**Examenul de bacalaureat naţional 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 5**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $24+a=2\cdot 1020$ | **3p** |
| | $a=2016$ | **2p** |
| **2.** | $\Delta=16-4m$ | **3p** |
| | $16-4m=0 \Rightarrow m=4$ | **2p** |
| **3.** | $\left(3^{-1}\right)^{2x-3}=3^3 \Leftrightarrow -2x+3=3$ | **3p** |
| | $x=0$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea $A$ are 25 de elemente, deci sunt 25 de cazuri posibile | **1p** |
| | Sunt 5 numere raționale în mulțimea $A$, deci sunt 5 cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ | **2p** |
| **5.** | $d\perp BC \Rightarrow m_d\cdot m_{BC}=-1$ și, cum $m_{BC}=1$, obținem $m_d=-1$ | **2p** |
| | Deoarece $A\in d$, ecuația dreptei $d$ este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, adică $y=-x+1$ | **3p** |
| **6.** | $\frac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow R=\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=$ | **3p** |
| | $=2$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=0+0+0-0-1-0=-1$ | **3p** |
| **b)** | $\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(3a-1)(a+1)$ | **2p** |
| | Pentru orice număr real $a$, $a\neq -1$ și $a\neq\frac{1}{3}$, obținem $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă | **3p** |
| **c)** | Sistemul are soluție unică, deci $a\neq -1$ și $a\neq\frac{1}{3}$; pentru fiecare număr real $a$, $a\neq -1$ și $a\neq\frac{1}{3}$, obținem $x_0=\frac{-4a}{(3a-1)(a+1)}$ și $y_0=\frac{2(2-3a)}{3a-1}$ | **2p** |
| | Cum $x_0=y_0 \Leftrightarrow 3a^2-a-2=0$, obținem $a=-\frac{2}{3}$ sau $a=1$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $x*y=-xy+2x+2y-4+2=$ | **2p** |
| | $=-x(y-2)+2(y-2)+2=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **3p** |
| **b)** | $x*x=2-(x-2)^2$ | **2p** |
| | $2-(x-2)^2=1\Leftrightarrow(x-2)^2=1\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$ | **3p** |
| **c)** | Cum $m*n*p=2+(m-2)(n-2)(p-2)$, obținem $(m-2)(n-2)(p-2)=0$ | **2p** |
| | $m=2$ sau $n=2$ sau $p=2$, deci produsul numerelor $m$, $n$ și $p$ este divizibil cu 2 | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\left(e^x\right)'+(\ln x)'+1'=$ | **2p** |
| | $=e^x+\frac{1}{x}+0=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ | **3p** |
| **b)** | $f(1)=e+1$, $f'(1)=e+1$ | **2p** |
| | Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=(e+1)x$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ | **2p** |
| | Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(e^x+\ln x+1\right)=-\infty$, $f(1)>0$ și $f$ este continuă, atunci ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$ | **3p** |
| **2.a)** | $I_0=\int_0^1\frac{x}{x+3}dx=\int_0^1\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx=\left(x-3\ln(x+3)\right)\Big\|_0^1=$ | **3p** |
| | $=1-3\ln4+3\ln3=1+3\ln\frac{3}{4}$ | **2p** |
| **b)** | $I_{n+1}+3I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}+3x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\frac{x^{n+1}(x+3)}{x+3}dx=\int_0^1 x^{n+1}dx=$ | **3p** |
| | $=\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big\|_0^1=\frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural $n$ | **2p** |
| **c)** | $nI_n=n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\left(x^n\right)'\frac{x^2}{x+3}dx=x^n\cdot\frac{x^2}{x+3}\Big\|_0^1-\int_0^1 x^n\cdot\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}dx=\frac{1}{4}-\int_0^1 x^n\left(1-\frac{9}{(x+3)^2}\right)dx$ pentru orice număr natural nenul $n$ | **2p** |
| | Cum $0\le\int_0^1 x^n\left(1-\frac{9}{(x+3)^2}\right)dx\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul $n$, obţinem $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{4}$ | **3p** |

**Examenul de bacalaureat național 2016**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 5**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinați numărul real $a$, știind că numerele 24, 1020 și $a$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**5p** **2.** Determinați numărul real $m$, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ este tangentă axei $Ox$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, acesta să fie număr rațional.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(0,1)$, $B(-2,-1)$ și $C(2,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A$ și este perpendiculară pe dreapta $BC$.

**5p** **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi $ABC$, în care $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ și $BC=2\sqrt{2}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

**5p** **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real $a$, $a\neq -1$ și $a\neq \frac{1}{3}$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $a$, pentru care sistemul are soluție unică $(x_0,y_0,z_0)$, iar $x_0=y_0$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.

**5p** **a)** Arătați că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **b)** Determinați numerele reale $x$, pentru care $x*x=1$.

**5p** **c)** Demonstrați că, dacă $m$, $n$ și $p$ sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor $m$, $n$ și $p$ este divizibil cu 2.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$.

**2.** Pentru fiecare număr natural $n$, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx$.

**5p** **a)** Arătaţi că $I_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$.

**5p** **b)** Demonstraţi că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural $n$.

**5p** **c)** Arătaţi că $\lim_{n \to +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

**Examenul de bacalaureat național 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 8**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\left(\sqrt{2}-3\right)^2=11-6\sqrt{2}$ | **2p** |
| | $\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11+6\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11-6\sqrt{2}+11+6\sqrt{2}=22$ | **3p** |
| **2.** | $f(-1)=0$ | **3p** |
| | $f(-1)f(0)f(1)=0$ | **2p** |
| **3.** | $x^2-6x+6=1\Rightarrow x^2-6x+5=0$ | **2p** |
| | $x=1$ sau $x=5$, care verifică ecuația dată | **3p** |
| **4.** | Cifra unităților este 8 | **2p** |
| | Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 3 moduri și, pentru fiecare alegere a acesteia, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 2 moduri, deci se pot forma $3\cdot2\cdot1=6$ astfel de numere | **3p** |
| **5.** | $m_{AB}=1$ și $m_d=m_{AB}\Rightarrow m_d=1$ | **3p** |
| | Ecuația dreptei $d$ este $y=x$ | **2p** |
| **6.** | $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ | **3p** |
| | $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=1+0+0-0-0-0=1$ | **3p** |
| **b)** | $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2+x\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&y^2+y\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y+x&y^2+y+2xy+x^2+x\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2+(x+y)\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p** |
| **c)** | $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot2017}\right)=A\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{2016\cdot2017}\right)=$ $=A\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)=A\left(\frac{2016}{2017}\right)$ | **3p** |
| | $A\left(\frac{2016}{2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)\Leftrightarrow a=2016$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $f(1)=0 \Leftrightarrow 1^4+m\cdot 1^2+2=0$<br>$m=-3$ | **2p**<br>**3p** |
| **b)** | $x_1+x_2+x_3+x_4=0$<br>$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$, pentru orice număr real $m$ | **2p**<br>**3p** |
| **c)** | $f=X^4+3X^2+2=(X^2+1)(X^2+2)$<br>Polinoamele $X^2+1$ și $X^2+2$ au coeficienți reali, au gradul 2 și nu au rădăcini reale, deci sunt ireductibile în $\mathbb{R}[X]$ | **3p**<br>**2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$<br>$=\dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $f(0)=0$, $f'(0)=1$<br>Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$ | **2p**<br>**3p** |
| **c)** | $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$<br>Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$ și funcția $f$ este continuă, atunci pentru orice $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică | **2p**<br>**3p** |
| **2.a)** | $\int\limits_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int\limits_0^2 e^x(x-1)e^{-x}dx=\int\limits_0^2(x-1)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big\|_0^2=$<br>$=\dfrac{4}{2}-2=0$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $\mathcal{A}=\int\limits_1^2\|f(x)\|dx=\int\limits_1^2(x-1)e^x dx=(x-2)e^x\Big\|_1^2=$<br>$=0-(-1)e=e$ | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | $\int\limits_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\int\limits_{-n}^1 xe^x dx=(x-1)e^x\Big\|_{-n}^1=(n+1)e^{-n}$<br>$\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{e^n}=0$ | **3p**<br>**2p** |

**Examenul de bacalaureat naţional 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 8**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.

**5p** **2.** Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+2$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-6x+6\right)=\log_3 1$.

**5p** **4.** Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele $5$, $7$, $8$ și $9$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1,0)$ și $B(1,2)$. Determinați ecuația dreptei $d$ care trece prin punctul $O$ și este paralelă cu dreapta $AB$.

**5p** **6**. Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real $x$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

**5p** **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a\neq-1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde $m$ este număr real.

**5p** **a)** Determinați numărul real $m$, știind că $f(1)=0$.

**5p** **b)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=0$, pentru orice număr real $m$, unde $x_1$, $x_2$, $x_3$ și $x_4$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

**5p** **c)** Pentru $m=3$, descompuneţi polinomul $f$ în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $a$, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu $e$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{1}\left(f(x)+e^{x}\right)dx=0$. |

**Examenul de bacalaureat naţional 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 2**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $a_3 = 2016 + 2 \cdot 2 =$ | **3p** |
| | $= 2020$ | **2p** |
| **2.** | $f(1) = 2 \Rightarrow 1 + m = 2$ | **3p** |
| | $m = 1$ | **2p** |
| **3.** | $2^{4x-6} = \left(2^2\right)^{3x-4} \Leftrightarrow 4x - 6 = 6x - 8$ | **3p** |
| | $x = 1$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea $A$ are 40 de elemente, deci sunt 40 de cazuri posibile | **1p** |
| | Numerele din mulțimea $A$ care conțin cifra 4 sunt 4, 14, 24, 34 și 40, deci sunt 5 cazuri favorabile | **2p** |
| | $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$ | **2p** |
| **5.** | $y - 2 = \dfrac{5-2}{4-1}(x-1)$ | **3p** |
| | $y = x + 1$ | **2p** |
| **6.** | Cum $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \dfrac{3}{5}$ | **3p** |
| | $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ | **2p** |
| | $= -2 + 0 + 0 - 1 - (-1) - 0 = -2$ | **3p** |
| **b)** | $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$ | **3p** |
| | Pentru orice număr real $a$, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, obţinem $\det(A(a)) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă | **2p** |
| **c)** | Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 1$; pentru fiecare număr $a$, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, soluția sistemului este de forma $\left(-\dfrac{1}{a-1}, \dfrac{1}{a-1}, 0\right)$ | **3p** |
| | Cum $a$ este număr întreg, $\dfrac{1}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - 1$ este divizor al lui $1$, deci $a = 0$ sau $a = 2$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1 =$ | **3p** |
| | $= 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p** |
| **b)** | $f(x \circ y) = 3(x \circ y) + 3 = 3\left(3(x+1)(y+1) - 1\right) + 3 = 9(x+1)(y+1) =$ | **3p** |
| | $= (3x+3)(3y+3) = f(x)\,f(y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p** |
| **c)** | $f\left(\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a}\right) = f\left(3^{2015} - 1\right) \Leftrightarrow \left(f(a)\right)^{2016} = 3 \cdot \left(3^{2015} - 1\right) + 3 \Leftrightarrow \left(f(a)\right)^{2016} = 3^{2016} \Leftrightarrow f(a) = -3$ sau $f(a) = 3$ | **3p** |
| | $a = -2$ sau $a = 0$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | Cum $x \in (1, +\infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = \left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right)' =$ | **2p** |
| | $= \left(\ln(x+1)\right)' - \left(\ln(x-1)\right)' = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ | **3p** |
| **b)** | $f''(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ | **2p** |
| | Pentru orice $x \in (1, +\infty)$, $f''(x) > 0$, deci funcția $f$ este convexă pe $(1, +\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(f'(2) + f'(3) + \ldots + f'(n)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}\right)\right) =$ | **3p** |
| | $= \lim\limits_{n \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) = -\dfrac{3}{2}$ | **2p** |
| **2.a)** | $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \int_1^2 (x+1)\, dx = \left.\left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\right\|_1^2 =$ | **3p** |
| | $= 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$ | **2p** |
| **b)** | $\displaystyle\int_1^{e^2}\left(f(x) - \sqrt{x}\right)\ln x\, dx = \int_1^{e^2} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x\, dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x\Big\|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$ | **3p** |
| | $= \left.\left(2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x}\right)\right\|_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4$ | **2p** |
| **c)** | $\displaystyle V = \pi\int_1^a g^2(x)\, dx = \pi\int_1^a\left(x + 2 + \dfrac{1}{x}\right) dx = \pi\left.\left(\dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln x\right)\right\|_1^a = \pi\left(\dfrac{a^2}{2} + 2a + \ln a - \dfrac{5}{2}\right)$ | **3p** |
| | $\pi\left(\dfrac{a^2}{2} + 2a + \ln a - \dfrac{5}{2}\right) = \pi\left(\ln a + \dfrac{7}{2}\right) \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$ | **2p** |

**Examenul de bacalaureat național 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 2**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2016$ și rația $r = 2$.

**5p** **2.** Determinați numărul real $m$, știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.

**5p** **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1,2,3,\ldots,40\}$, acesta să conţină cifra 4.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(4,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei $AB$.

**5p** **6.** Dacă $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$, arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(0)) = -2$.

**5p** **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real $a$, $a \neq -1$ și $a \neq 1$.

**5p** **c)** Determinați numerele întregi $a$, pentru care sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0)$, iar $x_0$, $y_0$ și $z_0$ sunt numere întregi.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

**5p** **a)** Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $a$, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a} = 3^{2015} - 1$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x \in (1,+\infty)$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $(1,+\infty)$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2) + f'(3) + f'(4) + \ldots + f'(n)\right) = -\frac{3}{2}$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \frac{5}{2}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.

**Examenul de bacalaureat național 2016**

**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $7+x^2+2=2\cdot 3x$ | **3p** |
| | $x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3$ | **2p** |
| **2.** | $\Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$ | **3p** |
| | $m=1$ | **2p** |
| **3.** | $\left(2^{-1}\right)^{4x-9}=2^{5x} \Leftrightarrow -4x+9=5x$ | **3p** |
| | $x=1$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea $A$ are $C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6=64$ de submulțimi, deci sunt 64 de cazuri posibile | **2p** |
| | Mulțimea $A$ are $C_6^0+C_6^1+C_6^2=1+6+15=22$ de submulțimi cu cel mult două elemente, deci sunt 22 de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{22}{64}=\dfrac{11}{32}$ | **1p** |
| **5.** | Punctul $M(1,2)$ este mijlocul laturii $BC$ | **1p** |
| | $m_{AM}=\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$ | **2p** |
| | Ecuația dreptei care trece prin punctul $B$ şi este paralelă cu dreapta $AM$ este $y=x-1$ | **2p** |
| **6.** | $\dfrac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{3\pi}{4}}=$ | **3p** |
| | $=1$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(10)=\begin{pmatrix}1&10&0\\0&1&0\\0&0&2^{10}\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(10)\right)=\begin{vmatrix}1&10&0\\0&1&0\\0&0&2^{10}\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=2^{10}=1024$ | **3p** |
| **b)** | $A(x)\cdot A(2x)=A(3x)$ | **2p** |
| | $A(3x)=A\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=2$ | **3p** |
| **c)** | Deoarece $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$, obținem $A(n)=$ $=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)=A(1+2+3+\ldots+2016)=A(2017\cdot 1008)$ | **3p** |
| | $n=2017\cdot 1008$, deci $n$ este număr natural divizibil cu $2017$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $f(0)=0^3-5\cdot 0+a=$<br>$=0-0+a=a$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5(x_1+x_2+x_3)-3a=-3a$<br>$-3a=2016-4a \Leftrightarrow a=2016$ | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | Presupunem că $f$ are cel puțin două rădăcini întregi $x_1$ și $x_2$; cum $x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3\in\mathbb{Z}$<br>Știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$, dacă $x_1^2\ge x_2^2\ge x_3^2$, obținem $x_1^2=9$, $x_2^2=1$ și $x_3^2=0$<br>Deoarece pentru valorile pe care le obținem pentru $x_1$, $x_2$ și $x_3$, relația $x_1+x_2+x_3=0$ nu este verificată, polinomul $f$ are cel mult o rădăcină întreagă | **1p**<br>**2p**<br>**2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=(e^x)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-x'-1'=$<br>$=e^x-\frac{1}{2}\cdot 2x-1=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p**<br>**3p** |
| **b)** | Aplicând succesiv teorema lui l'Hospital, obținem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x-1}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}=$<br>$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=1$ | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | $f''(x)=e^x-1>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f'$ strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ și cum $f'(0)=0$, obținem $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f$ strict crescătoare pe $(0,+\infty)$<br>$0<2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Rightarrow f(2\sqrt{3})<f(3\sqrt{2})$ | **3p**<br>**2p** |
| **2.a)** | $I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^1=$<br>$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $I_{n+1}-I_n=\int_0^1(-x^2)(1-x^2)^n dx$, pentru orice număr natural nenul $n$<br>Pentru orice număr natural nenul $n$ și $x\in[0,1]$ avem $-x^2\le 0$ și $(1-x^2)^n\ge 0$, deci $I_{n+1}\le I_n$ | **2p**<br>**3p** |
| **c)** | $I_{n+1}=\int_0^1 x'(1-x^2)^{n+1}dx=x(1-x^2)^{n+1}\Big\vert_0^1-\int_0^1 x(n+1)(1-x^2)^n(-2x)dx=$<br>$=2(n+1)\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx=-2(n+1)\int_0^1(1-x^2-1)(1-x^2)^n dx=-2(n+1)(I_{n+1}-I_n)$, deci $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **2p**<br>**3p** |

**Examenul de bacalaureat național 2016**

**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real $x$, știind că numerele 7, $3x$ și $x^2+2$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinați numărul real $m$, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ este tangentă axei $Ox$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9}=32^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime a mulțimii $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\right\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$ și $C(1,4)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $B$ și este paralelă cu mediana din $A$ a triunghiului $ABC$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului $ABC$ în care $A=\frac{3\pi}{4}$ și $BC=\sqrt{2}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(10)\big)=1024$.

5p **b)** Determinați numerele reale $x$, știind că $A(x)\cdot A(2x)=A\left(x^2+2\right)$.

5p **c)** Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$, demonstrați că $n$ este număr natural divizibil cu 2017.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^3-5X+a$, unde $a$ este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=a$.

5p **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde $x_1$, $x_2$ și $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

5p **c)** Demonstrați că polinomul $f$ are cel mult o rădăcină în mulțimea numerelor întregi.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$.

**2.** Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx$.

**5p** **a)** Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

**5p** **b)** Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul $n$.

**5p** **c)** Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul $n$.

# Examenul de bacalaureat naţional 2016
## Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*
## Clasa a XII-a
## BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $(2a+1)+(2b-1)i=0$ | **3p** |
| | Cum $a$ și $b$ sunt numere reale, obținem $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ | **2p** |
| **2.** | $\Delta=m^2-4$ | **2p** |
| | $-\frac{m^2-4}{4}=-3 \Leftrightarrow m^2-16=0 \Leftrightarrow m=-4$ sau $m=4$ | **3p** |
| **3.** | $\log_3 x=\frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow (\log_3 x+1)(\log_3 x-1)=0$ | **3p** |
| | $x=\frac{1}{3}$ sau $x=3$, care verifică ecuaţia | **2p** |
| **4.** | Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile | **1p** |
| | Pătratele perfecte de o cifră sunt $0, 1, 4$ şi $9$, deci sunt $3\cdot 4=12$ numere naturale de două cifre care au ambele cifrele pătrate perfecte, adică sunt $12$ cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$ | **2p** |
| **5.** | Punctele $A$, $B$ şi $C$ sunt coliniare, deci $m_{AB}=m_{BC}$ | **2p** |
| | $\frac{-3-a}{0+1}=\frac{1+3}{1-0} \Leftrightarrow a=-7$ | **3p** |
| **6.** | $\sin^2\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos a+\cos^2 a+\cos^2\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin a+\sin^2 a=2 \Leftrightarrow 2-2\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=2$ | **3p** |
| | Cum $a\in(0,\pi)$, din relația $\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=0$, obținem $a=\frac{6\pi}{7}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$ | **3p** |
| | $=0$ | **2p** |
| **b)** | $\det(A(m))=\begin{vmatrix}2&1&m\\m&m&1\\1&m&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&m+1\\m&m&m+1\\1&m&m+1\end{vmatrix}=(m+1)\begin{vmatrix}2&1&1\\m-2&m-1&0\\-1&m-1&0\end{vmatrix}=(m+1)(m-1)^2$ | **2p** |
| | Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m))\neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | $A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\det(A(0))=1\neq 0$, $(A(0))^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$ | **3p** |
| | $X=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&9&-7\end{pmatrix}$ | **2p** |
| **2.a)** | $x*y=xy-4x-4y+16+4=$ | **2p** |
| | $=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **3p** |
| **b)** | $x*4=4*y=4$, pentru $x$ și $y$ numere reale | **2p** |
| | $1*2*3*\ldots*2016=((1*2*3)*4)*(5*\ldots*2016)=4*(5*\ldots*2016)=4$ | **3p** |
| **c)** | $(a-4)(b-4)(c-4)=62$, unde $a$, $b$ și $c$ sunt numere naturale și $a<b<c$ | **1p** |
| | $\begin{cases}a-4=-2\\b-4=-1\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=35\end{cases}$ | **2p** |
| | $\begin{cases}a-4=1\\b-4=2\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=6\\c=35\end{cases}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)}=0$ | **3p** |
| | Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$ | **2p** |
| **b)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=0$ | **3p** |
| | Coordonatele punctului sunt $x=-\frac{1}{2}$ și $y=-4$ | **2p** |
| **c)** | $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{e}$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int_2^4\frac{1}{\ln x}f(x)dx=\int_2^4\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}dx=\int_2^4\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_2^4=$ | **3p** |
| | $=\ln 2$ | **2p** |
| **b)** | $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=-\frac{1}{x}\ln x\Big\vert_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=$ | **3p** |
| | $=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big\vert_1^e=1-\frac{2}{e}$ | **2p** |
| **c)** | Cum $x\in[1,e]$, obținem $0\le\ln x\le 1$, deci $0\le\frac{\ln x}{x^{n+1}}\le\frac{1}{x^{n+1}}$, pentru orice număr natural $n$ | **2p** |
| | $0\le\int_1^e\frac{\ln x}{x^{n+1}}dx\le\int_1^e\frac{1}{x^{n+1}}dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)$ și cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$ | **3p** |

**Examenul de bacalaureat național 2016**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Clasa a XII-a**

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Determinați numerele reale $a$ și $b$, știind că $(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$, unde $i^2=-1$. |
| **5p** | **2.** Determinaţi numerele reale $m$, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ are valoarea minimă egală cu $-3$. |
| **5p** | **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x=\log_x 3$. |
| **5p** | **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre pătrate perfecte. |
| **5p** | **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1,a)$, $B(0,-3)$ și $C(1,1)$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, știind că $AB+BC=AC$. |
| **5p** | **6.** Determinați $a\in(0,\pi)$, știind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2=2$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ m & m & 1\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}$, unde $m$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Calculați $\det(A(1))$. |
| **5p** | **b)** Determinați valorile reale ale lui $m$, pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă. |
| **5p** | **c)** Rezolvați ecuația matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. |
| | **2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale $x$ și $y$. |
| **5p** | **b)** Calculați $1*2*3*\ldots*2016$. |
| **5p** | **c)** Determinaţi numerele naturale $a$, $b$ și $c$, știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. |
| **5p** | **a)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **b)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției $f$, în care tangenta la graficul funcției $f$ este paralelă cu axa absciselor. |
| **5p** | **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^n$. |

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

**5p** **a)** Calculaţi $\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = 1-\frac{2}{e}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}dx = 0$.

**Examenul de bacalaureat național 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**Clasa a XI-a**
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\log_{2016} 63 + \log_{2016} 32 + \sqrt{0,0625} = \log_{2016} 2016 + 0,25 =$ | **3p** |
| | $= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ | **2p** |
| **2.** | $x_1 + x_2 = 3m - 4$, $x_1 x_2 = m - 3$ | **2p** |
| | $3m - 4 = 2m - 6 \Leftrightarrow m = -2$ | **3p** |
| **3.** | $2^x\left(2 + 2^x - 4^x\right) = 0 \Leftrightarrow 2^x\left(2 - 2^x\right)\left(1 + 2^x\right) = 0$ | **3p** |
| | Deoarece $2^x > 0$, soluția ecuației este $x = 1$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ are 10 elemente, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 10 | **1p** |
| | 1 este singurul element al mulțimii $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ care verifică relaţia $f(n) = 0$, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 1 | **2p** |
| | $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{10}$ | **2p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ | **2p** |
| | $BC = 18$ | **3p** |
| **6.** | $1 + 2\sin a \cos a = 1 + 2\sin b \cos b \Rightarrow \sin 2a = \sin 2b$ | **2p** |
| | Cum $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a \neq b$, obținem $2a = \pi - 2b$, adică $a + b = \frac{\pi}{2}$, deci $\sin(a + b) = 1$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\Delta(-1, 0) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 - 3 - 0 =$ | **3p** |
| | $= -5$ | **2p** |
| **b)** | $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x - y & 3 - y & y \\ x^2 - y^2 & 2 - y^2 & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x - y)\begin{vmatrix} 1 & 3 - y \\ x + y & 2 - y^2 \end{vmatrix} =$ | **2p** |
| | $= (x - y)\left(2 - y^2 - 3x + xy - 3y + y^2\right) = (x - y)(xy - 3x - 3y + 2)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **3p** |
| **c)** | $xy - 3x - 3y + 2 = -8 \Leftrightarrow (x - 3)(y - 3) = -1$ | **3p** |
| | Cum $x$ și $y$ sunt numere întregi distincte, obținem $x = 4,\ y = 2$ sau $x = 2,\ y = 4$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $A(1)-A(0)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=$ | **2p** |
| | $=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ | **3p** |
| **b)** | $\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ | **2p** |
| | Inversa matricei $A(1)$ este matricea $\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ | **3p** |
| **c)** | $\begin{pmatrix}1&2^{n+1}&2\cdot 3^n+2^{2n}\\0&1&2^{n+1}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^p&3^p\\0&1&2^p\\0&0&1\end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $2^{n+1}=2^p \Leftrightarrow n+1=p$ | **1p** |
| | $2\cdot 3^n+2^{2n}=3^{n+1} \Leftrightarrow 2^{2n}=3^n$, deci $n=0$ și $p=1$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\ln 2$ | **3p** |
| | Dreapta de ecuație $y=\ln 2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ | **2p** |
| **b)** | $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{2n+3}{n+1}-\ln\frac{2n+1}{n}=\ln\frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1}<\ln 1$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 1$ | **3p** |
| | $x_{n+1}-x_n<0$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 1$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător | **2p** |
| **c)** | $x_n\leq x_1=\ln 3$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 1$ | **2p** |
| | $x_n=\ln\frac{2n+1}{n}=\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)>\ln 2$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 1$ | **3p** |
| **2.a)** | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-8x+7}{x^2-4x+3}=$ | **2p** |
| | $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=1$ | **3p** |
| **b)** | $f$ este continuă în $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=f(1)$ | **1p** |
| | $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\frac{x-7}{x-3}=3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\left(\sqrt{x^2+4x-4}+a\right)=1+a$, $f(1)=1+a$ | **3p** |
| | $3=1+a \Leftrightarrow a=2$ | **1p** |
| **c)** | $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\frac{\ln\sqrt{x^2+4x-4}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\ln\left(x^2+4x-4\right)^{\frac{1}{2(x-1)}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\ln\left(\left(1+x^2+4x-5\right)^{\frac{1}{x^2+4x-5}}\right)^{\frac{(x-1)(x+5)}{2(x-1)}}=$ | **3p** |
| | $=\ln e^3=3$ | **2p** |

# Examenul de bacalaureat național 2016
## Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*
## Clasa a XI-a

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că $\log_{2016} 63 + \log_{2016} 32 + \sqrt{0,0625} = \frac{5}{4}$.

**5p** **2.** Determinați numărul real $m$, pentru care soluțiile ecuației $x^2 - (3m-4)x + m - 3 = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 2^x + 4^x - 8^x = 0$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $f(n) = 0$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(n) = n^3 + 3n - 4$.

**5p** **5.** Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB = AC = 6\sqrt{3}$ și $m(\sphericalangle A) = 120^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

**5p** **6.** Arătați că $\sin(a+b) = 1$, știind că $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a \neq b$ și $\sin a + \cos a = \sin b + \cos b$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x & 3 & y \\ x^2 & 2 & y^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde $x$ și $y$ sunt numere reale.

**5p** **a)** Calculați $\Delta(-1, 0)$.

**5p** **b)** Demonstrați că $\Delta(x,y) = (x-y)(xy - 3x - 3y + 2)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Determinați numerele întregi distincte $x$ și $y$, știind că $\frac{1}{y-x}\Delta(x,y) = 8$.

**2.** Se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $n$ este număr natural.

**5p** **a)** Calculați $A(1) - A(0)$.

**5p** **b)** Determinați inversa matricei $A(1)$.

**5p** **c)** Demonstrați că, dacă $A(n) \cdot A(n) = A(p)$, atunci $n = 0$ și $p = 1$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{2x+1}{x}$ și șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = f(n)$.

**5p** **a)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **b)** Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

**5p** **c)** Demonstrați că $\ln 2 < x_n \leq \ln 3$, pentru orice număr natural $n$, $n \geq 1$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-4x+3}, & x<1\\ \sqrt{x^2+4x-4}+a, & x\geq 1\end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$, pentru care funcţia $f$ este continuă în punctul $x=1$.

**5p** **c)** Pentru $a=2$, calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\ln\left(f(x)-2\right)}{x-1}$.

**Examenul de bacalaureat național 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 01**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $r=4-1=3$<br>$a_4=1+3\cdot 3=10$ | **2p**<br>**3p** |
| **2.** | $f(1)=a\Rightarrow 1^2+4=a$<br>$a=5$ | **3p**<br>**2p** |
| **3.** | $3^{2(x-2)}=3^{2-x}\Leftrightarrow 2x-4=2-x$<br>$x=2$ | **3p**<br>**2p** |
| **4.** | Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile<br>Sunt 21 de numere naturale de două cifre care sunt mai mici sau egale cu 30, deci sunt 21 de cazuri favorabile<br>$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{21}{90}=\dfrac{7}{30}$ | **1p**<br>**2p**<br>**2p** |
| **5.** | $y-3=1\cdot(x-0)$<br>$y=x+3$ | **3p**<br>**2p** |
| **6.** | $AD=8$, unde $AD\perp BC$, $D\in BC$<br>$\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{4}{5}$ | **2p**<br>**3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$<br>$=0+1+1-0-0-0=2$ | **2p**<br>**3p** |
| **b)** | $\det(A(m))=\begin{vmatrix}-m&1&1\\1&-m&1\\1&1&-m\end{vmatrix}=(2-m)(m+1)^2$<br>Pentru orice număr real $m$, $m\neq -1$ și $m\neq 2$, obținem $\det(A(m))\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | Pentru $m=2$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1+\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$<br>Cum $x_0+2y_0+3z_0=9\Leftrightarrow 1+\alpha+2(1+\alpha)+3\alpha=9\Leftrightarrow \alpha=1$, soluția sistemului care verifică relația este $(2,2,1)$ | **3p**<br>**2p** |
| **2.a)** | $x*y=-2xy+10x+10y-50+5=$<br>$=-2x(y-5)+10(y-5)+5=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p**<br>**3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $x*5=5*y=5$, pentru $x$ și $y$ numere reale | **2p** |
| | $((1*2*3*4)*5)*6*7*8*9*10=5*(6*7*8*9*10)=5$ | **3p** |
| **c)** | $-2(m-5)(n-5)+5=27 \Leftrightarrow (m-5)(n-5)=-11$ | **2p** |
| | Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem $m=4$, $n=16$ sau $m=16$, $n=4$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=2x-\frac{8}{x}=$ | **2p** |
| | $=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ | **3p** |
| **b)** | Cum $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ | **1p** |
| | $x\in(0,2] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci $f$ este descrescătoare pe $(0,2]$ | **2p** |
| | $x\in[2,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci $f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$ | **2p** |
| **c)** | $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2-8\ln x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{8\ln x}{x^2}\right)=+\infty$ | **2p** |
| | Cum $f(2)<0$, ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte | **3p** |
| **2.a)** | $\int\limits_5^{10}(x-4)f(x)dx=\int\limits_5^{10}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\|_5^{10}=$ | **3p** |
| | $=\ln 10-\ln 5=\ln 2$ | **2p** |
| **b)** | $g(x)=\frac{1}{x-4}$, deci $V=\pi\int\limits_5^6 g^2(x)dx=\pi\int\limits_5^6\frac{1}{(x-4)^2}dx=$ | **2p** |
| | $=\pi\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Big\|_5^6=\frac{\pi}{2}$ | **3p** |
| **c)** | Pentru $n>4$, $\int\limits_n^{n+1} f(x)dx=\int\limits_n^{n+1}\frac{1}{x(x-4)}dx=\frac{1}{4}\int\limits_n^{n+1}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}$ | **2p** |
| | $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int\limits_n^{n+1} f(x)dx\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{4}{n^2-3n-4}\right)^{\frac{n^2-3n-4}{4}}\right)^{\frac{4n^2}{4\left(n^2-3n-4\right)}}=\ln e=1$ | **3p** |

**Examenul de bacalaureat naţional 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 01**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=4$.

**5p** **2.** Determinați numărul real $a$, știind că punctul $A(1,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{x-2}=3^{2-x}$.

**5p** **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctul $A(0,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A$ şi are panta egală cu 1.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul $ABC$, cu $AB=10$, $AC=10$ și $BC=12$. Arătaţi că $\sin B=\frac{4}{5}$.

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 1 & 1\\ 1 & -m & 1\\ 1 & 1 & -m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}-mx+y+z=-1\\ x-my+z=-1\\ x+y-mz=m\end{cases}$, unde $m$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

**5p** **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real $m$, $m\neq -1$ și $m\neq 2$.

**5p** **c)** Pentru $m=2$, determinați soluția $(x_0,y_0,z_0)$ a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=9$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-2xy+10x+10y-45$.

**5p** **a)** Arătați că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.

**5p** **c)** Determinaţi numerele naturale $m$ și $n$, pentru care $m*n=27$.

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are două soluţii reale distincte.

**2.** Se consideră funcţia $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\ln 2$.

**5p** **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x f(x)$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)dx\right)=1$.