

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 6$, $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 18$ $b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 6 + 18 = 26$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ Suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții este egală cu 5	2p 3p
3.	$4x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$ $x = 1$, care convine, $x = 9$, care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 50 de elemente, deci sunt 50 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt $50 - 7 = 43$ de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{43}{50}$	1p 2p 2p
5.	Punctul $M(-2, 3)$ este mijlocul laturii BC Ecuația medianei din A este $y = 3$	2p 3p
6.	$4\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x - 4\cos x \sin x + 4\cos^2 x - 4 \Leftrightarrow 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x - 4$ $\cos^2 x = 0$, de unde obținem $x = \frac{\pi}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x \cdot x - (-3) \cdot 3 =$ $= x^2 - (-9) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$A(2020-x) + A(2020+x) = \begin{pmatrix} 2020-x & 3 \\ -3 & 2020-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2020+x & 3 \\ -3 & 2020+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4040 & 6 \\ -6 & 4040 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2020 & 3 \\ -3 & 2020 \end{pmatrix} = 2A(2020)$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} n & 3 \\ -3 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-n & 3 \\ -3 & 2-n \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n^2 + 2n - 9 & 6 \\ -6 & -n^2 + 2n - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ $n^2 - 2n - 3 = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$	3p 2p
2.a)	$N = \sqrt{\sqrt{33}^2 + \sqrt{31}^2} = \sqrt{33+31} =$ $= \sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N}$	3p 2p
b)	$x * x = x\sqrt{2}$, $x * x * x = x\sqrt{3}$, unde $x \in M$ $(x\sqrt{3})^2 = 300 \Leftrightarrow x^2 = 100$ și, cum $x \in M$, obținem $x = 10$	2p 3p

c)	$\begin{aligned} f(x+y) &= \sqrt{-2020(x+y)} = \\ &= \sqrt{-2020x + (-2020y)} = \sqrt{(f(x))^2 + (f(y))^2} = f(x)*f(y), \text{ pentru orice } x, y \in (-\infty, 0] \end{aligned}$	2p 3p
----	--	--------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2 + 5) - (x-2) \cdot 2x}{(x^2 + 5)^2} = \\ &= \frac{5 + 4x - x^2}{(x^2 + 5)^2} = \frac{(5-x)(x+1)}{(x^2 + 5)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{5}{x^2}} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ sau } x = 5$ $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f e descrescătoare pe $(-\infty, -1]$; $x \in [-1, 5] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f e crescătoare pe $[-1, 5]$ și $x \in [5, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f e descrescătoare pe $[5, +\infty)$ Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(5) = \frac{1}{10}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, obținem $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{10}$, pentru orice număr real x	1p 2p 2p
2.a)	$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{\ln x}{x^3} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = \\ &= \frac{1 - 3\ln x}{x^4} = f(x), \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci } F \text{ este o primitivă a funcției } f \end{aligned}$	3p 2p
b)	$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= F(x) \Big _1^e = \frac{\ln x}{x^3} \Big _1^e = \\ &= \frac{\ln e}{e^3} - \frac{\ln 1}{1^3} = \frac{1}{e^3} \end{aligned}$	3p 2p
c)	$\begin{aligned} \int_e^{e^2} x^2 F(x) dx &= \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big _e^{e^2} = \\ &= \frac{\ln^2 e^2 - \ln^2 e}{2} = \frac{2^2 - 1^2}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermedii pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_3 = 2a_2$ $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2 = 6$	2p 3p
2.	$f(a) = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$ $a = 2$	3p 2p
3.	$x^2 - 5x + 7 = (x-1)^2$ $3x = 6$, deci $x = 2$, care convine	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{m}{3} = \frac{5}{3}$ $m = 5$	3p 2p
6.	$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x =$ $= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) =$ $= -12 + 12 = 0$	3p 2p
b)	$M(x)M(y) = (I_2 + xA)(I_2 + yA) = I_2 + xA + yA + xyAA$ Cum $AA = A$, obținem $M(x)M(y) = I_2 + (x + y + xy)A = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$M(m + n + mn) = M(6) \Leftrightarrow m + n + mn = 6$ $(m+1)(n+1) = 7$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(6,0)$ sau $(0,6)$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = xy - x - y + 1 + 1 =$ $= x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$x \circ x = (x-1)^2 + 1$, de unde obținem $(x-1)^2 \leq 4$ $x \in [-1, 3]$	2p 3p
c)	$1 \circ x = 1$, unde x este număr real $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n = 1 \circ (2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n) = 1$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a) $f'(x) = x' - e(\ln x)' =$ $= 1 - e \cdot \frac{1}{x} = \frac{x - e}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b) Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = x \Leftrightarrow f'(a) = 1$ $\frac{a - e}{a} = 1 \Leftrightarrow a - e = a \Leftrightarrow e = 0$, ceea ce este imposibil, deci graficul funcției f nu admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$	3p 2p
c) $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, e) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, e)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (e, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e, +\infty)$ $e^x - x^e = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ și, cum $f(e) = 0$, ecuația $e^x - x^e = 0$ are exact o soluție în $(0, +\infty)$	2p 3p
2.a) $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^3 x(x+2)e^x dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big _0^3 =$ $= 9 + 9 - 0 = 18$	3p 2p
b) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x)e^x dx = (x^2 + 2x)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 (2x+2)e^x dx =$ $= 3e - (2x+2)e^x \Big _0^1 + \int_0^1 2e^x dx = 3e - 4e + 2 + 2e - 2 = e$	2p 3p
c) $\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)} dx = \int_1^n \frac{x+1}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x) \Big _1^n = \frac{1}{2} \ln \frac{n^2+2n}{3}$ $\frac{1}{2} \ln \frac{n^2+2n}{3} = \frac{3 \ln 2}{2} \Rightarrow n^2 + 2n - 24 = 0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n = 4$	3p 2p

**Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)**

**Matematică M_st-nat
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este $q = 2$ $b_3 = 1 \cdot 2^2 = 4$	3p 2p
2.	$3x + 1 < 7 \Leftrightarrow x < 2$ Cum x este număr natural, obținem $x = 0$ sau $x = 1$	2p 3p
3.	$x^2 + 8 = (x + 2)^2$ $x = 1$, care convine	2p 3p
4.	$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$ $= 6$	3p 2p
5.	$m_{AB} = 1$, $m_{CD} = 1 - a$, unde a este număr real $m_{AB} = m_{CD} \Leftrightarrow 1 - a = 1 \Leftrightarrow a = 0$	2p 3p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{BC}$ $BC = 20$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 =$ $= 6 - 2 = 4$	3p 2p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1+x+y+xy+2xy & y+xy+x+2xy \\ 2x+2xy+2y+4xy & 2xy+1+2x+2y+4xy \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+(x+y+3xy) & x+y+3xy \\ 2(x+y+3xy) & 1+2(x+y+3xy) \end{pmatrix} = A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$A(a+a+3a \cdot a) = A(5) \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 5 = 0$ $a = -\frac{5}{3}$ sau $a = 1$	3p 2p
2.a)	$x * y = -xy + 5x + 5y - 25 + 5 =$ $= -x(y-5) + 5(y-5) + 5 = -(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$-(x-5)^2 + 5 \geq x \Leftrightarrow (x-5)(x-4) \leq 0$ $x \in [4, 5]$	3p 2p
c)	$x * 5 = x$ și $5 * y = y$, unde x și y sunt numere reale $1 * (-2) * 3 * (-4) * 5 * \dots * 2019 * (-2020) = ((1 * (-2) * 3 * (-4)) * 5) * (-6) * \dots * 2019 * (-2020) =$ $= 5 * ((-6) * \dots * 2019 * (-2020)) = 5$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2(x+2)e^{-x} + (x+2)^2 e^{-x} \cdot (-1) =$ $= (-x^2 - 2x)e^{-x} = -x(x+2)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+2)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ <p>Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f</p>	3p 2p
c)	$f'(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in [-2, 0] \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } [-2, 0] \text{ și } f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in [0, +\infty) \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } [0, +\infty) \text{ și, cum } f(0) = 4, \text{ obținem } f(x) \leq 4, \text{ pentru orice } x \in [-2, +\infty)$ $x, y \in [-2, +\infty) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4 \text{ și } 0 \leq f(y) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq f(x)f(y) \leq 16 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{f(x)f(y)} \leq 4,$ <p>de unde obținem $0 \leq \frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}} \leq 4$, pentru orice $x, y \in [-2, +\infty)$</p>	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$	3p 2p
b)	$\int_1^2 \frac{1}{x^2} f(x) dx = \int_1^2 xe^x dx = (x-1)e^x \Big _1^2 =$ $= e^2$	3p 2p
c)	$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , deci $F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = x^2(x+3)e^x, x \in \mathbb{R}$ $F''(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -3)$, $F''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-3, 0)$ și pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F are un singur punct de inflexiune	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_6^2 = b_5 b_7 \Rightarrow 36 = 3b_7$ $b_7 = 12$	3p 2p
2.	$a^2 - 20 = a \Leftrightarrow a^2 - a - 20 = 0$ $a = -4$ sau $a = 5$	3p 2p
3.	$5^x = 5^{-3x} \Leftrightarrow x = -3x \Leftrightarrow 4x = 0$ $x = 0$	3p 2p
4.	Cifra unităților se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 5 moduri, deci sunt $5 \cdot 3 = 15$ numere impare de două cifre distincte, cu cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	2p 3p
5.	$AO = BO = CO$ și $O \in AC$, deci ΔABC este dreptunghic în B Coordonatele ortocentrului triunghiului ABC sunt $x = 0$, $y = 1$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ $\cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$	3p 2p
b)	$M(x)M(y) = AA + yAB + xBA + xyBB$, $M(y)M(x) = AA + xAB + yBA + yxBB$ Cum $AB = A$ și $BA = B$, obținem $yA + xB = xA + yB \Leftrightarrow (x - y)A = (x - y)B \Leftrightarrow x = y$	2p 3p
c)	$m^2 + 1 = n^2 \Leftrightarrow (n - m)(n + m) = 1$ Cum m și n sunt numere întregi, obținem $(m, n) = (0, -1)$ sau $(m, n) = (0, 1)$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = 7xy + x + y + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} = 7x\left(y + \frac{1}{7}\right) + \left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7} = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$7\left(x + \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} = 5 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} \Leftrightarrow x + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}$ sau $x + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ $x = -1$ sau $x = \frac{5}{7}$	3p 2p

c)	<p>De exemplu, $a = \frac{1}{7}$ și $b = \frac{3}{7}$</p> $a \circ b = 7 \left(a + \frac{1}{7} \right) \left(b + \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = 1 \in \mathbb{N}$	2p 3p
----	--	--

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x-2(x-1)}{x^2} =$ $= \frac{x-2x+2x-2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x \Leftrightarrow f'(a) = -1$</p> $\frac{a-2}{a^2} = -1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2, \text{ care nu convine sau } a = 1, \text{ care convine}$	3p 2p
c)	$f'(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (0, 2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ $0 < 1 < \frac{\pi}{2} < 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(1) \text{ și, cum } f(1) = 0, \text{ obținem } f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$	2p 3p
2.a)	$\int_1^e f'(x) dx = f(x) \Big _1^e = \ln x \Big _1^e =$ $= \ln e - \ln 1 = 1$	3p 2p
b)	$\int_1^e \frac{f^2(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \frac{\ln^3 x}{3} \Big _1^e =$ $= \frac{1}{3}$	3p 2p
c)	$\int_1^p x f(x) dx = \int_1^p x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^p - \int_1^p \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}$ $\frac{p^2}{2} \ln p - \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{3}{4} \text{ și, cum } p > 1, \text{ obținem } p = 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(0,2 \cdot 10 - 1)(0,2 \cdot 10 + 1) = (2 - 1)(2 + 1) =$ $= 1 \cdot 3 = 3$	3p 2p
2.	$x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$ sau $x = 2$	3p 2p
3.	$4(6 - x) = x + 14 \Rightarrow 24 - 4x = x + 14 \Leftrightarrow 5x = 10$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	1p 2p 2p
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (a+2)\vec{i} + (a+2)\vec{j}$ $a = -2$	3p 2p
6.	Cum $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y - z = 4 \text{ și } \det(A(-1)) = -1 \neq 0, \text{ deci sistemul de ecuații admite soluție unică} \\ -3x - y + z = 1 \\ x = -5, y = -6, z = -20 \end{cases}$	2p 3p
c)	$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 2 & 1 & p \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(p)) = -3p^2 - p + 1, \text{ unde } p \text{ este număr rațional}$ $-3p^2 - p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q} \text{ sau } p = -\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q}, \text{ deci, pentru orice număr rațional } p, \det(A(p)) \neq 0, \text{ adică matricea } A(p) \text{ este inversabilă}$	2p 3p
2.a)	$x * y = xy - 101x - 101y + 10201 + 101 = x(y - 101) - 101(y - 101) + 101 =$ $= (x - 101)(y - 101) + 101, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p 2p

b)	Elementul neutru al legii „*” este $e = 102$ $x = x' \Leftrightarrow x * x = 102 \Leftrightarrow (x - 101)^2 = 1$, de unde obținem $x = 100$ sau $x = 102$	2p 3p
c)	$x * y = 202 \Leftrightarrow (x - 101)(y - 101) + 101 = 202 \Leftrightarrow (x - 101)(y - 101) = 101$ Cum x și y sunt numere întregi cu $x < y$ și 101 este număr prim, obținem $x = 0$ și $y = 100$ sau $x = 102$ și $y = 202$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f este egală cu $f'(0) = e^0 - 1 = 0$	3p 2p
b)	$f''(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) > 0$, pentru orice număr real x , deci funcția f este convexă pe \mathbb{R}	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -4$, obținem $f(x) \geq -4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) \geq -4$, deci $e^{-x} \geq -x + 1$, de unde $e^x(1-x) \leq 1$, pentru orice număr real x	1p 2p 2p
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2 + 4}{x} - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 =$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	3p 2p
b)	$\int_2^6 \frac{2}{f(x)} dx = \int_2^6 \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \ln(x^2 + 4) \Big _2^6 =$ $= \ln 40 - \ln 8 = \ln 5$	3p 2p
c)	$\int_1^e \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$ $\frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{a}, \text{ deci } a = 4$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{(2a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = \frac{(2 \cdot 5 + 4 \cdot 2) \cdot 5}{2} =$ $= 45$	3p 2p
2.	$\Delta = a^2 - 4(a-1) = (a-2)^2$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	2p 3p
3.	$\sqrt[3]{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ $x = -3$ sau $x = 2$	3p 2p
4.	$2C_4^3 - 3A_4^2 = 2 \cdot \frac{4!}{3!(4-3)!} - 3 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} =$ $= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 3 = 8 - 36 = -28$	2p 3p
5.	$\frac{1}{2} = \frac{a}{a^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$ $a = 1$	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin B}{2}$ $\sin B = \frac{1}{2}$ și, cum triunghiul ABC este ascuțitunghic, obținem că unghiul B are măsura de 30°	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 =$ $= 0 - 1 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $M(x, y) \cdot M(a, b) = (xI_2 + yA)(aI_2 + bA) = x a I_2 + x b A + y a A + y b A \cdot A = (xa + yb)I_2 + (xb + ya)A =$ $= M(xa + yb, xb + ya)$ pentru orice numere reale a, b, x și y	2p 3p
c)	$\det(M(x, y)) = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - y^2$, pentru orice numere reale x și y , deci $(x-y)(x+y) = 4$ $M(x, y) \cdot M(x, y) = M(x^2 + y^2, 2xy) \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + 2xy) = 8$, deci $(x+y)^2 = 4$ $x+y = x-y = -2$ sau $x+y = x-y = 2$, deci perechile sunt $(-2, 0)$ sau $(2, 0)$	1p 2p 2p
2.a)	$2 \circ (1 * 3) = 2 \circ (1+3-1) = 2 \circ 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 + 2 = 3$ $(2 \circ 1) * (2 \circ 3) = (2 \cdot 1 - 2 - 1 + 2) * (2 \cdot 3 - 2 - 3 + 2) = 1 * 3 = 1 + 3 - 1 = 3 = 2 \circ (1 * 3)$	2p 3p
b)	$x \circ x = x^2 - 2x + 2$ și $x * x = 2x - 1$, pentru orice număr real x $3^{x \circ x} = (3^{-2})^{x * x} \Leftrightarrow x \circ x = -2 \cdot (x * x) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$, deci $x = -2$ sau $x = 0$	2p 3p

c)	$(x-1)*(2y+1) = 2 \Leftrightarrow x+2y=3$ și $(x+y)\circ 4 = 10 \Leftrightarrow x+y=4$ Obținem $x=5$, $y=-1$	3p 2p
----	--	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + \sqrt{x^2 + 3}) = 2$ și $f(1) = 2$, deci $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$ Cum f este continuă pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, +\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R}	3p 2p
b)	$f'(x) = 2x - 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in (1, +\infty)$ Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum $f'(a) > 0$, pentru orice $a \in (1, +\infty)$, obținem că $f'(a) \neq 0$, deci tangenta la graficul funcției f în punctul A nu este paralelă cu axa Ox , pentru orice $a \in (1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = 2 + \frac{3}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in (1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 =$ $= \frac{\sqrt{x} + 2x}{2x} = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	3p 2p
b)	$\int_1^4 g(x) dx = f(x) \Big _1^4 = f(4) - f(1) =$ $= 7 - 3 = 4$	3p 2p
c)	$\int_1^m f(x) \cdot g(x) dx = \int_1^m f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) \Big _1^m = \frac{1}{2} (f^2(m) - f^2(1))$ $f^2(m) - 9 = 40 \Leftrightarrow f(m) = -7$, care nu convine sau $f(m) = 7$, de unde obținem $m = 4$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este $q = 2$ $S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$	2p 3p
2.	$f(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 6 < 0$ $\Delta = 49$, deci $x \in \left(\frac{2}{3}, 3\right)$	2p 3p
3.	$\lg \frac{1-x}{7-x} = -1 \Rightarrow \frac{1-x}{7-x} = \frac{1}{10}$ $x = \frac{1}{3}$, care convine	3p 2p
4.	$n + \frac{n(n-1)}{2} = 6 \Leftrightarrow n^2 + n - 12 = 0$ Cum n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $n = 3$	3p 2p
5.	$A(2a-1, a^2) \in d \Leftrightarrow a^2 = 2a - 1 + 4$ $a^2 - 2a - 3 = 0$, deci $a = -1$ sau $a = 3$	2p 3p
6.	$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^2 =$ $= 1 - 2 \cdot \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -2 + (-2) + 1 - 4 - 1 - 1 = -9$	2p 3p
b)	$B(a) = A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 2-2a & -3 & -3 \\ a-1 & 6 & -3 \\ 2a+1 & a-1 & -2a+2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a Suma elementelor matricei $B(a)$ este egală cu 0, deci nu depinde de numărul real a	3p 2p
c)	Pentru $a = -2$, sistemul devine $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \end{cases}$ Adunând cele trei ecuații ale sistemului $(x + y - 2z) + (x - 2y + z) + (-2x + y + z) = 1 + 2 + 3$, obținem $0 = 6$, fals, deci sistemul de ecuații este incompatibil	2p 3p

2.a)	$(-1)*1=(-1)\cdot 1+m((-1)+1)=$ $=-1+m\cdot 0=-1$, pentru orice număr real m	3p 2p
b)	$x*y=xy+mx+my+m^2-m^2=$ $=x(y+m)+m(y+m)-m^2=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x , y și m	2p 3p
c)	$(5^x-1)(5^{x+1}-1)-1=-1 \Leftrightarrow 5^x-1=0$ sau $5^{x+1}-1=0$ $x=0$ sau $x=-1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \frac{1}{x^2} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^2} =$ $=-\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) = 0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x^2(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{2}$	3p 2p
2.a)	$F'(x) = \frac{1}{x} + e^x + 4, x \in (0, +\infty)$ F este primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci $m = 4$	3p 2p
b)	$\int_1^e f(x) dx = F(x) \Big _1^e = F(e) - F(1) =$ $= e^e + 3e - 3$	3p 2p
c)	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 x \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \int_1^2 (1 + xe^x) dx = (x + (x-1)e^x) \Big _1^2 =$ $= 2 + e^2 - 1 = e^2 + 1$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermedii pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\log_2 63 - \log_2 7) \cdot \frac{1}{\log_2 3} = \log_2 \frac{63}{7} \cdot \frac{1}{\log_2 3} =$ $= \log_2 3^2 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 2 \log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 2$	2p 3p
2.	$\Delta = m^2 + 4m$, deci ecuația nu are soluții reale $\Leftrightarrow m^2 + 4m < 0$ $m \in (-4, 0)$	3p 2p
3.	$3^{x^2-20} = 3^{-4} \Leftrightarrow x^2 = 16$ $x = -4$ sau $x = 4$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile $n! \leq n(n-1) \Rightarrow n = 2$ sau $n = 3$, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{AB} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{OC} = a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $C(a, b)$, deci $a\vec{i} + b\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ $a = 4$, $b = 4$	3p 2p
6.	Cum triunghiul este dreptunghic, $2a+1 > a-1$ și $2a+1 > 2a \Rightarrow (2a+1)^2 = (2a)^2 + (a-1)^2$, deci $a^2 - 6a = 0$ Cum a este număr real, $a > 1$, obținem $a = 6$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(e)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= e + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = e$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\ln a \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(a) \cdot A(a)) = a^2$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$ $\det(A(a^2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ln a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 = \det(A(a) \cdot A(a))$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	3p 2p

c) $A(a) + A(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru orice } a, b \in (0, +\infty)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2\ln(ab) \\ 0 & 2ab & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab = 1 \text{ și } a + b = 2, \text{ de unde obținem } a = 1 \text{ și } b = 1$	3p 2p
2.a) $\sqrt{2} \circ 1 = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 - 3\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) + 6 + \sqrt{2} =$ $= 3\sqrt{2} - 6 - 3\sqrt{2} + 6 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$	2p 3p
b) $x \circ y = 3xy - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 6 + \sqrt{2} =$ $= 3x(y - \sqrt{2}) - 3\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 3(x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p 3p
c) $x \circ \sqrt{2} = \sqrt{2}, \sqrt{2} \circ y = \sqrt{2}, \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt numere reale}$ $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} \circ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \circ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}} = \left(\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} \circ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \right) \circ \sqrt{2} \right) \circ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} \circ \dots \circ \frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}} = \sqrt{2} \circ \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} \circ \dots \circ \frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}} \right) = \sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2^x + 3^x - 4) = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1 \quad \text{și} \quad f(1) = 1, \quad \text{deci}$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1), \text{ de unde obținem că } f \text{ este continuă în } x = 1$ <p>Cum f este continuă pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, +\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R}</p>	3p 2p
b) $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f(x) = 2^x + 3^x - 4, \text{ deci } f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$ $f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 1), \text{ deci funcția } f \text{ este crescătoare pe } (-\infty, 1)$	3p 2p
c) $f \text{ este crescătoare pe } (-\infty, 1) \text{ și continuă în } x = 1, \text{ deci } f(x) \leq f(1) \text{ și, cum } f(1) = 1, \text{ obținem } f(x) \leq 1, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 1)$ $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(x) = \frac{x-2}{x^3}, \text{ deci } f'(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (1, 2) \text{ și } f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (2, +\infty) \text{ și, cum } f \text{ este continuă, } f(1) = 1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \text{ obținem } f(x) \leq 1, \text{ pentru orice } x \in [1, +\infty)$	2p 3p
2.a) $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)dx = \int_0^1 (2x+4)dx = \left(x^2 + 4x \right) \Big _0^1 = 1 + 4 - 0 = 5$	3p 2p
b) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+3} dx = \ln(x^2 + 4x + 3) \Big _0^2 = \ln 15 - \ln 3 = \ln 5$	2p 3p
c) $F'(x) = f(x), x \in (-1, +\infty), \text{ deci } F''(x) = \frac{-2(x^2 + 4x + 5)}{(x^2 + 4x + 3)^2}, x \in (-1, +\infty)$ $F''(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (-1, +\infty), \text{ deci orice primitivă } F \text{ a funcției } f \text{ este concavă}$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

Filierea teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ Cum $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, obținem că $\log_2 16 < \sqrt[3]{125}$	2p 3p
2.	$\Delta = (a+2)^2 - 4(2a+1) = a^2 - 4a$, unde a este număr real Graficul funcției f este tangent axei $Ox \Leftrightarrow \Delta = 0$, deci $a = 0$ sau $a = 4$	2p 3p
3.	$x^2 - x - 2 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$	3p 2p
4.	$C_4^1 = 4$, $A_4^2 = 12$ și $A_5^2 = 20$ $12 = \frac{4+20}{2}$, deci C_4^1 , A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	3p 2p
5.	$m_{AB} = \frac{a-1}{2}$, $m_{BC} = \frac{a+1}{3}$, unde a este număr real A , B și C sunt coliniare $\Rightarrow m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow 3a - 3 = 2a + 2$, deci $a = 5$	2p 3p
6.	$\sin P = \frac{1}{2}$ $2R = \frac{MN}{\sin P} \Rightarrow R = 16$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1 + 1 + (-1) - 1 - 1 - 1 = -4$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = -a(a^2 + 3)$, pentru orice număr real a Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R}^*$	2p 3p
c)	Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție și $x_0 = y_0 = z_0$, atunci real Obținem $ax_0 = 1$ și $ax_0 = -1$, ceea ce este imposibil	$\begin{cases} x_0 + ax_0 - x_0 = a \\ x_0 - x_0 - ax_0 = -1, \text{ unde } a \text{ este număr} \\ ax_0 - x_0 + x_0 = -1 \end{cases}$ 2p 3p
2.a)	$2020 * (-2020) = \sqrt[3]{2020^3 + (-2020)^3 + 8} = \sqrt[3]{2020^3 - 2020^3 + 8} =$ $= \sqrt[3]{8} = 2$	3p 2p
b)	$x * e = x$, pentru orice număr real x , deci $\sqrt[3]{x^3 + e^3 + 8} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 + 8 = x^3 \Leftrightarrow e = -2$ Cum $(-2) * x = \sqrt[3]{(-2)^3 + x^3 + 8} = \sqrt[3]{x^3} = x$, pentru orice număr real x , obținem că $e = -2$ este elementul neutru al legii de compozitie „*”	3p 2p

c)	$f(x * y) = (x * y)^3 + 8 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}\right)^3 + 8 = x^3 + y^3 + 8 + 8 =$ $= x^3 + 8 + y^3 + 8 = f(x) + f(y), \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y, \text{ deci } f \text{ este morfism de}$ <p style="margin-left: 20px;">la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$</p>	2p
		3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{1+\frac{4}{x}} \right) =$ $= 1 + 1 = 2$	3p 2p
b)	$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+4)^2}, \quad x \in (-2, +\infty)$ <p>$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (-2, +\infty)$, deci f este descrescătoare pe $(-2, +\infty)$</p>	3p 2p
c)	<p>f este continuă, f este descrescătoare pe $[-1, +\infty)$, $f(-1) = \frac{4}{3}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, deci</p> $f(x) \in \left[0, \frac{4}{3}\right], \text{ pentru orice } x \in [-1, +\infty)$ <p>$f(x) \in \mathbb{Z}$, deci $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$ și, cum $x \in [-1, +\infty)$, obținem $x = -2 + \sqrt{2}$</p>	3p 2p
2.a)	$\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)} dx = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big _0^2 =$ $= e^2 - e^0 = e^2 - 1$	3p 2p
b)	$\int_0^1 e^{3x} f^2(x) dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^x dx = (x^2 + 1)e^x \Big _0^1 =$ $= 2e - e^0 = 2e - 1$	3p 2p
c)	$\frac{f(x)}{x+1} = e^{-x}, \quad x \in (0, +\infty) \Rightarrow 1 - \int_0^a \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-a}, \quad 1 - \int_0^b \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-b}, \quad 1 - \int_0^c \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-c}$ <p>e^{-a}, e^{-b} și e^{-c} sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow (e^{-b})^2 = e^{-a} \cdot e^{-c}$,</p> <p>deci $e^{-2b} = e^{-a-c}$, de unde obținem $2b = a + c$, adică a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice</p>	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. $3^2 = (a-1)(a+7) \Leftrightarrow a^2 + 6a - 16 = 0$ Cum a este număr real, $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p
2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6 = -x - 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0$ Cum $\Delta > 0$, suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g este -1	3p 2p
3. $3^x (3^2 - 1) = 8 \Leftrightarrow 3^x = 1$ $x = 0$	3p 2p
4. Mulțimea A are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile $\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n \Leftrightarrow n(n-7) \leq 0$ și, cum $n \in A$, obținem $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	2p 2p 1p
5. $\frac{4}{m-2} = \frac{m}{2} \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$ $m = -2$ sau $m = 4$, care convin	2p 3p
6. $\cos A = \frac{1}{2}$ și $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$, deci $BC = \sqrt{21}$ $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 9 + \sqrt{21}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a) $\begin{cases} -(m^2 - 1) + 4 = 1 \\ -1 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m = 2 \end{cases}$ $m = 2$	3p 2p
b) Matricea sistemului de ecuații este $A = \begin{pmatrix} m^2 - 1 & m & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\det A = -(m+7)(m-2)$, pentru orice număr real m Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 2\}$	3p 2p
c) $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\} \Rightarrow \det A \neq 0$ și sistemul de ecuații are soluția unică $\left(\frac{1}{m+7}, -\frac{m+3}{m+7}, \frac{m+2}{m+7} \right)$ Cum $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\}$, numerele $\frac{1}{m+7}$, $-\frac{m+3}{m+7}$ și $\frac{m+2}{m+7}$ sunt întregi $\Leftrightarrow m = -8$ sau $m = -6$	3p 2p

2.a)	$x \circ y = 11xy + x + y + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} = 11x\left(y + \frac{1}{11}\right) + \left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} =$ $= \left(y + \frac{1}{11}\right)\left(11x + 1\right) - \frac{1}{11} = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p 2p
b)	$11\left(x + \frac{1}{11}\right)^2 - \frac{1}{11} = \frac{8}{11} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{11}\right)^2 = \frac{9}{121}$ $x = -\frac{4}{11} \text{ sau } x = \frac{2}{11}$	3p 2p
c)	$a = 11^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{11} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} = 11^3 \cdot 1 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{11} - \frac{1}{11} = 720 - \frac{1}{11}$ $719 < 720 - \frac{1}{11} < 720, \text{ deci partea întreagă a numărului } a \text{ este egală cu } 719$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right)' =$ $= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{x} - 1, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(1) = 0, \quad f(1) = -\frac{1}{3}$ <p>Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = -\frac{1}{3}$</p>	2p 3p
c)	$f'(1) = 0, \quad f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in (0, 1] \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } (0, 1] \text{ și } f'(x) \geq 0,$ <p>pentru orice $x \in [1, +\infty)$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$</p> <p>Pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq f(1) \Rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x \geq -\frac{1}{3}$, de unde obținem $x(2\sqrt{x} - 3) \geq -1$</p>	2p 3p
2.a)	$g(x) = x^3, \quad x \in (-1, +\infty), \text{ deci } G(x) = \frac{x^4}{4} + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}$ <p>Cum $G(0) = 2020$, obținem $c = 2020$, deci $G(x) = \frac{x^4}{4} + 2020$</p>	3p 2p
b)	$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(x - \ln(x+1)\right) \Big _0^1 =$ $= 1 - \ln 2$	3p 2p
c)	$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1} \leq x^n, \text{ pentru orice număr natural nenul } n \text{ și orice } x \in [0, 1]$ <p>$\int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx$ și, cum $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, obținem $\int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n</p>	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) + \log_2(\sqrt[3]{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2((\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1)) = 0$ Cum $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1) = (\sqrt[3]{2})^3 - 1 = 1$, obținem că $\log_2((\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1)) = 0$	3p 2p
2.	$f(x) + f(-x) = 2020 \Leftrightarrow 2x + a + 2 \cdot (-x) + a = 2020$ $2a = 2020$, deci $a = 1010$	3p 2p
3.	$3^x + \frac{3}{3^x} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x - 3) = 0$ $x = 0$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale cuprinse între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$ sunt 12 și 13, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DA} = \vec{0} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} =$ $= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$	3p 2p
6.	Considerăm ΔABC cu $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 4 \Rightarrow \cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$ $\cos A < 0$, deci unghiul A este obtuz	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 13 \cdot (-1) = 1$ $\det(A + I_2) = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 13 \cdot (-1) = 1$, deci $\det(A + I_2) = \det A$	2p 3p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $aI_2 = I_2$, deci $a = 1$	3p 2p
c)	$\det(A + mI_2) = \begin{vmatrix} 3+m & 13 \\ -1 & -4+m \end{vmatrix} = m^2 - m + 1$, pentru orice număr natural m $m^2 - m + 1 = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (m-n)(m+n-1) = 0$ și, cum m și n sunt numere naturale, $m \neq n$, obținem $m+n=1$, deci perechile sunt $(1,0)$ și $(0,1)$	3p 2p

2.a)	$x \circ \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{1 - x - \frac{1}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} =$ $= \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x, \text{ pentru orice } x \in M$	2p 3p
b)	$x \circ y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy} = \frac{yx}{1 - y - x + 2yx} =$ $= y \circ x, \text{ pentru orice } x, y \in (0, 1), \text{ deci legea de compozitie } " \circ " \text{ este comutativa}$	2p 3p
c)	$f(x) \circ f(y) = \frac{f(x)f(y)}{1 - f(x) - f(y) + 2f(x)f(y)} = \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{y}{y+1}}{1 - \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} + 2 \cdot \frac{xy}{(x+1)(y+1)}} =$ $= \frac{xy}{xy + x + y + 1 - xy - x - yx - y + 2xy} = \frac{xy}{xy + 1} = f(xy), \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(e^x + 1)e^x - (e^x + x)e^x}{e^{2x}} =$ $= \frac{(e^x + 1 - e^x - x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ are panta $f'(1) = 0$</p> <p>Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f și panta ei este 0, deci tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ și asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f sunt paralele</p>	2p 3p
c)	$f'(x) = (1-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x-2)e^{-x}, \text{ deci } g(x) = (x-2)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = (3-x)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ deci } g'(x) + g(x) = (3-x)e^{-x} + (x-2)e^{-x} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \text{ pentru orice număr real } x$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 1)f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 1) \left(4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 (4x^3 + 2x + 1) dx =$ $= \left(x^4 + x^2 + x \right) \Big _0^1 = 1 + 1 + 1 - 0 = 3$	2p 3p
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \left(2x^2 - \ln(x^2 + 1) + \arctg x \right) \Big _0^1 =$ $= 2 - \ln 2 + \arctg 1 - 0 + \ln 1 - \arctg 0 = 2 - \ln 2 + \frac{\pi}{4}$	3p 2p
c)	$\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x dx = \int_1^e 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x \Big _1^e - \int_1^e 2x dx = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$ $e^2 + 1 = e^2 + a, \text{ deci } a = 1$	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. $a_1 + a_3 = 2a_2$, deci $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4a_2$ $a_2 = 1$	3p 2p
2. $f(3) = 3^2 + 3 + 6 = 18$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 6 = \frac{58}{9}$ $f(3) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 18 \cdot \frac{58}{9} = 116$, care este număr natural	2p 3p
3. $\log_5((4-x)(24-x)) = 3 \Rightarrow (4-x)(24-x) = 125 \Rightarrow x^2 - 28x + 29 = 0$ $x = -1$, care convine, sau $x = 29$, care nu convine	3p 2p
4. Multimea are $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ submulțimi cu două elemente, unde n este numărul de elemente ale mulțimii, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, deci $\frac{n(n-1)}{2} = 45$, de unde obținem $n^2 - n - 90 = 0$ Cum n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $n = 10$	2p 2p
5. $\vec{u} - \vec{v} = (a-1)\vec{i} + 4\vec{j}$, $3\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ Vectorii $\vec{u} - \vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari, deci $\frac{a-1}{3} = -\frac{4}{3}$, de unde obținem $a = -3$	2p 3p
6. Triunghiul are ipotenuza egală cu 10 și aria $S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a) $A(0) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-4) - 10 \cdot (-2) = 0$	2p 3p
b) $A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 5-10a+a^2 & 10-20a \\ -2+4a & -4+8a+a^2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $\begin{pmatrix} 5-10a+a^2 & 10-20a \\ -2+4a & -4+8a+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p
c) $A(-1) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = 2 \neq 0$, deci $A(-1)$ este inversabilă și $(A(-1))^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	3p

	$X = (A(-1))^{-1} \cdot A(0)$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	2p
2.a)	$5*8 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 8 + 1 = 15 - 16 + 1 = 0$	3p 2p
b)	$3 \cdot 2020^x - 2 \cdot 2020^x + 1 = 2 \Leftrightarrow 2020^x = 1$ $x = 0$	2p 3p
c)	De exemplu, pentru $m = 2k - 1$ și $n = 3k - 1$, unde $k \in \mathbb{Z}$, obținem $m * n = (2k - 1) * (3k - 1) = 3(2k - 1) - 2(3k - 1) + 1 = 6k - 3 - 6k + 2 + 1 = 0$, deci există o infinitate de perechi (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ are panta $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ Tangenta la graficul funcției f în punctul $B(-a, f(-a))$ are panta $f'(-a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ și, cum, pentru orice număr real nenul a , $f'(-a) = f'(a)$, obținem că tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a, f(a))$ și $B(-a, f(-a))$ sunt paralele	2p 3p
c)	$f(x) - f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 2 \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = 2f(x)$, pentru orice număr real x $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)}{\ln x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x + 2 \ln(2x+1) - 2 \ln(2x+1)) dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	2p 3p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2 \ln(2x+1)) dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^1 + \int_0^1 (2x+1)' \ln(2x+1) dx = \frac{1}{2} + (2x+1) \ln(2x+1) \Big _0^1 - \int_0^1 2 dx = \frac{1}{2} + 3 \ln 3 - 2 = 3 \ln 3 - \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$F'(x) = f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe $[0, +\infty)$ Cum $\pi < 3,2 = \frac{16}{5}$, obținem $F(\pi) \leq F\left(\frac{16}{5}\right)$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
 - Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
 - Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \ln a =$ $= 1 - 0 = 1, \text{ pentru orice } a \in (0, +\infty)$	2p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a + \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & \ln(ab) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab), \text{ pentru orice } a, b \in (0, +\infty)$	3p
		2p

c)	$A(a) \cdot A(a) \cdot A(a) = A(a^3) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	2p
	$\begin{pmatrix} 1 & \ln a^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ln a^3 = 2020 \Leftrightarrow \ln a = \frac{2020}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e^{2020}}$, care convine	3p
2.a)	$x \circ y = \frac{1}{3}xy + x + y + 3 - 3 = \frac{1}{3}x(y+3) + (y+3) - 3 =$ $= (y+3)\left(\frac{1}{3}x+1\right) - 3 = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$f(x) \circ f(y) = \frac{1}{3}(f(x)+3)(f(y)+3) - 3 = \frac{1}{3}(3x-3+3)(3y-3+3) - 3 =$ $= 3xy - 3 = f(xy)$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$f\left(\frac{x+3}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x+3}{3} - 3 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $x_k = f\left(\frac{x_k+3}{3}\right)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$	2p
	$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = f\left(\frac{x_1+3}{3}\right) \circ f\left(\frac{x_2+3}{3}\right) \circ \dots \circ f\left(\frac{x_n+3}{3}\right) = f\left(\frac{(x_1+3)(x_2+3) \cdots (x_n+3)}{3^n}\right) =$ $= 3 \cdot \frac{(x_1+3)(x_2+3) \cdots (x_n+3)}{3^n} - 3 = \frac{(x_1+3)(x_2+3) \cdots (x_n+3) - 3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$	3p
	și orice numere reale x_1, x_2, \dots, x_{n-1} și x_n	

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(2) = \sqrt{3}, \quad f'(2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ Ecuația tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, adică $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{\sqrt{3}}$	2p 3p
c)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$, deci dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$, deci dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f , de unde obținem că punctul de intersecție a celor două asimptote este $(1, 1)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx =$ $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	2p 3p

b)	$f(x) - f(-x) = x^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - (-x)^2 - \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + 9}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 9}}$, pentru orice număr real x	2p
	$\int_0^4 (f(x) - f(-x)) dx = \int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = 2\sqrt{x^2 + 9} \Big _0^4 = 2(5 - 3) = 4$	3p
c)	$\int_4^a \frac{f(x)}{x} dx = \int_4^a \left(x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) \right) \Big _4^a = \frac{a^2 - 16}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + 9}}{9}$ $\frac{a^2 - 16}{2} = 10$ și, cum $a > 4$, obținem $a = 6$	3p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{11} - \sqrt{5})(\sqrt{11} + \sqrt{5}) = 11 - 5 =$ $= 6 = (\sqrt{6})^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	2p 3p
2.	$f(-x) = \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1}$ $= -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$, pentru orice $x \in (-1,1)$, deci funcția f este impară	3p 2p
3.	$4 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2 \cdot 2^x + 3) = 0$ Cum $2^x > 0$, pentru orice număr real, obținem $2^x = \frac{1}{2}$, deci $x = -1$	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$ este $A_4^3 =$ $= \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$	3p 2p
5.	$m_{BC} = 1$ și, cum $AD \parallel BC$, obținem $m_{AD} = 1$ Ecuația dreptei AD este $y + 2 = x + 1$, deci $y = x - 1$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$, deci $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ $\sin C = 2 \sin B$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{vmatrix} = -3a + 8 + 0 - 6 - 0 + 4a =$ $= -3a + 4a + 8 - 6 = a + 2$ pentru orice număr real a	2p 3p
b)	$\det(A(0)) = 2 \neq 0$ $A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	Pentru $a \neq -2$, obținem $\det(A(a)) \neq 0$, deci sistemul este Cramer Soluția sistemului de ecuații este $(1, -1, 0)$	2p 3p
2.a)	$x * (-2) = 5(x+2)(-2+2) - 2 =$	3p

	$= 0 - 2 = -2$, pentru orice număr real x	2p
b)	$f(x)*f(y) = 5(f(x)+2)(f(y)+2) - 2 = 5\left(\frac{e^x-10}{5}+2\right)\left(\frac{e^y-10}{5}+2\right) - 2 =$ $= 5 \cdot \frac{e^x}{5} \cdot \frac{e^y}{5} - 2 = \frac{e^{x+y}-10}{5} = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$x*x = 5(x+2)^2 - 2$, $x*x*x = 25(x+2)^3 - 2$ $25(x+2)^3 - 2 = 23 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 1$, deci $x = -1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 =$ $= \frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x+5} - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = 0$, adică axa Ox , este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x+2 = \sqrt{x^2+4x+5} \Rightarrow x^2+4x+4 = x^2+4x+5 \Rightarrow 4 = 5$, fals, deci $f'(x) \neq 0$, pentru orice număr real x f' are proprietatea lui Darboux, deci f' are semn constant și, cum $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 < 0$, obținem că $f'(x) < 0$, pentru orice număr real x , deci f este descrescătoare și, cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și f este continuă, obținem $\text{Im } f = (0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$F'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 - 1}{x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x^2-1)(x+1) - x^2}{x^2(x+1)} =$ $= \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x+1)} = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	3p 2p
b)	$\int_1^2 (x+1)f(x) dx = \int_1^2 \frac{x^3 - x - 1}{x^2} dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{1}{x} \right]_1^2 =$ $= 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \ln 1 + 1 \right) = 1 - \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_1^a f(x) dx = F(x) \Big _1^a = F(a) - F(1) = \frac{a^2+1}{a} - \ln(a+1) - 2 + \ln 2 = \frac{a^2+1}{a} - \ln \frac{a+1}{2} - 2$ $\frac{a^2+1}{a} - \ln \frac{a+1}{2} - 2 = \frac{1}{2} - \ln \frac{a+1}{2}$, deci $\frac{a^2+1}{a} = \frac{5}{2}$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(2+3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i = \\ = 5i^2 + 12i = i(5i + 12)$	3p 2p
2.	$(f \circ f)(x) = x + a + a = x + 2a, f(x+1) = x + 1 + a, \text{ pentru orice număr real } x \\ x + 2a = x + 1 + a \Rightarrow a = 1$	3p 2p
3.	$5 \cdot 2 \cdot 2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x \Leftrightarrow 10 \cdot 6^x = 12 \cdot 5^x \\ \left(\frac{6}{5}\right)^x = \frac{6}{5}, \text{ deci } x = 1$	3p 2p
4.	$f(1) \text{ poate fi aleasă în două moduri, iar } f(2) \text{ și } f(3) \text{ pot fi alese în câte patru moduri} \\ \text{Există } 4^2 \cdot 2 = 32 \text{ de funcții } f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ astfel încât } f(1) \geq 3$	3p 2p
5.	$m_{AC} = -1 \\ \text{Cum } BD \perp AC, \text{ obținem } m_{BD} = 1$	2p 3p
6.	$\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ și, cum } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ obținem } x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ deci } x = \frac{\pi}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{vmatrix} = 2^x \cdot 3^x - 0 \cdot 0 = \\ = (2 \cdot 3)^x = 6^x, \text{ pentru orice număr real } x$	3p 2p
b)	$A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2^x = 3^x, \text{ de unde obținem } x = 0$	3p 2p
c)	$X \cdot X \cdot X = A(1) \cdot X \text{ și } X \cdot X \cdot X = X \cdot A(1) \Rightarrow A(1) \cdot X = X \cdot A(1), \text{ deci, pentru } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \\ \text{unde } a, b, c \text{ și } d \text{ sunt numere reale, obținem } \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 0 \text{ și } c = 0 \\ \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \text{ și } d \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \text{ deci orice matrice } X, \text{ pentru care} \\ X \cdot X = A(1), \text{ are două elemente numere iraționale}$	3p 2p

2.a)	$x \circ x = x^2 + x \cdot x + x^2 =$ $= 3x^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$x^2 + xa + a^2 = x^2 + xb + b^2 \Leftrightarrow x(a-b) + (a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x+a+b) = 0$ Cum $a \neq b$, obținem $x = -a-b$	3p 2p
c)	$x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ $(x+1)^3 = 0$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} =$ $= 2 - \ln(x+1) - 1 = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e-1$ Pentru orice $x \in (-1, e-1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1, e-1]$ și pentru orice $x \in [e-1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e-1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$ Cum, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1} < 0$, obținem $f''(x) < 0$, deci f este concavă	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x - e^x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - e^x \right]_0^1 =$ $= \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{3}{2} - e$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x (x - e^x) dx = \int_0^1 (x^2 - xe^x) dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 - (x-1)e^x \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n (x - f(x)) dx = \int_0^1 x^n e^x dx = x^n e^x \Big _0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx =$ $= e - n I_{n-1}$, de unde obținem $I_n + n I_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left[2 + 3\sqrt{5} \right] = 2 + \left[3\sqrt{5} \right] = 2 + \left[\sqrt{45} \right]$ $36 < 45 < 49 \Rightarrow 6 < 3\sqrt{5} < 7, \text{ deci partea întreagă a numărului } 2 + 3\sqrt{5} \text{ este egală cu 8}$	2p
2.	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) - 4g(x) + 5 = (2-x)^2 - 4(2-x) + 5 = x^2 + 1, \text{ pentru orice număr real } x$ $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = h^2(x) - 4h(x) + 5 = (2+x)^2 - 4(2+x) + 5 = x^2 + 1, \text{ pentru orice număr real } x, \text{ deci } (f \circ g)(x) = (f \circ h)(x), \text{ pentru orice număr real } x$	3p
3.	$x + 3 + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{3-x} + 3 - x = 12 \Rightarrow \sqrt{(x+3)(3-x)} = 3 \Rightarrow 9 - x^2 = 9$ $x = 0, \text{ care convine}$	3p
4.	$\text{În mulțimea } A \text{ sunt 15 numere divizibile cu 2 și 10 numere divizibile cu 3}$ $\text{Cum în mulțimea } A \text{ sunt 5 numere care sunt divizibile și cu 2 și cu 3, obținem că în mulțimea } A \text{ sunt } 15 + 10 - 5 = 20 \text{ de numere care sunt divizibile cu 2 sau cu 3}$	2p
5.	$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{12}(-5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}), \text{ unde } D \text{ este mijlocul segmentului } BC$ $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{15}(-5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}) = \frac{12}{15}\overrightarrow{MG}, \text{ deci } \overrightarrow{MG}$ $\text{și } \overrightarrow{GN} \text{ sunt coliniari, de unde obținem că punctele } M, N \text{ și } G \text{ sunt coliniare}$	3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = 2R \text{ și, cum } R = \frac{1}{2}, \text{ obținem } BC = \sin A$ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - BC^2$	3p
		2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot a =$ $= 4 - 0 = 4, \text{ pentru orice număr real } a$	3p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2a+2b & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a+b & 2 \end{pmatrix} = 2A(a+b), \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b$	3p
c)	$A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = 2A(1+2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(5) = 2^4 A(1+2+3+4+5) = 2^4 A(15)$ $2^4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 15 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow n = 4 \text{ și } x = 15$	3p
2.a)	$5 \circ 2 = 5 + 2 - 7 =$ $= 7 - 7 = 0$	3p
		2p

b)	$f(x) \circ f(y) = f(x) + f(y) - 7 = 7 + \log_7 x + 7 + \log_7 y - 7 = 7 + \log_7 x + \log_7 y = 7 + \log_7(xy) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$	3p 2p
c)	$a^2 \circ b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 7$ Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $ a \geq 3$ sau $ b \geq 3$, obținem $a^2 + b^2 \geq 9$, deci $a^2 + b^2 \neq 7$ Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $ a \leq 2$ și $ b \leq 2$, obținem $a^2 + b^2 \in \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 7$, deci $a^2 + b^2 \neq 0$, pentru orice numere întregi a și b	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot (x-5) + e^{2x} \cdot 1 = e^{2x}(2x-10+1) = e^{2x}(2x-9)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}(2x-9)}{e^{2x}(x-5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-9}{x-5} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{9}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{5}{x}\right)} = 2$	3p 2p
c)	$x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$ și $x \in \left[\frac{9}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f crescătoare pe $\left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$; obținem $f(x) \geq f\left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{e^9}{2}$, pentru orice număr real x Cum $e^{2x}(x-5) \geq -\frac{e^9}{2}$ și $x-5 < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 5) \Rightarrow e^{2x} \leq \frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x \in (-\infty, 5)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^2 f(x) \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^2 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^2 = \frac{4}{2} - 0 = 2$	2p 3p
b)	$\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx =$ $= \sqrt{x^2 + 1} \Big _1^2 + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \Big _1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$	3p 2p
c)	$\int_0^x f(e^t) dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{e^{2t} + 1}} \cdot (e^t)' dt = \ln\left(e^t + \sqrt{e^{2t} + 1}\right) \Big _0^x = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}\right) - \ln(1 + \sqrt{2})$, pentru orice număr real x $\ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}\right) - \ln(1 + \sqrt{2}) = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}\right) + \ln(a - 1)$, pentru orice număr real x , deci $-\ln(1 + \sqrt{2}) = \ln(a - 1) \Leftrightarrow a - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$, de unde obținem $a = \sqrt{2}$, care convine	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_5 = a_1 + 4r = 1 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$ Cum $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2 < 1 + \sqrt{3} < 3$, obținem că $\{a_5\} = a_5 - [a_5] = 1 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1$	2p 3p
2.	$f(-2) = f(2) = \sqrt{5}$, $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$ $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) = \sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 1 = 10 \in \mathbb{N}$	3p 2p
3.	$\log_3(5x-1) = \log_3(x+1)^2 \Rightarrow 5x-1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ sau $x = 2$, care convin	3p 2p
4.	$\{1, 2, 3\} \subset X \Rightarrow 1, 2, 3 \in X$ $X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow X = \{1, 2, 3\}$, $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $X = \{1, 2, 3, 5\}$ sau $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, deci există 4 mulțimi X astfel încât $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$	2p 3p
5.	$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(a\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + b\vec{j}) = (2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j}$ $(2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j} = \vec{0}$, deci $a = -3$ și $b = -2$	2p 3p
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$, deci $AB = AC = 8$ $r = \frac{S}{p} = \frac{32}{4(2+\sqrt{2})} = 4(2-\sqrt{2})$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 1 \cdot a^3 - a \cdot a^2 =$ $= a^3 - a^3 = 0$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	$A(2) + xI_2 = \begin{pmatrix} 1+x & 2 \\ 4 & 8+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xI_2) = x^2 + 9x$, deci $x^2 + 9x = 0$ $x = -9$ sau $x = 0$	3p 2p
c)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix}$, $A(b) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b $\begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = b$	3p 2p
2.a)	$0 * 8 = \sqrt[3]{0^2 + 8^2} =$ $= \sqrt[3]{64} = 4$	3p 2p

b)	<p>Dacă e este elementul neutru al legii de compoziție „*”, atunci $e*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e*0=0 \Rightarrow \sqrt[3]{e^2}=0$ și obținem $e=0$ Cum $0*8=4 \neq 8$, $e=0$ nu este element neutru al legii de compoziție „*”, deci legea de compoziție „*” nu are element neutru</p>	3p 2p
c)	<p>De exemplu, pentru $m=2k^3$ și $n=2k^3$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow m*n=\sqrt[3]{m^2+n^2}=\sqrt[3]{(2k^3)^2+(2k^3)^2}=\sqrt[3]{8k^6}=2k^2 \in \mathbb{N}^*$, deci există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul</p>	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - (\sqrt{x+1})' =$ $= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}, \quad x \in (-1, +\infty)$	2p 3p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$ Pentru $x \in \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left[-1, -\frac{3}{4}\right]$ și, pentru $x \in \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$	2p 3p
c)	$\ln x \geq 1$, pentru orice $x \in [e, +\infty)$ și f este crescătoare pe $[1, +\infty)$ $f(\ln x) \geq f(1) \Rightarrow \ln x - \sqrt{\ln x + 1} \geq 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \ln x \geq \sqrt{\ln x + 1} + 1 - \sqrt{2}$, pentru orice $x \in [e, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x (x^2 - 4x + 5)}{e^x} dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 2 + 5 = \frac{10}{3}$	3p 2p
b)	$F'(x) = f(x)$ și $F''(x) = e^x (x^2 - 4x + 5) + e^x (2x - 4) = e^x (x^2 - 2x + 1) = e^x (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$ $e^x (x-1)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x , deci, pentru orice primitivă F a lui f , obținem $F''(x) \geq 0$, pentru orice număr real x , deci F este convexă	3p 2p
c)	$F'(x) = e^x (ax^2 + bx + c) + e^x (2ax + b) = e^x (ax^2 + (b+2a)x + c + b)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $ax^2 + (b+2a)x + c + b = x^2 - 4x + 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $a=1$, $b=-6$ și $c=11$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$5 + 2\sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3}) =$ $= 5 + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} = 1$, care este număr întreg	3p 2p
2.	$2m+1=2m^2+2m \Leftrightarrow m^2+m=\frac{1}{2}$ $m=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$	3p 2p
3.	$x^2 + 5x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $x = -4$, care nu convine, sau $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $ a+1 \geq 2$ sunt 1, 2 și 3, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$, deci $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$	2p 3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$ și, cum $R = 1$, obținem $BC = 2\sin A$ și $AC = 2\sin B$ $4\sin A \cdot \sin B = 2\sin B \cdot 2\sin A = AC \cdot BC$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,3)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 3 - 3 = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b)) = \begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{vmatrix} = (a+1)(b-2) - b(a-1) = 2(b-a-1)$, pentru orice numere reale a și b $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow b-a-1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \det(A(a,b)) \neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	3p 2p
c)	$A(-1, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$, $\det(A(-1, \sqrt{2})) = 2\sqrt{2}$, $(A(-1, \sqrt{2}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $X = (A(-1, \sqrt{2}))^{-1} \cdot A(0,0)$ și, cum $A(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, obținem $X = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	3p 2p

2.a)	$1 \circ 4 = 5 \cdot 1 \cdot 4 + 1 + 4 = 20 + 5 = 25$	2p 3p
b)	$x \circ 0 = 5x \cdot 0 + x + 0 = x$, pentru orice număr întreg x $0 \circ x = 5 \cdot 0 \cdot x + 0 + x = x$, pentru orice număr întreg x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compozitie „ \circ ”	2p 3p
c)	$x \in \mathbb{Z}$ element simetrizabil în raport cu legea de compozitie „ \circ ” \Leftrightarrow există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = 0 \Leftrightarrow 5xx' + x + x' = 0$, deci $x' = \frac{-x}{5x+1}$ și, cum $x, x' \in \mathbb{Z}$, obținem $5x+1 = -1$ sau $5x+1 = 1$ $x = -\frac{2}{5}$, care nu convine, sau $x = 0$, care convine	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1$, deci panta dreptei d este 1 Tangenta la graficul lui f în $A(a, f(a))$ are panta 1, dacă $f'(a) = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2(a^2+3)}{(a^2+1)^2} = 1$, de unde obținem $a^2 = 1$, deci $a = -1$ sau $a = 1$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}, x \in \mathbb{R}$ Cum $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, \sqrt{3}]$, obținem că funcția f este convexă pe $[0, \sqrt{3}]$	2p 3p
2.a)	$\int_0^\pi \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^\pi \frac{e^x \cos x}{e^x} dx = \int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big _0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0$	2p 3p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\cos x)' dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + e^x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$	3p 2p
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\pi}{3} e^{x+\frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{e^x \cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \Big _0^{\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) - e^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos 0) = e^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{2} - e^{\frac{\pi}{2}} \ln 1 = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1 + 3 - 2\sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$ <p>Cum a și b sunt numere raționale $4 - \sqrt{2} = a + b\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 4$ și $b = -1$</p>	2p 3p
2. $f(2020) = \frac{2020^2 + 2}{2020^2 + 1}$ $f\left(\frac{1}{2020}\right) = \frac{2 \cdot 2020^2 + 1}{2020^2 + 1} \Rightarrow f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = \frac{2020^2 + 2}{2020^2 + 1} + \frac{2 \cdot 2020^2 + 1}{2020^2 + 1} = \frac{3(2020^2 + 1)}{2020^2 + 1} = 3$	2p 3p
3. $2^{2x} - 2^{2x+3} = -7 \Leftrightarrow 2^{2x}(1 - 2^3) = -7 \Leftrightarrow 2^{2x} = 1$ <p>$x = 0$</p>	3p 2p
4. Sunt $3^3 = 27$ de funcții $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ Deoarece numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ pentru care $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \neq 0$ este egal cu $2^3 = 8$, obținem că numărul de funcții $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ cu proprietatea că $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$ este egal cu $27 - 8 = 19$	2p 3p
5. $AD \parallel BC \Rightarrow m_{AD} = m_{BC}$, deci $m_{AD} = 1$ Ecuația dreptei AD este $y - 3 = 1 \cdot (x + 1)$, deci $y = x + 4$	3p 2p
6. $\operatorname{tg} 2x = -1$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deci $2x = \frac{7\pi}{4}$ $x = \frac{7\pi}{8}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a) $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 12 - (-2) - (-3) - 0 = 18$	2p 3p
b) Sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$ $\det(A(a)) = a + 17$, deci $\det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-17\}$	2p 3p
c) Pentru $a = 1$, obținem $\det(A(1)) = 18 \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică Soluția sistemului de ecuații este $(1, 1, 1)$	2p 3p
2.a) $2 * \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 =$ $= 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$	3p 2p

b)	$a * x = a \Leftrightarrow 2ax - a - x + 1 = a \Leftrightarrow (2a - 1)(x - 1) = 0$, pentru orice număr real x $a = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$f(x * y) = 2(x * y) - 1 = 2(2xy - x - y + 1) - 1 = 4xy - 2x - 2y + 2 - 1 = 4xy - 2x - 2y + 1 = (2x - 1)(2y - 1) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' \cdot \left(\ln(2^x + 1)\right)' = 1 - \frac{1}{2^x + 1} \cdot (2^x + 1)' = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$0 < \frac{2^x}{2^x + 1} < 1$, pentru orice număr real x și $0 < \ln 2 < 1$, deci $\frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} < 1$, pentru orice număr real x $f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} > 0$, pentru orice număr real x , deci f este crescătoare	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(2^x + 1)}{x} \right) = 1 - 0 = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(2^x + 1)) = -\ln 1 = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x+2)\sin x}{x+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$	3p 2p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)(\cos x)' dx = -(x+2)\cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$ $= -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\cos \frac{\pi}{2} + (0+2)\cos 0 + \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 3$	3p 2p
c)	$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{(x+2)^2 \sin^2 x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} \Big _{\frac{1}{n}}^1 = -\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1}$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$ $-\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{9}$, deci $n = 4$, care convine	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. $\begin{aligned} z &= a^2 + 4ai - 4 + a^2 - 4ai - 4 = \\ &= 2a^2 - 8 \in \mathbb{R} \end{aligned}$	3p 2p
2. $f(x) - 1 = -\frac{2x}{x^2 + 1} - 1 = -\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = -\frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$ Cum $\frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$, pentru orice număr real x , obținem $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x	3p 2p
3. $\sqrt{3}^{x+1} = 2^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1} = 1$ $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$	3p 2p
4. Numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care sunt strict crescătoare este egal cu $C_4^3 =$ $= \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$	3p 2p
5. Dreapta de ecuație $ax + y - 5 = 0$ are panta egală cu $-a$ Dreapta de ecuație $x - 4y + 3 = 0$ are panta egală cu $\frac{1}{4}$, deci $a = -\frac{1}{4}$	2p 3p
6. $\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Rightarrow (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2 = 0$ $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $x = \frac{\pi}{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0 = -2$	2p 3p
b) $A \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ $B \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3, \text{ deci } B \text{ este inversa matricei } A$	3p 2p

c) $\det A \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{3-a}{2}\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$ $2 \cdot \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} \Leftrightarrow 2a + 2 = 2 \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p
2.a) $i \circ i = i \cdot i \cdot i + i + i = -i + 2i = i$	3p 2p
b) $z_1 \circ z_2 = iz_1z_2 + z_1 + z_2 - i + i = iz_1(z_2 - i) + (z_2 - i) + i = (z_2 - i)(iz_1 + 1) + i = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2	3p 2p
c) $z \circ 0 = z$, $0 \circ z = z$, pentru orice număr complex z , deci 0 este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ” $z \circ z' = 0 \Leftrightarrow i(z - i)(z' - i) + i = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z' - i) = -1$, deci $z' = -\frac{1}{z - i} + i$ și, cum $z = \frac{1}{2}(1+i)$, obținem $z' = -\frac{2}{1+i-2i} + i = \frac{-1+i}{1-i} = -1$, care este număr real	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a) $f'(x) = nx^{n-1} - n \cdot \frac{1}{x} = n\left(x^{n-1} - \frac{1}{x}\right) =$ $= n \cdot \frac{x^n - 1}{x} = \frac{n(x^n - 1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n - n \ln x + 1 - x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n \ln x + 1}{x} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p
c) Pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = 2$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = a$ are soluție în intervalul $(0, 1] \Leftrightarrow a \in [2, +\infty)$	2p 3p
2.a) $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 = 12$	3p 2p
b) $\int_0^1 f(x) e^{x^3+3x} dx = \int_0^1 (x^2 + 1) e^{x^3+3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3 + 3x)' e^{x^3+3x} dx = \frac{1}{3} e^{x^3+3x} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} (e^4 - e^0) = \frac{e^4 - 1}{3}$	3p 2p
c) $\int_0^1 f^7(x) dx = \int_0^1 x'(x^2 + 1)^7 dx = x(x^2 + 1)^7 \Big _0^1 - \int_0^1 14x^2(x^2 + 1)^6 dx = 2^7 - 14 \int_0^1 (x^2 + 1 - 1)(x^2 + 1)^6 dx =$ $= 128 - 14 \int_0^1 (x^2 + 1)^7 dx + 14 \int_0^1 (x^2 + 1)^6 dx$, deci $15 \int_0^1 f^7(x) dx - 14 \int_0^1 f^6(x) dx = 128$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că primul termen este $b_1 = 2$ și rația este $q = 3$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$. Calculați suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x} = 3 - x$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{50}\}$, acesta să nu fie număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC .
- 5p** 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $(2 \sin x + \cos x)^2 - 4 \cos x (\sin x - \cos x) = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- a)** Arătați că $\det(A(x)) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x .
- b)** Demonstrați că $A(2020 - x) + A(2020 + x) = 2A(2020)$, pentru orice număr real x .
- c)** Determinați numărul natural n , pentru care $A(n)A(2 - n) = 2A(-6)$.
- 5p** 2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- a)** Arătați că $N = \sqrt{33} * \sqrt{31}$ este un număr natural.
- b)** Determinați numărul $x \in M$ pentru care $(x * x * x)^2 = 300$.
- c)** Se consideră funcția $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x + y) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (-\infty, 0]$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$.
- a)** Arătați că $f'(x) = \frac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- c)** Demonstrați că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{10}$, pentru orice număr real x .
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-3\ln x}{x^4}$ și $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\ln x}{x^3}$.
- a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Calculați $\int_1^e f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_e^{e^2} x^2 F(x) dx = \frac{3}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_2 = 2$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 4$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = x - 1$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10. |
| 5p | 5. Determinați numărul real m , pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari. |
| 5p | 6. Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$, pentru orice număr real x . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
a) Arătați că $\det A = 0$.
b) Demonstrați că $M(x)M(y) = M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y .
c) Determinați perechile de numere naturale (m, n) pentru care $M(m)M(n) = M(6)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție asociativă $x \circ y = xy - x - y + 2$.
a) Arătați că $x \circ y = (x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y .
b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x \leq 5$.
c) Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n . |
|-----------|---|

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-e}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
b) Demonstrați că graficul funcției f nu admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$.
c) Demonstrați că ecuația $e^x - x^e = 0$ are exact o soluție în $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x+2)e^x$.
a) Arătați că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = 18$.
b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
c) Determinați numărul natural nenul n , știind că $\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)} dx = \frac{3 \ln 2}{2}$. |
|-----------|--|

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Determinați al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și $b_2 = 2$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Determinați numerele naturale x , pentru care $f(x) < 7$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 8} = x + 2$. |
| 5p | 4. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3\}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(4, 4)$, $C(1, a)$ și $D(2, 1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , pentru care dreptele AB și CD sunt paralele. |
| 5p | 6. Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC , în care $AB = 10$ și $\cos B = \frac{1}{2}$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$. |
| 5p | b) Demonstrați că $A(x)A(y) = A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați numerele reale a pentru care $A(a)A(a) = A(5)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie asociativă $x * y = 5(x + y - 4) - xy$.
a) Arătați că $x * y = -(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y .
b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * x \geq x$.
c) Calculați $1 * (-2) * 3 * (-4) * \dots * 2019 * (-2020)$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$.
a) Arătați că $f'(x) = -x(x+2)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați ecuația asymptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
c) Demonstrați că $0 \leq \frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}} \leq 4$, pentru orice $x, y \in [-2, +\infty)$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^x$.
a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \frac{1}{4}$.
b) Calculați $\int_1^2 \frac{1}{x^2} f(x) dx$.
c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune. |

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*

Test 4

Filierea teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 3$ și $b_6 = 6$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 20$. Determinați numerele reale a , știind că $f(a) = a$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x = \frac{1}{5^{3x}}$. |
| 5p | 4. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distințe, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$ și $C(1, 0)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC . |
| 5p | 6. Calculați $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = A + xB$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(M(1)) = 0$. |
| 5p | b) Demonstrați că $M(x)M(y) = M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x = y$. |
| 5p | c) Determinați perechile de numere întregi (m, n) pentru care $M(m^2 + 1)M(n^2) = M(n^2)M(m^2 + 1)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 7xy$. |
| 5p | a) Arătați că $x \circ y = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = 5$. |
| 5p | c) Dați exemplu de numere distincte $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care numărul $a \circ b$ este natural. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x$. |
| 5p | c) Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^e f'(x) dx = 1$. |
| 5p | b) Calculați $\int_1^e \frac{f^2(x)}{x} dx$. |
| 5p | c) Determinați numărul real p , $p > 1$, știind că $\int_1^p x f(x) dx = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{3}{4}$. |

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică M_st-nat

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $(0,2 \cdot 10 - 1)(0,2 \cdot 10 + 1) = 3$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = x$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{6-x} = \sqrt{x+14}$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților. |
| 5p | 5. Determinați numărul real a , pentru care $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, unde $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. |
| 5p | 6. Arătați că $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, știind că $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + y + az = 4 \\ -3x - y + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real și $A(a)$ matricea coeficienților sistemului. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$. |
| 5p | b) Pentru $a = -1$, determinați soluția sistemului de ecuații. |
| 5p | c) Demonstrați că, pentru orice număr rațional p , matricea $A(p)$ este inversabilă pentru orice număr rațional p . |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție asociativă și cu element neutru $x * y = xy - 101x - 101y + 10302$. |
| 5p | a) Arătați că $x * y = (x - 101)(y - 101) + 101$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Determinați numerele reale care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea „*”. |
| 5p | c) Determinați numerele întregi x și y , cu $x < y$, pentru care $x * y = 202$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 5$. |
| 5p | a) Determinați panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | b) Demonstrați că funcția f este convexă pe \mathbb{R} . |
| 5p | c) Demonstrați că $e^x(1-x) \leq 1$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{4}{x}\right) dx = 4$. |
| 5p | b) Calculați $\int_2^6 \frac{2}{f(x)} dx$. |
| 5p | c) Determinați numărul real nenul a , știind că $\int_1^e \left(f(x) - \frac{4}{x}\right) \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{a}$. |

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 5$ și rația $r = 2$.
- 5p** 2. Determinați multimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2 - ax + a - 1 = 0$ are soluții reale distințe.
- 5p** 3. Rezolvați în multimea numerelor reale ecuația $3 - \sqrt[3]{x^2 + x + 2} = 1$.
- 5p** 4. Calculați $2C_4^3 - 3A_4^2$.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + (a^2 + 1)\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB = 8$, $BC = 8$ și aria egală cu 16. Determinați măsura unghiului B .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x, y) = xI_2 + yA$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p** b) Demonstrați că $M(x, y) \cdot M(a, b) = M(xa + yb, xb + ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y .
- 5p** c) Determinați perechile (x, y) de numere reale, știind că $\det(M(x, y)) = 4$ și suma elementelor matricei $M(x, y) \cdot M(x, y)$ este egală cu 8.
2. Pe multimea numerelor reale se definesc legile de compozиție $x * y = x + y - 1$ și $x \circ y = xy - x - y + 2$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ (1 * 3) = (2 \circ 1) * (2 \circ 3)$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $3^{x \circ x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x * x}$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y pentru care $(x - 1) * (2y + 1) = 2$ și $(x + y) \circ 4 = 10$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2 - x + \sqrt{x^2 + 3}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Arătați că funcția f este continuă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Arătați că, pentru orice număr real a , $a > 1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ nu este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + x + 1$ și $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{2x}$.
- 5p** a) Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g .

5p b) Calculați $\int_1^4 g(x)dx$.

5p c) Determinați numărul real m , $m > 1$, pentru care $\int_1^m f(x) \cdot g(x)dx = 20$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și $b_2 = 2$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 11x + 6$. Determinați multimea valorilor reale ale lui x pentru care punctele $A(x, f(x))$ sunt situate sub axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în multimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x) - \lg(7-x) = -1$. |
| 5p | 4. Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 + C_n^2 = 6$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2a-1, a^2)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care punctul A aparține dreptei d de ecuație $y = x + 4$. |
| 5p | 6. Determinați $\cos 2x$, știind că x este număr real și $\sin x = \frac{12}{13}$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2, \text{ unde } a \text{ este} \\ ax + y + z = 3 \end{cases}$ număr real.
a) Arătați că $\det(A(1)) = -9$. |
| 5p | b) Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a) = A(a) \cdot A(a)$ nu depinde de numărul real a . |
| 5p | c) Pentru $a = -2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil. |
| 5p | 2. Pe multimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x * y = xy + m(x + y)$, unde m este număr real.
a) Arătați că $(-1) * 1 = -1$, pentru orice număr real m . |
| 5p | b) Demonstrați că $x * y = (x + m)(y + m) - m^2$, pentru orice numere reale x, y și m . |
| 5p | c) Pentru $m = -1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x * 5^{x+1} = -1$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$. |
| 5p | 2. Se consideră funcțiile $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + e^x + m$, unde m este număr real, și $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x + e^x + 4x + 1$.
a) Determinați numărul real m astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f . |

5p b) Pentru $m = 4$, calculați $\int_1^e f(x) dx$.

5p c) Pentru $m = 0$, calculați $\int_1^2 xf(x) dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică M_st-nat

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $(\log_2 63 - \log_2 7) \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 2$. |
| 5p | 2. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2 + mx - m = 0$ nu are soluții reale. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-20} = \frac{1}{81}$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n! \leq n(n-1)$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(0,4)$ și $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$. |
| 5p | 6. Determinați numărul real a , $a > 1$, știind că $a-1$, $2a$ și $2a+1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(e)) = e$. |
| 5p | b) Demonstrați că $\det(A(a^2)) = \det(A(a) \cdot A(a))$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$. |
| 5p | c) Determinați numerele $a, b \in (0, +\infty)$ pentru care $A(a) + A(b) = 2A(a) \cdot A(b)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиie asociativă $x \circ y = 3xy - 3\sqrt{2}(x+y) + 6 + \sqrt{2}$. |
| 5p | a) Arătați că $\sqrt{2} \circ 1 = \sqrt{2}$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x \circ y = 3(x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Calculați $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} \circ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \circ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3^x - 4, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{x^2 - x + 1}{x^2}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$. |
| 5p | a) Arătați că funcția f este continuă pe \mathbb{R} . |
| 5p | b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty, 1)$. |
| 5p | c) Demonstrați că $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)dx = 5$. |

5p b) Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.

5p c) Demonstrați că orice primitivă $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f este concavă.

**Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)**

Matematică M_st-nat

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Comparați numerele $\log_2 16$ și $\sqrt[3]{125}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (a+2)x + 2a + 1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care graficul funcției f este tangent axei Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-x-2} = 5^{3x-5}$.
- 5p** 4. Demonstrați că numerele C_4^1 , A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,a)$ și $C(4,2a+1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , pentru care punctele A , B și C sunt coliniare.
- 5p** 6. Determinați raza cercului circumscris triunghiului MNP , știind că $MN = 16$ și $m(\angle P) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay - z = a \\ x - y - az = -1, \text{ unde } a \text{ este} \\ ax - y + z = -1 \end{cases}$ număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = -4$.
- 5p** b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Arătați că sistemul de ecuații nu admite nicio soluție (x_0, y_0, z_0) pentru care $x_0 = y_0 = z_0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}$.
- 5p** a) Arătați că $2020 * (-2020) = 2$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Știind că $(\mathbb{R}, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4}$.
- 5p** a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2, +\infty)$.
- 5p** c) Determinați $x \in [-1, +\infty)$ pentru care $f(x) \in \mathbb{Z}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)} dx = e^2 - 1$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 e^{3x} f^2(x) dx$.

5p

- c) Se consideră numerele reale pozitive a , b și c . Demonstrați că, dacă $1 - \int_0^a \frac{f(x)}{x+1} dx$, $1 - \int_0^b \frac{f(x)}{x+1} dx$ și $1 - \int_0^c \frac{f(x)}{x+1} dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci a , b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)
Matematică M_st-nat

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care numerele $a - 1$, 3 și $a + 7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Determinați suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x - 3$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} - 3^x - 8 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2 \leq 3C_n^1$.
- 5p** 5. Determinați numerele reale m , $m \neq 2$, pentru care vectorii $\vec{u} = 4\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Determinați perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 5$, $AC = 4$ și $m(\angle A) = 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} (m^2 - 1)x + my + 4z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ mx + 3y + z = -1 \end{cases}$, unde m este număr real.

- 5p** a) Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1, 0, 1)$ este soluție a sistemului de ecuații.
- 5p** b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.
- 5p** c) Determinați numerele $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0, y_0, z_0) , cu $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție asociativă $x \circ y = x + y + 11xy$.
- 5p** a) Demonstrați că $x \circ y = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = \frac{8}{11}$.
- 5p** c) Calculați partea întreagă a numărului $a = \left(1 - \frac{1}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{2}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{3}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{4}{11}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \sqrt{x} - 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.
- 5p** c) Demonstrați că $x(2\sqrt{x} - 3) \geq -1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră funcția $f_n : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}$.
- 5p** a) Determinați primitiva $G : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^3 + 1)f_3(x)$, știind că $G(0) = 2020$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

5p c) Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)dx \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Arătați că $\log_2(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = -\log_2(\sqrt[3]{2} - 1)$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , astfel încât $f(x) + f(-x) = 2020$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{1-x} = 4$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cuprins între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$. |
| 5p | 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$. |
| 5p | 6. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 2, 3 și 4. Arătați că triunghiul este obtuzunghic. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = \det(A + I_2)$. |
| 5p | b) Determinați numărul real a , știind că $A \cdot A \cdot A = aI_2$. |
| 5p | c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m \neq n$, pentru care $\det(A + mI_2) = \det(A + nI_2)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea $M = (0, 1)$ se definește legea de compozitie $x \circ y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$. |
| 5p | a) Arătați că $x \circ \frac{1}{2} = x$, pentru orice $x \in M$. |
| 5p | b) Demonstrați că legea de compozitie „ \circ ” este comutativă. |
| 5p | c) Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Arătați că $g'(x) + g(x) = \frac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x , unde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f''(x)$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 1)f(x)dx = 3$. |

5p | b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p | c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x dx = e^2 + a$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică M_st-nat

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Determinați termenul a_2 al unei progresie aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 6$. Arătați că numărul $f(3) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ este natural. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(4-x) = 3 - \log_5(24-x)$. |
| 5p | 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 45 submulțimi cu două elemente. |
| 5p | 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Determinați numărul real a , știind că vectorii $\vec{u} - \vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari. |
| 5p | 6. Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6, respectiv 8. Determinați raza cercului inscris în acest triunghi. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 5-a & 10 \\ -2 & -4-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$. |
| 5p | b) Determinați numărul real a , știind că $A(a) \cdot A(a) = A(0)$. |
| 5p | c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1) \cdot X = A(0)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x * y = 3x - 2y + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $5 * 8 = 0$. |
| 5p | b) Determinați numărul real x pentru care $2020^x * 2020^x = 2$. |
| 5p | c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a , tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a, f(a))$ și $B(-a, f(-a))$ sunt paralele. |
| 5p | c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln x}$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2\ln(2x+1)$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 2\ln(2x+1)) dx = \frac{1}{2}$. |
| 5p | b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$. |
| 5p | c) Dacă F este o primitivă a funcției f , arătați că $F(\pi) \leq F\left(\frac{16}{5}\right)$. |

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că modulul numărului complex $z = \frac{1+2i}{1-2i}$ este egal cu 1 . |
| 5p | 2. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^x$ este pară. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = x$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre divizibile cu 3 . |
| 5p | 5. În triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, ecuația mediatoarei laturii AC este $y = 3x + 1$ și ecuația perpendicularei din A pe BC este $2y = x + 7$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC . |
| 5p | 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) \cos x = -1$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(a)) = 1$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$, pentru orice $a, b \in (0, +\infty)$. |
| 5p | c) Determinați $a \in (0, +\infty)$, astfel încât $A(a) \cdot A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie asociativă $x \circ y = \frac{1}{3}xy + x + y$. |
| 5p | a) Demonstrați că $x \circ y = \frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 3$. Arătați că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Demonstrați că $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = \frac{(x_1+3)(x_2+3)\dots(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și orice numere reale x_1, x_2, \dots, x_{n-1} și x_n . |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 2$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asymptote ale graficului funcției f . |

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right) dx = \frac{1}{3}$.
- 5p b) Calculați $\int_0^4 (f(x) - f(-x)) dx$.
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 4$, astfel încât $\int_4^a \frac{f(x)}{x} dx = 10 + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + 9}}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $\sqrt{11} - \sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ și $\sqrt{11} + \sqrt{5}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Demonstrați că funcția f este impară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 2^x = \frac{3}{4}$.
- 5p** 4. Determinați numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-1,2)$. Determinați ecuația dreptei AD , știind că $ABCD$ este paralelogram.
- 5p** 6. Triunghiul ABC are $AB = 10$ și $AC = 5$. Arătați că $\sin C = 2 \sin B$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -2x - 3y = 1 \\ 2x + 4y + az = -2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(a)) = a + 2$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Pentru $a = 0$, determinați inversa matricei $A(a)$.
- 5p** c) Pentru $a \neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5(x+2)(y+2) - 2$.
- 5p** a) Arătați că $x * (-2) = -2$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - 10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y) = f(x)*f(y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numărul real x , astfel încât $x * x * x = 23$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x+1)}$ și $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x} - \ln(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Calculați $\int_1^2 (x+1)f(x) dx$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 1$, astfel încât $\int_1^a f(x) dx = \frac{1}{2} - \ln \frac{a+1}{2}$.

**Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)**

Matematică M_st-nat

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $(2+3i)^2 = i(5i+12)$, unde $i^2 = -1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$. Determinați numărul real a , astfel încât $(f \circ f)(x) = f(x+1)$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5 \cdot 2^{x+1} \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x$. |
| 5p | 4. Determinați numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, care au proprietatea $f(1) \geq 3$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy , se consideră rombul $ABCD$ cu $A(-1, 3)$ și $C(-2, 4)$. Determinați panta dreptei BD . |
| 5p | 6. Determinați $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel încât $\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(x)) = 6^x$, pentru orice număr real x . |
| 5p | b) Determinați numărul real x , știind că $A(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x)$. |
| 5p | c) Demonstrați că, orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are două elemente numere iraționale. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x \circ y = x^2 + xy + y^2$. |
| 5p | a) Arătați că $x \circ x \geq 0$, pentru orice număr real x . |
| 5p | b) Se consideră numerele reale a și b cu $a \neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x \circ a = x \circ b$. |
| 5p | c) Determinați numărul real x cu proprietatea că $x \circ (x+1) = -x^3$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că funcția f este concavă. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} - e$. |
| 5p | b) Calculați $\int_0^1 xf(x) dx$. |
| 5p | c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n (x - f(x)) dx$. Demonstrați că $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$. |

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Determinați partea întreagă a numărului $2 + 3\sqrt{5}$. |
| 5p | 2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2 + x$. Arătați că $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{3}$. |
| 5p | 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A care sunt divizibile cu 2 sau cu 3. |
| 5p | 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul G , centrul său de greutate și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$. Arătați că punctele M , N și G sunt coliniare. |
| 5p | 6. Arătați că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A = 1 - BC^2$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(a)) = 4$, pentru orice număr real a . |
| 5p | b) Arătați că $A(a) \cdot A(b) = 2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b . |
| 5p | c) Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1) \cdot A(2) \cdots A(5) = 2^n A(x)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x \circ y = x + y - 7$. |
| 5p | a) Arătați că $5 \circ 2 = 0$. |
| 5p | b) Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7 + \log_7 x$. Arătați că $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. |
| 5p | c) Demonstrați că $a^2 \circ b^2 \neq 0$, pentru orice numere întregi a și b . |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x-5)$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = e^{2x}(2x-9)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$. |
| 5p | c) Arătați că $e^{2x} \leq \frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x \in (-\infty, 5)$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^2 f(x) \sqrt{x^2 + 1} dx = 2$. |

5p | b) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

5p | c) Determinați $a \in (1, +\infty)$ astfel încât $\int_0^x f(e^t) dt = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) + \ln(a-1)$, pentru orice număr real x .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 1 - 3\sqrt{3}$ și rația $r = \sqrt{3}$. Arătați că partea fraționară a lui a_5 este egală cu $\sqrt{3} - 1$. |
| 5p | 2. Se consideră $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Arătați că numărul $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2)$ este natural. |
| 5p | 3. Rezolvați în multimea numerelor reale ecuația $\log_3(5x - 1) = 2\log_3(x + 1)$. |
| 5p | 4. Determinați numărul de mulțimi X cu proprietatea $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. |
| 5p | 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că $2\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$. Arătați că raza cercului inscris în ΔABC este egală cu $4(2 - \sqrt{2})$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(a)) = 0$, pentru orice număr real a . |
| 5p | b) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(2) + xI_2) = 0$. |
| 5p | c) Arătați că, dacă $A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a)$, atunci $a = b$. |
| 5p | 2. Pe multimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. |
| 5p | a) Arătați că $0 * 8 = 4$. |
| 5p | b) Demonstrați că legea de compozиție „ $*$ ” nu are element neutru. |
| 5p | c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m * n$ este natural nenul. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x+1}$. |
| a) | Arătați că $f'(x) = \frac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x \in (-1, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $\ln x \geq \sqrt{\ln x+1} + 1 - \sqrt{2}$, pentru orice $x \in [e, +\infty)$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$. |
| a) | Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \frac{10}{3}$. |
| 5p | b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă. |
| 5p | c) Determinați numerele reale a , b și c astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$ este o primitivă a funcției f . |

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că diferența numerelor $5 + 2\sqrt{3}$ și $(1 + \sqrt{3})^2$ este număr întreg.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 + 2x$. Determinați numerele reale m , pentru care $f(m) = g(m)$.
- 5p** 3. Rezolvați în multimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = \sqrt{2x + 5}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din multimea $A = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$, acesta să verifice inegalitatea $|a + 1| \geq 2$.
- 5p** 5. Se consideră A , B , C și D patru puncte coplanare, M mijlocul segmentului AD și N mijlocul segmentului BC . Arătați că $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.
- 5p** 6. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 1. Arătați că $4\sin A \cdot \sin B = AC \cdot BC$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2,3)) = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(-1, \sqrt{2}) \cdot X = A(0, 0)$.
2. Pe multimea numerelor întregi se definește legea de compozиție asociativă $x \circ y = 5xy + x + y$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 4 = 25$.
- 5p** b) Demonstrați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compozиție „ \circ ”.
- 5p** c) Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compozиție „ \circ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Se consideră dreapta d , asimptota spre $+\infty$ la graficul lui f . Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f , în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $[0, \sqrt{3}]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cos x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^\pi \frac{f(x)}{e^x} dx = 0$.

-
- 5p** b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.
- 5p** c) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Determinați numerele raționale a și b , știind că $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+\sqrt{8}} = a + b\sqrt{2}$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$. Arătați că $f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = 3$. |
| 5p | 3. Rezolvați în multimea numerelor reale ecuația $4^x - 4^{\frac{2x+3}{2}} = -7$. |
| 5p | 4. Determinați numărul de funcții $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ cu proprietatea că $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ și $C(-4, -2)$. Determinați ecuația dreptei AD . |
| 5p | 6. Determinați $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, știind că $\operatorname{tg} 2x = -1$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ 2x - y + az = 2 \end{cases}$, unde a este |
|----|--|

număr real.

- | | |
|----|--|
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1)) = 18$. |
| 5p | b) Determinați multimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică. |
| 5p | c) Pentru $a = 1$, rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe multimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x * y = 2xy - x - y + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. |
| 5p | b) Determinați numărul real a , astfel încât $a * x = a$, pentru orice număr real x . |
| 5p | c) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y . |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(2^x + 1)$. |
|----|---|

- | | |
|----|--|
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. |
|----|--|

- | | |
|----|---|
| 5p | b) Demonstrați că funcția f este crescătoare. |
|----|---|

- | | |
|----|--|
| 5p | c) Determinați ecuația asymptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f . |
|----|--|

- | | |
|----|--|
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\sin x$. |
|----|--|

- | | |
|----|--|
| 5p | a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = 1$. |
|----|--|

5p b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p c) Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, pentru care $\int_1^n \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \frac{1}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră a un număr real. Arătați că numărul $z = (a+2i)^2 + (a-2i)^2$ este real, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$. Arătați că $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{\frac{x+1}{2}} = 2 \cdot 2^x$.
- 5p** 4. Determinați numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care sunt strict crescătoare.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $ax + y - 5 = 0$, unde a este număr real și $x - 4y + 3 = 0$. Determinați numărul real a pentru care cele două drepte sunt paralele.
- 5p** 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=2 \\ x+y=a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = -2$.
- 5p** b) Arătați că matricea $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este inversa matricei A .
- 5p** c) Determinați numărul real a , știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $z_1 \circ z_2 = iz_1z_2 + z_1 + z_2$.
- 5p** a) Arătați că $i \circ i = i$.
- 5p** b) Demonstrați că $z_1 \circ z_2 = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2 .
- 5p** c) Demonstrați că simetricul numărului $\frac{1}{2}(1+i)$ în raport cu legea de compoziție „ \circ ” este număr real.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n - n \ln x + 1$, unde n este număr natural nenul.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{n(x^n - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^n}{x} = 0$, pentru orice număr natural nenul n .
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are soluție în intervalul $(0, 1]$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f(x) dx = 12$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x} dx$.

5p c) Arătați că $15 \int_0^1 f^7(x) dx - 14 \int_0^1 f^6(x) dx = 128$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2 \cdot 3 = 8$	3p 2p
2.	$2x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x = -2$ sau $x = 2$	3p 2p
3.	$3^{2x} (3^2 - 1) = 8 \Leftrightarrow 3^{2x} = 1$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Divizorii din mulțimea A ai numărului 100 sunt 1, 2, 4 și 5, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{9}$	2p 2p 1p
5.	$ABCD$ este paralelogram și pentru $\{O\} = AC \cap BD$, obținem $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC})$ $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD})$, deci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$	3p 2p
6.	$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 0$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 36 - 0 = 36$	3p 2p
b)	$A(a) - (12+a)I_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1+a & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(a) - (12+a)I_2) = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1+a & -9 \end{vmatrix} = -a(1+a)$ $a(1+a) = 0$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = -1$	3p 2p
c)	$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deci $X \cdot X = A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Din $b(a+d) = 0$ și $c(a+d) = 1$, rezultă $a+d \neq 0$ și $b=0$ și, cum $d^2 + bc = 3$, obținem $d^2 = 3$, deci d este număr irațional	2p 3p
2.a)	$1 \circ 1 = 1 + \sqrt[3]{1} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$	3p 2p
b)	$x + \sqrt[3]{a} - 2 = x$, pentru orice număr real x $\sqrt[3]{a} = 2 \Leftrightarrow a = 8$	2p 3p

c)	$x + \sqrt[3]{x^6} - 2 = 4$, deci $x^2 + x - 6 = 0$ $x = -3$ sau $x = 2$	3p 2p
-----------	--	------------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x^2)' - (2\sqrt{x^2 - 1})' = 2x - 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} =$ $= 2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right), x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} =$ $= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 2$	3p 2p
c)	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^4 = 4(x^2 - 1) \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$ și, cum $x > 1$, obținem $x = \sqrt{2}$ $A(\sqrt{2}, 0)$ este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox și, cum panta tangentei la graficul funcției f în punctul A este $f'(\sqrt{2}) = 0$, obținem că axa Ox este tangentă la graficul funcției f	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 2x + 2)f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 2x + 2) \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_0^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	2p 3p
b)	$\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right) dx = \int_0^2 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{x^2 + 2x + 2} dx =$ $= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) \Big _0^2 = \frac{1}{2} \ln 5$	2p 3p
c)	$\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right) \ln x dx = \int_1^e \left(x + \frac{2}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + 2 \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx + 2 \int_1^e (\ln x)' \ln x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln^2 x \Big _1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e + \ln^2 e - \ln^2 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2 + 5}{4}$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 2$ și rația $r = 3$. Calculați a_3 . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2) = 9$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+2} - 3^{2x} = 8$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie divizor al lui 100. |
| 5p | 5. Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$. |
| 5p | 6. Arătați că $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 12+a & a \\ 1+a & 3+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(0)) = 36$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a) - (12+a)I_2) = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | c) Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X \cdot X = A(0)$. Arătați că cel puțin un element al matricei X este număr irațional. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x \circ y = x + \sqrt[3]{y} - 2$. |
| 5p | a) Arătați că $1 \circ 1 = 0$. |
| 5p | b) Determinați numărul real a pentru care $x \circ a = x$, pentru orice număr real x . |
| 5p | c) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x^6 = 4$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$, $x \in (1, +\infty)$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - f(x)}{x}$. |
| 5p | c) Demonstrați că axa Ox este tangentă la graficul funcției f . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 2x + 2) f(x) dx = \frac{1}{2}$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right) dx = \frac{1}{2} \ln 5$. |
| 5p | c) Arătați că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right) \ln x dx = \frac{e^2 + 5}{4}$. |

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_3 - a_2 = 2$ $a_1 = a_2 - r = 1$	3p 2p
2.	$f(n) = n^2 - 1$, deci $n^2 - 1 = 3 \Rightarrow n^2 - 4 = 0$ Cum n este număr natural, obținem $n = 2$	3p 2p
3.	$x^2 - 9 = (x-1)^2 \Rightarrow 2x = 10$ $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ este egal cu $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$	3p 2p
5.	$m_{MN} = 1$, $m_{PQ} = \frac{3-a}{3}$ $MN \parallel PQ$, de unde obținem $m_{MN} = m_{PQ} \Leftrightarrow 3-a=3 \Leftrightarrow a=0$	2p 3p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{BC}$ $BC = 10$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b $\det(A \cdot A) = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
b)	$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cu $x, y, z, t \in \mathbb{R} \Rightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix}$ și $X \cdot A = \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix}$ $ay = by$ și $az = bz$, deci $y(a-b) = 0$ și $z(a-b) = 0$ și, cum $a \neq b$, obținem $y = z = 0$, deci există numerele reale x și t astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$Y \cdot Y = A$, deci $A \cdot Y = (Y \cdot Y) \cdot Y = Y \cdot (Y \cdot Y) = Y \cdot A$, deci $Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $Y \cdot Y = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\alpha^2 = 4$ și $\beta^2 = 0$, deci $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, care convin	2p 3p

2.a)	$3*3 = 3\sqrt{3+1} + 3\sqrt{3+1} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$	3p 2p
b)	$x*0 = x \cdot \sqrt{0+1} + 0 \cdot \sqrt{x+1} = x$, pentru orice $x \in M$ $0*x = 0 \cdot \sqrt{x+1} + x \cdot \sqrt{0+1} = x$, pentru orice $x \in M \Rightarrow x*0 = 0*x = x$, pentru orice $x \in M$	2p 3p
c)	$(x^2 + 2x)\sqrt{3+1} + 3\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x) + 3\sqrt{(x+1)^2} = 7 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 4 = 0$ $x = -4$, care nu convine, $x = \frac{1}{2}$, care convine	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' \ln(x+1) + x(\ln(x+1))' =$ $= 1 \cdot \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f''(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci funcția f este convexă	3p 2p
c)	$\ln(x+1) \leq 0$ și $\frac{x}{x+1} \leq 0$, pentru orice $x \in (-1, 0]$, deci $f'(x) \leq 0$, de unde obținem că f este descrescătoare pe $(-1, 0]$ Pentru orice $x_1, x_2 \in (-1, 0]$ cu $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, deci $x_1 \ln(x_1+1) \geq x_2 \ln(x_2+1)$ de unde obținem $\ln(x_1+1)^{x_1} \geq \ln(x_2+1)^{x_2}$, deci $(x_1+1)^{x_1} \geq (x_2+1)^{x_2}$, adică $g(x_1) \geq g(x_2)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x^3) dx = \left[x - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 =$ $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx = \int_0^1 x^2 (1-x^3)^3 dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^3)' (1-x^3)^3 dx = -\frac{1}{12} (1-x^3)^4 \Big _0^1 =$ $= 0 - \left(-\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{12}$	3p 2p
c)	$\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx - \int_0^1 (f(x))^n dx = \int_0^1 (1-x^3)^{n+1} dx - \int_0^1 (1-x^3)^n dx = -\int_0^1 x^3 (1-x^3)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n $x^3 \geq 0$ și $1-x^3 \geq 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$, deci $\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx - \int_0^1 (f(x))^n dx \leq 0$, de unde obținem $\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx \leq \int_0^1 (f(x))^n dx$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_2 = 3$ și $a_3 = 5$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Determinați numărul natural n pentru care $f(n) = 3$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 9} = x - 1$. |
| 5p | 4. Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1, 1)$, $N(3, 3)$, $P(4, 3)$ și $Q(1, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , pentru care patrulaterul $MNPQ$ este trapez cu bazele MN și PQ . |
| 5p | 6. Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC , în care $AB = 5$ și $\cos B = \frac{1}{2}$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A \cdot A) = a^2 b^2$, pentru orice numere reale a și b . |
| 5p | b) Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot X = X \cdot A$. Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distințe, atunci există numerele reale x și t astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. |
| 5p | c) Pentru $a = 4$ și $b = 0$, determinați matricele $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y \cdot Y = A$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compozиție $x * y = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}$. |
| 5p | a) Arătați că $3 * 3 = 12$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x * 0 = 0 * x = x$, pentru orice $x \in M$. |
| 5p | c) Determinați $x \in M$ pentru care $(x^2 + 2x) * 3 = 7$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x+1)$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$. |
| 5p | b) Arătați că funcția f este convexă. |
| 5p | c) Se consideră funcția $g : (-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1, x_2 \in (-1, 0]$ astfel încât $x_1 \leq x_2$, atunci $g(x_1) \geq g(x_2)$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^3$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{4}$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx = \frac{1}{12}$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx \leq \int_0^1 (f(x))^n dx$, pentru orice număr natural nenul n . |

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(0,3 \cdot 10 - 1)(0,3 \cdot 10 + 1) = (3 - 1)(3 + 1) = 2 \cdot 4 = 8$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = 6, x_1 x_2 = m$ $6m = 12, \text{ deci } m = 2$	2p 3p
3.	$4(5 - x) = x + 10 \Rightarrow 20 - 4x = x + 10 \Rightarrow 5x = 10$ $x = 2, \text{ care convine}$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{a}{3} = \frac{a-1}{4} \Leftrightarrow 4a = 3a - 3$ $a = -3$	3p 2p
6.	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$ $= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \cdot (\cos x + \sin x) = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3$ $= 1 + 2 = 3$	3p 2p
b)	$A(a,b) \cdot A(b,a) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2a \\ -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - 2ab & 2a^2 + 2b^2 \\ -b^2 - a^2 & -2ab + ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab & 2(a^2 + b^2) \\ -(a^2 + b^2) & -ab \end{pmatrix} = A(-ab, a^2 + b^2)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$\det(A(m,n)) = \begin{vmatrix} m & 2n \\ -n & m \end{vmatrix} = m^2 + 2n^2$ Cum m și n sunt numere întregi, din $m^2 + 2n^2 = 1$ obținem $m = -1, n = 0$ sau $m = 1, n = 0$	2p 3p
2.a)	$f = X^3 - 15X^2 + 95X - 80 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 95 \cdot 1 - 80 = 1 - 15 + 95 - 80 = 1$	2p 3p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 15$ și $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = m$ $(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) = 0 \Leftrightarrow 225 - 3m = 0$, deci $m = 75$	2p 3p

c)	$2x_2 = x_1 + x_3$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow x_2 = 5$ $x_1 x_2 x_3 = 80 \Rightarrow x_1 x_3 = 16$ și, cum $x_1 + x_3 = 10$, polinomul f are rădăcinile 2, 5 și 8	2p 3p
----	---	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ $f'(0) = e^0 - 1 = 0$	3p 2p
b)	$f''(x) = e^x > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f'$ este strict crescătoare, deci f' este injectivă Pentru orice numere reale x_1 și x_2 , $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \neq f'(x_2)$, deci tangentele la graficul lui f în punctele de coordonate $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ au pante diferite, deci sunt concurente	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -9$, obținem $f(x) \geq -9$, pentru orice număr real x $f(x^3) \geq -9 \Rightarrow e^{x^3} \geq x^3 + 1$, deci $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x	1p 2p 2p
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(x + \frac{9}{x} - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 =$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	3p 2p
b)	$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 9} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^9 g(x) dx = \int_1^9 \frac{2x}{x^2 + 9} dx = \ln(x^2 + 9) \Big _1^9 =$ $= \ln 90 - \ln 10 = \ln 9 = 2 \ln 3$	3p 2p
c)	$\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right)' \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x \Big _1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{2(x^2 + 1)} dx = \left(\frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \Big _1^{\sqrt{3}} =$ $= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, de unde obținem $a = 4$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(0,3 \cdot 10 - 1)(0,3 \cdot 10 + 1) = 8$.
- 5p** 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 6x + m = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 12$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{5-x} = \sqrt{x+10}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților.
- 5p** 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x = \cos x$, atunci $\cos 2x = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1,1)) = 3$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(a,b) \cdot A(b,a) = A(-ab, a^2 + b^2)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n)) = 1$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 15X^2 + mX - 80$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 95$, arătați că $f(1) = 1$.
- 5p** b) Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_2 - x_3) + x_3(x_3 - x_1) = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați rădăcinile polinomului f , știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 10$.
- 5p** a) Arătați că $f'(0) = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.
- 5p** c) Demonstrați că $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x + \frac{9}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{9}{x} \right) dx = 4$.
- 5p** b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=9$ are aria egală cu $2\ln 3$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , știind că $\int_1^{\sqrt{3}} \left(f(x) - \frac{9}{x} \right) \operatorname{arctg} x dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{3 + \sqrt{3} - a}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_st-nat
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = \log_2 \frac{7 \cdot 6}{21} =$ $= \log_2 2 = 1$	3p 2p
2.	$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, pentru orice număr real x $(x-1)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x , deci $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x	3p 2p
3.	$x^2 + 12 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x = -2$, care nu convine, $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$, care sunt elemente ale mulțimii A , deci avem 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{u} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{i} + 6\vec{j} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ $a = 6$, $b = 2$	3p 2p
6.	$E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 2 =$ $= \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} - 2 = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 4 - (x^2 - 9) =$ $= x^2 - 4 - x^2 + 9 = 5$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$A(-3) + A(3) = A(-2) + A(2) = A(-1) + A(1) = 2A(0)$ $2A(0) + 2A(0) + 2A(0) = nA(0)$, de unde obținem $n = 6$	3p 2p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} x & 3x+5 \\ x-5 & 3x-10 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} x & 3x+5 \\ x-5 & 3x-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p
2.a)	$0 * 1 = \frac{0+1+1}{0^2+1^2+1} =$ $= \frac{2}{2} = 1$	3p 2p

b) $x * x = \frac{2x+1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x $\frac{2x+1}{2x^2+1} = 1 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Rightarrow x=0$ sau $x=1$	2p 3p
c) $x * (-x) = \frac{x + (-x) + 1}{x^2 + (-x)^2 + 1} = \frac{1}{2x^2 + 1}$, pentru orice număr real x $x * (-x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2}{2x^2 + 1} \leq 0$ inegalitate adevarată pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a) $f'(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} =$ $= \frac{x^2 + 2x + 2 + x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{2x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + 2x} =$ $= 0$	3p 2p
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{x^2 + 2x + 2} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x^2 + 2x + 2} = +\infty$ și, cum f este funcție continuă, obținem că, pentru orice număr real a , ecuația $f(x) = a$ are cel puțin o soluție	2p 3p
2.a) $\int_0^1 (f(x) - xe^x) dx = \int_0^1 (xe^x + x - xe^x) dx = \int_0^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	2p 3p
b) $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \int_1^2 \frac{x^2 e^{x^2} + x^2}{x} dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx + \int_1^2 x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big _1^2 + \frac{x^2}{2} \Big _1^2 =$ $= \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^4 - e + 3}{2}$	3p 2p
c) $\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x' F(x) dx = xF(x) \Big _0^1 - \int_0^1 x f(x) dx = F(1) - \int_0^1 (x^2 e^x + x^2) dx =$ $= - \left((x^2 - 2x + 2)e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^1 = - \left(e + \frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{5 - 3e}{3}$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_st-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Demonstrați că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în multimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 12} = 2x$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din multimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- 5p** 5. Determinați numerele reale a și b , pentru care $\vec{u} = 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$.
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(x)) = 5$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Determinați numărul natural n astfel încât $A(-3) + A(-2) + A(-1) + A(1) + A(2) + A(3) = nA(0)$.
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.
2. Pe multimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x * y = \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 1 = 1$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 1$.
- 5p** c) Demonstrați că $x * (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 2x + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , ecuația $f(x) = a$ are cel puțin o soluție.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - xe^x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e + 3}{2}$.
- 5p** c) Se consideră $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1) = 0$. Arătați că $\int_0^1 F(x) dx = \frac{5-3e}{3}$.