Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_3 = b_1 \cdot q^2 =$	**3p**
	$= 1 \cdot 5^2 = 25$	**2p**
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$	**2p**
	$x = 2$, $x = 3$	**3p**
3.	$\sqrt{2x} = 4 - x \Rightarrow 2x = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$	**3p**
	$x = 2$, care convine, $x = 8$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 49 de elemente, deci sunt 49 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$	**1p**
5.	Punctul $M(-3,3)$ este mijlocul laturii BC	**2p**
	Ecuația medianei din A este $y = 3$	**3p**
6.	$\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos x\sin x + 3\cos^2 x =$	**2p**
	$= 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - (-4)\cdot 4 =$	**3p**
	$= 1 + 16 = 17$	**2p**
b)	$A(2019-a) + A(2019+a) = \begin{pmatrix} 2019-a & 4 \\ -4 & 2019-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2019+a & 4 \\ -4 & 2019+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4038 & 8 \\ -8 & 4038 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 2019 & 4 \\ -4 & 2019 \end{pmatrix} = 2A(2019)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 4 \\ -4 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 4 \\ -4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy-16 & 4x+4y \\ -4x-4y & xy-16 \end{pmatrix}$, $2A(-8) = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$	**3p**
	$xy = 0$ și $x + y = 2$, deci $x = 0$, $y = 2$ sau $x = 2$, $y = 0$	**2p**
2.a)	$x * 0 = \frac{4x + 4\cdot 0}{4 + x\cdot 0} = \frac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$	**2p**
	$0 * x = \frac{4\cdot 0 + 4\cdot x}{4 + 0\cdot x} = \frac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$, deci 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”	**3p**
b)	$\frac{8x}{4 + x^2} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care convine, $x = 4$, care nu convine	**2p**

c)	$f(x)*f(y)=\dfrac{4f(x)+4f(y)}{4+f(x)f(y)}=\dfrac{4\cdot\dfrac{2(x-1)}{x+1}+4\cdot\dfrac{2(y-1)}{y+1}}{4+\dfrac{4(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}}=\dfrac{2(xy+x-y-1+xy-x+y-1)}{xy+x+y+1+xy-x-y+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{4(xy-1)}{2(xy+1)}=\dfrac{2(xy-1)}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-2+\dfrac{2}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{-2x-2+2}{x+1}=\dfrac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(0)\Rightarrow 1-2x+2\ln(x+1)\leq 1$, deci $\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$\cos x>-1$, pentru orice $x\in(0,\pi)$, deci $\ln(1+\cos x)\leq\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$	**2p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}f(x)e^{x}dx=\int_{-1}^{1}(x+3)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+3x\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\left(\dfrac{1}{2}+3\right)-\left(\dfrac{1}{2}-3\right)=6$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{x+3}{e^{x}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{0}^{n}\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_{0}^{n}(x+3)e^{-x}dx=-(x+4)e^{-x}\Big\vert_{0}^{n}=-(n+4)e^{-n}+4$	**3p**
	$-(n+4)e^{-n}+4=4-6e^{-n}$, de unde obținem $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și rația $q = 5$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 5$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x} + x = 4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-3,0)$ și $C(-3,6)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1)) = 17$.

5p **b)** Demonstrați că $A(2019 - a) + A(2019 + a) = 2A(2019)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați perechile de numere reale x și y, pentru care $A(x)A(y) = 2A(-8)$.

2. Pe mulţimea $G = (-2, 2)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{4x + 4y}{4 + xy}$.

5p **a)** Arătaţi că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **b)** Determinaţi $x \in G$, pentru care $x * x = \dfrac{8}{5}$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Demonstrați că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x + 2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$, $x \in (-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x$, pentru orice $x \in (0, \pi)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x dx = 6$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = n$ are aria egală cu $4 - 6e^{-n}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=4$, $a_3=6$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=2+4+6=12$	**3p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-10x+9=0$	**3p**
	Abscisele sunt $x=1$ și $x=9$	**2p**
3.	$5^x(5-3)=2 \Leftrightarrow 5^x\cdot 2=2 \Leftrightarrow 5^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A este un singur număr care verifică ecuația, deci este un caz favorabil	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul laturii BC	**3p**
	$AM=\sqrt{3}$, deci lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ este egală cu $2\sqrt{3}$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$	**2p**
	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2(x+\pi)=\cos^2 x+\sin^2 x=1$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{vmatrix}=5\cdot(-2)-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-10+12=2$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+4a & -6a\\ 2a & 1-3a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+4b & -6b\\ 2b & 1-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4a+4b+4ab & -6b-6ab-6a\\ 2a+2ab+2b & 1-3a-3b-3ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+4(a+b+ab) & -6(a+b+ab)\\ 2(a+b+ab) & 1-3(a+b+ab)\end{pmatrix}=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(m+n+mn)=A(2) \Leftrightarrow m+n+mn=2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, $(m+1)(n+1)=3 \Rightarrow m=2$, $n=0$ sau $m=0$, $n=2$	**3p**
2.a)	$x\circ y=2xy-2x-2y+2+1=$	**2p**
	$=2x(y-1)-2(y-1)+1=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x\circ x=2(x-1)^2+1$, de unde obținem $(x-1)^2\le 4$	**2p**
	$x\in[-1,3]$	**3p**
c)	$1\circ x=1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n=1\circ\left(2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n\right)=1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(e\ln x)'=$	**2p**
	$=1-e\cdot\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$a-e=0\Leftrightarrow a=e$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,e)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,e)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(e,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e,+\infty)$	**2p**
	$e^x=x^e\Leftrightarrow x=\ln x^e\Leftrightarrow f(x)=0$ și, cum f este continuă și $f(e)=0$, ecuația $e^x=x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^3(x-1)(x+1)dx=\int_0^3(x^2-1)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=9-3=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^2(x^2-1)e^xdx=(x^2-1)e^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=$	**2p**
	$=3e^2-0-2(x-1)e^x\Big\vert_1^2=3e^2-2e^2=e^2$	**3p**
c)	$\int_2^a\frac{2xe^x}{f(x)}dx=\int_2^a\frac{2x}{x^2-1}dx=\ln(x^2-1)\Big\vert_2^a=\ln\frac{a^2-1}{3}$	**3p**
	$\ln\frac{a^2-1}{3}=3\ln 2\Leftrightarrow a^2-25=0$ și, cum a este număr real, $a>2$, obținem $a=5$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ și rația $r = 2$.
5p	**2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 9$ cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1} - 3\cdot 5^x = 2$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 4x + 4 = 0$.
5p	**5.** Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, știind că triunghiul ABC este echilateral și $AB = 2$.
5p	**6.** Arătați că $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(x + \pi) = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1+4a & -6a \\ 2a & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n) = A(2)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.
5p	**a)** Arătați că $x \circ y = 2(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq 9$.
5p	**c)** Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2019^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x^e$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-e}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Demonstraţi că ecuația $e^x = x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+1)e^x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx = 6$.
5p	**b)** Determinaţi aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = 2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a > 2$, ştiind că $\int_2^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx = 3\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}=\frac{(1+i)-(1-i)}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$	**3p**
	$a=i^2=-1$, care este număr întreg	**2p**
2.	$\Delta=49-4m$	**2p**
	$\Delta\ge 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{49}{4}\right]$, deci cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 12	**3p**
3.	$3^x\left(1+3+3^2\right)=117\Leftrightarrow 3^x=9$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$C_n^2=36$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii	**3p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=36$, deci $n=9$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(1,-1)$	**2p**
	Ecuația medianei din C este $y+1=\frac{1}{2}(x-1)$, deci $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$	**3p**
6.	$\cos x\sin x+\sin x\cos x=1\Leftrightarrow\sin 2x=1$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+0+0-3-0-0=-5$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&1\\3&2a-1&1\\a-3&a&1\end{vmatrix}=-a^2+6a-5$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=1$ sau $a=5$	**2p**
c)	Pentru $a=1$, sistemul este $\begin{cases}2x+y+z=1\\3x+y+z=1\\-2x+y+z=1\end{cases}$ și, scăzând primele două ecuații, obținem $x_0=0$, deci $y_0+z_0=1$	**3p**
	$x_0^2=y_0z_0\Rightarrow y_0z_0=0$, deci soluțiile sunt $(0,1,0)$ sau $(0,0,1)$, care convin	**2p**

2.a)	$x * y = 5xy - 5x - 5y + 5 + 1 =$	**3p**
	$= 5x(y-1) - 5(y-1) + 1 = 5(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$x * x = 5(x-1)^2 + 1$, $x * x * x = 25(x-1)^3 + 1$	**2p**
	$(x-1)^3 < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$	**3p**
c)	$25\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\left(\frac{1}{n+1}+1\right)\left(\frac{1}{n+2}-1\right)\left(\frac{1}{n+2}+1\right)+1=-19 \Leftrightarrow \frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}=-\frac{4}{5}$	**3p**
	Cum n este număr natural nenul, obținem $n = 3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x - 2(x-1)}{x^2} =$	**3p**
	$= \frac{x - 2x + 2x - 2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = x \Leftrightarrow f'(a) = -1$	**3p**
	$\frac{a-2}{a^2} = -1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$, care nu convine sau $a = 1$, care convine	**2p**
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0,2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,2)$	**2p**
	$0 < 1 < \frac{\pi}{2} < 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(1)$ și, cum $f(1) = 0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big\|_0^3 =$	**3p**
	$= \frac{27}{3} + 3 - 0 = 12$	**2p**
b)	$g(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^1 \|g(x)\| dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2}\ln 2$	**2p**
c)	Funcția $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^x e^{f(t)}dt - x$ este derivabilă și $h'(x) = e^{x^2+1} - 1$	**2p**
	$h'(x) > 0$ pentru orice număr real x, deci h este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow h$ este injectivă și, cum $h(0) = 0$, există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt = x$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că numărul $a=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2-7x+m=0$ sunt numere reale.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 36 de submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$. Determinaţi ecuaţia medianei din C a triunghiului ABC.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=1$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\\ a-3 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=-5$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy-5(x+y)+6$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<26$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-19$.

SUBIECTUL al III-lea –- Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x$.
5p	**c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(a+ib)+2(a-ib)=5+2i \Leftrightarrow 5a+ib=5+2i$, unde $z=a+ib$ cu a și b numere reale	**3p**
	$a=1$ și $b=2$, deci $z=1+2i$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=f(x+a)=x+2a$, $(f\circ f\circ f)(x)=x+3a$	**3p**
	$x+3a=x+3$, pentru orice număr real x, deci $a=1$	**2p**
3.	$\log_3 \frac{2x+3}{x}=1 \Rightarrow \frac{2x+3}{x}=3$	**3p**
	$2x+3=3x \Rightarrow x=3$, care convine	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 90 de numere naturale de trei cifre care se divid cu 10, deci sunt 90 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$\frac{a+1}{1}=\frac{5a-1}{3} \Leftrightarrow 3a+3=5a-1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	$\sin A=\frac{4}{5}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}=\frac{6\cdot 10\cdot \frac{4}{5}}{2}=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\4&0&5\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(-1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\4&0&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-4)-0-0=4$	**3p**
b)	$M(x)+M(y)=\begin{pmatrix}x+1&0&x+2\\0&x&0\\3-x&0&4-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y+1&0&y+2\\0&y&0\\3-y&0&4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2&0&x+y+4\\0&x+y&0\\6-x-y&0&8-x-y\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\3&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(x+y)+1&0&(x+y)+2\\0&x+y&0\\3-(x+y)&0&4-(x+y)\end{pmatrix}=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$M(m)\cdot M(1)=\begin{pmatrix}4m+6 & 0 & 6m+9\\ 0 & m & 0\\ 14-4m & 0 & 21-6m\end{pmatrix}$, $M(1)\cdot M(n)=\begin{pmatrix}11-n & 0 & 16-n\\ 0 & n & 0\\ 11-n & 0 & 16-n\end{pmatrix}$, unde m și n sunt numere naturale	**2p**
	$50+m=54-3n \Leftrightarrow m+3n=4$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=1$, $n=1$ sau $m=4$, $n=0$	**3p**
2.a)	$x*y=1-4xy+4x+4y-4=$	**3p**
	$=1-4x(y-1)+4(y-1)=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$x*\dfrac{1}{x}=1-4(x-1)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=1-4(x-1)\cdot\dfrac{1-x}{x}=$	**3p**
	$=1+\dfrac{4(x-1)^2}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$x*x=1-4(x-1)^2$, $x*x*x=1+4^2(x-1)^3$, $x*x*x*x=1-4^3(x-1)^4$, unde x este număr real	**3p**
	$(x-1)\left(1+4^3(x-1)^3\right)=0$, deci $x=\dfrac{3}{4}$ sau $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5\cdot\dfrac{1}{x}-2x-3=$	**3p**
	$=\dfrac{-2x^2-3x+5}{x}=\dfrac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\dfrac{-2x^2-5}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $(0,1]$ și descrescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=-4\Rightarrow 5\ln x-x^2-3x\leq -4$, deci $5\ln x\leq x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f(x)>0\Rightarrow F'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcţia F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\int_0^1\left(\left(x^2+4x+5\right)e^x-x^2e^x-5e^x\right)dx=\int_0^1 4xe^x dx=4(x-1)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=0-4\cdot(-1)=4$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in[-3,-1]$, obținem $1\leq x^2+4x+5\leq 2$, deci $e^x\leq f(x)\leq 2e^x$	**2p**
	$\int_{-3}^{-1}e^x\,dx\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq 2\int_{-3}^{-1}e^x\,dx$ și, cum $\int_{-3}^{-1}e^x dx=\dfrac{e^2-1}{e^3}\Rightarrow\dfrac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq\dfrac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul complex z, ştiind că $3z+2\overline{z}=5+2i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $(f\circ f\circ f)(x)=x+3$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+3)-\log_3 x=1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să se dividă cu 10.
5p	**5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(5a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Calculați aria triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $\cos A=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(M(-1))$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(x)+M(y)=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați perechile de numere naturale m și n, știind că suma elementelor matricei $M(m)\cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1)\cdot M(n)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4x+4y-4xy-3$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Arătați că $x*\frac{1}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5\ln x-x^2-3x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$.
5p	**c)** Demonstrați că $5\ln x\leq x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+4x+5)e^x$.
5p	**a)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-x^2e^x-5e^x\right)dx$.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx\leq\frac{2(e^2-1)}{e^3}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**C**	**5p**
2.	**C**	**5p**
3.	**B**	**5p**
4.	**A**	**5p**
5.	**D**	**5p**
6.	**A**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(1)=\begin{vmatrix}0&2&3\\1&1&3\\1&2&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+6+6-3-0-4=5$	**3p**
b)	$D(p)=p^2(6-p)$, pentru orice număr întreg p	**3p**
	Numerele p și $6-p$ sunt întregi, deci numărul întreg $D(p)$ este divizibil cu $6-p$	**2p**
c)	$D(n)=n^2(6-n)$, deci pentru $n=0$ și pentru orice $n\geq 6$, obținem $D(n)\leq 0$ și, cum n este număr natural, valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$ se obține pentru una dintre valorile $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ sau $n=5$	**3p**
	Valoarea maximă este $D(4)=32$	**2p**
2.a)	$B(1)+B(3)=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&4\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\2&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&3\\1&1\end{pmatrix}=2B(2)$	**2p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}x-1&-x\\0&-x-1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}-x-1&0\\-x&x-1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix}x-1&-x\\0&-x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-1&0\\-x&x-1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=0$	**1p**

c)	$B(x)\cdot B(x)=\begin{pmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x-1 & x^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x-1 & x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & x+1 \\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-4)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)^2}{x^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^2=1$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^3-8x^2+16x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{x(x-4)^2\cdot x}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to4}x^2=$	**3p**
	$=16$	**2p**
c)	**c)** $\frac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)=\frac{1}{a}\left(a+\frac{16}{x+a}-\frac{16}{x}\right)=1-\frac{16}{x(x+a)}$, $x\in(0,+\infty)$, unde a este număr real, $a>0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{16}{x(x+a)}\right)=1$, deci nu depinde de a	**2p**
2.a)	Pentru orice număr real m, funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2}{x-2}=-1$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(\ln x+m)=m$ și $f(1)=m$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow m=-1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-2}=2$, deci dreapta de ecuație $y=x+2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=0$ și f este continuă pe $(-\infty,1)$, mulţimea valorilor funcţiei f conține intervalul $(-\infty,0]$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și, cum f este continuă pe $(1,+\infty)$, mulţimea valorilor funcţiei conţine intervalul $(m,+\infty)$ și, cum $m\le0$, funcția f este surjectivă	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_3 = 11$ și $a_4 = 13$. Primul termen al acestei progresii este egal cu:

A. -1 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 11

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 8x + m$, unde m este număr real. Dacă vârful parabolei asociate funcției f are coordonatele egale, atunci numărul real m este egal cu:

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

5p **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $\sqrt{x+12} = x$ este:

A. $\{-3,4\}$ **B.** $\{4\}$ **C.** $\{-3\}$ **D.** $\{-4,3\}$

5p **4.** Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 120\}$, acesta să fie multiplu de 25 este egală cu:

A. $\frac{1}{30}$ **B.** $\frac{4}{121}$ **C.** $\frac{1}{24}$ **D.** $\frac{29}{30}$

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,5)$ și $N(4,4)$. Punctul P, situat pe axa Ox, pentru care punctele M, N și P sunt coliniare este:

A. $P(-8,0)$ **B.** $P(0,8)$ **C.** $P(0,0)$ **D.** $P(8,0)$

5p **6.** Se consideră expresia $E(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$, unde x este număr real. Pentru orice număr real x, expresia $E(x)$ este egală cu:

A. 0 **B.** $\sqrt{3}\cos x$ **C.** $\sin x$ **D.** 1

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $D(1) = 5$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr întreg p, $p \neq 6$, numărul $D(p)$ este divizibil cu $6 - p$.

5p **c)** Determinați valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$, atunci când n este număr natural.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $B(1) + B(3) = 2B(2)$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B(x) \cdot B(x) = B(x)$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-4)^2}{x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-8x^2+16x}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a>0$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)$ **nu** depinde de a.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-2}, & x\in(-\infty,1)\\ \ln x+m, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Pentru $m\le 0$, demonstrați că funcția f este surjectivă.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2-2i=1+2i+i^2-2i=$	**3p**
	$=1+(-1)=0$	**2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}\Rightarrow-\frac{8}{2m}=12$	**3p**
	$m=-\frac{1}{3}$	**2p**
3.	$x^2-10x+40=4^2\Rightarrow x^2-10x+24=0$	**3p**
	$x=4$ sau $x=6$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 50 de numere impare, deci sunt 50 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{BA}=4\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=6\vec{i}+2\vec{j}$	**2p**
	$BD=2\sqrt{10}$	**3p**
6.	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	**2p**
	$\sin\pi+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(1))=\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot4-3\cdot1=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**
b)	$M(a)M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A$	**2p**
	Cum $A\cdot A=\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}=4A$, obținem $M(a)M(b)=I_2+(a+b+4ab)A=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	$M\left(a+a+4a^2\right)=M(2)\Leftrightarrow4a^2+2a-2=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$x*y=-xy+5x+5y-25+5=$	**3p**
	$=-x(y-5)+5(y-5)+5=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$-(x-5)^2+5\geq x\Leftrightarrow(x-5)(x-4)\leq0$	**3p**
	$x\in[4,5]$	**2p**

c)	$x*5=x$ și $5*x=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1*(-2)*3*(-4)*5*\ldots*(-2018)*2019=((1*(-2)*3*(-4))*5)*(-6)*\ldots*(-2018)*2019=$ $=5*((-6)*\ldots*(-2018)*2019)=5$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+6)e^x-(x^2+6x+9)e^x}{(e^x)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2-4x-3}{e^x}=\dfrac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+6x+9}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+6}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,-1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-3,-1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$ și, cum $f(-1)=4e$, obținem $f(x)\leq 4e$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$	**3p**
	$0\leq x+3\leq 2e^{\frac{x+1}{2}}$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$ și $0\leq y+3\leq 2e^{\frac{y+1}{2}}$, pentru orice $y\in[-3,+\infty)$, deci $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^2(x+1)f(x)dx=\int\limits_0^2 x^3dx=\left.\dfrac{x^4}{4}\right\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{16}{4}-0=4$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)'=\dfrac{3x^2}{3}-\dfrac{2x}{2}+1-\dfrac{1}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^3+x^2-x^2-x+x+1-1}{x+1}=\dfrac{x^3}{x+1}=f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
c)	$g(x)=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow\mathcal{A}=\int\limits_1^{a^2}\lvert g(x)\rvert dx=\int\limits_1^{a^2}\dfrac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big\vert_1^{a^2}=\ln(a^2+1)-\ln 2$	**3p**
	$\ln(a^2+1)=\ln 10\Leftrightarrow a^2-9=0$ și, cum $a>1$, obținem $a=3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(1+i)^2-2i=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numărul real nenul m, știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+8x-7$ este egală cu 12.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2-10x+40\right)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-2,0)$ și $C(0,3)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Arătați că $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=\sqrt{3}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=5$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.

5p **c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+6x+9}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a^2$ are aria egală cu $\ln 5$.