frac{2}{\sqrt{48}} - \frac{3}{\sqrt{108}}\right) : \frac{1}{\sqrt{24}} \text{ și } y = \left(\frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{32}} - \frac{4}{\sqrt{128}}\right) : \frac{1}{8}.$$

a) Calculați numerele reale x și y.

b) Arătați că numărul $a = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2\sqrt{2}}{xy}$ se găsește în intervalul $(0{,}25; 0{,}75)$.

3. Se consideră expresia $E(x) = (2x+1)^2 - 2(2x+1)(2x-3) + (2x-3)^2 + 20$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Arătați că $E(n)$ este pătratul unui număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3}{4}x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe xOy.

b) Dacă $\{A\} = G_f \cap Oy$ și $\{B\} = G_f \cap Ox$, determinați valorile numărului real m, unde $M(m, 0)$ este un punct în sistemul de coordonate xOy, astfel încât aria triunghiului MAB este egală cu 12.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{2x+4}{x^2+x-6} + \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{3}{x-2}\right) : \dfrac{x-9}{x^2-x-2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 2, 9\}$.

a) Descompuneți în factori ireductibili $x^2 + x - 6$ și $x^2 - x - 2$.

b) Arătați că $E(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 2, 9\}$.

c) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

Nume ____________________ Clasa ________

PE Test de autoevaluare 1

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(-3^2 - 3^0)^2 : (-2)^2$ este ....

(0,5p) **2.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 48 și 72 este egal cu ....

(0,5p) **3.** Numerele întregi care îndeplinesc condiția $|x - 1| \le 2$ sunt $\{$..............................$\}$.

(0,5p) **4.** 50% din 30% din 420 este egal cu ....

(0,5p) **5.** Soluția ecuației $(x + 1)^2 = x(x + 3)$ este ....

(0,5p) **6.** Dacă $\frac{a}{2} = \frac{4}{b}$, atunci $9 - ab$ este egal cu ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă 20% dintr-un număr este egal cu 75, atunci numărul este:

A. 225 B. 450 C. 550 D. 375

(0,5p) **2.** Dacă $\overline{2x5x} \,\vdots\, 9$, atunci x este egal cu:

A. 2 B. 1 C. 3 D. 5

(0,5p) **3.** Numerele naturale pentru care $\frac{3x+7}{2x+1} \in \mathbb{N}$ sunt:

A. $\{1, 2, 5\}$ B. $\{3, 5\}$ C. $\{0, 1, 5\}$ D. $\{0, 5\}$

(0,5p) **4.** Rezultatul calculului $(\sqrt{2}+1)^2 - 2\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{(-3)^2}$ este:

A. 4 B. 7 C. 5 D. 8

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(0,5p) **1.** a) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Determinați funcția, știind că a și b sunt proporționale cu numerele 1 și 3, iar punctul $N(2; 10) \in G_f$.

(0,5p) b) Dacă A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției cu axele de coordonate, calculați distanța de la punctul $M(2; 0)$ la dreapta AB.

(1p) **2.** Rezolvați inecuația $(4x^2 + 4x + 4)(|x - 3| - 4) < 0$.

(1p) **3.** O persoană, după ce a cheltuit 40% din suma pe care o avea, a mai primit o sumă egală cu 50% din suma pe care o avusese inițial. Știind că acum are 2640 lei, stabiliți care a fost suma inițială.

4. Fie expresia $E(x)=\left[\left(\frac{x+2}{x-1}+1\right)\cdot\frac{x+3}{2x+1}-\frac{x-2}{x+1}\right]\cdot\frac{x^2+4x+3}{14x+2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{7}; \pm 1\right\}$.

(0,5p) a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

(0,5p) b) Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

PE

Nume ______________________________ **Clasa** ________

Test de autoevaluare 2

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 15 și 24 este ....

(0,5p) **2.** Media geometrică a numerelor $6\sqrt{3}$ și $8\sqrt{3}$ este ....

(0,5p) **3.** Rezultatul calculului $\sqrt{24}(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})-\frac{24}{\sqrt{2}}+\frac{36}{\sqrt{3}}$ este ....

(0,5p) **4.** Mulțimea soluțiilor ecuației $\sqrt{x^2+2x+1}=3$ este $S=\{$.................................$\}$.

(0,5p) **5.** Valoarea termenului necunoscut din proporția $\frac{x}{24\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{36}$ este ....

(0,5p) **6.** Punctul de pe graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-4$, care are coordonatele egale este ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** După o scumpire de 15%, un obiect costă 575 lei. Prețul inițial a fost:

A. 450 lei B. 500 lei C. 550 lei D. 360 lei

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr care împărțit la 12 dă restul 10 și împărțit la 15 dă restul 13 este:

A. 48 B. 54 C. 60 D. 58

(0,5p) **3.** Soluția sistemului $\begin{cases}2x-y=7\\ x+2y=11\end{cases}$ este:

A. (5; 2) B. (3; 1) C. (4; 2) D. (5; 3)

(0,5p) **4.** Rezultatul calculului $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-6x+8}{x^2-x-12}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2,4\}$, este:

A. $\frac{x+3}{x-4}$ B. $\frac{x-4}{x+4}$ C. 1 D. $\frac{x+3}{x+4}$

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor:

$$a=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}} \text{ și } b=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}.$$

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 5$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + b$.

(0,5p) a) Determinați numerele reale a și b, știind că punctul de intersecție a celor două grafice este $A(2; 1)$.

(0,5p) b) Pentru $a = -2$ și $b = -1$, calculați suma:

$$S = f(1) + f(2) + \ldots + f(60) - [g(1) + g(2) + \ldots + g(60)].$$

(1p) **3.** În două biblioteci erau la un loc 1280 de volume. După ce din prima bibliotecă s-au împrumutat trei optimi din numărul existent de volume, iar în cea de a doua s-au mai primit 215 volume, numărul volumelor din prima bibliotecă a devenit egal cu cel din a doua. Câte volume au fost inițial în fiecare bibliotecă?

4. Se consideră fracția algebrică $F(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^3 + 2x^2 - 25x - 50}$.

(0,5p) a) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 5\}$, simplificați fracția.

(0,5p) b) Determinați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $F(a) \in \mathbb{Z}$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Capitolul I
Arii şi volume

PP Competenţe specifice

C1. Identificarea corpurilor geometrice şi a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

C2. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

C3. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

C4. Utilizarea unor termeni şi expresii specifice pentru descrierea proprietăţilor figurilor şi corpurilor geometrice

C5. Analizarea condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică spaţială să verifice anumite cerinţe date

C6. Interpretarea informaţiilor referitoare la distanţe, arii şi volume după modelarea printr-o configuraţie spaţială a unei situaţii date de cotidian

PE-PP 1. Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. O prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are la bază un pătrat de latură $AB = 4$ cm, iar înălțimea $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. Aflaţi:

a) măsura unghiului format de muchiile CC' şi AB;

b) măsura unghiului format de diagonala BC' cu latura AD;

c) măsura unghiului format de diagonala AC cu planul (ADD').

2. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are la bază un pătrat cu latura $AB = 6\sqrt{2}$ cm şi diagonala $BD' = 15$ cm. Aflaţi:

a) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul (ABC);

b) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu faţa (ADD').

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{3}$ cm și înălțimea $AA' = 6$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (ABC);
b) măsura unghiului format de diagonala $D'C$ cu planul (ADD');
c) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (ADD') și (BDD').

4. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm și diagonala $BD' = 25$ cm. Aflați:
a) distanța de la punctul C la diagonala AC';
b) sinusul unghiului format de diagonala AC' cu planul (BCC');
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(C'AB)$ și (ABC).

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 6$ cm. Calculați:
a) distanța de la punctul C' la diagonala BD;
b) măsura unghiului format de diagonalele BC' şi AB';
c) distanța de la C la planul $(C'BD)$.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 12$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD');
b) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul (ABC);
c) distanța de la A la diagonala BD'.

7. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $AA' = 6$ cm. Calculați:
a) distanța de la A' la latura BC;
b) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ și (ABC).

8. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei $AB = 18$ cm și înălțimea $VO = 3\sqrt{6}$ cm. Calculați:
a) sinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAD), unde D este mijlocul laturii BC;
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de o față laterală cu planul bazei.

9. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are $AB = VA = 12$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAC);
c) măsura unghiului format de latura BC cu planul (VAC).

10. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 20$ cm și măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei egală cu $45°$.
a) Calculați măsura unghiului diedru format de planele (VAC) și (VBD).
b) Calculați distanța de la B la planul (VAC).
c) Dacă $P \in VO$, astfel încât distanța de la P la planul (ABC) este egală cu distanța de la P la fața (VBC), aflați lungimea segmentului PO.

PE Aplicare și exersare **

11. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{2}$ cm și diagonala $BC' = 12$ cm. Aflați:
a) distanța de la punctul D' la diagonala AC;
b) distanța de la punctul D la planul $(D'AC)$;
c) tangenta unghiului diedru format de planele $(D'AC)$ și (ABC).

ălțimea

DD').
) cm și

BC).

ilțimea

BC).
VO =

laturii

planul

ghiului

ința de

și dia-

12. Prisma regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are latura bazei $AB = 4\sqrt{3}$ cm și diagonala $AD' = 8$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul A la planul (BDD');

b) tangenta unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD').

13. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 6$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm și $AA' = 3\sqrt{6}$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul D' la diagonala AC;

b) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AC)$ și (ABC);

c) distanța de la punctul D la planul $(D'AC)$.

14. Prisma regulată $ABCDA'B'C'D'$ are latura bazei $AB = 8$ cm, iar înălțimea $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul D la planul $(D'AB)$;

b) măsura unghiului format de muchia DD' cu planul $(D'AB)$.

15. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{6}$ cm și diagonala $BC' = 18$ cm. Calculați:

a) distanța de la vârful A la diagonala BD';

b) distanța de la vârful A' la diagonala BC'.

16. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 12$ cm, $BC = 12\sqrt{3}$ cm și $BC' = 24$ cm. Calculați:

a) distanța de la vârful A' la diagonala BC';

b) sinusul unghiului format de BD' cu fața (ADD');

c) măsura unghiului format de diagonala AB' cu planul (BCC').

17. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu diagonala bazei egală cu $10\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) distanța de la B la planul (ACC');

b) măsura unghiului format de BC cu planul (ACC');

c) măsura unghiului format de BC' cu planul (ACC').

18. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are latura $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Aflați:

a) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AC)$ și (ABC);

b) distanța de la D la planul $(D'AC)$;

c) sinusul unghiului format de muchia DC cu planul $(D'AC)$.

19. În prisma regulată $ABCA'B'C'$, latura bazei este $AB = 16$ cm, iar înălțimea este $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Dacă D este mijlocul laturii BC, calculați:

a) distanța de la C' la dreapta AD;

b) distanța de la C la planul $(C'AD)$;

c) măsura unghiului diedru determinat de planele $(C'AD)$ și (ABC).

20. Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are latura bazei $AB = 12\sqrt{3}$ cm și muchia laterală $SA = 4\sqrt{13}$ cm. Calculați:

a) sinusul unghiului diedru determinat de planele (SAD) și (SAB), unde D este mijlocul laturii BC;

b) distanța de la D la planul (SAB).

21. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are fețele laterale triunghiuri dreptunghice și isoscele, iar latura bazei $AB = 12$ cm.

a) Calculați distanța de la C la planul (VAB).

b) Arătați că $(VBC) \perp (VAD)$, unde D este mijlocul laturii BC.

c) Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele (VAB) și (VAD).

22. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are înălțimea $VO = 6$ cm, iar distanța de la centrul O al bazei la fața (VBC) egală cu $3\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) latura AB a bazei;

b) distanța de la A la planul (VBC);

c) măsura unghiului diedru format de planul (VBC) cu planul (ABC).

23. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are apotema $VM = 12$ cm, unde M este mijlocul laturii BC și $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = 45°$. Calculați:

a) latura AB a bazei;

b) măsura unghiului diedru format de fețele (VBC) și (VAD);

c) distanța de la O, centrul bazei, la o față laterală.

PE Aprofundare și performanță ***

24. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 8\sqrt{3}$ cm, $BC = 8$ cm și $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Aflați:

a) distanța de la vârful B' la diagonala AD';

b) distanța de la vârful C' la diagonala BD;

c) măsura unghiului format de dreapta AD' cu planul (DCC').

25. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 20$ cm, $AA' = 12$ cm și $BC = 15$ cm. Calculați:

a) tangenta unghiului format de diagonala $B'D$ cu planul (ABC);

b) distanța de la C la planul $(C'BD)$;

c) sinusul unghiului format de muchia BC cu planul $(C'BD)$.

26. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala egală cu $8\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului diedru format de planele (ACC') și (BCC');

b) măsura unghiului format de diagonala BC' cu $D'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$;

c) măsura unghiului format de BC' cu MO, unde $\{M\} = AD' \cap DA'$.

27. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala bazei egală cu $18\sqrt{2}$ cm. Fie $M \in CC'$, astfel încât $CM \equiv MC'$. Aflați:

a) distanța de la D' la dreapta de intersecție a planelor $(D'BM)$ cu (ABC);

b) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planul $(D'BM)$ cu planul (ABC).

28. Prisma regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei $AB = 6$ cm și înălțimea $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de dreptele $A'C$ și BC';

b) distanța de la punctul A' la dreapta de intersecție a planelor (ABC) cu $(A'BM)$, unde punctul $M = \text{sim}_C A$.

29. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are latura bazei $AB = 6$ cm și diagonala $A'B = 12$ cm, iar M este mijlocul muchiei CC'. Calculați:

a) distanța de la M la diagonala $A'B$;

b) distanța de la A' la dreapta de intersecție a planelor $(A'BM)$ și (ABC);

c) măsura unghiului diedru determinat de planele $(A'MB)$ și (ABC).

30. Prisma regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala bazei egală cu $6\sqrt{2}$ cm, iar înălțimea $AA' = 12\sqrt{3}$ cm. Dacă M este mijlocul muchiei $A'A$, calculați:

a) distanța de la C la $D'M$;

b) distanța de la D' la dreapta de intersecție a planelor $(D'MB)$ și (ABC);

c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'MB)$ și (ABC).

31. O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are înălțimea $VO = 6\sqrt{3}$ cm și măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de fața (VBC) cu planul bazei egală cu $60°$.

a) Calculați distanța de la vârful A la fața (VBC).

b) Calculați distanța de la centrul bazei, O, la planul (VBC).

c) Dacă M este un punct pe muchia VA, pentru care $\mathcal{A}_{\Delta MBC}$ este minimă, calculați sinusul unghiului diedru format de planul (MBC) cu planul (ABC).

32. Un tetraedru regulat $SABC$ are latura de 24 cm. Calculați:

a) cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;

b) sinusul unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele (SAB) și (SAC).

33. Tetraedrul regulat $ABCD$ are latura $AB = 12$ cm. Dacă M este mijlocul muchiei DC, iar N este mijlocul muchiei AB, calculați:

a) lungimea segmentului MN;

b) măsura unghiului format de dreptele MN și BD;

c) distanța de la H la planul (ACD), unde $AO \perp (BCD)$ și $AO \cap MN = \{H\}$, unde O este centrul cercului circumscris ΔBCD.

34. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 6\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului diedru format de fața (VBC) cu (ABC);

b) sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de fața (VBC) cu (VAC).

35. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, secțiunea diagonală este un triunghi echilateral cu aria egală cu $64\sqrt{3}$ cm^2. Calculați:

a) sinusul unghiului diedru format de fețele (VDC) și (VBC);

b) distanța de la vârful A la fața (VBC);

c) sinusul unghiului format de muchia VA cu planul (VBC).

36. O piramidă patrulateră regulată $SABCD$ are latura bazei egală cu 12 cm, iar secțiunea diagonală echivalentă cu baza.

a) Calculați sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de două fețe alăturate ale piramidei.

b) Stabiliți poziția unui punct P pe muchia SC, astfel încât aria triunghiului PBD să fie minimă și calculați cosinusul unghiului diedru format de planele (PBD) și (ABC).

PE-PP Supermate ****

37. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura bazei $AB = 10$ cm, iar punctele E și F sunt mijloacele laturilor AB și AD.

a) Arătați că dreptele CE și BF sunt perpendiculare.

b) Calculați sinusul unghiului format de dreptele BF și AD'.

c) Dacă M este mijlocul muchiei $D'C'$ și N este un punct pe muchia CC', determinați poziția punctului N, astfel încât perimetrul triunghiului BNM să fie minim.

38. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura $AB = 12$ cm și punctul E mijlocul lui AD, iar $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$. Calculați:

a) tangenta unghiului format de dreapta $O'A$ cu planul $(D'BD)$;

b) distanța de la vârful C' la dreapta BE;

c) tangenta unghiului diedru format de planele $(C'BE)$ și (ABC).

39. Fie prisma regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu latura bazei $AB = 8\sqrt{2}$ cm și înălțimea $AA' = 8$ cm, iar punctele E, F și G sunt mijloacele segmentelor AA', BB' și, respectiv, AD'.

a) Arătați că dreptele BE și CG sunt coplanare.

b) Calculați măsura unghiului format de dreptele BE și $A'D'$.

c) Calculați tangenta unghiului format de dreptele BD' și $C'F$.

40. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 6\sqrt{2}$ cm, iar punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor $A'B$, AD' și, respectiv, AA'.

a) Arătați că dreptele BP și CN sunt coplanare.

b) Calculați măsura unghiului format de dreptele PM și BC.

c) Calculați măsura unghiului format de dreptele $D'M$ și BC.

PE-PP 2. Prisma patrulateră regulată dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic

O dreaptă care alunecă pe un poligon oarecare și rămâne paralelă cu o dreaptă fixă (care nu este paralelă cu planul poligonului director) descrie o suprafață prismatică.

Atunci când tăiem suprafața prismatică cu două plane paralele, care să nu fie paralele cu generatoarea, delimităm un corp numit **prismă**.

Suprafața prismatică determină pe cele două plane paralele două poligoane numite **bazele prismei**. **Fețele prismei**, diferite de baze, se numesc **fețe laterale** ale prismei, ele fiind paralelograme.

Segmentele după care se taie câte două fețe laterale ale prismei se numesc muchiile laterale ale prismei. Când muchiile laterale ale prismei sunt perpendiculare pe planul bazei, **prisma este dreaptă**.

Distanța dintre bazele prismei se numește înălțimea prismei. La o prismă dreaptă, muchia laterală este egală cu înălțimea.

O prismă dreaptă care are ca bază un poligon regulat se numește prismă regulată.

O prismă care are ca bază un paralelogram se numește paralelipiped.

Toate fețele unui paralelipiped sunt paralelograme.

Paralelipipedul cu muchiile laterale perpendiculare pe planul bazei se numește *paralelipiped drept*.

Paralelipipedul drept care are ca bază un dreptunghi se numește *paralelipiped dreptunghic*.

Paralelipipedul dreptunghic în care toate muchiile sunt egale se numește *cub*.

Aria laterală a unei prisme este suma ariilor fețelor laterale. Suma dintre aria laterală și ariile bazelor se numește **arie totală a prismei**.

Prismă dreaptă: $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$, $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$,

unde $\mathcal{A}_l$ – aria laterală, $\mathcal{A}_t$ – aria totală, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, h – înălțimea prismei, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{V}$ – volumul.

Dacă dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt notate cu a, b și c, iar diagonala cu d, atunci:

$\mathcal{A}_l = 2(ac + bc)$, $\mathcal{A}_t = 2(ab + ac + bc)$, $\mathcal{V} = abc$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Cub: $\mathcal{A}_t = 6l^2$, $\mathcal{V} = l^3$, $d = l\sqrt{3}$, unde l este latura cubului.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor am notat cu l, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ latura bazei, înălțimea prismei, aria laterală, aria totală și, respectiv, volumul unei prisme patrulatere regulate. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
l	8					14	10	18
h	6	12	10	12			$8\sqrt{2}$	
$\mathcal{A}_l$		288		576	864			
$\mathcal{A}_t$					1512	1064		
$\mathcal{V}$			2560					4860

2. În tabelul următor am notat cu a, b, c, d, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ lungimea bazei, lățimea bazei, înălțimea, diagonala, aria laterală, aria totală și volumul unui paralelipiped dreptunghic. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
a	6	12	9		24	12	6	10
b	$6\sqrt{3}$		12	5	12	24		
c	9	15		20			10	
d		25	25	21				
$\mathcal{A}_l$					792			264
$\mathcal{A}_t$								504
$\mathcal{V}$						6048	480	

3. O prismă patrulateră regulată dreaptă are latura bazei de 10 cm și înălțimea egală cu $10\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) diagonala prismei;
b) măsura unghiului format de diagonala prismei cu planul bazei;
c) aria totală a prismei;
d) volumul prismei.

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată care are latura bazei $AB = 10\sqrt{2}$ cm și înălțimea $AA' = 15$ cm. Calculați:

a) d; b) $\mathscr{A}_t$; c) $\mathscr{V}$; d) distanța de la punctul D la diagonala BD'.

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu latura bazei $AB = 18$ cm și înălțimea $AA' = 15$ cm. Calculați:

a) $\mathscr{A}_t$; b) $\mathscr{V}$; c) tangenta unghiului format de diagonala BC' cu planul (ABC).

PE Aplicare și exersare **

6. O prismă patrulateră regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are raza cercului circumscris bazei egală cu 12 cm și aria laterală egală cu $288\sqrt{2}$ cm^2. Calculați:

a) perimetrul bazei; b) volumul prismei;
c) sinusul unghiului format de AD' cu planul (CDD').

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă. Lungimile muchiilor AB și AA' sunt direct proporționale cu numerele 3 și 4. Știind că aria laterală a prismei este egală cu 432 cm^2, calculați:

a) lungimile muchiilor AB și AA';
b) volumul prismei;
c) sinusul unghiului format de AD' cu planul (BDD').

8. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă. Lungimile muchiilor AB și AA' sunt direct proporționale cu numerele 4 și 8, iar volumul prismei este egal cu 1024 cm^3. Calculați:

a) dimensiunile prismei;
b) aria totală a prismei;
c) distanța de la vârful D la planul $(D'AC)$;
d) sinusul unghiului format de diagonala $D'B$ cu planul (ADD').

9. Prisma patrulateră regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are aria totală egală cu $128(\sqrt{2}+1)$ cm^2, iar aria laterală egală cu $128\sqrt{2}$ cm^2. Calculați:

a) dimensiunile prismei;
b) volumul prismei;
c) distanța de la vârful B la dreapta $O'C$, unde $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$;
d) sinusul unghiului diedru format de planele $(O'AC)$ și $(O'BC)$.

10. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și $BB' = 12\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) diagonala paralelipipedului;
b) aria totală și volumul paralelipipedului;
c) distanța de la vârful A la diagonala BD'.

11. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 36$ cm, $BC = 27$ cm și $AA' = 60$ cm. Calculați:

a) lungimea diagonalei paralelipipedului;
b) aria totală și volumul paralelipipedului;
c) distanța de la vârful C la diagonala AC'.

12. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporționale cu numerele 6, 4 și 3, iar suma lungimilor lor este de 26 cm. Calculați:

a) lungimile dimensiunilor paralelipipedului;
b) aria totală;
c) volumul paralelipipedului.

PE Aprofundare și performanță ***

13. Diagonala unui paralelipiped dreptunghic este egală cu $6\sqrt{6}$ cm, iar aria totală este 460 cm^2. Aflați suma lungimilor dimensiunilor sale.

14. a) Diagonala unui paralelipiped dreptunghic este de 21 cm, iar aria totală de 400 cm^2. Aflați suma lungimilor dimensiunilor sale.

b) Dacă dimensiunile bazei paralelipipedului sunt $a = 4$ cm și $b = 5$ cm, aflați volumul paralelipipedului.

15. Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este de 100 cm, iar lungimea diagonalei este de $10\sqrt{2}$ cm. Calculați aria totală a paralelipipedului.

16. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Suma lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului este egală cu 152 cm, iar diagonala paralelipipedului este de 26 cm.

a) Calculați aria totală a paralelipipedului.
b) Știind că dimensiunile muchiilor AB, BC și AA' sunt proporționale cu numerele 3, 4 și, respectiv, 12, calculați volumul paralelipipedului.
c) Calculați distanța de la vârful A' la diagonala AC.

17. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 4$ cm, $AA' = 2\sqrt{6}$ cm și $BC = 4\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul paralelipipedului;
b) distanța de la vârful D' la diagonala AC;
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AC)$ și (ABC);
d) distanța de la vârful A' la diagonala BC'.

18. Dimensiunile paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ sunt $AB = 12$ cm, $AD = 12\sqrt{3}$ cm și $AA' = 6\sqrt{6}$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul paralelipipedului;
b) distanța de la vârful D' la diagonala AC;
c) distanța de la vârful D la planul $(D'AC)$;
d) tangenta unghiului diedru format de planele $(D'AC)$ și (ABC).

19. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic în care $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și $D'A = 12$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul paralelipipedului;
b) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AB)$ și (ABC);
c) aria triunghiului MBD, unde $M \in CC'$, astfel încât $MC \equiv MC'$.

20. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se cunosc $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și diagonala $BD' = 20$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul paralelipipedului;
b) aria triunghiului AMN, unde M și N sunt mijloacele muchiilor DD' și, respectiv, CC';
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (AMN) și (ABC).

21. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă în care $AB = 12$ cm și $\sphericalangle AD'B = 30°$. Calculați:

a) aria totală și volumul prismei;

b) distanța de la vârful D la planul $(D'AC)$;

c) distanța de la vârful B' la dreapta AD';

d) distanța de la vârful A la diagonala BD'.

22. Prisma regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are latura bazei de 6 cm și $\sphericalangle BD'D = 45°$. Calculați:

a) aria totală și volumul prismei;

b) distanța de la vârful D' la diagonala $B'C$;

c) distanța de la punctul B la planul $(B'AC)$.

23. Într-un paralelipiped dreptunghic, diagonalele fețelor au lungimile de 10 cm, $2\sqrt{34}$ cm și $2\sqrt{41}$ cm. Calculați:

a) lungimea diagonalei paralelipipedului;

b) volumul paralelipipedului.

PE-PP Supermate ****

24. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată cu latura bazei de 6 cm și înălțimea $AA' = 9$ cm. Se consideră punctele M, N și P mijloacele muchiilor AB, BC și, respectiv, $B'C'$.

a) Arătați că $DM \perp AN$.

b) Calculați tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (PMD) și (ABC).

c) Determinați poziția unui punct Q pe muchia BB', astfel încât perimetrul triunghiului AQP să fie minim.

25. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată cu baza un pătrat de latură $AB = 8$ cm și înălțimea $AA' = 4\sqrt{2}$ cm.

a) Aflați distanța de la D la planul $(D'AC)$.

b) Aflați tangenta unghiului format de DC cu planul $(D'AC)$.

c) Calculați distanța de la B' la $D'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

d) Calculați aria totală și volumul prismei.

PE-PP 3. Cubul

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor am notat cu l, R, a_b, d, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ latura unui cub, raza cercului circumscris bazei, apotema bazei, diagonala cubului, aria totală și volumul cubului. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
l	6						
R		$4\sqrt{2}$					$5\sqrt{2}$
a_b						8	
d				$10\sqrt{3}$			
$\mathcal{A}_t$			150				
$\mathcal{V}$					1728		

2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, diagonala AC are $10\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) lungimea laturii cubului;

b) aria și volumul cubului;

c) diagonala cubului;

d) măsura unghiului format de dreptele AD' și $A'B$.

PE Aplicare și exersare **

3. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are aria totală egală cu 864 cm^2. Calculați:

a) lungimea laturii cubului și volumul acestuia;

b) măsura unghiului format de AD' cu planul (BDD');

c) distanța de la D' la diagonala $B'C$.

4. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are volumul egal cu 512 cm^3. Calculați:

a) lungimea laturii cubului și aria totală a acestuia;

b) tangenta unghiului format de diagonala BD' cu planul (ADD');

c) măsura unghiului format de muchia CD cu planul (BDD').

5. Aria secțiunii diagonale $ACC'A'$ a unui cub $ABCDA'B'C'D'$ este egală cu $36\sqrt{2}$ cm^2. Calculați:

a) lungimea laturii cubului;

b) diagonala cubului;

c) aria și volumul cubului;

d) sinusul unghiului format de diagonala cubului cu o față laterală.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub în care M și N sunt mijloacele laturilor CC' și $C'D'$. Dacă $MN = 8\sqrt{2}$ cm, calculați:

a) latura cubului;

b) diagonala cubului;

c) aria totală și volumul cubului;

d) măsura unghiului format de diagonalele AD' și $A'B$.

7. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu O_1 centrul feței $ADD'A'$ și cu O_2 centrul feței $CDD'C'$. Se știe că $O_1O_2 = 4\sqrt{2}$ cm.

a) Calculați lungimea laturii cubului, aria totală și volumul acestuia.

b) Stabiliți poziția dreptei O_1O_2 față de planul $(B'AC)$.

c) Calculați măsura unghiului format de dreapta O_1O_2 cu muchia AB.

8. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $BD' = 12\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) lungimea laturii cubului;

b) aria și volumul cubului;

c) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD').

9. Volumul cubului $ABCDA'B'C'D'$ este de 216 cm^3. Calculați:

a) lungimea laturii cubului;

b) aria cubului;

c) distanța de la vârful A la planul $(A'BD)$.

PE Aprofundare și performanță ***

10. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are aria egală cu 600 cm^2. Calculați:
a) lungimea laturii cubului;
b) volumul cubului;
c) distanța de la C' la dreapta $A'D$.

11. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 10 cm, iar M, N și P mijloacele muchiilor AB, $C'D'$ și, respectiv, AD. Calculați:
a) diagonala, aria și volumul cubului; b) aria triunghiului MNP;
c) cosinusul unghiului diedru format de planele (MNP) și (ABC).

12. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu muchia egală cu 8 cm. Calculați:
a) aria și volumul cubului;
b) distanța de la C' la planul $(D'DB)$;
c) distanța de la A la planul $(D'BC)$.

13. Fie N mijlocul muchiei $C'D'$ în cubul $ABCDA'B'C'D'$. Dacă aria triunghiului NAB este de $8\sqrt{2}$ cm^2, calculați:
a) aria și volumul cubului;
b) aria triunghiului ANC.

14. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia egală cu 12 cm.
a) Calculați aria și volumul cubului.
b) Dacă $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$, calculați tangenta unghiului format de $O'A$ cu planul $(O'BD)$.
c) Calculați distanța de la A la $O'D$.
d) Calculați sinusul unghiului format de planele $(O'AD)$ și $(O'BD)$.

PE-PP Supermate ****

15. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se notează $AC \cap BD = \{O\}$ și $AD' \cap A'D = \{O_1\}$. Știind că $OO_1 = 6\sqrt{2}$ cm, calculați:
a) latura cubului;
b) aria și volumul cubului;
c) distanța de la B' la planul $(D'AC)$;
d) măsura unghiului format de dreptele $D'O$ și BC'.

16. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de 12 cm, iar $F \in A'B'$ astfel încât $A'F \equiv FB'$, $E \in A'D'$ astfel încât $A'E \equiv ED'$ și $G \in CD$ astfel încât $DG \equiv GC$. Calculați:
a) aria, volumul și diagonala cubului;
b) aria triunghiului EFG;
c) cosinusul unghiului diedru format de planele (EFG) și (ABC);
d) măsura unghiului format de dreptele AB' și BC';
e) sinusul unghiului format de dreapta DC cu planul $(D'AC)$.

17. Fie M mijlocul muchiei $D'C'$ în cubul $ABCDA'B'C'D'$. Dacă aria triunghiului MAB este de $18\sqrt{2}$ cm^2, calculați:
a) aria totală și volumul cubului;
b) distanța de la A la dreapta MC;
c) aria triunghiului MAC.

PE-PP

4. Prisma triunghiulară regulată

Prisma triunghiulară regulată este prisma dreaptă cu baza un triunghi echilateral.

$$\mathcal{P}_b = 3l, \qquad \mathcal{A}_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}, \qquad \mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h, \qquad \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h.$$

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor am notat cu l, R, a_b, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ latura bazei unei prisme triunghiulare regulate, raza cercului circumscris bazei, apotema bazei, înălțimea prismei, aria laterală, aria totală și volumul prismei. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
l	12				9			
R		$6\sqrt{3}$				$4\sqrt{3}$		$2\sqrt{3}$
a_b			$2\sqrt{3}$					
h	8	6	10	10			$4\sqrt{3}$	
$\mathcal{A}_l$				540	324	324		360
$\mathcal{A}_t$								
$\mathcal{V}$							108	

PE Aplicare și exersare **

2. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are la bază triunghiul echilateral ABC de latură $AB = 8$ cm și muchia $AA' = 4$ cm. Punctul D este mijlocul laturii BC. Calculați:

a) aria totală și volumul prismei; b) distanța de la D la dreapta $A'B'$;

c) măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele (DAA') și (ABB').

3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 18$ cm și înălțimea $AA' = 9$ cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul prismei;

b) distanța de la A' la dreapta BC.

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu $AA' = 6\sqrt{3}$ cm și raza cercului circumscris bazei de $4\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) aria totală a prismei;

b) volumul prismei;

c) distanța de la B la planul $(B'AC)$.

5. Într-o prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ se cunosc latura bazei $AB = 8$ cm și $\sphericalangle(B'A, (ABC)) = 60°$.

a) Arătați că înălțimea prismei este egală cu $8\sqrt{3}$ cm.

b) Calculați aria totală și volumul prismei.

6. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are volumul egal cu $160\sqrt{3}$ cm^3 și înălțimea $AA' = 10$ cm. Calculați:

a) latura bazei; b) aria totală a prismei; c) distanța de la C' la latura AB.

7. Prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are aria totală de $162\sqrt{3}$ cm^2 și aria laterală de $108\sqrt{3}$ cm^2. Calculați:

a) latura bazei și înălțimea prismei;

b) volumul prismei;

c) tangenta unghiului diedru format de planele $(A'BC)$ și (ABC).

8. Prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are latura bazei $AB = 12$ cm și aria laterală de 288 cm^2. Calculați:

a) înălțimea prismei; b) volumul prismei; c) diagonala unei fețe laterale.

PE Aprofundare și performanță ***

9. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghiul echilateral ABC. Se știe că $AB \equiv AA'$, iar volumul prismei este egal cu $432\sqrt{3}$ cm^3.

a) Calculați lungimea laturii AB.

b) Calculați aria totală a prismei.

c) Dacă D este mijlocul laturii BC, calculați distanța de la B' la AD.

d) Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planul $(B'AD)$ cu planul (BCC').

10. Volumul unei prisme triunghiulare regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ este de $54\sqrt{3}$ cm^3, iar înălțimea prismei este $AA' = 6$ cm.

a) Calculați aria totală a prismei.

b) Dacă M, N, P și Q sunt mijloacele muchiilor AA', AC, CC' și, respectiv, BC, calculați sinusul unghiului format de dreptele MN și PQ.

11. Se consideră prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, în care se cunosc $AB = 8$ cm și $AA' = 16$ cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul prismei;

b) aria triunghiului BMC', unde $M \in AA'$ și $AM \equiv MA'$;

c) distanța de la C' la dreapta de intersecție a planelor (MBC') și (ABC).

12. Se dă prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu latura bazei de 8 cm și înălțimea de 6 cm. Calculați:

a) aria totală și volumul prismei;

b) cosinusul unghiului format de dreptele $A'C$ și BC'.

13. Prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are diagonala unei fețe laterale egală cu 15 cm și înălțimea de 9 cm. Calculați:

a) latura bazei;

b) aria totală și volumul prismei;

c) distanța de la B' la dreapta CD, unde D este mijlocul laturii AB.

14. O prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are latura bazei egală cu 8 cm și volumul de $64\sqrt{3}$ cm^3. Calculați:

a) înălțimea prismei;

b) aria totală a prismei;

c) măsura unghiului diedru format de planele $(B'AC)$ și (ABC).

15. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu latura bazei egală cu 6 cm. Știind că măsura unghiului dintre BC' și $A'C$ este de $60°$, calculați volumul prismei.

16. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă. Știind că $AB = 6$ cm și că $(A'BC)$ face cu planul (ABC) un unghi având măsura de $60°$, calculați:

a) aria totală a prismei;

b) volumul prismei;

c) diagonala unei fețe laterale.

17. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu latura bazei egală cu 6 cm, iar diagonala unei fețe laterale egală cu 10 cm. Calculați:

a) aria laterală, aria totală și volumul prismei;

b) distanța de la C' la latura AB;

c) sinusul unghiului diedru format de planele $(C'AB)$ și (ABC).

PE-PP Supermate ****

18. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă, iar punctul $M \in AA'$, astfel încât $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}$, și punctul $N \in CC'$, astfel încât $\frac{CN}{NC'} = \frac{1}{2}$. Dacă latura bazei este $AB = 6$ cm și muchia $AA' = 9\sqrt{3}$ cm, calculați:

a) distanța de la M la dreapta de intersecție a planelor (BMN) și (ABC);

b) aria triunghiului BMN;

c) distanța de la A la planul (BMN).

19. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu $AA' = 12$ cm. Știind că aria secțiunii $ADD'A'$ este de 288 cm^2, unde D și D' sunt mijloacele laturilor BC, respectiv $B'C'$, calculați:

a) distanța de la C' la AD;

b) distanța de la A la planul $(A'BC)$;

c) aria triunghiului $A'MG$ și distanța de la G la $A'M$, unde $M \in DD'$, astfel încât $DM \equiv MD'$, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. Remorca unui autocamion este de forma unui paralelipiped cu lungimea de 6 m, lățimea de 3 m și înălțimea de 2 m. Deoarece remorca trebuie încărcată cu niște cutii de marfă în formă paralelipipedică, având lungimea de 1,2 m, lățimea de 1 m și înălțimea de 0,9 m, șoferul vrea să determine câte cutii au loc și ce volum ocupă ele. Ajutați-l voi!

2. Un bazin pentru apă, de forma unui paralelipiped lung de 3,20 m, lat de 2,6 m și înalt de 50 dm, se vopsește pe exterior. Știind că dintr-un litru de vopsea se pot acoperi aproximativ 10 m^2 de perete, aflați de câți litri de vopsea este nevoie pentru a vopsi pereții bazinului.

3. Într-un acvariu cu dimensiunile bazei de 80 cm și 30 cm, iar înălțimea de 60 cm (figura 1), se toarnă apă până la înălțimea de 40 cm. Se introduc în apă 240 de pietricele, fiecare cu un volum de 2 cm^3. Cu cât se va ridica apa în acvariu?

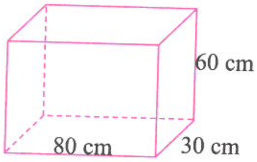


Fig. 1

4. O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 12 m, 5 m și înălțimea de 1,5 m.

a) Câți hectolitri de apă sunt necesari pentru umplerea piscinei?

b) Dacă din piscină se evacuează 7200 ℓ de apă, calculați cu câți centimetri va scădea nivelul apei din piscină.

5. Dintr-un dreptunghi de carton (figura 2), cu dimensiunile $AB = 60$ cm și $BC = 50$ cm, se decupează la colțuri câte un pătrat cu latura de 15 cm. Dacă se îndoaie benzile laterale rămase și apoi se lipesc pe muchii, se obține o cutie. Care este volumul pe care îl va avea cutia astfel obținută?

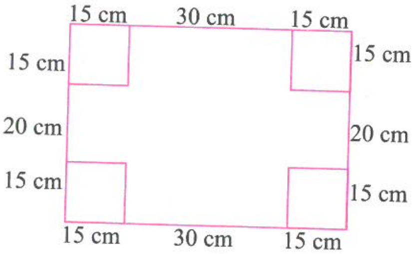


Fig. 2

6. Aflați volumul de aer dintr-o sală de clasă cu următoarele dimensiuni: lungimea 13 m, lățimea 8,5 m și înălțimea 3,5 m. Câți elevi pot învăța în această clasă, socotind câte 10 m^3 de aer necesari pentru fiecare elev?

7. Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 70 cm, 60 cm și înălțimea de 40 cm.

a) Dacă în acvariu se pune apă până la înălțimea de 30 cm, aflați câți litri de apă se introduc în acvariu.

b) Arătați că cea mai mare distanță posibilă între doi pești din acvariu este mai mică de 11 dm.

8. Un șef de șantier vrea să afle câte autobasculante sunt necesare pentru a transporta pământul rezultat din săparea unui șanț de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 7 m, lățimea de 2,5 m și adâncimea de 3,5 m, știind că 1 m^3 de pământ cântărește 2 t și că fiecare autobasculantă poate fi încărcată în medie cu 3500 kg. Ajutați-l voi!

9. Pământul scos de la săparea unei pivnițe în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 6 m, lățimea de 4 m și adâncimea de 3,75 m se așterne într-o grădină de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 0,4 hm și 2,5 dam. Cu cât se va înălța stratul de pământ așternut în această grădină?

10. Un perete cu lungimea de 5,4 m și înălțimea de 3,6 m se construiește din cărămizi având lungimea de 30 cm, lățimea de 18 cm și înălțimea de 12 cm. Știind că peretele trebuie să aibă grosimea de 25 cm după ce este tencuit, aflați câte cărămizi se folosesc la construirea acestuia.

11. O cutie de forma unei prisme patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$ are înălțimea de 100 cm și volumul de 160 dm^3.

a) Calculați latura bazei acestei cutii.

b) Dacă o furnică pornește pe suprafața laterală a cutiei din punctul A până în punctul A', intersectând muchiile BB', CC' și DD', arătați că lungimea minimă a acestui drum este cuprinsă între 18 dm și 19 dm.

12. Un acvariu de forma unui paralelipiped dreptunghic, cu lungimea de 16 dm, lățimea de 12 dm și înălțimea de 20 dm, se umple cu apă până la înălțimea de 15 dm.

a) Câți litri de apă se introduc în acvariu?

b) Dacă în acvariu sunt pești, calculați care este cea mai mare distanță la care pot fi situați doi pești în acvariu.

c) Dacă în acvariu se introduc 12 cuburi cu latura de 4 dm, calculați cu câți centimetri se ridică apa în acvariu.

13. Un bazin pentru apă are forma unei prisme triunghiulare regulate $ABCA'B'C'$, cu $AB =$ $= 24$ dm și $AA' = 25$ dm. Bazinul se umple cu apă la trei pătrimi din capacitatea sa și, după ce se închide ermetic, se așază pe planul $ABB'A'$ ca bază. Calculați până la ce înălțime se ridică apa în bazin în această situație.

14. Un cort are forma unei prisme triunghiulare regulate $ABCDEF$ cu dimensiunile $AB =$ $= 12$ dm și $AD = 24$ dm (figura 3).

a) Verificați dacă 9,9 m^2 de pânză sunt suficienți pentru realizarea cortului, știind că se folosește pânză și pentru baza $ADFC$.

b) Care este volumul de aer din cort?

15. O hală industrială cu forma din figura 4 este realizată din tablă. Se știe că $ABCDA'B'C'D'$ are forma unui paralelipiped dreptunghic și $A'B'EC'D'F$ este o prismă triunghiulară regulată. Știind că $AB = 6$ m, $BC = 12$ m și $AA' = 4$ m:

a) verificați dacă 320 m^2 de tablă sunt suficienți pentru a realiza această hală;

b) aflați care este volumul de aer din această hală.

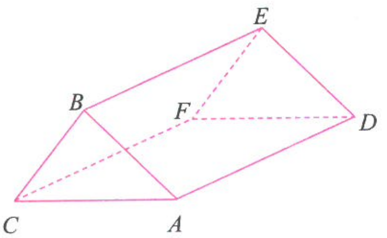


Fig. 3

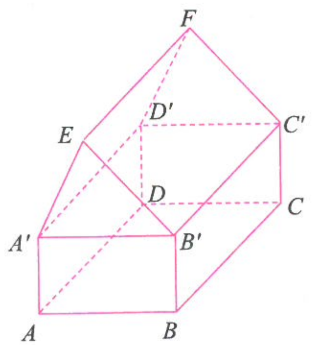


Fig. 4

TESTUL 1

Subiectul I

1. Dacă un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile egale cu 9 cm, 12 cm şi 20 cm, atunci lungimea diagonalei paralelipipedului este egală cu … cm.

2. Dacă un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei egale cu 18 cm şi 24 cm, iar înălţimea lui este de 40 cm, atunci tangenta unghiului format de diagonala paralelipipedului cu planul bazei este egală cu … .

3. Dacă un cub are diagonala egală cu $6\sqrt{3}$ cm, atunci aria cubului este egală cu … cm^2.

4. Dacă o prismă triunghiulară regulată dreaptă are latura bazei egală cu 6 cm şi aria laterală de 144 cm^2, atunci înălţimea prismei este … cm.

5. Dacă o prismă triunghiulară regulată dreaptă are raza cercului circumscris bazei egală cu $4\sqrt{3}$ cm şi aria laterală de 360 cm^2, atunci volumul prismei este … cm^3.

6. Dacă suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 96 cm, iar lungimea diagonalei acestuia este de $8\sqrt{3}$ cm, atunci aria totală a paralelipipedului este … cm^2.

7. Dacă volumul unui cub este egal cu 512 cm^3, atunci aria cubului este egală cu … cm^2.

8. Dacă într-un paralelipiped dreptunghic lungimile diagonalelor feţelor sale sunt egale cu 20 cm, $4\sqrt{34}$ cm şi $4\sqrt{41}$ cm, atunci lungimea diagonalei paralelipipedului este de … cm.

9. Dacă dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt direct proporţionale cu numerele 3, 4 şi 6, iar suma lor este 26 cm, atunci volumul paralelipipedului este egal cu … cm^3.

Subiectul al II-lea

1. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm şi $AA' = 12$ cm. Calculaţi:

a) diagonala paralelipipedului;
b) distanţa de la punctul A la dreapta BC';
c) măsura unghiului format de diagonala AC' cu planul (ABC).

2. O prismă regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza un pătrat are latura bazei $AB = x$ cm ($x > 0$) şi muchia $AA' = x\sqrt{3}$ cm ($x > 0$). Dacă $AD' \cap A'D = \{O\}$, astfel încât $C'O = 12\sqrt{2}$ cm, calculaţi:

a) lungimea laturii AB, determinând valoarea lui x;
b) aria triunghiului $C'OB$;
c) sinusul unghiului determinat de dreptele BO şi AC;
d) aria totală şi volumul prismei.

3. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala $AC' = 12\sqrt{2}$ cm. Dacă $BD' \perp A'C$ şi $\sphericalangle((B'AD), (ABC)) = 60°$, calculaţi:

a) aria totală şi volumul paralelipipedului;
b) sinusul unghiului format de dreapta BD' cu planul (ADD');
c) distanţa de la punctul A' la dreapta MC, unde M este mijlocul laturii AB.

TESTUL 2

Subiectul I

1. Dacă un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $a = 6$ cm, $b = 8$ cm și $c = 10$ cm, aria totală a acestuia este egală cu … cm^2.

2. Dacă suma lungimilor tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 116 cm, iar diagonala paralelipipedului este de 21 cm, atunci aria totală a acestuia este egală cu … cm^2.

3. Un cub cu latura de 8 cm are aria egală cu … cm^2.

4. Un cub cu volumul de 1000 cm^3 are diagonala egală cu … cm.

5. Dacă o prismă triunghiulară regulată are aria laterală de 1080 cm^2 și înălțimea de 15 cm, atunci latura bazei este de … cm.

6. Dacă o prismă triunghiulară regulată dreaptă are volumul de $240\sqrt{3}$ cm^3 și latura bazei de 8 cm, atunci înălțimea prismei este egală cu … cm.

7. Dacă într-un paralelipiped dreptunghic lungimile diagonalelor fețelor sale sunt egale cu $6\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{65}$ cm și $4\sqrt{13}$ cm, atunci lungimea diagonalei paralelipipedului este egală cu … cm.

8. Dacă un cub are aria de 294 cm^2, atunci volumul cubului este egal cu … cm^3.

9. Dacă o prismă triunghiulară regulată dreaptă are latura bazei de 12 cm și înălțimea de 8 cm, atunci aria laterală a prismei este egală cu … cm^2.

Subiectul al II-lea

1. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are latura $AB = 12$ cm.

a) Calculați aria și volumul cubului.

b) Dacă M este mijlocul muchiei $D'C'$ și N este mijlocul muchiei AD, calculați distanța de la punctul M la dreapta NB.

c) Calculați tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MNB) și (ABC).

2. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 16$ cm, $BC = 15$ cm și $AA' = 20$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul paralelipipedului;

b) aria triunghiului $A'DC'$;

c) distanța de la punctul D' la planul $(A'DC')$.

3. Se consideră prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, care are $AB = 12$ cm și $AA' = 12\sqrt{2}$ cm.

a) Calculați aria totală și volumul prismei.

b) Calculați măsura unghiului format de dreptele $A'C$ și BC'.

c) Dacă $M \in AC$, astfel încât $AC \equiv CM$, calculați distanța de la punctul A' la dreapta BM.

TESTUL 3

Subiectul I

1. Un cub cu diagonala egală cu $6\sqrt{3}$ cm are volumul egal cu … cm^3.

2. Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm și 9 cm are diagonala egală cu … cm.

3. O prismă triunghiulară regulată dreaptă cu latura bazei de 12 cm și aria laterală egală cu 648 cm^2 are înălțimea egală cu … cm.

4. O prismă patrulateră regulată dreaptă cu aria totală de 448 cm^2 și aria laterală de 320 cm^2 are înălțimea egală cu … cm.

5. Un cub cu aria de 384 cm^2 are volumul egal cu … cm^3.

6. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt proporționale cu numerele 4, 12 și 3, iar volumul său este egal cu 1152 cm^3. Aria totală a paralelipipedului este egală cu … cm^2.

7. O prismă triunghiulară regulată dreaptă are volumul egal cu $288\sqrt{3}$ cm^3 și înălțimea de 8 cm. Aria laterală a prismei este egală cu … cm^2.

8. O prismă patrulateră regulată dreaptă are dimensiunile proporționale cu 5 și 6, iar volumul egal cu 1200 cm^3. Aria laterală a prismei este egală cu … cm^2.

9. Un paralelipiped dreptunghic are suma lungimilor tuturor dimensiunilor lui egală cu 96 cm, iar aria totală de 376 cm^2. Diagonala paralelipipedului este egală cu … cm.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ care are dimensiunile $AB = 18$ cm și $AA' = 9$ cm. Aflați:

a) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(C'AD)$ și (ABC), unde D este mijlocul laturii BC;

b) distanța de la C la planul $(C'AD)$;

c) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ și (BCC').

2. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 25$ cm, $AD = 12$ cm și $AA' = 15$ cm. Se consideră punctul $M \in AB$, astfel încât $AM = 9$ cm și punctul N, mijlocul muchiei $D'C'$. Aflați:

a) aria totală și volumul paralelipipedului;

b) distanța de la punctul N la dreapta MD;

c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MDN) și (ABC).

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul cubului;

b) măsura unghiului format de dreptele BC' și $B'D$;

c) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(C'BD)$ și (ACC').

PE

Nume ______________________________ **Clasa** ________

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă diagonala unui cub este $8\sqrt{3}$ cm, atunci volumul cubului este .... cm^3.

(0,5p) **2.** Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm și 9 cm. Atunci diagonala paralelipipedului este de .... cm.

(0,5p) **3.** O prismă triunghiulară regulată dreaptă are înălțimea egală cu 8 cm și aria laterală de 240 cm^2. Volumul prismei este egal cu .... cm^3.

(0,5p) **4.** O prismă patrulateră regulată dreaptă are latura bazei de 10 cm și înălțimea de $10\sqrt{2}$ cm. Atunci diagonala prismei este de .... cm.

(0,5p) **5.** Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AD = AA' = 8$ cm și $AB = 8\sqrt{2}$ cm. Distanța de la vârful A la diagonala BD' este egală cu .... cm.

(0,5p) **6.** Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu latura de 12 cm, distanța de la C la AD' este egală cu .... cm.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** În prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ se știe că $AA' = 6$ cm și $A'B = 12$ cm. Volumul prismei este de:

A. $216\sqrt{3}$ cm^3 B. $54\sqrt{3}$ cm^3 C. $162\sqrt{3}$ cm^3 D. $864\sqrt{3}$ cm^3

(0,5p) **2.** Prisma patrulateră regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are $AA' = 6$ cm și aria secțiunii diagonale $BDD'B'$ egală cu $72\sqrt{2}$ cm^2. Volumul prismei este de:

A. $864\sqrt{3}$ cm^3 B. 864 cm^3 C. $216\sqrt{3}$ cm^3 D. 216 cm^3

(0,5p) **3.** Aria unui cub este de 864 cm^2. Volumul cubului este de:

A. 432 cm^3 B. 864 cm^3 C. 576 cm^3 D. 1728 cm^3

(0,5p) **4.** Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile egale cu 6 cm, 8 cm și $10\sqrt{3}$ cm. Diagonala paralelipipedului este de:

A. 12 cm B. 20 cm C. 16 cm D. 24 cm

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 8$ cm, $CC' = 6$ cm și $C'E = 2\sqrt{22}$ cm, unde E este mijlocul lui AB. Calculați:

(0,5p) a) aria totală și volumul paralelipipedului;

(0,5p) b) distanța de la A' la BC'.

2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu $AB = 12$ cm şi $AA' = 6$ cm. Calculaţi:

(0,5p) a) distanţa de la B' la AC;

(0,5p) b) distanţa de la C' la AD, unde D este mijlocul laturii BC;

(0,5p) c) distanţa de la C la planul $(C'AD)$.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 8$ cm. Calculaţi:

(0,5p) a) distanţa de la A la BD';

(0,5p) b) distanţa de la A la CD';

(0,5p) c) măsura unghiului format de AD' cu planul (BDD').

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3
Punctajul													
Nota													

PE-PP 5. Piramida regulată

Piramida regulată are baza un poligon regulat, iar proiecția ortogonală a vârfului piramidei pe planul bazei este centrul cercului circumscris poligonului de bază.

Muchiile laterale ale unei piramide regulate sunt congruente.

Înălțimea unei fețe laterale se numește **apotema piramidei**.

Notații:

$\mathscr{P}_b$ – perimetrul bazei;

a_b – apotema bazei;

r – raza cercului înscris bazei;

h – înălțimea piramidei;

a_p – apotema piramidei;

R – raza cercului circumscris bazei;

m – muchia laterală a piramidei.

Formule utile:

$\mathscr{A}_l$ = suma ariilor fețelor laterale; $\mathscr{A}_l = \dfrac{\mathscr{P}_b \cdot a_p}{2}$ sau $\mathscr{A}_l = \dfrac{n \cdot l \cdot a_p}{2}$,

unde n este numărul de laturi ale poligonului de la bază;

$\mathscr{A}_t = \mathscr{A}_l + \mathscr{A}_b$; $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{A}_b \cdot h$;

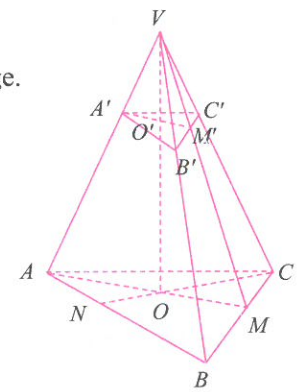
$m^2 = h^2 + R^2$; $a_p^2 = a_b^2 + h^2$.

Observație:

Dacă se secționează o piramidă cu un plan paralel cu baza, se obține o piramidă asemenea cu piramida inițială.

$(A'B'C') \parallel (ABC) \Rightarrow VA'B'C' \sim VABC$

Notăm cu k raportul de asemănare a două segmente omoloage.



1. $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{VM'}{VM} = \dfrac{O'M'}{OM} = \dfrac{A'O'}{AO} = \dfrac{VA'}{VA} = k$.

2. $\dfrac{\mathscr{A}_{\Delta A'B'C'}}{\mathscr{A}_{\Delta ABC}} = k^2$; $\dfrac{\mathscr{A}_{l\,VA'B'C'}}{\mathscr{A}_{l\,VABC}} = k^2$.

3. $\dfrac{\mathscr{V}_{VA'B'C'}}{\mathscr{V}_{VABC}} = k^3$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor am notat cu l, h, a_p, m, R, a_b, $\mathscr{A}_l$, $\mathscr{A}_t$ și $\mathscr{V}$ latura bazei unei piramide triunghiulare regulate, înălțimea piramidei, apotema piramidei, muchia laterală a piramidei, raza cercului circumscris bazei, apotema bazei, aria laterală, aria totală și, respectiv, volumul piramidei. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
l	24		$12\sqrt{3}$		18	
h	12	6		$6\sqrt{3}$		
a_p		10				
m						12
R				12		
a_b						$2\sqrt{3}$
$\mathcal{A}_l$			$216\sqrt{3}$			
$\mathcal{A}_t$						
$\mathcal{V}$					243	

2. În tabelul următor am notat cu l, h, a_p, m, R, a_b, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ latura bazei unei piramide patrulatere regulate, înălțimea piramidei, apotema piramidei, muchia laterală a piramidei, raza cercului circumscris bazei, apotema bazei, aria laterală, aria totală și, respectiv, volumul piramidei. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
l	24					
h	9	12		12		
a_p		15				
m						18
R						$9\sqrt{2}$
a_b			9			
$\mathcal{A}_l$			540		960	
$\mathcal{A}_t$					1536	
$\mathcal{V}$				576		

3. O piramidă hexagonală regulată are înălțimea egală cu 9 cm și latura bazei de 18 cm. Aflați aria laterală și volumul piramidei.

4. O piramidă hexagonală regulată are înălțimea egală cu 6 cm și apotema de 12 cm. Aflați aria totală și volumul piramidei.

5. O piramidă hexagonală regulată are aria laterală egală cu $288\sqrt{3}$ cm^2 și latura bazei egală cu 8 cm. Aflați aria totală și volumul piramidei.

6. O piramidă hexagonală regulată are apotema egală cu $12\sqrt{3}$ cm și aria totală de $648\sqrt{3}$ cm^2. Aflați latura bazei și volumul piramidei.

PE Aplicare și exersare **

7. O piramidă triunghiulară regulată are apotema de 12 cm și înălțimea de 6 cm. Calculați:
a) aria totală și volumul piramidei;
b) măsura unghiului diedru format de o față laterală cu planul bazei;
c) distanța de la un vârf al bazei la o față laterală opusă acestuia.

8. O piramidă patrulateră regulată are apotema de 12 cm și perimetrul bazei de 48 cm.
a) Calculați aria totală și volumul piramidei.
b) Aflați măsura unghiului diedru format de o față laterală cu planul bazei.
c) Calculați tangenta unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.

9. Piramida regulată $SABC$ are latura bazei $AB = 18$ cm și înălțimea $SO = 6$ cm. Calculați:
a) aria laterală și volumul piramidei;
b) măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
c) distanța de la un vârf al bazei la o față laterală opusă acestuia.

10. O piramidă patrulateră regulată are înălțimea de $5\sqrt{3}$ cm și apotema de 10 cm. Calculați:
a) aria laterală și volumul piramidei;
b) tangenta unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
c) tangenta unghiului format de o muchie laterală cu o secțiune diagonală.

11. Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are muchia laterală $SA = 12$ cm și raza cercului circumscris bazei de $4\sqrt{3}$ cm. Calculați:
a) aria totală și volumul piramidei;
b) sinusul unghiului diedru format de planele (SAB) și (SAD), unde D este mijlocul laturii BC.

12. O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de 18 cm și înălțimea de $9\sqrt{2}$ cm.
a) Calculați aria laterală și volumul piramidei.
b) Aflați cosinusul unghiului diedru format de o față laterală cu secțiunea diagonală.
c) Calculați tangenta unghiului diedru determinat de o față laterală cu planul bazei.

13. O piramidă hexagonală regulată are perimetrul bazei egal cu 72 cm și înălțimea de 6 cm.
a) Calculați aria laterală și volumul piramidei.
b) Aflați măsura unghiului diedru format de o față laterală cu planul bazei.

14. Piramida regulată $SABCDEF$ are apotema de 18 cm și înălțimea de 9 cm. Calculați:
a) aria laterală și volumul piramidei;
b) sinusul unghiului diedru format de planele (SAB) și (SDE).

15. O piramidă hexagonală regulată are înălțimea de 10 cm și apotema de $5\sqrt{7}$ cm. Calculați:
a) aria laterală și volumul piramidei;
b) măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei.

16. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei egală cu 9 cm și înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm. Calculați:
a) aria totală și volumul piramidei;
b) distanța de la un vârf al bazei la o față laterală;
c) măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.

17. Într-o piramidă patrulateră regulată, latura bazei este de $12\sqrt{3}$ cm, iar muchia laterală este egală cu $12\sqrt{6}$ cm. Aflați:

a) aria totală şi volumul piramidei;

b) măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei;

c) distanța de la un vârf al bazei la o față laterală opusă acestuia.

PE Aprofundare și performanță ***

18. Piramida regulată $VABCD$ are latura bazei egală cu $18\sqrt{2}$ cm, iar măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei este egală cu $45°$.

a) Calculați aria totală şi volumul piramidei.

b) Calculați tangenta unghiului diedru format de o față laterală cu planul bazei.

c) Fie M un punct pe muchia CV. Determinați cosinusul unghiului diedru format de planele (MBD) şi (ABC), astfel încât aria triunghiului MBD să fie minimă.

19. Într-o piramidă patrulateră regulată, latura bazei este egală cu 16 cm, iar măsura unghiului diedru format de o față laterală cu planul bazei este de $60°$. Calculați:

a) volumul şi aria totală ale piramidei;

b) sinusul unghiului diedru format de două fețe laterale alăturate;

c) sinusul unghiului format de două muchii laterale opuse ale piramidei.

20. Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are înălțimea $SO = 4\sqrt{3}$ cm, iar raza cercului circumscris bazei egală cu 8 cm.

a) Calculați volumul şi aria totală ale piramidei.

b) Dacă D este mijlocul laturii BC, calculați distanța de la D la planul (SAB).

c) Calculați măsura unghiului format de planele (SBC) şi (ABC).

21. Piramida regulată $SABC$ are înălțimea $SO = 12$ cm şi latura bazei $AB = 24$ cm. Calculați:

a) volumul şi aria laterală ale piramidei;

b) distanța de la centrul bazei la o față laterală;

c) distanța de la un vârf al bazei la o față laterală opusă lui;

d) la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât ariile laterale ale celor două corpuri formate prin secționare să fie egale.

22. Piramida $VABCD$ are înălțimea $VO = 8\sqrt{2}$ cm şi latura bazei $AB = 16$ cm. Calculați:

a) aria totală şi volumul piramidei;

b) măsura unghiului format de muchia VA cu planul (VBD);

c) sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (VBC) şi (VAD).

23. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei egală cu 18 cm, iar secțiunea diagonală este echivalentă cu baza. Calculați:

a) aria laterală şi volumul piramidei;

b) sinusul unghiului diedru format de două fețe laterale alăturate ale piramidei;

c) poziția unui punct M situat pe muchia VC, astfel încât aria triunghiului MBD să fie minimă.

24. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $VA = 12$ cm şi măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei egală cu $45°$.

a) Calculați aria laterală şi volumul piramidei.

b) Calculați sinusul unghiului diedru format de planul (VBC) cu planul (VAC).

c) Dacă M este mijlocul muchiei VC, calculați aria triunghiului MBD.

d) Arătați că dreapta VA este paralelă cu planul (MBD).

25. Tetraedrul $SABC$ are baza un triunghi echilateral cu latura $AB = 8\sqrt{3}$ cm și înălțimea $SO = 8$ cm, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

a) Calculați aria totală și volumul tetraedrului.

b) Dacă M este mijlocul laturii BC, arătați că $BC \perp (SAM)$.

c) Demonstrați că distanța de la mijlocul înălțimii SO la dreapta SA este mai mică decât 3 cm.

d) Aflați valoarea tangentei unghiului diedru format de planele (SAC) și (SAM).

26. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are înălțimea $VO = 6\sqrt{2}$ cm și muchia laterală $VA = 12$ cm.

a) Calculați aria laterală și volumul piramidei.

b) Calculați valoarea sinusului unghiului format de muchia VB cu planul (VAC).

c) Fie T un punct situat pe segmentul DC, astfel încât $VT + TM$ să aibă lungimea minimă. Calculați lungimea segmentului TC, unde $M \in BC$ și $BM \equiv MC$.

27. Piramida regulată $VABCD$ are înălțimea $VO = 6\sqrt{2}$ cm, iar latura bazei $AB = 12$ cm.

a) Aflați aria totală și volumul piramidei.

b) Calculați valoarea sinusului unghiului diedru format de planele (VAB) și (VDC).

c) Fie H un punct situat pe înălțimea VO a piramidei. Știind că distanța de la punctul H la planul (ABC) este egală cu distanța de la punctul H la planul (VBC), calculați lungimea segmentului OH.

PE-PP Supermate ****

28. Se consideră piramida regulată $VABC$ cu înălțimea $VO = 2\sqrt{6}$ cm, $O \in (ABC)$ și muchia bazei $AB = 12$ cm.

a) Calculați aria laterală și volumul piramidei.

b) Arătați că $VA \perp VD$, unde D este mijlocul laturii BC.

c) Calculați măsura unghiului format de dreapta VD cu latura AB.

d) Aflați măsura unghiului diedru format de planele (VAD) și (VAB).

29. Fie $SABC$ un tetraedru regulat cu latura egală cu 18 cm.

a) Calculați aria totală și volumul tetraedrului.

b) Dacă $M \in (SA)$, astfel încât $SM \equiv MA$, calculați volumul tetraedrului $SMBC$.

c) Calculați valoarea sinusului unghiului format de planele (MBC) și (SBC).

30. Fie $SABC$ un tetraedru cu baza ABC un triunghi echilateral de centru O și latura $AB =$ $= 12$ cm. Știind că muchiile laterale sunt congruente și că $SA \perp SB \perp SC \perp SA$:

a) arătați că înălțimea tetraedrului este egală cu $2\sqrt{6}$ cm;

b) calculați aria laterală și volumul tetraedrului;

c) aflați măsura unghiului diedru format de planele (SAM) și (SAB), unde M este mijlocul laturii BC.

31. Tetraedrul regulat $ABCD$ are înălțimea AO, iar M este proiecția punctului O pe muchia AB. Știind că $MD = 5\sqrt{7}$ cm:

a) arătați că $AB = 15$ cm;

b) calculați valoarea sinusului unghiului format de dreapta MD cu planul (AOC);

c) calculați NO, unde N este un punct situat pe înălțimea AO, aflat la egală distanță de toate fețele tetraedrului.

PE-PP Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1. Un siloz pentru cereale are forma corpului din figura 1, care este alcătuit dintr-un cub și o piramidă patrulateră regulată.

a) Dacă pereții laterali sunt realizați din tablă, calculați câți metri pătrați de tablă sunt necesari pentru a realiza silozul.

b) Verificați dacă volumul silozului este mai mic decât 1983 m^3. Justificați răspunsul dat, știind că $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$.

2. Bazinul de apă din figura 2 este format dintr-un cub cu latura de 8 m și o piramidă patrulateră regulată cu muchia laterală de 6 m.

a) Dacă bazinul este plin cu apă, câți hectolitri de apă încap în bazin?

b) Dacă din bazin se evacuează 160 hl de apă, cu câți metri scade apa în bazin?

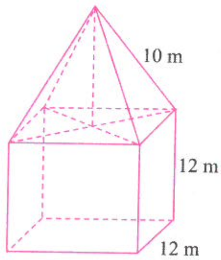


Fig. 1

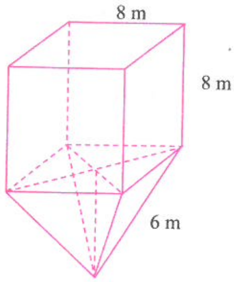


Fig. 2

3. Un cort are forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ cu latura bazei de 12 m și cu fețele laterale triunghiuri echilaterale. Se știe că atât suprafața laterală, cât și baza piramidei sunt realizate dintr-un material impermeabil.

a) Calculați câți metri pătrați de material impermeabil sunt necesari pentru realizarea acestui cort, exprimat prin acel număr întreg suficient pentru a putea realiza cortul.

b) În punctul O_1, centrul cercului înscris în triunghiul VAC, se montează o lampă de iluminat. Arătați că lungimea cablului VO_1 este mai mică decât 5,2 m.

4. Acoperișul unei cabane are forma unei piramide patrulatere regulate, cu latura bazei de 124 dm egală cu apotema piramidei.

a) Câți metri pătrați de tablă sunt necesari pentru acoperiș, știind că la îmbinări se pierde 10% din întreaga suprafață?

b) Sub ce unghi este realizată panta acoperișului?

5. O prismă triunghiulară regulată din lemn, cu latura bazei de 24 cm egală cu înălțimea prismei, este cioplită până se realizează o piramidă triunghiulară regulată cu aceeași înălțime.

a) Care este volumul piesei piramidale?

b) Arătați că aria laterală a acestei piramide este mai mică decât 900 cm^2.

6. O piesă a unui joc este formată din două piramide patrulatere regulate care au aceeași bază (figura 3). Latura bazei este de 2,4 dm, iar înălțimile piramidelor sunt de 0,9 dm și 1,6 dm.

a) Care este suprafața acestei piese?

b) Știind că piesa este realizată din lemn de brad cu densitatea de 410 g/dm^3, arătați că piesa cântărește mai puțin decât 2 kg.

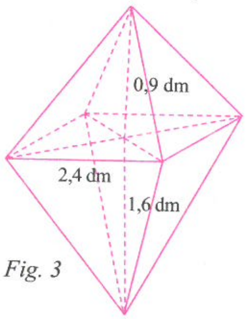


Fig. 3

7. Un bazin, reprezentat schematic în figura 4, are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$ în interiorul căruia se află piramida patrulateră regulată $OA'B'C'D'$. Muchia cubului este egală cu 6 dm.

a) Calculați cantitatea de apă ce poate fi introdusă în bazin, interiorul acestuia fiind considerat piramida regulată.

b) Verificați dacă suprafața laterală a bazinului, sub forma piramidei, este mai mică decât 2,5 m^2.

8. Figura 5 reprezintă schematic un siloz pentru cereale. $SABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, iar $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu $AB = 16$ m, $AA' = 20$ m și $SO = 6$ m.

a) Calculați suprafața laterală a pereților silozului.

b) Verificați dacă volumul silozului este mai mare decât 5600 m^3.

c) Un alpinist utilitar vrea să ajungă din punctul A' în punctul S pe drumul cel mai scurt. Arătați că lungimea acestui drum este cuprinsă între 31 m și 32 m.

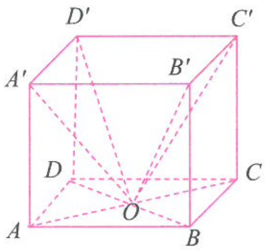


Fig. 4

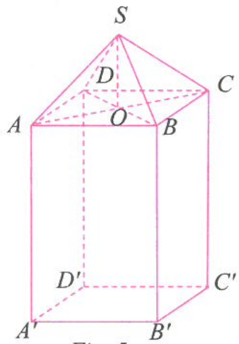


Fig. 5

9. Un cort are forma unei piramide patrulatere regulate cu latura bazei de 8 m și înălțimea de 4 m.

a) Calculați aria totală a piramidei și aproximați până la cel mai apropiat întreg. Calculați câți metri pătrați de pânză sunt necesari pentru realizarea cortului, știind că 10% din întreaga suprafață reprezintă pierderile la îmbinări.

b) În cort se instalează o lampă de iluminat atârnată de un fir din vârful piramidei, astfel încât distanțele de la această lampă la baza piramidei și la fețele laterale să fie egale. Arătați că lungimea firului de care este atârnată lampa este mai mică decât 2,4 m.

TESTUL 1

Subiectul I

1. Dacă o piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 12 cm şi înălţimea de 6 cm, atunci volumul piramidei este de … cm^3.

2. Dacă o piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 16 cm şi înălţimea de 6 cm, atunci aria totală a piramidei este de … cm^2.

3. Dacă o piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de 20 cm şi apotema de 16 cm, atunci aria totală a piramidei este egală cu … cm^2.

4. Dacă o piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de $8\sqrt{3}$ cm şi latura bazei de 16 cm, atunci volumul piramidei este egal cu … cm^3.

5. Dacă o piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 18 cm şi apotema de $6\sqrt{3}$ cm, atunci tangenta unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei este egală cu … .

6. Dacă o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 18$ cm şi înălţimea $VO = 18\sqrt{2}$ cm, atunci distanţa de la vârful A la planul (VBC) este egală cu … cm.

7. Dacă o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei de 12 cm, înălţimea $VO =$ $= 12$ cm, iar D este mijlocul laturii $[BC]$, atunci sinusul unghiului diedru format de planele (VAD) şi (VAB) este egal cu … .

8. Dacă o piramidă patrulateră regulată are muchia laterală egală cu $3\sqrt{34}$ cm şi apotema de 15 cm, atunci volumul piramidei este de … cm^3.

9. Dacă o piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 6 cm şi înălţimea de 6 cm, atunci tangenta unghiului diedru format de o faţă laterală cu planul bazei este egală cu … .

Subiectul al II-lea

1. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată care are înălţimea VO de 12 cm şi $\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_l} = \frac{1}{2}$. Calculaţi:

a) volumul piramidei;

b) sinusul unghiului diedru format de planele (VAD) şi (VAB), unde D este mijlocul laturii BC;

c) distanţa de la punctul D la planul (VAB).

2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei $AB = 6$ cm şi secţiunea diagonală echivalentă cu baza. Calculaţi:

a) volumul piramidei;

b) sinusul unghiului format de planele (VBC) şi (VAC);

c) sinusul unghiului diedru format de planele (VAD) şi (VBC).

TESTUL 2

Subiectul I

1. O piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei de 12 cm şi apotema de 8 cm are aria laterală egală cu … cm^2.

2. O piramidă triunghiulară regulată cu înălţimea de $2\sqrt{6}$ cm şi latura bazei de 12 cm are apotema egală cu … cm.

3. Dacă o piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 18 cm şi înălţimea de 9 cm, atunci volumul este egal cu … cm^3.

4. O piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 10 cm şi apotema de 12 cm are aria laterală egală cu … cm^2.

5. O piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 16 cm şi înălţimea de 6 cm are volumul egal cu … cm^3.

6. O piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei de 12 cm şi muchia laterală de 10 cm are aria laterală egală cu … cm^2.

7. Dacă o piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de 20 cm şi latura bazei de 24 cm, atunci aria ei totală este egală cu … cm^2.

8. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei egală cu 24 cm şi înălţimea de $4\sqrt{6}$ cm. Distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală este de … cm.

9. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei egală cu $12\sqrt{3}$ cm şi înălţimea de 6 cm. Măsura unghiului diedru format de o faţă laterală cu planul bazei este de … °.

Subiectul al II-lea

1. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată care are latura bazei $AB = 18\sqrt{2}$ cm şi feţele laterale triunghiuri dreptunghice şi isoscele.

a) Calculaţi aria laterală şi volumul piramidei.

b) Dacă D este mijlocul laturii BC, calculaţi măsura unghiului diedru format de planele (SAB) şi (SAD).

c) Calculaţi distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală.

2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 18 cm şi înălţimea $VO = 9\sqrt{3}$ cm, iar M un punct pe înălţimea VO, astfel încât $\frac{VM}{MO} = \frac{2}{1}$.

a) Calculaţi aria totală şi volumul piramidei.

b) Aflaţi măsura unghiului diedru format de faţa (VBC) cu planul (MBC).

c) Determinaţi poziţia unui punct P pe muchia VC, astfel încât aria triunghiului PBD să fie minimă. Determinaţi cosinusul unghiului diedru format de planele (PDB) şi (ABC).

TESTUL 3

Subiectul I

1. O piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei de 6 cm și înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm are volumul egal cu … cm^3.

2. Fie $VABCD$ o piramidă regulată cu $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Măsura unghiului format de muchia VA cu planul (ABC) este egală cu ...°.

b) Aria laterală a piramidei este egală cu ... cm^2.

c) Volumul piramidei este egal cu … cm^3.

3. Fie $VABCD$ o piramidă regulată cu $AB = 12$ cm și apotema egală cu 12 cm.

a) Înălțimea piramidei este egală cu … cm.

b) Aria laterală a piramidei este egală cu ... cm^2.

c) Volumul piramidei este egal cu … cm^3.

4. Piramida regulată $VABC$ are volumul egal cu 72 cm^3 și înălțimea $VO = 2\sqrt{3}$ cm.

a) Latura bazei este egală cu … cm.

b) Aria laterală a piramidei este egală cu ... cm^2.

Subiectul al II-lea

1. Piramida regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 12\sqrt{3}$ cm și înălțimea $VO = 18$ cm. Se consideră un punct $P \in VO$, astfel încât $VP = \frac{2}{3} VO$.

a) Calculați aria totală și volumul piramidei.

b) Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (PBC) și (VBC).

c) Arătați că punctul P este egal depărtat de planele (ABC) și (VBC).

2. Piramida regulată $VABC$ are latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 4$ cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul piramidei;

b) valoarea sinusului unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (VAC) și (VAB);

c) distanța de la vârful A la fața (VBC).

Nume ______________________________ Clasa ________

PE

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 10 cm și înălțimea de 9 cm. Volumul piramidei este egal cu .... cm^3.

(0,5p) **2.** O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 16 cm și înălțimea de 6 cm. Apotema piramidei este egală cu .... cm.

(0,5p) **3.** Într-o piramidă triunghiulară regulată, muchia laterală este de 20 cm și apotema de 16 cm. Latura bazei este egală cu .... cm.

(0,5p) **4.** O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de $8\sqrt{3}$ cm și latura bazei de 16 cm. Apotema piramidei este egală cu .... cm.

(0,5p) **5.** Un tetraedru regulat cu latura de 12 cm are volumul egal cu .... cm^3.

(0,5p) **6.** Într-o piramidă patrulateră regulată, latura bazei este egală cu $24\sqrt{3}$ cm și apotema este egală cu 24 cm. Volumul piramidei este .... cm^3.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Într-o piramidă patrulateră regulată, înălțimea este egală cu 12 cm și apotema este egală cu 15 cm. Volumul piramidei este de:

A. 1296 cm^3 B. 1944 cm^3 C. 1008 cm^3 D. 1440 cm^3

(0,5p) **2.** Într-o piramidă triunghiulară regulată, latura bazei este egală cu 18 cm și înălțimea este egală cu $4\sqrt{3}$ cm. Aria laterală a piramidei este:

A. $135\sqrt{3}$ cm^2 B. 324 cm^2 C. $108\sqrt{3}$ cm^2 D. $225\sqrt{3}$ cm^2

(0,5p) **3.** O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 18 cm și apotema de $6\sqrt{3}$ cm. Volumul piramidei este de:

A. $729\sqrt{3}$ cm^3 B. $243\sqrt{3}$ cm^3 C. $576\sqrt{3}$ cm^3 D. $324\sqrt{3}$ cm^3

(0,5p) **4.** Într-o piramidă patrulateră regulată, latura bazei este de 18 cm și apotema este de 15 cm. Volumul piramidei este de:

A. 1944 cm^3 B. 2486 cm^3 C. 1296 cm^3 D. 1032 cm^3

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

1. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu raza cercului circumscris bazei egală cu $4\sqrt{3}$ cm și înălțimea $VO = 12$ cm. Calculați:

(0,5p) a) aria totală și volumul piramidei;

(0,5p) b) distanța de la A la fața (VBC);

(0,5p) c) valoarea tangentei unghiului diedru format de planele (VAB) și (VAD), unde D este mijlocul laturii BC;

(0,5p) d) lungimea segmentului AE, unde $E \in (VA)$, astfel încât aria triunghiului BEC să fie minimă.

2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei $AB = 18$ cm şi secţiunea diagonală echivalentă cu baza. Calculaţi:

(0,5p) a) înălţimea VO;

(0,5p) b) aria totală şi volumul piramidei;

(0,5p) c) cosinusul unghiului diedru format de planele (VAD) şi (VBC);

(0,5p) d) distanţa de la centrul O al bazei la o faţă laterală.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2
Punctajul												
Nota												

PE-PP 6. Trunchiul de piramidă regulată

Prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza se obține o piramidă asemenea cu piramida inițială.

Prin detașarea piramidei de la vârf se obține un poliedru numit **trunchi de piramidă.**

Dacă piramida secționată este o piramidă regulată, atunci trunchiul obținut se numește **trunchi de piramidă regulată**.

Notații:

L – latura bazei mari;
h – înălțimea trunchiului;
a_B – apotema bazei mari;
$\mathcal{P}_B$ – perimetrul bazei mari;
$\mathcal{A}_B$ – aria bazei mari;
l – latura bazei mici;
a_{tr} – apotema trunchiului;
a_b – apotema bazei mici;
$\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei mici;
$\mathcal{A}_b$ – aria bazei mici.

Formule utile:

$\mathcal{A}_l = \dfrac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot a_{tr}}{2}$ sau $\mathcal{A}_l = \dfrac{n\cdot(L+l)\cdot a_{tr}}{2}$, unde n este numărul de laturi ale poligonului de la bază;

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$;

$\mathcal{V} = \dfrac{h}{3}\cdot\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}\right)$.

Dacă trunchiul de piramidă are la bază un triunghi echilateral, atunci formula volumului se poate scrie:

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(L^2 + l^2 + Ll).$$

Dacă trunchiul este un trunchi de piramidă patrulateră regulată, atunci formula volumului se scrie:

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\cdot(L^2 + l^2 + Ll).$$

activități de învățare

PE Înțelegere *

În tabelele următoare am notat cu L, l, h, a_{tr}, m, R_B, R_b, a_B, a_b, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ latura bazei mari a unui trunchi de piramidă, latura bazei mici, înălțimea trunchiului de piramidă, apotema trunchiului, muchia trunchiului, raza cercului circumscris bazei mari, raza cercului circumscris bazei mici, apotema bazei mari, apotema bazei mici, aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

1. Completați tabelul, știind că elementele sunt măsurate în centimetri, iar trunchiul este un trunchi de piramidă triunghiulară regulată.

	L	l	h	a_{tr}	m	R_B	R_b	a_B	a_b	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
a)	18	12			6							
b)	$16\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$									

	L	l	h	a_{tr}	m	R_B	R_b	a_B	a_b	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
c)			4					$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$			
d)			$6\sqrt{3}$	12			12					
e)	18			$4\sqrt{3}$						$144\sqrt{3}$		

2. Completați tabelul, știind că elementele sunt ale unui trunchi de piramidă patrulateră regulată și sunt măsurate în centimetri.

	L	l	h	a_{tr}	m	R_B	R_b	a_B	a_b	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
a)	32	16	6									
b)	40			15						1680		
c)			12			$15\sqrt{2}$			6			
d)		$4\sqrt{3}$		$3\sqrt{3}$						180		
e)		8	$2\sqrt{3}$	4								

PE Aplicare și exersare **

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 40$ cm, $A'B' = 30$ cm și înălțimea $OO' = 12$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul trunchiului;

b) aria totală și volumul piramidei din care provine trunchiul.

4. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de $18\sqrt{3}$ cm, înălțimea egală cu $3\sqrt{3}$ cm și apotema trunchiului de 6 cm. Calculați:

a) latura bazei mici și muchia laterală ale trunchiului;

b) aria laterală și volumul trunchiului;

c) aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul.

5. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, care are $AB = 36$ cm, $A'B' = 12$ cm și înălțimea $OO' = 12$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul trunchiului;

b) măsura unghiului format de fața (BCC') cu planul (ABC);

c) distanța de la O', centrul cercului circumscris bazei mici, la planul (BCC').

6. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, latura bazei mici este egală cu 16 cm, apotema trunchiului este egală cu 10 cm, iar aria laterală este de 960 cm^2. Calculați:

a) înălțimea și muchia laterală ale trunchiului;

b) aria totală și volumul trunchiului;

c) volumul piramidei patrulatere regulate din care provine trunchiul.

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată. Volumul trunchiului este egal cu 208 cm^3, iar lungimile laturilor bazelor sunt $AB = 12$ cm și $A'B' = 4$ cm. Calculați:

a) înălțimea și muchia laterală ale trunchiului;

b) aria totală a trunchiului;

c) volumul piramidei din care provine trunchiul.

8. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, aria laterală este egală cu $90\sqrt{3}$ cm^2, latura bazei mari este de 18 cm, iar apotema trunchiului este de $2\sqrt{3}$ cm. Calculați:
a) latura bazei mici a trunchiului; b) volumul trunchiului;
c) înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

9. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria laterală egală cu $160\sqrt{3}$ cm^2, latura bazei mari de $12\sqrt{2}$ cm și latura bazei mici de $8\sqrt{2}$ cm. Calculați:
a) apotema și înălțimea trunchiului; b) volumul trunchiului;
c) înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

10. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, volumul trunchiului este egal cu $999\sqrt{6}$ cm^3, latura bazei mari are $12\sqrt{3}$ cm și latura bazei mici are $9\sqrt{3}$ cm. Calculați:
a) apotema trunchiului de piramidă; b) aria laterală a trunchiului de piramidă;
c) înălțimea și apotema piramidei din care provine trunchiul.

11. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de $12\sqrt{3}$ cm, latura bazei mici de $6\sqrt{3}$ cm, iar volumul egal cu 1134 cm^3. Calculați:
a) înălțimea, apotema și muchia laterală ale trunchiului de piramidă;
b) aria laterală a trunchiului;
c) înălțimea și apotema piramidei din care provine trunchiul.

PE Aprofundare și performanță ***

12. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 80$ cm, $A'B' = 32$ cm și volumul egal cu 59904 cm^3. Calculați:
a) înălțimea și apotema trunchiului; b) aria totală a trunchiului;
c) aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul.

13. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată. Știind că $AB = 54\sqrt{3}$ cm, $A'B' = 36\sqrt{3}$ cm și apotema trunchiului este egală cu 15 cm, calculați:
a) înălțimea trunchiului; b) aria laterală și volumul trunchiului;
c) aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul.

14. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are volumul egal cu 588 cm^3, latura bazei mici de 9 cm, iar înălțimea trunchiului este egală cu 4 cm. Calculați:
a) latura bazei mari;
b) apotema trunchiului și aria laterală a acestuia;
c) înălțimea piramidei din care provine trunchiul;
d) aria laterală a piramidei din care provine trunchiul.

15. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari de 7 cm, latura bazei mici de 5 cm, iar diagonala trunchiului este egală cu 9 cm. Aflați:
a) înălțimea și apotema trunchiului;
b) înălțimea piramidei din care provine trunchiul;
c) aria laterală și volumul trunchiului.

16. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are volumul egal cu 1026 cm^3, înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm și latura bazei mici de 12 cm. Aflați:
a) latura bazei mari și muchia laterală ale trunchiului;
b) aria laterală a trunchiului;
c) aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul;
d) tangenta unghiului format de muchia laterală cu planul bazei mari;
e) distanța de la centrul bazei mari la o față laterală a trunchiului.

17. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, latura bazei mari este de $26\sqrt{2}$ cm, latura bazei mici are $14\sqrt{2}$ cm, iar diagonala trunchiului de piramidă este de $\sqrt{881}$ cm. Calculați:

a) volumul și aria laterală ale trunchiului;

b) volumul și aria laterală ale piramidei din care provine trunchiul;

c) la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât aria secțiunii obținute să fie egală cu 800 cm^2.

18. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, cu laturile bazelor de 8 cm, respectiv 6 cm, unghiul făcut de muchia laterală și latura bazei mari ce pornesc din același vârf este de 60°. Calculați:

a) aria laterală, aria totală și volumul trunchiului;

b) muchia laterală a trunchiului de piramidă;

c) aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul.

PE-PP **Supermate ******

19. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată având $\sphericalangle B'BC = 60°$, $AB = 20\sqrt{2}$ cm și $OO' = 12$ cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul trunchiului;

b) volumul piramidei din care provine trunchiul;

c) tangenta unghiului format de planele (VAC) și (VAB), unde V este vârful piramidei din care provine trunchiul;

d) distanța de la punctul B la planul (VDC);

e) sinusul unghiului format de muchia VB cu planul (VDC).

20. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are latura bazei mari de $9\sqrt{6}$ cm și latura bazei mici $6\sqrt{6}$ cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ și $OB' \perp O'B$, aflați:

a) volumul și aria laterală ale trunchiului;

b) volumul și aria laterală ale piramidei din care provine trunchiul;

c) distanța de la punctul A' la planul (BCC').

PE-PP Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

Subiectul I

1. Dacă un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are laturile bazelor de 24 cm și, respectiv, 18 cm, iar înălțimea de 9 cm, atunci apotema trunchiului este egală cu … cm.

2. Dacă un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 24 cm și, respectiv, 16 cm, iar apotema trunchiului de 12 cm, atunci înălțimea trunchiului este egală cu … cm.

3. Dacă un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are laturile bazelor de 18 cm și, respectiv, 12 cm, iar înălțimea de 6 cm, atunci volumul trunchiului este egal cu … cm^3.

4. Dacă un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor egale cu 24 cm și, respectiv, 18 cm, iar apotema trunchiului este de 5 cm, atunci volumul trunchiului este egal cu … cm^3.

5. Dacă un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are laturile bazelor egale cu 24 cm și 6 cm, iar înălțimea egală cu 3 cm, atunci înălțimea piramidei din care provine trunchiul este de … cm.

6. Dacă într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată laturile bazelor sunt egale cu $12\sqrt{2}$ cm și $8\sqrt{2}$ cm, iar apotema trunchiului este de $6\sqrt{2}$ cm, atunci înălțimea trunchiului este de … cm.

7. Dacă într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată latura bazei mici este egală cu 12 cm, apotema trunchiului are 4 cm, iar aria laterală este 240 cm^2, atunci latura bazei mari are … cm.

8. Dacă într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată latura bazei mari este egală cu $10\sqrt{3}$ cm, apotema trunchiului are $2\sqrt{3}$ cm, iar aria laterală este 144 cm^2, atunci latura bazei mici are … cm.

9. Dacă într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată laturile bazelor au 8 cm și, respectiv, 4 cm, iar volumul este 448 cm^3, atunci apotema trunchiului este egală cu … cm.

Subiectul al II-lea

1. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 12$ cm, $A'B' = 8$ cm și aria laterală de $40\sqrt{3}$ cm^2. Calculați:

a) volumul trunchiului;

b) volumul piramidei din care provine trunchiul;

c) distanța de la vârful A la fața (BCC').

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 18\sqrt{2}$ cm, $OO' = 12$ cm și $\sphericalangle A'AD = 60°$. Calculați:

a) latura bazei mici;

b) aria laterală a trunchiului;

c) sinusul unghiului diedru format de planele $(A'AC)$ și $(A'AD)$.

✸ TESTUL 2 ✸

Subiectul I

1. Dacă un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari egală cu 18 cm, latura bazei mici egală cu 12 cm, iar înălțimea de 6 cm, atunci volumul trunchiului este egal cu … cm^3.

2. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari egală cu 18 cm, latura bazei mici egală cu 12 cm și apotema egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Înălțimea trunchiului este egală cu … cm.

3. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are muchia laterală egală cu $12\sqrt{2}$ cm, latura bazei mari egală cu 26 cm, iar latura bazei mici egală cu 14 cm. Înălțimea trunchiului este egală cu … cm.

4. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia egală cu $2\sqrt{13}$ cm, latura bazei mari egală cu $18\sqrt{3}$ cm și latura bazei mici egală cu $12\sqrt{3}$ cm. Volumul trunchiului este egal cu … cm^3.

5. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari egală cu 24 cm, latura bazei mici egală cu 12 cm și apotema egală cu $\sqrt{21}$ cm. Volumul trunchiului este egal cu … cm^3.

6. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are apotema bazei mari egală cu 10 cm, apotema bazei mici egală cu 7 cm și înălțimea egală cu 4 cm. Aria laterală a trunchiului este egală cu … cm^2.

7. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari egală cu 24 cm, apotema egală cu $7\sqrt{3}$ cm și înălțimea egală cu 12 cm. Aria laterală a trunchiului este egală cu … cm^2.

8. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari egală cu $14\sqrt{3}$ cm, latura bazei mici egală cu $8\sqrt{3}$ cm și măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei de 60°. Volumul trunchiului este egal cu … cm^3.

9. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari egală cu 18 cm, latura bazei mici egală cu 12 cm și muchia laterală egală cu 5 cm. Aria laterală a trunchiului este egală cu … cm^2.

Subiectul al II-lea

1. Secțiunea diagonală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, având raportul bazelor egal cu $\frac{1}{3}$ și aria egală cu 256 cm^2. Aflați:

a) laturile bazelor trunchiului de piramidă;
b) volumul și aria totală ale trunchiului;
c) volumul piramidei din care provine trunchiul.

2. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mici egală cu 18 cm, înălțimea egală cu 9 cm și volumul egal cu $999\sqrt{3}$ cm^3. Calculați:

a) latura bazei mari și apotema trunchiului;
b) aria totală a trunchiului;
c) înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

PE

Nume ______________________________ Clasa ________

Test de autoevaluare

- *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are laturile bazelor de 24 cm și 18 cm, iar înălțimea de 9 cm. Volumul trunchiului este egal cu .... cm^3.

(0,5p) **2.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 24 cm și 16 cm, iar apotema de 12 cm. Înălțimea trunchiului este egală cu .... cm.

(0,5p) **3.** Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu $AB = 12$ cm, $A'B' = 8$ cm și aria laterală egală cu $240\sqrt{3}$ cm^2. Apotema trunchiului are .... cm.

(0,5p) **4.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 18$ cm, $A'B' = 12$ cm și volumul egal cu 912 cm^3. Înălțimea trunchiului este egală cu .... cm.

(0,5p) **5.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are $L = 18$ cm, $l = 6$ cm și înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm. Volumul trunchiului este egal cu .... cm^3.

(0,5p) **6.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are $L = 12$ cm, $l = 8$ cm și înălțimea de 9 cm. Volumul trunchiului este egal cu .... cm^3.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are $L = 18$ cm, $l = 12$ cm și muchia laterală egală cu $\sqrt{57}$ cm. Aria laterală a trunchiului este egală cu:

A. $120\sqrt{5}$ cm^2 B. $180\sqrt{3}$ cm^2 C. $240\sqrt{3}$ cm^2 D. $180\sqrt{5}$ cm^2

(0,5p) **2.** O piramidă triunghiulară regulată, cu latura bazei egală cu 18 cm și înălțimea de $3\sqrt{5}$ cm, se secționează cu un plan paralel cu baza situat la două treimi de vârf. Aria laterală a trunchiului de piramidă este egală cu:

A. $240\sqrt{3}$ cm^2 B. $120\sqrt{2}$ cm^2 C. $90\sqrt{2}$ cm^2 D. $180\sqrt{3}$ cm^2

(0,5p) **3.** O piramidă patrulateră regulată, cu latura bazei egală cu 18 cm și apotema de 15 cm, se secționează cu un plan paralel cu baza situat la o treime de vârf. Volumul trunchiului de piramidă este egal cu:

A. 468 cm^3 B. 624 cm^3 C. 1560 cm^3 D. 1248 cm^3

(0,5p) **4.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are $L = 12$ cm, $l = 6$ cm și înălțimea de 4 cm. Aria laterală a trunchiului este egală cu:

A. 120 cm^2 B. 150 cm^2 C. 240 cm^2 D. 180 cm^2

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 18\sqrt{2}$ cm, $OO' = 12$ cm și $\sphericalangle A'AD = 60°$. Calculați:

(0,5p) a) latura bazei mici;

(0,5p) b) apotema trunchiului;

(0,5p) c) aria laterală și volumul trunchiului;

(0,5p) d) aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul.

2. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu $AB = 18$ cm, $A'B' = 12$ cm și aria laterală de $180\sqrt{3}$ cm^2. Calculați:

(0,5p) a) apotema trunchiului;

(0,5p) b) înălțimea trunchiului;

(0,5p) c) volumul trunchiului;

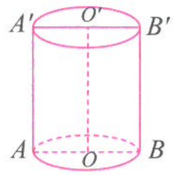
(0,5p) d) aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2
Punctajul												
Nota												

PE-PP 7. Cilindrul circular drept

Elementele unui cilindru circular drept:

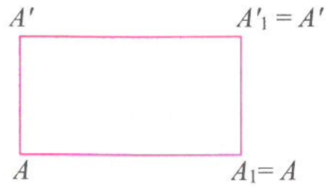
- bazele: două cercuri congruente situate în plane paralele;
- înălțimea cilindrului (distanța dintre cele două baze): $h = OO'$;
- generatoarea G a cilindrului: $G = AA' = OO'$.



Observație:

Suprafața laterală a cilindrului circular drept se desfășoară într-un plan după un dreptunghi cu dimensiunile:

$$L = AA_1 = 2\pi R \text{ și } l = AA' = G.$$



Dreptunghiul $ABB'A'$ se numește **secțiune axială** a cilindrului circular drept.

Formule utile:

$$\mathcal{A}_l = 2\pi RG; \qquad \mathcal{A}_t = 2\pi R(R + G); \qquad \mathcal{V} = \pi R^2 G.$$

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor am notat cu R, h, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ și d raza bazei, înălțimea, aria bazei, aria laterală, aria totală, volumul și diagonala secțiunii axiale ale unui cilindru circular drept. Completați tabelul, știind că elementele sunt măsurate în centimetri.

	R	h	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$	d
a)	6	8					
b)	10					600π	
c)	4			80π			
d)		7				63π	
e)				600π		4500π	
f)		15					25
g)				192π	264π		

PE Aplicare și exersare **

2. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $20\sqrt{2}$ cm. Aflați aria laterală și volumul cilindrului.

3. Un cilindru circular drept are aria bazei egală cu 36π cm^2 și aria secțiunii axiale egală cu 180 cm^2. Calculați:

a) raza; b) generatoarea; c) volumul cilindrului.

4. Generatoarea unui cilindru circular drept este egală cu 16 cm, iar diagonala secțiunii axiale formează cu planul bazei un unghi de 45°. Calculați raza bazei, aria totală și volumul cilindrului.

5. Raza bazei unui cilindru circular drept este de 6 cm, iar generatoarea este egală cu jumătate din rază. Comparați aria laterală a cilindrului cu aria bazei sale.

6. Într-un cilindru circular drept, generatoarea este egală cu triplul diametrului bazei, iar aria secțiunii axiale este egală cu 300 cm^2. Calculați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului.

7. Într-un cilindru circular drept, lungimea diagonalei secțiunii axiale are 20 cm și face cu planul bazei un unghi de 60°. Calculați:

a) R; b) G; c) $\mathcal{A}_l$; d) $\mathcal{V}$.

8. Aria totală a unui cilindru circular drept este de 576π cm^2. Aria laterală a cilindrului este egală cu jumătate din aria totală a acestuia. Calculați volumul cilindrului.

9. Într-un cilindru circular drept, raza este egală cu 12 cm, iar diagonala secțiunii axiale este de 40 cm. Calculați:

a) înălțimea cilindrului; b) aria totală și volumul cilindrului.

10. Raza și generatoarea unui cilindru circular drept sunt exprimate prin două numere impare consecutive, a căror sumă este egală cu 20 ($R < G$). Aflați aria totală și volumul cilindrului.

PE Aprofundare și performanță ***

11. Un cilindru circular drept are generatoarea egală cu 25% din raza bazei. Calculați volumul cilindrului, știind că aria sa laterală este 32π cm^2.

12. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un dreptunghi ale cărui diagonale fac între ele un unghi de 60°. Dacă înălțimea cilindrului este de 12 cm, aflați volumul cilindrului. Analizați toate situațiile posibile.

13. Într-un cilindru circular drept, raza și generatoarea sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3, iar aria laterală este egală cu 432π cm^2. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului; b) aria totală și volumul cilindrului.

14. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un dreptunghi cu dimensiunile proporționale cu numerele 6 și 2. Se știe că lungimea dreptunghiului este diametrul bazei cilindrului și că volumul cilindrului este egal cu 2250π cm^3. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului; b) aria totală a cilindrului.

15. Raza și generatoarea unui cilindru circular drept sunt proporționale cu numerele 3 și 4, iar aria sa laterală este 96π cm^2. Aflați volumul cilindrului.

16. Într-un cilindru circular drept, lungimea diagonalei secțiunii axiale este de 48 cm și formează cu planul bazei un unghi de 60°. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului; b) aria totală și volumul cilindrului.

17. O coardă cu lungimea de $12\sqrt{3}$ cm subîntinde un arc de 120° pe cercul de la baza unui cilindru circular drept, care are înălțimea egală cu 10 cm. Calculați:

a) raza cilindrului; b) aria laterală și volumul cilindrului.

18. Media aritmetică a lungimilor razei și generatoarei unui cilindru circular drept este egală cu 15, iar aria totală a cilindrului este 720π cm^2. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului; b) aria laterală și volumul cilindrului.

19. Aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu 120π cm^2, iar volumul acestuia este de 360π cm^3. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului; b) aria totală a cilindrului.

PE-PP **Supermate ******

20. Doi cilindri circulari drepți au același volum, razele și generatoarele fiind diferite. Arătați că generatoarele lor sunt invers proporționale cu pătratele razelor lor.

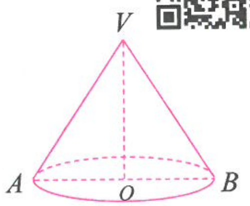
21. Un cilindru circular drept are volumul egal cu 2160π cm^3. Dacă s-ar mări generatoarea cu 5 cm, atunci volumul noului cilindru ar deveni 2880π cm^3. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului;

b) aria laterală și aria totală ale cilindrului.

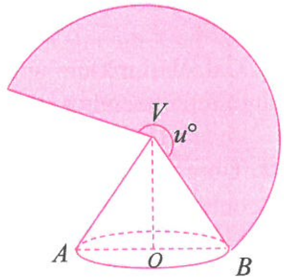
PE-PP 8. Conul circular drept

Elementele conului circular drept:



- baza conului este cercul de centru O și rază R;
- înălțimea conului: $VO = h$ este egală cu distanța de la vârful V la planul bazei;
- generatoarea conului: $G = VA$.

În ΔVOA dreptunghic: $G^2 = h^2 + R^2$.



Desfășurarea conului: Suprafața laterală a conului circular drept se desfășoară într-un plan după un sector circular cu centrul în V și raza $VA = G$.

Dacă se notează cu $u°$ măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc din desfășurarea conului, avem:

$$u° = 360° \cdot \frac{R}{G}.$$

Formule utile:

$$\mathcal{A}_l = \pi RG; \qquad \mathcal{A}_t = \pi R(R+G); \qquad \mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Triunghiul VAB se numește **secțiunea axială** a conului circular drept.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor, notațiile sunt cele uzuale într-un con circular drept. Dimensiunile sunt măsurate în centimetri. Completați tabelul.

	R	h	G	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
a)	6	8					
b)	12		20				
c)		12	13				
d)	10						800π
e)			15		180π		
f)				64π			128π

2. Un con circular drept are raza bazei egală cu 18 cm și înălțimea de 24 cm. Calculați:
a) G; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{A}_t$; d) $\mathcal{V}$.

3. Un con circular drept are raza bazei egală cu 9 cm și generatoarea de 15 cm. Calculați:
a) h; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{V}$; d) $u°$.

4. Un con circular drept are generatoarea de 30 cm și înălțimea de 18 cm. Calculați:
a) R; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) $u°$.

PE Aplicare și exersare **

5. Un con circular drept are $R = 16$ cm și $\mathcal{A}_l = 320\pi$ cm^2. Calculați:
a) G; b) h; c) $\mathcal{V}$.

6. Un con circular drept are $\mathcal{A}_l = 500\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 900\pi$ cm^2. Calculați:
a) R; b) G; c) h; d) $\mathcal{V}$.

7. Calculați măsura unghiului la centru al unui sector circular care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept, în următoarele cazuri:
a) $h = 16$ cm; $G = 20$ cm; b) $G = 25$ cm; $R = 20$ cm; c) $R = 9$ cm; $G = 15$ cm.

8. Un con circular drept are raza bazei egală cu 6 cm. Desfășurarea suprafeței laterale a conului este un sector circular care are măsura unghiului la centru egală cu $u°$. Calculați aria laterală a conului în următoarele situații:
a) $u° = 180°$; b) $u° = 144°$; c) $u° = 216°$;
d) $u° = 90°$; e) $u° = 288°$; f) $u° = 135°$.

9. Un con circular drept are secțiunea axială un triunghi echilateral cu latura de 24 cm.
a) Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.
b) Aflați măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a conului.

10. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel cu un unghi de 120°. Știind că $R = 12$ cm, calculați:
a) h; b) G; c) $\mathcal{A}_l$; d) $\mathcal{V}$.

11. Un con circular drept are $\mathcal{A}_l = 135\pi$ cm^2 și $R = 9$ cm. Calculați:
a) G; b) h; c) $\mathcal{V}$; d) $u°$.

12. Un con circular drept are aria bazei egală cu 144π cm^2 și volumul egal cu 768π cm^3. Calculați:

a) h; b) G; c) $\mathcal{A}_t$; d) $u°$.

13. Într-un con circular drept, $\mathcal{A}_l = 1500\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 2400\pi$ cm^2. Calculați:

a) volumul conului;

b) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

14. Un con circular drept are raza bazei de 12 cm și înălțimea de 16 cm. Se secționează conul cu un plan paralel cu baza, dus la $\frac{3}{4}$ din înălțime față de vârf. Aflați volumul și aria totală ale conului mic care se formează prin secționare.

15. Un con circular drept are $R = 32$ cm și $h = 24$ cm. Calculați:

a) aria laterală, aria totală și volumul conului;

b) la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât aria cercului de secțiune să fie egală cu 144π cm^2.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Un con circular drept are aria totală egală cu 180π cm^2, iar media aritmetică dintre rază și generatoare este 18. Calculați:

a) R; b) G; c) $\mathcal{V}$; d) $\mathcal{A}_l$.

17. Un con circular drept are $R = 18$ cm și $h = 24$ cm.

a) Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.

b) Calculați măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

c) Se secționează conul cu un plan paralel cu baza dus la $\frac{2}{3}$ din înălțime față de vârf. Aflați volumul și aria totală ale conului mic astfel obținut.

18. Suprafața laterală a unui con circular drept provine dintr-un sector circular, având unghiul la centru cu măsura de 216° și raza cercului sectorului egală cu 15 cm.

a) Calculați aria totală și volumul conului.

b) Calculați la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

c) Dacă se secționează conul cu un plan paralel cu baza dus la $\frac{1}{3}$ din înălțime față de bază, aflați aria laterală și volumul conului mic astfel obținut.

19. Desfășurarea laterală a unui con circular drept este un sector de cerc, având raza egală cu 36 cm, iar unghiul la centru egal cu 120°. Calculați:

a) volumul și aria totală ale conului;

b) la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât aria cercului de secțiune să fie egală cu 64π cm^2.

20. Desfășurarea laterală a unui con circular drept este un semicerc cu raza de 24 cm.

a) Calculați aria totală și volumul conului.

b) Aflați aria totală și volumul trunchiului de con obținut prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza, astfel încât aria laterală a conului mic astfel obținut să fie o treime din aria laterală a trunchiului de con.

21. Un con circular drept are ca bază un cerc de centru O şi rază egală cu 15 cm. Distanţa de la centrul O la o generatoare este egală cu 12 cm. Calculaţi:

a) generatoarea şi înălţimea conului; b) aria laterală şi volumul conului;

c) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obţinut prin desfăşurarea laterală a conului.

22. Un con circular drept are raza şi generatoarea direct proporţionale cu numerele 3 şi, respectiv, 5, iar înălţimea egală cu 16 cm. Calculaţi:

a) raza şi generatoarea conului; b) aria laterală şi volumul conului;

c) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obţinut prin desfăşurarea laterală a conului;

d) la ce distanţă de vârful conului trebuie făcută o secţiune printr-un plan paralel cu baza, astfel încât aria cercului de secţiune să fie egală cu 81π cm^2.

23. Un con circular drept are $R = 10 - x$, $h = 7 + x$ şi $G = 8 + x$, unde $x \in \mathbb{R}$. Calculaţi:

a) raza, generatoarea şi înălţimea conului; b) aria totală şi volumul conului;

c) la ce distanţă de vârful conului trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

24. Un con circular drept are desfăşurarea laterală un sector de cerc având unghiul la centru cu măsura de 288°, iar aria laterală a conului este de 720π cm^2. Calculaţi:

a) raza, generatoarea şi înălţimea conului; b) aria totală şi volumul conului;

c) la ce distanţă de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât aria cercului de secţiune să fie egală cu 400π cm^2.

25. Un con circular drept se desfăşoară după un sector circular care are măsura unghiului la centru corespunzător lui de 216°. Ştiind că volumul conului este de 2592π cm^3, calculaţi:

a) raza, generatoarea şi înălţimea conului; b) aria laterală şi aria totală ale conului;

c) la ce distanţă de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât aria cercului de secţiune să fie egală cu 225π cm^2.

26. Măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obţinut prin desfăşurarea laterală a unui con circular drept este de 288°. Volumul conului este egal cu 2000π cm^3. Calculaţi:

a) raza, generatoarea şi înălţimea conului; b) aria laterală şi aria totală ale conului;

c) la ce distanţă de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

PE-PP **Supermate** ****

27. Un con circular drept cu raza de $12\sqrt{2}$ cm are trei generatoare perpendiculare două câte două. Aflaţi:

a) înălţimea şi generatoarea conului; b) aria laterală şi volumul conului.

28. Într-un con circular drept, raza, generatoarea şi înălţimea sunt direct proporţionale cu numerele 3, 5 şi 4. Ştiind că volumul conului este egal cu 1500π cm^3, calculaţi:

a) aria laterală şi aria totală ale conului;

b) unghiul la centru corespunzător sectorului de cerc obţinut prin desfăşurarea laterală a conului;

c) la ce distanţă de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât aria laterală a trunchiului de con să fie de două ori mai mare decât aria laterală a conului mic obţinut prin secţionare.

PE

Nume ____________________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

- *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Un cilindru cu raza de 8 cm și generatoarea de 5 cm are aria totală de .... cm^2.

(0,5p) **2.** Un con circular drept cu raza de 12 cm și generatoarea de 20 cm are înălțimea egală cu .... cm.

(0,5p) **3.** Un cilindru circular drept cu secțiunea axială un pătrat cu latura de 18 cm are volumul egal cu .... cm^3.

(0,5p) **4.** Conul circular drept cu raza de 8 cm și înălțimea de 12 cm are volumul ...... cm^3.

(0,5p) **5.** Un cilindru circular drept cu raza de 10 cm și volumul de 900π cm^3 are generatoarea de .... cm.

(0,5p) **6.** Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel cu perimetrul de 80 cm și baza egală cu 30 cm. Aria totală a conului este egală cu .... cm^2.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $8\sqrt{2}$ cm. Volumul cilindrului este egal cu:

A. 64π cm^3 B. 256π cm^3 C. 128π cm^3 D. 108π cm^3

(0,5p) **2.** Conul circular drept cu volumul egal cu 288π cm^3 și înălțimea de 6 cm are aria laterală egală cu:

A. $144\sqrt{3}\pi$ cm^2 B. $144\sqrt{5}\pi$ cm^2 C. $108\sqrt{5}\pi$ cm^2 D. $72\sqrt{5}\pi$ cm^2

(0,5p) **3.** Un cilindru circular drept cu aria laterală egală cu 192π cm^2 și raza de 12 cm are volumul egal cu:

A. 1152π cm^3 B. 864π cm^3 C. 1440π cm^3 D. 576π cm^3

(0,5p) **4.** Un con circular drept are aria laterală egală cu 72π cm^2 și aria totală egală cu 108π cm^2. Volumul conului este egal cu:

A. $108\sqrt{3}\pi$ cm^3 B. $72\sqrt{3}\pi$ cm^3 C. $144\sqrt{5}\pi$ cm^3 D. $144\sqrt{3}\pi$ cm^3

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

1. Un cilindru circular drept are generatoarea egală cu dublul razei, iar desfășurarea laterală este un dreptunghi cu aria egală cu 144 cm^2. Calculați:

(1p) a) raza și generatoarea cilindrului;

(1p) b) aria totală și volumul cilindrului.

2. Un con circular drept are înălțimea egală cu 24 cm, iar raza bazei egală cu 75% din înălțime.

(0,5p) a) Calculați volumul și aria totală ale conului.

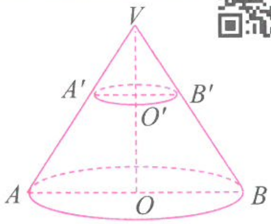
(0,5p) b) Aflați măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

(1p) c) Se duce un plan paralel cu baza la $\frac{3}{4}$ din înălțime față de vârful conului. Cât la sută din aria laterală a conului inițial reprezintă aria laterală a conului mic astfel obținut?

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2
Punctajul												
Nota												

PE-PP 9. Trunchiul de con circular drept

Trunchiul de con circular drept este corpul geometric obținut prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu baza și îndepărtarea conului mic format.



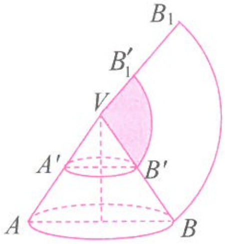
Elementele trunchiului de con:

- baza mare este cercul de centru O și rază $R = OA$;
- baza mică este cercul de centru O' și rază $r = O'A'$;
- generatoarea: $G = AA' = BB'$;
- înălțimea: $h = OO'$ (distanța dintre cele două baze).

Obținem relația: $G^2 = h^2 + (R - r)^2$.

Observație:

Suprafața laterală a unui trunchi de con circular drept este o porțiune dintr-o coroană circulară cu centrul în vârful V.



Formule utile:

$$\mathcal{A}_l = \pi G(R + r); \qquad \mathcal{A}_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2; \qquad \mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Trapezul isoscel $ABB'A'$ se numește **secțiunea axială** a trunchiului de con circular drept.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Un trunchi de con circular drept are $R = 12$ cm, $r = 6$ cm și $h = 8$ cm. Calculați:
a) G; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{V}$.

2. Un trunchi de con circular drept are $R = 17$ cm, $r = 5$ cm și $G = 20$ cm. Calculați:
a) h; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{V}$.

3. Un trunchi de con circular drept are $R = 9$ cm, $G = 5$ cm și $h = 4$ cm. Calculați:
a) r; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{V}$.

4. Un trunchi de con circular drept are $R = 20$ cm, $r = 8$ cm și $h = 9$ cm. Calculați:
a) G; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{V}$.

5. Un trunchi de con circular drept are $R = 19$ cm, $h = 12$ cm și $G = 15$ cm. Calculați:
a) r; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$.

6. În tabelul următor, notațiile sunt cele uzuale. Dimensiunile sunt exprimate în centimetri. Completați tabelul.

	R	r	h	G	$\mathcal{A}_B$	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
a)	13	5	6						
b)		5	12	15					
c)			8		225π	81π			
d)	14	8					220π		
e)	21	5							2284π

PE Aplicare și exersare **

7. Într-un trunchi de con circular drept, razele bazelor sunt de 10 cm și, respectiv, de 25 cm, iar înălțimea este egală cu $15\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) volumul, aria laterală și aria totală ale trunchiului de con;

b) volumul, aria laterală și aria totală ale conului din care provine trunchiul.

8. Un trunchi de con circular drept are raza mare de 20 cm, generatoarea de 26 cm și înălțimea de 24 cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul trunchiului de con;

b) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul;

c) cât la sută din volumul conului mare reprezintă volumul conului mic.

9. Într-un trunchi de con circular drept, $R = 12$ cm, $r = 4$ cm și $G = 10$ cm. Calculați:

a) aria laterală, aria totală și volumul trunchiului;

b) aria laterală, aria totală și volumul conului din care provine trunchiul;

c) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

10. Un trunchi de con circular drept are $R = 40$ cm, $r = 16$ cm și $G = 30$ cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul trunchiului;

b) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul;

c) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

11. Un trunchi de con circular drept are generatoarea de 40 cm, raza mare egală cu $\frac{5}{8}$ din generatoare, iar raza mică egală cu $\frac{1}{5}$ din raza mare. Calculați:

a) aria laterală și volumul trunchiului de con;

b) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul;

c) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

12. Un trunchi de con circular drept are $r = 12$ cm, $G = 10$ cm și $\mathcal{A}_l = 320\pi$ cm^2. Calculați:

a) raza bazei mari și înălțimea trunchiului;

b) volumul și aria totală ale trunchiului de con.

13. Un trunchi de con circular drept are $R = 40$ cm, $G = 30$ cm și $h = 18$ cm. Calculați:

a) raza bazei mici a trunchiului;

b) aria totală și volumul trunchiului;

c) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul.

14. Într-un trunchi de con circular drept, $R = 18$ cm, $G = 24$ cm, iar unghiul format de o generatoare cu planul bazei are măsura de 60°. Calculați:

a) aria totală și volumul trunchiului de con;

b) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul;

c) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

PE Aprofundare și performanță ***

15. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel $ABB'A'$ care are $\sphericalangle ABB' = 60°$, raza bazei mari egală cu 10 cm și raza bazei mici egală cu 5 cm. Calculați:

a) aria totală și volumul trunchiului;

b) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul;

c) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

16. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel $ABCD$ care are $\sphericalangle ACB = 90°$, $BC = 30$ cm și înălțimea $OO' = 24$ cm, unde O și O' sunt centrele bazelor.

a) Calculați aria laterală și volumul trunchiului de con.

b) Calculați aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul.

c) Se secționează trunchiul cu un plan paralel cu bazele, dus prin mijlocul înălțimii OO'. Calculați aria secțiunii astfel obținute.

17. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Raza bazei mari este egală cu 12 cm, iar înălțimea conului din care provine trunchiul este de 24 cm.

a) Calculați volumul conului.

b) Calculați aria laterală și volumul trunchiului de con.

c) Arătați că măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc sub care se desfășoară conul este mai mică decât 162° ($2,23 < \sqrt{5} < 2,24$).

18. Un trunchi de con circular drept are $R = 24$ cm și $r = 6$ cm. Știind că secțiunea axială este un trapez isoscel cu latura neparalelă egală cu linia mijlocie a sa, calculați:

a) generatoarea și înălțimea trunchiului;

b) aria totală și volumul trunchiului;

c) volumul și aria totală ale conului din care provine trunchiul;

d) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc sub care se desfășoară conul.

19. Un trunchi de con circular drept are înălțimea egală cu 21 cm, iar $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$. Știind că secțiunea axială a trunchiului este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, calculați:

a) razele bazelor trunchiului;

b) volumul trunchiului;

c) volumul conului din care provine trunchiul.

20. Într-un trunchi de con circular drept, lungimile razei bazei mari, razei bazei mici și înălțimii sunt direct proporționale cu numerele 3, 2 și, respectiv, $\sqrt{3}$, iar generatoarea este egală cu 10 cm.

a) Calculați raza mare, raza mică și înălțimea trunchiului.

b) Calculați aria laterală și volumul trunchiului.

c) Fie M un punct situat pe înălțimea OO' a trunchiului de con, astfel încât volumul conului cu vârful în M și baza cercul de centru O' să fie egal cu volumul conului cu vârful în M și baza cercul de centru O. Calculați lungimea segmentului MO.

21. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor direct proporționale cu numerele 2 și 3. Generatoarea trunchiului are lungimea de $6\sqrt{2}$ cm și face cu planul bazei mari un unghi de 45°.

a) Calculați raza bazei mari, raza bazei mici și înălțimea trunchiului.

b) Calculați aria totală și volumul trunchiului de con circular drept.

c) Se secționează trunchiul cu un plan paralel cu baza, dus prin mijlocul înălțimii. Calculați aria secțiunii astfel obținute.

22. Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială un trapez isoscel $ABB'A'$ cu $AB = 48$ cm, $A'B' = 12$ cm și $BB' = 30$ cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul trunchiului;

b) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul;

c) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc sub care se desfășoară conul;

d) valoarea sinusului unghiului determinat de dreptele AA' și BB'.

23. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel având unghiurile ascuțite egale cu $30°$, baza mică de $12\sqrt{3}$ cm, iar latura neparalelă de 36 cm.

a) Aflați elementele trunchiului de con.

b) Calculați aria totală și volumul trunchiului.

c) Calculați aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul de con.

24. Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Știind că razele trunchiului sunt egale cu $9\sqrt{2}$ cm și $12\sqrt{2}$ cm, calculați:

a) înălțimea și generatoarea trunchiului;

b) aria laterală și volumul trunchiului de con;

c) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul;

d) cât la sută din volumul conului mare reprezintă volumul trunchiului de con.

PE-PP Supermate ****

25. Un trunchi de con circular drept are generatoarea de 25 cm și înălțimea egală cu 24 cm. Știind că secțiunea axială este un trapez isoscel circumscriptibil, aflați:

a) razele bazelor;

b) aria laterală și volumul trunchiului.

26. Un trunchi de con circular drept are generatoarea egală cu $15\sqrt{3}$ cm și înălțimea egală cu $18\sqrt{2}$ cm. Știind că secțiunea axială este un trapez isoscel căruia i se poate înscrie un cerc, aflați:

a) razele bazelor trunchiului;

b) aria laterală și volumul trunchiului;

c) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul.

27. Într-un trunchi de con circular drept, volumul este egal cu $4212\sqrt{3}\,\pi$ cm^3, raza bazei mici este $6\sqrt{3}$ cm, iar înălțimea este egală cu $12\sqrt{3}$ cm.

a) Calculați aria laterală a trunchiului de con.

b) Calculați aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul.

c) Dacă V este vârful conului din care provine trunchiul, iar secțiunea axială a conului este triunghiul VAB ($VA = VB$), calculați valoarea sinusului unghiului AVB.

28. Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială trapezul isoscel $ABB'A'$, căruia i se poate înscrie un cerc având diametrul egal cu înălțimea trunchiului. Știind că înălțimea trunchiului este egală cu $6\sqrt{2}$ cm și generatoarea trunchiului este egală cu $5\sqrt{3}$ cm, calculați:

a) volumul trunchiului de con;

b) volumul conului din care provine trunchiul;

c) distanța de la punctul M la generatoarea AA', unde M este mijlocul înălțimii OO' a trunchiului de con circular drept.

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

Subiectul I

1. Dacă un cilindru circular drept are raza bazei de 4 cm și înălțimea de 6 cm, atunci aria laterală a sa este egală cu ... cm^2.

2. Dacă un con circular drept are raza bazei de 6 cm și înălțimea de 8 cm, atunci generatoarea sa este egală cu ... cm.

3. Un cilindru circular drept cu $R = 5$ cm și $G = 8$ cm are volumul egal cu ... cm^3.

4. Un con circular drept cu $R = 4$ cm și $G = 5$ cm are aria laterală egală cu ... cm^2.

5. Un trunchi de con circular drept cu $R = 12$ cm, $r = 8$ cm și $h = 3$ cm are generatoarea egală cu ... cm.

6. Un con circular drept are secțiunea axială un triunghi echilateral cu perimetrul de 18 cm. Aria totală a conului este egală cu ... cm^2.

7. Dacă secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $12\sqrt{2}$ cm, atunci volumul cilindrului este egal cu ... cm^3.

8. Dacă un trunchi de con circular drept are $R = 18$ cm, $r = 12$ cm și $G = 12$ cm, atunci aria totală a trunchiului este egală cu ... cm^2.

9. Desfășurarea laterală a unui con circular drept este un semicerc cu diametrul de 48 cm. Volumul conului este egal cu ... cm^3.

Subiectul al II-lea

1. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor egale cu 8 cm și, respectiv, 18 cm. Știind că secțiunea axială este un trapez isoscel $ABB'A'$ cu OO' mediatoarea bazelor ($O \in AB$, $O' \in A'B'$) și $OB' \perp O'B$, calculați:

a) înălțimea trunchiului de con;

b) înălțimea conului din care provine trunchiul;

c) volumul trunchiului de con.

2. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel având diagonala perpendiculară pe latura neparalelă a trapezului. Știind că înălțimea trunchiului este egală cu $6\sqrt{3}$ cm și că generatoarea trunchiului este dublul razei bazei mici, calculați:

a) aria laterală a trunchiului;

b) volumul trunchiului;

c) volumul conului din care provine trunchiul;

d) cât la sută din volumul conului mare reprezintă volumul trunchiului de con.

TESTUL 2

Subiectul I

1. Un cilindru circular drept are raza bazei egală cu 6 cm, iar aria laterală de 120π cm^2. Volumul cilindrului este de ... cm^3.

2. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic și isoscel cu ipotenuza egală cu 12 cm. Volumul conului este egal cu ... cm^3.

3. Un trunchi de con circular drept are $R = 25$ cm, $r = 10$ cm și aria laterală egală cu 875π cm^2. Volumul trunchiului este egal cu ... cm^3.

4. Un con circular drept are volumul egal cu 324π cm^3, iar înălțimea egală cu 12 cm. Aria laterală a conului este egală cu ... cm^2.

5. Un cilindru circular drept are aria bazei egală cu 64π cm^2, iar generatoarea egală cu 12 cm. Aria laterală a cilindrului este egală cu ... cm^2.

6. Un trunchi de con circular drept are $R = 13$ cm, $r = 5$ cm și aria laterală egală cu 180π cm^2. Volumul trunchiului este egal cu ... cm^3.

7. Aria secțiunii axiale a unui con circular drept este de 48 cm^2, iar înălțimea conului este de 6 cm. Aria laterală a conului este egală cu ... cm^2.

8. Un trunchi de con circular drept are volumul egal cu 1008π cm^3, $R = 16$ cm și $r = 4$ cm. Aria laterală a trunchiului este egală cu ... cm^2.

9. Unghiul format de generatoarea unui con cu planul bazei are măsura de $60°$, iar raza este de 12 cm. Aria laterală a conului este egală cu ... cm^2.

Subiectul al II-lea

1. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este trapezul isoscel $ABB'A'$, cu $AB = 24$ cm și diagonalele perpendiculare. Înălțimea conului din care provine trunchiul este $VO = 24$ cm.

a) Calculați raza bazei mici, înălțimea și generatoarea trunchiului.

b) Calculați aria laterală și volumul trunchiului.

c) Dacă M este punctul de intersecție a dreptelor AB' și $A'B$, arătați că M este mijlocul înălțimii VO și calculați distanța de la M la generatoarea VB.

2. Punctele O și O' sunt centrele bazelor unui cilindru circular drept și $OO' = 8$ cm. Desfășurarea laterală a cilindrului este un dreptunghi cu lățimea cât generatoarea cilindrului și lungimea egală cu 12π.

a) Calculați aria totală și volumul cilindrului.

b) Calculați aria laterală și volumul conului circular drept care are ca secțiune axială triunghiul $O'AB$, unde AB este un diametru în cercul de centru O.

c) Calculați valoarea sinusului unghiului $AO'B$.

PE

Nume ______________________ **Clasa** ______

Test de autoevaluare

- *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Un trunchi de con circular drept are $r = 6$ cm, $R = 9$ cm și $h = 4$ cm. Generatoarea trunchiului este de .... cm.

(0,5p) **2.** Un trunchi de con circular drept are $r = 16$ cm, $h = 15$ cm și $G = 25$ cm. Raza mare a trunchiului de con este egală cu .... cm.

(0,5p) **3.** Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu perimetrul de 72 cm. Volumul conului este egal cu .... cm^3.

(0,5p) **4.** Un trunchi de con circular drept are $r = 12$ cm, $R = 21$ cm și $G = 15$ cm. Aria totală a trunchiului de con este egală cu .... cm^2.

(0,5p) **5.** Un con circular drept are raza bazei de 8 cm și aria totală egală cu 144π cm^2. Generatoarea conului este egală cu .... cm.

(0,5p) **6.** Un trunchi de con circular drept are raza mică de 12 cm, raza mare egală cu 24 cm și generatoarea egală cu 15 cm. Înălțimea trunchiului este egală cu .... cm.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă desfășurarea laterală a unui con circular drept este un sector de cerc având unghiul la centru corespunzător de 120° și raza cercului din care provine sectorul egală cu 36 cm, atunci volumul conului este de:

A. $1152\sqrt{2}\,\pi$ cm^3 B. $1152\sqrt{3}\,\pi$ cm^3 C. $864\sqrt{2}\,\pi$ cm^3 D. $864\sqrt{3}\,\pi$ cm^3

(0,5p) **2.** Într-un trunchi de con circular drept, R, r și h sunt direct proporționale cu numerele 8, 5 și, respectiv, 4, iar generatoarea este egală cu 10 cm. Aria laterală a trunchiului este de:

A. 180π cm^2 B. 260π cm^2 C. 360π cm^2 D. 240π cm^2

(0,5p) **3.** Un con circular drept are raza și înălțimea proporționale cu numerele 5 și 12, iar volumul egal cu 800π cm^3. Aria laterală a conului este:

A. 360π cm^2 B. 240π cm^2 C. 260π cm^2 D. 180π cm^2

(0,5p) **4.** Un trunchi de con circular drept are $R = 12$ dm și $r = 4$ dm. Dacă secțiunea axială a trunchiului este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, atunci volumul trunchiului este de:

A. 3328π dm^3 B. 2912π dm^3 C. $\frac{2912\pi}{3}$ dm^3 D. $\frac{3328\pi}{3}$ dm^3

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

1. Suprafața laterală a unui con circular drept se desfășoară după un sector de cerc corespunzător unui unghi la centru de 288°, având lungimea arcului egală cu 16π cm. Calculați:

(1p) a) aria totală și volumul conului;

(1p) b) aria totală şi volumul trunchiului obţinut prin secţionarea conului cu un plan paralel cu baza, astfel încât raportul volumelor corpurilor obţinute să fie $\frac{1}{7}$.

2. Un trunchi de con circular drept are $r = 16$ cm, $R = 40$ cm şi $G = 30$ cm. Calculaţi:

(0,5p) a) aria totală şi volumul trunchiului de con;

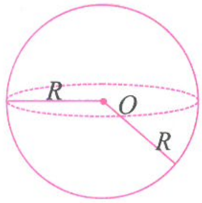
(0,5p) b) aria laterală şi volumul conului din care provine trunchiul;

(1p) c) unghiul sectorului de cerc obţinut prin desfăşurarea laterală a conului.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2
Punctajul												
Nota												

10. Sfera

DEFINIȚIE: Fiind date un număr real $R > 0$ și un punct fix O, numim sferă de centru O și rază R locul geometric al punctelor M din spațiu pentru care $OM = R$.



Formule utile:

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2; \qquad \mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

activități de învățare

PE Aplicare și exersare **

1. Raza unei sfere este de 6 cm. Aflați aria și volumul sferei.
2. Aria unei sfere este de 500π cm^2. Aflați volumul sferei.
3. Volumul unei sfere este de 288π cm^3. Aflați aria sferei.
4. Un plan situat la distanța de 3 cm față de centrul unei sfere o intersectează după un cerc a cărui arie este de 16π cm^2. Aflați aria și volumul sferei.
5. Arătați că din 8 sfere de plastilină cu raza R se poate obține o singură sferă cu raza $2R$. Stabiliți o relație între aria sferei mari și suma ariilor sferelor mici.
6. Arătați că raportul ariilor a două sfere este egal cu pătratul raportului razelor celor două sfere.
7. Arătați că raportul volumelor a două sfere este egal cu cubul raportului razelor celor două sfere.
8. Câte sfere cu raza $\frac{R}{3}$ se pot obține dintr-o sferă cu raza R, fără pierdere de material?
9. Se consideră o sferă de centru O. Aria unui cerc de centru O este egală cu 16π cm^2. Calculați aria și volumul sferei.
10. Un cilindru circular drept are raza bazei egală cu 10 cm, iar generatoarea de 20 cm. Aria laterală a cilindrului este egală cu aria unei sfere. Calculați aria și volumul sferei.
11. Se consideră trei sfere de raze 2 cm, 4 cm și 6 cm. Arătați că volumul celei mai mari dintre sfere este de trei ori mai mare decât suma volumelor primelor două sfere.
12. Un con circular drept are raza bazei de 4 cm, iar generatoarea egală cu 9 cm. Aria laterală a conului este egală cu aria unei sfere. Calculați volumul sferei.
13. Un con circular drept are raza bazei egală cu 12 cm și înălțimea de 6 cm. Volumul conului este egal cu volumul unei sfere. Calculați aria sferei.
14. Trei puncte A, B și C sunt situate pe o sferă astfel încât centrul sferei este conținut în planul (ABC). Știind că triunghiul ABC este echilateral de latură $12\sqrt{3}$ cm, calculați aria și volumul sferei.

Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)-(-2)\cdot(-3)^2$ este egal cu:

A. –14 B. 20 C. 16 D. –20

(0,5p) **2.** Soluția sistemului $\begin{cases}2x+y=0\\x+2y=-3\end{cases}$ este:

A. (–1, 2) B. (1, 2) C. (–1, –2) D. (1, –2)

(0,5p) **3.** Soluția ecuației $3\cdot(4-6x)=-6$ este:

A. –2 B. 2 C. –1 D. 1

(0,5p) **4.** Un cub cu latura de 2 cm are aria egală cu:

A. 16 cm^2 B. 32 cm^2 C. 16 cm^2 D. 24 cm^2

(0,5p) **5.** Un con cu raza bazei de 8 cm și înălțimea de 6 cm are volumul egal cu:

A. 216π cm^3 B. 128π cm^3 C. 288π cm^3 D. 144π cm^3

(0,5p) **6.** Elevii unei clase au obținut la un test notele prezentate în tabelul următor:

Nota	10	9	8	7	6	5	4
Numărul de elevi	2	3	6	7	5	1	1

Media notelor obținute de elevii clasei la testul dat este:

A. 7,30 B. 7,32 C. 7,40 D. 7,25

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați un trunchi de piramidă triunghiulară regulată.

(0,5p) **2.** Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ divizibile cu 3, pentru care $\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}}\in\mathbb{N}$, cu $a\neq b$.

(0,5p) **3.** Într-o clasă sunt 36 de elevi. Determinați numărul băieților din clasă, știind că numărul fetelor este cu 20% mai mic decât numărul băieților.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-4$.

(0,5p) a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

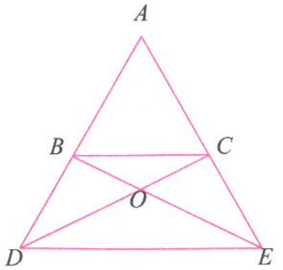
(0,5p) b) Calculați raza cercului circumscris triunghiului determinat de axele de coordonate și de dreapta ce reprezintă graficul funcției.

(0,5p) **5.** Fie expresia $E(x)=x\cdot\left(\frac{x+2}{x+3}:\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x+3}+\frac{4}{x+5}\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,-2,-1\}$.

Arătați că $E(x)=x$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,-2,-1\}$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral cu $AB = 18$ cm, D este simetricul lui A față de B, iar E este simetricul lui A față de C.



(0,5p) a) Arătați că perimetrul triunghiului ABC este de 54 cm.

(0,5p) b) Arătați că $DC \perp AE$.

(0,5p) c) Dacă $DC \cap BE = \{O\}$, arătați că $AO \perp DE$ și calculați aria triunghiului OCE.

2. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și diagonala $AC' = 13$ cm. Calculați:

(0,5p) a) aria totală și volumul paralelipipedului;

(0,5p) b) valoarea sinusului unghiului format de diagonala BD' cu planul (ADD');

(0,5p) c) valoarea sinusului unghiului format de planele (ADD') și (BDD').

TESTUL 2

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(-2)^2 \cdot (-5) - (-6)^2$ este egal cu:

A. -56 B. -16 C. 56 D. 16

(0,5p) **2.** Dacă 30% dintr-un număr este egal cu 60, atunci numărul este egal cu:

A. 200 B. 300 C. 400 D. 180

(0,5p) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $2x^2 - 9x + 4 = 0$ este:

A. $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$ C. $\left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$ D. $\left\{-\frac{1}{2}, -4\right\}$

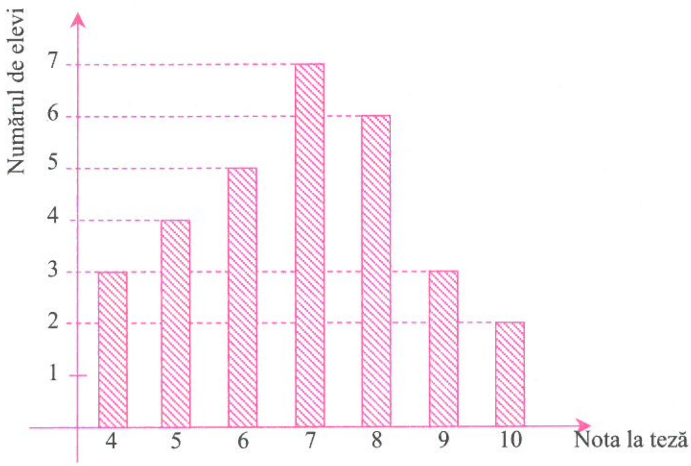
(0,5p) **4.** O sferă are volumul egal cu 288π cm^3. Raza sferei este egală cu:

A. 8 cm B. 12 cm C. 4 cm D. 6 cm

(0,5p) **5.** Un tetraedru regulat are aria egală cu $81\sqrt{3}$ cm^2. Muchia tetraedrului este egală cu:

A. 9 cm B. 18 cm C. 12 cm D. 6 cm

(0,5p) **6.** Rezultatele obținute de elevii unei clase la teza la matematică sunt reprezentate în următoarea diagramă:



Conform diagramei, media notelor obținute de elevii clasei la teza la matematică este egală cu:

A. 7,02 B. 6,86 C. 6,95 D. 7,12

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(0,5p) **2.** Aflați două numere naturale care au media aritmetică egală cu 13 și media geometrică egală cu 12.

(0,5p) **3.** Un traseu al unei excursii a fost parcurs în trei zile astfel: în prima zi s-a parcurs o treime din lungimea traseului, a doua zi cu 60 km mai mult decât 60% din restul drumului neparcurs, iar a treia zi o distanță egală cu jumătate din lungimea drumului parcurs în prima zi. Ce lungime avea întregul traseu?

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 2$.

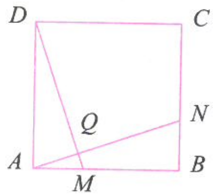
(0,5p) a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

(0,5p) b) Determinați numărul real a pentru care distanța de la punctul $C(a, 0)$ la graficul funcției este CA, unde $\{A\} = G_f \cap Oy$.

(0,5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \frac{4}{x+5} + \frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6} : \frac{x^2+9x+20}{x^2+7x+12}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, -3, -2\}$. Arătați că $E(x) = 1$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, -3, -2\}$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu $AB = 12$ cm, iar $AM = BN = 4$ cm.



(0,5p) a) Arătați că $\mathcal{A}_{ABCD} = 144$ cm^2.

(0,5p) b) Calculați măsura unghiului AQM, unde $AN \cap DM = \{Q\}$.

(0,5p) c) Calculați lungimea segmentului DQ.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 6$ cm. Calculați:

(0,5p) a) aria și volumul cubului;

(0,5p) b) valoarea tangentei unghiului format de $D'B$ cu DC;

(0,5p) c) măsura unghiului format de dreapta $D'A$ cu planul $(D'DB)$.

TESTUL 3

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{3} \cdot (6\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)^3$ este:

A. 13 B. 5 C. $3\sqrt{3} - 4$ D. $3\sqrt{3} + 4$

(0,5p) **2.** Soluția inecuației $2(x + 5) < 3(x + 2) + 5$ este:

A. $(-1; +\infty)$ B. $(-\infty; -1)$ C. $(1; +\infty)$ D. $(-\infty; 1)$

(0,5p) **3.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 45 și 75 este egal cu:

A. 3 B. 5 C. 15 D. 25

(0,5p) **4.** Suma tuturor muchiilor unui cub este egală cu 96. Aria cubului este egală cu:

A. 320 cm^2 B. 256 cm^2 C. 216 cm^2 D. 384 cm^2

(0,5p) **5.** Un trunchi de con cu $R = 8$ cm, $r = 6$ cm și $h = 6$ cm are volumul egal cu:

A. 256π cm^3 B. 288π cm^3 C. 296π cm^3 D. 324π cm^3

(0,5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt trecute temperaturile înregistrate la o stație meteorologică pe parcursul unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (°C)	3	–3	–1	0	1	5	6

Conform datelor, media temperaturilor nenegative din acea săptămână a fost egală cu:

A. 5°C B. 4°C C. 3°C D. 3,5°C

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați un trunchi de con circular drept.

(0,5p) **2.** Arătați că numărul $A = 4^n \cdot 3^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 9^n$, unde $n \in \mathbb{N}$, este pătrat perfect și calculați $\sqrt{A}$.

(0,5p) **3.** Un biciclist a parcurs un drum în trei zile astfel: în prima zi a parcurs $\frac{3}{8}$ din lungimea drumului, a doua zi 30% din drumul rămas, iar a treia zi ultimii 28 km. Câți kilometri a parcurs biciclistul în prima zi?

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$.

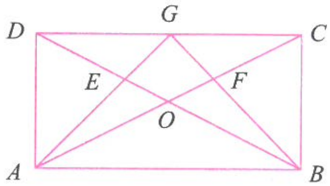
(0,5p) a) Trasați graficul funcției într-un sistem de axe de coordonate.

(0,5p) b) Determinați punctul de pe grafic care are ordonata egală cu dublul abscisei.

(0,5p) **5.** Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x+1}{x-2} + \frac{x^2-9}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x-5}{x-3} - \frac{10}{x^2-4}\right) : \frac{x^2-2x+1}{x^2-4}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 1, 2, 3\}$. Arătați că $E(x) = 2$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 1, 2, 3\}$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. Dreptunghiul din figura alăturată are lățimea egală cu jumătate din lungime, iar perimetrul egal cu 48 cm.

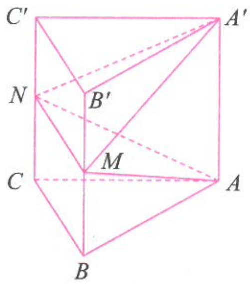


(0,5p) a) Arătați că aria dreptunghiului $ABCD$ este de 128 cm^2.

(0,5p) b) Dacă G este mijlocul laturii DC și $AG \cap BD = \{E\}$, iar $BG \cap AC = \{F\}$, arătați că $EF \parallel DC$.

(0,5p) c) Calculați distanța de la punctul E la latura AD a dreptunghiului.

2. În figura alăturată, $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu $AB = 12$ cm și $A'B = 24$ cm, iar M și N sunt mijloacele muchiilor BB' și, respectiv, CC'.



(0,5p) a) Calculați volumul prismei.

(0,5p) b) Calculați aria triunghiului $A'MN$.

(0,5p) c) Arătați că planele $(A'MN)$ și (AMN) sunt perpendiculare.

TESTUL 4

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(-1)^3$ este:

A. 6 B. 4 C. 8 D. 2

(0,5p) **2.** Dacă $a+\frac{1}{a}=8$, atunci $a^2+\frac{1}{a^2}$, unde $a \neq 0$, este egal cu:

A. 64 B. 62 C. 66 D. 16

(0,5p) **3.** Dacă $\frac{x}{7+\sqrt{11}}=\frac{7-\sqrt{11}}{2}$, atunci valoarea lui x este egală cu:

A. 30 B. –2 C. 19 D. 14

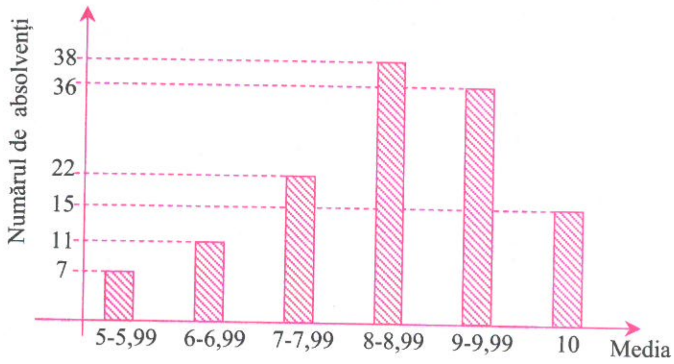
(0,5p) **4.** Soluția ecuației $(x-1)^2-2=x(x-3)$ este:

A. 2 B. –1 C. –2 D. 1

(0,5p) **5.** Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 3 cm, 4 cm și 12 cm. Diagonala paralelipipedului este egală cu:

A. 13 cm B. $12\sqrt{3}$ cm C. $12\sqrt{5}$ cm D. 14 cm

(0,5p) **6.** Situația mediilor generale ale unor absolvenți ai clasei a VIII-a dintr-o unitate școlară este redată în următoarea diagramă.



Numărul absolvenților cu media generală mai mare sau egală cu 8 este:

A. 38 B. 74 C. 89 D. 48

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați o piramidă triunghiulară regulată *SABC*.

(0,5p) **2.** Se consideră numerele $a=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}-4\sqrt{2}$ și $b=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$. Calculați media geometrică a numerelor a și b.

(0,5p) **3.** Un copil a citit o carte în trei zile. În prima zi a citit o treime din numărul paginilor cărții, a doua zi a citit 40% din restul paginilor necitite și încă 24 de pagini, iar în a treia zi a citit ultimele 80 de pagini. Câte pagini avea cartea?

(0,5p) **4.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=2x+a$. Reprezentați grafic funcția, știind că punctul $A(-1; -3)$ aparține graficului.

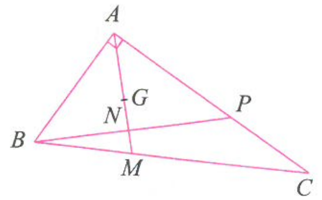
5. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{2x}{x^2-2x}+\dfrac{4x+12}{12+4x-3x^2-x^3}+\dfrac{x^2}{x^2+2x}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)$, unde $x\in$ $\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,0,2\}$.

(0,5p) a) Arătați că $E(x)=x$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,0,2\}$.

(0,5p) b) Arătați că numărul $n=E(2^2)+E(2^3)+E(2^4)+\ldots+E(2^{2015})+E(2^{2016})$ este divizibil cu 31.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic cu catetele $AB=18$ cm și $AC=24$ cm, iar $P\in(AC)$, astfel încât $AP=18$ cm și AM este bisectoarea unghiului BAC, $\{N\}=AM\cap BP$.

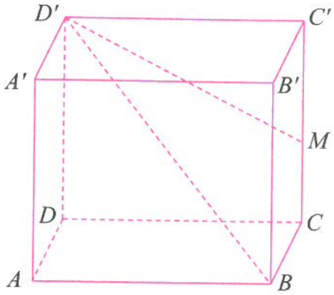


(0,5p) a) Arătați că aria triunghiului ABC este de 216 cm^2.

(0,5p) b) Calculați distanța de la G, centrul de greutate al triunghiului ABP, la latura AP.

(0,5p) c) Dacă $PG\cap AB=\{Q\}$, determinați lungimea segmentului NQ.

2. În figura alăturată, $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată dreaptă cu latura bazei $AB=6$ cm și înălțimea $AA'=12$ cm, iar M este mijlocul muchiei CC'.



(0,5p) a) Arătați că volumul prismei este egal cu 432 cm^3.

(0,5p) b) Calculați distanța de la vârful D' la dreapta de intersecție a planelor (BMD') cu (ABC).

(0,5p) c) Calculați distanța de la punctul D la planul $(D'BM)$.

TESTUL 5

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(-6)^2-18:(-3)^2$ este egal cu:

A. 34 B. –34 C. –6 D. 2

(0,5p) **2.** Șase robinete cu același debit pot umple un bazin în 5 ore. Zece robinete cu același debit ar umple același bazin în:

A. 4 ore B. 3 ore C. 6 ore D. 2 ore

(0,5p) **3.** Cardinalul mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<3\}$ este egal cu:

A. 8 B. 6 C. 7 D. 5

(0,5p) **4.** Fie expresia $F(x)=\dfrac{1-3x^2}{2x^2+1}$. Calculând $F(\sqrt{2})$, se obține:

A. $-\dfrac{5}{3}$ B. -1 C. 1 D. $\dfrac{1-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$

(0,5p) **5.** Volumul unui cilindru circular drept care are raza de 4 cm și generatoarea de 5 cm este egal cu:

A. 100π cm^3 B. 20π cm^3 C. 40π cm^3 D. 80π cm^3

(0,5p) **6.** În diagrama alăturată sunt prezentate opțiunile elevilor de clasa a VIII-a ai unei școli pentru profilul clasei a IX-a. Numărul elevilor care au optat pentru profilul real reprezintă, din totalul elevilor, un procent egal cu:

A. 45%   B. 50%
C. 40%   D. 60%

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați o prismă patrulateră dreaptă $ABCDEFGH$.

(0,5p) **2.** Produsul a două numere naturale este 1350, iar cel mai mare divizor comun al lor este 15. Calculați suma numerelor.

(0,5p) **3.** În cadrul unui concurs, elevii participanți au avut de răspuns la 25 de întrebări. Știind că pentru un răspuns corect s-au acordat 7 puncte, iar pentru un răspuns greșit s-au scăzut 5 puncte, aflați la câte întrebări a răspuns corect un elev care a acumulat 67 de puncte.

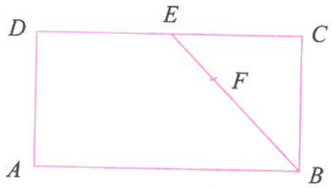
4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 6$.

(0,5p) a) Reprezentați grafic funcția.
(0,5p) b) Determinați punctele de pe grafic cu coordonatele egale.

(0,5p) **5.** Fie expresia $E(x) = \left[\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{x+2}{x-3} \cdot \left(\dfrac{x+3}{x+2} - 1\right)\right] : \dfrac{x-1}{x^2-9}$. Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, +3\}$, $E(x) = 3$.

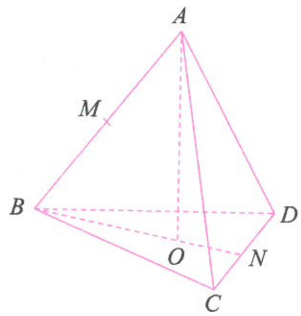
Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 18$ cm și $AD = 12$ cm. Punctul E este mijlocul laturii DC, iar $F \in (BE)$, astfel încât $FE = \dfrac{BF}{2}$.



(0,5p) a) Arătați că aria dreptunghiului este 216 cm^2.
(0,5p) b) Arătați că punctele A, F și C sunt coliniare.
(0,5p) c) Calculați perimetrul triunghiului AEC.

2. În figura alăturată, $ABCD$ este un tetraedru regulat cu $AB = 8$ cm, iar M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD.



(0,5p) a) Arătați că aria tetraedrului este egală cu $64\sqrt{3}$ cm^2.
(0,5p) b) Determinați măsura unghiului format de MN cu latura BD.
(0,5p) c) Calculați valoarea sinusului unghiului format de MN cu planul (ABC).

TESTUL 6

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) : (7 - 3^3)$ este egal cu:

A. 2 B. –2 C. 3 D. –3

(0,5p) **2.** Dacă $\frac{x}{25} = \frac{6}{15}$, atunci $\frac{x+4}{7}$ este egal cu:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

(0,5p) **3.** Cel mai mare număr prim din mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -2x + 15 > -11\}$ este:

A. 13 B. 17 C. 11 D. 19

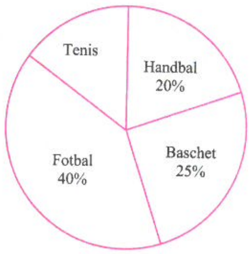
(0,5p) **4.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Măsura unghiului format de dreptele BC' și CO, unde $\{O\} = AD' \cap A'D$, este egală cu:

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

(0,5p) **5.** Cilindrul circular drept cu raza egală cu 6 cm și înălțimea de 10 cm are volumul egal cu:

A. 360π cm^3 B. 600π cm^3 C. 120π cm^3 D. 480π cm^3

(0,5p) **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate procentele care indică participarea elevilor unei școli la diferite sporturi.



Știind că în școală sunt 360 de elevi, numărul elevilor care joacă tenis este:

A. 108 B. 36 C. 54 D. 72

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați un tetraedru regulat $ABCD$.

(0,5p) **2.** Se consideră numărul $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2019}$. Arătați că $A \,\vdots\, 10$.

(0,5p) **3.** Un grup de copii au primit bomboane. Patru copii din grup au primit câte 5 bomboane, iar restul au primit câte 9 bomboane. Dacă fiecare copil din grup ar fi primit câte 7 bomboane, atunci ar fi rămas 24 de bomboane. Câte bomboane au fost distribuite copiilor?

(0,5p) **4.** Fie expresia $E(x) = \left(2 - \frac{3x-1}{x+2}\right) \cdot \left(3 - \frac{2x+10}{x+4}\right) + \frac{2x-1}{x+4}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2\}$.

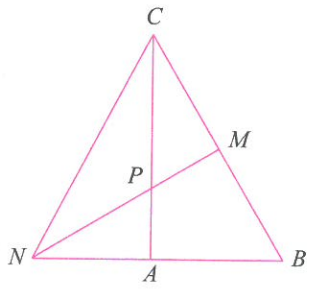
Arătați că $E(x) = 1$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2\}$.

5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx - 3$.

(0,5p) a) Determinați valorile întregi ale lui m pentru care punctul $A(m, 3m + 1)$ se găsește pe graficul funcției.

(0,5p) b) Pentru $m = 4$, reprezentați grafic funcția.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

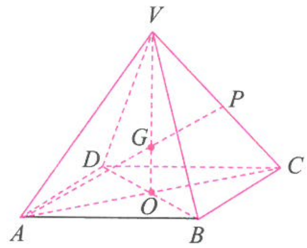


1. În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sphericalangle C = 30°$. Mediatoarea laturii BC intersectează pe AB în N și pe AC în P, iar $AM = 6$ cm.

(0,5p) a) Arătați că $BP \perp NC$.

(0,5p) b) Dacă $BP \cap CN = \{D\}$, calculați aria și perimetrul patrulaterului $CDPM$.

(0,5p) c) Calculați aria triunghiului DPM.



2. În figura alăturată, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu $VA = AB = 18$ cm.

(0,5p) a) Calculați aria laterală și volumul piramidei.

(0,5p) b) Calculați valoarea tangentei unghiului diedru format de planele (VBC) și (VAC).

(0,5p) c) Dacă P este mijlocul lui VC și $AP \cap VO = \{G\}$, calculați distanța de la punctul G la planul (VBC).

TESTUL 7

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(-3)^2 \cdot (-2^2 + 2 \cdot 5)$ este:

A. 54 B. 126 C. –54 D. –126

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr întreg din intervalul $\left[-2,5; 3\frac{1}{2}\right]$ este:

A. –3 B. –2 C. –1 D. 3

(0,5p) **3.** Soluția naturală a ecuației $2x^2 - 5x - 3 = 0$ este:

A. 2 B. –2 C. 3 D. –3

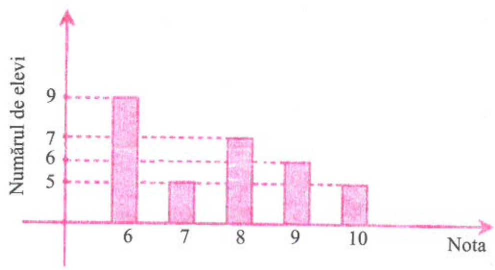
(0,5p) **4.** Aria laterală a unui trunchi de con circular drept care are $r = 4$ cm, $R = 7$ cm și $G = 5$ cm este:

A. 90π cm^2 B. 110π cm^2 C. 55π cm^2 D. 60π cm^2

(0,5p) **5.** O sferă cu raza de 6 cm are volumul egal cu:

A. 216π cm^3 B. 432π cm^3 C. 864π cm^3 D. 288π cm^3

(0,5p) **6.** În diagrama de mai jos este prezentată situația notelor la un test de matematică.



Media clasei la acest test este de:

A. 7,78 B. 8,02 C. 7,92 D. 7,25

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

(0,5p) **2.** Determinați numerele naturale care au cel mai mare divizor comun 6 și diferența pătratelor lor egală cu 180.

(0,5p) **3.** La un concurs, participanții au trebuit să răspundă la 25 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect s-au acordat 8 puncte, iar pentru un răspuns greșit s-au scăzut 6 puncte. Un participant a obținut 116 puncte. La câte întrebări a dat răspuns greșit?

(0,5p) **4.** Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x+3}{x-4}\right)^2\cdot\frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-3}:\frac{x^2+6x+9}{x^2-16}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-3,-1,3,4\}$. Arătați că $E(x)=\frac{x+4}{x-3}$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-3,-1,3,4\}$.

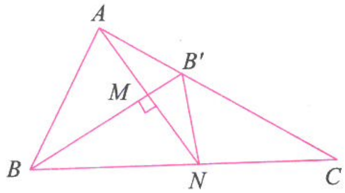
5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$.

(0,5p) a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

(0,5p) b) Arătați că numărul $a=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(214)$ este un număr natural pătrat perfect.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB=12$ cm, $BC=24$ cm, $\sphericalangle B=60°$ și BB' bisectoarea unghiului ABC. Se construiește $AM\perp BB'$, $M\in BB'$, iar $AM\cap BC=\{N\}$.

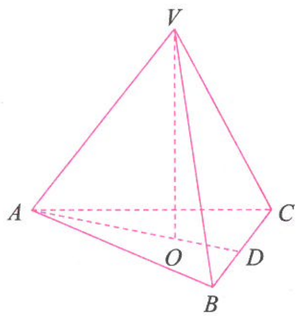


(0,5p) a) Calculați aria triunghiului ABC.

(0,5p) b) Calculați perimetrul triunghiului ANC.

(0,5p) c) Calculați aria triunghiului $B'NC$.

2. În figura alăturată, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată, cu $VA=9\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle AVB=90°$.



(0,5p) a) Calculați volumul piramidei.

(0,5p) b) Arătați că $VA\perp VD$, unde D este mijlocul laturii BC.

(0,5p) c) Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (VAB) și (VAD).

TESTUL 8

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(-12^2+20^2):(-4^2)$ este egal cu:

A. -16 B. 16 C. -34 D. 34

(0,5p) **2.** Fie expresia $E(x)=(x-5)^2+|x-4|$. Valoarea expresiei pentru $x=3$ este:

A. -3 B. 5 C. -6 D. 3

(0,5p) **3.** Dacă $\frac{x}{5-\sqrt{7}}=\frac{5+\sqrt{7}}{3}$, atunci valoarea lui x este:

A. 3 B. $-\frac{2}{3}$ C. 6 D. 8

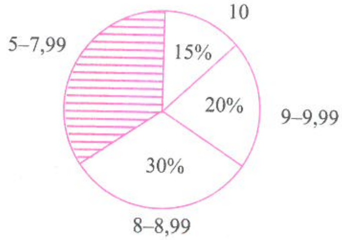
(0,5p) **4.** Un paralelipiped cu dimensiunile $a = 9$ cm, $b = 12$ cm și $c = 20$ cm are diagonala egală cu:

A. 30 cm B. 24 cm C. 26 cm D. 25 cm

(0,5p) **5.** Un cub are aria totală egală cu 54 cm^2. Muchia cubului este egală cu:

A. 3 cm B. 2 cm C. 4 cm D. 6 cm

(0,5p) **6.** În diagrama de mai jos este reprezentată repartiția notelor la evaluarea națională dintr-o școală.



Știind că 70 de elevi au luat note între 5 și 7,99, numărul elevilor care au susținut examenul este egal cu:

A. 180 B. 200 C. 240 D. 360

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(0,5p) **2.** Calculați media geometrică a numerelor:

$$a = (\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{8+2\sqrt{15}} \text{ și } b = (2\sqrt{3}+2)\sqrt{16-8\sqrt{3}}.$$

(0,5p) **3.** Într-un bloc sunt apartamente cu 3 sau cu 4 camere. Știind că în total sunt 44 de apartamente, care au împreună 143 de camere, determinați câte apartamente cu 3 camere sunt în acel bloc.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -5x + 11$.

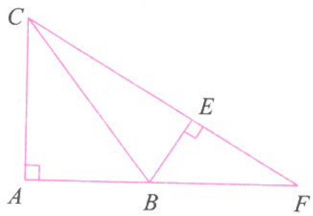
(0,5p) a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

(0,5p) b) Rezolvați ecuația $f(x+1) - 2f(x) = f(x-2) + 3$.

(0,5p) **5.** Fie expresia $E(x) = \left(\frac{2x}{x+2} + \frac{2x}{6-3x} + \frac{8x}{x^2-4}\right) : \frac{4x^2+12x}{3x^2+3x-18}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$. Arătați că $E(x) = 1$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $AC = 12$ cm, iar F este simetricul lui A față de B și $BE \perp CF$, $E \in (CF)$.



(0,5p) a) Calculați perimetrul triunghiului ACF.

(0,5p) b) Calculați valoarea sinusului unghiului CBE.

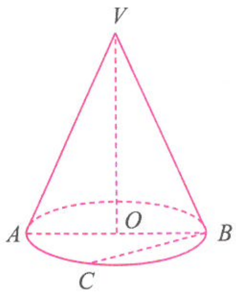
(0,5p) c) Calculați aria patrulaterului $ABEC$.

2. În figura de mai jos este reprezentat un con circular drept având raza și înălțimea proporționale cu numerele 3 și, respectiv, 2, iar volumul de 1296π cm^3.

(0,5p) a) Aflați aria laterală a conului.

(0,5p) b) Pe cercul de centru O se ia un punct C, astfel încât $\widehat{BC} = 120°$. Calculați distanța de la O la planul (VBC).

(0,5p) c) Se secționează conul cu un plan paralel cu baza, astfel încât aria cercului de secțiune să fie 144π cm^2. Calculați volumul trunchiului de con astfel obținut.



TESTUL 9

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $0,5 \cdot (48 - 28 : 2)$ este egal cu:

A. 19 B. 18 C. 17 D. 20

(0,5p) **2.** Soluțiile ecuației $(x + 1)^2 + 3x + 5 = 0$ sunt:

A. $\{2, 3\}$ B. $\{-2, -3\}$ C. $\{2, -3\}$ D. $\{-2, 3\}$

(0,5p) **3.** Dacă $(2x + y - 2)^2 + (x - 2y - 6)^2 = 0$, atunci perechea (x, y) este:

A. $(-1, 3)$ B. $(2, -3)$ C. $(3, -2)$ D. $(2, -2)$

(0,5p) **4.** Piramida patrulateră regulată care are muchiile laterale şi latura bazei egale cu 24 cm are aria laterală egală cu:

A. $324\sqrt{3}$ cm^2 B. $144\sqrt{3}$ cm^2 C. $288\sqrt{3}$ cm^2 D. $576\sqrt{3}$ cm^2

(0,5p) **5.** Cilindrul cu raza de 8 cm şi înălțimea de 9 cm are volumul egal cu:

A. 192π cm^3 B. 576π cm^3 C. 432π cm^3 D. 324π cm^3

(0,5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt trecute numărul de elevi din fiecare clasă a VIII-a dintr-o şcoală la începutul anului şcolar şi numărul de elevi din aceste clase promovați la sfârşitul anului şcolar.

Nr. de elevi \ Clasa	a VIII-a A	a VIII-a B	a VIII-a C	a VIII-a D	Total
la începutul anului şcolar	28	30	32	30	120
promovați la sfârşitul anului şcolar	25	26	30	27	108

Procentul de promovabilitate este egal cu:

A. 91% B. 93% C. 92% D. 90%

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați o prismă triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$.

(0,5p) **2.** Determinați numerele raționale a și b, astfel încât:

$$a + 1 = 3(a - 2\sqrt{3}) + 2b\sqrt{3} + 7\,.$$

(0,5p) **3.** Într-o clasă sunt 32 de elevi, băieți și fete. Dacă din clasă ar pleca două fete și ar veni doi băieți, atunci ar fi de trei ori mai mulți băieți decât fete. Care este numărul fetelor din clasă?

(0,5p) **4.** Fie expresia $E(x)=\left[\frac{2}{x+3}+\frac{x+2}{x-3}\cdot\left(\frac{x+3}{x+2}-1\right)\right]:\frac{x-1}{x^2-9}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 1, 3\}$. Arătați că $E(x) = 3$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 1, 3\}$.

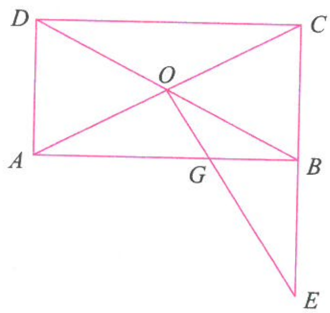
5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 5$.

(0,5p) a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

(0,5p) b) Calculați distanța de la punctul $M(-2; 0)$ la dreapta care reprezintă graficul funcției.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $BC = 6$ cm. Se notează cu E simetricul lui C față de B și $OE \cap AB = \{G\}$, unde $AC \cap BD = \{O\}$.



(0,5p) a) Calculați aria triunghiului AEC.

(0,5p) b) Arătați că $CG \perp AE$.

(0,5p) c) Calculați aria triunghiului BOG.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră dreaptă, cu $AB = 12$ cm și $A'D = 24$ cm.

(0,5p) a) Calculați aria totală și volumul prismei.

(0,5p) b) Calculați distanța de la B' la diagonala AD'.

(0,5p) c) Calculați valoarea tangentei unghiului format de AD' cu planul (BDD').

TESTUL 10

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(-2^4 + 3^2) \cdot (-5^2 + 2^3 \cdot 3)$ este egal cu:

A. 1235 B. 7 C. –25 D. –343

(0,5p) **2.** Soluția reală a ecuației $1-\frac{3x+4}{5}=2$ este:

A. 3 B. –2 C. –3 D. 2

(0,5p) **3.** Soluția sistemului $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ este perechea (x, y) egală cu:

A. (2, 3) B. (–2, 3) C. (2, –3) D. (–2, –3)

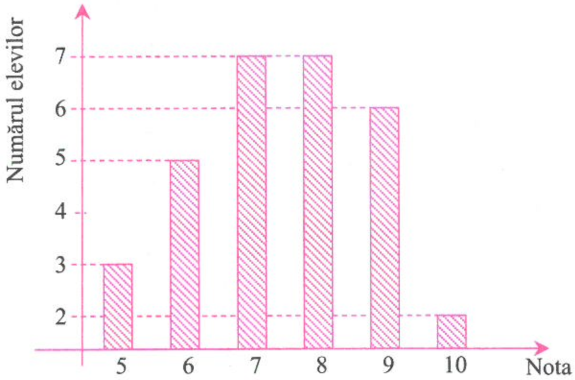
(0,5p) **4.** O prismă triunghiulară dreaptă are toate muchiile egale cu 6 cm. Volumul prismei este egal cu:

A. $54\sqrt{3}$ cm^3 B. $63\sqrt{3}$ cm^3 C. $36\sqrt{3}$ cm^3 D. 54 cm^3

(0,5p) **5.** Un con circular drept are generatoarea de 15 cm și înălțimea de 9 cm. Aria secțiunii axiale a conului este egală cu:

A. 54 cm^2 B. 108 cm^2 C. 96 cm^2 D. 216 cm^2

(0,5p) **6.** În diagrama de mai jos sunt reprezentate rezultatele elevilor unei clase la un test.



Conform datelor din diagramă, media pe clasă este egală cu:
A. 7,46 B. 7,45 C. 7,50 D. 7,40

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

(0,5p) **2.** Se consideră numerele reale $a = \sqrt{128}\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}} - \dfrac{1}{\sqrt{32}}\right)$ și $b = \sqrt{2} + \dfrac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. Calculați $ab - \sqrt{2}$.

(0,5p) **3.** Un turist a parcurs cu bicicleta un traseu în trei zile astfel: în prima zi a parcurs 40% din lungimea întregului drum, a doua zi 50% din drumul rămas, iar a treia zi i-au mai rămas de parcurs cu 32 km mai puțin decât parcursese în prima zi. Care a fost lungimea drumului?

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2a + 3)x + 1$.

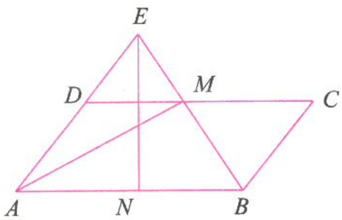
(0,5p) a) Determinați valorile reale ale lui a pentru care punctul $A(a; 0)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției.

(0,5p) b) Pentru $a = -1$, reprezentați grafic funcția.

(0,5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{x+1}{4-x^2} - \dfrac{1}{x-2}\right) : \dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$. Arătați că $E(x) = \dfrac{1}{x+2}$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, $ABCD$ este un paralelogram cu $AB = 2BC$, $BC = 12$ cm și $\sphericalangle A = 60°$, iar M și N sunt mijloacele laturilor DC și, respectiv, AB.

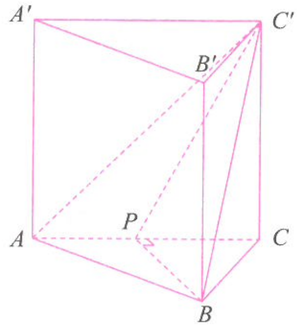


(0,5p) a) Calculați măsura unghiului AMB.

(0,5p) b) Dacă $BM \cap AD = \{E\}$, arătați că $EN \perp AB$.

(0,5p) c) Calculați valoarea raportului $\dfrac{\mathcal{A}_{BMPN}}{\mathcal{A}_{\Delta APE}}$, unde $AM \cap EN = \{P\}$.

2. În figura alăturată este reprezentată prisma dreaptă $ABCA'B'C'$, în care aria totală este egală cu $18(6+\sqrt{3})\ \text{cm}^2$ și $AA' = AB$, iar P este mijlocul laturii AC.



(0,5p) a) Calculați lungimea laturii AB.

(0,5p) b) Demonstrați că planele (BPC') și (APC') sunt perpendiculare.

(0,5p) c) Calculați distanța de la punctul C la planul (PBC').

Recapitulare şi evaluare finală

Exerciţii şi probleme recapitulative pentru evaluarea finală

ALGEBRĂ

A.

1. Efectuați calculele:

a) $\left(-\frac{1}{125}\right):0,008+0,(7)+0,(3)^2$;   b) $[0,2(3)-1,2]:0,3(2)$.

2. Calculați media aritmetică a numerelor: $5\sqrt{3}-2\sqrt{5}$, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

3. Calculați media geometrică a numerelor $x=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{\sqrt{12}-\sqrt{3}}$ şi $y=\frac{\sqrt{48}-\sqrt{3}}{\sqrt{18}-\sqrt{8}}$.

4. Descompuneți în produs de factori:

a) x^3-2x^2-4x+8;   b) $(2x+1)^3-8x-4$;

c) $2(x^2-1)-(x+1)^2$;   d) $x^2+5x+6-2(x^2-4)$.

5. Determinați numerele reale x şi y, ştiind că:

a) $x^2+y^2+4x-8y+20=0$;   b) $(x-2\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}y-6)^2=0$;

c) $(2x+y+4)^2+(x+2y-1)^2=0$;   d) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{y^2+4y+13}=5$.

6. Arătați că expresia $E(x)=(x^2+2x+2)(x^2+2x+6)+7$ este strict pozitivă pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea minimă a expresiei.

7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\frac{x-2}{5}+\frac{x-1}{2}=\frac{3x-1}{10}$;   b) $\left|\frac{2x-1}{3}\right|=1$;

c) $4(x+3)-2|x+3|=2(x+5)+2x$;

d) $(x-3)^2+(x-4)(x+4)=(x+2)^2+x(x-4)+1$;

e) $(2x+1)^2-4(x+3)(x-5)=5(x+3)+4$;

f) $\sqrt{(2x-1)^2}=7$;   g) $(x+3)^2-4x=x(x+1)$;

h) $\sqrt{(x-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{50}$;   i) $2x^2+x-10=0$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $-5(x+2)<25$;   b) $(x+5)^2-7x<x(x+2)+21$;

c) $\sqrt{x^2-6x+9}\leq 1$;   d) $3(x+5)+2\sqrt{(x+2)^2}\leq 3x+25$;

e) $(x+5)(x-5)+(x+2)^2<x(x+5)+(x-3)^2$;

f) $(x^2+x+1)[2(x+1)-3(x-2)]\le 0$; g) $|x+2|\cdot[4(x+2)-2(x+5)]\ge 0$;

h) $\dfrac{-6}{3(x+5)-2(x+6)}<0$; i) $|x+2|\cdot(|x+3|-4)<0$.

9. Determinați punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-4x+9$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x-5$. Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

10. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$.

a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

b) Rezolvați ecuația $f(x+1)+f(x-2)=f(x)+4$.

11. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{3}x+1$.

a) Calculați numărul $a=f(\sqrt{3})\cdot f(-\sqrt{3})$.

b) Rezolvați inecuația $f(x)\le\sqrt{27}+1$.

12. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases}2(x+1)+3y=2\\ x+2(y+3)=5\end{cases}$; b) $\begin{cases}2(x+4)-2y=2\\ 3(x+1)+4y=1\end{cases}$;

c) $\begin{cases}2(x-3)+y=1\\ 3(x+1)-4y=-3\end{cases}$; d) $\begin{cases}5(2x+y+3)=3(x+3y)\\ \dfrac{x-2y+7}{2}=\dfrac{2x+2y+1}{3}\end{cases}$.

13. Fie ecuația $x^2+(a-2)x+6=0$.

a) Determinați valoarea reală a lui a, știind că $x=-2$ este soluție a ecuației.

b) Pentru $a=7$, determinați cealaltă soluție a ecuației.

14. Rezolvați ecuațiile:

a) $2x^2-7x-15=0$; b) $2x^2-7x+5=0$;

c) $6x^2-x-2=0$; d) $6x^2-5x-4=0$.

15. Efectuați calculele:

a) $\dfrac{x^2+3x+2}{3x-3}:\dfrac{x^2-4}{x^2-2x+1}$; b) $\dfrac{2x-8}{3x-3}:\dfrac{x^2-16}{9x^2-9}$;

c) $\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x+2}{x}\right):\left(\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x-2}{x}\right)$; d) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)$.

16. Suma a două numere naturale este 42. Diferența dintre triplul primului număr și dublul celuilalt număr este 6. Calculați numerele.

17. Un grup de copii au hotărât să strângă o sumă de bani. Ei au constatat că, dacă ar fi dat fiecare câte 10 lei, ar mai fi trebuit 40 lei, iar dacă ar fi dat fiecare câte 15 lei, ar fi fost 20 lei în plus. Care era suma ce trebuia strânsă și câți copii erau?

18. Într-o clasă sunt 32 de elevi, băieți și fete. Dacă ar pleca șase fete și ar veni doi băieți, numărul fetelor ar fi egal cu numărul băieților. Câte fete și câți băieți sunt în acea clasă?

19. Dacă elevii unei clase s-ar așeza câte doi într-o bancă, atunci un elev ar sta singur în bancă și două bănci ar rămâne libere. Dacă elevii clasei s-ar așeza câte trei în bancă, ar rămâne șase bănci libere. Câți elevi și câte bănci sunt în acea clasă?

B.

1. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R} \;\middle|\; -4<\frac{3x+1}{2}<2\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| \leq 3\}$. Calculați $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}^*$.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x + 1)^2 + (2x - 3)^2 - 2(2x + 1)(2x - 3)$. Arătați că expresia este pătratul unui număr natural, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3. Determinați numerele reale x și y, știind că $(2x + y - 1)^2 + (3x - 2y + 1)^2 = 0$.

4. Fie numerele $a = -\frac{646}{323}$, $b = 0,(2)\cdot 4\frac{1}{2}$ și $c = \frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

a) Arătați că $a + b \in \mathbb{Z}$.

b) Arătați că $a + b + c = 0$.

5. Numerele naturale a, b și c sunt proporționale cu 3, 4 și, respectiv, 6.

a) Cât la sută din numărul c reprezintă numărul a?

b) Determinați numerele, știind că $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 126$.

6. Se dau numerele $a = \sqrt{6-\sqrt{11}}$ și $b = \sqrt{6+\sqrt{11}}$.

a) Calculați produsul $a \cdot b$.

b) Calculați valoarea numărului $(a - b)^2$.

c) Arătați că numărul $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ este număr întreg negativ.

7. Diferența pătratelor a două numere naturale este egală cu 1008, iar cel mai mare divizor comun al lor este 12. Aflați cele două numere.

8. Dacă bomboanele dintr-o cutie s-ar împărți în mod egal la 7 copii, ar rămâne 4 bomboane, iar dacă s-ar împărți în mod egal la 8 copii, ar rămâne 5 bomboane. Care este cel mai mic număr de bomboane care ar putea fi în cutie, astfel încât să se îndeplinească condițiile problemei?

9. Se consideră fracția $F(x)=\frac{20x-40}{4x^2-16}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

a) Simplificați fracția.

b) Determinați $a \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 2\}$ pentru care $F(a) \in \mathbb{Z}$.

10. Se consideră fracția $F(x)=\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-4x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

a) Arătați că $F(x) = x+\frac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $F(a) = a + 1$.

11. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} x+2y=21 \\ x-y=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=19 \\ x-2y=-3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x-y=9 \\ -x+3y=21 \end{cases}$.

12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2a + 3)x - (5a - 1)$.

a) Determinați valoarea reală a lui a pentru care punctul $A(2; 6) \in G_f$.

b) Rezolvați ecuația $f(x + 1) + f(x - 1) = 12$.

13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 6$.

a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2f(x) - f(2) = f(4)$.

c) Calculați valoarea sumei $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(25)$.

14. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, știind că punctele $A(3; 2b)$ și $B(-1; 4)$ aparțin graficului funcției.

b) Pentru $a = 2$ și $b = 6$, reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

c) Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(60)$.

15. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 + 11x + 30 = 0$;

b) $4x^2 - 4x - 24 = 0$;

c) $2x(x - 2) = -x - 1$;

d) $\dfrac{3x+2}{x} = \dfrac{2x}{x-1}$.

16. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{5}{x-1}\right) : \dfrac{x^2+8x+16}{x^2+5x+4}$.

a) Determinați valorile lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-4, -1, 1\}$ pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

17. Fie expresia $E(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{x^2-4}\right) : \left(1 - \dfrac{x}{x-2}\right)$.

a) Determinați valorile lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $a \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 2\}$ pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

18. Rezolvați inecuațiile:

a) $x + 2 - \dfrac{x+3}{2} < -1$;

b) $x(x + 5) - 2 < (x + 1)^2$;

c) $\dfrac{4(x-2)-3(x-4)}{-6} \leq -1$;

d) $(x^2 + 9)[5(x + 3) - 3(x + 1)] \leq 0$.

19. Ioana și Alina doresc să cumpere un obiect. Ioana observă că îi lipsesc două treimi din prețul obiectului, iar Alina observă că îi lipsește jumătate din prețul obiectului. Știind că cele două fete au împreună 1080 lei, aflați prețul obiectului.

20. În două cutii sunt 46 de creioane. Dacă din a doua cutie s-ar muta 5 creioane în prima cutie, atunci în a doua cutie ar fi cu 6 creioane mai puține decât în prima. Câte creioane sunt în fiecare cutie?

GEOMETRIE

A.

1. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $a = 2\sqrt{11}$ cm, $b = 10$ cm şi $c = 9$ cm. Calculaţi:

a) diagonala paralelipipedului;

b) aria totală şi volumul paralelipipedului;

c) valoarea sinusului unghiului format de diagonala AC' cu planul (BCC').

2. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are volumul egal cu 512 cm^3. Calculaţi:

a) latura cubului şi diagonala acestuia;

b) valoarea sinusului unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AC)$ şi $(B'AC)$;

c) măsura unghiului format de diagonala $D'C$ cu planul (BDD').

3. Un tetraedru regulat $ABCD$ are aria totală egală cu $144\sqrt{3}$ cm^2.

a) Calculaţi volumul tetraedrului.

b) Dacă M este mijlocul muchiei DC şi N este mijlocul muchiei AB, calculaţi măsura unghiului format de dreapta MN cu muchia AD.

c) Aflaţi valoarea sinusului unghiului diedru format de planele (AMB) şi (ABC).

4. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei egală cu 8 cm şi apotema egală cu 5 cm. Calculaţi:

a) volumul piramidei;

b) distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală;

c) valoarea sinusului unghiului diedru format de feţele (VBC) şi (VAD).

5. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată care are $AB = 24$ cm, $A'B' = 12$ cm şi apotema egală cu $4\sqrt{3}$ cm. Calculaţi:

a) volumul trunchiului de piramidă;

b) aria totală şi volumul piramidei din care provine trunchiul;

c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ şi (ABC).

6. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AA' = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6\sqrt{7}$ cm şi aria patrulaterului $ABC'D'$ egală cu 108 cm^2. Calculaţi:

a) lungimea laturii AB;

b) aria totală şi volumul paralelipipedului;

c) valoarea sinusului unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD').

7. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are la bază un triunghi echilateral cu latura $AB = 8$ cm şi înălţimea $AA' = 6$ cm. Se notează $AB' \cap BA' = \{O\}$ şi $BC' \cap CB' = \{O'\}$. Aflaţi:

a) aria laterală şi volumul prismei;

b) distanţa de la punctul B' la dreapta OO';

c) poziţia dreptei OO' faţă de planul (ABC);

d) sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(B'AC)$ şi $(A'BC')$.

8. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu latura $AB = 6$ cm şi M mijlocul laturii AC. Aflaţi:

a) aria totală şi volumul tetraedrului;

b) distanţa de la M la planul (DBC);

c) distanţa de la M la muchia BD.

9. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu latura $AB = 12$ cm, se notează cu M mijlocul muchiei DD' și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Calculați aria triunghiului $B'OM$.

b) Arătați că $(AMO) \perp (B'OM)$.

c) Calculați măsura unghiului format de dreptele AO și BD'.

10. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă în care $AA' = 9$ cm și raza cercului circumscris triunghiului ABC este $6\sqrt{3}$ cm. Știind că $M \in (AA')$ și $N \in (CC')$, astfel încât $\frac{AM}{AA'} = \frac{2}{3}$ și $\frac{CN}{CC'} = \frac{1}{3}$, calculați:

a) distanța de la punctul C la planul (ABC');

b) aria triunghiului BMN;

c) distanța de la punctul M la dreapta de intersecție a planului (MBN) cu (ABC).

B.

1. Paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 15$ cm, $BC = 20$ cm și $AA' = 12$ cm. Aflați:

a) distanța de la D' la diagonala AC;

b) măsura unghiului diedru format de planele $(D'AC)$ și (DAC);

c) tangenta unghiului format de planele $(C'AB)$ și (ABC).

2. Un trunchi de con circular drept are volumul egal cu $1368\sqrt{3}\,\pi$ cm^3, iar înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm. Se secționează trunchiul cu un plan paralel cu bazele dus pe la jumătatea înălțimii trunchiului, astfel încât aria secțiunii obținute să fie egală cu 225π cm^2. Calculați:

a) razele bazelor trunchiului;

b) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul;

c) măsura unghiului sectorului de cerc provenit din desfășurarea laterală a conului din care provine trunchiul.

3. Se consideră prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ cu latura bazei $AB = 24$ cm și înălțimea $A'A = 12$ cm.

a) Aflați aria laterală și volumul prismei.

b) Dacă M este mijlocul muchiei CC', aflați aria triunghiului $MA'B$.

c) Calculați distanța de la A' la dreapta de intersecție a planelor (MBA') și (ABC).

4. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu înălțimea $SO = 4$ cm și volumul egal cu $36\sqrt{3}$ cm^3. Calculați:

a) latura bazei și aria laterală ale piramidei;

b) tangenta unghiului format de muchia SB cu planul (SAD), unde D este mijlocul muchiei BC;

c) distanța de la A la planul (SBC) și distanța de la O, centrul bazei, la planul (SBC).

5. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ care are toate muchiile egale cu 12 cm.

a) Calculați aria laterală și volumul piramidei.

b) Aflați măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.

c) Calculați măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAC).

d) Calculați valoarea sinusului unghiului diedru format de planele (VBC) și (VAC).

6. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și M mijlocul muchiei CC'. Dacă $AM = 18$ cm, aflați:

a) latura și diagonala cubului;

b) distanța de la punctul A la dreapta $D'M$;

c) sinusul unghiului diedru format de planele $(AD'M)$ și $(DD'C)$.

7. Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială un trapez isoscel $ABB'A'$ cu mediatoarea bazelor OO' (unde $O \in AB$ și $O' \in A'B'$), iar $OA' \perp O'A$. Se știe că razele bazelor sunt egale cu $6\sqrt{2}$ cm și, respectiv, $9\sqrt{2}$ cm.

a) Calculați volumul trunchiului de con.

b) Calculați aria laterală a conului din care provine trunchiul.

c) Dacă C este un punct pe cercul de centru O, astfel încât $\widehat{BC} = 90°$, calculați distanța de la O la planul (VBC), unde V este vârful conului din care provine trunchiul.

8. Se consideră paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = 20$ cm, $BC = 12$ cm și $AA' = 15$ cm. Calculați:

a) aria totală și volumul paralelipipedului;

b) distanța de la A la dreapta CD';

c) distanța de la D la planul $(AD'C)$.

9. Fie tetraedrul regulat $ABCD$ care are volumul egal cu $144\sqrt{2}$ cm^3. Aflați:

a) latura tetraedrului;

b) aria totală a tetraedrului;

c) distanța de la M, mijlocul muchiei BC, la planul (ABD).

10. Într-un trunchi de con circular drept cu aria laterală egală cu 585π cm^2, raza mare, raza mică și înălțimea sunt invers proporționale cu numerele 0,125, 0,2 și, respectiv, 0,25. Calculați:

a) raza mare, raza mică, înălțimea și generatoarea trunchiului;

b) volumul trunchiului;

c) aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul.

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.*

TESTUL 1

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mic număr natural de patru cifre distincte, divizibil cu 4, este:

a) 1004; b) 1024; c) 4876; d) 2632.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos este prezentată componența claselor din ciclul gimnazial al unui colegiu.

Clasa	a V-a	a VI-a	a VII-a	a VIII-a
Numărul fetelor	47	41	32	33
Numărul băieților	34	37	40	51

Cei mai mulți băieți sunt în clasa:

a) a V-a; b) a VI-a; c) a VII-a; d) a VIII-a.

(5p) **3.** Numărul natural n verifică relația $\frac{1}{2} < \frac{n+1}{18} < \frac{7}{9}$, dacă și numai dacă:

a) $n \in \{8, 9, 10, 11\}$; b) $n \in \{7, 8, 9, 10\}$;
c) $n \in \{9, 10, 11, 12\}$; d) $n \in \{10, 11, 12, 13\}$.

(5p) **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine descrescătoare este:

a) 1,1(6); 1,166; 1,(16); 1,16; b) 1,(16), 1,166; 1,1(6); 1,16;
c) 1,16; 1,1(6); 1,(16); 1,166; d) 1,166; 1,(16); 1,1(6); 1,16.

(5p) **5.** Patru elevi au calculat media geometrică a numerelor $\left(\frac{5}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$ și $\sqrt{32}$. Rezultatele obținute sunt înregistrate în tabelul următor.

Ștefan	Sofia	Matei	Mara
2	4	5	6

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect este:

a) Ștefan; b) Sofia; c) Matei; d) Mara.

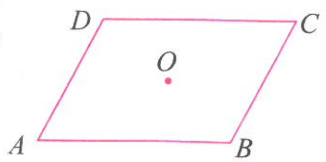
(5p) **6.** Matei a cumpărat 3 kg de pere cu 5 lei kilogramul și 2 kg de portocale cu 6 lei kilogramul. Matei spune că a plătit pe toată marfa cumpărată 27 de lei. Afirmația lui Matei este:

a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

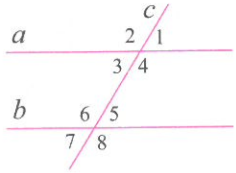
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un paralelogram de centru O. Simetricul punctului A față de punctul O este punctul:

a) E; b) B;
c) C; d) D.



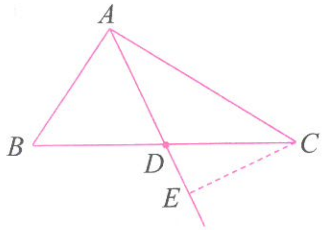
(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele paralele a și b sunt tăiate de secanta c. Dacă $\sphericalangle 8 = 132°$, atunci $\sphericalangle 1$ are măsura egală cu:

a) $132°$; b) $58°$;
c) $48°$; d) $42°$.



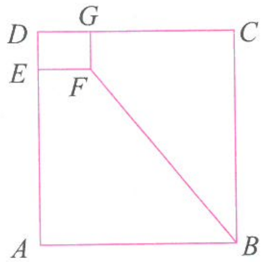
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un teren în formă de triunghi ABC dreptunghic în A, în care $AB = 60$ m, $AC = 80$ m și punctul D este mijlocul laturii BC. Ștefan se află în punctul C și vrea să ajungă la dreapta AD, parcurgând drumul cel mai scurt. Distanța parcursă de Ștefan este egală cu:

a) 36 m; b) 42 m;
c) 48 m; d) 50 m.



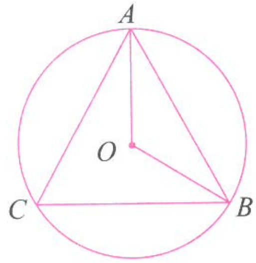
(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă schița unui salon pentru evenimente, în formă de dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 12$ m și $AD = 18$ m. Dreptunghiul $EFGD$, cu $ED = 2$ m și $EF = 4$ m reprezintă bucătăria salonului. Proprietarul acoperă suprafața $ABFE$ cu parchet. Aria suprafeței acoperite cu parchet este egală cu:

a) $84\ m^2$; b) $96\ m^2$;
c) $120\ m^2$; d) $128\ m^2$.



(5p) **5.** Pe cercul cu centrul în punctul O din figura alăturată sunt situate punctele A, B, C, astfel încât unghiul AOB are măsura egală cu $106°$ și măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu $120°$. Măsura unghiului BAC este egală cu:

a) $63°$; b) $65°$;
c) $67°$; d) $68°$.



(5p) **6.** Cătălin are un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile bazei egale cu 135 cm și 60 cm, iar înălțimea acvariului este egală cu 60 cm. Cătălin vrea să introducă pietre în formă de cuburi, având latura egală cu 15 cm. Numărul de cuburi ce poate fi introdus în acvariu, astfel încât să ocupe jumătate din volumul acestuia, este egal cu:

a) 54; b) 60; c) 68; d) 72.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. **(30 de puncte)**

1. Trei bluze și două rochii costă împreună 295 lei. Două bluze și cinci rochii costă împreună 490 lei.

(2p) a) Este posibil ca o bluză să coste 60 lei? Justificați răspunsul.

(3p) b) Determinați prețul unei rochii.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{2x^2 - 7x + 9}{x^2 - 7x + 10} - \dfrac{x+3}{x-5}\right) : \dfrac{1}{x^2 - 4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$.

(2p) a) Arătați că $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

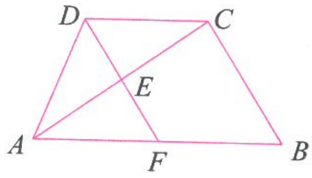
(3p) b) Demonstrați că $E(x) = (x-3)(x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$.

(2p) a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe ortogonale xOy.

(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determinați coordonatele punctului $C(a, b)$ situat pe graficul funcției f, acesta fiind simetricul lui B față de punctul A.

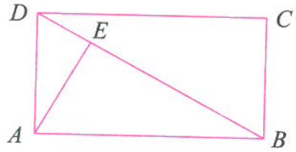
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $CD = 12$ cm, $BC = 16$ cm și $AD = 12$ cm. Paralela prin D la BC intersectează latura AB în F, astfel încât $AF = 20$ cm, iar diagonala AC în punctul E.



(2p) a) Arătați că $\sphericalangle ADF = 90°$.

(3p) b) Determinați lungimea segmentului DE.

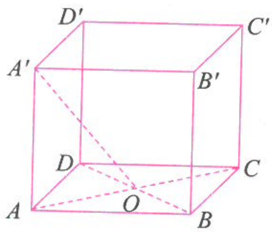
5. În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$, iar AE este distanța de la punctul A la dreapta BD, astfel încât $BE = 25$ cm și $DE = 16$ cm.



(2p) a) Determinați lungimea segmentului AE.

(3p) b) Demonstrați că perimetrul dreptunghiului este mai mic decât 117 cm.

6. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ reprezentat în figura alăturată are $AB = 12$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$.



(2p) a) Calculați lungimea segmentului $A'O$.

(3p) b) Determinați măsura unghiului dreptelor $A'O$ și $B'C$.

TESTUL 2

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dacă $8^x = 512$, numărul natural x este egal cu:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii zilnice înregistrate într-o localitate, în decursul unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	–3°C	–2°C	–1°C	+5°C	+6°C	+7°C	+9°C

Temperatura medie înregistrată în această săptămână a fost egală cu:

a) –1°C; b) 2°C; c) 3°C; d) 4°C.

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 12 băieți și 18 fete. Probabilitatea ca o fată să fie scoasă la tablă este egală cu:

a) 0,4; b) 0,5; c) 0,6; d) 0,8.

(5p) **4.** Dintre numerele 2,(34), 2,344, 2,34 și 2,3(4), cel mai mic este:

a) 2,(34); b) 2,344; c) 2,34; d) 2,3(4).

(5p) **5.** Patru elevi au calculat valoarea numărului real x, știind că $xy - xz - 3x = 3 - 2\sqrt{2}$ și $y - z = \sqrt{8}$. Rezultatele obținute de fiecare elev sunt înregistrate în tabelul următor.

Ioana	Alin	Simona	Adrian
-2	-1	1	$\sqrt{2}+1$

Răspunsul corect a fost obținut de:

a) Ioana; b) Alin; c) Simona; d) Adrian.

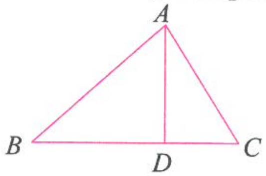
(5p) **6.** Un autoturism a parcurs un traseu în trei ore. În prima oră a parcurs 65 km, în a doua oră cu 15 km mai puțin decât în prima oră, iar în a treia oră cu 10 km mai mult decât în a doua oră. Șoferul afirmă că autoturismul a parcurs 175 km. Afirmația șoferului este:

a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

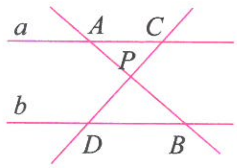
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC, în care $AD \perp BC$ și $CD < BD$. Varianta în care segmentele sunt scrise în ordine crescătoare este:

a) $AB < AD < AC$; b) $AC < AD < AB$;
c) $AD < AC < AB$; d) $AD < AB < AC$.



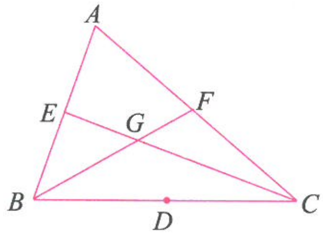
(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele, iar $\sphericalangle PDC = 45°$ și $\sphericalangle PBD = 30°$. Măsura unghiului APD este egală cu:

a) 50°; b) 60°;
c) 75°; d) 90°.



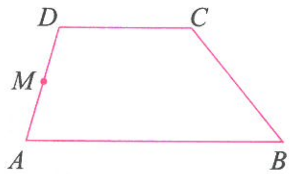
(5p) **3.** În figura alăturată, triunghiul ABC reprezintă schița unui teren în care E este mijlocul lui AB, F este mijlocul lui AC, $BF \cap CE = \{G\}$ și punctul D este mijlocul lui BC. Dacă $BF = 81$ m, $CE = 108$ m și $BC = 90$ m, atunci lungimea drumului GD este egală cu:

a) 36 m; b) 42 m;
c) 45 m; d) 48 m.



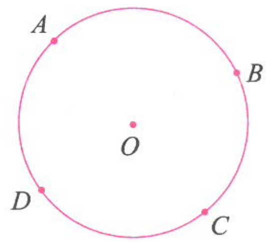
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentată schița unui teren în formă de trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și punctul M este mijlocul laturii AD. Știind că aria trapezului este egală cu 378 m^2 și $BC = 21$ m, atunci distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu:

a) 14 m; b) 16 m;
c) 18 m; d) 21 m.



(5p) **5.** Pe cercul cu centrul în punctul O din figura alăturată sunt situate punctele A, B, C, D, în această ordine, în sensul de mișcare a acelor de ceasornic, astfel încât unghiul $\overset{\frown}{AB} = 130°$, $\overset{\frown}{BC} = 65°$ și $\overset{\frown}{AD} = 105°$. Măsura unghiului la centru COD este egală cu:

a) 30°; b) 40°;
c) 45°; d) 60°.



(5p) **6.** Matei are o cutie de jucării în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile bazei egale cu 108 cm lungimea și, respectiv, 72 cm lățimea, pe care o umple cu 162 cutii în formă cubică, având fiecare latura de 12 cm. Înălțimea paralelipipedului dreptunghic este egală cu:

a) 30 cm; b) 32 cm; c) 36 cm; d) 40 cm.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. **(30 de puncte)**

1. Două obiecte costă împreună 520 lei. Dacă prețul unui obiect crește cu 20%, iar prețul celuilalt obiect scade cu 25%, atunci valorile lor devin egale.

(2p) a) Se poate afirma că prețul obiectului mai ieftin este egal cu 240 lei? Justificați răspunsul.

(3p) b) Dacă $p\%$ din prețul obiectului mai scump reprezintă prețul obiectului mai ieftin, determinați valoarea lui p.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x-3)^2 + (2x-1)(x+3) - (3x+2)^2 + 19x + 1, x \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Arătați că $E(x) = -3(x^2-1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

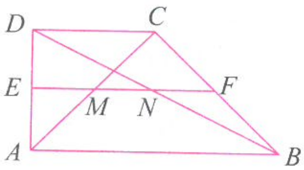
(3p) b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) > -9$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 8$.

(2p) a) Determinați numărul real a, astfel încât punctul $A(3, -1)$ se află pe graficul funcției f.

(3p) b) Pentru $a = -3$, determinați punctul de pe graficul funcției date care are coordonatele egale.

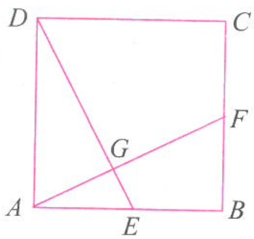
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, EF linie mijlocie, $E \in AD$, $F \in BC$, iar segmentul determinat de diagonale pe linia mijlocie, $MN = 3{,}5$ cm. Știind că $AC \perp BC$, iar $\sphericalangle DAC = 60°$, calculați:



(2p) a) lungimea laturii BC;

(3p) b) lungimea bazei mari AB.

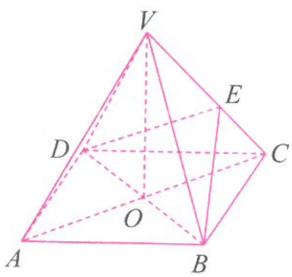
5. În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$, cu $AB = 30$ cm, iar punctele E și F sunt mijloacele laturilor AB și, respectiv, BC, cu $AF \cap DE = \{G\}$.



(2p) a) Demonstrați că $\sphericalangle DGF = 90°$.

(3p) b) Calculați aria triunghiului ADG.

6. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ din figura alăturată, $AB = 12$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$ și $VO \perp (ABC)$, $VO = 6\sqrt{7}$ cm, iar punctul $E \in CD$, astfel încât $BE + DE = 24$ cm.



(2p) a) Arătați că lungimea muchiei laterale VA este egală cu 18 cm.

(3p) b) Determinați lungimea segmentului VE.

✱ TESTUL 3 ✱

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Inversul numărului 12 este egal cu:

a) 0,8; b) 0,8(3); c) 0,08(3); d) 0,(83).

(5p) **2.** Un elev are la limba germană următoarele note, trecute în tabelul de mai jos.

Nota	6	7	8	9	10
Numărul de note	1	1	1	1	1

Media elevului la limba germană este egală cu:

a) 7,80; b) 7,90; c) 8; d) 8,10.

(5p) **3.** Într-o zi de vară, la malul mării, temperatura apei a fost de 24°C, iar temperatura în aer de 33°C. Temperatura în aer a fost mai mare decât temperatura apei cu:

a) 7°C; b) 8°C; c) 9°C; d) 12°C.

(5p) **4.** Dintre numerele următoare, natural este numărul:

a) –6; b) 0,6; c) $\sqrt{6}$; d) 6.

(5p) **5.** Patru elevi au calculat valoarea raportului $\frac{a}{b}$, unde $a = \sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{50}$ și $b = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul de mai jos.

Ștefan	**Ioana**	**Matei**	**Ana**
0,4	0,5	1	2

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect este:

a) Ștefan; b) Ioana; c) Matei; d) Ana.

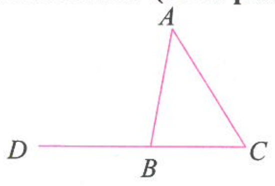
(5p) **6.** Ștefan cumpără un obiect pe care îl achită folosind două bancnote de 10 lei și una de 5 lei și primește rest 3,40 lei. Ștefan afirmă că obiectul costă 21,60 lei. Afirmația lui Ștefan este:

a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

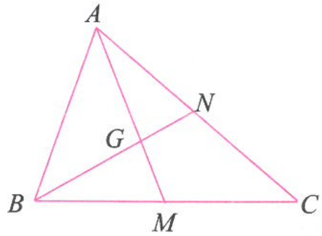
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, cu $\sphericalangle ABD = 129°$ și $\sphericalangle A = \frac{\sphericalangle C}{2}$. Măsura unghiului C este egală cu:

a) 78°; b) 80°;
c) 82°; d) 86°.



(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, în care BN și AM sunt două dintre medianele sale, iar $BN \cap AM = \{G\}$. Știind că $\mathcal{A}_{\Delta ABG} = 24\ cm^2$, atunci aria triunghiului ABC este egală cu:

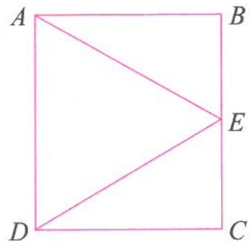
a) 48 cm^2; b) 60 cm^2;
c) 72 cm^2; d) 75 cm^2.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentată schița unui teren $ABCD$ în formă de dreptunghi, în care este înscris triunghiul echilateral ADE, având latura $AD = 6$ m. Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu:

a) $18\ m^2$; b) $12\sqrt{3}\ m^2$;

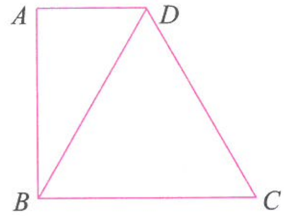
c) $18\sqrt{2}\ m^2$; d) $18\sqrt{3}\ m^2$.



(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentată schița unui teren în formă de trapez dreptunghic $ABCD$, cu $AD \parallel BC$, $BC > AD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$, $AD = 6$ m și triunghiul BCD echilateral. Perimetrul terenului $ABCD$ este egal cu:

a) 36 m; b) $36\sqrt{3}$ m;

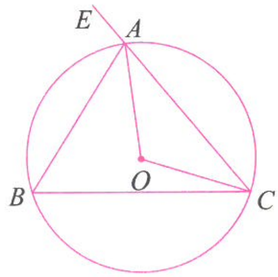
c) $30 + 6\sqrt{2}$ m; d) $30 + 6\sqrt{3}$ m.



(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și triunghiul ABC înscris în cerc, astfel încât $\sphericalangle BAE =$ $= 124°$, unde punctul E aparține dreptei AC, și $\overset{\frown}{ACB} = 232°$. Măsura unghiului la centru AOC este egală cu:

a) 118°; b) 120°;

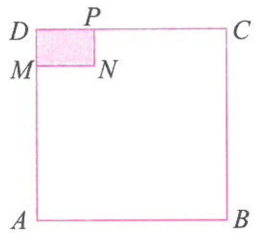
c) 122°; d) 124°.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată schița unei parcări în formă de pătrat $ABCD$, cu latura $AB =$ $= 72$ m. Proprietarul vrea să paveze această parcare cu dale în forma dreptunghiului $MNPD$, având dimensiunile $MN = 1{,}2$ m și $MD = 0{,}96$ m. Numărul pavelelor necesare pentru a pava întreaga parcare este egal cu:

a) 4500; b) 4600;

c) 4700; d) 4800.



Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. **(30 de puncte)**

1. Diferența dintre dublul unui număr și triplul altui număr este egală cu 325. O cincime din numărul mai mare este cu 30 mai mare decât o treime din numărul mai mic.

(2p) a) Este posibil ca numărul mai mic să fie egal cu 80? Justificați răspunsul.

(3p) b) Determinați cel mai mare număr.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 - 2x)^2 - 2x(3x - 7) - 5$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Arătați că $E(x) = 2x + 4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

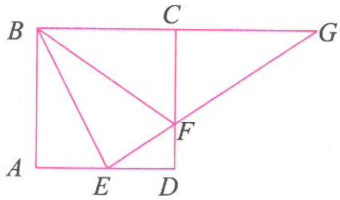
(3p) b) Determinați valorile naturale nenule ale lui n, pentru care $E(n) < 12$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 6$.

(2p) a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe ortogonale xOy.

(3p) b) Determinați distanța de la punctul $P(0, -2)$ la graficul funcției.

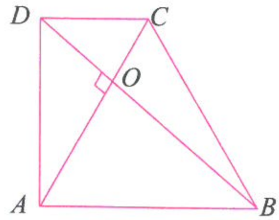
4. Pătratul $ABCD$ din figura alăturată are $AB = 8$ cm, punctul E este mijlocul laturii AD, $\sphericalangle BEF = 90°$, iar $EF \cap BC = \{G\}$.



(2p) a) Arătați că $BF = 10$ cm.

(3p) b) Determinați lungimea segmentului FG.

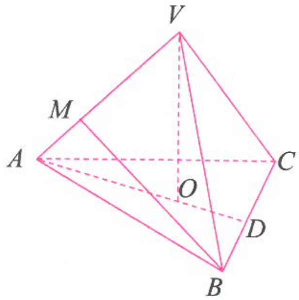
5. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{4}$ și $AC \perp BD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, iar $AD = 18$ cm.



(2p) a) Determinați lungimile bazelor CD și AB.

(3p) b) Calculați aria trapezului $ABCD$.

6. În figura alăturată este reprezentată o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC, un triunghi echilateral cu latura $AB = 12$ cm și muchia laterală $VA = 4\sqrt{6}$ cm. Fie M un punct situat pe muchia VA, astfel încât lungimea segmentului BM să fie minimă.



(2p) a) Demonstrați că muchia VA este perpendiculară pe planul (MBC).

(3p) b) Calculați aria triunghiului MBC.

TESTUL 4

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $[-12 + (-24) : (-6)] : (-2)$ este egal cu:

a) -6; b) -4; c) 2; d) 4.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos este prezentată situația mediilor generale ale elevilor unei clase a VIII-a, la sfârșitul semestrului I.

Media	6–6,99	7–7,99	8–8,99	9–9,99	10
Numărul de elevi	4	6	8	9	3

Numărul elevilor care au obținut medii mai mari sau egale cu 8 este egal cu:

a) 18; b) 19; c) 20; d) 21.

(5p) **3.** Ștefan vrea să-și cumpere un telefon performant. El are 80% din suma necesară, adică 3200 lei. Prețul telefonului este:

a) 3600 lei; b) 3800 lei; c) 4000 lei; d) 4200 lei.

(5p) **4.** Dintre următoarele șiruri de numere, cel care nu conține numărul 42 este:

a) 2, 4, 6, 8, 10, ...; b) 4, 8, 12, 16, 20, ...;
c) 3, 6, 9, 12, 15, ...; d) 6, 12, 18, 24, 30, ...

(5p) **5.** Patru elevi au calculat media aritmetică a numerelor $a = \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{128} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{32} - \sqrt{72} + \sqrt{98} - \sqrt{18}$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul alăturat. Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:

Corina	**Pavel**	**Alina**	**Vlad**
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$

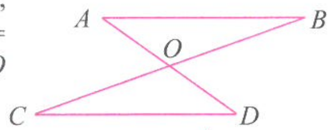
a) Corina; b) Pavel; c) Alina; d) Vlad.

(5p) **6.** În luna februarie a unui an, temperatura minimă înregistrată a fost de –15°C, iar temperatura maximă înregistrată a fost de +10°C. Cosmin afirmă că diferența dintre temperatura maximă și cea minimă înregistrate a fost de 25°C. Afirmația lui Cosmin este:

a) adevărată; b) falsă.

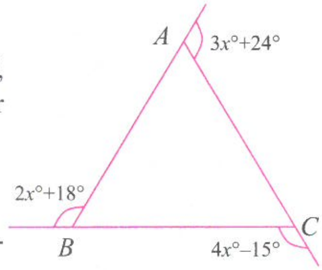
Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D, astfel încât $AB \parallel CD$, $AB = CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Simetricul punctului A față de punctul O este:



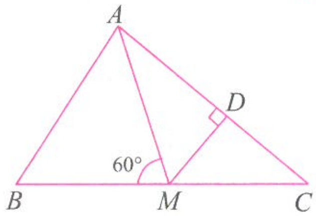
a) B; b) C;
c) D; d) A.

(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, în care $\sphericalangle ABE = 2x° + 18°$, $\sphericalangle BCD = 4x° - 15°$, iar $\sphericalangle CAF = 3x° + 24°$. Valoarea lui x este egală cu:



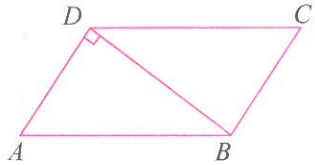
a) 35; b) 36;
c) 37; d) 38.

(5p) **3.** Figura alăturată reprezintă schița unui traseu turistic, în care punctele A, B și C marchează pozițiile a trei puncte de observație din zonă. Triunghiul ABC este dreptunghic cu măsura unghiului A de 90°. Această zonă este străbătută de o șosea reprezentată de dreapta AM, unde M este mijlocul laturii BC. Dacă măsura unghiului AMB este 60° și $BC = 36$ km, atunci distanța de la punctul M la dreapta de acces AC ($MD \perp AC$) este egală cu:



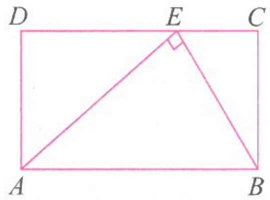
a) 8 km; b) 9 km;
c) 10 km; d) 12 km.

(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă un paralelogram $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $BD \perp AD$, $AB = 25$ cm și $BD = 20$ cm. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu:



a) 60 cm; b) 70 cm;
c) 80 cm; d) 84 cm.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$, în care $BC = 24$ cm, $9DE = 16EC$, $E \in CD$, iar $\sphericalangle AEB = 90°$. Aria triunghiului ABE este egală cu:



a) 540 cm^2; b) 560 cm^2;
c) 580 cm^2; d) 600 cm^2.

(5p) **6.** O firmă are un depozit de marfă în formă de paralelipiped dreptunghic, având dimensiunile $L = 24$ m, $l = 19{,}2$ m și înălțimea $h = 3{,}84$ m. Numărul maxim de cutii în formă de cub cu latura de 48 cm ce pot fi depozitate în acest depozit este egal cu:

a) 14400; b) 15600; c) 16000; d) 16800.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. **(30 de puncte)**

1. Un elev care participă la un test-grilă primește 30 de întrebări. Pentru un răspuns corect, elevul primește 8 puncte, iar pentru un răspuns greșit i se scad 5 puncte. Elevul a obținut 162 de puncte, răspunzând la toate întrebările.

(2p) a) Este posibil ca elevul să fi dat 26 de răspunsuri corecte? Justificați răspunsul.

(3p) b) Determinați numărul răspunsurilor greșite.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{2x^2 - x + 2}{4x^2 - 1} - \dfrac{x+1}{1-2x} - \dfrac{x-1}{2x+1}\right) \cdot \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 2x - 8}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 4\right\}$.

(2p) a) Arătați că $2x^2 - 5x + 2 = (x-2)(2x-1)$, pentru orice număr real x.

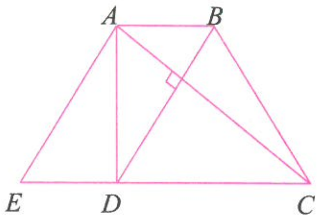
(3p) b) Determinați valorile întregi ale lui n, pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 1)$, $B(-1, -8)$ și $C(-3, -14)$.

(2p) a) Determinați funcția liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, știind că punctele A și C sunt situate pe graficul funcției.

(3p) b) Demonstrați că punctele A, B și C sunt coliniare.

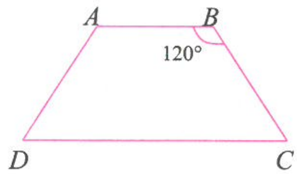
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, având $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, diagonalele perpendiculare ($AC \perp BD$), $AE \parallel BD$, $E \in CD$ și $AB = 18$ cm, $CD = 32$ cm.



(2p) a) Demonstrați că triunghiul AEC este dreptunghic.

(3p) b) Calculați aria trapezului $ABCD$.

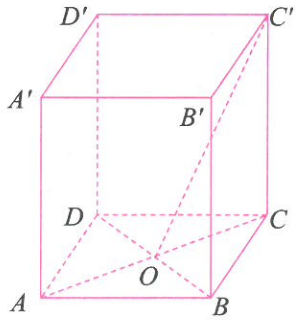
5. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $AD = AB = BC = 6\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle ABC = 120°$.



(2p) a) Demonstrați că $AC \perp AD$.

(3p) b) Demonstrați că triunghiul ACD are perimetrul mai mic decât 54 cm.

6. În figura alăturată este reprezentată o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 8\sqrt{2}$ cm și $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Pe muchia AA' se ia punctul M, astfel încât $AM = 8$ cm, iar $AC \cap BD = \{O\}$.



(2p) a) Calculați sinusul unghiului format de dreapta OC' cu planul $(B'BC)$.

(3p) b) Calculați măsura unghiului format de planele (MBD) și $(C'BD)$.

TESTUL 5

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dacă $576 = 2^x \cdot 3^y$, atunci diferența $x - y$ este egală cu:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos este prezentat numărul elevilor din clasele a VIII-a, de la o școală gimnazială, înscriși la olimpiade.

Disciplina	Matematică	Fizică	Chimie	Biologie	Informatică
Numărul de elevi	23	12	14	8	27

Numărul elevilor participanți la olimpiada de fizică este mai mic decât numărul elevilor participanți la olimpiada de informatică cu:

a) 13; b) 14; c) 15; d) 19.

(5p) **3.** Un elev pleacă într-o excursie la munte. La baza muntelui temperatura este de 18°C, iar la altitudinea la care a ajuns, temperatura este de 6°C. Raportul dintre temperatura de la altitudinea la care a ajuns și temperatura de la baza muntelui este egal cu:

a) $\frac{1}{3}$; b) 0,5; c) $\frac{5}{9}$; d) 0,6.

(5p) **4.** Patru elevi au calculat valoarea numărului real $x = \frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{6}} + |\sqrt{6}-3| + |2\sqrt{2}-3|$.

Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul de mai jos.

Ioana	Dinu	Daria	Vlad
$-2\sqrt{2}$	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	6

Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:

a) Ioana; b) Dinu; c) Daria; d) Vlad.

(5p) **5.** Valoarea lui a pentru care numerele de forma $\overline{3a7}$, scrise în baza 10, sunt divizibile cu 9, este:

a) 6; b) 7; c) 8; d) 9.

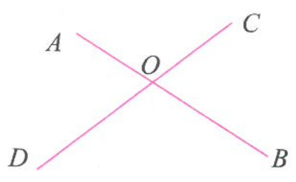
(5p) **6.** Un elev face de acasă până la școală, mergând cu autobuzul, 25 de minute. Elevul afirmă că a plecat de acasă la ora 11:45 și a ajuns la școală la ora 12:20. Afirmația elevului este:

a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

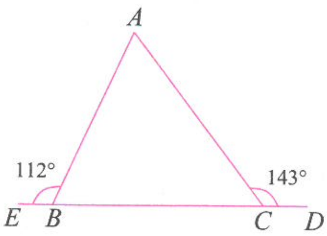
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentată intersecția segmentelor AB și CD, $AB \cap CD = \{O\}$, astfel încât $OA = OC$ și $OB = OD$, cu $OA < OB$. Patrulaterul $ABCD$ este:

a) pătrat; b) dreptunghi;
c) paralelogram; d) trapez isoscel.



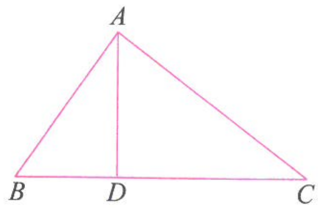
(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, având unghiurile exterioare ABE și ACD cu măsurile 112°, respectiv 143°. Măsura unghiului BAC este egală cu:

a) 74°; b) 75°;
c) 76°; d) 77°.



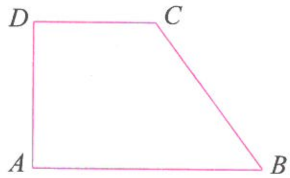
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $BD = 4$ cm și $CD = 9$ cm, atunci aria triunghiului ABC este egală cu:

a) 36 cm^2; b) 38 cm^2;
c) 39 cm^2; d) 42 cm^2.



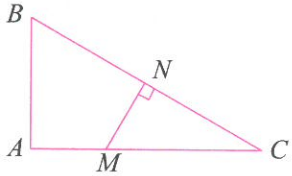
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentată o foaie de tablă sub forma unui trapez dreptunghic $ABCD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB \parallel CD$, $AB = 84$ cm, $CD = 48$ cm și $\sphericalangle ABC = 45°$. Lungimea înălțimii AD este egală cu:

a) 32 cm; b) 36 cm;
c) 40 cm; d) 42 cm.



(5p) **5.** În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în vârful A, $\sphericalangle ABC = 55°$, iar $MN \perp BC$, $M \in AC$ și $N \in BC$. Măsura unghiului CMN este egală cu:

a) 45°; b) 48°;
c) 50°; d) 55°.



(5p) **6.** O piscină în formă de paralelipiped dreptunghic, are dimensiunile bazei egale cu 32 m și 24 m. Când piscina este plină cu apă, ea conține 2304 kl. Înălțimea piscinei este egală cu:

a) 2 m; b) 2,5 m; c) 2,75 m; d) 3 m.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. (30 de puncte)

1. Un excursionist a parcurs cu autocarul un traseu în trei zile. În prima zi a parcurs 20% din drum, a doua zi 60% din rest, iar a treia zi ultimii 480 km.

(2p) a) În ce zi a parcurs excursionistul cea mai mare distanță?

(3p) b) Determinați lungimea întregului traseu parcurs în cele trei zile.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x + 3)^2 - (x - 2)^2 - 4(x + 4) - 9$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Arătați că $E(x) = 6x - 20$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determinați valorile naturale ale lui n, pentru care $E(n) < n - 5$.

3. Într-un sistem de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(3, 5)$, $B(-5, -3)$ și $C(3, -3)$.

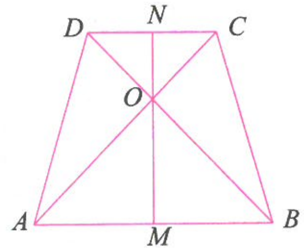
(2p) a) Calculați distanța de la punctul C la dreapta AB.

(3p) b) Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC, calculați aria triunghiului ABM.

4. În figura alăturată este reprezentat un trapez isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AC \perp BD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $O \in MN$, $MN \perp AB$, $AB = 24$ cm și $CD = 16$ cm.

(2p) a) Demonstrați că $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$.

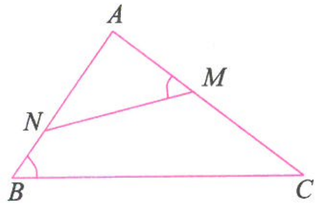
(3p) b) Calculați lungimea diagonalei AC.



5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și punctele $M \in AC$, $N \in AB$, astfel încât $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$, iar $AM = 12$ cm, $AB = 18$ cm, $AC = 24$ cm.

(2p) a) Determinați lungimea segmentului MN.

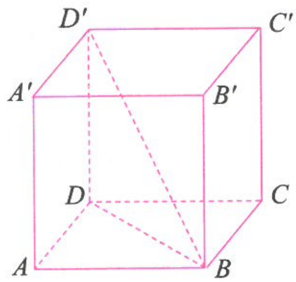
(3p) b) Calculați aria patrulaterului $MNBC$.



6. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, având dimensiunile $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și $CC' = 3\sqrt{3}$ cm.

(2p) a) Calculați distanța de la punctul D' la dreapta AC.

(3p) b) Calculați măsura unghiului corespunzător diedrului format de planele $(D'DB)$ și (BCC').



TESTUL 6

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Suma numerelor naturale pare mai mici decât 100 este egală cu:

a) 2448; b) 2450; c) 3452; d) 2454.

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor $a = (-2)^{12} : 2^9$, $b = 2^8 : (-2)^6$ și $c = 2 + 2 \cdot 2$ este egală cu:

a) 6; b) 8; c) 10; d) 12.

(5p) **3.** Într-o urnă sunt 6 bile albe, 8 bile negre și 10 bile roșii. Probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare o bilă din urnă, aceasta să fie albă, este egală cu:

a) 20%; b) 25%; c) 30%; d) 40%.

(5p) **4.** Rezultatul calculului $(\sqrt{27} - \sqrt{18})(\sqrt{12} + \sqrt{8})$ este egal cu:

a) 3; b) 4; c) 6; d) 8.

(5p) **5.** Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x + 3| < 7\}$. Suma elementelor mulțimii A este egală cu:

a) –12; b) –10; c) –9; d) –6.

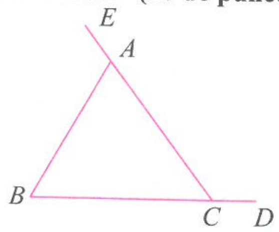
(5p) **6.** Propoziția: „Pentru orice număr natural impar n, numărul $n^2 + 4n + 3$ este un număr natural par.” este:

a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

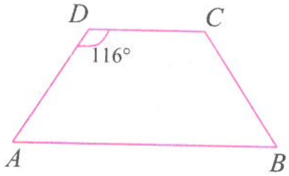
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC în care $\sphericalangle ACD = 126°$ și $\sphericalangle BAE = 115°$. Măsura unghiului ABC este egală cu:

a) $59°$; b) $61°$;
c) $63°$; d) $65°$.



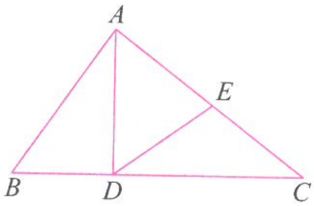
(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AD \equiv DC \equiv BC$, iar $\sphericalangle ADC = 116°$. Măsura unghiului ACB este egală cu:

a) $78°$; b) $81°$;
c) $84°$; d) $86°$.



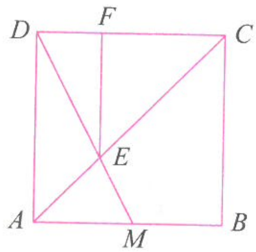
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm și $\sphericalangle ABC = 60°$. Știind că $AD \perp BC$, $D \in BC$, iar punctul E este mijlocul laturii AC, lungimea segmentului DE este egală cu:

a) 6 cm; b) $4\sqrt{3}$ cm;
c) $3\sqrt{6}$ cm; d) $3\sqrt{7}$ cm.



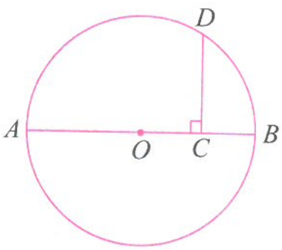
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ cu $AB = 12$ cm, iar punctul M este mijlocul laturii AB. Dacă $AC \cap DM = \{E\}$ și $EF \perp CD$, $F \in CD$, EF este egală cu:

a) 6 cm; b) 8 cm;
c) 9 cm; d) 10 cm.



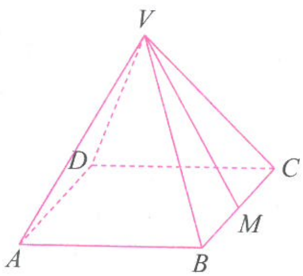
(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și diametru $AB = 8$ cm. Punctul C este mijlocul razei OB, iar perpendiculara dusă în punctul C pe diametrul AB intersectează cercul în punctul D. Perimetrul triunghiului ADB este egal cu:

a) $4(3-\sqrt{3})$ cm; b) $4(2+\sqrt{3})$ cm;
c) $4(3+\sqrt{3})$ cm; d) $4(4+\sqrt{3})$ cm.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida regulată $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ și $AB = 12$ cm. Dacă punctul M este mijlocul laturii BC și $VM = 6\sqrt{3}$ cm, atunci măsura unghiului AVC este egală cu:

a) $45°$; b) $60°$;
c) $75°$; d) $90°$.



Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. **(30 de puncte)**

1. O sumă de bani a fost împărțită celor trei frați, David, Mara și Rareș, invers proporțional cu numerele 0,(3), 0,25, respectiv 0,2.

(2p) a) Care dintre cei trei frați a primit cei mai mulți bani?

(3p) b) Dacă David a primit cu 120 de lei mai puțin decât Rareș, care este suma primită de Mara?

2. Se consideră expresia $E(x) = x + \left(\frac{1}{x-4} + \frac{8-x^2}{x-2} \cdot \frac{1}{x-4}\right) : \frac{x+2}{2x-4} + \frac{2}{x-4}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$.

(2p) a) Arătați că $E(x) = x - 2$, pentru orice număr $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$.

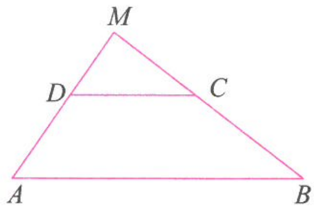
(3p) b) Determinați valorile întregi ale lui n, pentru care $E(n) + 3\sqrt{7} = \frac{1}{E(n) - 3\sqrt{7}}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + 4$, unde m este un număr real nenul.

(2p) a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy, știind că punctul $A(2, 0)$ aparține graficului funcției date.

(3p) b) În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele P și Q, care reprezintă intersecțiile graficului funcției f cu axele de coordonate Ox, respectiv Oy. Determinați valorile numărului real m, știind că $\text{tg}(\sphericalangle OPQ) = 9$.

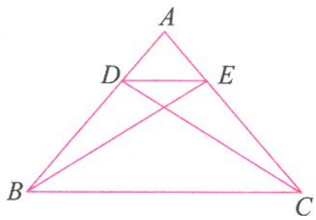
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AD \cap BC = \{M\}$, iar $AB = 28$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 14$ cm și $AD = 13$ cm.



(2p) a) Calculați perimetrul triunghiului MCD.

(3p) b) Arătați că $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{3}{4} \cdot \mathcal{A}_{MAB}$.

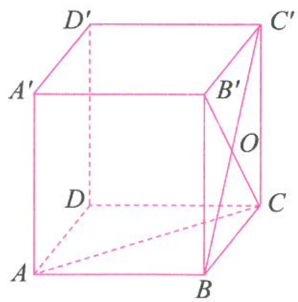
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 25$ cm și baza $BC = 30$ cm, în care $DE \parallel BC$, $D \in AB$ și $E \in AC$, astfel încât $BE \perp CD$.



(2p) a) Calculați lungimea segmentului DE.

(3p) b) Calculați sinusul unghiului BAC.

6. În figura alăturată este reprezentată o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 6$ cm, $AA' = 6\sqrt{3}$ cm, iar $B'C \cap BC' = \{O\}$.



(2p) a) Calculați aria triunghiului AOD'.

(3p) b) Calculați sinusul unghiului format de dreptele AC și BO.

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

1. Operaţii cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere

1.1. Adunarea şi scăderea

1. a) $\frac{x+2}{5}$; b) $x+1$; c) $1-x$; d) $\frac{5x+9}{3}$; e) $4(x+1)$; f) $\frac{56-83x}{30}$. **2.** a) 2, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) 17, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; c) 3, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; d) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$. **3.** a) $\frac{2(x-1)}{3x^2}$, pentru $x \neq 0$; b) $\frac{2}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; c) $\frac{5}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; d) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; e) $\frac{x-1}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; f) $\frac{x+1}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$; g) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$. **4.** a) 2, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $\frac{8}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; c) $\frac{6}{(x+2)(x-2)}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; d) $\frac{6}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; e) $\frac{2}{3x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; f) $-\frac{1}{3x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. **5.** a) $\frac{1}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$; b) $\frac{4}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) $\frac{x+8}{x-2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; d) $\frac{x+2}{x+1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. **6.** a) $\frac{9}{x-3}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; b) $\frac{4}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; c) $\frac{4}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$; d) $-\frac{8}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$. **7.** a) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; b) $-\frac{1}{x+1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; d) $\frac{1}{x-5}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$. **8.** a) $x \in \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; b) $\frac{2}{2x-3}$; c) $n = 2$. **9.** a) $x \in \{-1, 1\}$; b) $F(x) = \frac{1}{x+1}$; $G(x) = 1 \in \mathbb{N}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2020} \cdot \frac{1}{2021} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2021} = \frac{1009}{3030}$. **10.** a) $x \in \{-3, 3\}$; b) $E(x) = -\frac{3}{x+3}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; c) $n \in \{-6, -4, -2, 0\}$. **11.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; b) $E(x) = \frac{6}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; c) $n \in \{-2, +1, +2, +3, +5, +6, +7, +10\}$.

1.2. Înmulţirea. Împărţirea. Ridicarea la putere

1. a) $\frac{1}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; b) $\frac{1}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$; c) $\frac{6}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$; d) $\frac{1}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$; e) 3, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; f) $-\frac{9}{2x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$. **2.** a) $\frac{x-2}{x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}$; b) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; c) $\frac{3x}{5(x+5)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, 4\}$; d) $\frac{x-2}{4}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; e) $\frac{7}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2, 5\}$; f) $\frac{x}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$. **3.** a) $\frac{3x}{x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$; b) $\frac{x}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 2\}$; c) $\frac{3x}{4}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}$; d) $\frac{6}{x+5}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 3, 5\}$; e) $\frac{x-4}{x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 5\}$; f) $\frac{x+3}{x+4}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3, 4\}$. **4.** a) $\frac{x-4}{5}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3, 4\}$; b) $\frac{x+3}{x-6}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 4, 6\}$; c) $\frac{x+4}{x-5}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 5\}$; d) $\frac{x-8}{x+7}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-8, -7, -4, 8\}$; e) $\frac{x-2}{x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3, 4\}$; f) $\frac{x+3}{x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, 3, 5\}$. **5.** a) $\frac{1}{4x^2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$; b) $\frac{2x-3}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$; c) $\frac{1}{3x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$; d) $\frac{2x}{2x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$; e) $\frac{5}{2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$; f) $\frac{2x-5}{4x}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right\}$.

6. a) $\frac{3}{x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 0, 3\}$; b) $\frac{x-1}{x+4}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, -3, 2, 7\}$; c) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, -2, -1\}$; d) $\frac{x-2}{x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -2, 2, 3\}$; e) $\frac{x}{x-1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$; f) $\frac{x+5}{x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, -3, 2, 3, 6\}$. **7.** a) $\frac{2x-5}{28}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 3\right\}$; b) $\frac{4}{5}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 2, 3\}$; c) $\frac{2x}{3(x-3)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, 3, 4\}$; d) $\frac{x+2}{x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -1, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$. **8.** a) $\frac{2x}{x+4}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -4, -3, 0, 2, 3, 4\}$; b) $\frac{2(x-1)}{3x(x+1)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3, \pm 1, -2, 0, 5\}$; c) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, -3, -2, -1\}$. **9.** b) $n \in \{-4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8\}$. **10.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 5\}$; b) $E(x) = \frac{x+45}{x+5}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 5\}$; c) $n \in \{0, 3, 5, 15, 35\}$; d) Cum $E(x) = 1 + \frac{40}{x+5}$, pentru $x \geq 0$, $x + 5 \geq 5$, evident $E(x) > 1$, iar $\frac{40}{x+5} \leq \frac{40}{5} = 8$, de unde $E(x) \leq 9 \Rightarrow E(x) \in (1; 9]$. **11.** a) $x \in \left\{-3, -\frac{3}{2}, 3\right\}$; b) Pentru $E(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x - 9 \mid 1$, absurd, pentru oricare $x \in \mathbb{Z}$; c) Cum $E(x) = \frac{1}{3(x-3)}$, avem $(x-3)^2 \cdot \frac{1}{3(x-3)} = \frac{x-3}{3}$, deci $\left|\frac{x-3}{3}\right| \leq \frac{1}{3}$ conduce la $-1 \leq x - 3 \leq 1$, deci $A = [2; 4]$.

1.3. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor

1. a) $\frac{3}{x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}$; b) 3; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3, 4\}$; c) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 3, 5\}$; d) $\frac{4}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$; e) $\frac{2x+1}{x+7}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -4, -3, 4, 7\}$; f) -1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 7\}$. **2.** a) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$;

b) $-\dfrac{1}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$; c) $\dfrac{x-1}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; d) 2; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$; e) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; f) $\dfrac{x-8}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$. **4.** a) $\dfrac{x-1}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$; b) $\dfrac{x+2}{x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$; c) $\dfrac{3x+3}{3x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right\}$; d) $\dfrac{3x+1}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; e) $\dfrac{2x+3}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. **5.** a) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$; b) $-\dfrac{2}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$; c) $\dfrac{x+3}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 2\}$; d) $\dfrac{3-x}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 2, 5\}$; e) 5; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. **6.** a) 4; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $\dfrac{x+3}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 1, 2\}$; c) $\dfrac{1}{2x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}, -1, 1, \dfrac{3}{2}\right\}$; d) $\dfrac{8-4x}{x+6}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -2, 2\}$. **7.** a) $-\dfrac{2}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1, 1\}$; b) $\dfrac{6}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{10}{3}, -2, -1, 2\right\}$; c) $\dfrac{x-1}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 2\}$; d) $\dfrac{x-1}{(3x+2)(x+2)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -2, -1, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 2\right\}$. **8.** a) $\dfrac{x}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; b) $\dfrac{2x+2}{(x-1)(2+x)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$; c) $\dfrac{x-2}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -2, -1, 1, \dfrac{5}{3}, 5\right\}$; d) $\dfrac{3}{4-x}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4, -3, -2, \dfrac{8}{3}, 4\right\}$. **9.** a) $E(x) = 1$; b) $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2015}$; A are 2016 termeni care se pot grupa câte 3 și, deoarece $1 + 2 + 2^2 = 7$, rezultă că $A = (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \ldots + 2^{2013}(1 + 2 + 2^2) = 7(1 + 2^3 + \ldots + 2^{2013}) \Rightarrow 7 \mid A$. **10.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. **11.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$; b) $E(x) = x - 1$; c) $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x - 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow E(x) \in \mathbb{N}$. **12.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $E(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$; c) $n \in \{-3, -2, 0\}$. **13.** b) $A = \{3\}$. **14.** b) $A = \{-6, 1, 7\}$. **15.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 2\}$; c) $x \in \{1, 3, 7\}$. **16.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; c) $x \in \varnothing$. **17.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, -1, 1, 3\}$; c) $x \in \{-32, -4, 2, 4, 8, 10, 38\}$. **18.** b) $x \in \varnothing$. **19.** b) $x \in \{-10, -7, -6, -5, -2, -1\}$. **20.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -2, -1, \dfrac{4}{5}, 3\right\}$; c) $x \in \{-13, -8, -5, -4, 2, 7\}$. **21.** a) $(x - 1)(x^2 + 1)$; $(x + 1)(5x + 7)$. **22.** a) $E(x) = \dfrac{2x+8}{x+2}$; b) $x \in \varnothing$. **23.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, -2, 6\}$; c) $x \in \{-11, -5, -1, 1, 7\}$. **24.** a) $x \in \left\{-4, -3, -1, -\dfrac{3}{5}, 3\right\}$; b) $E(x) = \dfrac{5}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4, -3, -1, -\dfrac{3}{5}, 3\right\}$; c) $A = \{-6, -2, 0, 4\}$. **25.** b) $x \in \{-6, -4, -3, -1, 0\}$. **26.** b) Suma este egală cu $503 \cdot 1005 - 1 = 505514$. **27.** a) $E(x) = \left(\dfrac{5}{2x-1} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(2x-1)(x-1)}\right) : \dfrac{3x-5}{(x-1)(3x-2)} = \dfrac{5x-5-2x+1-1}{(x-1)(2x-1)} \cdot \dfrac{(x-1)(3x-2)}{3x-5}$; $E(x) = \dfrac{3x-5}{2x-1} \cdot \dfrac{3x-2}{3x-5} = \dfrac{3x-2}{2x-1}$; b) $E(a) = \dfrac{3a-2}{2a-1}$; $\dfrac{3a-2}{2a-1} = \dfrac{4}{2a-1} \Leftrightarrow a = 2$. **28.** a) $E(x) = \left(\dfrac{3}{x(x+2)} - \dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{2}{x(x-2)}\right) \cdot \dfrac{x(x^2-4)}{2} = \dfrac{3x-6-x+2x+4}{x(x-2)(x+2)} \cdot \dfrac{x(x-2)(x+2)}{2}$; $E(x) = \dfrac{4x-2}{2} = 2x - 1$; b) $E(n) = 2n - 1$; $2n - 1 \geq n^2 - 4 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \leq 4$; $(n-1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |n - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 3 \Rightarrow A = \{-1, 1, 3\}$. Card $A = 3$. **29.** a) $E(x) = \left(\dfrac{1}{3x-2} - \dfrac{4}{3x+2} + \dfrac{3x-7}{9x^2-4}\right) \cdot$

$\cdot \dfrac{(x+1)(3x+2)}{3-6x}$; $E(x) = \dfrac{3x+2-12x+8+3x-7}{(3x-2)(3x+2)} \cdot \dfrac{(x+1)(3x+2)}{3-6x} = \dfrac{3-6x}{3x-2} \cdot \dfrac{x+1}{3-6x} = \dfrac{x+1}{3x-2}$;

b) $E(n) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{3n-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{matrix} 3n-2 \mid n+1 \\ 3n-2 \mid 3n-2 \end{matrix} \Rightarrow 3n-2 \mid 3n+3 \Rightarrow 3n-2 \mid 5 \Rightarrow 3n-2 \in \{-5, -1,$ $1, 5\} \Rightarrow n \in \{-1, 1\}$. **30.** a) $E(x) = \dfrac{x^2-1-x^2+x+2}{x^2-1} : \left(\dfrac{x-4}{x(x-1)} + \dfrac{x-3}{x^2-1} - \dfrac{x-1}{x(x+1)}\right) = \dfrac{x+1}{x^2-1} :$ $: \dfrac{(x-4)(x+1)+x(x-3)-(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}$; $E(x) = \dfrac{1}{x-1} \cdot \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x^2-3x-4+x^2-3x-x^2+2x-1} = \dfrac{x(x+1)}{x^2-4x-5} =$ $= \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-5)} = \dfrac{x}{x-5}$; b) $E(a) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{a}{a-5} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3a = 2a - 10 \Leftrightarrow a = -10$. **31.** a) $E(x) =$ $= \left(\dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{10}{4x^2-1}\right) \cdot \dfrac{(2x+1)(3x+5)}{2x-5}$; $E(x) = \dfrac{3(2x+1)-2(2x-1)-10}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \dfrac{(2x+1)(3x+5)}{2x-5} =$ $= \dfrac{2x-5}{2x-1} \cdot \dfrac{3x+5}{2x-5} = \dfrac{3x+5}{2x-1}$; b) $(2n-1) \cdot E(n) \geq n(n-3) + 10 \Leftrightarrow 3n + 5 \geq n^2 - 3n + 10 \Leftrightarrow n^2 - 6n +$ $+ 5 \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 9 \leq 4 \Leftrightarrow (n-3)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |n-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq n - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 5 \Rightarrow n \in$ $\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. **32.** a) $E(x) = \left(\dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{x+2}{x^2-1}\right) \cdot \dfrac{x(x^2-1)}{x^2-16} = \dfrac{x+1+x-1+x^2+2x}{x(x-1)(x+1)} \cdot$ $\cdot \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x^2-16}$; $E(x) = \dfrac{x^2+4x}{x^2-16} = \dfrac{x}{x-4}$; b) $E(-a^2) = \dfrac{a^2}{a^2+4} \Rightarrow \dfrac{a^2}{a^2+4} = \dfrac{9}{10} \Leftrightarrow a^2 = 36 \Leftrightarrow |a| = 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in \{-6, 6\}$. **33.** a) $E(x) = \left(\dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{4x^2}{x^2-1} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)}\right) \cdot \dfrac{2x-2x^2}{1} = \dfrac{2x(x-1)-4x^2+3(x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot$ $\cdot \dfrac{2x-2x^2}{1}$; $E(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+1} \cdot 2x = 2x(2x-3)$; b) $A = 4x^2 - 12x + 13 = (2x-3)^2 + 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow (2x-3)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow A \geq 4 \Leftrightarrow A \in [4, +\infty)$; min $A = 4$, când $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. **34.** a) $E(x) =$ $= \left(\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{2}{(x-1)(x-2)}\right) \cdot \dfrac{x(x^2+2x-3)}{x+2} = \dfrac{x(x-2)+2(x-1)-2}{(x-1)(x-2)} \cdot \dfrac{x(x-1)(x+3)}{x+2}$; $E(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} \cdot \dfrac{x(x+3)}{x+2} = x(x+3)$; b) $P = -x^2 + 6x + 4 = -(x-3)^2 + 13$; $-(x-3)^2 + 13 \leq 13 \Leftrightarrow P \leq$ $\leq 13 \Leftrightarrow P \in (-\infty, 13] \Rightarrow$ max $P = 13$, când $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. **35.** a) $E(x) = \left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{1-x}{x(x+1)}\right) \cdot$ $\cdot \dfrac{x(x^2-x-6)}{2(x+2)} = \dfrac{(x+1)^2 - x(x-1) + 1 - x}{x(x+1)} \cdot \dfrac{x(x+2)(x-3)}{2(x+2)}$; $E(x) = \dfrac{2(x+1)}{x+1} \cdot \dfrac{x-3}{2} = x - 3$; b) $E(n) \geq$ $\geq n^2 - 3n \Leftrightarrow n - 3 \geq n^2 - 3n \Leftrightarrow n^2 - 4n + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (n-2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |n-2| \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 3$; $A = \{1, 2\}$. Card $A = 2$. **36.** a) $E(x) = \left(\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{4x}{x^2-1} - \dfrac{3(x+2)}{x^2+x-2}\right) \cdot \dfrac{x(1-x^2)}{5} = \left(\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{4x}{x^2-1} - \dfrac{3}{x-1}\right) \cdot \dfrac{x(1-x^2)}{5}$; $E(x) = \dfrac{2x-2-4x-3x-3}{(x-1)(x+1)} \cdot \dfrac{-x(x-1)(x+1)}{5} = \dfrac{5x+5}{1} \cdot \dfrac{x}{5} = x(x+1)$; b) $n(n+1) \geq n(2n+5) - 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n^2 + n \geq 2n^2 + 5n - 5 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 5 \leq 0 \Leftrightarrow (n+2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow |n+2| \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq n \leq 1 \Rightarrow n \in \{-5, -4, -3\}$.
37. a) $E(x) = \left(\dfrac{x+2}{x(x-1)} + \dfrac{x-3}{x^2-1} - \dfrac{x-1}{x(x+1)}\right) \cdot \dfrac{2x(x-1)^2}{x+1} = \dfrac{(x+2)(x+1)+x(x-3)-(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} \cdot \dfrac{2x(x-1)^2}{x+1}$;

$E(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}\cdot\dfrac{2(x-1)}{x+1}=2(x-1)$; b) $E(a\sqrt{2})=2a\sqrt{2}-2$; $E(-a\sqrt{2})=-2a\sqrt{2}-2$; $2a\sqrt{2}-2+2a\sqrt{2}+2=2a\sqrt{2}+8\Leftrightarrow 2a\sqrt{2}=8\Leftrightarrow a\sqrt{2}=4\Leftrightarrow a=2\sqrt{2}$. **38.** a) $E(x)=\left(\dfrac{2x^2-x+2}{4x^2-1}+\dfrac{1+x}{2x-1}-\dfrac{x-1}{2x+1}\right)\cdot\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x-4)(x+2)}$; $E(x)=\dfrac{2x^2-x+2+(x+1)(2x+1)-(x-1)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}\cdot\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x-4)(x+2)}=\dfrac{2x^2+5x+2}{2x+1}\cdot\dfrac{x-2}{(x+2)(x-4)}$; $E(x)=\dfrac{(2x+1)(x+2)}{2x+1}\cdot\dfrac{x-2}{(x+2)(x-4)}=\dfrac{x-2}{x-4}$; b) $\dfrac{a\sqrt{2}-2}{a\sqrt{2}-4}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 4a\sqrt{2}-8=3a\sqrt{2}-12\Leftrightarrow a\sqrt{2}=-4\Leftrightarrow a=-2\sqrt{2}$. **39.** a) $E(x)=x+\dfrac{x-2+8-x^2}{(x-2)(x-4)}\cdot\dfrac{2(x-2)}{x+2}+\dfrac{2}{x-4}$; $E(x)=x-\dfrac{x^2-x-6}{x-4}\cdot\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2}{x-4}=x-\dfrac{2(x-3)}{x-4}+\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$; $E(x)=\dfrac{(x-4)(x-2)}{x-4}=x-2$; b) $E^2(n)-63=1\Leftrightarrow E^2(n)=64\Leftrightarrow |E(n)|=8\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}E(n)=8\\ \text{sau}\\ E(n)=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}n-2=8\Leftrightarrow n=10\\ \text{sau}\\ n-2=-8\Leftrightarrow n=-6\end{array}\right.\Rightarrow n\in\{-6;10\}$. **40.** a) $E(x)=\dfrac{(x-3)^2+(x-1)^2-2(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)}\cdot\dfrac{(x-1)(x-3)}{2}-2x(x-2)$; $E(x)=\dfrac{(x-1-x+3)^2}{2}-2x(x-2)=2-2x^2+4x=-2x^2+4x+2$; b) $A=-2x^2+8x+2=-2x^2+8x-8+10=-2(x-2)^2+10$; $A\le 10$. $A\in(-\infty,10]\Rightarrow \max A=10$, când $x-2=0\Leftrightarrow x=2$. **41.** a) $E(x)=\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2-(1-x+2x^2)}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{2x^2(x^2-1)}{x+1}=\dfrac{x+1}{1}\cdot\dfrac{2x^2}{x+1}=2x^2$; b) $E(a\sqrt{2}+2)=2(a\sqrt{2}+2)^2$; $E(a\sqrt{2}-2)=2(a\sqrt{2}-2)^2$; $2(a\sqrt{2}+2)^2-2(a\sqrt{2}-2)^2=4(3a\sqrt{2}+2)\Leftrightarrow 2a^2+4a\sqrt{2}+4-2a^2+4a\sqrt{2}-4=6a\sqrt{2}+4$; $8a\sqrt{2}=6a\sqrt{2}+4\Leftrightarrow a\sqrt{2}=2\Leftrightarrow a=\sqrt{2}$. **42.** a) $E(x)=\dfrac{(x+1)^2-(x-2)^2+6}{(x-2)(x+1)}\cdot\dfrac{(x-2)(2x+1)}{3(2x+1)}=\dfrac{6x+3}{x+1}\cdot\dfrac{2x+1}{3(2x+1)}=\dfrac{2x+1}{x+1}$; b) $\dfrac{2a^2+1}{a^2+1}=\dfrac{19}{10}\Leftrightarrow a^2=9\Leftrightarrow |a|=3\Rightarrow a\in\{-3;3\}$. **43.** a) $E(x)=\left(\dfrac{1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{x-5}{x^2-4}\right)\cdot\dfrac{2x^2(x^2-4)}{x-4}$; $E(x)=\dfrac{x+2-(x-2)+x(x-5)}{x(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{2x^2(x^2-4)}{x-4}=\dfrac{x^2-5x+4}{1}\cdot\dfrac{2x}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x-1)}{1}\cdot\dfrac{2x}{x-4}$; $E(x)=2x(x-1)$; b) $E(n)\le n(n+2)+12\Leftrightarrow 2n^2-2n\le n^2+2n+12\Leftrightarrow n^2-4n-12\le 0\Leftrightarrow n^2-4n+4\le 16\Leftrightarrow (n-2)^2\le 16\Leftrightarrow |n-2|\le 4\Leftrightarrow -2\le n\le 6$; $A=\{-1,1,3,5,6\}$. Card $A=5$. **44.** a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-6,-5,-4,-3,1,2,3,6\}$; b) $E(x)=\dfrac{9(x-1)}{x+5}$; c) $n\in\{4,13,22,49\}$. **45.** a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-3,-2,-1,0\}$; b) $E(x)=4$.

Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1. Ambele suprafețe au aria egală cu a^2+b^2. **2.** Notând $CD=x$ și aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABC și CDE, se obține că $AC^2=(5-x)^2+9$ și $CE^2=x^2+16$, de unde $(5-x)^2+9=x^2+16$, adică $25-10x+x^2+9=x^2+16$, care are soluția $x=1{,}8$. **3.** Notând cu l lățimea terenului, lungimea sa va fi egală cu $3l$, iar aria aleii va fi $2\cdot 2\cdot 3l+2\cdot 2(l+4)=496$, care

are soluția $l = 30$, de unde $L = 90$.

Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1: **1.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -5, -3\}$; b) $E_1(x) = \dfrac{x+5}{x+3}$; $E_2(x) = \dfrac{x+5}{x+3}$. **2.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, -3, -2, 4\}$; b) $E(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$; c) $x \in \{-1, 0\}$. **3.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$; b) $E(x) = \dfrac{3x+1}{x+3}$; $x \in \{-11, -7, -5, -4, -2, 1, 5\}$. **4.** b) $S = \varnothing$. **5.** b) $x \in \{2, 3, 5, 6\}$.

TESTUL 2: **1.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ şi $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$; b) $E(x) = \dfrac{x(x+2)}{x-2}$ şi $F(x) = \dfrac{x(x+2)}{x-2}$. **2.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$; b) $E(2) + E(-1) = 1 \in \mathbb{N}$; c) $E(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$; d) $x \in \{-1, 0, 2, 3\}$. **3.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$; b) $E(x) = \dfrac{5}{x-4}$; c) $x \in \{-1, 3, 5, 9\}$. **4.** b) $x \in \{3, 5, 11\}$. **5.** b) $S = \varnothing$.

2. Ecuaţii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. a) $S = \{-7, 0\}$; b) $S = \{-2, 1\}$; c) $S = \{-4, 3\}$; d) $S = \{-1, 6\}$; e) $S = \{-3, 2\}$; f) $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$; g) $S = \left\{-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{2}{5}\right\}$; h) $S = \left\{-\dfrac{9}{2}, \dfrac{8}{3}\right\}$; i) $S = \left\{-\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{7}\right\}$. **2.** a) $S = \{-3, 0\}$; b) $S = \{0, 2\}$; c) $S = \{-3, 0\}$; d) $S = \{0, 2\}$; e) $S = \left\{0, \dfrac{1}{6}\right\}$; f) $S = \left\{0, \dfrac{8}{5}\right\}$; g) $S = \{0, 6\}$; h) $S = \{-5, 0\}$; i) $S = \{0, 6\}$. **3.** a) $S = \{-1, 1\}$; b) $S = \{-2, 2\}$; c) $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$; d) $S = \left\{-\dfrac{4}{5}, \dfrac{4}{5}\right\}$; e) $S = \left\{-\dfrac{9}{8}, \dfrac{9}{8}\right\}$; f) $S = \left\{-\dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{6}\right\}$; g) $S = \{-3, 3\}$; h) $S = \{-2, 2\}$; i) $S = \{-6, 6\}$; j) $S = \varnothing$; k) $S = \varnothing$; l) $S = \varnothing$. **4.** a) $S = \{1, 6\}$; b) $S = \{-4, 2\}$; c) $S = \{-7, 2\}$; d) $S = \{-2, 10\}$; e) $S = \{-6, 2\}$; f) $S = \{-3, 10\}$; g) $S = \{2, 7\}$; h) $S = \{2, 8\}$; i) $S = \{-5, -2\}$. **5.** a) $S = \{2, 3\}$; b) $S = \{-3, 2\}$; c) $S = \{3, 4\}$; d) $S = \{-4, 3\}$; e) $S = \{2, 4\}$; f) $S = \{-5, 2\}$; g) $S = \{3, 5\}$; h) $S = \{-6, 4\}$; i) $S = \{-3, 7\}$. **6.** a) $S = \{-1, 3\}$; b) $S = \{-5, 1\}$; c) $S = \{-1, 7\}$; d) $S = \{-9, 1\}$; e) $S = \{-8, 12\}$; f) $S = \left(-3\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$. **7.** a) $\sphericalangle S = \{-7, 3\}$; b) $S = \{-4, -2\}$; c) $S = \varnothing$; d) $S = \{-2\}$; e) $S = \{-8, -2\}$; f) $S = \{4\}$. **8.** $a = 7$; $S = \left\{-4, \dfrac{1}{2}\right\}$. **9.** $a = 2$; $S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 2\right\}$. **10.** $a = 3$; $S = \left\{-\dfrac{1}{2}, -3\right\}$. **11.** $m = 2$; $S = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right\}$. **12.** a) $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, 1\right\}$; b) $S = \left\{-\dfrac{5}{2}, 3\right\}$; c) $S = \left\{\dfrac{2}{3}, 1\right\}$; d) $S = \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$; e) $S = \left\{-1, -\dfrac{1}{2}\right\}$; f) $S = \left\{-1, \dfrac{3}{2}\right\}$; g) $S = \left\{-1, \dfrac{2}{3}\right\}$; h) $S = \left\{-\dfrac{7}{3}, 1\right\}$; i) $S = \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\}$. **13.** a) $S = \{-5, -4\}$; b) $S = \{-6, -5\}$; c) $S = \{-8, -6\}$; d) $S = \{7, 8\}$; e) $S = \{3, 9\}$; f) $S = \{-3, 9\}$; g) $S = \{-3, 11\}$; h) $S = \{-2, 13\}$; i) $S = \{-8, 7\}$. **14.** a) $S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 2\right\}$; b) $S = \left\{-4, \dfrac{1}{2}\right\}$; c) $S = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right\}$; d) $S = \left\{-\dfrac{2}{3}, 1\right\}$; e) $S = \left\{-2, \dfrac{3}{4}\right\}$; f) $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, 4\right\}$; g) $S = \left\{-2, \dfrac{2}{3}\right\}$; h) $S = \left\{\dfrac{1}{2}, 4\right\}$; i) $S = \left\{-\dfrac{5}{2}, 1\right\}$; j) $S = \left\{-3, -\dfrac{1}{2}\right\}$; k) $S = \left\{\dfrac{1}{2}, 3\right\}$; l) $S = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right\}$. **15.** a) $S = \left\{-\dfrac{5}{3}, 1\right\}$; b) $S = \{-3, 1\}$; c) $S =$

$= \left\{-\frac{8}{3}, 1\right\}$; d) $S = \left\{\frac{3}{2}, 1\right\}$; e) $S = \left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$; f) $S = \{-1, 2\}$; g) $S = \left\{\frac{3}{4}, 1\right\}$; h) $S = \left\{-1, -\frac{3}{4}\right\}$. **16.** a) $b = 5$, $c = 6$; b) $b = 8$, $c = 15$; c) $b = 5$, $c = -14$; d) $b = -9$, $c = 20$; e) $(x + 3)(x - 5) = 0$; f) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = 0$. **17.** a) $S = \{-1, 0\}$; b) $S = \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}$; c) $S = \{-2, 4\}$; d) $S = \{0, 4\}$; e) $S = \{-2, 0\}$; f) $S = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$. **18.** a) $S = \left\{1, \frac{13}{5}\right\}$; b) $S = \{-4, 1\}$; c) $S = \{-3, 8\}$; d) $S = \{-3, 3\}$; e) $S = \left\{-\frac{10}{3}, 6\right\}$; f) $S = \{-2, 1\}$. **19.** a) $x \in \{-1, 2\} \Rightarrow m = 3$ și $n = 2$; b) $x \in \{3, 4\} \Rightarrow m = 4$ și $n = 3$. **20.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $S = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$; $S = \{-3, 2\}$; c) $S = \{3, 7\}$; d) $S = \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; e) $S = \{-2, 2\}$; f) $S = \{4\}$; g) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; $S = \{0, 3\}$; h) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; i) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$; $S = \left\{-7, \frac{3}{2}\right\}$.

21. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}, 1\right\}$; $S = \{-7, 4\}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$; $S = \left\{\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; $S = \{\pm 2\sqrt{5}\}$; d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $S = \{-7, 7\}$. **22.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$; $S = \left\{-\frac{14}{3}\right\}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$; $S = \{-1\}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; $S = \{-9\}$; d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 1\}$; $S = \{-27, -1\}$; e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$; $S = \{-2\}$; f) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$; g) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$; $S = \left\{1, \frac{2}{13}\right\}$. **23.** $m \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. **24.** $\Delta = [(a + 1)^2 - 1]^2$, pentru oricare $a \in \mathbb{R}$. **25.** $S = \{1, m\}$.

Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1. $l = 5$ m și $L = 10$ m. **2.** $l = 4$ m. **3.** $x = 2$ m. **4.** $x = 1$ m.

CAPITOLUL II. FUNCȚII

1. Funcții definite pe mulțimi finite

2. a) $f: A \to B$; $A = \{2, 4, 6, 9\}$; $B = \{\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 3\}$; b)

x	2	4	6	9
$f(x)$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	3

; c) $f(x) = \sqrt{x}$.

3. a) $A = \left\{-1, \frac{1}{5}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 2, 3^2\right\}$; $B = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, \sqrt{3}, 5\right\}$; b)

x	-1	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	3^2
$f(x)$	-1	$\frac{1}{2}$	5	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{9}$

; c) $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. a)

x	0	2	4
$f(x)$	2	4	6

; b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

.

5. a) $x \to 2x$; c) $f: \{3, 4{,}5, 7, 10, 13, 35, 96\} \to \{6, 9, 14, 20, 26, 70, 192\}$, $f(x) = 2x$. **6.** a) $x \to \frac{360}{x}$; b) $f: \{6, 8, 4, 9, 12, 18\} \to \{10, 45, 90, 40, 30, 20\}$, $f(x) = \frac{360}{x}$. **7.** a) $x \to \frac{24}{x}$; b) $f: \{6, 4, 2, 8, 12, 24\} \to \{4, 6, 12, 3, 2, 1\}$, $f(x) = \frac{24}{x}$. **8.** a) Da; b) Nu; c) Da; d) Nu. **9.** a) Nu; b) Da; c) Nu. **10.** a) $G_f =$

$= \{(-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 2)\}$; b) $A \in G_f$; $C \in G_f$; $E \in G_f$. **11.** $A \in G_f$; $C \in G_f$. **12.** a) $\text{Im} f = \{1, 2, 5\}$; b) $\text{Im} f = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$; c) $\text{Im} f = \{5, 4, 3, 2, 1\}$. **13.** a) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $B = \{7, 2, -1, 14\}$; c) $B = \left\{-\frac{3}{2}, -3, 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}\right\}$. **14.** a) $A = \left\{-2, -1, 1, 2, \frac{7}{2}\right\}$; b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$; c) $A = \{-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4\}$. **15.** b) $a \to 4a; f: \{8, 6, 12, 9, 13, 20, 36, 42\} \to \{32, 24, 36, 52, 80, 144, 168\}, f(x) = 4x$. **16.** a) $a = -1$; b) $a = -4$; c) $a = 2$. **18.** a)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	1	2

; $\text{Im} f = \{0, 1, 2, 3\}$; b) $G_f = \{(-3; 3), (-2; 2), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 2)\}$. **19.** a) $G_f = \{(-2; 1), (0; 3), (1; 4), (2; 5)\}$; b) $G_f = \{(-3; 9), (-2; 4), (1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 16)\}$; c) $G_f = \{(-2; -3), (-1; -1), (0; 1), (1; 3), (2; 5)\}$. **20.** a) $G_f = \{(-1; -5), (0; -3), (1; -1), (2; 1), (3; 3)\}$; b) $G_f = \{(-4; -2), (-3; -1), (-2; 0), (-1; 2), (0; 0), (1; -2), (2; -4)\}$; c) $G_f = \{(-3; -8), (-2; -6), (-1; -4), (0; 1), (1; 2), (2; 4), (3; 7)\}$. **22.** a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; b) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. **23.** $a = -3$; $b = -2$; $c = -2$; $d = 3$. **25.** $a = 3$; $b = -2$; $f(x) = 3x - 2$. **26.** Pentru $x = 0$ se obține $f(0) + f(2) = 1$ și pentru $x = 2$ se obține $f(2) + f(0) = 3$. **27.** a) $f(2) = 2, f(4) = 3, f(8) = 4, f(24) = 8, f(36) = 9$; b) Numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(n) = 2$ sunt numere prime, iar numerele pentru care $f(n) = 3$ sunt numere naturale care au un singur divizor propriu (pătrate perfecte de numere prime). **28.** a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $\text{Im} f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) 15. **29.** a) $\text{Im} f = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$; b) 90. **30.** a) $\text{Im} f = \{1, 3, 7, 9\}$; b) 161.

2. Funcția liniară

5. a) $A(-1; -5)$; b) $B(2; 4)$; c) $C(1; 1)$; d) $D\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **6.** a) $M(-1; -4)$; b) $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; c) $P(-2; -7)$; d) $Q\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$; e) $T(1; 2)$. **7.** $A(-1; -1) \in G_f$; $B(-2; 3) \notin G_f$; $C(1; 3) \in G_f$; $D(2; 5) \in G_f$; $E(0; 2) \notin G_f$. **8.** a) $a = 3$. **9.** a) $a = 1$. **10.** a) $b = -2$. **11.** a) $f(-1) + f(2) = -4$. **12.** a) $f(-2) + f(3) = 2$; b) $G_f \cap Ox = \{A\} \Rightarrow A(x; 0) \in G_f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow A(1; 0)$; $G_f \cap Oy = \{B\} \Rightarrow B(0; y) \in G_f \Rightarrow f(0) = y \Rightarrow B(0; 2)$. Punctul $M(x_M; y_M) \in AB$ astfel încât $AM \equiv MB$, atunci $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **13.** a) $f(-3) - f(2) = (3 + 3) - (-2 + 3) = 6 - 1 = 5$; b) $A(3; 0)$; $B(0; 3)$; $\mathcal{A}_{\Delta AMB} = \frac{AM \cdot OB}{2} = \frac{AB \cdot d(M, AB)}{2}$; $(G_f = AB) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow d(M, AB) = \frac{AM \cdot OB}{AB}$; $d(M, AB) = 2\sqrt{2}$. **14.** a) $f(-2) + f(4) = (6 + 2) + (-12 + 2) = 8 - 10 = -2$; b) $G_f \cap Ox = \{A\} \Rightarrow A(x; 0) \in G_f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $G_f \cap Oy = \{B\} \Rightarrow B(0; y) \in G_f \Rightarrow f(0) = y \Rightarrow B(0; 2)$; $G_f = AB$; $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot OB}{2} = \frac{AB \cdot d(C, AB)}{2} \Rightarrow d(C, AB) = \frac{AC \cdot OB}{AB}$; $AC = \frac{8}{3}$; $OB = 2$; $AB = \frac{2\sqrt{10}}{3}$; $d(C, AB) = \frac{4\sqrt{10}}{5}$. **15.** a) $f(-3) - f(2) = (9 + 4) - (-6 + 4) = 13 + 2 = 15$; b) $A(4; y) \in G_f \Leftrightarrow f(4) = y \Leftrightarrow -12 + 4 = y \Leftrightarrow y = -8 \Rightarrow A(4; -8)$; $B(x; 4) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = 4 \Leftrightarrow -3x + 4 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow B(0; 4)$; $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \Rightarrow AB = 4\sqrt{10}$. **16.** a) $\begin{matrix} f(-1) = 5 \Leftrightarrow -a + b = 5 \\ f(2) = -4 \Leftrightarrow 2a + b = -4 \end{matrix} \Rightarrow$ $\Rightarrow a = -3$ și $b = 2 \Rightarrow f(x) = -3x + 2$; b) $\begin{cases} f(-2) = -7 \Leftrightarrow -2a + b = -7 \\ f(4) = 5 \Leftrightarrow 4a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ și $b = -3 \Rightarrow f(x) = 2x - 3$.

17. a) $m = 3$. **18.** a) $M(m; -1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow -2m + 5 = -1 \Leftrightarrow m = 3$; b) $f(m) = -1 \Leftrightarrow 4m + 7 = -1 \Leftrightarrow m = -2$; c) $f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 2 = -1 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m \in \{-1; 1\}$; d) $f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 =$

$= -1 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. **19.** a) $M(m, -2) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -2 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 12 = -2 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow (m-5)(m+2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2; 5\}$; b) $f(m) = -2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 = -2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$; $m^2 - 4m + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow (m+2)(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2, 4\}$; c) $f(m) = -2 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = -2 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{2; 3\}$; d) $f(m) = -2 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 6 = -2 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + m - 4 = 0$; $(m+1)(m-4) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m \in \{-1; 4\}$. **20.** a) $m = -2$. **21.** a) $a = -2$. **22.** a) $a = 1$; b) $a = 2$; c) $a = -1$. **23.** $A(m; 4m-2) \in G_f \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(m) = 4m - 2 \Leftrightarrow 2m^2 - 7m + 3 = 4m - 2$; $2m^2 - 11m + 5 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 10m - m + 5 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2m(m-5) - 1 \cdot (m-5) = 0$; $(m-5)(2m-1) = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$. **24.** a) $M(-1; -3) \in G_f \Leftrightarrow f(-1) =$ $= -3 \Leftrightarrow 4 - 3m + 9 - 5m = -3 \Leftrightarrow -8m = -16 \Leftrightarrow m = 2$; b) $f(x) = 2x - 1$; $A(x; x) \in G_f \Rightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = x \Leftrightarrow x = 1$; $A(1; 1) \in G_f$. **25.** a) $A(m; -1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow 2m - m^2 + 3m + 5 = -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m^2 - 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-6) = 0 \Rightarrow m \in \{-1; 6\}$; b) $f(x) = 3x + 2$. **26.** a) $M(-1; 3) \in G_f \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(-1) = 3 \Leftrightarrow 4 - m + 7 - 3m = 3 \Leftrightarrow -4m = -8 \Leftrightarrow m = 2$; b) $f(x) = -2x + 1$; $A(x, x) \in G_f \Leftrightarrow f(x) =$ $= x \Leftrightarrow -2x + 1 = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$; $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in G_f$. **27.** b) $a = 2$. **28.** a) $m = -2$. **29.** a) $m = 4$. **30.** $m = 2$. **31.** $a = 1$. **32.** $a = 3$; $b = 0$. **33.** a) $A(0; 4)$; $B(3; 0)$; b) În ΔAOB: $AB = 5$ (u). În ΔMAB: $MB \cdot AO = AB \cdot$ $\cdot\, d(M, AB) \Rightarrow d(M, AB) = 4$ (u). **34.** a) $A(0; 3)$ și $B(-4; 0)$; b) $AB = 5$ (u). În ΔMAB: $MB \cdot AO = AB \cdot$ $\cdot\, d(M, AB) \Rightarrow d(M, AB) = 6$ (u). **35.** a) $a = 3$; $b = -4$; b) $a = 2$; $b = -3$; c) $a = -2$; $b = 5$; d) $a = -3$; $b = 4$. **36.** a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = -x + 2$; c) $f(x) = -2x + 3$; d) $f(x) = x + 6$. **37.** a) $f(x) = -2x + 6$; $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = 9$ (u^2); $d(O, AB) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ (u); b) $f(x) = 2x - 3$; $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = \frac{9}{4}$ (u^2); $d(O, AB) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ (u); c) $f(x) = 3x + 1$; $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = \frac{1}{6}$ (u^2); $d(O, AB) = \frac{\sqrt{10}}{10}$ (u); d) $f(x) = x + 4$; $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = 8$ (u^2); $d(O, AB) =$ $= 2\sqrt{2}$ (u). **38.** a) $f(x) = x + 2$; $f(5) = 7 \Rightarrow C(5; 7) \in G_f \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare; b) $f(x) = -2x + 1$; $f(4) = -7 \Rightarrow C(4; -5) \notin G_f \Rightarrow A, B, C$ nu sunt coliniare; c) $f(x) = -3x + 4$; $f(3) = -5 \Rightarrow C(3; -7) \notin$ $\notin G_f \Rightarrow A, B, C$ nu sunt coliniare; d) $f(x) = -x + 1$; $f(2) = -1 \Rightarrow C(2; -1) \in G_f \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare. **39.** a) $G_f \cap G_g = \{M\}$, $M(-3; -5)$; b) $G_f \cap G_g = \{M\}$, $M(-5; -13)$; c) $G_f \cap G_g = \{M\}$, $M(-4; -13)$; d) $G_f \cap G_g = \{M\}$, $M(-2; 3)$. **40.** a) $A(0; 6)$ și $B(-2; 0)$; b) $d(M, AB) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ (u); c) $S =$ $= 2100$. **41.** a) $m = 4$; $n = 1$; $f(x) = x + 3$; b) $d(C, G_f) = 2\sqrt{2}$ (u); c) $S = 940$. **42.** a) $a = 3$; $b = -3$; c) Se arată cu reciproca teoremei lui Pitagora că ΔBAC este dreptunghic, cu $\sphericalangle BAC = 90°$. **43.** $a = 2$; $b = -3$; $f(x) = 2x - 3$ și $g(x) = -3x + 2$. **44.** a) $G_f \cap G_g = \{M\}$; $M(-1; 1)$; b) $S = 1325$. **45.** b) $G_f \cap G_g =$ $= \{M\}$; $M(2; 1)$. **46.** a) $a = 1$. **47.** b) $M(1; 1)$; c) $\frac{f(a) - f(b)}{2} = b - a \in \mathbb{Z}$. **48.** a) $A = [-4; 6]$; b) Dacă $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; c) $M(-3; -3)$. **49.** a) $A = (-3; 1]$; b) $\frac{f(a) - f(b)}{3} = a - b \in \mathbb{Z}$; c) $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **50.** a) $A(0; -2)$ și $B(3; 0)$; b) $d(O, AB) = \frac{6\sqrt{13}}{13}$; c) $x \in [-8; +\infty)$. **51.** a) $a = 2$; $f(x) = -x$; b) $G_f \cap G_g = \{M\}$; $M(2; -2)$. **52.** a) $a = 3$; $b = 7$; b) $a = 2$; $b = 3$; c) $a = 4$; $b = -1$. **53.** a) $a = 3$; b) $a = -1$; c) $a = 2$. **54.** a) $a = 3$; $b = 6$; b) $a = 0$; $b = 2$; c) $a = -3$; $b = 4$. **55.** a) $m = 5$; $n = 3$; b) $m = -2$; $n = 1$; c) $m = 1$; $n = 2$. **56.** a) $m = 2$; $n = 3$; b) $m = 3$; $n = 2$; c) $m = -1$; $n = 2$; d) $m = 0$; $n = -1$. **57.** b) $d(P; G_f) = 2\sqrt{5}$. **58.** b) $d(O, G_f) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. **59.** b) $d(M; G_f) = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. **60.** b) $d(M; G_f) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$. **61.** b) $d(P, G_f) = 2\sqrt{5}$; c) $A(0; 6)$; $B(3; 0)$; $G_f = AB$; $\sphericalangle(G_f, Ox) = \sphericalangle ABO$;

$\sin(\sphericalangle ABO) = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **62.** a) $G_f \cap Ox = \{A\} \Rightarrow A(x; 0) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 8$, $A(8; 0)$; $G_f \cap O_y = \{B\} \Rightarrow B(0; y) \in G_f \Leftrightarrow f(0) = y \Leftrightarrow y = -4$; $B(0; -4)$; $G_f = AB$; b) $M(x_M; y_M)$ şi $M \in AB$ astfel încât $AM \equiv BM$; $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 4$; $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -2$. Deci $M(4; -2)$; $OM = \dfrac{AB}{2}$; $OM = 2\sqrt{5}$; c) $\mathcal{A}_{AOB} = 16$. **63.** a) $G_f \cap Ox = \{A\} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$; $G_f \cap Oy = \{B\}$; $B(0; 2)$; $G_f = AB$; b) $\sphericalangle(G_f; Ox) = \sphericalangle OAB$; $\operatorname{tg}(\sphericalangle OAB) = 4$; c) $\mathcal{A}_{OAB} = \dfrac{1}{2}$. **64.** b) $A(x; x) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x - 3 = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -6$; $A(-6; -6) \in G_f$; c) $\sin \sphericalangle(G_f, Ox) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **65.** b) $P(x; x) \in G_g \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow 2x - 7 = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 7 \Rightarrow P(7; 7) \in G_g$; c) $G_f \cap G_g = \{M(x; y)\} \Rightarrow \begin{cases} M(x;y) \in G_f \Rightarrow f(x) = y \\ M(x;y) \in G_g \Rightarrow g(x) = y \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x + 3 = 2x - 7 \Leftrightarrow 10 = 2x + \dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 4; f(4) = 1 \Rightarrow M(4, 1)$. **66.** b) $G_f \cap G_g = \{M(x; y)\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} M(x;y) \in G_f \Rightarrow f(x) = y \\ M(x;y) \in G_g \Rightarrow g(x) = y \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow -3x + 4 = 2x - 6 \Leftrightarrow x = 2; f(2) = -2 \Rightarrow M(2; -2)$; c) $G_f \cap Ox = \{A\}$; $G_f \cap Oy = \{B\}$; $G_g \cap Ox = \{C\}$; $G_g \cap Oy = \{D\}$; $\mathcal{A}_{MAC} = \dfrac{AC \cdot \mathrm{d}(M, AC)}{2} = \dfrac{5}{3}$.
67. a) $A(x; x) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow -2x + 3 = x \Leftrightarrow x = 1$; $A(1; 1)$; c) $G_f \cap G_g = \{M(x; y)\} \Rightarrow M(2; -1)$; $G_f \cap Ox = \{A\}$; $G_f \cap Oy = \{B\}$; $G_g \cap Ox = \{C\}$; $G_g \cap Oy = \{D\}$; $\mathcal{A}_{MBD} = \dfrac{BD \cdot \mathrm{d}(M; BD)}{2} = 6$.
68. b) $G_f \cap G_g = \{M(x; y)\} \Rightarrow \begin{cases} M(x;y) \in G_f \\ M(x;y) \in G_g \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x + 6 = \dfrac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow M(2; 2)$; c) $G_f \cap Ox = \{A\}$; $G_f \cap Oy = \{B\}$; $A(3; 0)$; $B(0; 6)$; $G_g \cap Ox = \{C\}$; $G_g \cap Oy = \{D\}$; $C(-2; 0)$; $D(0; 1)$; $AC = 5$; $AM^2 = (3 - 2)^2 + (0 - 2)^2 = 5$; $CM^2 = (-2 - 2)^2 + (0 - 2)^2 = 20$; $AM^2 + CM^2 = 5 + 20 = 25 = AC^2 \Rightarrow \Delta AMC$ – dreptunghic; $\sphericalangle AMC = 90° \Rightarrow AM \perp CM \Rightarrow G_f \perp G_g$.
69. b) $G_f \cap G_g = \{M(x; y)\} \Rightarrow \begin{cases} M(x;y) \in G_f \Rightarrow f(x) = y \\ M(x;y) \in G_g \Rightarrow g(x) = y \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x + 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow x =$ $= 2 \Rightarrow M(2; 1)$; c) $G_f \cap Ox = \{A\}$; $G_f \cap Oy = \{B\}$; $A(3; 0)$; $B(0; 3)$; $G_g \cap Ox = \{C\}$; $G_g \cap Oy = \{D\}$; $C\left(\dfrac{3}{2}; 0\right)$; $D(0; -3)$; $\mathcal{A}_{MBD} = \dfrac{BD \cdot \mathrm{d}(M, BD)}{2} = 6$. **70.** b) $G_f \cap G_g = \{M(x; y)\} \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -3x + 4 = 2x - 6 \Leftrightarrow x = 2$; $M(2; -2)$; c) $G_f \cap Ox = \{A\}$; $G_f \cap Oy = \{B\}$; $A\left(\dfrac{4}{3}; 0\right)$; $B(0; 4)$; $G_g \cap Ox = \{C\}$; $G_g \cap Oy = \{D\}$; $C(3; 0)$; $D(0; -6)$; $\mathcal{A}_{MAC} = \dfrac{AC \cdot \mathrm{d}(M, AC)}{2} = \dfrac{5}{3}$. **71.** b) $x = 2$; c) $S = 360$. **72.** b) $x = 2$; c) $M(1; 2)$. **73.** a) $m \in \{-2, 4\}$; c) $x \in \{-1, 5\}$. **74.** a) $f(x) = 2x - 4$; b) $g(x) = 2x$; $h(x) = 2x + 4$. Graficele celor trei funcţii sunt paralele. **75.** a) $g(x) = 2x - 2$; b) $G_f \cap G_g = \{M\}$; $M(3; 4)$. **76.** a) $a = 3$; $b = 1$; $f(x) = 2x + 3$; b) $g(x) = -2x + 5$; c) $G_f \cap G_g = \{M\}$; $M\left(\dfrac{1}{2}; 4\right)$. **77.** a) $f(x) = -x + 4$; b) $\mathrm{d}(O, AB) = 2\sqrt{2}$ (u); c) $a = -7$. **78.** a) $a = -3$; $f(x) = -x + 1$; c) Relaţia se scrie $(m + 1)^2 + 1 > 0$,

pentru oricare $m \in \mathbb{R}$. **79.** a) $f(x) = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$; $g(x) = 2x - 3$; $h(x) = -x - 3$; b) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{27}{2}\,(\text{u}^2)$. **80.** a) $f(x) = -\frac{4}{3}x+4$; $g(x) = 2x + 4$; b) $AB = 5$ (u); $BC = 5$ (u); $AC = 2\sqrt{5}$ (u); $\mathcal{P} = 2(5+\sqrt{5})$ u; $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 10\,(\text{u}^2)$; c) $\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **81.** a) $f(x) = \frac{4}{3}x-4$; $g(x) = -\frac{4}{3}x-4$; b) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 12\,(\text{u}^2)$; $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 16$ (u); c) $\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{24}{25}$. **82.** a) $G_f \cap G_g = \{A\}$, $A(2; -1)$; $A(2; -1) \in G_h$; b) $G_f \cap G_g = \{A\}$, $A(2; 1)$; $A(2; 1) \in G_h$; c) $G_f \cap G_g = \{A\}$, $A(2; 1)$; $A(2; 1) \in G_h$; d) $G_f \cap G_g = \{A\}$, $A(-1; 4)$; $A(-1; 4) \notin G_h$. **83.** a) $G_f \cap G_g = M(1; 3)$; $A(3; 5) \in G_f$ și $B(-2; 6) \in G_g$; $MA = 2\sqrt{2}$, $MB = 3\sqrt{2}$ și $AB = \sqrt{26}$; cu reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că ΔAMB este dreptunghic și $\sphericalangle AMB = 90°$; b) $G_f \cap G_g = M(1; 2)$; $A(2; 5) \in G_f$ și $B(-2; 3) \in G_g$; $AB = 2\sqrt{5}$, $AM = \sqrt{10}$, $MB = \sqrt{10} \Rightarrow \Delta AMB$ este dreptunghic, $\sphericalangle AMB = 90°$; c) $G_f \cap G_g = M(1; 3)$; $A(2; 8) \in G_f$; $B(-4; 4) \in G_g$; $AM = \sqrt{26}$, $MB = \sqrt{26}$, $AB = \sqrt{52} \Rightarrow \Delta AMB$ este dreptunghic, $\sphericalangle AMB = 90°$; d) $G_f \cap G_g = M(1; 1)$; $A(2; -1) \in G_f$; $B(3; 2) \in G_g$; $MA = \sqrt{5}$, $MB = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{10} \Rightarrow \Delta MAB$ este dreptunghic, $\sphericalangle AMB = 90°$. **84.** $f(x) = -2x + 5$. **85.** a) $f(x) = 2x + 5$; b) $x = -4$. **86.** a) $f(x) = 2x + 4$; b) $f(x) = 3x + 5$; c) $f(x) = 4x - 5$; d) $f(x) = -3x + 5$; e) $f(x) = 3x - 7$; f) $f(x) = 5x - 4$. **87.** a) $f(x) = -2x + 3$; b) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; c) $x = \frac{1}{2}$; d) $m^2 + (m + 2)^2 + 1 > 0$, pentru oricare $m \in \mathbb{R}$. **88.** a) $f(x) = 2x - 1$; b) $\frac{2a+2b-2}{3} > \frac{2(a+b)}{3} - 1 \Leftrightarrow -2 > -3$ (A). **89.** a) $f(x) = 2x + 2$; b) $A(-2; -2)$. **90.** a) $f(2 - 3x) = -6x + 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 3$ și $g(2x - 1) = -4x + 3 \Rightarrow g(x) = -2x + 1$; b) $S(1; -1)$. **91.** a) $a = 3$; $b = -3$; c) $d(C, AB) = \frac{4}{\sqrt{37}}$. **92.** $a = 1$; $b = 4$; $M(4; 16)$. **93.** a) $A(-2; 0)$; $B(0; -6)$; $AB = G_f$; b) Fie $PM \perp AB$, $M \in AB$; $\Delta AOB \sim \Delta PMB$ (U.U.); $AB = 2\sqrt{10}$; $\frac{OA}{PM} = \frac{AB}{PB} = \frac{OB}{MB} \Rightarrow \frac{OA}{PM} = \frac{AB}{PB} \Leftrightarrow \frac{2}{PM} = \frac{2\sqrt{10}}{10} \Rightarrow PM = \sqrt{10}$; c) $A(-2m; m^2 + 3m - 16) \in G_f \Leftrightarrow f(-2m) = m^2 + 3m - 16 \Rightarrow 6m - 6 = m^2 + 3m - 16 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow (m - 5)(m + 2) = 0 \Rightarrow m \in \{-2; 5\}$. **94.** b) $M(x; x) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow -2x + 3 = x \Leftrightarrow x = 1$; $M(1; 1)$; c) $f(a\sqrt{2} - 2b) = -2(a\sqrt{2} - 2b) + 3 \Rightarrow -2a\sqrt{2} + 4b + 3 = -3b\sqrt{2} + 4a \Leftrightarrow \sqrt{2}(3b - 2a) = 4a - 4b - 3 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$ și $b = \frac{3}{2}$. **95.** a) $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $B(0; 2)$; $G_f = AB$; b) $PM \perp AB$; $M \in AB \Rightarrow d(P, G_f) = PM$; $AB = \frac{\sqrt{17}}{2}$; $\Delta AOB \sim \Delta PMB$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{OB}{BM} = \frac{OA}{PM} = \frac{AB}{PB} \Rightarrow \frac{OA}{PM} = \frac{AB}{PB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{PM} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{6} \Rightarrow MP = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{17}}{17};\ \text{c)} \begin{cases} M(-m\sqrt{2}; 5m\sqrt{2} - 2) \in G_f \Rightarrow f(-m\sqrt{2}) = 5m\sqrt{2} - 2 \\ f(-m\sqrt{2}) = 4m\sqrt{2} + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5m\sqrt{2} - 2 = 4m\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow m\sqrt{2} = 4 \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2}$. **96.** a) $f(a) = (1 - 2\sqrt{3})a + 3\sqrt{3} \Rightarrow (1 - 2\sqrt{3})a + 3\sqrt{3} \geq 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow (1 - 2\sqrt{3})a \geq 1 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow a \leq 1 \Leftrightarrow a \in \{0; 1\}$; $1 - 2\sqrt{3} < 0$; b) $f(-3m) = 3(2\sqrt{3} - 1)m + 3\sqrt{3} \Rightarrow 3(2\sqrt{3} - 1)m + 3\sqrt{3} = 3n\sqrt{3} - 9 + 2n \Leftrightarrow 3\sqrt{3}(2m - n + 1) = 3m + 2n - 9 \Rightarrow m = 1$ și $n = 3$.

TESTUL 1

Subiectul I. 1. $a = 2$. **2.** $a = -2$; $b = 3$. **3.** $A(1; 1)$. **4.** $(2; 0)$. **5.** $[-3; 3]$. **6.** $a = 2$.

Subiectul al II-lea. 1. a) $A = [-3; 3]$; b) $(0; 3)$; c) $6\sqrt{5}$ (u). **2.** b) $\mathcal{A}_\Delta = \frac{25}{4}$ (u^2). **3.** b) $S = -1850$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $M(2; 5)$; c) $\mathcal{A}_\Delta = 4$ (u^2). **2.** a) $g(x) = 2x + 3$; c) $S = 55$.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. $\text{Im} f = \{1, 4\}$. **2.** $AB = 8$ cm. **3.** $A(0; 1)$. **4.** $\text{tg}\,\alpha = 1$. **5.** $BC = 10$ (u). **6.** $a = 3$.

Subiectul al II-lea. 1. a) $y = 1$; c) $\mathcal{A}_\Delta = \frac{25}{4}$ (u^2). **2.** b) $S = -5550$. **3.** b) $x = 3$.

Subiectul al III-lea. 1. b) $G_f \cap G_g = M(1; 2)$; c) $\mathcal{A}_\Delta = 4$ (u^2). **2.** a) $f(1) = -3$ (A); b) $a = \frac{1}{7}$; $b = -\frac{3}{7}$; c) $x \in (-\infty; 1]$.

TESTUL 3

Subiectul I. 1. $\text{Im} f = \{1, 2, 3\}$. **2.** $A(-3; 5)$; $B(5; -3)$. **3.** $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **4.** $f(x) = -x + 2$. **5.** $m = 2$. **6.** $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Subiectul al II-lea. 1. a) $A = [-4; 6]$; b) Cum $f(3) = 0$, rezultă că produsul este 0; c) 45°. **2.** a) $A(0; 6)$ şi $B(2; 0)$; b) $d(M, AB) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. **3.** b) $G_f \cap G_g = M(1; -1)$.

Subiectul al III-lea. 1. b) $S = 0$; c) $G_f \cap G_g = M(1; 3)$. **2.** a) $f(x) = -2x + 4$; c) $x = 2$.

TESTUL 4

Subiectul I. 1. $x = 2$. **2.** 42. **3.** $(3; 0)$. **4.** $a = 4$. **5.** $x = 3$. **6.** $\{1, 2, 3\}$.

Subiectul al II-lea. 1. b) $m_g = 3\sqrt{2}$. **2.** b) $x = -16$. **3.** b) $x \in [-3; +\infty)$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $a \in \{2, 3\}$; c) $f(x) = -2x + 3$; $d(M, G_f) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. **2.** a) $a = 1$; $b = -1$; $f(x) = -2x - 1$; $g(x) = x + 5$; c) $n = -60$.

3. Elemente de statistică

1. $m_a = 6{,}48$. **2.** $m_p = 3{,}66$. **3.** 2375 lei. **4.** a) 60 kg; b) $A = 13$; c) $M_e = 60$ kg. **5.** a) 162 cm; b) $A = 15$; c) $M_e = 162{,}5$. **6.** a) 4 elevi; 16%; b) 9 elevi; 36%; c) 12 elevi; 48%; d) Vezi figura 1; e) $M_a = 7{,}40$; f) $M_e = 7$. **7.** $M_a = 2$; $M_e = 2$; $D = 1$. **8.** a)

Nota	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	12	24	42	54	18

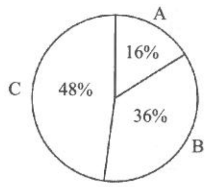
; b) $M_a = 8{,}28$; c) $D = 9$; d) $M_e = 8$.

9. a) $M_a = 23°$; b) $M_e = 23°$; $D = 26°$; $A = 9°$. **10.** a)

Media	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	4	5	5	7	5	4

; b) $M_a = 7{,}53$; b) $M_e = 8$; $D = 8$.

11. a) Media pe semestrul I: $M_a = 7{,}43$; media pe semestrul II: $M_a = 7{,}60$; b) Mediana pe semestrul I: $M_e = 7{,}50$; media pe semestrul II: $M_e = 8$; c) $D_{S\,I} = D_{S\,II} = 8$. **12.** Dacă x este numărul de elevi, atunci $7 \cdot x + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 8 \cdot x$, de unde $x = 25$ (elevi). **13.** a) $M_a = 3549$ lei; b) $M_e = 3600$; $D = 3600$; c) Vezi figura 2.



A – note < 6
B – note cuprinse între 6 şi 8
C – note > 8

Fig. 1

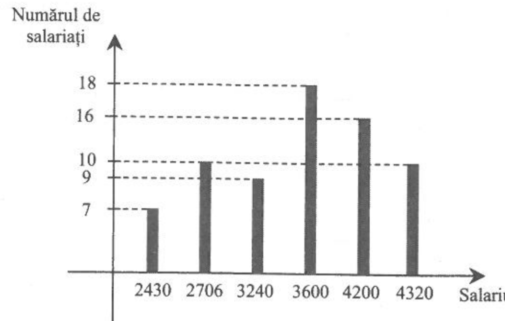
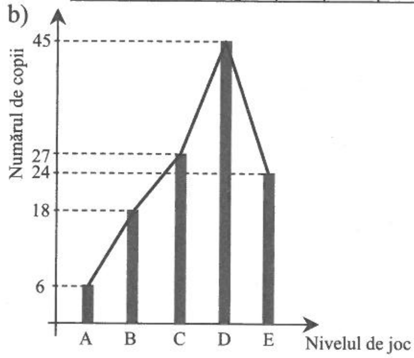


Fig. 2

14. a)

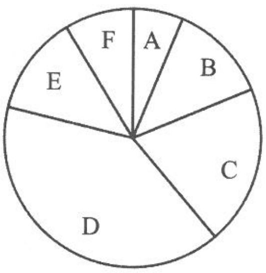
Nivelul de joc	A	B	C	D	E
Numărul de copii	6	18	27	45	24

b)



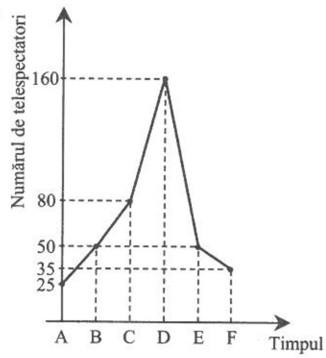
15. a) $M_a = \dfrac{30\cdot25+45\cdot50+75\cdot80+105\cdot160+150\cdot50+210\cdot35}{400} = 101{,}625$ min;

b)



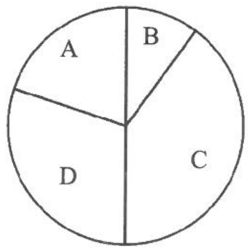
A: 30 min → 6,25%
B: 30-60 min → 12,5%
C: 61-90 min → 20%
D: 91-120 min → 40%
E: 121-180 min → 12,5%
F: 181-240 min → 8,75%

c)



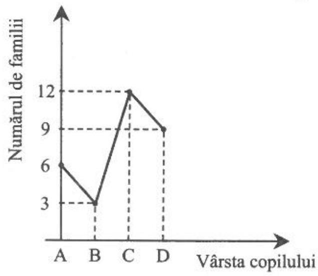
16. a) $M_a = 6{,}6$ ani;

b)



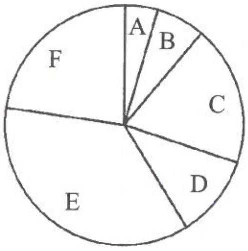
A: 2-4 ani → 20%
B: 4-6 ani → 10%
C: 6-8 ani → 40%
D: 8-10 ani → 30%

c)



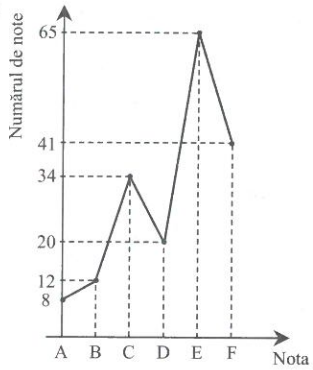
17. a) $M_a = 7{,}86$;

b)

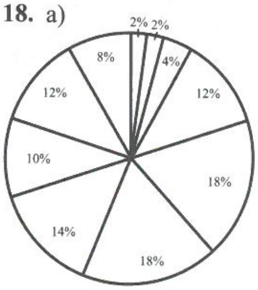


A: 4-4,99 → 4,44%
B: 5-5,99 → 6,67%
C: 6-6,99 → 18,89%
D: 7-7,99 → 11,11%
E: 8-8,99 → 36,11%
F: 9-10 → 22,78%

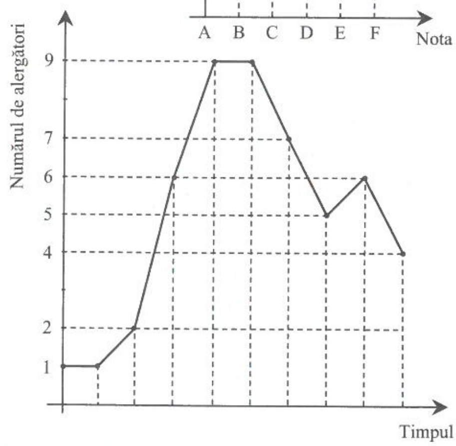
c)



18. a)

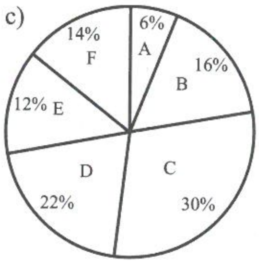


c)



19. a) $M_a = 175{,}5$ cm; b) $M_e = 172{,}5$; $D = 172{,}5$;

c)

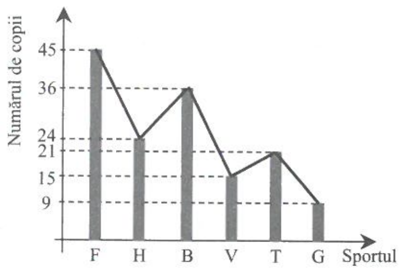


A: 1,60-1,65
B: 1,66-1,70
C: 1,71-1,75
D: 1,76-1,80
E: 1,81-1,85
F: 1,86-1,90

20. a)

Sportul	F	H	B	V	T	G
Numărul de copii	45	24	36	15	21	9

b), c)



21. b) $M_a = 8{,}42$; c) 68,46%; d) $M_e = 7{,}50$; $D = 8{,}50$. **22.** b) 29000 lei; d) $M_e = 31000$; $A = 28000$. **23.** a) $M_a = 300\ \ell$; b) $M_e = 300$; D este multiplă: 250, 300, 350; $A = 200$. **24.** a) $M_a = 304$ elevi; d) $M_e = 300$; $A = 50$. **25.** b) $M_e = 19$; $D = 15$; $A = 12$.

CAPITOLUL III. TEME PENTRU RECAPITULAREA FINALĂ ÎN VEDEREA EVALUĂRII NAŢIONALE

1. Numere naturale. Puteri cu exponent număr natural. Divizibilitate

1. Relația se scrie $2(6a - b) = 3c$, de unde $c \,\vdots\, 2 \Rightarrow c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și $3 \mid b$. Înlocuind se obține $\overline{abc} \in \{160, 132, 292, 264, 236, 396, 368\}$. **2.** Relația se scrie $3\overline{ab} = 4c \Rightarrow 3 \mid c$ și, cum c este cifră $\Rightarrow c \in \{3, 6, 9\}$; prin înlocuire rămâne $c = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 129$. **3.** a – prim și a – par $\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 9$. **4.** $\overline{abc} = 394$. **5.** $89a - b = 10c \Rightarrow \overline{abc} = 198$. **6.** $5a = 2(b + c + 5) \Rightarrow a \in \{2, 4, 6, 8\}$; prin înlocuire și ținând cont că $a > b > c \Rightarrow \overline{abc} = 432$. **7.** $9(a - b) = a(b - 1) \Rightarrow \overline{ab} = 95$. **8.** $\overline{abc} \in$

$\in \{441, 882\}$. **9.** $\overline{abc} \in \{695, 785, 875, 965\}$. **10.** $\overline{ab} = 75$. **11.** Cum $b = 2a \Rightarrow \overline{ab} \in \{12, 24, 36, 48\} \Rightarrow$ suma este 120. **12.** $\overline{ab} \in \{15, 24, 42, 51\}$. **13.** $A = 111(a + b + c)$; $37 \mid 111 \Rightarrow 37 \mid A$. **14.** $a = 3^{12n+2} \cdot 48$. **15.** $a = 3^{2n} \cdot 2^n \cdot 88$. **16.** $a = (12 \cdot 5^{3n+2})^2$. **17.** $A = 10^{3n} \cdot 11$. **18.** $A = 2^{3n} \cdot 5^{2n} \cdot 45$. **19.** $a = (11 \cdot 4^n)^2$. **20.** $a = 3(1 + 3 + 3^2) + 3^4(1 + 3 + 3^2) + ... + 3^{46}(1 + 3 + 3^2) = 13(3 + 3^4 + ... + 3^{46}) \Rightarrow 13 \mid a$. **21.** Cum $1 + 7 + 7^2 + 7^3 = 400$ şi sunt $64 : 4 = 16$ grupe $\Rightarrow a \,\vdots\, 10$. **22.** $a = (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^4(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + ... + 2^{2008}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 15(1 + 2^4 + ... + 2^{2008}) \Rightarrow a \,\vdots\, 15$. **23.** Cum $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$ şi sunt $2020 : 5 = 404$ grupe $\Rightarrow a \,\vdots\, 31$. **24.** Cum $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$ şi sunt $2016 : 4 = 504$ grupe $\Rightarrow 10 \mid a$. **25.** a) $A = \{0, 1, 3, 9\}$; b) $A = \{0, 1, 2, 7\}$; c) $A = \{1, 2, 5, 14\}$; d) $A = \{6, 7, 9, 13, 21\}$. **26.** a) $x \in \{0, 4\}$; b) $x \in \{1, 7, 25\}$; c) $x \in \{1, 2, 4, 11\}$; d) $x \in \{0, 1, 6, 19\}$; e) $x \in \{0, 11\}$; f) $x = 9$. **27.** Fie $d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d \mid 3n + 11$ şi $d \mid 4n + 15 \Rightarrow d \mid 3(4n + 15) - 4(3n + 11) \Rightarrow d \mid 1$ şi cum $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (3n + 11, 4n + 15) = 1$. **28.** $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$; $B = \{84, 168, 252\}$; $C = \{1, 2, 4, 8, 16, 84, 168, 252\}$. **29.** $A = \{0, 1, 2, 7\}$; $B = \{0, 2, 5, 8, 17\}$; $A \cap B = \{0, 2\}$; $\text{card}(A \cap B) = 2$. **30.** a) $A = \{0, 1, 3, 10\}$; b) $A = \{0, 2, 4, 10\}$; c) $A = \{1, 3, 13\}$; d) $A = \{-11, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 10\}$. **31.** a) $(a; b) = 12 \Rightarrow a = 12x$ şi $b = 12y$, cu $(x; y) = 1$; cum $a \cdot b = 2160 \Rightarrow x \cdot y = 15$ şi cum $(x; y) = 1 \Rightarrow x \in \{1, 3, 5, 15\}$ şi $y \in \{15, 5, 3, 1\} \Rightarrow (a, b) \in \{(12, 180), (36, 60), (60, 36), (180, 12)\}$; b) Folosind aceeaşi metodă ca şi la subpunctul a), obţinem $x \cdot y = 14$, de unde $x \in \{1, 2, 7, 14\}$ şi $y \in \{14, 7, 2, 1\} \Rightarrow (a, b) \in \{(15, 210), (30, 105), (105, 30), (210, 15)\}$; c) $x + y = 8$ şi $(x; y) = 1 \Rightarrow x \in \{1, 3, 5, 7\}$ şi $y \in \{7, 5, 3, 1\} \Rightarrow (a, b) \in \{(15, 105), (45, 75), (75, 45), (105, 15)\}$; d) Se foloseşte relaţia $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 4860$ şi, folosind aceeaşi metodă ca mai sus, $x \cdot y = 15 \Rightarrow (a, b) \in \{(18, 270), (54, 90), (90, 54), (270, 18)\}$. **32.** $n - 12 = [20; 24; 28] \Rightarrow n - 12 = 840 \Rightarrow n = 852$. **33.** $n + 1 = [12; 16; 18] \Rightarrow n + 1 = 144 \Rightarrow n = 143$. **34.** $n - 3 = [10; 12; 15] \cdot k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow n - 3 = 60k$. a) $k = 1$, $n = 63$; b) $k = 3$, $n = 183$. **35.** $n + 2 = [7; 10; 15] \cdot k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 2 = 210k$. a) $k = 1$, $n = 208$; b) $k = 2$, $n = 418$. **36.** $n + 4 = [8; 9; 12] \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, $n < 220$, $n \,\vdots\, 5 \Rightarrow n + 4 = 72k$ şi $5 \mid n \Rightarrow k = 2 \Rightarrow n = 140$. **37.** $n + 3 = [6; 5; 7] \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, $620 < n < 640 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow n = 627 \Rightarrow$ se pot forma 125 de echipe de baschet. **38.** $\left.\begin{array}{l} 1905 = n \cdot c_1 + 15, n > 15 \\ 445 = n \cdot c_2 + 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n \mid 1890 \\ n \mid 432 \end{array}\right\} \Rightarrow n \mid (1890; 432) \Rightarrow n \mid 54$ şi cum $n > 15 \Rightarrow n \in \{18, 27, 54\}$. **39.** $n \mid (720; 816)$, $n > 19 \Rightarrow n \mid 48$ şi $n > 19 \Rightarrow n \in \{24, 48\}$. Cel mai mare număr posibil de copii este 48. **40.** a) Dacă $n = 2k \Rightarrow n + 1 = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \mid n(n + 1)$. Dacă $n = 2k + 1 \Rightarrow n + 1 = 2k + 2$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \mid n(n + 1)$; b) Cum $2 \mid n(n + 1)$, mai trebuie arătat că $3 \mid n(n + 1)(n + 2)$. Dacă $n = 3k \Rightarrow n + 1 = 3k + 1$ şi $n + 2 = 3k + 2 \Rightarrow 3 \mid n(n + 1)(n + 2)$. Dacă $n = 3k + 1 \Rightarrow n + 1 = 3k + 2$ şi $n + 2 = 3k + 3$, iar dacă $n = 3k + 2 \Rightarrow n + 1 = 3k + 3$ şi $n + 2 = 3k + 4 \Rightarrow 3 \mid n + 1 \Rightarrow 3 \mid n(n + 1)(n + 2)$, unde $k \in \mathbb{N}$. **41.** $a = n(n + 1) + 6$. Cum $2 \mid n(n + 1)$ şi $2 \mid 6 \Rightarrow 2 \mid a$. **42.** $S = 432 = 16 \cdot 27$. **43.** a) $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$; b) $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ sau $a = 3$, $b = 13$, $c = 3$. **44.** a) $x = 5$; b) $(x, y) \in \{(0, 18), (2, 10), (4, 6), (8, 2), (12, 0)\}$; c) $x = 15$; d) Cum $9y = 4(21 - x) \Rightarrow y \in \{4, 8\} \Rightarrow x \in \{12, 3\}$. **45.** $S = 3124$. **46.** 30, 42, 66.

2. Rapoarte. Proporţii. Proporţionalitate

1. a) 60; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{7}$. **2.** a) $a = 40$; $b = 56$; b) $a = 21$; $b = 35$. **3.** a) $a = 0,5$; b) $x = 1$; c) $x = 27$; d) $x = 7$; e) $x = 35$; f) $x = 23$. **4.** $\mathcal{A} = 486 \text{ cm}^2$. **5.** Fiul are 10 ani, tatăl are 35 de ani. **6.** a) 40%; b) $a = 20$; $b = 50$. **7.** $a = 60$; $b = 72$; $c = 120$. **8.** $S = 1860$ lei. **9.** $a = 36$; $b = 45$; $c = 63$. **10.** $a = 45$; $b = 75$; $c = 105$. **11.** $A'B' = 21$ cm; $A'C' = 28$ cm; $B'C' = 35$ cm. **12.** $\mathcal{P}_{A'B'C'} = 120$ cm; $\mathcal{P}_{ABC} = 72$ cm. **13.** $a = 28$; $b = 21$; $c = 14$. **14.** $a = 36$; $b = 24$; $c = 16$. **15.** 2000 lei; 3000 lei; 4000 lei. **16.** 2800 lei; 2100 lei; 1400 lei. **17.** 28 ore. **18.** 6 ore. **19.** 5 ore. **20.** 6 camioane. **21.** 30 zile. **22.** $\overline{ab} = 18$.

3. Procente

1. 375 km. **2.** 400 lei. **3.** 350 lei. **4.** $a = 600$; $b = 162$. **5.** 12%. **6.** a) 720 lei; b) 2400 lei. **7.** 320 km. **8.** 600 lei. **9.** a) 230,4 lei; b) 96%. **10.** 1800 lei. **11.** 2400 lei. **12.** 500 lei. **13.** 15 băieți; 21 fete. **14.** 36 elevi; 15 fete; 21 băieți. **15.** 108 băieți; 80 fete. **16.** 3400 cărți. **17.** 400 kg. **18.** a) 6000 lei; b) 32,25%. **19.** 4500 lei. **20.** 2500 lei. **21.** 200 km. **22.** $p = 20\%$. **23.** $p = 20\%$. **24.** $\overline{abc} \in \{125, 250, 375\}$.

4. Numere reale

1. $x = 2$; $(2^3)^{25} < (3^2)^{25}$. **2.** a) $x = \sqrt{3}$; b) $x = 4$. **3.** a) $m_a = 3\sqrt{3}$; $m_g = \sqrt{2}$; b) $m_a = 2\sqrt{3}$; $m_g = \sqrt{3}$; c) $x = 2\sqrt{2}+1$; $y = 2\sqrt{2}-1$; $m_a = 2\sqrt{2}$; $m_g = \sqrt{7}$; d) $x = (2-\sqrt{3})^2$; $y = (3+\sqrt{3})^2$; $m_a = \frac{19+2\sqrt{3}}{2}$; $m_g = (2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) = 3-\sqrt{3}$. **4.** $m_g = \sqrt{2}$. **5.** a) $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$; $b = \frac{\sqrt{2}}{20}$; b) $m_g = \frac{1}{2}$.

6. $a = -\sqrt{2}$; $b = 1-\sqrt{2}$; $(a - b)^{2019} = (-1)^{2019} = -1$. **7.** $\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6}} + \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})^2}{6}} = \sqrt{6}$; $3-\sqrt{3}+3+\sqrt{3} = 6$ (A). **8.** a) $a = \sqrt{3}$; $b = \frac{4}{\sqrt{3}}$; b) $m_g = 2$.

9. $a = 6\sqrt{2}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $a \cdot b = 3\sqrt{6}$. **10.** a) $a = 12 \in \mathbb{N}$; b) $a = 21 \in \mathbb{N}$; c) $a = 0 \in \mathbb{N}$. **11.** $a = 18$; $b = 8$; $m_g = 12$. **12.** a) $a = 2$; $b = 1$; b) $a = 2$; $b = -5$; c) $a = -1$; $b = 8$; d) $a = 4$; $b = 1$. **13.** $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $-1 < -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$ (A). **14.** $a \in \{-7, 3\}$. **15.** $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **16.** $x = -4$. **17.** a) $6\sqrt{3}$; b) 8; c) $-5\sqrt{3}$; d) $\frac{21\sqrt{2}}{10}$. **18.** a) $A = \{-12, -7, -4, -3, -1, 0, 3, 8\}$; b) $A = \{-5, -2, -1, 0, 1, 4\}$. **19.** $a = \sqrt{5}-1$; $b = \sqrt{5}+1$; $m_a = \sqrt{5}$; $m_g = 2$. **20.** $a = 2$; $b = 4$; $a < b$. **21.** a) 1; b) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$; c) $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

5. Calcul algebric

1. $a = -7$. **2.** $a = -8$. **3.** $a \in \{-25, -3\}$. **4.** a) $E(x) = x^2 - 6x - 15 = (x - 3)^2 - 24$; b) $\min E(x) = -24$ pentru $x = 3$. **5.** a) $E(n) = 4(n + 3)^2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$; b) $\min E(t) = 0$ pentru $n = -3$. **6.** $E(n) = 5$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. **7.** $E(n) = n(n + 1)(n + 2)$. Cum $6 \mid n(n + 1)(n + 2) \Rightarrow 6 \mid E(n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. **8.** $E(n) = (n + 1)^2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. **9.** $E(a) = 2a + 9$; $2a + 9 = -5$; $a = -7$. **10.** $E(n) = (n + 4)^2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. **11.** $E(n) = 15$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. **12.** a) $E(x) = 9x^2 + 12x + 4 + 2x^2 - 7x + 6 - 2(4x^2 - 4x + 1) - 8x - 3 = 11x^2 - 3x + 7 - 8x^2 + 8x - 2 = 3x^2 + 5x + 5$; b) $E(n) = 3n^2 + 5n + 5 = 3n^2 + 3n + 2n + 5 = 3n(n + 1) + (2n + 5)$, care este număr impar, fiind suma dintre un număr par și unul impar. **13.** a) $E(x) = x^2 + 8x + 16 + 2x - 4x^2 - 3 + 6x + 4(x^2 - 4x - 12) + 6x + 44 = -3x^2 + 22x + 57 + 4x^2 - 16x - 48 = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$; b) $E(-2\sqrt{2}) = (3-2\sqrt{2})^2$; $E(2\sqrt{2}) = (3+2\sqrt{2})^2$; $m_g = 1$. **14.** a) $E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 1 - x^2 + 6x - 9 - 2x^2 - 14x + 4 = -4x - 3$; b) $E(a\sqrt{2} - 3) = -4a\sqrt{2} + 9$; $E(a + 2) = -4a - 11$; $a = -2$. **15.** a) $E(x) = 2x^2 + 12x + 18 + 3x^2 - 4x - 4 - 4x^2 + 4x - 1 - 8x - 8 = x^2 + 4x + 5$; b) $E(a\sqrt{2}) = 2a^2 + 4a\sqrt{2} + 5$; $E(a\sqrt{2} - 1) = 2a^2 + 2a\sqrt{2} + 2$; $a = 4\sqrt{2}$. **16.** a) $E(x) = 2x^2 + 6x\sqrt{2} + 9 - 5x^2 + 4 + 2x^2 + 4x - 16 - 6x\sqrt{2} - 4x + 12$; $E(x) = 9 - x^2$; b) $E(2\sqrt{3}) = -3$; $E(-2\sqrt{3}) = -3$; $a = -4$; $a \in (-3\sqrt{2}, -2\sqrt{3}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -3\sqrt{2} < -4 < -2\sqrt{3} \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow 2\sqrt{3} < 4 < 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 12 < 16 < 18$ (A). **17.** a) $E(x) = 8x^2 - 1 -$

$-4x^2 + 8x\sqrt{2} - 8 - 2x^2 - 4x\sqrt{2} + 13 = 2x^2 + 4x\sqrt{2} + 4 = (x\sqrt{2}+2)^2$; b) $E(n) = (n\sqrt{2}+2)^2 < 8 \Leftrightarrow \Leftrightarrow |n\sqrt{2}+2| < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < n\sqrt{2}+2 < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} < n < 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow n \in \{-3, -2, -1, 0\}$.
18. a) $E(x) = 2x^2 - 6x\sqrt{2} + 9 - 2x^2 + x\sqrt{2} + 2 + 3x\sqrt{2} - 4 = -2x\sqrt{2} + 7$; b) $E(a\sqrt{2}) = -4a + 7$; $-4a + 7 + 2a = 11 \Leftrightarrow a = -2$. **19.** a) $E(x) = 8x^2 + 12x\sqrt{2} + 9 + 4 - 2x^2 - 2x^2 - 4x - 2 - 12x\sqrt{2} - 10 = = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$; b) $E(a\sqrt{2}) = (2a\sqrt{2}-1)^2$ și $E(-a\sqrt{2}) = (2a\sqrt{2}+1)^2$; $(2a\sqrt{2}-1)^2 - - (2a\sqrt{2}+1)^2 = 4a\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \Leftrightarrow -8a\sqrt{2} = 4a\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \Leftrightarrow -12a\sqrt{2} = -12\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 1$.
20. a) Notăm $x^2 - x\sqrt{2} = y$. $E(x) = (y+2)^2 - y^2 + 4x\sqrt{2} - 12 - (4x^2 + 4x - 3) = 4y + 4 + 4x\sqrt{2} - 12 - - 4x^2 - 4x + 3 = -4x - 5$; b) $E(a\sqrt{2}-7) = -4(a\sqrt{2}-7) - 5 = -4a\sqrt{2} + 23$; $E(4\sqrt{2}) = -16\sqrt{2} - 5$; $4a\sqrt{2} + 23 - 16\sqrt{2} - 5 = -2a + 10 \Leftrightarrow 2a(2\sqrt{2}-1) = -8(2\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow a = -4$. **21.** a) Notăm $2x^2 - x = a$. Avem $E(x) = (a-2)(a+1) - (a-1)^2 - 2x^2 - 3x + 4 = a^2 - a - 2 - a^2 + 2a - 1 - 2x^2 - - 3x + 4 = a^2 - 2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - x - 2x^2 - 3x + 1 = -4x + 1$; b) $E(n) = -4n + 1 < n^2 + 6 \Leftrightarrow n^2 - 4n + 4 < < 9 \Leftrightarrow (n-2)^2 < 9 \Leftrightarrow |n-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < n - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < n < 5 \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **22.** a) Notăm $2x^2 - x = a$. Avem $E(x) = (a+3)(a+5) - a^2 - 14 = a^2 + 8a + 15 - a^2 - 14 = 8a + 1 = 16x^2 - 8x + 1 = = (4x-1)^2$; b) $(2a-1)^2 - (a\sqrt{2}-1)^2 - 2a(a+\sqrt{2}) = 2(a-9) \Leftrightarrow a = 3$. **23.** a) $E(x) = 9x^2 + 12x + + 4 - 6x^2 - 4x + 15x + 10 - x^2 - 4x - 4 - 2x^2 - 16x - 5 = 3x + 5$; b) $E(n) = 3n + 5$; $\dfrac{3n+5}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Rightarrow 2n+1 \mid 3n+5$ și $2n+1 \mid 2n+1 \Rightarrow 2n+1 \mid 6n+10$ și $2n+1 \mid 6n+3 \Rightarrow 2n+1 \mid 7 \Rightarrow 2n+1 \in \in \{-7, -1, 1, 7\} \Rightarrow n \in \{-4, -1, 0, 3\}$. **24.** a) $E(x) = 3(4x^2 - 4x + 1) - 2(x^2 - 9) - 2(x^2 - 6x + 9) + x - - 3 - x^2 + 3x + 28 = 12x^2 - 12x + 3 - 2x^2 + 18 - 2x^2 + 12x - 18 - x^2 + 4x + 25 = 7x^2 + 4x + 28$; b) $E(n) + 3n = 7n^2 + 7n + 28 = 7n(n+1) + 28 = \mathcal{M}_{14}$. **25.** a) $E(x) = 4x^2 - 12x + 9 - (x^2 + 3x - 4) - - 2(x^2 - 6x + 9) + 1 - x^2 = 4x^2 - 12x + 9 - x^2 - 3x + 4 - 2x^2 + 12x - 18 + 1 - x^2 = -3x - 4$; b) $E(n) = = -3n - 4$; $\dfrac{E(n)}{2n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{-3n-4}{2n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n-1 \mid -3n-4$ și $2n-1 \mid 2n-1 \Rightarrow 2n-1 \mid -6n-8$ și $2n-1 \mid 6n-3 \Rightarrow 2n-1 \mid -11 \Rightarrow 2n-1 \in \{-11, -1, 1, 11\} \Rightarrow n \in \{-5, 0, 1, 6\}$. **26.** a) $E(x) = 4x^2 + + 4x + 1 - (6x - 3 - 2x^2 + x) - 4(x^2 - 4x + 4) - 2x^2 - 12x + 20 = 4x^2 + 4x + 1 + 2x^2 - 7x + 3 - 4x^2 + + 16x - 16 - 2x^2 - 12x + 20 = x + 8$; b) $E(n) = n + 8$; $n + 8 > 4n - 10 \Leftrightarrow 18 > 3n \Leftrightarrow n < 6 \Rightarrow \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. **27.** a) $E(x) = 2(x^2 - 6x + 9) - (x + 5 - x^2 - 5x) - (x^2 + 4x + 4) + 9x - x^2 - 2 = = 2x^2 - 12x + 18 + 5x + x^2 - x - 5 - x^2 - 4x - 4 + 9x - x^2 - 2 = x^2 - 3x + 7$; b) $E(n) = n^2 - 3n + 7$; $E(n) < -n + 10 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 < 4 \Leftrightarrow (n-1)^2 < 4 \Leftrightarrow |n-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < n - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < n < 3 \Rightarrow \Rightarrow A = \{0, 1, 2\}$ și card $A = 3$. **28.** a) $E(x) = 9x^2 + 24x + 16 + 3x + 7 - 3x^2 - 7x - 4x^2 + 12x - 9 - 32x - - 20 = 2x^2 - 6$; b) $E(n) = 2n^2 - 6 = 2(n^2 - 3) = \mathcal{M}_2$ – număr prim $\Rightarrow E(n) = 2 \Rightarrow 2(n^2 - 3) = 2 \Rightarrow \Rightarrow n^2 - 3 = 1 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow |n| = 2 \Rightarrow n \in \{-2, 2\}$. **29.** a) $E(x) = x^2 + 6x + 9 + 2x^2 - 5x + 4x - 10 + x^2 - - 4x + 4 - 3(x^2 + x - 6) - 15 = 4x^2 + x + 3 - 3x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2x + 6$; b) $E(x) = (x^2 - 2x + 1) + 5 = = (x-1)^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow E(x) \in [5, +\infty) \Rightarrow \min E(x) = 5$, când $(x-1)^2 = 0$, adică $x = 1$. **30.** a) $E(x) = = 4x^2 - 4x + 1 - (4x + 10 - 2x^2 - 5x) - x^2 - 6x - 9 + 9x - 4x^2 + 18 = 4x^2 - 4x + 1 + 2x^2 + x - 10 - x^2 - - 6x - 9 - 4x^2 + 9x + 18 = x^2$; b) $E(n) = n^2 \Leftrightarrow n^2 \leq 2(4-n) \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 \leq 9 \Leftrightarrow (n+1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow \Leftrightarrow |n+1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq n + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq n \leq 2 \Leftrightarrow n \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2\}$. **31.** a) $a = (2^n + 1)^2$; b) $a = = (3^n + 2^2)^2$; c) $a = (2^{2n} + 2)^2$; d) $a = (5^n + 3)^2$. **32.** $x - y = \pm 2\sqrt{2}$. **33.** $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$; $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = 47$.
34. $\min E(x) = 2$ pentru $x = -3$. **35.** $4x^2 \geq 0$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$. **36.** a) $(x+3)(x+2)(x+4)$; b) $6 \mid (n+2) \cdot$

$\cdot (n+3)(n+4)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$. **37.** $(x-2)^2+(y-4)^2 \geq 0$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$. Egalitatea are loc pentru $x = 2$ și $y = 4$. **38.** a) $a = (x^2 - 7x + 5)^2$; b) $a = (x^2 - 5x + 7)^2$. **40.** a) $E(x) = x - 2$; b) $E(2) = 0 \Rightarrow$ produsul este egal cu 0. **41.** $\frac{(x-3)(x-2)}{2} \in \mathbb{N}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$. **42.** $x = 2$. **44.** b) $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **45.** b) $\sqrt{x^2+2x+5} = \sqrt{(x+1)^2+4} \geq 2$; c) $x = -1$; $y = 3$; $z = 2$. **46.** $E(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$. **47.** $E(x) = \frac{2x-1}{x-2}$. **48.** $E(x) = \frac{x+1}{3x-2}$. **49.** b) $n \in \{4, 6, 10\}$. **50.** b) $n \in \{-2, 0, 2, 4\}$. **51.** b) $A = \{-1, 1, 3, 5\}$; card $A = 4$. **52.** $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, deci triunghiul este dreptunghic $\Rightarrow \mathcal{A}_\Delta = 6$ cm^2. **54.** b) $m = 6$; $n = 3$. **55.** b) $a = 5$; $b = 2$.

6. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

1. a) $S = \{2\}$; b) $S = \{-2\}$; c) $S = \{-4\}$; d) $S = \{5\}$; e) $S = \{-6\}$; f) $S = \{-13\}$; g) $S = \{2\}$; h) $S = \{6\}$. **2.** a) $S = \{1\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \{5\}$; d) $S = \{3\}$; e) $S = \{11\}$; f) $S = \{3\}$. **3.** a) $S = \{-1\}$; b) $S = \{-5\}$; c) $S = \{-6\}$; d) $S = \{-6\}$; e) $S = \{-2\}$; f) $S = \left\{-\frac{13}{7}\right\}$. **4.** a) $S = \{14\}$; b) $S = \{11\}$; c) $S = \{3\}$; d) $S = \{-3\}$; e) $S = \{-2\}$; f) $S = \left\{\frac{9}{11}\right\}$; g) $S = \{-4\}$. **5.** a) $S = \left\{\frac{31}{7}\right\}$; b) $S = \{-19\}$; c) $S = \{-18\}$; d) $S = \left\{-\frac{19}{5}\right\}$; e) $S = \{1\}$; f) $S = \{3\}$. **6.** a) $S = \{-2, 12\}$; b) $S = \left\{-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right\}$; c) $S = \{-2, 3\}$; d) $S = \{-4, 8\}$; e) $S = \{-5, -1\}$; f) $S = \{-6, 2, 4, 12\}$; g) $S = \{-4, 0, 2, 6\}$; h) $S = \left\{-\frac{28}{3}, -\frac{8}{3}, 4, \frac{32}{3}\right\}$; i) $S = \{-3, 6\}$. **7.** a) $S = \{13\}$; b) $S = \varnothing$; c) $S = \varnothing$; d) $S = \varnothing$; e) $S = \{3\}$; f) $S = \{8\}$. **8.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, -3, -2, -1\}$; $S = \{-8\}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 10\}$; $S = \{2\}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$; $S = \{18\}$; d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -5, -4, -1, 0, 7\}$; $S = \left\{-\frac{7}{6}\right\}$. **9.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{2\}$; c) $S = \{5\}$; d) $S = \{7\}$; e) $S = \left\{-6\sqrt{3} - 3\right\}$; f) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$. **10.** a) $S = \{-3, 2\}$; b) $S = \{-1, 2\}$; c) $S = \{-9\}$; d) $S = \{6\}$. **11.** a) $S = \{-8, 7\}$; b) $S = \left\{-\frac{10}{3}, 4\right\}$; c) $S = \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$; d) $S = \left\{-\frac{5}{3}, 3\right\}$; e) $S = \{2\}$; f) $S = \{-3\}$; g) $S = \left\{\pm\sqrt{13}\right\}$; h) $S = \left\{\pm\sqrt{22}\right\}$; i) $S = \{-1\}$. **12.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{4\}$; c) $S = \{10\}$; d) $S = \{11\}$; e) $S = \{3\}$; f) $S = \{4\}$.

7. Probleme de aritmetică ce se pot rezolva cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații

1. $a = 48$; $b = 54$; $c = 72$. **2.** 84; 96; 102. **3.** 656 și 164 de creioane. **4.** Fiul are 12 ani și tatăl 36 de ani; peste 12 ani. **5.** 180 km. **6.** 2250 lei. **7.** 108. **8.** 1411; 1079. **9.** 40000 de locuitori. **10.** 620; 3700. **11.** 30 de apartamente cu două camere și 10 apartamente cu trei camere. **12.** 64 fete și 84 băieți. **13.** 15 vaze și 50 de fire de flori. **14.** 1400 lei. **15.** $a = 270$; $b = 210$. **16.** 35 de elevi; 21 de bănci. **17.** 20 de copii și 164 de bomboane. **18.** 24 de bănci; 37 de copii. **19.** 13 băieți; 19 fete. **20.** 204 și 228. **21.** a) 336 lei; b) 30%. **22.** 600 t. **23.** 140 copii. **24.** 844 elevi. **25.** 320 km. **26.** 300 lei. **27.** 40 de creioane negre; 12 creioane galbene; 44 creioane roșii; probabilitatea este $\frac{7}{12}$. **28.** 32 răspunsuri corecte; 18 răspunsuri greșite. **29.** 44 cărți și 9 rafturi. **30.** 35 elevi. **31.** 28 elevi prezenți; 4 elevi absenți.

8. Inecuații

1. a) $x \in (-\infty; -5]$; b) $x \in (-\infty; 5]$; c) $x \in (-\infty; -4]$; d) $x \in (4; +\infty)$; e) $x \in (-\infty; -2]$; f) $x \in (-\infty; -8)$.

2. a) $x \in (-\infty; 2)$; b) $x \in (-\infty; 13)$; c) $x \in (-\infty; 2)$; d) $x \in [-2; +\infty)$; e) $x \in (2\sqrt{3}; +\infty)$; f) $x \in$ $\in (-\sqrt{2}; +\infty)$. **3.** a) $x \in (3; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 4)$; c) $x \in (-\infty; 8]$; d) $x \in (-\infty; -11)$; e) $x \in (-6; +\infty)$; f) $x \in (-\infty; -3]$. **4.** a) $x \in (-\infty; 16)$; b) $x \in [-4; +\infty)$; c) $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; d) $x \in (-13; +\infty)$. **5.** a) $x \in$ $\in (-\infty; 5)$; b) $x \in (-\infty; -1]$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in (-\infty; 1)$; e) $x \in (-\infty; -52)$. **6.** a) $x \in (-\infty; 1]$; b) $x \in [-4; +\infty)$; c) $x \in (-2; +\infty)$; d) $x \in (-2; +\infty)$; e) $x \in (-\infty; -1)$; f) $x \in (-\infty; 2]$; g) $x \in (-\infty; -3)$; h) $x \in [4; +\infty)$. **7.** a) $x \in [-5; 1]$; b) $x \in (0; 2)$; c) $x \in (-4; -1)$; d) $x \in [3; 7]$. **8.** a) $x \in [-10; 4]$; b) $x \in (-6; 4)$; c) $x \in$ $\in (-2; 5)$; d) $x \in \left[-3; \frac{13}{3}\right]$.

9. Funcţii

2. $A(-1; -5) \in G_f$; $B(1; 1) \in G_f$; $C\left(\frac{1}{3}, 2\right) \notin G_f$; $D\left(\frac{2}{3}, 0\right) \in G_f$; $E(3; -7) \notin G_f$. **3.** a) $a = 2$. **4.** a) $a = 2$. **5.** a) $m \in \left\{1, \frac{5}{2}\right\}$; b) $m \in \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$. **6.** a) $a = 3$; b) $S = \{2\}$. **7.** a) $m = 4$; b) $8\sqrt{2}$. **8.** a) $m = 1$; c) $M(2; 2)$. **9.** a) $f(x) = 3x - 2$; b) $f(x) = -2x + 5$; c) $f(x) = -3x + 7$; d) $f(x) = 4x - 3$. **10.** a) $f(x) = -2x + 3$; $f(5) =$ $= -7 \Rightarrow C(5; -7) \in G_f$; b) $f(x) = 2x - 5$; $f(6) = 7 \Rightarrow C(6; 9) \notin G_f$; c) $f(x) = 2x - 9$; $f(7) = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow C(7; 14) \notin G_f$. **11.** a) $f(x) = -3x + 7$; $f(2m - 3) = m^2 + 2m - 17 \Rightarrow m \in \{-11, 3\}$; b) $f(x) = -4x + 11$; $f(3m - 4) = m^2 - 3m + 5 \Rightarrow m \in \{-11, 2\}$. **12.** a) $A(0; -6)$; $B(3; 0)$; b) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; c) $d(M, AB) =$ $= 2\sqrt{5}$. **13.** a) $A(0; -6)$; $B(2; 0)$; b) $\text{tg}\, \alpha = \frac{1}{3}$; c) $d(M, AB) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. **14.** b) $d(O, G_f) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. **15.** b) $a =$ $= -1$; c) $S = -2475$. **16.** b) $\mathcal{A} = 2$ (u^2). **17.** a) $a = 3$; c) $x = -\frac{1}{3}$. **18.** a) $m \in \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$; b) $\mathcal{A}_{MANB} = 25$ (u^2). **19.** a) $m = 2$; c) 45°. **20.** a) $m \in \{-5, 2\}$; c) $x = 4$. **21.** b) $G_f \cap G_g = M(-1; 4)$; c) $\mathcal{A} = 16$ (u^2). **22.** a) $G_f \cap$ $\cap G_g = M(3; 2)$; b) $\mathcal{A} = 3$ (u^2). **23.** b) $G_f \cap G_g = M(3; -2)$; c) $\mathcal{A} = 3$ (u^2). **24.** a) $f(x) = 4x - 5$; $g(x) =$ $= 2x - 3$. **25.** b) $G_f \cap G_g = M(1; 1)$. **26.** b) $a \in (1; +\infty)$; c) $S = \{1\}$. **27.** b) $G_f \cap G_g = M(-1; 3)$; $\mathcal{A} = 9$ (u^2). **28.** b) $S = 325$; c) $\mathcal{A} = \frac{4}{3}$ (u^2).

Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

Subiectul I. 1. 43. **2.** 12. **3.** 30. **4.** 27. **5.** –12. **6.** $\frac{3}{7}$. **Subiectul al II-lea. 1.** 161. **2.** $S = \{-4\}$. **3.** $m_g = 2$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $(x + 3)(x + 2)$; $(x + 4)(x - 2)$; b) $E(x) = \frac{-6}{x-4}$; c) $n \in \{0, 3, 5, 6, 8\}$. **2.** a) $a = 2$; $b = -3$; $f(x) = 2x - 4$; $g(x) = -3x + 1$; c) $\mathcal{A} = \frac{5}{3}$ (u^2).

TESTUL 2

Subiectul I. 1. 2. **2.** 47. **3.** –7. **4.** –2. **5.** –140. **6.** 43,2. **Subiectul al II-lea. 1.** 23 de bănci; 45 de elevi. **2.** $a = -22$; $b = -13$; $b > a$. **3.** $S = \{(1; 2)\}$. **Subiectul al III-lea. 1.** a) $(x - 3)(x + 2)$; $(x - 5)(x + 1)$; c) Fie $d \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $d \mid 5n + 7$ şi $d \mid 3n + 4 \Rightarrow d \mid 15n + 21 - (15n + 20) \Rightarrow d \mid 1$ şi $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1$.

2. a) $m = 2$; $n = -3$; c) $f(x) = x - 5$; $g(x) = -x + 3$; $\mathcal{A} = 1$ (u^2).

TESTUL 3

Subiectul I. 1. -1. **2.** 65. **3.** $10x - 9$. **4.** $a = 18$; $b = 30$. **5.** 150 lei. **6.** $x \in (-\infty; -4)$. **Subiectul al II-lea. 1.** $n = 48$. **2.** $x = 1$; $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $3xy - 2\sqrt{3} = 0$. **3.** $S = \{-2, 1\}$. **Subiectul al III-lea. 1.** a) $a = 5$; $b = -11$; $f(x) = 6x - 7$; b) $f(m) = m^2 - 2 \Rightarrow m \in \{1, 5\}$; c) $\mathcal{A}_{MNP} = 7$ (u^2). **2.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; b) $E(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; c) $a \in \{-3, -2, 0, 1\}$, dar $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \Rightarrow a \in \{-3, -2\}$.

TESTUL 4

Subiectul I. 1. 9. **2.** $\dfrac{4}{5}$. **3.** 240. **4.** $[-2; 1)$. **5.** -3. **6.** 12. **Subiectul al II-lea. 1.** 19 bănci şi 34 elevi. **2.** $a = \sqrt{5} + 2$; $b = 4$; $a > b$. **3.** $E(n) = (3n - 7)^2$. **Subiectul al III-lea. 1.** b) $M(-4; -4) \in G_f$; c) $G_f \cap Oy = \{A(0; 4)\} \Rightarrow A'(0; -4) \in G_g \Rightarrow m = -2$. **2.** a) $(x - 3)(x + 2)$; $(x + 3)(x - 1)$; b) $E(x) = \dfrac{3x-3}{x+2}$; c) $n \in \{-11, -5, -1, 7\}$.

TESTUL 5

Subiectul I. 1. -12. **2.** 14. **3.** $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$. **4.** $x = 2$. **5.** $AB = 5$. **6.** 105 lei. **Subiectul al II-lea. 1.** Notând cu c numărul întrebărilor la care elevul a răspuns corect şi cu g numărul întrebărilor la care elevul a răspuns greşit, avem $\begin{cases} c + g = 36 \\ 6c - 5g = 51 \end{cases}$, de unde obţinem $c = 21$. **2.** a) $x = 2\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{2}$; b) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $\dfrac{1}{4} < \dfrac{\sqrt{2}}{4} < \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2} < 3$ (A). **3.** $E(x) = 36 \Rightarrow E(n) = 36 = 6^2$. **Subiectul al III-lea. 1.** b) $A(0; -3)$; $B(4; 0)$; $m \in \{-4, +12\}$. **2.** a) $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$; $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$; b) $E(x) = \left[\dfrac{2x+4}{(x+3)(x-2)} + \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{3}{x-2}\right] \cdot \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-9} = \dfrac{2x+4+2x-4-3x-9}{(x+3)(x-2)} \cdot \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-9} = \dfrac{x-9}{x+3} \cdot \dfrac{x+1}{x-9} = \dfrac{x+1}{x+3}$; c) $\dfrac{n+1}{n+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{matrix} n+3 \mid n+1 \\ n+3 \mid n+3 \end{matrix} \Rightarrow n + 3 \mid 2 \Rightarrow n + 3 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow n \in \{-5, -4, -2, -1\}$, dar $n \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 2, 9\} \Rightarrow n \in \{-5, -4, -2\}$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ARII ŞI VOLUME

1. Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

1. a) $\sphericalangle(CC', AB) = \sphericalangle(AA', AB) = 90°$; b) $\sphericalangle(BC', AD) = \sphericalangle(BC', BC) = 60°$; c) $\sphericalangle(AC, (ADD')) = \sphericalangle(AC, AD) = 45°$. **2.** a) $AA' = 9$ cm; $\sphericalangle(BD', (ABC)) = \sphericalangle(BD', BD)$; $\sin(\sphericalangle DBD') = \frac{3}{5}$; b) $\mathrm{pr}_{(ADD')} BD' = AD' \Rightarrow \sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle AD'B$; $\sin(\sphericalangle AD'B) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. **3.** a) $\sphericalangle(AD', (ABC)) = \sphericalangle(AD', AD) = \sphericalangle D'AD = 30°$; b) $\sphericalangle(D'C, (ADD')) = \sphericalangle(D'C, DD') = 60°$; c) $\sphericalangle((ADD'), (BDD')) = \sphericalangle(AD, BD) = 45°$. **4.** a) $d(C, AC') = 12$ cm; b) $\sphericalangle(AC', (BCC')) = \sphericalangle(AC', BC') = \sphericalangle AC'B$; $\sin(\sphericalangle AC'B) = \frac{12}{25}$; c) $\sphericalangle((C'AB), (ABC)) = \sphericalangle(C'B, CB) = \sphericalangle CBC'$; $\mathrm{tg}(\sphericalangle CBC') = \frac{20}{9}$. **5.** a) $d(C', BD) = C'O = 3\sqrt{6}$ cm, unde $AC \cap BD = \{O\}$; b) $\sphericalangle(BC', AB') = \sphericalangle(BC', DC') = 60°$; c) Dacă $CQ \perp C'O$, $Q \in C'O \Rightarrow d(C, (C'BD)) = CQ = 2\sqrt{3}$ cm. **6.** a) $\sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle(AD', D'O) = \sphericalangle AD'O = 30°$; b) $\sphericalangle(BD', (ABC)) = \sphericalangle DBD'$; $\sin(\sphericalangle DBD') = \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) Fie $AM \perp BD'$; $AM = 4\sqrt{6}$ cm. **7.** a) Dacă D este mijlocul laturii $BC \Rightarrow d(A', BC) = A'D = 12$ cm; b) $\sphericalangle((A'BC), (ABC)) = \sphericalangle A'DA = 30°$. **8.** a) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle(VA, AO) = \sphericalangle VAO$; $VA = 9\sqrt{2}$ cm; $\sin(\sphericalangle VAO) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sphericalangle(VB, (VAD)) = \sphericalangle(VB, VD) = 45°$; c) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VDO$; $\mathrm{tg}(\sphericalangle VDO) = \sqrt{2}$.
9. a) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO = 45°$; b) $\sphericalangle(VB, (VAC)) = \sphericalangle BVO = 45°$; c) $\sphericalangle(BC, (VAC)) = \sphericalangle BCO = 45°$.
10. $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VMO = 45°$ (figura 1). a) $\sphericalangle((VAC), (VBD)) = \sphericalangle AOB = 90°$; b) Cum $BO \perp (VAC) \Rightarrow d(B, (VAC)) = BO = 10\sqrt{2}$ cm; c) $\Delta VQP \sim \Delta VOM \Rightarrow \frac{PQ}{OM} = \frac{VP}{VM}$. Notăm $PQ = PO = x \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{10-x}{10\sqrt{2}} \Rightarrow x = 10(\sqrt{2}-1) \Rightarrow PO = 10(\sqrt{2}-1)$ cm.

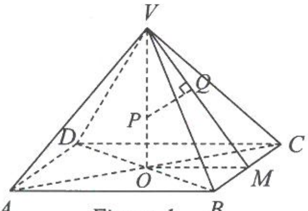


Figura 1

11. a) $DD' = 6\sqrt{2}$ cm; $d(D', AC) = D'O = 6\sqrt{3}$ cm, unde $AC \cap BD = \{O\}$; b) $d(D, (D'AC)) = DQ$, unde $DQ \perp D'O$, $DQ \subset (D'DO)$; $DQ = 2\sqrt{6}$ cm; c) $\sphericalangle((D'AC), (ABC)) = \sphericalangle D'OD$; $\mathrm{tg}(\sphericalangle D'OD) = \sqrt{2}$. **12.** a) $DD' = 4$ cm, $AO \perp (BDD') \Rightarrow d(A, (BDD')) = 2\sqrt{6}$ cm; b) $\mathrm{pr}_{(BDD')} AD' = D'O \Rightarrow \sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle AD'O$; $\mathrm{tg}(\sphericalangle AD'O) = \frac{\sqrt{15}}{5}$.
13. a) Dacă $DE \perp AC$, atunci $D'E \perp AC \Rightarrow d(D', AC) = D'E$; $DE = 3\sqrt{3}$ cm, $D'E = 9$ cm; b) $\sphericalangle((D'AC), (ABC)) = \sphericalangle DED'$; $\mathrm{tg}(\sphericalangle DED') = \sqrt{2}$; c) Dacă $DQ \perp D'E$, $DQ \subset (D'DE) \Rightarrow d(D, (D'AC)) = DQ$; $DQ = 3\sqrt{2}$ cm. **14.** a) Dacă $DQ \perp D'A \Rightarrow DQ = d(D, (D'AB))$; $DQ = 4\sqrt{3}$ cm; b) $\mathrm{pr}_{(D'AB)} DD' = D'Q \Rightarrow \sphericalangle(DD', (D'AB)) = \sphericalangle(DD', D'Q) = \sphericalangle DD'Q = 30°$ (figura 2). **15.** a) $DD' = 6\sqrt{3}$ cm; $BD' = 6\sqrt{15}$ cm.

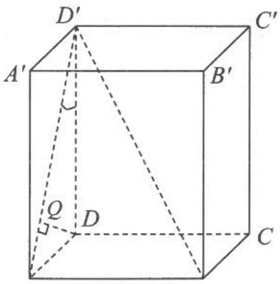


Figura 2

Dacă $AE \perp BD' \Rightarrow d(A, BD') = AE = \dfrac{18\sqrt{10}}{5}$ cm; b) Cu teorema celor trei perpendiculare se arată că $A'Q \perp BC'$, $B'Q = 6\sqrt{2}$ cm și $A'Q = 12\sqrt{2}$ cm (figura 3). **16.** a) Dacă $B'Q \perp BC' \overset{T3\perp}{\Rightarrow} A'Q \perp BC'$, $B'Q = 6\sqrt{3}$ cm; $A'Q = 6\sqrt{7}$ cm; b) $\sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle AD'B$; $\sin(\sphericalangle AD'B) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; c) $\sphericalangle(AB', (BCC')) = \sphericalangle AB'B$; $\sphericalangle AB'B = 45°$. **17.** a) $d(B, (ACC')) = BO = 5\sqrt{2}$ cm; b) $\sphericalangle(BC, (ACC')) = \sphericalangle BCO = 45°$; c) $\sphericalangle(BC', (ACC')) = \sphericalangle(BC', C'O) = 30°$.

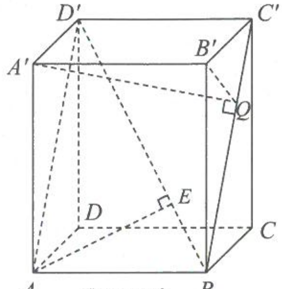


Figura 3

18. a) $\sphericalangle((D'AC), (ABC)) = \sphericalangle D'OD$, unde $AC \cap BD = \{O\}$; $\text{tg}(\sphericalangle D'OD) = \sqrt{2}$; b) $d(D, (D'AC)) = 2\sqrt{6}$ cm; c) Dacă $DQ \perp D'O$, $DQ \perp (D'AC) \Rightarrow pr_{(D'AC)}DC = QC \Rightarrow \sphericalangle(DC, (D'AC)) = \sphericalangle(DC, QC) = \sphericalangle DCQ$; $\sin(\sphericalangle DCQ) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **19.** a) $d(C', AD) = C'D$, $C'D = 16$ cm; b) $d(C, (C'AD)) = 4\sqrt{3}$ cm; c) $\sphericalangle((C'AD), (ABC)) = \sphericalangle C'DC = 60°$. **20.** a) Se arată cu teorema celor trei perpendiculare că $BE \perp SA \Rightarrow \sphericalangle((SAD), (SAB)) = \sphericalangle DEB$; $SO = 8$ cm; $BE = \dfrac{30\sqrt{39}}{13}$; $\sin(\sphericalangle DEB) = \dfrac{\sqrt{13}}{5}$; b) $DE = \dfrac{36}{\sqrt{13}}$ cm; $d(D, (SAB)) = DQ = \dfrac{36}{5}$ cm (figura 4).

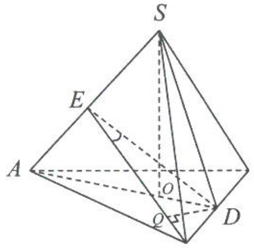


Figura 4

21. a) Din $VC \perp VB$ și $VC \perp VA \Rightarrow VC \perp (VAB) \Rightarrow d(C, (VAB)) = VC = 6\sqrt{2}$ cm; b) Din $BC \perp (VAD)$ și $BC \subset (VBC) \Rightarrow (VBC) \perp (VAD)$; c) $\sphericalangle((VAB), (VAD)) = \sphericalangle BVD = 45°$. **22.** a) $d(O, (VBC)) = QO$; $VQ = 3$ cm. Cu teorema catetei, $VO^2 = VQ \cdot VD \Rightarrow VD = 12$ cm; $OD = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AB = 36$ cm; b) $\mathcal{V}_{VABC} = \mathcal{V}_{AVBC} \Leftrightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot VO}{3} = \dfrac{\mathcal{A}_{VBC} \cdot d(A,(VBC))}{3} \Leftrightarrow \dfrac{BC \cdot AD}{2} \cdot VO = \dfrac{BC \cdot VD}{2} \cdot d(A, (VBC)) \Rightarrow AD \cdot VO = VD \cdot d(A, (VBC)) \Rightarrow d(A, (VBC)) = 9\sqrt{3}$ cm; c) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VDO$; $\sphericalangle VDO = 30°$ (figura 5).

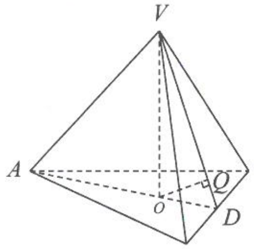


Figura 5

23. a) $AB = 12\sqrt{2}$ cm; b) Din $(VAD) \cap (VBC) \cap (ABC) = \varnothing$, $(VAD) \cap (ABC) = AD$, $(VBC) \cap (ABC) = BC$ și $(VBC) \cap (VAD) = d$ rezultă că $d \parallel AD \parallel BC$. Din $VM \perp BC$ și $d \parallel BC \Rightarrow VM \perp d$ (1). Din $VN \perp AD$ și $d \parallel AD \Rightarrow VN \perp d$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \sphericalangle((VBC), (VAD)) = \sphericalangle(VM, VN)$. Cu reciproca teoremei lui Pitagora obținem $MN^2 = VM^2 + VN^2 \Rightarrow \Delta MVN$ – dreptunghic $\Rightarrow \sphericalangle MVN = 90°$; c) $d(O, (VBC)) = OQ$, unde $OQ \perp VM$; $OQ = 6$ cm (figura 6). **24.** a) Cu teorema celor trei perpendiculare, $d(B', AD') = B'Q$, $A'Q = 4\sqrt{3}$ cm; $B'Q = 4\sqrt{15}$ cm; b) Cu teorema celor trei perpendiculare, $d(C', BD) = C'E = 4\sqrt{15}$ cm; c) $\sphericalangle(AD', (DCC')) = \sphericalangle(AD', DD') = \sphericalangle AD'D = 30°$ (figura 7).

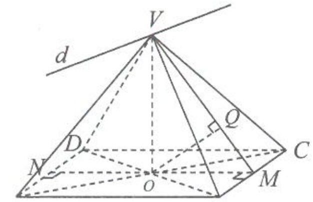


Figura 6

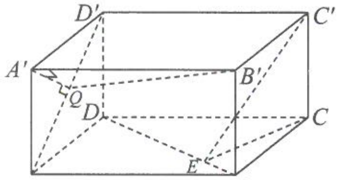


Figura 7

25. a) $\sphericalangle(B'D, (ABC)) = \sphericalangle B'DB$; $\text{tg}(\sphericalangle B'DB) = \dfrac{12}{25}$; $BD = 25$ cm; b) $d(C, (C'BD)) = CQ$, unde $CQ \perp C'E$, cu $C'E \perp BD$; $CE = 12$ cm; $CQ = 6\sqrt{2}$ cm; c) $\text{pr}_{(C'BD)}\, C = Q \Rightarrow \text{pr}_{(C'BD)}\, BC = BQ \Rightarrow \sphericalangle(BC, (C'BD)) = \sphericalangle(BC, BQ) = \sphericalangle CBQ$; $\sin(\sphericalangle CBQ) = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ (figura 8). **26.** a) $\sphericalangle((ACC'), (BCC')) = \sphericalangle(AC, BC) = 45°$; b) $\sphericalangle(BC', D'O) = \sphericalangle(AD', D'O) = 30°$; c) MO este linie mijlocie în $\Delta AD'C$, deci $MO \parallel D'C$, $BC' \parallel AD' \Rightarrow \Rightarrow \sphericalangle(BC', MO) = \sphericalangle(AD', D'C) = \sphericalangle AD'C = 60°$ (figura 9). **27.** a) $(D'BM) \cap (ABC) = BN$; $MC \parallel DD'$ şi $MC = \dfrac{DD'}{2} \Rightarrow MC$ – linie mijlocie în $\Delta D'DN \Rightarrow DC = CN$. Cum $BC = DC = CN = \dfrac{DN}{2} \Rightarrow \Delta DBN$ este dreptunghic, $\sphericalangle DBN = 90°$ (conform reciprocei teoremei medianei în triunghiul dreptunghic) $\Rightarrow \Rightarrow BD \perp BN \overset{\text{T3}\perp}{\Rightarrow} D'B \perp BN \Rightarrow d(D', BN) = D'B = 18\sqrt{3}$ cm; b) $\sphericalangle((D'BM), (ABC)) = \sphericalangle(D'B, BD) = \sphericalangle DBD'$; $\text{tg}(\sphericalangle DBD') = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (figura 10).

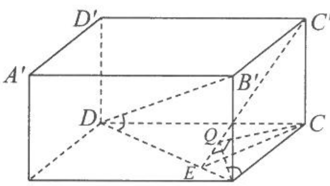


Figura 8

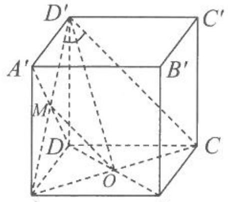


Figura 9

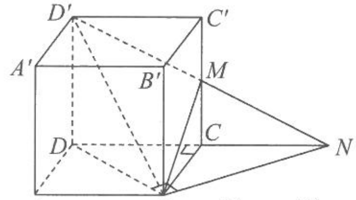


Figura 10

28. a) Fie $C'M \parallel A'C$, $M \in AC \Rightarrow \sphericalangle(BC', A'C) = \sphericalangle(BC', C'M) = \sphericalangle BC'M$. Cum $A'C'MC$ este paralelogram $\Rightarrow A'C' = CM = 6$ cm $\Rightarrow BC = AC = CM = \dfrac{AM}{2} \Rightarrow \Delta ABM$ este dreptunghic, $\sphericalangle ABM = 90° \Rightarrow \Rightarrow BM = 6\sqrt{3}$ cm; $BC' = MC' = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \Delta BMC'$ – echilateral $\Rightarrow \sphericalangle BC'M = 60°$; b) $d(A', BM) = A'B = 6\sqrt{3}$ cm (figura 11). **29.** a) $(A'BM) \cap (ABC) = BN$; $MC \parallel AA'$ şi $MC = \dfrac{AA'}{2} \Rightarrow MC$ – linie mijlocie în $\Delta A'AN \Rightarrow AC = CN$ şi $AC = BC \Rightarrow BC = AC = CN \Rightarrow \Delta ABN$ – dreptunghic, cu $\sphericalangle ABN = 90°$. Cum MO – linie mijlocie în $\Delta A'BN \Rightarrow MO \parallel BN$. Cum $BN \perp AB$ şi $BN \perp A'B \Rightarrow BN \perp (ABB') \Rightarrow \Rightarrow MO \perp (ABB')$; $BN = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow MO = 3\sqrt{3}$ cm; b) $d(A', BN) = A'B = 12$ cm; c) $\sphericalangle((A'MB), (ABC)) = \sphericalangle(A'B, AB) = \sphericalangle ABA' = 60°$ (figura 12). **30.** a) Cu teorema celor trei perpendiculare: $d(C, D'M) = CE$. În $\Delta DMD'$ avem $\dfrac{DE \cdot D'M}{2} = \mathcal{A}_{\Delta D'MD}$; $MD' = 12$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta D'MD} = 36\sqrt{3}$ cm^2; $DE = 6\sqrt{3}$ cm; $CE = 12$ cm; b) $(D'BM) \cap (ABC) = BN$; $d(D', BN) = D'B = 6\sqrt{14}$ cm; c) $\sphericalangle((D'MB), (ABC)) = \sphericalangle D'BD$; $\text{tg}(\sphericalangle D'BD) = \sqrt{6}$ (figura 13).

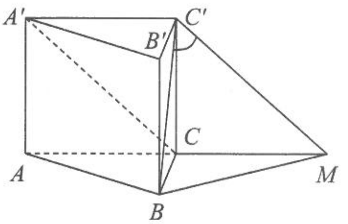


Figura 11

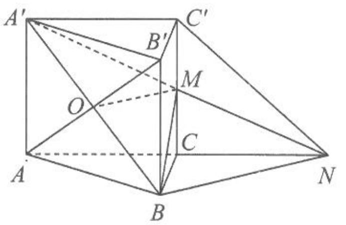


Figura 12

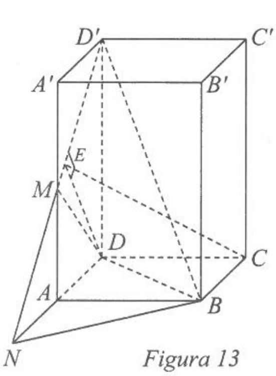


Figura 13

31. a) $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $VD = 12$ cm; $\mathcal{V}_{VABC} = \mathcal{V}_{AVBC} \Rightarrow$ d$(A, (VBC)) = 9\sqrt{3}$ cm; b) d$(O, (VBC)) =$ $= OQ = 3\sqrt{3}$ cm; c) Deoarece $\Delta MAB \equiv \Delta MAC$ (L.U.L.) $\Rightarrow \Delta MBC$ este isoscel cu MD mediană $\Rightarrow$ $\Rightarrow MD \perp BC \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MBC} = \dfrac{BC \cdot MD}{2}$. Cum $\mathcal{A}_{\Delta MBC}$ – minimă $\Rightarrow MD$ – minimă $\Rightarrow MD \perp VA \Rightarrow$ $\Rightarrow MD \cdot VA = AD \cdot VO$; $MD = \dfrac{18\sqrt{21}}{7} \Rightarrow AM = \dfrac{36\sqrt{7}}{7}$ cm; $\sphericalangle((MBC), (ABC)) = \sphericalangle(MD, AD) = \sphericalangle ADM$; $\sin(\sphericalangle ADM) = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ (figura 14). **32.** a) $\sphericalangle(SA, (ABC)) = \sphericalangle SAO$; $\cos(\sphericalangle SAO) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; b) $BC \perp SD$ și $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (SAD)$. Cu teorema celor trei perpendiculare se arată că $BM \perp SA$ și $CM \perp SA \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle((SAB), (SAC)) = \sphericalangle BMC$. Cum $\mathcal{A}_{\Delta MBC} = \dfrac{BC \cdot DM}{2} = \dfrac{BM \cdot CM \cdot \sin(\sphericalangle BMC)}{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle BMC) =$ $= \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (figura 15). **33.** a) $NC = ND = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \Delta CND$ – isoscel cu MN mediană $\Rightarrow MN \perp DC$; $MN = 6\sqrt{2}$ cm; b) Fie P mijlocul lui BC, MP – linie mijlocie $\Rightarrow MP \parallel BD$ și $MP = 6$ cm $\Rightarrow \sphericalangle(MN, BD) =$ $= \sphericalangle(MN, MP) = \sphericalangle NMP$. NP – linie mijlocie, $NP = 6$ cm. Cu reciproca teoremei lui Pitagora $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta MPN$ – dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle PMN = 45°$; c) În ΔABM isoscel, H este ortocentru $\Rightarrow HQ = HO$; $\Delta AQH \sim \Delta AOM \Rightarrow \dfrac{HQ}{OM} = \dfrac{HA}{AM} \Rightarrow \dfrac{x}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{6} - x}{6\sqrt{3}} \Rightarrow x = \sqrt{6}$, deci $HQ = \sqrt{6}$ cm (figura 16).

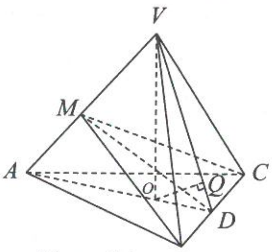


Figura 14

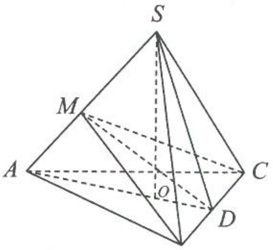


Figura 15

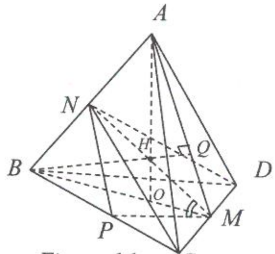


Figura 16

34. a) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = 60°$; b) Cum $BO \perp (VAC)$, fie $OQ \perp VC \overset{T3\perp}{\Rightarrow} BQ \perp VC \Rightarrow \sphericalangle((VBC), (VAC)) =$ $= \sphericalangle BQO$; $\sin(\sphericalangle BQO) = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **35.** a) $VA = VC = AC = 16$ cm; $AB = 8\sqrt{2}$ cm; $VO = 8\sqrt{3}$ cm; $\sphericalangle((VBC), (VDC)) = \sphericalangle DQB$, unde $OQ \perp VC$; $\mathcal{A}_{\Delta BQD} = \dfrac{BD \cdot QO}{2} = \dfrac{BQ \cdot DQ \cdot \sin(\sphericalangle BQD)}{2}$; $OQ =$ $= 4\sqrt{3}$ cm; $BQ = DQ = 4\sqrt{7}$ cm $\Rightarrow \sin(\sphericalangle BQD) = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$; b) $\mathcal{V}_{VABC} = \mathcal{V}_{AVBC}$; d$(A, (VBC)) = \dfrac{16\sqrt{21}}{7}$ cm; c) Dacă $AN \perp (VBC) \Rightarrow \text{pr}_{(VBC)}\, VA = VN \Rightarrow \sphericalangle(VA, (VBC)) =$ $= \sphericalangle(VA, VN) = \sphericalangle AVN$; $\sin(\sphericalangle AVN) = \dfrac{AN}{VA}$, unde $AN = $ d$(A, (VBC)) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin(\sphericalangle AVN) = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ (figura 17). **36.** a) $\mathcal{A}_{\Delta SAC} = \mathcal{A}_{ABCD} \Rightarrow SO =$ $= 12\sqrt{2}$ cm; $SC = 6\sqrt{10}$ cm; $OQ \perp SC$, $OQ = \dfrac{12\sqrt{10}}{5}$ cm; $BQ =$ $= DQ = \dfrac{18\sqrt{10}}{5}$ cm; $\sphericalangle((SBC), (SDC)) = \sphericalangle BQD$; $\dfrac{\sin(\sphericalangle BQD) \cdot BQ \cdot DQ}{2} = \dfrac{BD \cdot OQ}{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle BQD) =$

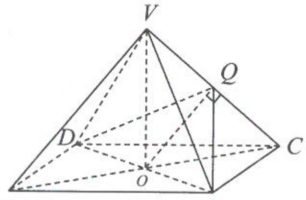


Figura 17

$= \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$; b) ΔPBD este isoscel pentru că $\Delta PCB \equiv \Delta PCD$ (L.U.L.) $\Rightarrow PO$ este și mediană, și înălțime $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta PBD} = \dfrac{BD \cdot PO}{2}$. Cum $\mathcal{A}_{\Delta PBD}$ – minimă $\Rightarrow PO$ – minimă $\Rightarrow PO \perp SC$. Cum $QO \perp SC \Rightarrow P = Q$; $\sphericalangle((PBD), (ABC)) = \sphericalangle POC$; $\cos(\sphericalangle POC) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **37.** a) $\Delta FAB \equiv \Delta CBE$ (C.C.), deci $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle ABF$. Cum $\sphericalangle BCE + \sphericalangle CEB = 90° \Rightarrow \sphericalangle ABF + \sphericalangle CEB = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BQE = 90° \Rightarrow CE \perp BF$, unde $CE \cap BF = \{Q\}$; b) $\sphericalangle(BF, AD') =$ $= \sphericalangle(BF, BC') = \sphericalangle C'BF$. $\mathcal{A}_{\Delta C'BF} = \dfrac{BF \cdot C'Q}{2} = \dfrac{BC' \cdot BF \cdot \sin(\sphericalangle C'BF)}{2}$; $CQ =$ $= 4\sqrt{5}$ cm, $C'Q = 6\sqrt{5}$ cm $\Rightarrow \sin(\sphericalangle C'BF) = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ (figura 18); c) $\mathcal{P}_{\Delta BMN} =$ $= MN + NB + BM = BN + MN + 15$; $\mathcal{P}_{\Delta BMN}$ – minim $\Rightarrow BN + MN$ – minim $\Rightarrow$ $\Rightarrow B$, N și M sunt coliniare; $\Delta MC'N \sim \Delta BCN \Rightarrow NC' = \dfrac{10}{3}$ cm (figura 19).

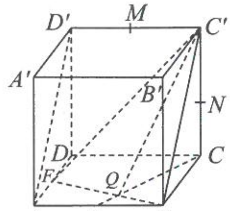


Figura 18

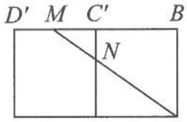


Figura 19

38. a) Cum $AO \perp (BDD') \Rightarrow \mathrm{pr}_{(BDD')} AO' = OO' \Rightarrow \sphericalangle(AO', (BDD')) = \sphericalangle AO'O$, $\mathrm{tg}(\sphericalangle AO'O) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) Dacă $CM \perp BE \overset{T3\perp}{\Rightarrow} C'M \perp BE \Rightarrow d(C', BE) = C'M$; $CM =$ $= \dfrac{24\sqrt{5}}{5}$ cm $\Rightarrow C'M = \dfrac{36\sqrt{5}}{5}$; c) $\sphericalangle((C'BE), (ABC)) = \sphericalangle C'MC$; $\mathrm{tg}(\sphericalangle C'MC) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (figura 20). **39.** a) În $\Delta AA'D'$, EG este linie mijlocie, deci $EG \parallel BC \Rightarrow B, C, G, E$ sunt coplanare; b) $\sphericalangle(BE, A'D') =$ $= \sphericalangle(BE, BC) = 90°$; c) Se arată că $C'F \parallel D'E \Rightarrow \sphericalangle(BD', C'F) = \sphericalangle(BD', ED') = \sphericalangle ED'B$; $D'E = BE = 12$ cm, $BD' = 8\sqrt{5}$ cm $\Rightarrow \Delta BD'E$ – isoscel. Dacă $M \in (BD')$ și $BM = MD' \Rightarrow EM = 8$ cm; $\mathrm{tg}(\sphericalangle ED'M) = \dfrac{2\sqrt{5}}{2}$ (figura 21). **40.** a) În $\Delta A'AD'$, PN este linie mijlocie $\Rightarrow PN \parallel A'D' \Rightarrow PN \parallel BC \Rightarrow B, C, N, P$ sunt coplanare; b) $\sphericalangle(PM, BC) = 90°$; c) $\sphericalangle(D'M, BC) = \sphericalangle(D'M, A'D') = \sphericalangle MD'A'$; $A'M = A'D' = 6$ cm și $D'A' \perp A'M \Rightarrow \Delta A'MD'$ – dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle MD'A' = 45°$ (figura 22).

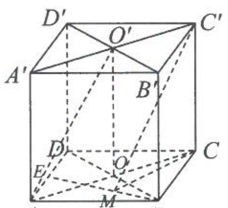


Figura 20

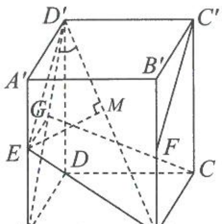


Figura 21

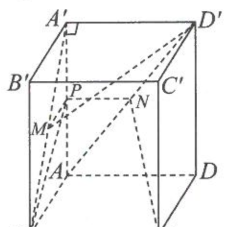


Figura 22

2. Prisma patrulateră regulată dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic

1. a) $\mathcal{A}_l = 192$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 320$ cm^2; $\mathcal{V} = 384$ cm^3; b) $l = 6$ cm; $\mathcal{A}_t = 360$ cm^2; $\mathcal{V} = 432$ cm^3; c) $l = 16$ cm; $\mathcal{A}_l = 640$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 1152$ cm^2; d) $l = 12$ cm; $\mathcal{A}_t = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; e) $l = 18$ cm; $h = 12$ cm; $\mathcal{V} = 3888$ cm^3; f) $h = 12$ cm; $\mathcal{A}_l = 672$ cm^2; $\mathcal{V} = 2352$ cm^3; g) $\mathcal{A}_l = 320\sqrt{2}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 40(8\sqrt{2} + 5)$ cm^2; $\mathcal{V} = 800\sqrt{2}$ cm^3; h) $h = 15$ cm; $\mathcal{A}_l = 1080$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 1728$ cm^2. **2.** a) $d = 15$ cm; $\mathcal{A}_l = 108(\sqrt{3} + 1)$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 36(5\sqrt{3} + 3)$ cm^2; $\mathcal{V} = 324\sqrt{3}$ cm^3; b) $b = 16$ cm; $\mathcal{A}_l = 840$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 1224$ cm^2; $\mathcal{V} = 2880$ cm^3; c) $c = 20$ cm; $\mathcal{A}_l = 840$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 1056$ cm^2; $\mathcal{V} = 2160$ cm^3; d) $a = 4$ cm; $\mathcal{A}_l = 360$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 400$ cm^2;

$\mathcal{V} = 400$ cm^3; e) $c = 11$ cm; $d = 29$ cm; $\mathcal{A}_t = 1368$ cm^2; $\mathcal{V} = 3168$ cm^3; f) $c = 21$ cm; $d = 3\sqrt{129}$ cm; $\mathcal{A}_l = 1512$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 2088$ cm^2; g) $b = 8$ cm; $d = 10\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{A}_l = 280$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 376$ cm^2; h) $b = 12$ cm; $c = 6$ cm; $d = 2\sqrt{70}$ cm; $\mathcal{V} = 720$ cm^3. **3.** a) $d = 20$ cm; b) $45°$; c) $\mathcal{A}_t = 200(2\sqrt{2}+1)$ cm^2; d) $\mathcal{V} = 1000\sqrt{2}$ cm^3. **4.** a) $d = 25$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 200(3\sqrt{2}+2)$ cm^2; c) $\mathcal{V} = 3000$ cm^3; d) d$(D, BD') = 12$ cm.

5. a) $\mathcal{A}_t = 1728$ cm^2; b) $\mathcal{V} = 4860$ cm^3; c) tg$(BC', (ABC)) = \dfrac{5}{6}$. **6.** a) $\mathcal{P}_b = 48\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; c) $\sin(AD', (CDD')) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **7.** a) $AB = 9$ cm; $AA' = 12$ cm; b) $\mathcal{V} = 972$ cm^3; c) $\sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle(AD', D'O) = \sphericalangle AD'O$; $\sin(\sphericalangle AD'O) = \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$. **8.** a) $\dfrac{AB}{4} = \dfrac{AA'}{8} = k$; $k = 2$ cm; $AB = 8$ cm; $AA' = 16$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 640$ cm^2; d$(D, (D'AC)) = DQ$, unde $DQ \perp D'O$; $DQ = \dfrac{DD' \cdot DO}{D'O} = \dfrac{16}{3}$ cm; d) $\sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle AD'B$; $\sin(\sphericalangle AD'B) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **9.** a) $AB = 8$ cm; $AA' = 4\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{V} = 256\sqrt{2}$ cm^3; c) $O'C = O'B = 8$ cm $\Rightarrow \Delta O'BC$ – echilateral $\Rightarrow$ d$(B, O'C) = 4\sqrt{3}$ cm; d) $\sin(\sphericalangle((O'AC), (O'BC))) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

10. a) $d = 24$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 21(2+\sqrt{3})$ cm^2; $\mathcal{V} = 1296$ cm^3; c) d$(A, BD') = \dfrac{3\sqrt{39}}{2}$ cm. **11.** a) $d = 75$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 9504$ cm^2; $\mathcal{V} = 58320$ cm^3; c) d$(C, AC') = 36$ cm. **12.** a) 12 cm; 8 cm; 6 cm; b) $\mathcal{A}_t = 432$ cm^2; c) $\mathcal{V} = 576$ cm^3. **13.** 26 cm. **14.** a) 29 cm; b) $\mathcal{V} = 400$ cm^3. **15.** $\mathcal{A}_t = 425$ cm^2.

16. a) $a + b + c = 38$; $\mathcal{A}_t = (a + b + c)^2 - d^2 \Rightarrow \mathcal{A}_t = 768$ cm^2; b) $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{12} = k \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \mathcal{V} = 1152$ cm^3; c) d$(A', AC) = A'A = 24$ cm. **17.** a) $\mathcal{A}_t = 16(\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$ cm^2; $\mathcal{V} = 96\sqrt{2}$ cm^3; b) d$(D', AC) = 6$ cm; c) tg$(\sphericalangle((D'AC), (ABC))) = \sqrt{2}$; d) d$(A', BC') = 4\sqrt{2}$ cm. **18.** a) $\mathcal{A}_t = 144(2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2})$ cm^2; $\mathcal{V} = 2592\sqrt{2}$ cm^3; b) d$(D', AC) = 18$ cm; c) d$(D, (D'AC)) = 6\sqrt{2}$ cm; d) tg$(\sphericalangle((D'AC), (ABC))) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **19.** a) $\mathcal{A}_t = 72(2\sqrt{3}+3)$ cm^2; $\mathcal{V} = 648$ cm^3; b) $\sphericalangle((D'AB), (ABC)) = \sphericalangle(D'AD) = 60°$; c) $\mathcal{A}_{MBD} = 18\sqrt{6}$ cm^2. **20.** a) $\mathcal{A}_t = (264\sqrt{3}+192)$ cm^2; $\mathcal{V} = 576\sqrt{3}$ cm^3; b) $\mathcal{A}_{AMN} = 30\sqrt{3}$ cm^2; c) $\sphericalangle((AMN), (ABC)) = \sphericalangle(MAD)$; tg$(\sphericalangle MAD) = \dfrac{4}{3}$. **21.** a) $\mathcal{A}_t = 288(2\sqrt{2}+1)$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728\sqrt{2}$ cm^3; b) d$(D, (D'AC)) = \dfrac{12\sqrt{10}}{5}$ cm; c) d$(B', AD') = 4\sqrt{15}$ cm; d) d$(A, BD') = 6\sqrt{3}$ cm.

22. a) $\mathcal{A}_t = 72(1+2\sqrt{2})$ cm^2; $\mathcal{V} = 216\sqrt{2}$ cm^3; b) d$(D', B'C) = 2\sqrt{15}$ cm; c) d$(B, (B'AC)) = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ cm.

23. a) $a^2 + b^2 = 100$; $a^2 + c^2 = 136$; $b^2 + c^2 = 164 \Rightarrow d = 10\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{V} = 480$ cm^3. **24.** a) Notăm $DM \cap AN = \{E\}$; $\Delta ADM \equiv \Delta BAN$ (C.C.) $\Rightarrow \sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle ADM$; cum $\sphericalangle ADM + \sphericalangle AMD = 90° \Rightarrow \sphericalangle NAB + \sphericalangle AMD = 90° \Rightarrow \sphericalangle AEM = 90° \Rightarrow AN \perp DM$; b) Cu T3$\perp$ se arată că $PE \perp DM \Rightarrow \sphericalangle((PMD), (ABC)) =$

$= \sphericalangle PEN$. Cum $AE = \dfrac{AD \cdot AM}{DM} \Rightarrow AE = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ cm $\Rightarrow EN = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ cm $\Rightarrow \text{tg}(\sphericalangle PEN) = \sqrt{5}$; c) $\mathcal{P}_{\Delta AQP}$ este minim dacă $AQ + QP$ este minimă $\Rightarrow A, Q, P$ – coliniare (în desfășurarea fețelor laterale) $\Rightarrow$ $\Rightarrow BQ = 6$ cm. **25.** a) Fie $DQ \perp D'O$. Se arată că $d(D, (D'AC)) = DQ$; $DQ = 4$ cm; b) $\text{pr}_{(D'AC)}\, DC =$ $= CQ \Rightarrow \sphericalangle(DC, (D'AC)) = \sphericalangle DCQ$; $\text{tg}(\sphericalangle DCQ) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; c) În $\Delta B'OD'$, $B'D' \cdot OO' = D'O \cdot d(B', D'O) \Rightarrow$ $\Rightarrow d(B', D'O) = 8$ cm; d) $\mathcal{A}_t = 128(\sqrt{2}+1)$ cm^2; $\mathcal{V} = 256\sqrt{2}$ cm^3.

3. Cubul

1. a) $R = 3\sqrt{2}$ cm; $a_b = 3$ cm; $d = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 216$ cm^2; $\mathcal{V} = 216$ cm^3; b) $l = 8$ cm; $a_b = 4$ cm; $d =$ $= 8\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 384$ cm^2; $\mathcal{V} = 512$ cm^3; c) $l = 5$ cm; $R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm; $a_b = \dfrac{5}{2}$ cm; $d = 5\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{V} =$ $= 125$ cm^3; d) $l = 10$ cm; $R = 5\sqrt{2}$ cm; $a_b = 5$ cm; $\mathcal{A}_t = 600$ cm^2; $\mathcal{V} = 1000$ cm^3; e) $l = 12$ cm; $R =$ $= 6\sqrt{2}$ cm; $a_b = 6$ cm; $d = 12\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 864$ cm^2; f) $l = 16$ cm; $R = 8\sqrt{2}$ cm; $d = 16\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t =$ $= 1536$ cm^2; $\mathcal{V} = 4096$ cm^3; g) $l = 10$ cm; $a_b = 5$ cm; $d = 10\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 600$ cm^2; $\mathcal{V} = 1000$ cm^3. **2.** a) $l = 10$ cm; b) $\mathcal{A} = 600$ cm^2; $\mathcal{V} = 1000$ cm^3; c) $d = 10\sqrt{3}$ cm; d) $\sphericalangle(AD', A'B) = \sphericalangle(AD', D'C) = 60°$. **3.** a) $l = 12$ cm; $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; b) $\sphericalangle(AD', (BDD')) = 30°$; c) $d(D', B'C) = 6\sqrt{6}$ cm. **4.** a) $l = 8$ cm; $\mathcal{A}_t = 384$ cm^2; b) $\text{pr}_{(ADD')}\, BD' = D'A \Rightarrow \sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle BD'A$; $\text{tg}(\sphericalangle BD'A) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sphericalangle(CD, (BDD')) =$ $= \sphericalangle(CD, OD) = \sphericalangle ODC = 45°$. **5.** a) $l = 6$ cm; b) $d = 6\sqrt{3}$ cm; c) $\mathcal{A} = 216$ cm^2; $\mathcal{V} = 216$ cm^3; d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **6.** a) $l = 16$ cm; b) $d = 12\sqrt{3}$ cm; c) $\mathcal{A} = 1536$ cm^2; $\mathcal{V} = 4096$ cm^3; d) $\sphericalangle(AD', A'B) = \sphericalangle(AD', D'C) =$ $= 60°$. **7.** a) O_1O_2 este linie mijlocie în $\Delta D'AC \Rightarrow O_1O_2 \parallel AC \Rightarrow AC = 2O_1O_2 \Rightarrow AC = 8\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow l = 8$ cm; $\mathcal{A} = 384$ cm^2; $\mathcal{V} = 512$ cm^3; b) $O_1O_2 \parallel AC$, $AC \subset (B'AC) \Rightarrow O_1O_2 \parallel (B'AC)$; c) $\sphericalangle(O_1O_2, AB) =$ $= \sphericalangle(AC, AB) = \sphericalangle CAB = 45°$. **8.** a) $l = 12$ cm; b) $\mathcal{A} = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; c) $\sphericalangle((AD', (BDD')) =$ $= \sphericalangle AD'O = 30°$. **9.** a) $l = 6$ cm; b) $\mathcal{A} = 216$ cm^2; c) $d(A, (A'BD)) = 2\sqrt{3}$ cm. **10.** a) $l = 10$ cm; b) $\mathcal{V} =$ $= 1000$ cm^3; c) $d(C', A'D) = 5\sqrt{6}$ cm. **11.** a) $d = 10\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A} = 600$ cm^2; $\mathcal{V} = 1000$ cm^3; b) $MP =$ $= 5\sqrt{2}$ cm; $MN = BC' = 10\sqrt{2}$ cm; $NP = 5\sqrt{6}$ cm $\Rightarrow NP^2 + MP^2 = MN^2 \Rightarrow \Delta MNP$ – dreptunghic $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MNP} = 25\sqrt{3}$ cm^2; c) $\cos u = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **12.** a) $\mathcal{A} = 384$ cm^2; $\mathcal{V} = 512$ cm^3; b) $d(C', (BDD')) = C'O' =$ $= 4\sqrt{2}$ cm; c) $d(A, (D'BC)) = AQ$, unde $AQ \perp A'B$; $AQ = 4\sqrt{2}$ cm. **13.** a) Dacă notăm $AB = a$, atunci $\mathcal{A}_{\Delta NAB} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow a = 4$; $\mathcal{A} = 96$ cm^2; $\mathcal{V} = 64$ cm^3; b) Dacă $DM \perp NC$, cu teorema celor trei perpendiculare $\Rightarrow AM \perp CN \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ANC} = \dfrac{NC \cdot AM}{2}$; $NC = 2\sqrt{5}$ cm; $DM = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ cm; $AM = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta ANC} = 12$ cm^2 (figura 23). **14.** a) $\mathcal{A} = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; b) $\text{pr}_{(O'BD)}\, O'A = OO' \Rightarrow \sphericalangle(O'A, (O'BD)) = \sphericalangle AO'O$; $\text{tg}(\sphericalangle AO'O) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

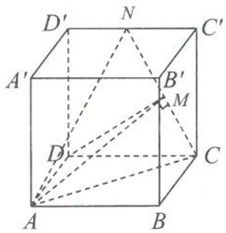


Figura 23

c) $d(A, O'D) = 2\sqrt{30}$ cm; d) $\sin(\sphericalangle((O'AD), (O'BD))) = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **15.** a) Cum OO_1 este linie mijlocie în $\Delta AD'C \Rightarrow D'C = 12\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow l_{cub} = 12$ cm; b) $\mathcal{A} = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; c) Cum $(D'AC) \perp (BDD')$ și $(D'AC) \cap (BDD') = D'O \Rightarrow d(B', (D'AC)) = d(B', D'O)$; $D'O \cdot d(B', D'O) = B'D' \cdot OO' \Rightarrow d(B', D'O) = 8\sqrt{3}$ cm; d) $AD' \parallel BC' \Rightarrow \sphericalangle(D'O, BC') = \sphericalangle(D'O, D'A) = \sphericalangle AD'O = 30°$. **16.** a) $\mathcal{A}_t = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; $d = 12\sqrt{3}$ cm; b) $EF = 6\sqrt{2}$ cm; $FG = 12\sqrt{2}$ cm; $EG = 6\sqrt{6}$ cm. Cum $FG^2 = EF^2 + EG^2 \Rightarrow \Delta FEG$ – dreptunghic, $\sphericalangle E = 90° \Rightarrow \mathcal{A}_{EFG} = 36\sqrt{3}$ cm^2; c) $(ABC) \parallel (A'B'C')$; dacă $d_1 = (EFG) \cap (ABC) \Rightarrow EF \parallel d_1$. Cum $EG \perp EF \Rightarrow EG \perp d_1 \Rightarrow \sphericalangle((EFG), (ABC)) = \sphericalangle NGE$; $\cos(\sphericalangle NGE) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; d) $BC' \parallel AD' \Rightarrow \sphericalangle(BC', AB') = \sphericalangle(AD', AB') = \sphericalangle D'AB'$. Cum $\Delta D'AB'$ – echilateral $\Rightarrow \sphericalangle D'AB' = 60°$; e) $pr_{(ACD')} D = Q$, unde $DQ \perp D'O \Rightarrow pr_{(ACD')} DC = QC \Rightarrow \sphericalangle(DC, (ACD')) = \sphericalangle DCQ$; $\sin(\sphericalangle DCQ) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **17.** a) Dacă notăm $l_{cub} = a$, atunci $\mathcal{A}_{MAB} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2} \Rightarrow l = 6$ cm; $\mathcal{A}_t = 216$ cm^2; $\mathcal{V} = 216$ cm^3; b) Dacă $DN \perp MC$, $DN = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ cm. Cu teorema celor trei perpendiculare se arată că $AN \perp MC$, deci $d(A, MC) = AN = \dfrac{18\sqrt{5}}{5}$ cm; c) $\mathcal{A}_{\Delta MAC} = 27$ cm^2 (figura 24).

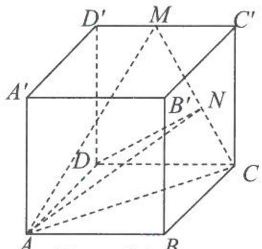


Figura 24

4. Prisma triunghiulară regulată

1. a) $R = 4\sqrt{3}$ cm; $a_b = 2\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 288$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 72(\sqrt{3}+4)$ cm^2; $\mathcal{V} = 288\sqrt{3}$ cm^3; b) $l = 18$ cm; $a_b = 3\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 324$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 162(\sqrt{3}+2)$ cm^2; $\mathcal{V} = 486\sqrt{3}$ cm^3; c) $l = 12$ cm; $R = 4\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 360$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 72(\sqrt{3}+5)$ cm^2; $\mathcal{V} = 360\sqrt{3}$ cm^3; d) $l = 18$ cm; $R = 6\sqrt{3}$ cm; $a_b = 3\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 54(10+3\sqrt{3})$ cm^2; $\mathcal{V} = 810\sqrt{3}$ cm^3; e) $R = 3\sqrt{3}$ cm; $a_b = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm; $h = 12$ cm; $\mathcal{A}_t = \dfrac{81(\sqrt{3}+8)}{2}$ cm^2; $\mathcal{V} = 243\sqrt{3}$ cm^3; f) $l = 12$ cm; $a_b = 2\sqrt{3}$ cm; $h = 9$ cm; $\mathcal{A}_l = 324$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 36(2\sqrt{3}+9)$ cm^2; $\mathcal{V} = 324\sqrt{3}$ cm^3; g) $l = 6$ cm; $R = 2\sqrt{3}$ cm; $a_b = \sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 72\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 90\sqrt{3}$ cm^2; h) $l = 6$ cm; $a_b = \sqrt{3}$ cm; $h = 20$ cm; $\mathcal{A}_t = 18(20+\sqrt{3})$ cm^2; $\mathcal{V} = 180\sqrt{3}$ cm^3. **2.** a) $\mathcal{A}_t = 32(3+\sqrt{3})$ cm^2; $\mathcal{V} = 64\sqrt{3}$ cm^3; b) $d(D, A'B') = DE$; $D'E = \dfrac{C'M}{2}$ pentru că $D'E$ este linie mijlocie în $\Delta MB'C' \Rightarrow D'E = 2\sqrt{3}$ cm; $DE = 2\sqrt{7}$ cm; c) Cum $AA' \perp A'D'$ și $AA' \perp A'B' \Rightarrow \sphericalangle((DAA'), (ABB')) = \sphericalangle D'A'B' = 30°$ (figura 25). **3.** a) $\mathcal{A}_l = 486$ cm^2; $\mathcal{V} = 729\sqrt{3}$ cm^3; b) 18 cm. **4.** a) $\mathcal{A}_l = 288\sqrt{3}$ cm^2; b) $\mathcal{V} = 648$ cm^3; c) $3\sqrt{6}$ cm. **5.** a) $\text{tg}(\sphericalangle ABA') = \dfrac{AA'}{AB}$; $AA' = 8\sqrt{3}$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 224\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 384$ cm^3. **6.** a) $AB = 8$ cm;

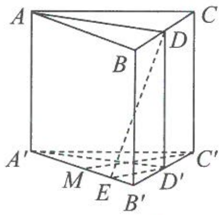


Figura 25

b) $\mathcal{A}_t = 16(15+2\sqrt{3})$ cm²; c) $d(C', AB) = 2\sqrt{37}$ cm. **7.** a) $AB = 6\sqrt{3}$ cm; $AA' = 6$ cm; b) $\mathcal{V} = 162\sqrt{3}$ cm³; c) $\text{tg}(\sphericalangle((A'BC), (ABC))) = \dfrac{2}{3}$. **8.** a) $AA' = 8$ cm; b) $\mathcal{V} = 288\sqrt{3}$ cm³; c) $A'C = 4\sqrt{13}$ cm.

9. a) Cum $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot l = 432\sqrt{3} \Rightarrow l = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 72(\sqrt{3}+6)$ cm²; c) $d(B', AD) = B'D = 6\sqrt{5}$ cm; d) $AD \perp (BCC')$, $AD \subset (ADB') \Rightarrow (ADB') \perp (BCC') \Rightarrow \sphericalangle((BCC'), (ADB')) = 90°$. **10.** a) $l = 6$ cm; $\mathcal{A}_t = 18(\sqrt{3}+6)$ cm²; b) Cum $MN \parallel A'C$ şi $PQ \parallel BC' \Rightarrow \sphericalangle(MN, PQ) = \sphericalangle(A'C, BC') = \sphericalangle BC'E$; $BC' = EC' = 6\sqrt{2}$ cm; $BE = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{BC'E} = 9\sqrt{15}$ cm²; $9\sqrt{15}$ cm² $= \dfrac{BC \cdot EC' \cdot \sin(\sphericalangle BC'E)}{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle BC'E) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ (figura 26).

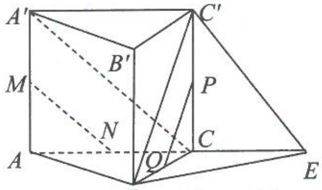


Figura 26

11. a) $\mathcal{A}_t = 384$ cm²; $\mathcal{V} = 256\sqrt{3}$ cm³; b) $\mathcal{A}_{\Delta BMC'} = 16\sqrt{15}$ cm²; c) Dacă $MC' \cap AC = \{N\}$, se arată că $AN = 8$ cm şi $(ABC) \cap (MBC') = BN$, $BN \perp BC$; $d(C', BN) = C'B = 8\sqrt{5}$ cm. **12.** a) $\mathcal{A}_t = 16(2\sqrt{3} + 9)$ cm²; $\mathcal{V} = 96\sqrt{3}$ cm³; b) $\dfrac{1}{25}$. **13.** a) $AB = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 36(9+2\sqrt{3})$ cm²; $\mathcal{V} = 324\sqrt{3}$ cm³; c) $d(B', CD) = B'D = 3\sqrt{13}$ cm. **14.** a) $AA' = 4$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 32(3+\sqrt{3})$ cm²; c) $\sphericalangle((B'AC), (ABC)) = 30°$. **15.** $\sphericalangle(A'C, BC') = \sphericalangle(C'M, BC') = 60° \Rightarrow \Delta BMC'$ – echilateral. Se arată că ΔABM este dreptunghic (pentru că $AC = MC = BC$); $BM = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow CC' = 6\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{V} = 54\sqrt{6}$ cm³ (figura 27). **16.** a) $AA' = 9$ cm; $\mathcal{A}_t = 18(9+\sqrt{3})$ cm²; b) $\mathcal{V} = 81\sqrt{3}$ cm³; c) $A'C = 3\sqrt{13}$ cm.

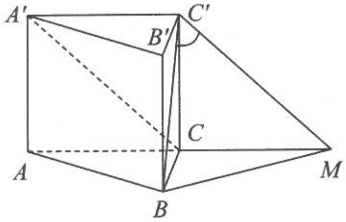


Figura 27

17. a) $\mathcal{A}_l = 144$ cm²; $\mathcal{A}_t = 18(\sqrt{3}+8)$ cm²; $\mathcal{V} = 72\sqrt{3}$ cm³; b) $d(C', AB) = \sqrt{91}$ cm; c) $\sin(\sphericalangle((C'AB), (ABC))) = \dfrac{8}{\sqrt{91}}$. **18.** a) $(BMN) \cap (ACC') \cap (ABC) = \varnothing$; $(BMN) \cap (ACC') = MN$; $(BMN) \cap (ABC) = d$; $(ACC') \cap (ABC) = AC \Rightarrow d \parallel MN \parallel AC$; $d(M, d) = MP$, unde $AP \perp d$; $MP = 3\sqrt{6}$ cm; b) ΔBMN – isoscel cu $BN = BM = 3\sqrt{7}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta BMN} = 9\sqrt{6}$ cm²; c) Dacă $AQ \perp MP \Rightarrow d(A, (BMN)) = AQ$; $AQ = \dfrac{6\sqrt{21}}{7}$ cm. **19.** a) $AB = 16\sqrt{3}$ cm; $d(C', AD) = C'D$; $C'D = 4\sqrt{21}$ cm; b) $d(A, (A'BC)) = AQ$, unde $AQ \perp DD'$, $AQ = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ cm; c) $\mathcal{A}_{\Delta A'MG} = \mathcal{A}_{\Delta A'AD} - \mathcal{A}_{\Delta A'AG} - \mathcal{A}_{\Delta MGD} = 24$ cm².

Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. Pe lungime se pot aşeza 5 cutii, pe lăţime se pot aşeza trei rânduri de câte 5 cutii, iar în înălţime două rânduri de câte 15 cutii ⇒ 30 de cutii. **2.** 5,8 ℓ. **3.** 0,2 cm. **4.** a) $\mathcal{V} = 90$ m³ = 90000 ℓ = 900 hl; b) 1,2 dm = 12 cm. **5.** 9000 cm³. **6.** $\mathcal{V} = 386{,}75$ m³; 38 de elevi. **7.** a) 126 ℓ; b) Cea mai mare distanţă posibilă între doi peşti din acvariu este diagonala paralelipipedului, care este $\sqrt{101} < \sqrt{121} \le 11$. **8.** 35 de basculante. **9.** 9 cm. **10.** 720 de cărămizi. **11.** a) $l = 4$ dm; b) Lungimea drumului străbătut de furnică este $AA' = \sqrt{356}$; $\sqrt{324} < \sqrt{356} < \sqrt{361} \Rightarrow 18 < \sqrt{356} < 19$. **12.** a) 2880 ℓ;

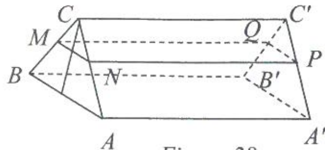


Figura 28

b) 25 dm; c) 40 cm. **13.** $\mathcal{V}_{CMNC'QP} = \frac{1}{4}\cdot\mathcal{V}_{ABCA'B'C'}$; $\mathcal{A}_{CMN}\cdot CC' = \frac{1}{4}\cdot\mathcal{A}_{ABC}\cdot CC' \Rightarrow CM = 12$ dm, aşadar MN este linie mijlocie, deci apa se ridică la jumătatea înălţimii, adică $6\sqrt{3}$ dm (figura 28). **14.** a) $\mathcal{A}_t = 72(12+\sqrt{3})$ dm^2; cum $72(12+\sqrt{3}) < 990 \mid :9 \Leftrightarrow 8(12+\sqrt{3}) < 110 \Leftrightarrow 8\sqrt{3} < 14 \Leftrightarrow 192 < 196$ (A); b) $\mathcal{V} = 864\sqrt{3}$ dm^3. **15.** a) Suprafaţa pereţilor din tablă este egală cu $18(16+\sqrt{3})$ m^2; $18(16+\sqrt{3}) < 319{,}32$ $m^2 < 320$ m^2; b) $\mathcal{V} = 36(8+3\sqrt{3})$ m^3.

Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

Subiectul I. 1. $d = 25$ cm. **2.** $\frac{4}{3}$. **3.** 216 cm^2. **4.** 8 cm. **5.** $\mathcal{V} = 360\sqrt{3}$ cm^3. **6.** 384 cm^2. **7.** 384 cm^2. **8.** $d = 20\sqrt{2}$ cm. **9.** $\mathcal{V} = 576$ cm^3.

Subiectul al II-lea. 1. a) $d = 12\sqrt{2}$ cm; b) $d(A, BC') = AB$; c) $pr_{(ABC)} AC' = AC \Rightarrow \sphericalangle(AC', (ABC)) = \sphericalangle(AC', AC) = 45°$. **2.** a) $AD' = 2x$; $\Delta C'D'O$ – dreptunghic, deci $C'O = x\sqrt{2} \Rightarrow x = 12$ cm; b) $\Delta BOC'$ este dreptunghic isoscel cu $BO = C'O = 12\sqrt{2}$ cm şi $BC' = 24$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta BOC'} = 144$ cm^2; c) Dacă $CD' \cap D'C = \{O_1\} \Rightarrow OO_1$ este linie mijlocie în $\Delta D'AC \Rightarrow OO_1 \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(BO, AC) = \sphericalangle BOO_1$. Cum ΔBO_1O – isoscel cu laturile $OO_1 = 6\sqrt{2}$ cm şi $BO = O_1B = 12\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta BOO_1} = 18\sqrt{15}$ cm. Dar $\mathcal{A}_{\Delta BOO_1} = \frac{BO\cdot OO_1\cdot\sin(\sphericalangle BOO_1)}{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle BOO_1) = \frac{\sqrt{15}}{4}$; d) $\mathcal{A}_t = 288(1+2\sqrt{3})$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728\sqrt{3}$ cm^3.
3. a) Dacă $BD' \perp AC' \Rightarrow BCD'A'$ – pătrat $\Rightarrow BC = A'B = 12$ cm, $\sphericalangle((B'AD), (ABC)) = \sphericalangle B'AB = 60° \Rightarrow BC = 12$ cm şi $BB' = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 72(2+3\sqrt{3})$ cm^2; $\mathcal{V} = 432\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle AD'B$; $\sin(\sphericalangle AD'B) = \frac{\sqrt{2}}{4}$; c) Dacă $AP \perp MC$, atunci $AP = \frac{12\sqrt{17}}{17}$ cm şi $A'P = \frac{6\sqrt{55}}{\sqrt{17}}$ cm.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. 376 cm^2. **2.** $\mathcal{A}_t = 400$ cm^2. **3.** $\mathcal{A}_{cub} = 384$ cm^2. **4.** $d = 10\sqrt{3}$ cm. **5.** $l = 24$ cm. **6.** $h = 15$ cm. **7.** $d = 18$ cm. **8.** $\mathcal{V} = 343$ cm^3. **9.** $\mathcal{A}_l = 288$ cm^2.

Subiectul al II-lea. 1. a) $\mathcal{A} = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; b) $d(M, NB) = MR$. Se calculează $\mathcal{A}_{\Delta NPB}$; $\mathcal{A}_{\Delta NPB} = 54$ cm^2; $\mathcal{A}_{\Delta NPB} = \frac{NB\cdot PR}{2} \Rightarrow PR = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ cm; $MR = \frac{6\sqrt{145}}{5}$ cm; c) $\sphericalangle((MNB), (ABC)) = \sphericalangle(MR, PR) = \sphericalangle MRP$; $tg(\sphericalangle MRP) = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ (figura 29). **2.** a) $\mathcal{A}_t = 1720$ cm^2; $\mathcal{V} = 4800$ cm^3; b) $\mathcal{A}_{\Delta A'DC'} = \frac{A'D\cdot C'M}{2}$; $A'D = 25$ cm; cu $R_1T3\perp$ rezultă că $D'M \perp A'D$, $D'M = 12$ cm; $C'M = 20$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta A'DC'} = 250$ cm^2; c) $d(D', (A'DC')) = D'Q$, unde $D'Q \perp MC'$; $D'Q = 9{,}6$ cm (figura 30). **3.** a) $\mathcal{A}_t = 72(6\sqrt{2}+\sqrt{3})$ cm^2; $\mathcal{V} = 432\sqrt{6}$ cm^3; b) Dacă $C'M \parallel A'C$,

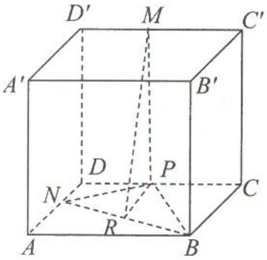


Figura 29

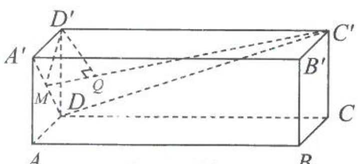


Figura 30

$M \in AC \Rightarrow \sphericalangle(A'C, BC') = \sphericalangle(BC', C'M) = \sphericalangle BC'M$. Cum $BC' = 12\sqrt{3}$ cm, $MC' = 12\sqrt{3}$ cm și $BM = 12\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \Delta BC'M$ este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle BC'M = 60°$; c) S-a arătat la subpunctul b) că ΔABM este dreptunghic $\Rightarrow$ d(A', BM) = $A'B$ (cu T3⊥) și $A'B = 12\sqrt{3}$ cm.

TESTUL 3

Subiectul I. 1. 216 cm^3. **2.** 15 cm. **3.** 18 cm. **4.** 10 cm. **5.** 512 cm^3. **6.** 768 cm^2. **7.** 288 cm^2. **8.** 480 cm^2. **9.** $10\sqrt{2}$ cm.

Subiectul al II-lea. 1. a) $\sphericalangle((C'AD), (ABC)) = \sphericalangle C'DC = 45°$; b) $d(C, (C'DA)) = CM$, unde $CM \perp C'D$; $CM = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm; c) $\sphericalangle((A'BC), (BCC')) = \sphericalangle A'DD'$, unde $DD' \perp B'C'$. Se calculează $\sphericalangle A'DA = 30° \Rightarrow \Rightarrow \sphericalangle A'DD' = 90° - 30° = 60°$. **2.** a) $\mathcal{A}_t = 1710$ cm^2; $\mathcal{V} = 4500$ cm^3; b) Dacă notăm $P = pr_{(ABC)} N$, cu reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că ΔDMP este dreptunghic, $\sphericalangle DMP = 90° \overset{T3\perp}{\Rightarrow} d(N, MD) = NM$, $NM = 25$ cm; c) $tg(\sphericalangle((NMD), (ABC))) = \frac{3}{4}$. **3.** a) $\mathcal{A} = 432$ cm^2; $\mathcal{V} = 432\sqrt{2}$ cm^3; b) Se arată că $BC' \perp (B'DC)$, deci $BC' \perp B'D$; c) $BD \perp AC$ și $BD \perp C'O$, unde $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow BD \perp AC$ și cum $BD \subset (C'BD) \Rightarrow (C'BD) \perp (ACC')$.

5. Piramida regulată

1. a) $a_p = 8\sqrt{3}$ cm; $m = 4\sqrt{21}$ cm; $R = 8\sqrt{3}$ cm; $a_b = 4\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 288\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 432\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 576\sqrt{3}$ cm^3; b) $l = 16\sqrt{3}$ cm; $m = 2\sqrt{73}$ cm; $R = 16$ cm; $a_b = 8$ cm; $\mathcal{A}_l = 240\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 432\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 384\sqrt{3}$ cm^3; c) $h = 6\sqrt{3}$ cm; $a_p = 12$ cm; $m = 6\sqrt{7}$ cm; $R = 12$ cm; $a_b = 6$ cm; $\mathcal{A}_t = 324\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 648$ cm^3; d) $l = 12\sqrt{3}$ cm; $a_p = 12$ cm; $m = 6\sqrt{7}$ cm; $a_b = 6$ cm; $\mathcal{A}_l = 216\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 324\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 648$ cm^3; e) $h = 3\sqrt{3}$ cm; $a_p = 3\sqrt{6}$ cm; $m = 3\sqrt{15}$ cm; $R = 6\sqrt{3}$ cm; $a_b = 3\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 81\sqrt{6}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 81\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ cm^2; f) $l = 12$ cm; $h = 4\sqrt{6}$ cm; $a_p = 6\sqrt{3}$ cm; $R = 4\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 108\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 144\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 144\sqrt{2}$ cm^3. **2.** a) $a_p = 15$ cm; $m = 3\sqrt{41}$ cm; $R = 12\sqrt{2}$ cm; $a_b = 12$ cm; $\mathcal{A}_l = 720$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 1296$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728$ cm^3; b) $l = 18$ cm; $m = 3\sqrt{34}$ cm; $R = 9\sqrt{2}$ cm; $a_b = 9$ cm; $\mathcal{A}_l = 540$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1296$ cm^3; c) $l = 18$ cm; $h = 12$ cm; $a_p = 15$ cm; $m = 3\sqrt{34}$ cm; $R = 9\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{A}_t = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1296$ cm^3; d) $l = 12$ cm; $a_p = 6\sqrt{5}$ cm; $m = 6\sqrt{6}$ cm; $R = 6\sqrt{2}$ cm; $a_b = 6$ cm; $\mathcal{A}_l = 144\sqrt{5}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 144(\sqrt{5}+1)$ cm^2; e) $l = 24$ cm; $h = 16$ cm; $a_p = 20$ cm; $m = 4\sqrt{34}$ cm; $R = 12\sqrt{2}$ cm; $a_b = 12$ cm; $\mathcal{V} = 3072$ cm^3; f) $l = 18$ cm; $h = 9\sqrt{2}$ cm; $a_p = 9\sqrt{3}$ cm; $a_b = 9$ cm; $\mathcal{A}_l = 324\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 324(\sqrt{3}+1)$ cm^2; $\mathcal{V} = 972\sqrt{2}$ cm^3. **3.** $\mathcal{A}_l = 972$ cm^2; $\mathcal{V} = 1458\sqrt{3}$ cm^3. **4.** $\mathcal{A}_t = 216(\sqrt{3}+2)$ cm^2; $\mathcal{V} = 432\sqrt{3}$ cm^3. **5.** $\mathcal{A}_t = 384\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 768\sqrt{2}$ cm^3. **6.** $l = 12$ cm; $\mathcal{V} = 1296\sqrt{3}$ cm^3. **7.** a) $AB = 36$ cm; $\mathcal{A}_t = 324(\sqrt{3}+2)$ cm^2; $\mathcal{V} = 648\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = 30°$; c) $d(A, (VBC)) = 9\sqrt{3}$ cm. **8.** a) $\mathcal{A}_t = 432$ cm^2; $\mathcal{V} = 288\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = 60°$; c) $tg(\sphericalangle VAO) = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **9.** a) $\mathcal{A}_l = 81\sqrt{7}$ cm^2; $\mathcal{V} = 162\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sphericalangle SAO = 30°$; c) $d(A, (VBC)) = \frac{18\sqrt{21}}{7}$ cm. **10.** a) $\mathcal{A}_l = 200$ cm^2;

$\mathcal{V} = \dfrac{500\sqrt{3}}{3}$ cm^3; b) tg$(\sphericalangle VAO) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; c) $pr_{(VAC)}\, VB = VO \Rightarrow \sphericalangle(VB, (VAC)) = \sphericalangle OVB$; tg$(\sphericalangle OVB) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **11.** a) $AB = 12$ cm; $\mathcal{A}_t = 144\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 144\sqrt{2}$ cm^3; b) $\sin(\sphericalangle((SAD), (SAB))) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **12.** a) $\mathcal{A}_t = 324\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 972\sqrt{2}$ cm^3; b) Dacă $OM \perp VC$, se demonstrează cu T3$\perp$ că $BM \perp VC \Rightarrow \sphericalangle((VBC), (VAC)) = \sphericalangle(OM, BM) = \sphericalangle OMB$; $\cos(\sphericalangle((VBC), (VAC))) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; c) tg$(\sphericalangle OMV) = \sqrt{2}$. **13.** a) $\mathcal{A}_t = 432$ cm^2; $\mathcal{V} = 432\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sphericalangle((VAB), (ABC)) = 30°$. **14.** a) $\mathcal{A}_t = 972$ cm^2; $\mathcal{V} = 1458\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sin(\sphericalangle((SAB), (SDE))) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** a) $\mathcal{A}_t = 150\sqrt{7}$ cm^2; $\mathcal{V} = 500\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sphericalangle VAO = 45°$. **16.** a) $\mathcal{V} = \dfrac{243}{4}$ cm^3; $VD = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ cm; $\mathcal{A}_t = \dfrac{81\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5}+1)$ cm^2; b) $d(A,(VBC)) = \dfrac{9\sqrt{15}}{5}$ cm; c) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO = 45°$. **17.** a) $VO = 18\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{V} = 2592\sqrt{2}$ cm^3; $\mathcal{A}_t = 432(\sqrt{7}+1)$ cm^2; b) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO = 60°$; c) $\mathcal{V}_{VBCD} = \mathcal{V}_{BVCD} \Rightarrow d(B, (VDC)) = \dfrac{36\sqrt{14}}{7}$ cm. **18.** a) $VO = 8$ cm; $\mathcal{V} = 3888$ cm^3; $a_p = 9\sqrt{6}$ cm; $\mathcal{A}_t = 648(\sqrt{3}+1)$ cm^2; b) tg$(\sphericalangle((VBC), (ABC))) = \sqrt{2}$; c) $\Delta BCM \equiv \Delta DCM$ (L.U.L.) $\Rightarrow BM \equiv DM \Rightarrow MO \perp BD \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MBD} = \dfrac{BD \cdot MO}{2}$; cum $\mathcal{A}_{\Delta MBD}$ – minimă și $BD = 36$ cm $\Rightarrow MO$ este minimă $\Rightarrow MO \perp VC \Rightarrow MO = 9\sqrt{2}$ cm; $\sphericalangle((MBD), (ABC)) = \sphericalangle MOC$; $\cos(\sphericalangle MOC) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sphericalangle MOC = 45°$. **19.** a) $\mathcal{V} = \dfrac{2048\sqrt{3}}{3}$ cm^3; $VO = 8\sqrt{3}$ cm; $a_p = 16$ cm; $\mathcal{A}_t = 768$ cm^2; b) $BD \perp (VAC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} OM \perp VC \Rightarrow BM \perp VC$ și $DM \perp VC \Rightarrow \sphericalangle((VBC), (VDC)) = \sphericalangle BMD$; $BM = \dfrac{32}{\sqrt{5}}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta BMD} = \dfrac{BD \cdot MO}{2} = \dfrac{BM \cdot MD \cdot \sin(\sphericalangle BMD)}{2}$; $\sin(\sphericalangle BMD) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$; c) $\mathcal{A}_{\Delta VAC} = \dfrac{AC \cdot VO}{2} = \dfrac{VA \cdot VC \cdot \sin(\sphericalangle AVC)}{2}$; $\sin(\sphericalangle AVC) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. **20.** a) $l = 8\sqrt{3}$ cm; $a_p = 8$ cm; $\mathcal{A}_t = 144\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 192$ cm^3; b) $\mathcal{V}_{SABD} = \mathcal{V}_{DSAB} \Rightarrow d(D, (SAB)) = 3\sqrt{3}$ cm; c) $\sphericalangle((SBC), (ABC)) = \sphericalangle SDO = 60°$. **21.** a) $a_p = 8\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{V} = 576\sqrt{3}$ cm^3; $\mathcal{A}_l = 288\sqrt{3}$ cm^2; b) $d(O, (SBC)) = 6$ cm; c) $d(A, (SBC)) = 18$ cm; c) $\mathcal{A}_{l\,tr} = \mathcal{A}_{l\,m} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{lm}}{\mathcal{A}_{lM}} = \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{SO'}{SO}\right)^2 \Rightarrow SO' = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow OO' = 6(2-\sqrt{2})$ cm. **22.** a) $a_p = 8\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 256(\sqrt{3}+1)$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{2048\sqrt{2}}{3}$ cm^3; b) $pr_{(VBD)}\, VA = VO \Rightarrow \sphericalangle(VA, (VBD)) = \sphericalangle AVO = 45°$; c) $\sphericalangle((VBC), (VAD)) = \sphericalangle(VM, VN)$, unde VM și VN sunt apotemele duse pe fețele (VBC) și (VAD); $\mathcal{A}_{VMN} = \dfrac{MN \cdot VO}{2} = \dfrac{VM \cdot VN \cdot \sin(\sphericalangle MVN)}{2}$; $\sin(\sphericalangle MVN) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **23.** a) $\mathcal{A}_{\Delta VAC} = \mathcal{A}_{ABCD} \Rightarrow VO = 18\sqrt{2}$ cm; $VE = 27$ cm; $\mathcal{A}_l = 972$ cm^2; $\mathcal{V} = 1944\sqrt{2}$ cm^3; b) $\sin(\sphericalangle((VBC), (VDC))) = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$; c) $MC = \dfrac{9\sqrt{10}}{5}$ cm. **24.** a) $AB = 12$ cm; $VO = 6\sqrt{2}$ cm; $a_p = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 144\sqrt{3}$ cm^2;

$\mathcal{V} = 288\sqrt{2}$ cm^3; b) $\sin(\sphericalangle((VBC), (VAC))) = \frac{\sqrt{6}}{3}$; c) $\mathcal{A}_{\Delta MBD} = 36\sqrt{2}$ cm^2; d) OM este linie mijlocie în $\Delta VAC \Rightarrow VA \parallel OM \Rightarrow VA \parallel (MBD)$. **25.** a) $\mathcal{A}_t = 48\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$ cm^2; $\mathcal{V} = 128\sqrt{3}$ cm^3; c) Dacă N este mijlocul lui SO și $NP \perp SA \Rightarrow \Delta SPN \sim \Delta SOA \Rightarrow PN = 2\sqrt{2}$ cm < 3 cm; d) Dacă $MD \perp SA \overset{T3\perp}{\Rightarrow}$ $\overset{T3\perp}{\Rightarrow} CD \perp SA \Rightarrow \sphericalangle((SAM), (SAC)) = \sphericalangle MDC$; $\operatorname{tg}(\sphericalangle MDC) = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **26.** a) $\mathcal{A}_t = 144\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} =$ $= 288\sqrt{2}$ cm^3; b) $\mathrm{pr}_{(VAC)}VB = VO \Rightarrow \sin(\sphericalangle(VB, (VAC))) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $VT + TM =$ minim $\Rightarrow V, T$ și M – coliniare (în desfășurare); $\Delta MCT \sim \Delta VET \Rightarrow \frac{CM}{VE} = \frac{CT}{TE} \Rightarrow CT = 3(\sqrt{3}-1)$ cm. **27.** a) $a_p = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 144(\sqrt{3}+1)$ cm^2; $\mathcal{V} = 288\sqrt{2}$ cm^3; b) $\sin(\sphericalangle((VDC), (VAB))) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; c) Dacă $HQ \perp VM \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta VQH \sim \Delta VOE \Rightarrow QH = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ cm, dar $OH = QH$. **28.** a) $\mathcal{A}_t = 108$ cm^2; $\mathcal{V} = 72\sqrt{2}$ cm^3; b) $AD = 6\sqrt{3}$ cm, $VA = 6\sqrt{2}$ cm, $VD = 6$ cm $\Rightarrow AD^2 = VA^2 + VD^2 \Rightarrow \Delta AVD$ – dreptunghic $\Rightarrow VA \perp VD$; c) Dacă DE este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow DE \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle(VD, AB) = \sphericalangle(VD, DE)$. Cum $VD = DE =$ $= VE = 6$ cm $\Rightarrow \sphericalangle VDE = 60°$; d) $BD \perp (VAD)$; $DV \perp VA$ și $DV, VA \subset (VAD) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} VB \perp VA \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle((VAB), (VAD)) = \sphericalangle BVD$; $\sphericalangle BVD = 45°$. **29.** a) $\mathcal{A}_t = 324\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 486\sqrt{2}$ cm^3; b) $CM \perp SA$ și $BM \perp SA \Rightarrow SM \perp (MBC)$ și $\mathcal{V}_{SMBC} = \frac{\mathcal{A}_{MBC} \cdot SM}{3} = 243\sqrt{2}$ cm^3; c) $\sphericalangle((MBC), (SBC)) = \sphericalangle MDS$, unde $D \in (BC)$ și $BD \equiv DC$; $\sin(\sphericalangle MDS) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **30.** a) Dacă ΔSAB este dreptunghic isoscel, atunci $SA = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow SO = 2\sqrt{6}$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 108$ cm^2; $\mathcal{V} = 72\sqrt{2}$ cm^3; c) Dacă $SA \perp SC$ și $SA \perp SB$, atunci $SA \perp (SBC)$ și $SA \perp SM \Rightarrow \sphericalangle((SAM), (SAB)) = \sphericalangle MSB \Rightarrow \sphericalangle MSB = 45°$. **31.** a) În ΔAOC dreptunghic, cu teorema catetei $\Rightarrow MC = \frac{a}{3} \Rightarrow MN = \frac{a}{6} \Rightarrow MD^2 = MN^2 + ND^2 \Rightarrow a = 15$ cm $\Rightarrow AB =$ $= 15$ cm; b) Fie T mijlocul lui BD și $ME \perp AD \Rightarrow \mathrm{pr}_{(AOC)}MD = ET \Rightarrow \sphericalangle(MD, (AOC)) = \sphericalangle(MD, ET) =$ $= \sphericalangle MRE$, unde $\{R\} = DM \cap AT$; $\sin(\sphericalangle MRE) = \frac{ME}{MR} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$; c) Dacă $NP \perp AT \Rightarrow \Delta APN \sim \Delta AOE \Rightarrow$ $\Rightarrow NP = \frac{5\sqrt{6}}{4}$ cm $\Rightarrow NO = \frac{5\sqrt{6}}{4}$ cm.

Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1. a) 768 m^2; b) $\mathcal{V}_{\text{siloz}} = 96(\sqrt{7}+18)$ m^3. Cum $\sqrt{7} < 2{,}65 \Rightarrow 96(\sqrt{7}+18)$ m$^3 < 1982{,}4$ m$^3 < 1983$ m^3. **2.** a) $\mathcal{V}_{\text{bazin}} = \frac{1664}{3}$ m$^3 \simeq 554666$ dm$^3 = 5546{,}66$ hl; b) 160 hl = 16000 ℓ = 16000 dm^3 = 16 m^3; 16 m$^3 = 64 \cdot x$ m^3, de unde $x = 0{,}25$ m. **3.** a) 395 m^2; b) $VO = 6\sqrt{2}$ m; $OO_1 = \frac{\mathcal{A}_{VAC}}{p_{VAC}}$; $\mathcal{A}_{VAC} = 72$ m^2; $p_{VAC} = 6(\sqrt{2}+2)$ m; $OO_1 = 6(2-\sqrt{2})$ m; $VO_1 = 12(\sqrt{2}-1)$ m $< 5{,}04$ m $< 5{,}2$ m. **4.** a) 338,272 m^2 de tablă; b) 60°. **5.** a) $\mathcal{V} = 1152\sqrt{3}$ cm^3; b) $\mathcal{A}_l = 144\sqrt{39}$ cm^2; $\sqrt{39} < 6{,}25 \Rightarrow 144\sqrt{39}$ cm$^2 < 900$ cm^2. **6.** a) $\mathcal{A} = 16{,}8$ dm^2; b) $\mathcal{V}_{\text{piesă}} = 4{,}8$ dm^3; $m = \rho \cdot \mathcal{V} \Rightarrow m = 1968$ g $= 1{,}968$ kg < 2 kg. **7.** a) $\mathcal{V} =$

$= 72\ dm^3 = 72\ \ell$; b) $\mathcal{A}_{sticlă} = 36(5+\sqrt{5})\ dm^2$; $2{,}59\ m^2 < 36(5+\sqrt{5})\ dm^2 < 260{,}28\ dm^2 < 2{,}6028\ m^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ nu sunt suficienți $2{,}5\ m^2$. **8.** a) $1600\ m^2$; b) $\mathcal{V} = 5632\ m^3 > 5600\ m^3$; c) $SA' = \sqrt{964}\ m$; $31^2 < 964 < 1024 \Rightarrow 31 < \sqrt{964} < 32$. **9.** a) $\mathcal{A}_t = 64(1+\sqrt{2})\ m^2$; $154{,}24\ m^2 < 64(1+\sqrt{2})\ m^2 < 154{,}88\ m^2$; $\mathcal{A}_t = 155\ m^2$; sunt necesari $170{,}5\ m^2$ de pânză; b) $\Delta VTO_1 \sim \Delta VOM \Rightarrow \frac{VT}{VO} = \frac{VO_1}{VM} = \frac{TO_1}{OM} \Rightarrow \frac{4-x}{4\sqrt{2}} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4(\sqrt{2}-1) \Rightarrow VO_1 = 4(2-\sqrt{2})\ m$. Cum $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \Rightarrow 2{,}32\ m < 4(2-\sqrt{2})\ m < 2{,}36\ m \Rightarrow VO_1 < 2{,}4\ m$.

Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

Subiectul I. 1. $\mathcal{V} = 72\sqrt{3}\ cm^3$. **2.** $576\ cm^2$. **3.** $144(4+\sqrt{3})\ cm^2$. **4.** $\mathcal{V} = \frac{2048}{3}\ cm^3$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** $d(A, (VBC)) = 12\sqrt{2}\ cm$. **7.** $\sin(\sphericalangle((VAB), (VAD))) = \frac{2\sqrt{13}}{13}$. **8.** $\mathcal{V} = 1296\ cm^3$. **9.** $2\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea. 1. a) Din $\mathcal{A}_l = 2\mathcal{A}_b \Rightarrow a_p = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ și, cum $OD = \frac{l\sqrt{3}}{6}$, atunci cu teorema lui Pitagora în ΔVOD rezultă că $l = 24$ cm, iar $\mathcal{V} = 576\sqrt{3}\ cm^3$; b) $\sin(\sphericalangle((VAB), (VAD))) = \frac{\sqrt{7}}{4}$; c) $\mathcal{V}_{VABD} = \mathcal{V}_{DVAB} \Rightarrow d(D, (VAB)) = 9$ cm. **2.** a) $\mathcal{A}_{VAC} = \mathcal{A}_{ABCD} \Rightarrow VO = 6\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{V} = 72\sqrt{2}\ cm^3$; b) $\sin(\sphericalangle((VBC), (VAC))) = \frac{\sqrt{5}}{3}$; c) $\sin(\sphericalangle((VAD), (VBC))) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. $\mathcal{A}_l = 144\ cm^2$. **2.** $a_p = 6$ cm. **3.** $\mathcal{V} = 243\sqrt{3}\ cm^3$. **4.** $\mathcal{A}_t = 240\ cm^2$. **5.** $\mathcal{V} = 512\ cm^3$. **6.** $\mathcal{A}_l = 144\ cm^2$. **7.** $\mathcal{A}_t = 1344\ cm^2$. **8.** $4\sqrt{2}$ cm. **9.** $30°$.

Subiectul al II-lea. 1. a) $\mathcal{A}_l = 486\ cm^2$; $\mathcal{V} = 972\ cm^3$; b) Cu R$_1$T3$\perp$ avem $SD \perp SA \Rightarrow \sphericalangle((SAB), (SAD)) = \sphericalangle(SB, SD) = \sphericalangle DSB = 45°$; c) $d(O, (SBC)) = OQ = 6$ cm, unde $OQ \perp SD$. **2.** a) $\mathcal{A}_t = 972\ cm^2$; $\mathcal{V} = 972\sqrt{3}\ cm^3$; b) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = 60°$, $\sphericalangle((MBC), (ABC)) = 30° \Rightarrow \sphericalangle((VBC), (MBC)) = 30°$; c) Se arată că $\Delta PBC \equiv \Delta PDC$ (L.U.L.) $\Rightarrow PD = PB$; cum PO – mediană $\Rightarrow PO \perp BD$. Cum $\mathcal{A}_{\Delta PBD}$ este minimă $\Rightarrow OP$ este minimă $\Rightarrow PO \perp VC$, $PO = \frac{9\sqrt{30}}{5}$ cm; $\cos(\sphericalangle((PBD), (ABC))) = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

TESTUL 3

Subiectul I. 1. $\mathcal{V} = 27\ cm^3$. **2.** a) $45°$; b) $144\sqrt{3}\ cm^2$; c) $288\sqrt{2}\ cm^3$. **3.** a) $6\sqrt{3}$ cm; b) $288\ cm^2$; c) $288\sqrt{3}\ cm^3$. **4.**) 12 cm; b) $36\sqrt{6}\ cm^2$.

Subiectul al II-lea. 1. a) $\mathcal{A}_t = 1296\ cm^2$; $\mathcal{V} = 2592\ cm^3$; b) Dacă M este mijlocul laturii BC, se arată că $\sphericalangle((PBC), (VBC)) = \sphericalangle PMV$; $\sphericalangle PMV = \sphericalangle VMO - \sphericalangle PMO = 30°$; c) $d(P, (VBC)) = PN$, unde $PN \perp VM$, $PN = 6$ cm. **2.** a) $a_p = 2\sqrt{7}$ cm; $\mathcal{A}_l = 36\sqrt{7}\ cm^2$; $\mathcal{V} = 48\sqrt{3}\ cm^3$; b) $\sphericalangle((VAB), (VAC)) = \sphericalangle BMC$; $\sin(\sphericalangle BMC) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$; c) $d(A, (VBC)) = \frac{12\sqrt{21}}{7}$ cm.

6. Trunchiul de piramidă regulată

1. a) $h = 2\sqrt{6}$ cm; $a_{tr} = 3\sqrt{3}$ cm; $R_B = 6\sqrt{3}$ cm; $R_b = 4\sqrt{3}$ cm; $a_B = 3\sqrt{3}$ cm; $a_b = 2\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 135\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 252\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 342\sqrt{2}$ cm^3; b) $a_{tr} = 8$ cm; $m = 4\sqrt{7}$ cm; $R_B = 16$ cm; $R_b = 8$ cm; $a_B = 8$ cm; $a_b = 4$ cm; $\mathcal{A}_l = 288\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 528\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 1344$ cm^3; c) $L = 24$ cm; $l = 12$ cm; $a_{tr} = 2\sqrt{7}$ cm; $m = 8$ cm; $R_B = 8\sqrt{3}$ cm; $R_b = 4\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 108\sqrt{7}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 36(3\sqrt{7}+5\sqrt{3})$ cm^2; $\mathcal{V} = 336\sqrt{3}$ cm^3; d) $L = 24\sqrt{3}$ cm; $l = 12\sqrt{3}$ cm; $m = 6\sqrt{7}$ cm; $R_B = 24$ cm; $a_B = 12$ cm; $a_b = 6$ cm; $\mathcal{A}_l = 648\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 1188\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 4536$ cm^3; e) $l = 6$ cm; $h = 6$ cm; $m = 2\sqrt{21}$ cm; $R_B = 6\sqrt{3}$ cm; $R_b = 2\sqrt{3}$ cm; $a_B = 3\sqrt{3}$ cm; $a_b = \sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 234\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 234\sqrt{3}$ cm^3. **2.** a) $a_{tr} = 10$ cm; $m = 2\sqrt{41}$ cm; $R_B = 16\sqrt{2}$ cm; $R_b = 8\sqrt{2}$ cm; $a_B = 16$ cm; $a_b = 8$ cm; $\mathcal{A}_l = 960$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 2240$ cm^2; $\mathcal{V} = 3584$ cm^3; b) $l = 16$ cm; $h = 9$ cm; $m = 3\sqrt{41}$ cm; $R_B = 20\sqrt{2}$ cm; $R_b = 8\sqrt{2}$ cm; $a_B = 20$ cm; $a_b = 8$ cm; $\mathcal{A}_t = 3536$ cm^2; $\mathcal{V} = 7488$ cm^3; c) $L = 30$ cm; $l = 12$ cm; $a_{tr} = 15$ cm; $m = 3\sqrt{34}$ cm; $R_b = 6\sqrt{2}$ cm; $a_B = 15$ cm; $\mathcal{A}_l = 1260$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 2304$ cm^2; $\mathcal{V} = 5616$ cm^3; d) $L = 6\sqrt{3}$ cm; $h = 2\sqrt{6}$ cm; $m = \sqrt{30}$ cm; $R_B = 3\sqrt{6}$ cm; $R_b = 2\sqrt{6}$ cm; $a_B = 3\sqrt{3}$ cm; $a_b = 2\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 336$ cm^2; $\mathcal{V} = 152\sqrt{6}$ cm^3; e) $L = 12$ cm; $m = 2\sqrt{5}$ cm; $R_B = 6\sqrt{2}$ cm; $R_b = 4\sqrt{2}$ cm; $a_B = 6$ cm; $a_b = 4$ cm; $\mathcal{A}_l = 160$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 368$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{608\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **3.** a) $a_{tr} = 13$ cm; $\mathcal{A}_t = 4320$ cm^2; $\mathcal{V} = 14800$ cm^3; b) $a_p = 52$ cm; $VO = 48$ cm; $\mathcal{A}_t = 2640$ cm^2; $\mathcal{V} = 25600$ cm^3. **4.** a) $l = 12\sqrt{3}$ cm; $m = 3\sqrt{7}$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 270\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 1539$ cm^3; c) $\mathcal{A}_t = 486\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 2187$ cm^3. **5.** a) $a_{tr} = 8\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 936\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 1872\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sphericalangle((BCC'), (ABC)) = 60°$; c) $d(O', (BCC')) = d(O', (VBC)) = 3$ cm. **6.** a) $h = 6$ cm; $m = 2\sqrt{41}$ cm; $L = 32$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 2240$ cm^2; $\mathcal{V} = 3584$ cm^3; c) $VO = 12$ cm; $\mathcal{V}_{pir} = 4096$ cm^3. **7.** a) $h = 3$ cm; $m = \sqrt{41}$ cm; $a_{tr} = 5$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 320$ cm^2; c) $VO = 4{,}5$ cm; $\mathcal{V} = 216$ cm^3. **8.** a) $l = 12$ cm; b) $\mathcal{V}_{tr} = 171\sqrt{3}$ cm^3; c) $VO = 9$ cm. **9.** a) $a_{tr} = 2\sqrt{6}$ cm; $h = 4$ cm; b) $\mathcal{V}_{tr} = \dfrac{2432}{3}$ cm^3; c) $VO = 12$ cm. **10.** a) $a_{tr} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 567$ cm^2; c) $VO = 12\sqrt{6}$ cm; $a_p = 18\sqrt{3}$ cm. **11.** a) $h = 6\sqrt{3}$ cm; $a_{tr} = 3\sqrt{13}$ cm; $m = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 81\sqrt{39}$ cm^2; c) $VO = 12\sqrt{3}$ cm; $VM = 6\sqrt{13}$ cm. **12.** a) $h = 18$ cm; $a_{tr} = 30$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 14144$ cm^2; c) $VO = 30$ cm; $a_p = 50$ cm; $\mathcal{A}_l = 8000$ cm^2; $\mathcal{V} = 64000$ cm^3. **13.** a) $OO' = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_{l\ tr} = 2025\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 18468\sqrt{3}$ cm^3; c) $VO = 36$ cm; $a_p = 45$ cm; $\mathcal{A}_l = 3645\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 26244\sqrt{3}$ cm^3. **14.** a) $L = 15$ cm; b) $a_{tr} = 5$ cm; $\mathcal{A}_l = 240$ cm^2; c) $VO = 10$ cm; d) $\mathcal{A}_l = 375$ cm^2. **15.** a) $h = 3$ cm; $a_{tr} = \sqrt{10}$ cm; b) $VO = \dfrac{21}{2}$ cm; c) $\mathcal{A}_l = 24\sqrt{10}$ cm^2; $\mathcal{V} = 109$ cm^3. **16.** a) $L = 18$ cm; $a_{tr} = \sqrt{111}$ cm; $m = 2\sqrt{30}$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 45\sqrt{111}$ cm^2; c) $\mathcal{A}_t = 81\sqrt{111}$ cm^2; $\mathcal{V} = 1458$ cm^3; d) $\mathrm{tg}(\sphericalangle A'AO) = 3$; e) $d(O, (VBC)) = \dfrac{18\sqrt{111}}{37}$ cm.

17. a) $OO' = 9$ cm; $a_t = 3\sqrt{17}$ cm; $\mathcal{V} = 7416$ cm^3; $\mathcal{A}_l = 240\sqrt{34}$ cm^2; b) $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{l}{L} \Rightarrow VO = \dfrac{39}{2}$ cm; $\dfrac{VM'}{VM} = \dfrac{l}{L} \Rightarrow VM = \dfrac{13\sqrt{17}}{2}$ cm; $\mathcal{V} = 8788$ cm^3; $\mathcal{A}_l = 338\sqrt{34}$ cm^2; c) $l_s = 20\sqrt{2}$ cm; $\dfrac{VO''}{VO} = \dfrac{l_s}{L} \Rightarrow VO'' = 15$ cm $\Rightarrow OO'' = \dfrac{9}{2}$ cm. **18.** a) $a_{tr} = \sqrt{3}$ cm; $OO' = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 21\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 46\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{74\sqrt{2}}{3}$ cm^3; b) $m = 2$ cm; c) $VO = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$ cm; $a_p = 4\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_l = 48\sqrt{3}$ cm^2;

$\mathcal{V}=\frac{128\sqrt{2}}{3}$ cm^3. **19.** a) Dacă $\sphericalangle B'BC = 60° \Rightarrow \Delta VBC$ – echilateral $\Rightarrow VM = 10\sqrt{6}$ cm. În $\Delta VOM \Rightarrow VO = 20$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow VO' = 8$ cm şi cum $\Delta VO'M' \sim \Delta VOM \Rightarrow O'M' = 4\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' = 8\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{A}_l = 672\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 4992$ cm^3; b) $\mathcal{V}_{pir} = \frac{16000}{3}$ cm^3; c) Cum $BO \perp (VAC)$ şi $ON \perp VA \overset{T3\perp}{\Rightarrow} BN \perp VA \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle((VAC), (VAB)) = \sphericalangle BNO$; tg$(\sphericalangle BNO) = \frac{OB}{ON} = \sqrt{2}$; d) Din $\mathcal{V}_{VBDC} = \mathcal{V}_{BVDC} \Rightarrow$ d$(B, (VDC)) = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ cm; e) Notăm pr$_{(VDC)}B$ = $= Q \Rightarrow$ pr$_{(VDC)}$ $VB = VQ \Rightarrow \sphericalangle(VB, (VDC)) = \sphericalangle BVQ$; $\sin(\sphericalangle BVQ) = \frac{BQ}{VB}$, dar $BQ = $ d$(B, (VDC)) \Rightarrow \sin(\sphericalangle BVQ) = \frac{\sqrt{6}}{6}$

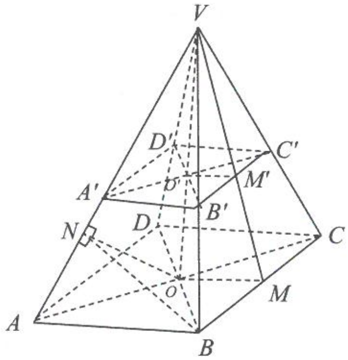


Figura 31

(figura 31). **20.** a) Dacă $OB' \perp O'B \Rightarrow OO' = \sqrt{OB \cdot O'B'} = 9\sqrt{2}$ cm; $a_{tr} = \frac{3\sqrt{78}}{2}$ cm; $\mathcal{V} =$ $= 3078\sqrt{2}$ cm^3; $\mathcal{A}_l = 270\sqrt{13}$ cm^2; b) $VO = 27\sqrt{2}$ cm; $a_p = \frac{9\sqrt{78}}{2}$ cm; $\mathcal{V}_{pir} = 4374\sqrt{2}$ cm^3; $\mathcal{A}_l =$ $= 486\sqrt{13}$ cm^2; c) $\mathcal{V}_{VA'B'C'} = \mathcal{V}_{A'VB'C'} \Rightarrow$ d$(A', (VB'C')) = \frac{36\sqrt{26}}{13}$ cm.

Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

Subiectul I. **1.** $2\sqrt{21}$ cm. **2.** $8\sqrt{2}$ cm. **3.** $342\sqrt{3}$ cm^3. **4.** 1776 cm^3. **5.** 4 cm. **6.** 8 cm. **7.** 18 cm. **8.** $6\sqrt{3}$ cm. **9.** $2\sqrt{37}$ cm.

Subiectul al II-lea. **1.** a) $a_{tr} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm; $OO' = 2$ cm; $\mathcal{V} = \frac{152\sqrt{3}}{3}$ cm^3; b) $VO = 6$ cm; $\mathcal{V} = 72\sqrt{3}$ cm^3; c) $\mathcal{V}_{VABC} = \mathcal{V}_{AVBC} \Rightarrow$ d$(A, (BCC')) = 9$ cm. **2.** a) Dacă $\sphericalangle A'AD = 60° \Rightarrow \Delta VAD$ – echilateral $\Rightarrow$ $\Rightarrow VA = 18\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow a_p = 9\sqrt{6}$ cm $\Rightarrow VO = 18$ cm $\Rightarrow VO' = 6$ cm. Din asemănarea $\Delta VO'M' \sim$ $\sim \Delta VOM \Rightarrow l = 6\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 576\sqrt{3}$ cm^2; c) $\sin(\sphericalangle((A'AC), (A'AD))) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

TESTUL 2

Subiectul I. **1.** 1368 cm^3. **2.** 3 cm. **3.** $6\sqrt{6}$ cm. **4.** $684\sqrt{3}$ cm^3. **5.** $252\sqrt{3}$ cm^3. **6.** 340 cm^2. **7.** $441\sqrt{3}$ cm^2. **8.** 1674 cm^3. **9.** 240 cm^2.

Subiectul al II-lea. **1.** a) $L = 24$ cm; $l = 8$ cm; $h = 16$ cm; b) $\mathcal{V} = \frac{13312}{3}$ cm^3; $\mathcal{A}_t = 128(4\sqrt{5}+5)$ cm^2; c) $\mathcal{V}_{pir} = 4608$ cm^3. **2.** a) $L = 24$ cm; $a_{tr} = 2\sqrt{21}$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 9\sqrt{3}(25+14\sqrt{7})$ cm^2; c) $VO = 36$ cm.

7. Cilindrul circular drept

1. a) $\mathcal{A}_b = 36\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_l = 96\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 168\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 288\pi$ cm^3; $d = 4\sqrt{13}$ cm; b) $h = 6$ cm; $\mathcal{A}_b =$ $= 100\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_l = 120\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 320\pi$ cm^2; $d = 2\sqrt{109}$ cm; c) $h = 10$ cm; $\mathcal{A}_b = 16\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t =$

$= 112\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 160\pi$ cm^3; $d = 2\sqrt{41}$ cm; d) $R = 3$ cm; $\mathcal{A}_b = 9\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_l = 42\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 60\pi$ cm^2; $d = \sqrt{85}$ cm; e) $R = 15$ cm; $h = 20$ cm; $\mathcal{A}_b = 225\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 1050\pi$ cm^2; $d = 10\sqrt{13}$ cm; f) $R = 10$ cm; $\mathcal{A}_b = 100\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_l = 300\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 500\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 1500\pi$ cm^3; g) $R = 6$ cm; $h = 16$ cm; $\mathcal{A}_b = 36\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 576\pi$ cm^3; $d = 20$ cm. **2.** $R = 10$ cm; $G = 20$ cm; $\mathcal{A}_l = 400\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 2000\pi$ cm^3. **3.** a) $R = 6$ cm; b) $G = 15$ cm; c) $\mathcal{V} = 540\pi$ cm^3. **4.** $R = 8$ cm; $\mathcal{A}_t = 384\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 1024\pi$ cm^3. **5.** $G = 3$ cm; $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_b = 36\pi$ cm^2. **6.** $R = 5$ cm; $G = 30$ cm; $\mathcal{A}_l = 300\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 350\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 750\pi$ cm^3. **7.** a) $R = 5$ cm; b) $G = 10\sqrt{3}$ cm; c) $\mathcal{A}_l = 100\sqrt{3}\pi$ cm^2; d) $\mathcal{V} = 250\sqrt{3}\pi$ cm^3. **8.** $R = 12$ cm; $G = 12$ cm; $\mathcal{V} = 1728\pi$ cm^3. **9.** a) $h = 32$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 1056\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 4608\pi$ cm^3. **10.** $R = 9$ cm; $G = 11$ cm; $\mathcal{A}_t = 360\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 891\pi$ cm^3. **11.** $R = 8$ cm; $G = 2$ cm; $\mathcal{V} = 128\pi$ cm^3. **12.** *Cazul I.* $R = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{V} = 1296\pi$ cm^3. *Cazul II.* $R = 2\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{V} = 144\pi$ cm^3. **13.** a) $R = 12$ cm; $G = 18$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 720\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 2592\pi$ cm^3. **14.** a) $R = 15$ cm; $G = 10$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 750\pi$ cm^2. **15.** $R = 6$ cm; $G = 8$ cm; $\mathcal{V} = 288\pi$ cm^3. **16.** a) $R = 12$ cm; $G = 24\sqrt{3}$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 288\pi(2\sqrt{3}+1)$ cm^2; $\mathcal{V} = 3456\sqrt{3}\pi$ cm^3. **17.** a) $R = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 240\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 1440\pi$ cm^3. **18.** a) $R = 12$ cm; $G = 18$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 432\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 2592\pi$ cm^3. **19.** a) $R = 6$ cm; $G = 10$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 192\pi$ cm^2. **20.** Dacă $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow R_1^2 \cdot G_1 = R_2^2 \cdot G_2 \Rightarrow \dfrac{R_1^2}{R_2^2} = \dfrac{G_2}{G_1}$. **21.** a) $R = 12$ cm; $G = 15$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 360\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 648\pi$ cm^2.

8. Conul circular drept

1. a) $G = 10$ cm; $\mathcal{A}_b = 36\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_l = 60\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 96\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 96\pi$ cm^3; b) $h = 16$ cm; $\mathcal{A}_b = 144\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_l = 240\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 384\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 768\pi$ cm^3; c) $R = 5$ cm; $\mathcal{A}_b = 25\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_l = 65\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 90\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 100\pi$ cm^3; d) $h = 24$ cm; $G = 26$ cm; $\mathcal{A}_b = 100\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_l = 260\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 360\pi$ cm^2; e) $R = 12$ cm; $h = 9$ cm; $\mathcal{A}_b = 144\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 324\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 432\pi$ cm^3; f) $R = 8$ cm; $h = 6$ cm; $G = 10$ cm; $\mathcal{A}_l = 80\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 144\pi$ cm^2. **2.** a) $G = 30$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 540\pi$ cm^2; c) $\mathcal{A}_t = 864\,\pi$ cm^2; d) $\mathcal{V} = 2592\pi$ cm^3. **3.** a) $h = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 135\pi$ cm^2; c) $\mathcal{V} = 324\pi$ cm^3; d) $u° = 216°$. **4.** a) $R = 24$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 1296\pi$ cm^2; c) $\mathcal{V} = 3456\pi$ cm^3; d) $u° = 288°$. **5.** a) $G = 20$ cm; b) $h = 12$ cm; c) $\mathcal{V} = 1024\pi$ cm^3. **6.** a) $R = 20$ cm; b) $G = 25$ cm; c) $h = 15$ cm; d) $\mathcal{V} = 2000\pi$ cm^3. **7.** a) $R = 12$ cm; $u° = 216°$; b) $u° = 288°$; c) $u° = 216°$. **8.** a) $G = 12$ cm; $\mathcal{A}_l = 72\pi$ cm^2; b) $G = 15$ cm; $\mathcal{A}_l = 90\pi$ cm^2; c) $G = 10$ cm; $\mathcal{A}_l = 60\pi$ cm^2; d) $G = 24$ cm; $\mathcal{A}_l = 144\pi$ cm^2; e) $G = \dfrac{15}{2}$ cm; $\mathcal{A}_l = 45\pi$ cm^2; f) $G = 16$ cm; $\mathcal{A}_l = 96\pi$ cm^2.
9. a) $\mathcal{A}_l = 288\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 432\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 576\sqrt{3}\,\pi$ cm^3; b) $u° = 180°$. **10.** a) $h = 4\sqrt{3}$ cm; b) $G = 8\sqrt{3}$ cm; c) $\mathcal{A}_l = 96\sqrt{3}\,\pi$ cm^2; d) $\mathcal{V} = 192\sqrt{3}\,\pi$ cm^3. **11.** a) $G = 15$ cm; b) $h = 12$ cm; c) $\mathcal{V} = 324\pi$ cm^3; d) $u° = 216°$. **12.** a) $h = 16$ cm; b) $G = 20$ cm; c) $\mathcal{A}_t = 384\pi$ cm^2; d) $u° = 216°$. **13.** a) $R = 30$ cm; $G = 50$ cm; $h = 40$ cm; $\mathcal{V} = 12000\pi$ cm^3; b) $u° = 216°$. **14.** $\mathcal{A}_t = 216\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 324\pi$ cm^3. **15.** a) $G = 40$ cm; $\mathcal{A}_l = 1280\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 2304\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 8192\pi$ cm^3; b) $OO' = 15$ cm. **16.** a) $R = 5$ cm; b) $G = 31$ cm; c) $h = 6\sqrt{26}$ cm; $\mathcal{V} = 50\sqrt{26}\,\pi$ cm^3; d) $\mathcal{A}_l = 155\pi$ cm^2. **17.** a) $G = 30$ cm; $\mathcal{A}_l = 540\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 864\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 2592\pi$ cm^3; b) $u° = 216°$; c) $\mathcal{V} = 768\pi$ cm^3; $\mathcal{A}_t = 384\pi$ cm^2. **18.** a) $R = 9$ cm; $G = 15$ cm; $h = 12$ cm; $\mathcal{A}_l = 135\pi$ cm^2; $\mathcal{A}_t = 216\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 324\pi$ cm^3; b) $\mathcal{A}_{l\,m} = \mathcal{A}_{l\,tr} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{l\,m}}{\mathcal{A}_{l\,M}} = \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{VO'}{VO}\right)^2 \Rightarrow VO' = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow OO' = 6(2-\sqrt{2})$ cm; c) $r = 6$ cm; $VO' = 8$ cm; $g = 10$ cm; $\mathcal{A}_l = 60\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 96\pi$ cm^3. **19.** a) $G = 36$ cm; $R = 12$ cm; $h = 24\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{V} = 1152\pi\sqrt{2}$ cm^3;

$\mathcal{A}_t = 576\pi$ cm²; b) $r = 8$ cm; cum $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{r}{R} \Rightarrow VO' = 16\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow OO' = 8\sqrt{2}$ cm. **20.** a) $G = 24$ cm; $R = 12$ cm; $h = 12\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 432\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 576\sqrt{3}\,\pi$ cm³; b) $\mathcal{A}_t = 324\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 504\sqrt{3}\,\pi$ cm³. **21.** a) $G = 25$ cm; $h = 20$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 375\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 1500\pi$ cm³; c) $u° = 216°$. **22.** a) $R = 12$ cm; $G = 20$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 240\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 768\pi$ cm³; c) $u° = 216°$; d) $VO' = 12$ cm. **23.** a) Cum $G^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow R = 5$ cm; $h = 12$ cm; $G = 13$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 90\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 100\pi$ cm³; c) $\left(\dfrac{VO'}{VO}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow VO' = 6\sqrt{2}$ cm. **24.** a) $R = 24$ cm; $G = 30$ cm; $h = 18$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 1296\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 3456\pi$ cm³; c) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{VO'}{VO} \Rightarrow VO' = 15$ cm $\Rightarrow OO' = 3$ cm. **25.** a) $R = \dfrac{3G}{5} \Rightarrow \dfrac{R}{3} = \dfrac{G}{5} = k \Rightarrow R = 3k,\ h = 4k,\ G = 5k \Rightarrow k = 6 \Rightarrow R = 18$ cm, $h = 24$ cm, $G = 30$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 540\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 864\pi$ cm²; c) $VO' = 20$ cm $\Rightarrow OO' = 4$ cm. **26.** a) $R = \dfrac{4G}{5} \Rightarrow \dfrac{R}{4} = \dfrac{G}{5} = k \Rightarrow R = 4k,\ G = 5k,\ h = 3k \Rightarrow k = 5 \Rightarrow R = 20$ cm, $G = 25$ cm, $h = 15$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 500\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 900\pi$ cm²; c) $\left(\dfrac{VO'}{VO}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow VO' = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$ cm $\Rightarrow OO' = \dfrac{15(2-\sqrt{2})}{2}$ cm. **27.** a) $h = 12$ cm; $G = 12\sqrt{3}$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 144\sqrt{6}\,\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 1152\pi$ cm³. **28.** a) $\dfrac{R}{3} = \dfrac{G}{5} = \dfrac{h}{4} = k$; $\mathcal{V} = 12k^3\pi \Rightarrow k = 5 \Rightarrow R = 15$ cm, $G = 25$ cm, $h = 20$ cm; $\mathcal{A}_l = 375\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 600\pi$ cm²; b) $u° = 216°$; c) $\left(\dfrac{VO'}{VO}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow VO' = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm $\Rightarrow OO' = \dfrac{20(3-\sqrt{3})}{3}$ cm.

9. Trunchiul de con circular drept

1. a) $G = 10$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 180\pi$ cm²; c) $\mathcal{V} = 672\pi$ cm³. **2.** a) $h = 16$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 440\pi$ cm²; c) $\mathcal{V} = 2128\pi$ cm³. **3.** a) $r = 6$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 75\pi$ cm²; c) $\mathcal{V} = 228\pi$ cm³. **4.** a) $G = 15$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 420\pi$ cm²; c) $\mathcal{V} = 1872\pi$ cm³. **5.** a) $r = 10$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 896\pi$ cm²; c) $\mathcal{V} = 2604\pi$ cm³. **6.** a) $G = 10$ cm; $\mathcal{A}_B = 169\pi$ cm²; $\mathcal{A}_b = 25\pi$ cm²; $\mathcal{A}_l = 180\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 374\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 518\pi$ cm³; b) $R = 14$ cm; $\mathcal{A}_B = 196\pi$ cm²; $\mathcal{A}_b = 25\pi$ cm²; $\mathcal{A}_l = 285\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 506\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 1164\pi$ cm³; c) $R = 15$ cm; $r = 9$ cm; $G = 10$ cm; $\mathcal{A}_l = 240\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 546\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 1176\pi$ cm³; d) $h = 8$ cm; $G = 10$ cm; $\mathcal{A}_B = 196\pi$ cm²; $\mathcal{A}_b = 64\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 480\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 992\pi$ cm³; e) $h = 12$ cm; $G = 20$ cm; $\mathcal{A}_B = 441\pi$ cm²; $\mathcal{A}_b = 25\pi$ cm²; $\mathcal{A}_l = 520\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 986\pi$ cm². **7.** a) $G^2 = h^2 + (R - r)^2 \Rightarrow G = 30$ cm; $\mathcal{V} = 4875\sqrt{3}\pi$ cm³; $\mathcal{A}_l = 1050\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 1775\pi$ cm²; b) $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{r}{R} \Rightarrow \dfrac{VO - 15\sqrt{3}}{VO} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow VO = 25\sqrt{3}$ cm; $G = 50$ cm; $\mathcal{V} = \dfrac{15625\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³; $\mathcal{A}_l = 1250\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 1875\pi$ cm². **8.** a) $r = 10$ cm; $\mathcal{A}_l = 780\pi$ cm²; $\mathcal{V}_{tr} = 5600\pi$ cm³; b) $VO = 48$ cm; $VA = 52$ cm; $\mathcal{A}_l = 1040\pi$ cm²; $\mathcal{V}_{con} = 6400\pi$ cm³; c) $\dfrac{v}{\mathcal{V}} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow \dfrac{v}{\mathcal{V}} = \dfrac{1}{8} = \dfrac{p}{100} \Rightarrow p = 12{,}5\%$.
9. a) $\mathcal{A}_l = 160\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 320\pi$ cm²; $\mathcal{V}_{tr} = 416\pi$ cm³; b) $\mathcal{A}_l = 180\pi$ cm²; $\mathcal{A}_t = 324\pi$ cm²; $\mathcal{V} = 432\pi$ cm³; c) $u° = 288°$. **10.** a) $h_{tr} = 18$ cm; $\mathcal{A}_{l\,tr} = 1680\pi$ cm²; $\mathcal{V}_{tr} = 14976\pi$ cm³; b) $\mathcal{A}_{l\,con} = 2000\pi$ cm²; $\mathcal{V}_{con} = 16000\pi$ cm³; c) $u° = 288°$. **11.** a) $R = 25$ cm; $r = 5$ cm; $h_{tr} = 20\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{l\,tr} = 1200\pi$ cm²; $\mathcal{V}_{tr} = \dfrac{15500\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³; b) $\mathcal{A}_{l\,con} = 1250\pi$ cm²; $\mathcal{V}_{con} = \dfrac{15625\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³; c) $u° = 180°$. **12.** a) $R = 20$ cm;

$h = 6$ cm; b) $\mathcal{V} = 1568\pi$ cm^3; $\mathcal{A}_t = 864\pi$ cm^2. **13.** a) $r = 16$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 3536\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 14976\pi$ cm^3; c) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{H} = \dfrac{g}{G} \Rightarrow VO = 30$ cm; $G = 50$ cm; $\mathcal{A}_{t\,con} = 2000\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{con} = 16000\pi$ cm^3. **14.** a) $r = 6$ cm; $h = 12\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 936\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 1872\sqrt{3}\,\pi$ cm^3; b) $G = 36$ cm; $VO = 18\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 648\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 1944\pi$ cm^3; c) $u° = 180°$. **15.** a) $G = 10$ cm; $h = 5\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = 275\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{875\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3; b) $VO = 10\sqrt{3}$ cm; $G = 20$ cm; $\mathcal{A}_t = 200\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{1000\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3; c) $u° = 180°$. **16.** a) $R = 25$ cm; $r = 7$ cm; $\mathcal{A}_t = 960\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 6792\pi$ cm^3; b) $VO = \dfrac{100}{3}$ cm; $VB = \dfrac{125}{3}$ cm; $\mathcal{A}_t = \dfrac{3125\pi}{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{62500\pi}{9}$ cm^3; c) $r' = \dfrac{r+R}{2} \Rightarrow r' = 16$ cm; $\mathcal{A}_{sect} = 256\pi$ cm^2. **17.** a) Dacă $AB' \perp A'B \Rightarrow OO' = \dfrac{AB + A'B'}{2} \Rightarrow OO' = r + 12 \Rightarrow VO' = 12 - r$. Cum $\dfrac{r}{R} = \dfrac{VO'}{VO} \Rightarrow r = 4$ cm și $OO' = 16$ cm; $\mathcal{V}_{con} = 1152\pi$ cm^3; b) $\mathcal{V}_{tr} = \dfrac{3328\pi}{3}$ cm^3; $\mathcal{A}_{t\,tr} = 128\sqrt{5}\pi$ cm^2; c) $u° = \dfrac{360°}{\sqrt{5}}$ și $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 \Rightarrow 160{,}71° < u° < 161{,}43° < 162°$. **18.** a) $G = 30$ cm; $h = 24$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 1512\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 6048\pi$ cm^3; c) $VO = 32$ cm; $VB = 40$ cm; $\mathcal{V}_{con} = 6144\pi$ cm^3; $\mathcal{A}_{t\,con} = 1536\pi$ cm^2; d) $u° = 216°$. **19.** a) $\dfrac{r}{2} = \dfrac{R}{5} = k$ și $OO' = R + r \Rightarrow k = 3 \Rightarrow r = 6$ cm, $R = 15$ cm; b) $\mathcal{V}_{tr} = 2457\pi$ cm^3; c) $\mathcal{V}_{con} = 2625\pi$ cm^3.
20. a) $\dfrac{R}{3} = \dfrac{r}{2} = \dfrac{h}{\sqrt{3}} = k \Rightarrow k = 5 \Rightarrow R = 15$ cm, $r = 10$ cm, $h = 5\sqrt{3}$ cm; b) $\mathcal{A}_{t\,tr} = 250\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{tr} = \dfrac{2375\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3; c) $\mathcal{V}_{MAB} = \mathcal{V}_{MA'B'} \Rightarrow 9OM = 4O'M$ și $OO' = OM + O'M \Rightarrow OM = \dfrac{20\sqrt{3}}{13}$ cm.
21. a) $\dfrac{r}{2} = \dfrac{R}{3} = k$; $k = 6 \Rightarrow r = 12$ cm, $R = 18$ cm, $h = 6$ cm; b) $\mathcal{A}_{t\,tr} = 36\pi(5\sqrt{2} + 13)$ cm^2; $\mathcal{V}_{tr} = 1368\pi$ cm^3; c) $r_{sect} = \dfrac{R+r}{2} = 15$ cm; $\mathcal{A}_{sect} = 225\pi$ cm^2. **22.** a) $\mathcal{A}_{t\,tr} = 900\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{tr} = 6048\pi$ cm^3; b) $VO = 32$ cm; $VB = 40$ cm; $\mathcal{A}_{t\,con} = 960\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{con} = 6144\pi$ cm^3; c) $u° = 216°$; d) $\dfrac{24}{25}$. **23.** a) $G = 36$ cm; $r = 6\sqrt{3}$ cm; $R = 24\sqrt{3}$ cm; $h = 18$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 108\pi(10\sqrt{3} + 17)$ cm^2; $\mathcal{V} = 13608\pi$ cm^3; c) $VO = 24$ cm; $VB = 48$ cm; $\mathcal{A}_t = 1152\sqrt{3}\,\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 13824\pi$ cm^3. **24.** a) $h = 21\sqrt{2}$ cm; $G = 30$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 630\sqrt{2}\,\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 4662\sqrt{2}\,\pi$ cm^3; c) $VO = 84\sqrt{2}$ cm; $VB = 120$ cm; $\mathcal{A}_t = 1440\sqrt{2}\,\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 8064\sqrt{2}\,\pi$ cm^3; d) $\dfrac{\mathcal{V}_m}{\mathcal{V}_M} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{V}_{tr}}{\mathcal{V}_M} = \dfrac{37}{64} = \dfrac{p}{100} \Rightarrow p = 57{,}81\%$. **25.** a) $(R - r)^2 = G^2 - h^2 \Rightarrow R - r = 7$; $G = R + r \Rightarrow R = 16$ cm; $r = 9$ cm; b) $\mathcal{A}_{t\,tr} = 625\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{tr} = 3848\pi$ cm^3. **26.** a) $R = 9\sqrt{3}$ cm; $r = 6\sqrt{3}$ cm; b) $\mathcal{A}_{t\,tr} = 675\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{tr} = 3078\sqrt{2}\,\pi$ cm^3; c) $VO = 54\sqrt{2}$ cm; $VB = 45\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{t\,con} = 1215\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{con} = 4374\sqrt{2}\,\pi$ cm^3. **27.** a) $\mathcal{A}_{t\,tr} = 945\pi$ cm^2; b) $\mathcal{A}_{t\,con} = 1125\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{con} = 4500\sqrt{3}\,\pi$ cm^3; c) $\sin(\sphericalangle AVB) = \dfrac{24}{25}$. **28.** a) $\mathcal{V}_{tr} = 114\sqrt{2}\,\pi$ cm^3; b) $\mathcal{V}_{con} = 162\sqrt{2}\,\pi$ cm^3; c) $d(M, AA') = 6\sqrt{2}$ cm.

Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

Subiectul I. 1. 48π cm^2. **2.** 10 cm. **3.** 200π cm^3. **4.** 20π cm^2. **5.** 5 cm. **6.** 27π cm^2. **7.** 432π cm^3. **8.** 828π cm^2. **9.** $576\sqrt{3}\pi$ cm^3.

Subiectul al II-lea. 1. a) $OO' = 12$ cm; b) $VO = \dfrac{108}{5}$ cm; c) $\mathcal{V}_{tr} = 2128\pi$ cm^3. **2.** a) Se arată că unghiurile de la baza trapezului de secţiune au $60° \Rightarrow r = 6$ cm, $R = 12$ cm, $G = 12$ cm, $\mathcal{A}_{l\ tr} = 216\pi$ cm^2; b) $\mathcal{V}_{tr} = 504\sqrt{3}\pi$ cm^3; c) $\mathcal{V}_{con} = 576\sqrt{3}\pi$ cm^3; d) $p = 87{,}5\%$.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. 360π cm^3. **2.** 72π cm^3. **3.** 6500π cm^3. **4.** 135π cm^2. **5.** 192π cm^2. **6.** 518π cm^3. **7.** 80π cm^2. **8.** 300π cm^2. **9.** 288π cm^2.

Subiectul al II-lea. 1. a) $OO' = \dfrac{AB + A'B'}{2} \Rightarrow OO' = 12 + r$; $VO' = 12 - r$; $\Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{r}{R} \Rightarrow \dfrac{12 - r}{24} = \dfrac{r}{12} \Rightarrow r = 4$ cm, $R = 12$ cm, $OO' = 16$ cm şi $G = 8\sqrt{5}$ cm; b) $\mathcal{A}_l = 128\sqrt{5}\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{3328\pi}{3}$ cm^3; c) Din $\Delta MO'A' \sim \Delta MOB \Rightarrow \dfrac{O'M}{OM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OM = 12$ cm $= \dfrac{VO}{2}$; $d(M, VB) = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ cm. **2.** a) $R = 6$ cm; $\mathcal{A}_t = 168\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 288\pi$ cm^3; b) $G = 10$ cm; $\mathcal{A}_l = 60\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 96\pi$ cm^3; c) $\dfrac{24}{25}$.

10. Sfera

1. $\mathcal{A} = 144\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 288\pi$ cm^3. **2.** $R = 5\sqrt{5}$ cm $\Rightarrow \mathcal{V} = \dfrac{2500\sqrt{5}\pi}{3}$ cm^3. **3.** $R = 6$ cm; $\mathcal{A} = 144\pi$ cm^2.

4. $\mathcal{A}_{cerc} = 16\pi \Rightarrow r = 4$ cm $\Rightarrow R = 5$ cm $\Rightarrow \mathcal{A} = 100\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{500\pi}{3}$ cm^3. **5.** $\dfrac{4\pi\cdot(2R)^3}{3} = \dfrac{4\pi\cdot 8R^3}{3} = 8\cdot\dfrac{4\pi R^3}{3} = 8\cdot v$; aria sferei mari este jumătate din suma ariilor sferelor mici. **6.** $\dfrac{\mathcal{A}_s}{\mathcal{A}_S} = \dfrac{4\pi r^2}{4\pi R^2} = \dfrac{r^2}{R^2} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2$. **7.** $\dfrac{v}{\mathcal{V}} = \dfrac{\frac{4\pi r^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^3$. **8.** $v = \dfrac{4\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3}{3} = \dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{1}{27}\cdot\mathcal{V}$, deci se obţin 27 de sfere mici. **9.** $\mathcal{A} = 64\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = \dfrac{256\pi}{3}$ cm^3. **10.** $R_s = 10$ cm; $\mathcal{A}_s = 400\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_s = \dfrac{4000\pi}{3}$ cm^3. **11.** $\mathcal{V}_1 = \dfrac{32\pi}{3}$ cm^3; $\mathcal{V}_2 = \dfrac{256\pi}{3}$ cm^3; $\mathcal{V}_3 = \dfrac{864\pi}{3}$ cm^3; $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \dfrac{288\pi}{3} = \dfrac{\mathcal{V}_3}{3}$.
12. $R_s = 3$ cm; $\mathcal{V} = 36\pi$ cm^3. **13.** $R_s = 6$ cm; $\mathcal{A}_s = 144\pi$ cm^2. **14.** $R_s = \dfrac{l\sqrt{3}}{3} = 12$ cm; $\mathcal{A} = 576\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 2304\pi$ cm^3.

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1

Subiectul I. 1. B. **2.** D. **3.** D. **4.** D. **5.** B. **6.** B.

Subiectul al II-lea. 2. $\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{9(a-b)} \in \mathbb{N} \Rightarrow a-b \in \{1, 4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84, 95\}$. Dar $\overline{ab} \,\vdots\, 3 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 54, 87, 51, 84\}$. **3.** 16 fete; 20 de băieți. **4.** b) Raza cercului circumscris triunghiului AOB (unde A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției cu axele de coordonate) este egală cu $\frac{AB}{2} = \sqrt{5}$ (u).

Subiectul al III-lea. 1. a) $\mathscr{P}_{ABC} = AB + BC + AC = 18 + 18 + 18 = 54$ cm; b) $AD = AE = 36$ cm și $\sphericalangle A = 60° \Rightarrow \Delta ADE$ – echilateral și cum DC este mediană $\Rightarrow DC$ este și înălțime $\Rightarrow DC \perp AE$; c) Cum și EB este mediană în ΔADE echilateral $\Rightarrow BE \perp AD$, $BE \cap DC = \{O\} \Rightarrow O$ este ortocentrul $\Delta ADE \Rightarrow AO \perp DE \Rightarrow O$ este centru de greutate pentru $\Delta ADE \Rightarrow \mathscr{A}_{\Delta AOE} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{\Delta AED}$, iar $\mathscr{A}_{\Delta OCE} = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{\Delta AOE} \Rightarrow \mathscr{A}_{\Delta OCE} = 54\sqrt{3}$ cm^2. **2.** a) $AA' = 12$ cm; $\mathscr{A}_t = 192$ cm^2; $\mathscr{V} = 144$ cm^3; b) $\sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle(BD', AD')$; $\sin(\sphericalangle AD'B) = \frac{3}{13}$; c) $\sphericalangle((ADD'), (BDD')) = \sphericalangle ADB$; $\sin(\sphericalangle ADB) = \frac{3}{5}$.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **5.** A. **6.** B.

Subiectul al II-lea. 2. Cum $a + b = 26$ și $ab = 144 \Rightarrow a^2 + b^2 = 388 \Rightarrow (a-b)^2 = 100 \Rightarrow a - b = 10 \Rightarrow a = 18$ și $b = 8$. **3.** 600 km. **4.** b) Dacă $A(0; 2)$, $B(-1; 0)$ și $C(a; 0)$ sunt vârfurile ΔABC dreptunghic, $\sphericalangle CAB = 90° \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow (a+1)^2 = a^2 + 4 + 5 \Rightarrow a = 4$.

Subiectul al III-lea. 1. b) $\Delta ADM \equiv \Delta ABN$ (C.C.) $\Rightarrow \sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle ADM$; cum $\sphericalangle ADM + \sphericalangle DMA = 90° \Rightarrow \sphericalangle BAN + \sphericalangle DMA = 90° \Rightarrow \sphericalangle AQM = 90°$; c) $DQ = \frac{18\sqrt{10}}{5}$ cm. **2.** a) $\mathscr{A}_{cub} = 216$ cm^2; $\mathscr{V} = 216$ cm^3; b) $DC \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle(BD', DC) = \sphericalangle(BD', AB) = \sphericalangle ABD'$; $\operatorname{tg}(\sphericalangle ABD') = \sqrt{2}$; c) $\sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle AD'O = 30°$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

TESTUL 3

Subiectul I. 1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **5.** C. **6.** C.

Subiectul al II-lea. 2. $A = (2^n \cdot 3^n \cdot 5)^2$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}$. **3.** 24 km. **4.** b) $M(-2, -4)$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $l = 8$ cm; $L = 16$ cm; b) În ΔADC, E este centru de greutate $\Rightarrow \frac{OE}{ED} = \frac{1}{2}$; în ΔDBC, F este centru de greutate $\Rightarrow \frac{OF}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OE}{ED} = \frac{OF}{FC} \overset{\text{R.T.Th.}}{\Rightarrow} EF \parallel DC$; c) $\frac{d(E, AD) \cdot AD}{2} = \mathscr{A}_{\Delta ADE} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{\Delta ADC} \Rightarrow d(E, AD) = \frac{16}{3}$ cm. **2.** a) $\mathscr{V} = 1296$ cm^3; b) $\Delta A'MN$ – isoscel cu $A'M = A'N = 6\sqrt{7}$ cm. Dacă P este mijlocul lui MN, $A'P = 6\sqrt{6}$ cm, atunci $\mathscr{A}_{\Delta A'MN} = 36\sqrt{6}$ cm^2; c) ΔAMN – isoscel, cu $AM = AN = 6\sqrt{7}$ cm $\Rightarrow AP \perp MN \Rightarrow \sphericalangle((A'MN), (AMN)) = \sphericalangle APA' \overset{\text{R.T.P.}}{\Rightarrow} \Delta APA'$ – dreptunghic cu $\sphericalangle APA' = 90° \Rightarrow (A'MN) \perp (AMN)$.

TESTUL 4

Subiectul I. 1. A. **2.** B. **3.** C. **4.** D. **5.** A. **6.** C.

Subiectul al II-lea. 2. $a = 3 - 2\sqrt{2}$; $b = 3 + 2\sqrt{2}$; $m_g = 1$. **3.** 260 de pagini. **4.** $a = -1$, $f(x) = 2x - 1$. **5.** b) $n = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2016}$; cum $2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 2^2 \cdot 31$ și sunt 2015 termeni, rezultă că sunt 403 grupe de câte cinci termeni $\Rightarrow n = 2^2 \cdot 31 + 2^7 \cdot 31 + \ldots + 2^{2012} \cdot 31 \Rightarrow 31 \mid n$.

Subiectul al III-lea. 1. b) Cum $\frac{AP \cdot d(G, AP)}{2} = \mathcal{A}_{\Delta AGP} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABP} \Rightarrow d(G, AP) = 6$ cm; c) Dacă G este centru de greutate $\Rightarrow PG$ este mediană $\Rightarrow QN$ este linie mijlocie în $\Delta ABP \Rightarrow QN = 9$ cm. **2.** b) Dacă $D'M \cap DC = \{P\} \Rightarrow (D'MB) \cap (ABC) = BP$. Cum MC este linie mijlocie în $\Delta D'DP \Rightarrow$ $\Rightarrow DC = CP = BC = 6$ cm $\Rightarrow \Delta DBP$ este dreptunghic, $\sphericalangle DBP = 90° \overset{T3\perp}{\Rightarrow} D'B \perp BP \Rightarrow d(D', BP) =$ $= D'B = 6\sqrt{6}$ cm; c) $d(D, (D'BM)) = DQ$, unde $DQ \cap D'B \overset{R_2T3\perp}{\Rightarrow} DQ = 4\sqrt{3}$ cm.

TESTUL 5

Subiectul I. 1. A. **2.** B. **3.** D. **4.** B. **5.** D. **6.** C.

Subiectul al II-lea. 2. $a + b \in \{75, 105\}$. **3.** 16 răspunsuri corecte. **4.** b) $M(-3, -3)$.

Subiectul al III-lea. 1. b) În ΔDBC, BE – mediană $\Rightarrow F$ – centru de greutate $\Rightarrow CF$ – mediană $\Rightarrow$ $\Rightarrow F \in CO \Rightarrow A, F, C$ sunt coliniare; c) $\mathcal{P}_{AEC} = 6(4 + \sqrt{13})$ cm. **2.** b) Dacă P este mijlocul laturii $BC \Rightarrow$ $\Rightarrow NP$ – linie mijlocie $\Rightarrow NP \parallel BD \Rightarrow \sphericalangle(MN, BD) = \sphericalangle(MN, NP)$. Cum $MN = 4\sqrt{2}$ cm și $MP = NP =$ $= 4$ cm $\Rightarrow MN^2 = MP^2 + PN^2 \Rightarrow \Delta MNP$ – dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle PNM = 45°$; c) $\sin(\sphericalangle(MN, (ABC))) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

TESTUL 6

Subiectul I. 1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **5.** A. **6.** C.

Subiectul al II-lea. 2. Se observă că $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40$, iar din cei 2020 de termeni ai sumei se pot face 505 grupe de câte 4 termeni $\Rightarrow A = 40(1 + 3^4 + ... + 3^{2012}) \Rightarrow 10 \mid A$. **3.** 20 de copii și 164 de bomboane. **5.** a) $m \in \{-1, 4\}$.

Subiectul al III-lea. 1. a) P este ortocentru în $\Delta CBN \Rightarrow BP \perp NC$; b) Dacă MN este mediatoare $\Rightarrow$ $\Rightarrow NC = NB$ și cum $\sphericalangle B = 60° \Rightarrow \Delta CNB$ – echilateral cu $BC = 12$ cm. $\mathcal{A}_{CDPM} = \mathcal{A}_{\Delta CDP} + \mathcal{A}_{\Delta CMP}$. $\Delta CDP \equiv \Delta CMP$ (I.U.) $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta CMP} = \frac{1}{6} \mathcal{A}_{\Delta CNB} = 6\sqrt{3}$ cm$^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{CDPM} = 12\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{P} = 4(3 + \sqrt{3})$ cm; c) $\mathcal{A}_{\Delta DPM} = \mathcal{A}_{CDPM} - \mathcal{A}_{\Delta CDM} = 3\sqrt{3}$ cm^2. **2.** a) $\mathcal{A}_l = 324\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 972\sqrt{2}$ cm^3; b) $\text{tg}(\sphericalangle((VBC), (VAC))) = \sqrt{2}$; c) G – centrul de greutate al $\Delta VAC \Rightarrow VG = \frac{2}{3}VO$; $VG = 6\sqrt{2}$ cm. Dacă $GQ \perp VM$ (se arată că $GQ \perp (VBC)$), atunci $\Delta VGQ \sim \Delta VMO \Rightarrow \frac{VG}{VM} = \frac{GQ}{OM} \Rightarrow GQ = 2\sqrt{6}$ cm.

TESTUL 7

Subiectul I. 1. A. **2.** B. **3.** C. **4.** C. **5.** D. **6.** A.

Subiectul al II-lea. 2. Dacă $(a; b) = 6 \Rightarrow a = 6x$ și $b = 6y$, $(x; y) = 1 \Rightarrow 36(x - y)(x + y) = 180 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 3$ și $y = 2 \Rightarrow a = 18$ și $b = 12$. **3.** 6 răspunsuri greșite. **5.** b) $a = 214^2$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 72\sqrt{3}$ cm^2; b) $BM \perp AN$ și BM – bisectoare $\Rightarrow \Delta ABN$ – isoscel și $\sphericalangle B = 60° \Rightarrow \Delta ABN$ – echilateral $\Rightarrow AN = AB = BN = 12$ cm $\Rightarrow NC = 12$ cm. Dacă $AN = BN = NC \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABC$ – dreptunghic, $\sphericalangle A = 90° \Rightarrow AC = 12\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{P}_{\Delta ANC} = 12(2 + \sqrt{3})$ cm; c) $\Delta ABB' \equiv \Delta NBB'$ (L.U.L.) $\Rightarrow NB' = AB'$ și $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle BNB' = 90°$; $\mathcal{A}_{\Delta B'NC} = 24\sqrt{3}$ cm^2. **2.** a) $AB = 18$ cm; $VO = 3\sqrt{6}$ cm; $\mathcal{V} = 243\sqrt{2}$ cm^3; b) $VA \perp VB$ și $VA \perp VC \Rightarrow VA \perp (VBC) \Rightarrow VA \perp VD$; c) $\sphericalangle((VAB), (VAD)) = \sphericalangle BVD =$ $= 45°$.

TESTUL 8

Subiectul I. 1. A. **2.** B. **3.** C. **4.** D. **5.** A. **6.** B.

Subiectul al II-lea. 2. $a = 2$; $b = 8$; $m_g = 4$. **3.** 33 de apartamente cu 3 camere. **4.** b) $x = 4$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $\mathcal{P}_{\Delta ACF} = 12(3+\sqrt{3})$ cm; b) Cum $\sphericalangle F = 30° \Rightarrow BE = 3\sqrt{3}$ cm. În ΔBEC: $BC = 6\sqrt{7}$ cm, $CE = 15$ cm $\Rightarrow \sin(\sphericalangle CBE) = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$; c) $\mathcal{A}_{ABEC} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{BEC} = \dfrac{117\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

2. a) $\dfrac{R}{3} = \dfrac{h}{2} = k$; $k = 6 \Rightarrow R = 18$ cm, $h = 12$ cm, $G = 6\sqrt{13}$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_l = 108\sqrt{13}\pi$ cm^2; b) Dacă $OM \perp BC \overset{T3\perp}{\Rightarrow} VM \perp BC \overset{R_2T3\perp}{\Rightarrow} OQ \perp (VBC)$, unde $OQ \perp VM$; $OM = 9$ cm; $VM = 15$ cm; $OQ = \dfrac{36}{5}$ cm;

c) $R_s = 12$ cm. Cum $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{R_s}{R} \Rightarrow VO' = 8$ cm; $OO' = 4$ cm; $\mathcal{V} = 912\pi$ cm^3.

TESTUL 9

Subiectul I. 1. C. **2.** B. **3.** D. **4.** D. **5.** B. **6.** D.

Subiectul al II-lea. 2. $a = -3$ și $b = 3$. **3.** 10 fete. **5.** b) $A(0, 5)$, $B(5, 0)$ și $M(-2, 0) \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MAB} = \dfrac{MB \cdot AO}{2} = \dfrac{AB \cdot d(M, AB)}{2} \Rightarrow d(M, AB) = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ cm.

Subiectul al III-lea. 1. a) $\mathcal{A}_{\Delta AEC} = 36\sqrt{3}$ cm^2; b) $AE = AC = CE = 12$ cm $\Rightarrow \Delta ACE$ – echilateral, unde $AB \perp CE$, $EO \perp AC \Rightarrow CG \perp AE$; c) $\mathcal{A}_{BOG} = \dfrac{BG \cdot BO \cdot \sin(\sphericalangle ABO)}{2}$; $\sphericalangle ABO = 30°$; $BG = \dfrac{1}{3}AB \Rightarrow \mathcal{A}_{BOG} = 3\sqrt{3}$ cm^2. **2.** a) $\mathcal{A}_t = 1440$ cm^2; $\mathcal{V} = 3456$ cm^3; b) $AD' = 12\sqrt{5}$ cm; $A'M \perp AD'$, $A'M = \dfrac{24\sqrt{5}}{5}$ cm $\Rightarrow d(B', AD') = \dfrac{36\sqrt{5}}{5}$ cm; c) $\sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle AD'O$; $\text{tg}(\sphericalangle AD'O) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

TESTUL 10

Subiectul I. 1. B. **2.** C. **3.** A. **4.** A. **5.** B. **6.** A.

Subiectul al II-lea. 2. $a = 2$; $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $ab - \sqrt{2} = 0$. **3.** 320 km. **4.** a) $a \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $MC = BC = 12$ cm și $\sphericalangle C = 60° \Rightarrow \Delta MBC$ – echilateral $\Rightarrow MB = 12$ cm. Cum DM – linie mijlocie în $\Delta AEB \Rightarrow DE = AD = 12$ cm și $EM = MB = 12$ cm $\Rightarrow \Delta AEB$ – isoscel, $\sphericalangle A = 60° \Rightarrow \Delta AEB$ – echilateral, cu AM mediană $\Rightarrow AM \perp BE$; b) EN – mediană $\Rightarrow EN \perp AB$; c) $\mathcal{A}_{\Delta APE} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{\Delta AEP}$; $\mathcal{A}_{BMPN} = \mathcal{A}_{\Delta BMP} + \mathcal{A}_{\Delta BNP} = \dfrac{1}{6}\mathcal{A}_{\Delta AEB} + \dfrac{1}{6}\mathcal{A}_{\Delta AEB} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{\Delta AEB} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{BMPN}}{\mathcal{A}_{\Delta APE}} = 1$.

2. a) Cum $\mathcal{A}_t = \dfrac{a^2}{2}(\sqrt{3}+6)$ cm$^2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{2} = 18 \Rightarrow a = 6$; b) Cu teorema celor trei perpendiculare se arată că $C'P \perp BP$ și $BP \perp AC \Rightarrow BP \perp (ACC')$ și $BP \subset (BPC') \Rightarrow (BPC') \perp (ACC')$; c) $d(C, (PBC')) = CQ$, unde $CQ \perp PC'$ (se arată cu reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare) $\Rightarrow CQ = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ cm.

RECAPITULARE ŞI EVALUARE FINALĂ

EXERCIŢII ŞI PROBLEME RECAPITULATIVE PENTRU EVALUAREA FINALĂ

ALGEBRĂ

A. 1. a) $-\frac{1}{9}$; b) -3. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$; $y = \frac{3\sqrt{6}}{2}$; $m_g = \sqrt{6}$. **4.** a) $(x-2)^2(x+2)$; b) $(2x+1)(2x-1)(2x+3)$; c) $(x+1)(x-3)$; d) $(x+2)(7-x)$. **5.** a) $x = 2$; $y = 4$; b) $x = 2\sqrt{3}$; $y = 3\sqrt{2}$; c) $x = -3$; $y = 2$; d) $x = 1$; $y = -2$. **6.** $E(x) = (x^2+2x+4)^2 + 3 > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. **7.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{-1, 2\}$; c) $S = \{-4, -2\}$; d) $S = \{-2\}$; e) $S = \{-6\}$; f) $S = \{-3, 4\}$; g) $S = \{-9\}$; h) $S = \left\{-9\sqrt{2}, 11\sqrt{2}\right\}$; i) $S = \left\{-\frac{5}{2}, 2\right\}$. **8.** a) $x \in (-7; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; -4)$; c) $x \in [2; 4]$; d) $x \in [-7; 3]$; e) $x \in (-\infty; 6)$; f) Cum $x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow 2(x+1) - 3(x-2) \le 0 \Rightarrow x \ge 8 \Rightarrow x \in [8; +\infty)$; g) Cum $|x+2| \ge 0 \Rightarrow 4(x+2) - 2(x+5) \ge 0 \Rightarrow x \in [1; +\infty)$; h) $x \in (-3; +\infty)$; i) $|x+2| > 0$, pentru $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \Rightarrow x \in (-7; 1) \setminus \{-2\}$. **9.** $G_f \cap G_g = M(2; 1)$. **10.** b) $x = 3$. **11.** a) $a = -8$; b) $x \in (-\infty; 3]$. **12.** a) $S = \{(3, -2)\}$; b) $S = \{(-2, 1)\}$; c) $S = \{(2, 3)\}$; d) $S = \{(-1, 2)\}$. **13.** a) $a = 7$; b) $x_2 = -3$. **14.** a) $S = \left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$; b) $S = \left\{1, \frac{5}{2}\right\}$; c) $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$; d) $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right\}$. **15.** a) $\frac{(x+1)(x-1)}{3(x-2)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$; b) $\frac{6(x+1)}{x+4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1, 1, 4\}$; c) $\frac{x+2}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$; d) $-\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, 0\}$. **16.** $a = 18$; $b = 24$. **17.** 12 copii; 160 lei. **18.** 20 de fete; 12 băieți. **19.** 13 bănci; 21 de elevi.

B. 1. $A = (-3; 1)$; $B = [-2; 1]$; $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}^* = \{-2, -1\}$. **2.** $E(x) = 4^2$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. **3.** $x = \frac{1}{7}$; $y = \frac{5}{7}$. **4.** $a = -2$; $b = 1$; $c = 1$. a) $a + b = -1 \in \mathbb{Z}$; b) $a + b + c = -2 + 2 = 0$. **5.** $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} = k$. a) $\frac{a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{p}{100} \Rightarrow p = 50\%$; b) $k = 3 \Rightarrow a = 9, b = 12, c = 18$. **6.** a) $a \cdot b = 5$; b) $(a-b)^2 = 2$; c) Dacă $(a-b)^2 = 2 \Rightarrow |a-b| = \sqrt{2} \Rightarrow a - b \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$, dar $a < b \Rightarrow a - b = -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a-b}{\sqrt{2}} = -1 \in \mathbb{Z}$. **7.** $a^2 - b^2 = 1008$; $a = 12x$, $b = 12y$, $(x; y) = 1 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 7 \Rightarrow x - y = 1$ și $x + y = 7 \Rightarrow x = 4$, $y = 3$. **8.** $m = 7x + 4$ și $n = 8y + 5 \Rightarrow n + 3 = [7; 8] \Rightarrow n = 53$ (bomboane). **9.** a) $F(x) = \frac{5}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$; b) $a \in \{-7, -3, -1, 3\}$. **10.** a) $F(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$; b) $a \in \{\pm 1\}$. **11.** a) $S = \{(13, 4)\}$; b) $S = \{(7, 5)\}$; c) $S = \{(6, 9)\}$. **12.** a) $a = 1$; b) $x = 2$. **13.** b) $x = 3$; c) $S = 1125$. **14.** a) $a = 2$; $b = 6$; $f(x) = 2x + 6$; c) $S = 4020$. **15.** a) $S = \{-6, -5\}$; b) $S = \{-2, 3\}$; c) $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$; d) $S = \{-1, 2\}$. **16.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1, 1\}$; b) $E(x) = -\frac{2}{x-1}$; c) $a \in \{0, 2, 3\}$. **17.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; b) $E(x) = \frac{2}{x+2}$; c) $a \in \{-4, -3, -1, 0\}$. **18.** a) $x \in (-\infty; -3)$; b) $x \in (-\infty; 1)$; c) $x \in [2; +\infty)$; d) $x \in (-\infty; -6]$. **19.** 1296 lei. **20.** 21 creioane în prima cutie; 25 creioane în a doua cutie.

GEOMETRIE

A. 1. a) $d = 15$ cm; b) $\mathscr{A}_t = 4(19\sqrt{11}+45)$ cm^2; $\mathscr{V} = 180\sqrt{11}$ cm^3; c) $pr_{(BCC')} AC' = BC' \Rightarrow \Rightarrow \sphericalangle(AC', (BCC')) = \sphericalangle AC'B$; $\sin(\sphericalangle AC'B) = \dfrac{2\sqrt{11}}{15}$. **2.** a) $l = 8$ cm; $d = 8\sqrt{3}$ cm; b) $\sphericalangle((D'AC), (B'AC)) = = \sphericalangle D'OB'$; $\mathscr{A}_{\Delta B'OD'} = \dfrac{B'D' \cdot OO'}{2} = \dfrac{D'O \cdot B'O \cdot \sin(\sphericalangle B'OD')}{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle B'OD') = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; c) $pr_{(BOD')} D'C = = D'O \Rightarrow \sphericalangle(D'C, (BDD')) = \sphericalangle OD'C = 30°$. **3.** a) $l = 12$ cm; $h = 4\sqrt{6}$ cm; $\mathscr{V} = 144\sqrt{2}$ cm^3; b) Fie P mijlocul lui $AC \Rightarrow MP$ – linie mijlocie în $\Delta ADC \Rightarrow MP \parallel AD \Rightarrow \sphericalangle(MN, AD) = \sphericalangle(MN, MP) = \sphericalangle NMP$. Cu reciproca teoremei lui Pitagora se arată că ΔMNP este dreptunghic isoscel; dar $MP = PN = 6$ cm $\Rightarrow \Rightarrow \sphericalangle PMN = 45°$; c) $\sphericalangle((AMB), (ABC)) = \sphericalangle MNC$; $\sin(\sphericalangle MNC) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **4.** a) $\mathscr{V} = 64$ cm^3; b) $d(O, (VBC)) = = \dfrac{12}{5}$ cm; c) $\sin(\sphericalangle((VBC), (VAD))) = \dfrac{24}{25}$. **5.** a) $OO' = 6$ cm; $\mathscr{V}_{tr} = 504\sqrt{3}$ cm^3; b) $\mathscr{A}_t = 432\sqrt{3}$ cm^2; $\mathscr{V} = 576\sqrt{3}$ cm^3; c) $tg(\sphericalangle((A'BC), (ABC))) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **6.** a) $AB = 6$ cm; b) $\mathscr{A}_t = 72(\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{14})$ cm^2; $\mathscr{V} = 216\sqrt{14}$ cm^3; c) Fie $AE \perp BD \overset{T3\perp}{\Rightarrow} D'E \perp AE \Rightarrow AE \perp (BDD') \Rightarrow pr_{(BDD')} AD' = D'E \Rightarrow \Rightarrow \sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle AD'E$; $\sin(\sphericalangle AD'E) = \dfrac{\sqrt{14}}{12}$. **7.** a) $\mathscr{A}_t = 144$ cm^2; $\mathscr{V} = 96\sqrt{3}$ cm^3; b) $\Delta B'OO'$ – isoscel ($B'O = B'O' = 5$ cm) $\Rightarrow d(B', OO') = B'M = \sqrt{21}$, unde M este mijlocul lui OO'; c) OO' – linie mijlocie în $\Delta B'AC \Rightarrow OO' \parallel AC$, deci $OO' \parallel (ABC)$; d) $\Delta BOO'$ – isoscel ($BO = BO' = 5$ cm) $\Rightarrow \Rightarrow BM \perp OO' \Rightarrow \sphericalangle((B'AC), (BA'C')) = \sphericalangle(B'MB)$; $\sin(\sphericalangle BMB') = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ (figura 32). **8.** a) $\mathscr{A}_t = 36\sqrt{3}$ cm^2; $\mathscr{V} = 18\sqrt{2}$ cm^3; b) Dacă $AO \perp (BCD)$ și $NM \perp (BCD) \Rightarrow MN \parallel AO$, deci MN – linie mijlocie în $\Delta AOC \Rightarrow MN = \dfrac{AO}{2} = \sqrt{6}$ cm; c) $d(M, BD) = 3\sqrt{2}$ cm. **9.** a) $\mathscr{A}_{\Delta B'OM} = \mathscr{A}_{BDD'B'} - \mathscr{A}_{\Delta BOB'} - \mathscr{A}_{\Delta MDO} - - \mathscr{A}_{\Delta D'MB'} = 54\sqrt{2}$ cm^2; b) Cu teorema celor trei perpendiculare $\Rightarrow MO \perp AO$ și cum $AO \perp BD \Rightarrow \Rightarrow AO \perp (BDD') \Rightarrow (AMO) \perp (BDD') \Rightarrow (AMO) \perp (B'OM)$; c) Cum MO – linie mijlocie în $\Delta D'DB \Rightarrow \Rightarrow MO \parallel D'B \Rightarrow \sphericalangle(AO, D'B) = \sphericalangle(AO, MO) = 90°$. **10.** a) $d(C, (ABC')) = CQ$, unde $CQ \perp C'D$; $CQ = = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm; b) $BN = MN = 3\sqrt{37}$ cm; $BM = 6\sqrt{10}$ cm $\Rightarrow \mathscr{A}_{\Delta BMN} = \dfrac{BM \cdot NE}{2} = 27\sqrt{30}$ cm^2; c) Dacă $MN \cap AC = \{P\}$, se arată că $(BMN) \cap (ABC) = BP$. Cum NC este linie mijlocie în $\Delta MAP \Rightarrow AC = CP = = BC \Rightarrow \Delta ABP$ este dreptunghic, $\sphericalangle ABP = 90° \overset{T3\perp}{\Rightarrow} MB \perp BP \Rightarrow d(M, BP) = MB = 6\sqrt{10}$ cm (figura 33).

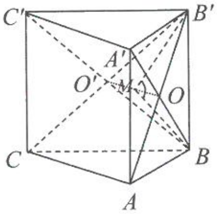


Figura 32

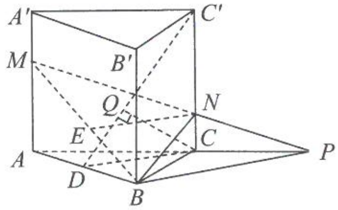


Figura 33

B. 1. a) $d(D', AC) = 12\sqrt{2}$ cm; b) $\sphericalangle((D'AC), (DAC)) = 45°$; c) $\sphericalangle((C'AB), (ABC)) = \sphericalangle C'BC$;

$\text{tg}(\sphericalangle C'BC) = \frac{3}{5}$. **2.** a) Din formula volumului, $R^2 + r^2 + Rr = 684$; dar $R + r = 30 \Rightarrow (R + r)^2 = 900 \Rightarrow$ $\Rightarrow Rr = 216$; cum $(R - r)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \Rightarrow (R - r)^2 = 36$, deci $R - r = 6 \Rightarrow R = 18$ cm și $r = 12$ cm; b) Cum $\frac{VO'}{VO} = \frac{VB'}{VB} = \frac{r}{R} \Rightarrow VO = 18\sqrt{3}$ cm și $VB = 36$ cm; $\mathcal{A}_l = 648\pi$ cm^2; $\mathcal{V}_{con} = 1944\sqrt{3}\,\pi$ cm^3; c) $u° = 180°$. **3.** a) $\mathcal{A}_l = 864$ cm^2; $\mathcal{V} = 1728\sqrt{3}$ cm^3; b) $MB = MA' = 12\sqrt{2}$ cm; $A'B = 12\sqrt{5}$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MBA'} = 36\sqrt{15}$ cm^2; c) Dacă $AM \cap AC = \{P\} \Rightarrow (A'BM) \cap (ABC) = BP$; MC – linie mijlocie în $\Delta A'AP \Rightarrow AC = CP = BC = 12$ cm $\Rightarrow \Delta ABP$ – dreptunghic, $\sphericalangle ABP = 90° \Rightarrow d(A', BP) = A'B = 12\sqrt{5}$ cm. **4.** a) $AB = 12\sqrt{3}$ cm; $SD = 2\sqrt{15}$ cm; $\mathcal{A}_l = 108\sqrt{5}$ cm^2; b) $\sphericalangle(SB, (SAD)) = \sphericalangle BSD$; $\text{tg}(\sphericalangle BSD) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; c) $d(A, (SBC)) = \frac{12\sqrt{15}}{5}$; $d(O, (SBC)) = \frac{4\sqrt{15}}{5}$ cm. **5.** a) $a_p = 6\sqrt{3}$ cm; $VO = 6\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{A}_l = 144\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{V} = 288\sqrt{2}$ cm^3; b) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO = 45°$; c) $\sphericalangle(VB, (VAC)) = \sphericalangle OVB = 45°$; d) $\sin(\sphericalangle(VBC), (VAC)) = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **6.** a) $l = 12$ cm; $d = 12\sqrt{3}$ cm; b) Dacă $DN \perp D'M$, se arată cu teorema celor trei perpendiculare că $AN \perp D'N$, deci $d(A, D'M) = AN$. În $\Delta DD'M$ se calculează DN ca înălțime, folosind formula ariei; $D'M = 6\sqrt{5}$ cm; $DN = \frac{24\sqrt{5}}{5}$ cm $\Rightarrow AN = \frac{36\sqrt{5}}{5}$ cm; c) $\sphericalangle((D'AM), (DD'C)) = \sphericalangle AND$; $\sin(\sphericalangle AND) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **7.** a) Dacă $OA' \perp O'A \Rightarrow OO' = \sqrt{O'A' \cdot OA} = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{V} = 684\sqrt{3}\,\pi$ cm^3; b) $BB' = 3\sqrt{14}$ cm. Cum $\frac{VO'}{VO} = \frac{VB'}{VB} = \frac{r}{R} \Rightarrow VB = 9\sqrt{14}$ cm și $VO = 18\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{l\,con} = 162\sqrt{7}\,\pi$ cm^2; c) $\sphericalangle BOC = \widehat{BC} = 90° \Rightarrow \Delta BOC$ – dreptunghic $\Rightarrow BC = 18$ cm. Dacă $OM \perp BC$, $OM = 9$ cm $\overset{T3\perp}{\Rightarrow} VM \perp BC$, $VM = 9\sqrt{13}$ cm. Dacă $OQ \perp VM \overset{R_2T3\perp}{\Rightarrow} OQ \perp (VBC)$, $OQ = \frac{18\sqrt{39}}{13}$ cm. **8.** a) $\mathcal{A}_t = 1440$ cm^2; $\mathcal{V} = 3600$ cm^3; b) $CD' = 25$ cm; $DE \perp CD'$; $DE = 12$ cm. Cu teorema celor trei perpendiculare $\Rightarrow AE \perp D'C$, $AE = 12\sqrt{2}$ cm; c) $d(D, (D'AC)) = DQ$, unde $DQ \perp AE$ (cu R$_2$T3$\perp$); $DQ = 6\sqrt{2}$ cm. **9.** a) Cum $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{3} = 144\sqrt{2} \Rightarrow l = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_t = 144\sqrt{3}$ cm^2; c) $\mathcal{V}_{ABMD} = \mathcal{V}_{MABD} \Rightarrow d(M, (ABD)) = 2\sqrt{6}$ cm. **10.** a) Cum $\frac{R}{8} = \frac{r}{5} = \frac{h}{4} = k \Rightarrow R = 8k$, $r = 5k$, $h = 4k$ și $G = 5k$; înlocuind în formula ariei laterale $\Rightarrow k = 3 \Rightarrow R = 24$ cm, $r = 15$ cm, $h = 12$ cm, $G = 15$ cm; b) $\mathcal{V} = 4644\pi$ cm^3; c) Cum $\frac{VO'}{VO} = \frac{VB'}{VB} = \frac{r}{R} \Rightarrow VO = 32$ cm și $VB = 40$ cm; $\mathcal{A}_{l\,con} = 960\pi$ cm^2 și $\mathcal{V}_{con} = 6144\pi$ cm^3.

TESTUL 1

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** c). **4.** a). **5.** b). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** d). **5.** c). **6.** d).

Subiectul al III-lea. 1. a) Fie b prețul unei bluze și r prețul unei rochii. Avem $3b + 2r = 295$ și $2b + 5r = 490 \Rightarrow b = 45$ lei. Deci, o bluză nu poate costa 60 lei; b) $r = 80$ lei. **2.** a) $x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 = x(x-2) - 5(x-2) = (x-2)(x-5)$; b) $E(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 9 - (x+3)(x-2)}{(x-2)(x-5)} \cdot \dfrac{x^2-4}{1} = \dfrac{2x^2 - 7x + 9 - x^2 - x + 6}{\cancel{(x-2)}(x-5)} \cdot \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{1} = \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x-5} \cdot \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{(x-3)\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}} \cdot \dfrac{x+2}{1} = (x-3)(x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$. **3.** a) $G_f \cap Ox = \{A(2, 0)\}$, $G_f \cap Oy = \{B(0, 4)\}$; se reprezintă grafic funcția; b) $C(a, b) \in G_f$ astfel încât $C = \text{sim}_A B \Rightarrow AB = AC \Rightarrow x_A = \dfrac{x_B + x_C}{2}$, $y_A = \dfrac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow a = 4, b = -4$. **4.** a) $DF \parallel BC, F \in AB \Rightarrow BCDF$ – paralelogram $\Rightarrow BF = DC = 12$ cm și $DF = BC = 16$ cm. În ΔADF, $AD^2 + DF^2 = AF^2 \Rightarrow \sphericalangle ADF = 90°$ (reciproca teoremei lui Pitagora); b) $\Delta CED \sim \Delta AEF$ $(CD \parallel AF) \Rightarrow \dfrac{CE}{AE} = \dfrac{DE}{EF} = \dfrac{CD}{AF} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{DE}{3} = \dfrac{EF}{5} = \dfrac{16}{8} = 2 \Rightarrow DE = 6$ cm. **5.** a) $AE \perp BD$; în ΔBAD: $\sphericalangle BAD = 90°$, $AE^2 = BE \cdot DE \Rightarrow AE = 20$ cm; b) $AB^2 = BE \cdot BD \Rightarrow AB = 5\sqrt{41}$ cm; $AD^2 = DE \cdot BD \Rightarrow AD = 4\sqrt{41}$ cm; $\mathcal{P} = 2(AB + AD) \Rightarrow \mathcal{P} = 18\sqrt{41}$ cm; $18\sqrt{41} < 117 \Leftrightarrow 2\sqrt{41} < 13 \Leftrightarrow 164 < 169$ (A). **6.** a) $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AO$; $A'O^2 = A'A^2 + AO^2 \Rightarrow A'O = 6\sqrt{6}$ cm; b) $A'B' \parallel DC$, $A'B' = DC$ și $DC \perp (ADD') \Rightarrow A'B'CD$ – dreptunghi $\Rightarrow A'D \parallel B'C$; $\sphericalangle(A'O, B'C) = \sphericalangle(A'O, A'D) = \sphericalangle DA'O$; $\sphericalangle A'OD = 90°$; $\Delta A'BD$ – echilateral $\Rightarrow \sphericalangle DA'O = 30°$.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** c). **5.** d). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) $a + b = 520$ și $120\%a = 75\%b \Leftrightarrow 8a = 5b \Leftrightarrow \dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{520}{13} = 40 \Rightarrow a = 200$, $b = 320$. Deci, prețul obiectului mai ieftin nu poate fi 240 lei; b) $p\%$ din $b = a \Rightarrow \dfrac{p}{100} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{p}{100} = \dfrac{200}{320} \Rightarrow p = \dfrac{125}{2} = 62{,}5$. **2.** a) $E(x) = 4x^2 - 12x + 9 + 2x^2 + 5x - 3 - 9x^2 - 12x - 4 + 19x + 1 \Rightarrow E(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow E(x) = -3(x^2 - 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) $-3(n^2 - 1) > -9 \Leftrightarrow n^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow n^2 < 4 \Leftrightarrow |n| < 2 \Leftrightarrow n \in \{-1, 0, 1\}$. **3.** a) $A(3, -1) \in G_f \Rightarrow f(3) = -1 \Rightarrow 3a + 8 = -1 \Rightarrow a = -3$; b) $f(x) = -3x + 8$; $M(x, x) \in G_f \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow -3x + 8 = x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M(2, 2)$. **4.** a) $MN = \dfrac{AB - CD}{2} \Rightarrow AB - CD = 7$. Fie $CT \perp AB$, $T \in AB \Rightarrow ADCT$ – dreptunghi $\Rightarrow AD = CT$ și $DC = AT \Rightarrow BT = AB - CD = 7$; $\sphericalangle BAC = 30° \Rightarrow \sphericalangle BCT = 30° \Rightarrow$ în ΔBCT: $\sphericalangle BTC = 90° \Rightarrow BC = 2BT \Rightarrow BC = 14$ cm;

b) În ΔBAC: $\sphericalangle BCA = 90°$, $\sphericalangle BAC = 30° \Rightarrow AB = 2BC \Rightarrow AB = 28$ cm. **5.** a) $\Delta DAE \equiv \Delta ABF$ (C.C.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow DE \equiv AF$ și $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BAF = a$, $\sphericalangle AED = \sphericalangle AFB = b$. În ΔADE, $\sphericalangle DAE = 90° \Rightarrow \sphericalangle ADE + \sphericalangle AED =$ $= 90° \Rightarrow a + b = 90°$. În ΔAGE: $\sphericalangle GAE + \sphericalangle GEA = a + b = 90° \Rightarrow \sphericalangle AGE = 90° \Rightarrow \sphericalangle DGF = 90°$; b) $\mathcal{A}_{\Delta ADG} = \dfrac{AG \cdot DG}{2}$; $DE = 15\sqrt{5}$ cm; $AG = \dfrac{AD \cdot AE}{DE} = 6\sqrt{5}$ cm; $AD^2 = DG \cdot DE \Rightarrow DG =$ $= 12\sqrt{5}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta ADG} = 180$ cm^2. **6.** a) $OA = \dfrac{AC}{2} = 6\sqrt{2}$ cm. În ΔVOA, cu $\sphericalangle VOA = 90°$: $VA^2 = VO^2 +$ $+ OA^2 \Rightarrow VA^2 = 6^2 \cdot 7 + 6^2 \cdot 2 \Rightarrow VA = 18$ cm; b) $\Delta ECB \equiv \Delta ECD$ (L.U.L.) $\Rightarrow BE = DE \Rightarrow 2BE =$ $= 24$ cm $\Rightarrow BE = 12$ cm $\Rightarrow \Delta BCE \sim \Delta VCB \Rightarrow \dfrac{BC}{VC} = \dfrac{EC}{BC} \Rightarrow EC = 8$ cm $\Rightarrow VE = VC - EC = 10$ cm.

TESTUL 3

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** d). **5.** b). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** b). **6.** a).

Subiectul al III-lea. 1. a) $2a - 3b = 325$ și $\dfrac{1}{5}a = \dfrac{1}{3}b + 30 \Rightarrow 3a + 5b = 450 \Rightarrow b = 75$. Deci, numărul mai mic nu poate fi egal cu 80; b) $a = 275$. **2.** a) $E(x) = (x^2 - 2x)^2 + 6(x^2 - 2x) + 9 -$ $- (x^2 - 2x)^2 - 6x^2 + 14x - 5$; $E(x) = 6x^2 - 12x + 9 - 6x^2 + 14x - 5 \Rightarrow E(x) = 2x + 4$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$; b) $E(n) = 2n + 4 \Rightarrow 2n + 4 < 12 \Rightarrow 2n < 8 \Rightarrow n < 4 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3\}$. **3.** a) $G_f \cap Oy = \{A(0, 6)\}$, $G_f \cap Ox = \{B(2, 0)\}$; se reprezintă grafic funcția; b) În ΔABP, $AP \cdot BO = AB \cdot d(P, AB) \Rightarrow 8 \cdot 2 =$ $= 2\sqrt{10} \cdot d(P, AB) \Rightarrow d(P, AB) = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$. **4.** a) $BE = 4\sqrt{5}$ cm; $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle AEB = \sphericalangle EFD \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta EDF \sim \Delta BAE \Rightarrow \dfrac{ED}{AB} = \dfrac{EF}{BF} = \dfrac{FD}{AE} \Rightarrow FD = 2$ cm $\Rightarrow CF = 6$ cm; b) $\Delta EFD \sim \Delta GFC \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{FD}{FC} = \dfrac{ED}{CG} = \dfrac{EF}{GF}$; $EF^2 = ED^2 + FD^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow EF = 2\sqrt{5}$ cm $\Rightarrow FG = 6\sqrt{5}$ cm. **5.** a) Din $ABCD$ – trapez dreptunghic și $AC \perp BD \Rightarrow AD^2 = CD \cdot AB$ și cum $AB = 4CD \Rightarrow AD^2 + 4CD^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow AD = 2CD \Rightarrow CD = 9$ cm; $AB = 36$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 405$ cm^2. **6.** a) BM – minim $\Rightarrow BM \perp VA$; $CM \perp VA$ (deoarece $\Delta MAB \equiv \Delta MAC$ (L.U.L.) $\Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC \Rightarrow \sphericalangle AMC = 90° \Rightarrow CM \perp VA$); Deci, $VA \perp BM$, $VA \perp CM$ și $BM \cap CM = \{M\} \Rightarrow VA \perp (MBC)$; b) VD – apotema piramidei; în ΔVBD, cu $\sphericalangle VDB = 90°$, $VD^2 = VB^2 - BD^2 = 96 - 36 = 60 \Rightarrow VD = 2\sqrt{15}$ cm $\Rightarrow a_p = 2\sqrt{15}$ cm. În ΔVAB: $VA \cdot BM = AB \cdot a_p \Rightarrow BM = 3\sqrt{10}$ cm; În ΔMDB, $\sphericalangle MDB = 90°$: $MD^2 = MB^2 - BD^2 =$ $= 90 - 36 = 54 \Rightarrow MD = 3\sqrt{6}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta MBC} = \dfrac{BC \cdot MD}{2} = 18\sqrt{6}$ cm^2.

TESTUL 4

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** c). **4.** b). **5.** c). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** d). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) Notând cu c – numărul răspunsurilor corecte și cu g numărul răspunsurilor greșite, obținem: $c + g = 30$ și $8c - 5g = 162 \Rightarrow c = 24$. Deci, nu este posibil ca elevul să fi dat 26 de răspunsuri corecte; b) $g = 6$. **2.** a) $2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = 2x(x - 2) - (x - 2) =$ $= (x - 2)(2x - 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) $E(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 4\right\}$;

$E(n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{n-2}{n-4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-4 \mid n-2 \Rightarrow n-4 \mid 2 \Rightarrow n-4 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow n \in \{2, 3, 5, 6\}$.

3. a) $A(2, 1) \in G_f \Rightarrow f(2) = 1$; $C(-3, -14) \in G_f \Rightarrow f(-3) = -14$. Rezultă că $\begin{cases} 2a+b=1 \\ -3a+b=-14 \end{cases} \Rightarrow a = 3$ și $b =$ $= -5 \Rightarrow f(x) = 3x - 5$; b) $f(-1) = -3 - 5 = -8 \Rightarrow B(-1, -8) \in G_f \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare. **4.** a) $AE \parallel BD$ (ipoteză) și $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp AE \Rightarrow \sphericalangle EAC = 90° \Rightarrow \Delta AEC$ – dreptunghic; b) $AB \parallel CD$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB \parallel ED$, dar și $AE \parallel BD \Rightarrow ABDE$ – paralelogram $\Rightarrow AB = ED$. În ΔAEC, cu teorema înălțimii: $AD^2 = DE \cdot DC = AB \cdot DC \Rightarrow AD = 24$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 600$ cm^2. **5.** a) $\sphericalangle ABC = 120° \Rightarrow \sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC =$ $= 60°$; $AB = BC$ (ipoteză) $\Rightarrow \sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$ (1); $AB \parallel CD \Rightarrow \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ (alterne interne) (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \sphericalangle BCA = \sphericalangle ACD = 30°$ și cum $\sphericalangle ADC = 60° \Rightarrow \sphericalangle DAC = 90° \Rightarrow AC \perp AD$; b) $DC =$ $= 2AD \Rightarrow DC = 12\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AC = 18$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{\Delta ADC} = 18\sqrt{3} + 18$ cm; $18\sqrt{3} + 18 < 54 \Rightarrow 18\sqrt{3} < 36 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{3} < 2$ (A). **6.** a) $\text{pr}_{(B'BC)}\, O = E$, $E \in BC$ astfel încât $BE = CE$; $\text{pr}_{(B'BC)}\, OC' = EC' \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle(OC', (B'BC)) = \sphericalangle(OC', \text{pr}_{(B'BC)}\, OC') = \sphericalangle(OC', EC') = \sphericalangle OC'E$; $OE \perp (B'BC) \Rightarrow OE \perp EC'$; $\sin(\sphericalangle OC'E) = \dfrac{OE}{OC'} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $OC'^2 = OC^2 + CC'^2 = 8^2 + 8^2 \cdot 3 = 8^2 \cdot 4 \Rightarrow OC' = 16$ cm; b) Cu teorema celor trei perpendiculare obținem $C'O \perp BD$ și $MO \perp BD \Rightarrow \sphericalangle((MBD), (C'BD)) = \sphericalangle(MO, C'O) =$ $= \sphericalangle MOC'$; ΔMAO – dreptunghic isoscel ($MA = AO = 8$ cm) $\Rightarrow \sphericalangle MOA = 45°$; în $\Delta C'CO$ – dreptunghic ($\sphericalangle C'CO = 90°$): $\sphericalangle C'OC = 60°$ și $\sphericalangle MOC' = 180° - (\sphericalangle MOA + \sphericalangle C'OC) = 180° - 105° =$ $= 75°$.

TESTUL 5

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** a). **4.** d). **5.** c). **6.** b).

Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** b). **3.** c). **4.** b). **5.** d). **6.** d).

Subiectul al III-lea. 1. a) Excursionistul parcurge în prima zi $20\%x$, rest $80\%x$; a doua zi: $\dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{80}{100} x = 48\%x$; a treia zi: restul – $32\%x$. Deci, cel mai mult a parcurs în ziua a doua; b) $32\%x =$ $= 480 \Rightarrow \dfrac{^{(4}32}{100} x = 480 \Rightarrow \dfrac{8x}{25} = 480 \mid : 8 \Rightarrow \dfrac{x}{25} = 60 \Rightarrow x = 1500$ km. În a doua zi, distanța parcursă a fost $\dfrac{48}{100} \cdot 1500 = 720$ km. **2.** a) $E(x) = x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 4x + 4) - 4x - 16 - 9 \Rightarrow E(x) =$ $= 6x - 20$, pentru orice număr real x; b) $6n - 20 < n - 5 \Rightarrow 5n < 15 \Rightarrow n < 3 \Rightarrow n \in \{0, 1, 2\}$. **3.** a) $AC = BC = 8$; $\sphericalangle ACB = 90° \Rightarrow \Delta ACB$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB = 8\sqrt{2} \Rightarrow \text{d}(C, AB) = \dfrac{AB}{2} =$ $= 4\sqrt{2}$; b) În ΔABC, AM este mediană $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABM} = \dfrac{1}{2} \mathcal{A}_{\Delta ACB} = 16$. **4.** a) În ΔAOB dreptunghic isoscel: $OA = OB$, $\sphericalangle AOB = 90°$ (ipoteză), $OM \perp AB \Rightarrow OM = \dfrac{AB}{2}$ (1). În ΔCOD dreptunghic isoscel: $OC = OD$, $\sphericalangle COD = 90°$ (ipoteză), $ON \perp CD \Rightarrow ON = \dfrac{CD}{2}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MN = OM + ON = \dfrac{AB + CD}{2}$; b) Fie $CP \perp AB$, $P \in AB$. Cum $\sphericalangle OAB = 45° \Rightarrow \sphericalangle CAP = 45°$; $CP = 20$ cm. În ΔCAP: $\sin 45° = \dfrac{CP}{AC} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{20}{AC} \Rightarrow AC = 20\sqrt{2}$ cm. **5.** a) $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ (I.U.) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} \Rightarrow \dfrac{12}{18} = \dfrac{AN}{24} =$

$= \frac{MN}{30} \Rightarrow MN = 20$ cm; b) $\mathcal{A}_{MNBC} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{AMN} = 120$ cm^2. **6.** a) Fie $DM \perp AC$, $M \in AC$, $DD' \perp$ $\perp (ABC)$; $DM, AC \subset (ABC) \Rightarrow D'M \perp AC \Rightarrow d(D', AC) = D'M$; $AC = 12$ cm $\Rightarrow DM = 3\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow D'M = 3\sqrt{6}$ cm; b) $(D'DB) \cap (BCC') = BB'$; $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp BC$ şi $BB' \perp BD$. Deci, $\sphericalangle((D'DB), (BCC')) = \sphericalangle(BC, BD) = \sphericalangle CBD$. În ΔBCD, cu $\sphericalangle BCD = 90° \Rightarrow \operatorname{tg}(\sphericalangle CBD) = \frac{CD}{CB} = \sqrt{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle CBD = 60°$.

TESTUL 6

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** b). **4.** c). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** b). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) D · 0,(3) = M · 0,25 = R · 0,2 $\Leftrightarrow \frac{D}{3} = \frac{M}{4} = \frac{R}{5} = k \Rightarrow$ D = $3k$, M = $4k$ şi R = $5k$, deci Rareş a primit cei mai mulţi bani; b) $R - D = 120 \Rightarrow k = 60$ de lei $\Rightarrow$ Mara a primit 240 de lei. **2.** a) $E(x) = x + \frac{x-2+8-x^2}{(x-2)(x-4)} \cdot \frac{2(x-2)}{x+2} + \frac{2}{x-4} = x - \frac{x^2-x-6}{x-4} \cdot \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x-4} =$ $= x - \frac{2x-6}{x-4} + \frac{2}{x-4} = \frac{x^2-4x-2x+6+2}{x-4} = \frac{x^2-6x+8}{x-4} = \frac{(x-4)(x-2)}{x-4} = x - 2$; b) $E(n) +$ $+ 3\sqrt{7} = \frac{1}{E(n)-3\sqrt{7}} \Leftrightarrow E^2(n) - 63 = 1 \Leftrightarrow |E(n)| = 8 \Leftrightarrow |n-2| = 8 \Leftrightarrow n \in \{-6, 10\}$. **3.** a) $A(2, 0) \in$ $\in G_f \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = -2; f(x) = -2x + 4$; b) $\operatorname{tg}(\sphericalangle OPQ) = |m| \Rightarrow |m| = 9 \Rightarrow m \in \{-3, 3\}$.
4. a) $DC \parallel AB$ şi $DC = \frac{AB}{2} \Rightarrow DC$ este linie mijlocie în $\Delta MAB \Rightarrow AD = MD = 13$ cm şi $BC = MC =$ $= 15$ cm. $\mathcal{P}_{MCD} = 42$ cm; b) $\Delta MDC \sim \Delta MAB$ $(DC \parallel AB) \overset{\text{T.F.A.}}{\Rightarrow} \frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MB} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{2}$; $\frac{\mathcal{A}_{MDC}}{\mathcal{A}_{MAB}} =$ $= \left(\frac{DC}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{MAB} - \mathcal{A}_{MDC}}{\mathcal{A}_{MAB}} = \frac{4-1}{3} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{MAB}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{3}{4} \cdot \mathcal{A}_{MAB}$. **5.** a) Fie $AM \perp BC$, $M \in BC$ şi $AM \cap DE = \{N\}$, $N \in DE$; $AM = 20$ cm; $BCED$ – trapez isoscel ortodiagonal $\Rightarrow$ $\Rightarrow MN = \frac{BC+DE}{2}$. Notăm $DE = x \Rightarrow MN = \frac{30+x}{2}$; $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ $(DE \parallel BC) \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} =$ $= \frac{DE}{BC} = \frac{AN}{AM} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AN}{AM} \Rightarrow \frac{x}{30} = \frac{20 - \frac{30+x}{2}}{20} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{40-30-x}{4} \Rightarrow x = \frac{30}{7} \Rightarrow DE =$ $= \frac{30}{7}$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle BAC)}{2} \Leftrightarrow \frac{30 \cdot 20}{2} = \frac{25 \cdot 25 \cdot \sin(\sphericalangle BAC)}{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle BAC) = \frac{24}{25}$.
6. a) $\Delta ABO \equiv \Delta D'C'O$ (CC) $\Rightarrow AO \equiv D'O \Rightarrow \Delta AOD'$ – isoscel; $BC' = 12$ cm $\Rightarrow BO = C'O = 6$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow AO = D'O = 6\sqrt{2}$ cm. Dar cum $AO^2 + D'O^2 = 6^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 2 = 6^2 \cdot 4 = 12^2 = AD'^2 \Rightarrow \Delta AOD'$ – dreptunghic isoscel; $\mathcal{A}_{AOD'} = \frac{AO \cdot D'O}{2} = 36$ cm^2; b) $BC' \parallel AD' \Rightarrow BO \parallel AD' \Rightarrow \sphericalangle(AC, BO) =$ $= \sphericalangle(AC, AD') = \sphericalangle D'AC$. Triunghiul $D'AC$ este isoscel $\Rightarrow AD' = CD' = 12$ cm; $AC \cap BD = \{E\} \Rightarrow$ $\Rightarrow D'E \perp AC$. În $\Delta AD'E$: $\sin(\sphericalangle D'AC) = \frac{D'E}{AD'}$ şi cum $D'E = 3\sqrt{14}$ cm $\Rightarrow \sin(\sphericalangle D'AC) = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

1. Operații cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere 5
   1.1. Adunarea și scăderea 5
   1.2. Înmulțirea. Împărțirea. Ridicarea la putere 8
   1.3. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 10

Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 18
Recapitulare și sistematizare prin teste 19
Test de autoevaluare 21

2. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ 23

Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 27
Test de autoevaluare 29

Capitolul II. FUNCȚII

1. Funcții definite pe mulțimi finite 32
2. Funcția liniară 37

Recapitulare și sistematizare prin teste 48
Test de autoevaluare 53

3. Elemente de statistică 55

Capitolul III. TEME PENTRU RECAPITULAREA FINALĂ ÎN VEDEREA EVALUĂRII NAȚIONALE

1. Numere naturale. Puteri cu exponent număr natural. Divizibilitate 62
2. Rapoarte. Proporții. Proporționalitate 64
3. Procente 66
4. Numere reale 68
5. Calcul algebric 70
6. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ 75
7. Probleme de aritmetică ce se pot rezolva cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații 77
8. Inecuații 80
9. Funcții 81

Recapitulare și sistematizare prin teste 84
Test de autoevaluare 1 89
Test de autoevaluare 2 91

GEOMETRIE

Capitolul I. ARII ȘI VOLUME

1. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate 93
2. Prisma patrularerǎ regulată dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic 98
3. Cubul 102
4. Prisma triunghiulară regulată 105

Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 108
Recapitulare și sistematizare prin teste 110

Test de autoevaluare 113
5. Piramida regulată 115
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 120
Recapitulare și sistematizare prin teste 122
Test de autoevaluare 125
6. Trunchiul de piramidă regulată 127
Recapitulare și sistematizare prin teste 130
Test de autoevaluare 133
7. Cilindrul circular drept 135
8. Conul circular drept 137
Test de autoevaluare 141
9. Trunchiul de con circular drept 143
Recapitulare și sistematizare prin teste 149
Test de autoevaluare 147
10. Sfera 151

TESTE RECAPITULATIVE 152

RECAPITULARE ȘI EVALUARE FINALĂ
Exerciții și probleme recapitulative pentru evaluarea finală 167
ALGEBRĂ 167
GEOMETRIE 171
Modele de teste pentru Evaluarea Națională 174

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 189

Seria de lucrări
MATE 2000+ CONSOLIDARE,
destinată claselor de gimnaziu, respectă toate cerințele programei referitoare la *competențe generale, competențe specifice* și *conținuturi*, oferind *sugestii metodologice* dintre cele mai atractive.

Prin urmare, pentru fiecare capitol din programă sunt prevăzute:

- **un text teoretic succint, obligatoriu** (rezumat al conținuturilor învățării propuse de programă), care cuprinde **noțiuni și relații** (introduse prin definiții și notații corespunzătoare), **proprietăți** (teoreme, propoziții etc.), **metode** (reguli de calcul, algoritmi de lucru etc.). Pentru a fi bine înțelese și reținute de elevi, noțiunile teoretice sunt însoțite de exemple și modele de rezolvări;
- **un text teoretic neobligatoriu**, destinat aprofundării suplimentare de către elevii preocupați de performanță a conținuturilor propuse de programă, în vederea obținerii unor rezultate deosebite la concursuri și olimpiade școlare;
- **activități de consolidare a învățării**, pentru lucrul la clasă și pentru acasă (afterschool, homeschooling), care grupează tipuri diverse de exerciții și probleme pe trei niveluri progresive: **1) înțelegere; 2) aplicare și exersare; 3) aprofundare și performanță**. Această abordare modulară permite aplicarea metodei interactive moderne de învățare centrată pe elev *știu / vreau să știu / am învățat*;
- utilizarea algoritmilor și conceptelor matematice de bază în activitatea practică (**matematica aplicată în viața cotidiană**) ca metodă modernă de învățare;
- **evaluări ale progresului învățării** prin teste conforme cu **standardele** Ministerului Educației și Cercetării;
- **aplicație destinată învățării în sistem online**; prin scanarea QR CODE-ului prezent în interiorul volumului tipărit, se oferă (în premieră pe piața cărții din România) acces la activități de predare aflate în strânsă legătură atât cu conținuturile programei, cât și cu cele ale volumului tipărit.

ISBN 978-973-47-3887-8
Partea II ISBN 978-973-47-3919-6
9 789734 739196 >

EDITURA PARALELA 45 EDUCAȚIONAL