

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_7 = a_3 + 4r$ $15 = 7 + 4r \Rightarrow r = 2$	2p 3p
2.	$3x - 5 \geq 2 \cdot (-2) + 4$ $3x \geq 5 \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$	2p 3p
3.	$3^{4x} = 3$ $4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$	2p 3p
4.	$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$ $P_3 = 3!, P_3 = 6, \frac{A_6^2}{P_3} = 5$	2p 3p
5.	$AB = \sqrt{(0-0)^2 + (-5-3)^2} = 8, AC = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$ și $BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-1+5)^2} = 4\sqrt{2}$ Cum $AB^2 = AC^2 + BC^2$, triunghiul ACB dreptunghic și cum $AC = BC$, ΔACB este dreptunghic isoscel	3p 2p
6.	$\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 = -4 + 3 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p 2p
c)	$AX - I_2 = 2021A \Leftrightarrow AX = I_2 + 2021A$. Matricea A este inversabilă și $A^{-1} = A$ de unde rezultă că $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I_2 + 2021 \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow X = A + 2021 \cdot I_2$	3p

	Deci $X = \begin{pmatrix} 2023 & 1 \\ -3 & 2019 \end{pmatrix}$	2p
2.a)	$5 \circ 2021 = 5 \cdot 2021 - 5 \cdot 5 - 5 \cdot 2021 + 30 =$ $= -25 + 30 = 5$	3p 2p
b)	$x \circ y = xy - 5x - 5y + 25 + 5 = x(y-5) - 5(y-5) + 5 =$ $= (x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$m^2 \circ n = 16 \Rightarrow (m^2 - 5)(n - 5) = 11$ și, deoarece, $n - 5 \in \mathbb{Z}$, $m^2 - 5 \in \mathbb{Z}$ obținem $\begin{cases} m^2 - 5 = 11 \\ n - 5 = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2 - 5 = 1 \\ n - 5 = 11 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2 - 5 = -11 \\ n - 5 = -1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2 - 5 = -1 \\ n - 5 = -11 \end{cases}$ Cum m și n sunt numere întregi, obținem soluțiile $\begin{cases} m = 4 \\ n = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = -4 \\ n = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 2 \\ n = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = -2 \\ n = -6 \end{cases}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 8)e^x =$ $= e^x(x^2 + 2x - 8) = e^x(x-2)(x+4)$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x(x-2)(x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} e^x(x+4) =$ $= 6e^2$	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 8}{e^{-x}} = 0$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -4] \Rightarrow f$ este crescătoare și $f(x) \geq 0$ pe $(-\infty, -4]$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-4, 2] \Rightarrow f$ este descrescătoare și $f(x) \geq f(2)$ pe $[-4, 2]$; $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare și $f(x) \geq f(2)$ pe $[2, +\infty)$, $f(2) = -4e^2 < 0$ Obținem că $f(x) \geq -4e^2$ pentru orice număr real $x \Leftrightarrow (x^2 - 8)e^x \geq -4e^2$, de unde rezultă $x^2 \geq 8 - 4e^{2-x}$, pentru orice număr real x	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 f(x)(x+1) dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x+1}(x+1) dx = \int_1^2 (x-1) dx =$ $= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_2^3 \frac{x+1-2}{x+1} dx = \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) dx =$ $= \left(x - 2 \ln x+1 \right)_2^3 = 1 + \ln \frac{9}{16}$	2p 3p
c)	$\int_1^a f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(x))^2 \Big _1^a = \frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$, unde $a > 1$ $\frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = \pm \frac{1}{2}$, obținem $a = 3$, care convine	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(7 - 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{6}{41} = \left(7 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{6}{41} = \\ = \frac{41}{6} \cdot \frac{6}{41} = 1$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 6 = 6 - x$ Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 4, y = 2$	3p 2p
3.	$3x - 2 = 7$ $x = 3$, care convine	3p 2p
4.	$p - \frac{12}{100} \cdot p = 264$, unde p este prețul inițial al tabletei $p = 300$ de lei	3p 2p
5.	$x_A = \frac{x_M + x_T}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$ $y_A = \frac{y_M + y_T}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$	3p 2p
6.	$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 90^\circ = 1$ $\cos 60^\circ \sin 60^\circ + \sin 90^\circ - \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 9 - 5 = 4$	2p 3p
b)	$B \cdot B + 2C = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 4+2 & 3 \cdot 4 + 2 \\ 4 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = A(4)$	3p 2p
c)	$A(n) + B = \begin{pmatrix} n+3 & 3n+5 \\ n+1 & 3n+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(n) + B) = 4n + 4$, unde n este număr natural $4n + 4 = 4 \Leftrightarrow n = 0$, care convine	3p 2p
2.a)	$1 * 1 = \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 + 1}{1+1} = \\ = \frac{4}{2} = 2$	3p 2p

b) $1 * 2 = \frac{7}{3} \Rightarrow (1 * 2) * 3 = \frac{7}{3} * 3 = \frac{33}{8}$ $2 * 3 = \frac{19}{5} \Rightarrow 1 * (2 * 3) = 1 * \frac{19}{5} = \frac{31}{12}$, de unde obținem $((1 * 2) * 3) - (1 * (2 * 3)) = \frac{33}{8} - \frac{31}{12} = \frac{37}{24}$	2p 3p
c) $\frac{3x^2 + 1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$ $x = 1$ sau $x = \frac{1}{3}$, care convin	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a) $f'(x) = 3x^4 + 3x^3 - 6x^2 =$ $= 3x^2(x^2 + x - 2) = 3x^2(x-1)(x+2), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b) $f(0) = -1, f'(0) = 0$ Ecuatia tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -1$	2p 3p
c) $x \in [-2, 1] \Rightarrow x-1 \leq 0$ și $x+2 \geq 0$ Cum $x^2 \geq 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-2, 1]$, deci f este descrescătoare pe $[-2, 1]$	2p 3p
2.a) $\int_{-1}^1 (f(x) + x - 3) dx = \int_{-1}^1 (x^3 - x + 3 + x - 3) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$	3p 2p
b) $\int_0^1 (f(x) - x^3 - 3) e^x dx = - \int_0^1 x e^x dx = -(x-1)e^x \Big _0^1 =$ $= (-1) \cdot e^0 = -1$	3p 2p
c) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - x + 3) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big _0^1 = \frac{11}{4}$ $-a^2 + 5 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{9}{4}$ și, cum $a > 0$, obținem $a = \frac{3}{2}$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{12}(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) + \sqrt{8}(3\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{36} - 3\sqrt{24} + 3\sqrt{24} - \sqrt{16} = \\ = 6 - 4 = 2$	3p 2p
2.	$f(a) = a^2 - 2a + a$, deci $a^2 - a - 2 = 0$ $a = -1$ sau $a = 2$	3p 2p
3.	$9 - x = x^2 - 6x + 9$ $x = 0$, care nu convine; $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile Numerele naturale pare de două cifre, care sunt multipli de 5, sunt 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$	2p 2p 1p
5.	$M(-4, 2)$ $OM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$	3p 2p
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic, deci $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 16$ $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 1 \cdot (-3) = \\ = -4 + 3 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} -2x & -9 \\ -3x & -13 \end{pmatrix}, B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x+3 & -3x-12 \\ x+4 & -3x-16 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} -2x & -9 \\ -3x & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 & -3x-12 \\ x+4 & -3x-16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -1$	3p 2p
c)	$aA + B(a) = \begin{pmatrix} 2a & -3a+3 \\ 2a & -4a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(aA + B(a)) = -2a^2 + 2a$, unde a este număr real $-2a^2 + 2a = 0$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = 1$	3p 2p
2.a)	$2 * (-1) = 2^2 + 2 \cdot (-1) + (-1)^2 = \\ = 4 - 2 + 1 = 3$	3p 2p
b)	$x * y = x^2 + xy + y^2 = y^2 + yx + x^2 = \\ = y * x$, pentru orice numere reale x și y , deci legea de compozitie „*” este comutativă	3p 2p

c)	$n^2 + n^2 + n^2 = 48 \Leftrightarrow n^2 = 16$ $n = -4$, care nu convine; $n = 4$, care convine	3p 2p
-----------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 6x - 1 - \frac{5}{x} =$ $= \frac{6x^2 - x - 5}{x} = \frac{(x-1)(6x+5)}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{(x-1)(6x+5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(6 + \frac{5}{x}\right)} =$ $= \frac{3}{1 \cdot 6} = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1]$ ⇒ f este descrescătoare pe $(0, 1]$, $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [1, +\infty)$ ⇒ f este crescătoare pe $x \in [1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, de unde obținem $3x^2 - x - 2 \geq 5 \ln x$, deci $3x^2 - x - 2 \geq \ln(x^5)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_{-1}^2 (x+2)f(x)dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \Big _{-1}^2 =$ $= \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = 6$	3p 2p
b)	$\int_0^4 \left(f(x) - \frac{x^2}{x+2}\right) dx = \int_0^4 \frac{1}{x+2} dx = \ln(x+2) \Big _0^4 =$ $= \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$	3p 2p
c)	$\int_0^6 (x-3)(x+3) \frac{x^2 + 2x + 2}{x+3} dx = \int_0^6 (x^3 - x^2 - 4x - 6) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x\right) \Big _0^6 = 144$ $n^2 = 144$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 12$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2 \cdot 8,5 + 10,5 : 3,5 = 17 + 105 : 35 =$ $= 17 + 3 = 20$	2p 3p
2.	$f(2) = -2 \Rightarrow -6 + a + 1 = -2$ $a = 3$	3p 2p
3.	$10^{6-2x} = 10^4 \Leftrightarrow 6 - 2x = 4$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele $n \in M$ pentru care numărul $\sqrt{10n}$ este rațional sunt 10, 40 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	2p 2p 1p
5.	$m_{OA} = -2$, $m_{AB} = \frac{a-2}{4}$ $m_{OA} \cdot m_{AB} = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot \frac{a-2}{4} = -1$, de unde obținem $a = 4$	2p 3p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{12}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\sin A}$ $\sin A = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{12} = \frac{1}{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 6 =$ $= 2 - 6 = -4$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$, $A \cdot A - B \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} =$ $= -3 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -3(A + B)$, deci $a = -3$	3p 2p
c)	$C(x) = \begin{pmatrix} -4x+2 & -5x+12 \\ 2 & x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C(x)) = -4x^2 - 4x - 16$, pentru orice număr real x $\det(C(x)) = -(2x+1)^2 - 15 < 0$, deci $\det(C(x)) \neq 0$ adică matricea $C(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	2p 3p

2.a)	$2 * \frac{1}{2} = (2 \cdot 2 - 1) \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} =$ $= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$(4x) * \frac{1}{4} = \frac{2-8x}{2}, \text{ pentru orice număr real } x$ $\frac{2-8x}{2} = 25, \text{ de unde obținem } x = -6$	3p 2p
c)	$x * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} * y = \frac{1}{2}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$ $\left(1 * \frac{1}{2} \right) * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5} = \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 + \frac{-4}{(x+3)^2} =$ $= \frac{(x+3)^2 - 4}{(x+3)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}, x \in (-3, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x(x+3)} \right) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+3} = 0, \text{ deci dreapta de ecuație } y = x \text{ este asimptotă oblică la graficul funcției } f$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ și } f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in (-3, -1] \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } (-3, -1], f'(x) \geq 0 \text{ pentru orice } x \in [-1, +\infty) \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } x \in [-1, +\infty)$ $f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1, \text{ pentru orice } x \in (-3, +\infty) \text{ și, cum } x^2 \geq 0, \text{ obținem } x^2 + f(x) \geq 1, \text{ pentru orice } x \in (-3, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_1^5 \frac{(2x-1)(x+1)}{x+1} dx = \int_1^5 (2x-1) dx = \left(x^2 - x \right) \Big _1^5 =$ $= 20 - 0 = 20$	3p 2p
b)	$\int_1^2 \frac{2x^2 + x - 1}{x^2} dx = \int_1^2 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(2x + \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big _1^2 =$ $= \frac{3}{2} + \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_a^2 f'(x) \sqrt{f(x)} dx = \frac{2f(x)\sqrt{f(x)}}{3} \Big _a^2 = 18 - \frac{2f(a)\sqrt{f(a)}}{3}$ $f(a) = 0 \text{ și, cum } a \text{ este număr real cu } a \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right), \text{ obținem } a = \frac{1}{2}$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice este $q = -2$ $b_5 = b_1 q^4 = 3 \cdot (-2)^4 = 48$	2p 3p
2.	$x_1 + x_2 = 3$, $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$ $x_1 + x_2 - 6x_1 x_2 = 3 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 - 3 = 0$	2p 3p
3.	$\sqrt[3]{27x+8} = -1 \Leftrightarrow 27x+8 = -1$ $x = -\frac{1}{3}$	3p 2p
4.	$x + \frac{15}{100} \cdot x = 92$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire $x = 80$ de lei	3p 2p
5.	$AB = \sqrt{144 + a^2}$ $\sqrt{144 + a^2} = 13$, de unde obținem $a = -5$ sau $a = 5$, care convin	2p 3p
6.	Unghiul A are măsura egală cu 30° , deci $\sin A = \frac{1}{2}$ $\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{14 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 49$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 2 + 1 = 3$	3p 2p
b)	$A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 2x-2 & x-4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și $3(A(x) - I_2) = \begin{pmatrix} 3x-3 & 3x-6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 2x-2 & x-4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-3 & 3x-6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p
c)	$xA(x) - A(x^2) = \begin{pmatrix} x^2 & x^2 - 2x \\ x & 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2 & x^2 - 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2x+2 \\ x-1 & 2x-2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\det(xA(x) - A(x^2)) = 0 - (-2x+2)(x-1) = 2(x-1)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	2p 3p
2.a)	$1*5 = 3 \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1+5}{3} + 1 = 15 - 2 + 1 = 14$	3p 2p

b) $3*x = 9x - \frac{3+x}{3} + 1 = \frac{26x}{3}$, pentru orice număr real x $\frac{26x}{3} = -52$, de unde obținem $x = -6$	3p 2p
c) $0*(3n) = -n + 1 \Rightarrow n*(0*(3n)) = n*(-n + 1) = \frac{-9n^2 + 9n + 2}{3}$, pentru orice număr natural n $\frac{-9n^2 + 9n + 2}{3} \geq \frac{2n}{3} \Leftrightarrow -9n^2 + 7n + 2 \geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a) $f'(x) = -6x^2 - 12x + 18 =$ $= -6(x^2 + 2x - 3) = -6(x-1)(x+3), \quad x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 1$ $x \in (-\infty, -3] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, -3]$, $x \in [-3, 1] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-3, 1]$, $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	2p 3p
c) Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-2, f(-2))$ este $f'(-2) = -6 \cdot (-3) \cdot 1 = 18$ Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $B(0, f(0))$ este $f'(0) = -6 \cdot (-1) \cdot 3 = 18$, deci tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale	2p 3p
2.a) $\int_1^3 (f(x) - \ln x) dx = \int_1^3 (x-2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big _1^3 =$ $= \frac{9}{2} - 6 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = 0$	3p 2p
b) $\int_1^e (f(x) - x + 2) dx = \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big _1^e =$ $= 0 - (-1) = 1$	3p 2p
c) F este primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$ $F''(x) = f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci F este convexă	2p 3p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2 - 4} - \sqrt{5} = \\ = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 2$	3p 2p
2.	$f(a) = 2a^2 + 5a + 2 \Rightarrow 2a^2 + 5a + 2 = a$ $2a^2 + 4a + 2 = 0$, de unde obținem $a = -1$	2p 3p
3.	$\log_4(3x+1) = 2 \Rightarrow 3x+1 = 4^2 \Rightarrow 3x+1 = 16$ $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri posibile Numerele $x \in A$ pentru care x^2 este număr impar sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	Mijlocul segmentului BC are coordonatele $\frac{4+a}{2}$, respectiv $\frac{3+b}{2} \Rightarrow 2 = \frac{4+a}{2}$, deci $a = 0$ $-1 = \frac{3+b}{2} \Rightarrow b = -5$	3p 2p
6.	$BC = 15$ $h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7,2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = \\ = 8 - 6 = 2$	3p 2p
b)	$(A - 2I_2) \cdot (A - 4I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$	2p 3p
c)	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4a+2c & 4b+2d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix}$ și $3A + 4X = \begin{pmatrix} 12+4a & 6+4b \\ 9+4c & 6+4d \end{pmatrix}$, unde $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu a, b, c și d numere reale $\begin{pmatrix} 4a+2c & 4b+2d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+4a & 6+4b \\ 9+4c & 6+4d \end{pmatrix}$, deci $a = 7$, $b = 4$, $c = 6$ și $d = 3$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	3p 2p

2.a)	$1*3=1\cdot 3 - \frac{12}{1+3} + \frac{3}{1} + \frac{3}{3} =$ $= 3 - 3 + 3 + 1 = 4$	3p 2p
b)	$x*x = x \cdot x - \frac{12}{x+x} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x} =$ $= x^2 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x} = x^2 - \frac{6}{x} + \frac{6}{x} = x^2, \text{ pentru orice } x \in M$	2p 3p
c)	$n*n = n^2, (n*n)*(n*n) = n^2 * n^2 = n^4, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$ $n^4 = 1 \text{ și, cum } n \text{ este număr natural nenul, obținem } n = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{0 - 2(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{4 - 4x}{(x^2 - 2x + 2)^2} =$ $= \frac{4(1-x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(2) = 1, f'(2) = -1$ Ecuația tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, adică $y = -x + 3$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a), \text{ pentru orice număr real } a$ $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(1-a)}{(a^2 - 2a + 2)^2} = 0, \text{ de unde obținem } a = 1$	2p 3p
2.a)	$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 e^x dx = e^x \Big _1^4 =$ $= e^4 - e = e(e^3 - 1)$	3p 2p
b)	$\int_1^2 xf(x) dx = \int_1^2 xe^x dx = \int_1^2 x(e^x)' dx = (xe^x - e^x) \Big _1^2 =$ $= e^2 - 0 = e^2$	3p 2p
c)	Cum a este număr real, $a > 0$, obținem $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^0 \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + 1 \right) dx =$ $= \int_{-a}^0 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx + \int_{-a}^0 1 dx = \ln(x^2 + 1) \Big _{-a}^0 + x \Big _{-a}^0 = -\ln(a^2 + 1) + a$ $a - \ln(a^2 + 1) = a - \ln(a + 1) \Rightarrow a^2 = a$ și, cum $a > 0$, obținem $a = 1$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b = 3,6$ $m_a = \frac{2,4 + 3,6}{2} = \frac{6}{2} = 3$	2p 3p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$ Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x = -3$ și $x = 0$	2p 3p
3.	$2^{1-2x} = 2^5 \Leftrightarrow 1-2x = 5$ $x = -2$	3p 2p
4.	$\frac{20}{100} \cdot x = 27$, unde x este prețul înainte de ieftinire $x = 135$ de lei	3p 2p
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului AC OD este linie mijlocie în triunghiul ABC , deci $OD = \frac{BC}{2}$, de unde obținem $BC = 2OD$	2p 3p
6.	$\sin^2 x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{24}{25}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ $\operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{6}}{5} : \frac{1}{5} = 2\sqrt{6}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 = -3 - 4 = -7$	3p 2p
b)	$A(1) \cdot A(1) + 2A(x) = \begin{pmatrix} 2x-1 & -1+2x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1) \cdot A(1) + 2A(x)) = 1 - 2x$, pentru orice număr real x $1 - 2x = 11$, de unde obținem $x = -5$	3p 2p
c)	$A(0) \cdot A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} -x & 1 \\ x+1 & -3 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} -x & 1 \\ x+1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-3 & 3y \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 2$ și $y = \frac{1}{3}$	2p 3p
2.a)	$1*2 = 20 \cdot 1 - 21 \cdot 2 + 1 = 20 - 42 + 1 = -21$	3p 2p
b)	$(x-1)*x = -x - 19$, pentru orice număr real x $-x - 19 = 1$, de unde obținem $x = -20$	2p 3p

c)	$x^2 * x = 20x^2 - 21x + 1$, pentru orice număr real x $20x^2 - 21x + 1 \leq 0$, de unde obținem $x \in \left[\frac{1}{20}, 1\right]$	2p 3p
-----------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (1+x-2)e^x = (x-1)e^x, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^x}{e^x - e} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x e^x}{e^x} = 1$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 1]$ $\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x \in [1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow (x-2)e^x \geq -e$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $(x-2)e^{x-1} \geq -1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $(2-x)e^{x-1} \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2x^5 - 1) dx = \left(\frac{x^6}{3} - x \right) \Big _{-1}^1 =$ $= -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$	3p 2p
b)	$\int_2^4 \frac{f(x) - 2x^5}{2x} dx = \int_2^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right) \Big _2^4 =$ $= 4 - \frac{1}{2} \ln 4 - 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{6 - \ln 2}{2}$	3p 2p
c)	$\int_0^1 x^4 (2x^5 - 1)^2 dx = \frac{1}{10} \int_0^1 (2x^5 - 1)' (2x^5 - 1)^2 dx = \frac{1}{10} \cdot \frac{(2x^5 - 1)^3}{3} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{15}$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M*_technologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
 - Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
 - Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{2}{3} \cdot 0,3 + 3,2 : 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{32}{10} \cdot \frac{1}{4} =$ $= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$	3p 2p
2.	$f(a) = 2a \Leftrightarrow 6 - 4a = 2a$ $a = 1$	3p 2p
3.	$x^2 - 2x + 16 = 16 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$ $x = 0$ sau $x = 2$, care convin	2p 3p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care $(n-2)(n-6) \geq 0$ sunt 1, 2, 6, 7, 8 și 9, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	2p 2p 1p
5.	$M(-3,4)$ $OA = 5$, $OM = 5$, deci triunghiul OAM este isoscel	2p 3p
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic în B , deci $\frac{AB \cdot BC}{2} = 2$, și, cum $AB = BC$, obținem $AB = 2$ $P_{ABCD} = 4AB = 8$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 - 2 \cdot (-6) =$ $= -12 + 12 = 0$	3p 2p
b)	$\det(B(x)) = x^2 - 4x + 14$, pentru orice număr real x Cum $\det(B(7) - A) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -10$, obținem $x^2 - 4x + 4 = 0$, deci $x = 2$	2p 3p
c)	$xA = \begin{pmatrix} -3x & 2x \\ -6x & 4x \end{pmatrix}$, $A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} -3x-14 & 2x-14 \\ -6x-28 & 4x-28 \end{pmatrix} \Rightarrow xA - A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 28 & 28 \end{pmatrix} = 14C$, de unde obținem $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$1*3 = 6 \cdot 1 \cdot 3 - 6 \cdot 1 - 6 \cdot 3 + 7 =$ $= 18 - 6 - 18 + 7 = 1$	3p 2p

b) $x * \frac{7}{6} = 6x \cdot \frac{7}{6} - 6x - 6 \cdot \frac{7}{6} + 7 = 7x - 6x - 7 + 7 = x$, pentru orice număr real x $\frac{7}{6} * x = 6 \cdot \frac{7}{6} \cdot x - 6 \cdot \frac{7}{6} - 6x + 7 = 7x - 7 - 6x + 7 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = \frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c) $\frac{m}{2} * \left(-\frac{m}{3}\right) = -m^2 - m + 7$, pentru orice număr întreg m $-m^2 - m + 7 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 \leq 0$, de unde obținem $m \in [-3, 2]$, deci suma numerelor întregi care verifică inegalitatea este egală cu $-3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} + 0 =$ $= \frac{3(x^4 - 1)}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x \in [1, +\infty)$	2p 3p
c) $f''(x) = 6x + \frac{6}{x^3}, x \in (0, +\infty)$ $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este convexă	2p 3p
2.a) $\int_0^2 (x+1)f(x)dx = \int_0^2 2xdx = x^2 \Big _0^2 =$ $= 4 - 0 = 4$	3p 2p
b) $\int_1^3 \frac{2}{x+1} dx = 2 \int_1^3 \frac{(x+1)'}{x+1} dx = 2 \ln(x+1) \Big _1^3 =$ $= 2 \ln 4 - 2 \ln 2 = 2 \ln 2$	3p 2p
c) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f(-x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2}{x^2 - 1} dx = 4 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} dx = 4 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) dx = 4 \left(x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}\right) \Big _{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$ $= 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 3\right) = 4(1 - \ln 3)$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = 3 \Rightarrow a_1 = 2, a_4 = 11$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$	3p 2p
2.	$f(a) = 3a - 8, f(1) = -5$ $a(3a - 8) = -5 \Leftrightarrow 3a^2 - 8a + 5 = 0$, de unde obținem $a = 1$ sau $a = \frac{5}{3}$	2p 3p
3.	$25 - x = x + 5$ $x = 10$, care convine	2p 3p
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 = 12$ numere	2p 3p
5.	$3 = 2 \cdot 2 + a$ $a = -1$	3p 2p
6.	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $4\sin 60^\circ (\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) =$ $= -6 + 1 = -5$	3p 2p
b)	$B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B(1)B(-1) + 3A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 15 & 33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = 2$	3p 2p
c)	$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 2I_2) = 1$, deci matricea $A - 2I_2$ este inversabilă și $(A - 2I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $X = B(0) \cdot (A - 2I_2)^{-1}$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$3*4 = (2 \cdot 3 - 4 + 1)(2 \cdot 4 - 3 + 1) =$ $= 3 \cdot 6 = 18$	3p 2p
b)	$x * y = (2x - y + 1)(2y - x + 1) = (2y - x + 1)(2x - y + 1) =$	2p

	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y , deci legea de compoziție „*” este comutativă	3p
c)	$(2m)*n=(4m-n+1)(2n-2m+1)$, pentru orice numere naturale m și n $(4m-n+1)(2n-2m+1)=13$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(2,8)$ sau $(4,4)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(x+5)-(2x+7)}{(x+5)^2} =$ $= \frac{2x+10-2x-7}{(x+5)^2} = \frac{3}{(x+5)^2}, \quad x \in (-5, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+7}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2+\frac{7}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{7}{x}}{1+\frac{5}{x}} = 2$, deci dreapta de ecuație $y=2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+5 \Leftrightarrow f'(a)=3$, $a \in (-5, +\infty)$ $\frac{3}{(a+5)^2} = 3$ și, cum $a \in (-5, +\infty)$, obținem $a=-4$	2p 3p
2.a)	$\int_1^3 (f(x) + 2\sqrt{x}) dx = \int_1^3 (x+2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big _1^3 =$ $= \frac{21}{2} - \frac{5}{2} = 8$	3p 2p
b)	$f'(x) = (x-2\sqrt{x}+2)' = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 =$ $= 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	3p 2p
c)	$\int_1^2 \frac{1}{f(x^2)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int_1^2 \frac{(x-1)'}{(x-1)^2 + 1} dx = \arctg(x-1) \Big _1^2 =$ $= \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\begin{aligned} (3 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{5}(6 + 2\sqrt{5}) &= 9 + 6\sqrt{5} + 5 - 6\sqrt{5} - 10 = \\ &= 14 - 10 = 4 \end{aligned}$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5x + 1 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x = -2$ Abscisa punctului de intersecție este $x = -1$	3p 2p
3.	$2^{x+4} = 2^{2(x+3)} \Leftrightarrow x + 4 = 2x + 6$ $x = -2$	3p 2p
4.	$360 + \frac{15}{100} \cdot 360 =$ $= 360 + 54 = 414$ lei	2p 3p
5.	$M(2,0)$ $m_{AM} = -\frac{3}{4}, m_{MC} = \frac{4}{3}$, de unde obținem $m_{AM} \cdot m_{MC} = -1$, deci triunghiul AMC este dreptunghic	2p 3p
6.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow AC = 4\sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-4) \cdot (-2) =$ $= 9 - 8 = 1$	3p 2p
b)	$B \cdot B = \begin{pmatrix} 1+x & -2x \\ -2 & x+1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 1+x & -2x \\ -2 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 2$	3p 2p
c)	$\det B = 1 - x \Rightarrow \det(B + (\det B)A) = \begin{vmatrix} -3x+2 & 5x-4 \\ 2x-1 & -3x+2 \end{vmatrix} = -x^2 + x$, pentru orice număr real x $-x^2 + x = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 1$	3p 2p
2.a)	$(-8) \circ 2 = -8 + 2 + 16 =$ $= -6 + 16 = 10$	3p 2p
b)	$x \circ e = x$, pentru orice număr real x , de unde obținem $e = -16$ $-16 \circ x = -16 + x + 16 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = -16$ este elementul neutru al legii de compozitie „ \circ ”	2p 3p

c)	$x \circ \left(\frac{x}{2} + 3 \right) = \frac{3x}{2} + 19 \Rightarrow x \circ \left(\frac{x}{2} + 3 \right) \circ x = \frac{5x}{2} + 35$, pentru orice număr real x $\frac{5x}{2} + 35 = 2x$, de unde obținem $x = -70$	3p 2p
----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} - 0 =$ $= \frac{x^2 - 4}{x^3} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^3}, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 0, \quad f'(1) = -3$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = -3x + 3$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + x^2 \ln x - 2x^2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 + x^2 \ln x - 2x^2)'}{(x^3 - 1)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0 + 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} - 4x}{3x^2 - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \ln x - 3x}{3x^2} = -1$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	3p 2p
b)	$\int_1^e (f(x) + 1) \ln x dx = \int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right) \Big _1^e =$ $= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$	3p 2p
c)	$f(\sin x) + f(\cos x) = \sin^2 x - 1 + \cos^2 x - 1 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 = -1, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(\sin x) + f(\cos x)) \operatorname{tg} x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx = \ln(\cos x) \Big _0^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) - \ln(\cos 0) = \ln \frac{1}{2}$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(0,6+0,8):0,7 - 0,25 \cdot 4 = 1,4:0,7 - 1 = \\ = 2 - 1 = 1$	3p 2p
2.	$f(2) = -1, f(4) = 3 \text{ și } f(a) = 2a - 5, \text{ unde } a \text{ este număr real} \\ 2a - 5 - (-1) = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 2a - 4 = 6, \text{ de unde obținem } a = 5$	3p 2p
3.	$x^2 - 7 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \\ x = -4 \text{ sau } x = 4, \text{ care convin}$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $2n$ este multiplu de 10 sunt 5, 10, 15 și 20, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$	2p 2p 1p
5.	$OA = 10 \Rightarrow MA = 5, OB = \sqrt{a^2 + 16}, \text{ unde } a \text{ este număr real} \\ \sqrt{a^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow a^2 - 9 = 0, \text{ de unde obținem } a = -3 \text{ sau } a = 3$	3p 2p
6.	$AC = 5 \\ \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = \\ = 12 - 3 = 9$	3p 2p
b)	$B(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B(1) \cdot B(-1) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A + B(1) \cdot B(-1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2B(0)$	3p 2p
c)	$B(1) + B(2) + B(3) + \dots + B(9) = \begin{pmatrix} 3+5+7+\dots+19 & 1+2+3+\dots+9 \\ 9 & 2+3+4+\dots+10 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ $9 \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ 11 & x+1 \end{pmatrix}, \text{ de unde obținem } x = 5$	3p 2p
2.a)	$2 \circ 6 = \frac{2+6}{2} - \frac{2 \cdot 6}{3} = \\ = 4 - 4 = 0$	3p 2p

b) $x \circ 6 = \frac{6-3x}{2}$, pentru orice număr real x $\frac{6-3x}{2} = 6$, de unde obținem $x = -2$	2p 3p
c) $m \circ (3m) = -m^2 + 2m$, pentru orice număr întreg m $-m^2 + 2m \geq 2m - 3 \Leftrightarrow -m^2 + 3 \geq 0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -1$ sau $m = 0$ sau $m = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a) $f'(x) = \frac{4x^3}{2} - 6x^2 + 0 =$ $= 2x^3 - 6x^2 = 2x^2(x - 3), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^2 e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-3)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2(x-3))'}{(e^x)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$	3p 2p
c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 3$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 3]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty)$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$ $f(x) \geq f(3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și, cum $f(3) = -\frac{21}{2}$, rezultă că $f(x) \geq -\frac{21}{2}$, pentru orice număr real x	3p 2p
2.a) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2x+1) dx = \left(x^2 + x \right) \Big _0^2 =$ $= (4+2) - (0+0) = 6$	3p 2p
b) $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2x+1)'}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 3$	3p 2p
c) $\int_{-a}^a \frac{1}{x^2 + 2f(x) + 2} dx = \int_{-a}^a \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} \Big _{-a}^a = \frac{2a}{4-a^2}$, pentru orice $a \in (0, 2)$ $\frac{2a}{4-a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$ și, cum $a \in (0, 2)$, obținem $a = 1$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{1}{3} - 3 \cdot 9 = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{1} - 3 \cdot \frac{1}{9} = \\ = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0 \\ x = 3$	3p 2p
3.	$\sqrt{x^2 - 4x + 8} = x \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = x^2 \\ -4x + 8 = 0, \text{ de unde obținem } x = 2, \text{ care convine}$	2p 3p
4.	$x - \frac{8}{100} \cdot x = 184 \\ x = 200 \text{ de lei}$	3p 2p
5.	$C(1,2) \\ 4 = \frac{1+x_D}{2}, 1 = \frac{2+y_D}{2}, \text{ unde } (x_D, y_D) \text{ sunt coordonatele punctului } D, \text{ deci } x_D = 7 \text{ și } y_D = 0$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \sqrt{3} \sin x \\ \sin^2 x + (\sqrt{3} \sin x)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \text{ și, cum } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ obținem } \sin x = \frac{1}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = \\ = 6 - 6 = 0$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+6 & 18+12 \\ 3+2 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \\ = 5 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5A$	3p 2p
c)	$xA + (1-x)I_2 = \begin{pmatrix} 2x+1 & 6x \\ x & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(xA + (1-x)I_2) = -4x^2 + 3x + 1, \text{ pentru orice număr real } x \\ -4x^2 + 3x + 1 \geq 0, \text{ de unde obținem } x \in \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$	3p 2p
2.a)	$1*2 = 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1^2 - 2^2 = \\ = 6 - 1 - 4 = 1$	3p 2p

b)	$2*x = 6x - 4 - x^2$, pentru orice număr real x $6x - 4 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$, de unde obținem $x = 1$ sau $x = 5$	2p 3p
c)	$\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow (\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x}) * \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^4}$, pentru orice număr real x $\sqrt[3]{x^4} = 1 \Leftrightarrow x^4 = 1$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 - \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2} =$ $= \frac{2(x^2+4x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}, x \in (-2, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-2, -1]$ $\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-2, -1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, +\infty)$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x+2} \right) = 2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x+2} \right) = -1$, deci dreapta de ecuație $y = 2x - 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 5x \right) \Big _0^3 =$ $= 9 + 15 = 24$	3p 2p
b)	$\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \int_0^1 \frac{4}{x^2 + 1} dx = 4 \arctg x \Big _0^1 =$ $= 4 \arctg 1 - 4 \arctg 0 = \pi$	3p 2p
c)	F este primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $F''(x) = f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 1)^2} \leq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci F este concavă pe $[0, +\infty)$	2p 3p

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_3 = 7$ și $a_7 = 15$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) \geq 2f(1) + 4$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $81^x = 3$. |
| 5p | 4. Calculați $\frac{A_6^2}{P_3}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 3)$, $B(0, -5)$ și $C(4, -1)$. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel. |
| 5p | 6. Arătați că $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{2}$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -1$. |
| 5p | b) Demonstrați că $A \cdot A = I_2$. |
| 5p | c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AX - I_2 = 2021A$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$. |
| 5p | a) Arătați că $5 \circ 2021 = 5$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x \circ y = (x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați numerele întregi m și n pentru care $m^2 \circ n = 16$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 8)e^x$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = (x - 2)(x + 4)e^x$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x - 2}$. |
| 5p | c) Demonstrați că $x^2 \geq 8 - 4e^{2-x}$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^2 f(x)(x+1) dx = \frac{1}{2}$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_2^3 f(x) dx = 1 + \ln \frac{9}{16}$. |
| 5p | c) Determinați numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a f(x)f'(x) dx = \frac{1}{8}$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

**Proba E. c)
Matematică**

Testul 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $\left(7 - 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{6}{41} = 1$. |
| 5p | 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$ cu graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 6 - x$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(3x - 2) = 1$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 12%, o tabletă grafică costă 264 de lei. Determinați prețul inițial al tabletei. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ și $T(6,5)$. Determinați coordonatele punctului A , știind că A este mijlocul segmentului MT . |
| 5p | 6. Arătați că $\cos 60^\circ \cdot \sin 60^\circ + \sin 90^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 1$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 3a+2 \\ a & 3a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
b) Demonstrați că $A(4) = B \cdot B + 2 \cdot C$.
c) Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n) + B) = 4$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compozиție $x * y = \frac{3xy + 1}{x + y}$.
a) Arătați că $1 * 1 = 2$.
b) Calculați $((1 * 2) * 3) - (1 * (2 * 3))$.
c) Determinați numerele reale $x \in M$ pentru care $x * x = 2$. |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - 1$.
a) Arătați că $f'(x) = 3x^2(x-1)(x+2)$, pentru orice număr real x .
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f .
c) Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2, 1]$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 - 1) + 3$.
a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + x - 3) dx = 0$. |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

-
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 (f(x) - x^3 - 3)e^x dx$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 0$, știind că $\int_0^1 f(x) dx = -a^2 + 5$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Arătați că $\sqrt{12}(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) + \sqrt{8}(3\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2$.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $f(a) = 2$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{9-x} = x - 3$.
5p	4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie multiplu de 5.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6, 1)$ și $B(-2, 3)$. Determinați distanța de la punctul O la punctul M , unde M este mijlocul segmentului AB .
5p	6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 12$ și ipotenuza $BC = 20$. Calculați aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

5p	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 3 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	a) Arătați că $\det A = -1$.
5p	b) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
5p	c) Determinați numerele reale a pentru care $\det(aA + B(a)) = 0$.
5p	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x * y = x^2 + xy + y^2$.
5p	a) Arătați că $2 * (-1) = 3$.
5p	b) Arătați că legea de compozitie „*” este comutativă.
5p	c) Determinați numărul natural n pentru care $n * n = 48$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

5p	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 5\ln x + 1$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
5p	b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5\ln x}{xf'(x)} = \frac{1}{2}$.
5p	c) Demonstrați că $3x^2 - x - 2 \geq \ln(x^5)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
5p	2. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.
5p	a) Arătați că $\int_{-1}^2 (x+2)f(x)dx = 6$.
5p	b) Calculați $\int_0^4 \left(f(x) - \frac{x^2}{x+2} \right) dx$.
5p	c) Determinați numărul natural n , știind că $\int_0^6 (x^2 - 9)f(x+1)dx = n^2$.

Examensul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Testul 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $2 \cdot 8,5 + 10,5 : 3,5 = 20$. |
| 5p | 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(2, -2)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + a + 1$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^{6-2x} = 100^2$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, numărul $\sqrt{10n}$ să fie rațional. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(3, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că dreptele OA și AB sunt perpendiculare. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$, $BC = 8$ și unghiul C de măsură egală cu 30° . Calculați $\sin A$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. |
| a) | Arătați că $\det B = -4$. |
| 5p | b) Determinați numărul real a pentru care $A \cdot A - B \cdot B = a(A + B)$. |
| 5p | c) Arătați că, pentru orice număr real x , matricea $C(x) = xA + 2B$ este inversabilă. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie asociativă $x * y = (2x - 1)(2y - 1) + \frac{1}{2}$. |
| a) | Arătați că $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. |
| 5p | b) Determinați numărul real x pentru care $(4x) * \frac{1}{4} = 25$. |
| 5p | c) Calculați $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5}$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{4}{x+3}$. |
| a) | Arătați că $f'(x) = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x \in (-3, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asymptotei oblice la graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $x^2 + f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in (-3, +\infty)$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x - 1)(x + 1)$. |
| a) | Arătați că $\int_1^5 \frac{f(x)}{x+1} dx = 20$. |
| 5p | b) Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a , $a \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, știind că $\int_a^2 f'(x) \sqrt{f(x)} dx = 18$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Calculați termenul al cincilea al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, în care $b_1 = 3$ și $b_2 = -6$. |
| 5p | 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2 - 6x + 1 = 0$. Arătați că $x_1 + x_2 - 6x_1x_2 = 0$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 + \sqrt[3]{27x+8} = 1$. |
| 5p | 4. După o scumpire cu 15%, un produs costă 92 de lei. Determinați prețul produsului înainte de scumpire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,0)$ și $B(9,a)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care distanța dintre punctele A și B este egală cu 13. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 14$ și unghiul B de măsură egală cu 75° . Determinați aria triunghiului ABC . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & x-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a) Arătați că $\det(A(1)) = 3$. |
| 5p | b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = 3(A(x) - I_2)$. |
| 5p | c) Arătați că $\det(xA(x) - A(x^2)) \geq 0$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x * y = 3xy - \frac{x+y}{3} + 1$.
a) Arătați că $1 * 5 = 14$.
b) Determinați numărul real x pentru care $3 * x = -52$.
c) Determinați numerele naturale n pentru care $n * (0 * (3n)) \geq \frac{2n}{3}$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x - 49$.
a) Arătați că $f'(x) = -6(x-1)(x+3)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
c) Se consideră punctele $A(-2, f(-2))$ și $B(0, f(0))$. Arătați că tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x - 2$.
a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) - \ln x) dx = 0$.
b) Calculați $\int_1^e (f(x) - x + 2) dx$.
c) Demonstrați că orice primitivă $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f este convexă. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{5} = 2$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = a$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\log_4(3x+1) = 6$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, numărul x^2 să fie număr impar. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(4, 3)$ și $C(a, b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a , b , știind că punctul A este mijlocul segmentului BC . |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 9$ și $AC = 12$. Determinați lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 2$. |
| 5p | b) Arătați că $(A - 2I_2) \cdot (A - 4I_2) = 6I_2$. |
| 5p | c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = 3A + 4X$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compozitie $x * y = xy - \frac{12}{x+y} + \frac{3}{x} + \frac{3}{y}$. |
| 5p | a) Arătați că $1 * 3 = 4$. |
| 5p | b) Arătați că $x * x = x^2$, pentru orice $x \in M$. |
| 5p | c) Determinați numărul natural nenul n pentru care $(n * n) * (n * n) = 1$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(1-x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Determinați numărul real a pentru care $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 1} + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ e^x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^4 f(x) dx = e(e^3 - 1)$. |

5p b) Calculați $\int_1^2 xf(x)dx$.

5p c) Determinați numărul real a , $a > 0$, știind că $\int_{-a}^0 f(x)dx = a - \ln(a + 1)$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Testul 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că media aritmetică a numerelor $a = 2,4$ și $b = 4 - \frac{2}{5}$ este egală cu 3.
- 5p** 2. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{1-2x} = 32$.
- 5p** 4. În urma unei ieftiniri cu 20%, prețul unui produs a scăzut cu 27 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(6,4)$ și $C(0,-4)$. Știind că punctul D este mijlocul segmentului AB , arătați că $BC = 2OD$.
- 5p** 6. Se consideră numărul real $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \frac{1}{5}$. Arătați că $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4)) = -7$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $\det(A(1) \cdot A(1) + 2A(x)) = 11$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A(0) \cdot A(x) \cdot A(1) = 3A(y)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x * y = 20x - 21y + 1$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2 = -21$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $(x - 1) * x = 1$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $x^2 * x \leq 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = (x - 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{e^x - e}$.
- 5p** c) Arătați că $(2 - x)e^{x-1} \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^5 + x^2 - 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2) dx = -2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_2^4 \frac{f(x) - 2x^5}{2x} dx = \frac{6 - \ln 2}{2}$.
- 5p** c) Calculați $\int_0^1 x^4 (f(x) - x^2)^2 dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Testul 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $\frac{2}{3} \cdot 0,3 + 3,2 : 4 = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - 4x$. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(a, 2a)$ aparține graficului funcției f . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = 4$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $(n-2)(n-6) \geq 0$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5, 0)$, $B(-1, 8)$. Arătați că triunghiul OAM este isoscel, știind că M este mijlocul segmentului AB . |
| 5p | 6. Se consideră patratul $ABCD$ astfel încât aria triunghiului ABC este egală cu 2. Calculați perimetrul patratului $ABCD$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 2 \\ -7 & x-4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| a) | Arătați că $\det A = 0$. |
| 5p | b) Determinați numărul real x pentru care $\det(B(x)) + \det(B(7) - A) = 0$. |
| 5p | c) Determinați matricea $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $xA - A \cdot B(x) = 14C$, pentru orice număr real x . |
| 2. | Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie asociativă $x * y = 6xy - 6x - 6y + 7$. |
| 5p | a) Arătați că $1 * 3 = 1$. |
| 5p | b) Demonstrați că $e = \frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compozitie „*”. |
| 5p | c) Determinați suma numerelor întregi m care verifică inegalitatea $\frac{m}{2} * \left(-\frac{m}{3}\right) \geq 1$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x} + 4$. |
| a) | Arătați că $f'(x) = \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f . |
| 5p | c) Arătați că funcția f este convexă. |
| 2. | Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x) dx = 4$. |
| 5p | b) Calculați $\int_1^3 \frac{f(x)}{x} dx$. |
| 5p | c) Arătați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f(-x) dx = 4(1 - \ln 3)$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

Testul 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Determinați suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_2 = 5$ și $a_3 = 8$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 8$. Determinați numerele reale a pentru care $a \cdot f(a) = f(1)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25 - x) = \log_5(x + 5)$. |
| 5p | 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{2, 3, 5, 9\}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a știind că punctul $A(2, 3)$ aparține dreptei d . |
| 5p | 6. Arătați că $4\sin 60^\circ(\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ) = 3$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a) Arătați că $\det A = -5$.
b) Determinați numărul real a pentru care $B(1) \cdot B(-1) + 3A = 4B(a)$.
c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot (A - 2I_2) = B(0)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x * y = (2x - y + 1)(2y - x + 1)$.
a) Arătați că $3 * 4 = 18$.
b) Demonstrați că legea de compozиție „*” este comutativă.
c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $(2m) * n = 13$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: (-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+7}{x+5}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{3}{(x+5)^2}$, $x \in (-5, +\infty)$.
b) Determinați ecuația asymptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
c) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x + 5$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.
a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) + 2\sqrt{x}) dx = 8$.
b) Arătați că funcția f este o primitivă a funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.
c) Calculați $\int_1^2 \frac{1}{f(x^2)} dx$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

Testul 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $(3 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{5}(6 + 2\sqrt{5}) = 4$. |
| 5p | 2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 1$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+4} = 4^{x+3}$. |
| 5p | 4. Un produs costă 360 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 15%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 3)$, $B(-1, -4)$ și $C(5, 4)$. Arătați că triunghiul AMC este dreptunghic, unde M este mijlocul segmentului BC . |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC , în care unghiurile A și B au măsurile egale cu 30° , respectiv 45° și $BC = 4$. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det A = 1$.
b) Determinați numărul real x pentru care $B \cdot B = A$.
c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + (\det B)A) = 0$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie asociativă $x \circ y = x + y + 16$.

a) Arătați că $(-8) \circ 2 = 10$.
b) Determinați elementul neutru al legii de compozitie „ \circ ”.
c) Determinați numărul real x pentru care pentru care $x \circ \left(\frac{x}{2} + 3\right) \circ x = 2x$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2} + \ln x - 2$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .
c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x)}{x^3 - 1} = -1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{2}{3}$.
b) Arătați că $\int_1^e (f(x) + 1) \ln x dx = \frac{2e^3 + 1}{9}$.
c) Determinați numărul real, a , $a \in (0, +\infty)$, pentru care $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(\sin x) + f(\cos x)) \operatorname{tg} x dx = \ln a$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

Testul 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $(0,6 + 0,8) : 0,7 - 0,25 \cdot 4 = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) - f(2) = 2f(4)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 7) = 2$. |
| 5p | 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un element n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, numărul $2n$ să fie multiplu de 10. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-8, 6)$ și $B(a, 4)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $MA = OB$, unde M este mijlocul segmentului OA . |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A , cu $AB = 12$ și $BC = 13$. Determinați $\sin B$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 9$. |
| 5p | b) Arătați că $A + B(1) \cdot B(-1) = 2B(0)$. |
| 5p | c) Determinați numărul real x pentru care $B(1) + B(2) + B(3) + \dots + B(9) = 9B(x)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x \circ y = \frac{x+y}{2} - \frac{xy}{3}$. |
| 5p | a) Arătați că $2 \circ 6 = 0$. |
| 5p | b) Determinați numărul real x pentru care $x \circ 6 = 6$. |
| 5p | c) Determinați numerele întregi m pentru care $m \circ (3m) \geq 2m - 3$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 3$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = 2x^2(x - 3)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^2 e^x}$. |
| 5p | c) Arătați că $f(x) \geq -\frac{21}{2}$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^2 f(x) dx = 6$. |
| 5p | b) Calculați $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$. |
| 5p | c) Determinați $a \in (0, 2)$ pentru care $\int_{-a}^a \frac{1}{x^2 + 2f(x) + 2} dx = \frac{2}{3}$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{1}{3} - 3 : 9 = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 9$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 4x + 8} = x$. |
| 5p | 4. După o ieftinire cu 8%, un produs costă 184 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(4,1)$, C și D . Știind că punctele C și B sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv CD , determinați coordonatele punctului D . |
| 5p | 6. Se consideră $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\cos x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \sin x$. Arătați că $\sin x = \frac{1}{2}$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 0$. |
| 5p | b) Arătați că $A \cdot A = 5A$. |
| 5p | c) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det(xA + (1-x)I_2) \geq 0$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x * y = 3xy - x^2 - y^2$. |
| 5p | a) Arătați că $1 * 2 = 1$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale x pentru care $2 * x = 1$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale x pentru care $(\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x}) * \sqrt[3]{x^2} = 1$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - \frac{x}{x+2}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f . |
| 5p | c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = 24$. |
| 5p | b) Calculați $\int_0^1 (f(x) - 1) dx$. |
| 5p | c) Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[0, +\infty)$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \\ = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$	3p 2p
2.	$f(1) = 1$ $f(3) = 5 \Rightarrow f(1) \cdot f(3) = 1 \cdot 5 = 5$	2p 3p
3.	$5x - 6 = 2^2 \Rightarrow 5x - 6 = 4$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre, multiplii de 25 sunt numerele 25, 50 și 75, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	2p 2p 1p
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului BC $AO = 4$	2p 3p
6.	$\sin^2 x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{15}{16}$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = \\ = 4 + 6 = 10$	3p 2p
b)	$B(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ și $B(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2B(5) + B(-1) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \\ = 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 3B(3)$	3p 2p
c)	$A \cdot B(x) - B(4x) = \begin{pmatrix} 4x+3 & 4-3x \\ 2x-1 & 2+x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & 1 \\ -1 & 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3-3x \\ 2x & 2-3x \end{pmatrix}$, pentru orice număr întreg x , deci $\det(A \cdot B(x) - B(4x)) = 6x^2 - 15x + 6$, pentru orice număr întreg x $6x^2 - 15x + 6 = 0$ și, cum x este număr întreg, obținem $x = 2$	3p 2p

2.a)	$2 * 4 = 2(4 - 2) + 4(2 - 2) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$	3p 2p
b)	$x * x = x(x - 2) + x(x - 2) = 2x(x - 2)$, pentru orice număr real x $2x(x - 2) = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$	3p 2p
c)	$x * 1 = -2$, deci $(x * 1) * (x + 1) = (-2) * (x + 1) = -6x - 2$, pentru orice număr real x $-6x - 2 = 4$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2 \cdot (2x^2 + 1) - 2 \cdot (2x^2 + 1)'}{(2x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{-2 \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{-8x}{(2x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(0) = 2$, $f'(0) = 0$ Ecuatia tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 2$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x \ln x}{2x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x + 2}{4x} \right) =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - x^3 - 1) dx = \int_1^2 6x dx = 3x^2 \Big _1^2 =$ $= 12 - 3 = 9$	3p 2p
b)	$\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - 6x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 1 = \frac{1}{3} \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 (x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + 1) dx = \left(\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + 6 \cdot \frac{2x\sqrt{x}}{3} + x \right) \Big _0^1 = \frac{27}{5}$ $\frac{a^3}{5} = \frac{27}{5}$, de unde obținem $a = 3$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Arătați că $f(1) \cdot f(3) = 5$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x - 6} = 2$. |
| 5p | 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 25. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ și $C(0, -2)$. Determinați distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC . |
| 5p | 6. Se consideră $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \frac{1}{4}$. Arătați că $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 10$. |
| 5p | b) Arătați că $2B(5) + B(-1) = 3B(3)$. |
| 5p | c) Determinați numărul întreg x pentru care $\det(A \cdot B(x) - B(4x)) = 0$. |
| 2. | Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x * y = x(y - 2) + y(x - 2)$. |
| 5p | a) Arătați că $2 * 4 = 4$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 0$. |
| 5p | c) Determinați numărul real x pentru care $(x * 1) * (x + 1) = 4$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{2x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{-8x}{(2x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) \ln x) = 0$. |
| 2. | Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - x^3 - 1) dx = 9$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - 6x} dx = \frac{1}{3} \ln 2$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{a^3}{5}$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări partiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2 \cdot \left(2 - \frac{3}{4} : \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \left(2 - \frac{3}{2} \right) =$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	3p 2p
2.	$f(1) = 3$ $g(1) = -3 \Rightarrow f(1) + g(1) = 3 + (-3) = 0$	2p 3p
3.	$2^{4-x} = 2^2 \Leftrightarrow 4-x = 2$ $x = 2$	3p 2p
4.	$\frac{30}{100} \cdot 70 = 21$ de lei Prețul după scumpire este $70 + 21 = 91$ de lei	3p 2p
5.	$AB = 4, AC = 3$ $BC = 5$, de unde obținem $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 12$	2p 3p
6.	$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin B} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$ $\sin B = \frac{1}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 =$ $= 3 + 4 = 7$	3p 2p
b)	$2B + I_2 = 2 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} =$ $= 3 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3A$	3p 2p
c)	$A \cdot X - B \cdot X = I_2 - X \Leftrightarrow (A - B + I_2) \cdot X = I_2$ Cum $\det(A - B + I_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, obținem $X = (A - B + I_2)^{-1}$, deci $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$1 * 3 = 3 - (1 - 3)(3 - 3) =$ $= 3 - 0 = 3$	3p 2p

b)	$x * 2 = 3 - (x - 3)(2 - 3) = 3 + x - 3 = x$, pentru orice număr real x $2 * x = 3 - (2 - 3)(x - 3) = 3 + x - 3 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 2$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$x * (x + 6) = 3 - (x - 3)(x + 3)$, pentru orice număr real x $3 - (x - 3)(x + 3) \geq 3 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \leq 0$, de unde obținem $x \in [-3, 3]$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 0 =$ $= \frac{-4+x}{x^2} = \frac{x-4}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 4] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 4]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [4, +\infty)$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4, +\infty)$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2} + \frac{\ln x}{x} - \frac{5}{x} \right) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x} + \ln x - 5 \right) = +\infty$, deci nu există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - e^x - 3) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$ $= 8 - 1 = 7$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x(f(x) - 3x^2) dx = \int_0^1 (xe^x + 3x) dx = (xe^x - e^x) \Big _0^1 + \frac{3x^2}{2} \Big _0^1 =$ $= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$	3p 2p
c)	$f'(x) = e^x + 6x \Rightarrow f(x) - f'(x) = 3(x-1)^2$, deci $\int_0^a \frac{1}{f(x) - f'(x)} dx = \frac{1}{3} \int_0^a \frac{1}{(x-1)^2} dx =$ $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} \Big _0^a = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a-1} + 1 \right)$, pentru orice $a \in (0, 1)$ $= -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a-1} + 1 \right) = \frac{1}{6}$, de unde obținem $a = \frac{1}{3}$, care convine	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Arătați că $2 \cdot \left(2 - \frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right) = 1$.
5p	2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 4$. Arătați că $f(1) + g(1) = 0$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4-x} = 4$.
5p	4. Un produs costă 70 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 30%.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(-3, 0)$ și $C(0, 4)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC .
5p	6. Se consideră triunghiul ABC , în care $AC = 2$, $BC = 4$ și unghiul A are măsura egală cu 30° . Arătați că $\sin B = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

5p	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	a) Arătați că $\det A = 7$.
5p	b) Arătați că $2B + I_2 = 3A$.
5p	c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X - B \cdot X = I_2 - X$.
5p	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3 - (x - 3)(y - 3)$.
5p	a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
5p	b) Arătați că $e = 2$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
5p	c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x * (x + 6) \geq 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

5p	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x} + \ln x - 5$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-4}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
5p	b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
5p	c) Arătați că nu există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f .
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 3$.
5p	a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - e^x - 3) dx = 7$.
5p	b) Arătați că $\int_0^1 x(f(x) - 3x^2) dx = \frac{5}{2}$.
5p	c) Determinați $a \in (0, 1)$, știind că $\int_0^a \frac{1}{f(x) - f'(x)} dx = \frac{1}{6}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_3 = 4 + 2 \cdot 5 =$ $= 4 + 10 = 14$	3p 2p
2.	$f(0) = -1$ $f(1) = -1$, deci $f(0) = f(1)$	2p 3p
3.	$3x + 4 = 16$ $x = 4$, care convine	3p 2p
4.	$x + \frac{25}{100} \cdot x = 350$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire Prețul produsului înainte de scumpire este 280 de lei	3p 2p
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului AB , deci $\frac{-4+a}{2} = 0$ și $\frac{1+b}{2} = 0$ $a = 4$, $b = -1$	3p 2p
6.	$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$ $\frac{AB^2}{2} = 8 \Leftrightarrow AB^2 = 16$, de unde obținem $AB = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) =$ $= 5 - 2 = 3$	3p 2p
b)	$B(2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B(6) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3B(2) + B(6) = \begin{pmatrix} 12 & -24 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} =$ $= 4 \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4B(3)$	3p 2p
c)	$(B(-x) - B(x)) \cdot (B(-x) + B(x)) = \begin{pmatrix} -2x & 4x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & -8x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x Cum $A + B(3) = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obținem $x = 1$	3p 2p
2.a)	$3 \circ 4 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 25 =$ $= 25 - 25 = 0$	3p 2p

b)	$(2x) \circ x = 10x - 25$, pentru orice număr real x $10x - 25 = 5$, de unde obținem $x = 3$	3p 2p
c)	$m^2 \circ 1 = 3m^2 - 21$ și $1 \circ m^2 = 4m^2 - 22$, pentru orice număr întreg m $3m^2 - 21 \geq 4m^2 - 22 \Leftrightarrow -m^2 + 1 \geq 0$, deci $m \in [-1, 1]$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -1$ sau $m = 0$ sau $m = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(3x+1) - 2x \cdot 3}{(3x+1)^2} =$ $= \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$ Dreapta de ecuație $y = \frac{2}{3}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f''(x) = -\frac{12}{(3x+1)^3}, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ $f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$, deci funcția f este concavă	3p 2p
2.a)	$\int_1^4 (f(x) - \ln x + 1) dx = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^4 =$ $= \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$	3p 2p
b)	$\int_2^4 \frac{x}{f(x) - \ln x} dx = \int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) \Big _2^4 =$ $= \frac{1}{2} \ln 15 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 5$	3p 2p
c)	$\int_1^a \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^a \left(1 + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^a 1 dx + \int_1^a \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x dx - \int_1^a \frac{1}{x^2} dx =$ $= x \Big _1^a - \frac{1}{x} \ln x \Big _1^a + \int_1^a \frac{1}{x^2} dx - \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = a - 1 - \frac{\ln a}{a}$, pentru orice $a \in (1, +\infty)$ $a - 1 - \frac{\ln a}{a} = \frac{a - \ln a}{a}$, de unde obținem $a = 2$, care convine	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 4$ și rația este $r = 5$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 1$. Arătați că $f(0) = f(1)$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x+4) = \log_4 16$. |
| 5p | 4. După o scumpire cu 25%, un produs costă 350 de lei. Determinați prețul produsului înainte de scumpire. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$ și $B(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că punctul O este mijlocul segmentului AB . |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A . Știind că aria triunghiului ABC este egală cu 8, determinați lungimea laturii AB . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 3$. |
| 5p | b) Arătați că $3B(2) + B(6) = 4B(3)$. |
| 5p | c) Determinați numărul real x pentru care $(B(-x) - B(x)) \cdot (B(-x) + B(x)) = A + B(3)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x \circ y = 3x + 4y - 25$. |
| 5p | a) Arătați că $3 \circ 4 = 0$. |
| 5p | b) Determinați numărul real x pentru care $(2x) \circ x = 5$. |
| 5p | c) Determinați numerele întregi m pentru care $m^2 \circ 1 \geq 1 \circ m^2$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{2}{(3x+1)^2}$, $x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Arătați că funcția f este concavă. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x - 1$. |
| 5p | a) Arătați că $\int\limits_1^4 (f(x) - \ln x + 1) dx = 21$. |
| 5p | b) Arătați că $\int\limits_2^4 \frac{x}{f(x) - \ln x} dx = \frac{1}{2} \ln 5$. |
| 5p | c) Determinați $a \in (1, +\infty)$ pentru care $\int\limits_1^a \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{a - \ln a}{a}$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(0,25 \cdot 10 - \frac{1}{2}\right) \left(0,25 \cdot 10 + \frac{1}{2}\right) = (2,5 - 0,5)(2,5 + 0,5) = \\ = 2 \cdot 3 = 6$	2p 3p
2.	$f(2) = 1 \Rightarrow 4 - 2a + 1 = 1 \\ a = 2$	3p 2p
3.	$3^x (3^2 + 1) = 30 \Leftrightarrow 3^x = 3 \\ x = 1$	3p 2p
4.	$\frac{20}{100} \cdot 500 = 100 \text{ de lei}$ Prețul după scumpire este $500 + 100 = 600$ de lei	3p 2p
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(4,3)$ $OM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \\ = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = \\ = 2 - 3 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $A \cdot A - 3A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p 2p
c)	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1+3y & x+3 \\ 1+2y & x+2 \end{pmatrix}, X \cdot A = \begin{pmatrix} 1+x & 3+2x \\ y+1 & 3y+2 \end{pmatrix}, \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt numere reale}$ $\begin{pmatrix} 1+3y & x+3 \\ 1+2y & x+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+x & 3+2x \\ y+1 & 3y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3y-x & -x \\ y & x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ de unde obținem } x = -1 \text{ și } y = -1$	2p 3p
2.a)	$3 \circ 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 + 2 = \\ = 24 + 5 = 29$	3p 2p

b)	$x \circ y = \frac{16xy + 4x + 4y}{4} = \frac{16xy + 4x + 4y + 1 - 1}{4} =$ $= \frac{4x(4y+1) + (4y+1) - 1}{4} = \frac{(4x+1)(4y+1) - 1}{4}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p 2p
c)	$x \circ x = \frac{(4x+1)^2 - 1}{4}, \text{ pentru orice număr real } x$ $\frac{(4x+1)^2 - 1}{4} \leq 2 \Leftrightarrow (4x+1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq 4x+1 \leq 3, \text{ de unde obținem } x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x + \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$ $= e^x + \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = e^x + \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \right) = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$x \in [-1, 1] \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1] \Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$, pentru orice $x \in [-1, 1]$ Cum $f(-1) = \frac{2-e}{2e}$ și $f(1) = \frac{2e+1}{2}$, obținem $\frac{2-e}{2e} \leq f(x) \leq \frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x \in [-1, 1]$	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 =$ $= (2+2) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{2}$	3p 2p
b)	$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 x(x+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x) dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$ $= \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{17\pi}{12}$	3p 2p
c)	$\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1} dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big _1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}, \text{ deci } a = 1$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $\left(0,25 \cdot 10 - \frac{1}{2}\right) \left(0,25 \cdot 10 + \frac{1}{2}\right) = 6$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - ax + 1$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(2,1)$ aparține graficului funcției f . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} + 3^x = 30$. |
| 5p | 4. Un obiect costă 500 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(8,3)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB . Calculați distanța de la punctul M la punctul $O(0,0)$. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A , cu $AB = 5$ și $AC = 10$. Calculați aria triunghiului ABC . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -1$. |
| 5p | b) Arătați că $A \cdot A - 3A = I_2$. |
| 5p | c) Se consideră matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale. Determinați numerele reale x și y pentru care $A \cdot X - X \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x \circ y = 4xy + x + y$. |
| 5p | a) Arătați că $3 \circ 2 = 29$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x \circ y = \frac{(4x+1)(4y+1)-1}{4}$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq 2$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x}{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = e^x + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $\frac{2-e}{2e} \leq f(x) \leq \frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x \in [-1,1]$. |

2. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{5}{2}$.

5p b) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{17\pi}{12}$.

5p c) Determinați numărul real a , știind că $\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x} \ln x}{x+1} dx = \frac{e^2 + a}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Arătați că $(1+3i)^2 - 6i = -8$, unde $i^2 = -1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x-7$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3-x} = 2x$. |
| 5p | 4. Arătați că numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ este egal cu numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A . |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ și $C(0, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că dreapta AB conține punctul C . |
| 5p | 6. Se consideră numărul real $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x + \sin \frac{\pi}{6} = 1$. Calculați $\sin x$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $M(x) = A + xB$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 0$. |
| 5p | b) Demonstrați că $M(x) \cdot M(1) = xM(1)$, pentru orice număr real x . |
| 5p | c) Determinați numărul natural n , știind că $M(4) \cdot M(3) \cdot M(2) \cdot M(1) = nM(1)$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie $x * y = x + y + x^2 y^2$. |
| 5p | a) Arătați că $1 * 2 = 7$. |
| 5p | b) Demonstrați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compozitie „*”. |
| 5p | c) Determinați numerele întregi x pentru care $(-2) * x \leq 3$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^4 - 2x + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = e^x + 4x^3 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că funcția f este convexă. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) dx = 4$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$. |
| 5p | c) Determinați cel mai mare număr natural nenul n pentru care $\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1} f^n(x) dx \geq \frac{1}{2021}$. |