EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\left(i\sqrt{2}-1\right)^2+2\left(i\sqrt{2}-1\right)+3=$	**1p**
	$=2i^2-2i\sqrt{2}+1+2i\sqrt{2}-2+3=$	**2p**
	$=0$	**2p**
2.	$f\left(g\left(x\right)\right)=2\left(x^2-a\right)+a=$	**2p**
	$=2x^2-a$	**1p**
	$2x^2-a>0\Leftrightarrow a<0$	**2p**
3.	$\sqrt{\left(x-1\right)^2}=x+1$	**2p**
	$\left\|x-1\right\|=x+1$	**1p**
	$x=0$	**2p**
4.	0, 3, 6, 9, ..., 2010 sunt în progresie aritmetică cu rația 3	**2p**
	Numărul termenilor este 671	**3p**
5.	Mijlocul segmentului $\left[BC\right]$ este $M\left(2,1\right)$	**2p**
	Ecuația medianei este $y=4x-7$	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$	**2p**
	$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	**3p**

SUBIECTUL II **30 de puncte**

1.a)	$\begin{cases}x+y=1\\x+z=-1\\y+z=0\end{cases}$	**2p**
	$S=\left\{\left(0,1,-1\right)\right\}$	**3p**
b)	$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -2 & 1\\-2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$	**3p**
	Rang $A=2$	**1p**
	Sistemul este compatibil, deoarece rang $\overline{A}=2$	**1p**

c)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2a & 1 \\ 2a & 1 & a+1 \end{vmatrix} = -2(2a-1)(a-1)(a+1)$	3p
	$a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm 1, \frac{1}{2} \right\}$	2p
2.a)	$x_1 = 2 + i \Rightarrow x_2 = 2 - i$	1p
	Folosind relațiile lui Viète, obținem $x_3 = 3 - x_1 - x_2 = -1$	2p
	$m = 1,\ n = -5$	2p
b)	Restul este $r = X(m-3) + 1 - n$	3p
	$m = 3$ şi $n = 1$	2p
c)	Presupunând prin absurd că $x_1 \le 0$, rezultă $x_1^3 \le 0,\ -3x_1^2 \le 0,\ mx_1 \le 0,\ -n < 0$	3p
	Adunând cele patru relații se obține $0 = f(x_1) < 0$, contradicție	2p

SUBIECTUL III **30 de puncte**

1.a)	$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$	2p
	$n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x + 2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} + x^2} = 0$	2p
	Asimptota oblică este $y = x$	1p
b)	$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$	1p
	$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}}$	1p
	$\lim\limits_{x\to-2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \infty$	2p
	Deci *f* nu e derivabilă în -2	1p
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3 - 3x^2 + 2)}{\ln x^3} =$	2p
	Finalizare: limita este egală cu 1	3p
2.a)	Cu substituția $\sin x = t$ se obține $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} =$	3p
	$= \operatorname{arctg} t \Big\vert_0^1 = \frac{\pi}{4}$	2p
b)	Dacă funcția *F* este o primitivă a funcției *f*, atunci $F'(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	2p
	Cum $\cos x \in [-1, 1],\ \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $F'(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} \ge 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	2p
	F este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	1p
c)	$f(y) = f(2\pi - y)$	1p

	Cu substituția $x = 2\pi - y$ se obține $I = \int_0^{2\pi} (2\pi - y) f(y) dy =$	**1p**
	$= 2\pi \int_0^{2\pi} f(y) dy - I$	**1p**
	$\int_0^{2\pi} f(y) dy = 0$	**1p**
	Deci $I = 0$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.
- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $i\sqrt{2}-1$ este soluție a ecuației $z^2+2z+3=0$.

5p **2.** Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+a$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x+1}=x+1$.

5p **4.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\left\{1, 3^3, 3^6, 3^9, ..., 3^{2010}\right\}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(-2,5)$ şi $C(6,-3)$. Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii $[BC]$, în triunghiul ABC.

5p **6.** Calculați $\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi a este parametru real.

5p **a)** Rezolvați sistemul pentru $a=0$.
5p **b)** Verificați dacă pentru $a=-1$ sistemul este compatibil.
5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

2. Fie $m,n\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^3-3X^2+mX-n$ care are rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Determinați valorile reale m şi n pentru care $x_1=2+i$.
5p **b)** Determinați valorile reale m şi n pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$ este egal cu 0.
5p **c)** Arătați că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi $m>0$, $n>0$, atunci x_1,x_2,x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică pentru graficul funcției f spre $+\infty$.
5p **b)** Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x=-2$.
5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Calculați $\int_0^{2\pi} x \cdot f(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1+2r=5 \\ a_1+4r=11 \end{cases} \Rightarrow a_1=-1, r=3$	**3p**
	$a_7=a_1+6r=17$, $S_7=56$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-1=x+3$	**2p**
	$x=4$ şi $y=7$	**2p**
	$A(4,7)$	**1p**
3.	$x^2-1=8$	**3p**
	$x=\pm 3$	**2p**
4.	$a+b=150\Rightarrow \frac{b}{4}+b=150\Rightarrow b=120$	**3p**
	$a=30$	**1p**
	$a\cdot b=3600$	**1p**
5.	$AB: \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{2}\Rightarrow x-y+1=0$	**2p**
	$C\in AB\Rightarrow m^2-m-2=0$	**1p**
	$m=-1$ sau $m=2$	**2p**
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=$	**1p**
	$=m^2+1-2m$	**4p**
b)	$\begin{cases} y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y=0 \end{cases}$	**2p**
	$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$	**3p**

c)	$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$	**2p**
	Scăzând ultimele 2 ecuații se obține $0=3 \Rightarrow$ sistem incompatibil	**3p**
2.a)	$(x*y)*z=(x*y-4)(z-4)+4=$	**1p**
	$((x-4)(y-4)+4-4)(z-4)+4=$	**1p**
	$=(x-4)(y-4)(z-4)+4=$	**1p**
	$=(x-4)((y-4)(z-4)+4-4)+4=$	**1p**
	$=(x-4)(y*z-4)+4=$	
	$=x*(y*z)$	**1p**
b)	$\left.\begin{matrix} x>4 \Rightarrow x-4>0 \\ y>4 \Rightarrow y-4>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-4)(y-4)>0$	**3p**
	$(x-4)(y-4)+4>4, \forall x,y>4$	**2p**
c)	$x*4=4*x=4, \forall x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$1*2*3*...*2010=(1*2*3)*4*(5*...*2010)=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$(x^2)'=2x, \left(\frac{2}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2}$	**2p**
	$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$	**3p**
b)	$y-f(2)=f'(2)(x-2)$	**2p**
	$f(2)=5$ şi $f'(2)=\frac{7}{2}$	**2p**
	$y=\frac{7}{2}x-2$	**1p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=-\infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=+\infty$	**4p**
	Dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției	**1p**
2.a)	g derivabilă pe $(0,+\infty)$	**1p**
	$g'(x)=\left(2\sqrt{x}(\ln x-2)\right)'=\frac{2}{2\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\sqrt{x}\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=f(x), \ \forall x \in (0,+\infty)$	**1p**
b)	$\int_1^4 f(x)dx=g(x)\Big\|_1^4=$	**1p**
	$=2\sqrt{x}(\ln x-2)\Big\|_1^4=$	**2p**
	$=8\ln 2-4$	**2p**
c)	$g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$ şi $g'(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int_1^{e^2} 2^{g(x)}g'(x)dx=\frac{2^{g(x)}}{\ln 2}\Big\|_1^{e^2}=$	**3p**
	$=\frac{15}{16\ln 2}$	**2p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ în care $a_3 = 5$ şi $a_5 = 11$. Calculați suma primilor şapte termeni ai progresiei.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + 3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor *f* şi *g*.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$.

5p **4.** Calculați $a \cdot b$ ştiind că $a + b = 150$ şi numărul *a* reprezintă 25% din numărul *b*.

5p **5.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ şi $C(m+1, m^2)$ sunt coliniare.

5p **6.** Calculați $\cos x$, ştiind că $\sin x = \frac{1}{3}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei *A*.

5p **b)** Rezolvați sistemul pentru $m = 0$.

5p **c)** Verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m = 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x-4)(y-4) + 4$.

5p **a)** Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Demonstrați că $x * y \in (4, +\infty)$, oricare ar fi $x, y \in (4, +\infty)$.

5p **c)** Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2010$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul $A(2,5)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ şi $g(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$.

5p **a)** Demonstrați că funcția *g* este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Calculați $\int_1^4 f(x)\,dx$.

5p **c)** Calculați $\int_1^{e^2} 2^{g(x)} \cdot f(x)\,dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\left((1-i)(i-1)\right)^4=(2i)^4=$ $=16$	**3p** **2p**
2.	$f(-x)=\ln\dfrac{3+x}{3-x}=$ $=\ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{3-x}{3+x}=$ $=-f(x)$	**2p** **2p** **1p**
3.	$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$ $x\in(-4,2)$ $(-4;2)\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1,0,1\}$	**2p** **1p** **2p**
4.	25 de numere sunt divizibile cu 4 20 de numere sunt divizibile cu 5 5 numere sunt divizibile cu 4 şi cu 5 Deci 40 de numere sunt divizibile cu 4 sau cu 5	**1p** **1p** **1p** **2p**
5.	Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ}=(a-1)\vec{i}+(b+2)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}+3\vec{j}$ $MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}\Leftrightarrow a-1=2$ şi $b+2=3$ Punctul căutat este $Q(3,\,1)$	**2p** **2p** **1p**
6.	$A_{ABC}=2\sqrt{14}$ $AD=\dfrac{4\sqrt{14}}{5}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL II **30 de puncte**

1.a)	$\det(A)=0$ $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7$ (sau orice alt minor de ordinul 2 nenul), deci rangul matricei A este 2	**3p** **2p**
b)	Minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil nedeterminat De exemplu, luând $z=\alpha$ necunoscută secundară se obține $x=2\alpha-3,\ y=31-3\alpha,\ z=\alpha$	**2p** **3p**
c)	$x=2\alpha-3\geq 0,\ y=31-3\alpha\geq 0,\ z=\alpha\geq 0\Rightarrow$ $\dfrac{3}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{31}{3}$ $\alpha\in\{2,3,4,...,10\}$ Sunt 9 soluții în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
2.a)	$a,b\in\mathbb{Z}_5$ şi card $\mathbb{Z}_5=5$ Deci mulțimea A are 25 de elemente	**2p** **3p**

b)	$\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3}a - b & \hat{3}b + a \\ -a - \hat{3}b & -b + \hat{3}a \end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix} \hat{3}a - b & \hat{3}b + a \\ -a - \hat{3}b & -b + \hat{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ dacă $\hat{3}a = b$ şi $\hat{3}b = -a$	**1p**
	Un exemplu: $M = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$	**2p**
c)	Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ atunci $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & \hat{2}xy \\ -\hat{2}xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \hat{1}$ şi $xy = \hat{0}$	**1p**
	Dacă $x = \hat{0} \Rightarrow y^2 = \hat{4} \Rightarrow y \in \{\hat{2}; \hat{3}\}$; dacă $y = \hat{0} \Rightarrow x^2 = \hat{1} \Rightarrow x \in \{\hat{1}; \hat{4}\}$	**2p**
	Obținem matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$	**2p**

SUBIECTUL III **30 de puncte**

1.a)	$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$	**3p**
	Deci $y = \frac{\pi}{4}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.	**2p**
b)	$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$	**2p**
	$2x^2 + 2x + 1 > 0$ pentru orice x real, deci $f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	**2p**
	Funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, -1)$ şi pe $(-1, +\infty)$	**1p**
c)	$f''(x) = \frac{-2(2x+1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2}, \ x \neq -1$	**2p**
	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$	**1p**
	Din tabelul de variație rezultă că $x = -\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune al funcției f	**2p**
2.a)	$I_n = \int_n^{n+1} \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx = (2x - \ln x) \Big\vert_n^{n+1} = 2 - \ln \frac{n+1}{n}$	**2p**
	$I_{n+1} - I_n = \ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{n+2}{n+1} =$	**1p**
	$= \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \ln \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right) > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este strict crescător	**2p**
b)	$1 < \frac{n+1}{n} \leq 2 < e \Rightarrow 0 < \ln \frac{n+1}{n} < 1$	**2p**
	$1 < 2 - \ln \frac{n+1}{n} < 2$	**2p**
	$1 < I_n < 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit	**1p**
c)	$\lim_{n \to \infty} n(2 - I_n) = \lim_{n \to \infty} n \ln \frac{n+1}{n} =$	**2p**

	$= \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$	**3p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.

5p **2.** Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$ este impară.

5p **3.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

5p **4.** Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ şi $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=6,\ AC=3$ şi $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-8z=-65 \\ 3x+y-3z=22 \\ x+y+z=28 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că rangul matricei A este egal cu 2.

5p **b)** Rezolvați sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul soluțiilor sistemului din mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Determinați numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Arătați că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea A ecuația $X^2=I_2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f.*

5p **b)** Studiați monotonia funcției *f.*

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției *f.*

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx$.

5p **a)** Arătați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

5p **b)** Arătați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2-I_n)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$	2p
	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$	2p
	$\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27} = 0$	1p
2.	$x_V = -\frac{b}{2a} = 1$	2p
	$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 2$	2p
	$V(1,2)$	1p
3.	$3^{x^2-1} = 1$	1p
	$x^2 - 1 = 0$	2p
	$x \in \{-1,1\}$	2p
4.	$A_4^3 =$	2p
	$= 24$	3p
5.	$\vec{w} = 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (\vec{i} + 3\vec{j}) =$	2p
	$= 3\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{w}(3,-5)$	3p
6.	$BC = 5$	2p
	$h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	3p
	$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p
b)	$\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$	1p
	$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	2p

c)	Prin înmulțire la stânga cu A^{-1} se obține $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2009 & 2010\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	2p 2p 1p
2.a)	$f(\hat{0})=\hat{0}$ $f(\hat{1})=\hat{2}$ $f(\hat{0})+f(\hat{1})=\hat{2}$	2p 2p 1p
b)	$f(\hat{0})=\hat{0}, f(\hat{1})=\hat{2}, f(\hat{2})=\hat{0}$ Rădăcinile lui *f* sunt $\hat{0}$ şi $\hat{2}$	3p 2p
c)	$g(\hat{0})=a,\ g(\hat{1})=a, g(\hat{2})=\hat{2}+a$ $g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})=a+a+\hat{2}+a=\hat{2}$ $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})=\hat{2}, \forall a\in\mathbb{Z}_3$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2e^x\right)'=$ $=2xe^x+x^2e^x=\left(2x+x^2\right)e^x$	2p 3p
b)	$f'(x)\le 0, \forall x\in[-2,0]$ f descrescătoare pe $[-2,0]$	2p 3p
c)	*f* descrescătoare pe $[-1,0]\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(-1)$ f crescătoare pe $[0,1]$ şi $x^2\in[0,1]\Rightarrow f(0)\le f\left(x^2\right)\le f(1)$ Prin adunarea celor 2 relații se obține $0\le f(x)+f\left(x^2\right)\le\dfrac{e^2+1}{e}, \forall x\in[-1,0]$	1p 2p 2p
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 xdx=$ $=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_1^3=$ $=4$	2p 2p 1p
b)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=$ $=\pi\int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=$ $=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\right\|_1^2=$ $=\frac{29\pi}{6}$	1p 1p 2p 1p

c)	$\int_1^e f(x)\cdot \ln x dx = \int_1^e x\cdot \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\cdot \ln x dx =$	1p
	$= \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big\|_1^e + \frac{\ln^2 x}{2}\Big\|_1^e =$	2p
	$= \frac{e^2+3}{4}$	2p

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.

5p **4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$.

5p **6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3, AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din *A*.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați A^2-A.

5p **b)** Determinați inversa matricei *A*.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^2+X$, $g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru oricare $a\in\mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția *f* este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le \frac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1,0]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox* a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2\sqrt{6}-\log_2\sqrt{3}=\log_2\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=$ $=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
2.	$f(5)=0$ $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**3p** **2p**
3.	$2^x=y\Rightarrow y^2-y-12=0$ $y_1=-3,\ y_2=4$ $x=2$	**2p** **2p** **1p**
4.	$Card\ A=9$ Numărul submulțimilor cu două elemente este C_9^2 $C_9^2=36$	**2p** **1p** **2p**
5.	$m=6+20\Rightarrow m=26$ Mijlocul lui $[AB]$ este $M\left(\frac{5}{2},15\right)$	**2p** **3p**
6.	$E(30^\circ)=\cos30^\circ+\sin60^\circ=$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

a.	Fie $x,y\in M, x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}$ $x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\Rightarrow x+y\in M$	**2p** **3p**
b.	Fie $x,y\in M, x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}$ $x\cdot y=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd$ $x\cdot y=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\Rightarrow x\cdot y\in M$	**1p** **2p** **2p**
c.	$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ $x\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)=1\Rightarrow x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}\in M$	**2p** **3p**
d.	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}$ $\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2},\quad \frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$ $\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=2+0\cdot\sqrt{2}\in M$	**2p** **2p** **1p**

e.	$(x \circ y) \circ z = x + y + z + 2\sqrt{2}$ $x \circ (y \circ z) = x + y + z + 2\sqrt{2}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
f.	Asociativitatea din e) Element neutru $e = -\sqrt{2} \in M$ Simetricul lui $x \in M$ este $x' = -x - 2\sqrt{2} \in M$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a.	$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4-2 & 4-2 \\ -2+1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	**1p** **4p**
b.	$A(2010) = M + 2010 I_2$ $A(2010) = \begin{pmatrix} 2012 & 2 \\ -1 & 2009 \end{pmatrix}$	**2p** **3p**
c.	$A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 2 \\ -1 & a-1 \end{pmatrix}$ $\det(A(a)) = a^2 + a$ $a \in \{1, -2\}$	**2p** **2p** **1p**
d.	$A^{-1}(1) \cdot A(1) = A(1) \cdot A^{-1}(1) = I_2$ Verificare	**2p** **3p**
e.	$A(a) + (A(a))^t = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1 \\ 1 & 2a-2 \end{pmatrix}$ $\det(A(a) + (A(a))^t) = 4a^2 + 4a - 9$ $4a^2 + 4a - 9 = \text{impar} \neq 0, \forall a \in \mathbb{Z}$	**2p** **2p** **1p**
f.	$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot (A(1))^{-1}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	**2p** **3p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la MATEMATICĂ – Proba E c)

Varianta 9

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_2 \sqrt{6} - \log_2 \sqrt{3}$.
5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$. Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)$.
5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}-2^{x+1}=24$.
5p **4.** Calculați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\le 8\}$.
5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,4)$ şi $B(2,m)$. Ştiind că B aparține dreptei de ecuație $y=3x+20$ determinați coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.
5p **6.** Calculați valoarea expresiei $E(x)=\cos x+\sin 2x$ pentru $x=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea $M=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x\circ y=x+y+\sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $x+y\in M$, oricare ar fi $x,y\in M$.
5p **b)** Arătați că $x\cdot y\in M$, oricare ar fi $x,y\in M$.
5p **c)** Determinați $x\in M$ cu proprietatea că $x\cdot(1+\sqrt{2})^2=1$.
5p **d)** Verificați dacă $\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\in M$.
5p **e)** Arătați că legea „$\circ$” este asociativă pe mulțimea M.
5p **f)** Arătați că legea „$\circ$” determină pe mulțimea M o structură de grup.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Fie matricele $M=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=M+aI_2$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $M^2=M$.
5p **b)** Determinați matricea $A(2010)$.
5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$, pentru care $\det(A(a))=2$.
5p **d)** Arătați că $A^{-1}(1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.
5p **e)** Arătați că pentru oricare $a\in\mathbb{Z}$ matricea $A(a)+\left(A(a)\right)^t$ este inversabilă, unde $\left(A(a)\right)^t$ este transpusa matricei $A(a)$.
5p **f)** Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matricială $X\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)=\log_2\left(9-5\right)=$ $=\log_2 4=2$	**3p** **2p**
2.	$-\dfrac{2}{2m}=2$ $m=-\dfrac{1}{2}$	**3p** **2p**
3.	$3^{1-x^2}=3^{-3}\Rightarrow 1-x^2=-3$ $x^2=4\Rightarrow x\in\{2,-2\}$	**3p** **2p**
4.	$C_6^2=\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=15$ $A_4^2=\dfrac{4!}{(4-2)!}=12$ $C_6^2-A_4^2=3$	**2p** **2p** **1p**
5.	Dacă C este mijlocul lui $(AB)\Rightarrow C(4,3)$ Finalizare: $OC=5$	**2p** **3p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\cos130^\circ+\cos50^\circ=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ m & 0 & 2\end{vmatrix}=$ $=6+m+0+3m+0+2=8+4m$	**3p** **2p**
b)	A inversabilă $\Leftrightarrow\det(A)\neq0\Leftrightarrow 8+4m\neq0$ $m\in\mathbb{R}-\{-2\}$	**3p** **2p**
c)	Pentru $m=-1$ rezultă $\det(A)=4\neq0$ Se obține $x=y=0,\ z=2$	**2p** **3p**
2.a)	$x\circ y=2xy-2x-2y+2+1=$ $=2x(y-1)-2(y-1)+1=2(x-1)(y-1)+1$	**2p** **3p**
b)	$x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2(x-1)(e-1)+1=x,\forall x\in\mathbb{R}$ Finalizare: $e=\dfrac{3}{2}$	**2p** **3p**

c)	Un exemplu este $a=\frac{5}{2}, b=\frac{5}{3}$	**2p**
	$\frac{5}{2}\circ\frac{5}{3}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+1=3\in\mathbb{Z}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{\left(x^2+3\right)'}{2\sqrt{x^2+3}}=$	**3p**
	$=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$	**2p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**1p**
	$f(1)=2$ şi $f'(1)=\frac{1}{2}$	**2p**
	$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	**2p**
c)	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}=1$	**2p**
	$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=$	**1p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$	**1p**
	Dreapta $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$	**1p**
2.a)	$f_1(x)=x\ln x$	**1p**
	$\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=$	**1p**
	$=\ln x\Big\|_e^{e^2}=$	**1p**
	$=1$	**2p**
b)	Fie F o primitivă a funcției f_1. $F''(x)=f_1'(x)=1+\ln x$	**3p**
	$1+\ln x\geq 0, \forall x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow F$ convexă pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$	**2p**
c)	$f_{2009}(x)=x^{2009}\ln x$	**1p**
	$\int_1^e\frac{x^{2009}\ln x}{x^{2010}}dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=$	**1p**
	$=\frac{\ln^2 x}{2}\Big\|_1^e=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+2x-5$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcției *f* este egală cu 2.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{1-x^2}=\frac{1}{27}$.

5p **4.** Calculați $C_6^2-A_4^2$.

5p **5.** În sistemul de coordinate *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ şi $B(6,8)$. Calculați distanța de la punctul *O* la mijlocul segmentului (AB).

5p **6.** Calculați $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ m & 0 & 2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases}x-y-z=-2\\ x+3y-z=-2\\ mx+2z=4\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei *A*.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea *A* este inversabilă.

5p **c)** Rezolvați sistemul pentru $m=-1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **c)** Dați exemplu de două numere $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ pentru care $a\circ b\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul $A(1,2)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n\ln x$.

5p **a)** Calculați $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Demonstrați că primitivele funcției f_1 sunt convexe pe intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^e\frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{48}$	**2p**
	$3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}$	**2p**
	$2\sqrt[3]{6}<3\sqrt[3]{3}$	**1p**
2.	$\|x\|\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \operatorname{Im} f\subset[0,+\infty)$	**2p**
	$x\ge 0\Rightarrow x=f(x)\Rightarrow[0,+\infty)\subset \operatorname{Im} f$	**2p**
	$\operatorname{Im}f=[0,+\infty)$	**1p**
3.	$\Delta=1-4m^2$	**2p**
	Ecuația are două soluții egale $\Leftrightarrow \Delta=0$	**1p**
	$\Delta=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{41}^{k}\sqrt[4]{2^k}=C_{k+1}^{k}2^{\frac{k}{4}}$	**2p**
	$T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 4$ divide k	**1p**
	Sunt 11 termeni raționali	**2p**
5.	$m_{AB}=m_{CD}$	**1p**
	$m_{AB}=-\frac{1}{2}$ şi $m_{CD}=\frac{a+3}{3}$	**2p**
	Finalizare: $a=-\frac{9}{2}$	**2p**
6.	$\sin^3 x+\cos^3 x=1, x\in A$, numai pentru $x\in\left\{0;\ \frac{\pi}{2}\right\}$	**3p**
	$P=\frac{2}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}$	**1p**
	$A^3=aI_3$	**2p**
	$A^{2010}=\left(A^3\right)^{670}=a^{670}I_3$	**2p**

b)	$B_1 = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(B_1) = a(a-1)^2$	**2p**
	$\det(B_1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $a = 1$	**1p**
c)	$B_n = A^{n-1}B_1$	**1p**
	B_n inversabilă $\Leftrightarrow \det(B_n) \neq 0$	**1p**
	$\det B_n = a^n (a-1)^2$	**2p**
	$a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$	**1p**
2.a)	$x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} + m - 6$	**1p**
	Dacă $m = 6$, atunci oricare ar fi $x, y \in M$ rezultă că $x * y \neq \frac{3}{2}$, adică $x * y \in M$	**2p**
	Dacă $m \neq 6$, atunci $0 * \frac{2m-3}{6} = \frac{3}{2}$	**1p**
	Cum $0, \frac{2m-3}{6} \in M$ rezultă $0 * \frac{2m-3}{6} \notin M$, deci $m = 6$	**1p**
b)	Asociativitatea	**1p**
	Justificarea faptului că elementul neutru este 2	**2p**
	Justificarea faptului că pentru $x \in M$, există $x' = \frac{3x-4}{2x-3} \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = 2$	**2p**
c)	Verificarea relației $f(x * y) = f(x) \cdot f(y),\ \forall x, y \in M$	**3p**
	Justificarea faptului că f este bijectivă	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}},\ x \neq \pm\frac{1}{2}$	**2p**
	$f(0) = -2$ şi $f'(0) = 0$	**2p**
	$y + 2 = 0$	**1p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	**3p**
	$y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p**
c)	$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = 1 - \sqrt[3]{2n+1}$	**2p**
	$\lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{-\sqrt[3]{2n+1}} \right]^{\frac{\sqrt[3]{2n}}{-\sqrt[3]{2n+1}}} =$	**1p**
	$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)} =$	**1p**
	$= e^{-1} = \frac{1}{e}$	**1p**
2.a)	$I_1 + I_2 + I_3 = \int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + x + 1} dx =$	**2p**

	$=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}$	**3p**
b)	$0\le x\le 1 \Rightarrow x^n \ge x^{n+1}$	**1p**
	$x^2+x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\frac{x^n}{x^2+x+1}\ge\frac{x^{n+1}}{x^2+x+1},\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow I_n\ge I_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, adică şirul este descrescător	**2p**
c)	$x^2+x+1\ge 1,\ \forall x\ge 0\Rightarrow 0\le\frac{x^n}{x^2+x+1}\le x^n,\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow$	**2p**
	$\Rightarrow 0\le I_n\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Care dintre numerele $2\sqrt[3]{6}$ şi $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$.

5p **3.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2-x+m^2=0$ are două soluții reale egale.

5p **4.** Determinați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{41}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ şi $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele.

5p **6.** Fie mulțimea $A=\left\{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să fie soluție a ecuației $\sin^3 x+\cos^3 x=1$?

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

5p **a)** Arătați că $A^{2010}=a^{670}\cdot I_3$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B_1)=0$.

5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt inversabile.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=2xy-3x-3y+m$, $m\in\mathbb{R}$. Fie mulțimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

5p **a)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*y\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Pentru $m=6$ arătați că $(M,*)$ este grup.

5p **c)** Pentru $m=6$, demonstrați că funcția $f:M\to\mathbb{R}^*$, $f(x)=2x-3$ este un izomorfism între grupurile $(M,*)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$.

5p **a)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n\,dx}{x^2+x+1}$.

5p	**a)** Calculați $I_1 + I_2 + I_3$.
5p	**b)** Arătați că şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **Varianta 6**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-1\le\frac{x+1}{3}\le 1\Rightarrow -3\le x+1\le 3$	**2p**
	$-4\le x\le 2\Rightarrow x\in[-4,2]$	**2p**
	$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$	**1p**
2.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\ f(2)=2\\ f(-1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\ 4a+2b+c=2\\ a-b+c=2\end{cases}$	**3p**
	$\begin{cases}c=0\\ a=1\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^2-x$	**2p**
3.	Condiții $\begin{cases}x+3>0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow x\in(0,+\infty)$	**1p**
	$\log_2\frac{x+3}{x}=2$	**2p**
	$x=1\in(0,+\infty)$	**2p**
4.	$p=\frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$	**1p**
	Cazuri posibile sunt 4	**1p**
	Cazuri favorabile sunt 3	**2p**
	$p=\frac{3}{4}$	**1p**
5.	$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+\vec{i}-\vec{j}=5\vec{i}-\vec{j}$	**3p**
	$C(5,-1)$	**2p**
6.	Din teorema sinusului $\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{AB}{2\sin C}$	**3p**
	$R=\frac{6}{2\cdot\frac{1}{2}}=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$	**3p**
	Calculul determinantului: $\det(A)=1$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ sau	**2p**
	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	Deci $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$	**1p**
c)	Prin înmulțire cu A^{-1} la stânga se obține $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(\hat{1})=\hat{1}^3+\hat{2}\cdot\hat{1}^2=$	**2p**
	$=\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$	**3p**
b)	$f=X^2(X+2)$	**2p**
	Rădăcinile lui f sunt $\hat{0},\hat{0}$ şi $\hat{1}$	**3p**
c)	$\mathbb{Z}_3=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}\Rightarrow a,b,c,d$ pot lua câte trei valori fiecare	**3p**
	Deci G are $3^4=81$ elemente	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}$	**3p**
	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x+1},\ \forall x\in[0,1]$	**2p**
b)	$f'(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}\geq 0,\forall x\in[0,1]$	**2p**
	f este crescătoare pe $[0,1]$	**3p**
c)	$0\leq x\leq 1\Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(1)\Rightarrow$	**2p**
	$1\leq f(x)\leq\dfrac{e}{2}\Rightarrow\dfrac{2}{e}\leq\dfrac{1}{f(x)}\leq 1,\ \forall x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$l_s(1)=l_d(1)=f(1)=2\Rightarrow f$ continuă în 1	**3p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**

b)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,dx=$	**1p**
	$=\pi\int_1^2\left(x^2+3\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{16}{3}\pi$	**1p**
c)	$\int_1^{\sqrt{6}} x\sqrt{x^2+3}\,dx=$	**1p**
	$=\frac{1}{2}\int_4^9\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}\left.t^{\frac{3}{2}}\right\|_4^9=\frac{19}{3}$	**4p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1$.

5p **2.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(-1,2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element *n* din mulțimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n \ge n^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,-1)$, $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului *C* pentru care $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 6$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei *A*.

5p **b)** Verificați dacă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei *A*.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2$ și mulțimea $G = \left\{ g = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului *f*.

5p **c)** Determinați numărul elementelor mulțimii G.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

5p **a)** Demonstrați că $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x+1}$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

5p **b)** Demonstrați că funcția *f* este crescătoare pe $[0,1]$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2}{e} \le \frac{1}{f(x)} \le 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}, & \text{pentru } x\geq 1\\ 2x, & \text{pentru } x<1\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^{\sqrt{6}} x\cdot f(x)\,dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 6

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Numărul de submulțimi C_5^2 $C_5^2 = 10$	**4p** **1p**
2.	Funcția este crescătoare dacă $3m-1>0$ $m \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$	**2p** **3p**
3.	$x_1 + x_2 = \frac{2a+1}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{5}{a}$ Finalizare	**2p** **3p**
4.	Condiții $\frac{3x-2}{x+2} > 0,\ x+2 \neq 0$ $\frac{3x-2}{x+2} = 2$ $x = 6$ care verifică condițiile de existență, deci este soluție a ecuației	**1p** **2p** **2p**
5.	Vectorul de poziție $\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3}$ Rezultă $\overrightarrow{r_G} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$	**2p** **3p**
6.	$m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ Ecuația dreptei este $y = x - 1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

a.	$(x * y) * z = x + y + z + 4$ $x * (y * z) = x + y + z + 4$, finalizare	**2p** **2p** **1p**
b.	$11 \circ 1 = 11 - 22 - 2 + m = m - 13$ $m = 13$	**3p** **2p**
c.	$(x-1) \circ 4 = 4(x-1) - 2(x-1) - 8 + m = 2x - 10 + m$ $(3 * 3) + m = 3 + 3 + 2 + m = m + 8$ $x = 9$	**2p** **2p** **1p**
d.	Din $x \circ 3 = x \Rightarrow 3x - 6 - 2x + m = x \Rightarrow x - 6 + m = x$ $m = 6$	**3p** **2p**
e.	$m = 6 \Rightarrow e = 3$ $x \circ x' = x' \circ x = 3 \Rightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $x' = \frac{3}{2} - x \Rightarrow \frac{2x-3}{x-2} = \frac{3}{2} - x \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$	**1p** **2p** **2p**
f.	$a = 2x + 2,\quad b = 3x + 4,\quad c = 4x + 6$ finalizare	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a.	$C = I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(A) = 0, \det(C) = 1, \det(A) + \det(C) = 1$	**3p**
b.	$\det(C) = 1 \neq 0$	**2p**
	$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
c.	$C - 2A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
	$M = O_3$	**2p**
d.	$I_3 + xA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(I_3 + xA) = 1$	**2p**
e.	$C + C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(C + C^t) = 4 \Rightarrow C + C^t$ este matrice inversabilă	**2p**
f.	$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**2p**
	$A^3 = O_3$	**2p**
	$\left(A^3\right)^{670} = \left(O_3\right)^{670} = O_3$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la MATEMATICĂ – Proba E c)

Varianta 6

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul submulțimilor mulțimii $A=\{1,3,5,7,9\}$, care au două elemente.

5p **2.** Determinați $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3m-1)x+2$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **3.** Arătați că $x_1x_2-5(x_1+x_2)=-10$, unde x_1,x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2-(2a+1)x+5=0$, $a\in\mathbb{R}^*$.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\frac{3x-2}{x+2}=1$.

5p **5.** Determinați vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC ştiind că $\overrightarrow{r_A}=3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=-5\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}$, $\overrightarrow{r_C}=8\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}$.

5p **6.** Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(4,3)$ şi are panta $m=\operatorname{tg}45^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=x+y+2$ şi $x\circ y=xy-2x-2y+m$, $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă pe mulțimea numerelor reale.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $11\circ 1=0$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x-1)\circ 4=(3*3)+m$.

5p **d)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care legea „$\circ$” admite elementul neutru $e=3$.

5p **e)** Pentru $m=6$ determinați elementele $x\in\mathbb{R}$ ale căror simetrice, în raport cu legea „$\circ$”, verifică relația $x'=\frac{3}{2}-x$.

5p **f)** Arătați că numerele reale $a=x*x$, $b=a*x$, $c=b*x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $C=I_3+A$.

5p **a)** Calculați $\det(C)+\det(A)$.

5p **b)** Calculați C^{-1}, unde C^{-1} este inversa matricei C.

5p **c)** Calculați $M=C\cdot\left(C-2A+A^2\right)-I_3$.

5p **d)** Arătați că $\det(I_3+xA)=1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Arătați că matricea $C+C^t$ este inversabilă, unde C^t este transpusa matricei C.

5p **f)** Calculați A^{2010}.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$z^6=2^6\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=-2^6\Rightarrow \operatorname{Re} z^6=-64$	**3p**
2.	$f(512)=\frac{1}{8}$	**2p**
	$(f\circ f)(512)=f\left(\frac{1}{8}\right)=2$	**3p**
3.	Ecuația devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$, cu soluțiile $\sin x=-\frac{1}{2}$ şi $\sin x=1$.	**3p**
	Obținem $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, sau $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.	**2p**
4.	Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M	**3p**
	Acesta este $C_6^3=20$.	**2p**
5.	Punctul $A(0,\ 3)$ se află pe prima dreaptă.	**2p**
	Distanța este $d(A,\ d_2)=\frac{\lvert 2\cdot 0+4\cdot 3-11\rvert}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.	**3p**
6.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$	**3p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1$	**1p**
	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1+2^2=5$	**1p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$	**2p**

	$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$, de unde rezultă concluzia	3p
b)	Observăm că $x=0,\ y=1,\ z=0$ verifică sistemul. Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată.	3p 2p
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$. Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta,\ z=1-\alpha-\beta$. Putem lua $\beta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha})$, cu $4\alpha^2+4\alpha-1\le 0$.	2p 2p 1p
2.a)	a, b, c pot lua fiecare 4 valori Avem $4^3=64$ matrice.	3p 2p
b)	Luăm $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ $\det(A)=\hat{2},\ \det(A^2)=\hat{0}$	3p 2p
c)	$X=\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$ Ecuația devine $a^2=\hat{1}$, $b(a+c)=\hat{0}, c^2=\hat{0}$. Obținem $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}, c\in\{\hat{0},\hat{2}\}, b=\hat{0}$, deci există 4 soluții	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow m=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$, deci avem asimptota oblică $y=x$.	2p 3p
b)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	3p 2p
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(x)<0, \forall x\in(-\infty,-1)$, deci *f* este concavă pe $(-\infty,-1)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^{\pi}\lvert\sin 2x\rvert dx=\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2x dx$ $I=\frac{-\cos 2x}{2}\Big\vert_0^{\pi/2}+\frac{\cos 2x}{2}\Big\vert_{\pi/2}^{\pi}$ $I=2$	2p 2p 1p
b)	$I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx\le\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx$ $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx=\ln x\vert_{\pi}^{2\pi}=\ln 2$	3p 2p
c)	$I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt$	1p

	$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt + \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt + \ldots + \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt$	**2p**
	$I_n \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \lvert \sin t \rvert dt + \frac{1}{\pi(n+2)} \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \lvert \sin t \rvert dt + \ldots + \frac{1}{2n\pi} \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \lvert \sin t \rvert dt$	**1p**
	Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \lvert \sin t \rvert dt = 2, \forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă concluzia.	**1p**

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculați $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$.

5p **5.** Calculați distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Calculați produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Rezolvați sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, arătați că sistemul are o infinitate de soluții (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Determinați numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Dați un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Determinați numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ și numerele $I_n=\int_\pi^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Calculați $\int_0^\pi f_2(x)dx$.

5p **b)** Arătați că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Arătați că $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\right)$.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$ $a_{10} = 21$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 120$	**2p** **1p** **2p**
2.	$A(m,-1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = -1$ $m = 2$ sau $m = 1$	**3p** **2p**
3.	$2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ $2x + 3 = 25 \Rightarrow x = 11 \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$	**1p** **4p**
4.	$C_5^3 =$ $= 10$	**3p** **2p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow M(0,0)$ Scrierea formulei distanței dintre 2 puncte $CM = \sqrt{5}$	**2p** **1p** **2p**
6.	Aria $\Delta ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$ $= \frac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(I_3 + B) = 1$	**2p** **3p**

b)	$A^2=\begin{pmatrix}9&6&7\\0&9&6\\0&0&9\end{pmatrix}$	**2p**
	$f(A)=A^2-3A+I_3=$	**1p**
	$=I_3+B$	**2p**
c)	$\left(f(A)\right)^3=\left(I_3+B\right)^3=I_3+3B+3B^2+B^3$	**2p**
	$B^3=O_3$	**2p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	$(x-3)^2-2(x-3)=0$	**2p**
	$(x-3)(x-5)=0$	**1p**
	$x=3$ sau $x=5$	**2p**
b)	$(x-3)(a-3)+3=3$	**2p**
	$a=3\in \mathbf{Z}$	**3p**
c)	$\begin{cases}x+y=6\\(x-y-3)(-2)=2\end{cases}$	**3p**
	$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\left(x^3\right)'=3x^2$	**2p**
	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	**3p**
	$f'(1)=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=-1$	**1p**
	Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și pe $[1;+\infty)$	**2p**
	și f descrescătoare pe $[-1;0)$ și pe $(0;1]$	**2p**
2.a)	$V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)dx=$	**1p**
	$=\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big\vert_0^1=$	**2p**
	$=\frac{7\pi}{15}$.	**2p**
b)	$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{t}\,dt=$	**3p**

	$= \left.\frac{t\sqrt{t}}{3}\right\|_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$		**2p**
c)	$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{3}\cdot(-2x)}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$		**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=3$ şi $a_3=7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+3)=2$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Calculați distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=8$, $AC=8$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Calculați $\det(I_3+B)$.

5p **b)** Demonstrați că $f(A)=I_3+B$.

5p **c)** Arătați că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=x*x$.

5p **b)** Determinați numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x), x \in \mathbb{R}^*$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\, dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1)	$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$ Finalizare: $P=\frac{2}{5}$	**2p** **3p**
2)	$1+2+3+\ldots+40=\frac{40\cdot 41}{2}=$ $=820$	**3p** **2p**
3)	$\Delta=16m^2-4$ $m\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$	**2p** **3p**
4)	Scrierea formulei $d(A,d)=\frac{\lvert 1+2+1\rvert}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$	**3p** **2p**
5)	$7^x=y$; $y^2-8y+7=0$ $y_1=1\Rightarrow x_1=0$ $y_2=7\Rightarrow x_2=1$	**1p** **2p** **2p**
6)	$\cos135^\circ=-\cos45^\circ$; $\sin135^\circ=\sin45^\circ$ Finalizare: $\frac{1}{2}\cos135^\circ+3\sin135^\circ=\frac{5\sqrt{2}}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

a)	Din definiția elementului neutru şi cum legea este comutativă, avem $x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ $(e+2)x+2e+a=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ de unde $\begin{cases} e+2=1 \\ 2e+a=0 \end{cases}$ Deci $a=2$ şi $e=-1$.	**1p** **2p** **2p**
b)	$(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$ $(x*y)*z=xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+6$ $x*(y*z)=xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+6$	**1p** **2p** **2p**
c)	$x*y=(x+2)(y+2)-2\Rightarrow(x+y+2)*z=(x+y+4)(z+2)-2$	**2p**

	$(x*z)+(y*z)+2=(x+2)(z+2)-2+(y+2)(z+2)-2+2=$ $=(x+y+4)(z+2)-2=(x+y+2)*z$	2p 1p
d)	Din $x*x'=(x+2)(x'+2)-2=-1$, rezultă $x'=-2+\dfrac{1}{x+2}\in\mathbb{Z}$ pentru $x\in\mathbb{Z}$ $(x+2)\mid 1$, adică $(x+2)\in\{-1,1\}$ $M=\{-3,-1\}$	2p 2p 1p
e)	Din $x*y=3$ se obține $(x+2)(y+2)=5$ Finalizare: $(x;y)\in\{(-1;3),(-3;-7),(3,-1),(-7;-3)\}$	1p 4p
f)	$(-3)*(-3)=a-3=(-1)*(-1)\in\{-3,-1\}\Rightarrow a\in\{0,2\}$ $(-3)*(-1)=(-1)*(-3)=a-5\in\{-3,-1\}\Rightarrow a\in\{2,4\}$ $a=2$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

a)	$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}$ Finalizare: $D=2$	2p 3p
b)	$a=b\Rightarrow D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&a&a^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$ Finalizare: $D=0$	2p 3p
c)	$D=a^2-5a+6$ $D=2\Rightarrow a^2-5a+4=0$ $a=1$ sau $a=4$	2p 1p 2p
d)	Scăzând prima linie din celelalte două obținem $D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}$ $D=(b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&1&c+a\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$	2p 3p
e)	$D=(b-a)(c-a)(c-b)=0\Rightarrow b-a=0$ sau $c-a=0$ sau $c-b=0$ Finalizare	3p 2p
f)	Dintre cele 3 numere întregi *a*, *b*, *c*, cel puțin două au aceeaşi paritate, deci diferența lor este număr par. Dar cum $D=(b-a)(c-a)(c-b)$ rezultă că D este număr par	3p 2p

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 4x + 3 = 0.$

5p **2.** Calculați suma $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 40.$

5p **3.** Determinați valorile parametrului real m astfel încât ecuația $x^2 - 4mx + 1 = 0$ să aibă soluții reale.

5p **4.** Calculați distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta $d : x + y + 1 = 0.$

5p **5.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$

5p **6.** Calculați $\frac{1}{2}\cos 135^\circ + 3\sin 135^\circ.$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x * y = xy + 2x + 2y + a$, cu $a \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Determinați $a \in \mathbb{Z}$ ştiind că legea ”$*$” admite element neutru.

5p **b)** Pentru $a = 2$ demonstrați că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Dacă $a = 2$ arătați că $(x + y + 2) * z = (x * z) + (y * z) + 2$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

5p **d)** Pentru $a = 2$ determinați mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{există } x' \in \mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x * x' = -1\}$.

5p **e)** Pentru $a = 2$ determinați $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * y = 3$.

5p **f)** Fie mulțimea $H = \{-3, -1\}$. Determinați $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât, pentru oricare $x, y \in H$, să rezulte că $x * y \in H$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Fie numerele reale a, b, c şi determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a = 1,\ b = 2$ şi $c = 3$, calculați determinantul D.

5p **b)** Arătați că dacă $a = b$, atunci $D = 0$.

5p **c)** Pentru $b = 2$ şi $c = 3$, determinați $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $D = 2$.

5p **d)** Demonstrați că $D = (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$.

5p **e)** Arătați că dacă $D = 0$, atunci cel puțin două dintre numerele $a,\ b$ şi c sunt egale.

5p **f)** Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci D este număr întreg par.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\left(i\sqrt{2}-1\right)^2+2\left(i\sqrt{2}-1\right)+3=$	**1p**
	$=2i^2-2i\sqrt{2}+1+2i\sqrt{2}-2+3=$	**2p**
	$=0$	**2p**
2.	$f\left(g\left(x\right)\right)=2\left(x^2-a\right)+a=$	**2p**
	$=2x^2-a$	**1p**
	$2x^2-a>0 \Leftrightarrow a<0$	**2p**
3.	$\sqrt{\left(x-1\right)^2}=x+1$	**2p**
	$\lvert x-1\rvert=x+1$	**1p**
	$x=0$	**2p**
4.	0, 3, 6, 9, ..., 2010 sunt în progresie aritmetică cu rația 3	**2p**
	Numărul termenilor este 671	**3p**
5.	Mijlocul segmentului $[BC]$ este $M\left(2,1\right)$	**2p**
	Ecuația medianei este $y=4x-7$	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$	**2p**
	$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	**3p**

SUBIECTUL II **30 de puncte**

1.a)	$\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=-1 \\ y+z=0 \end{cases}$	**2p**
	$S=\left\{\left(0,1,-1\right)\right\}$	**3p**
b)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$	**3p**
	Rang $A=2$	**1p**
	Sistemul este compatibil, deoarece rang $\overline{A}=2$	**1p**

c)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2a & 1 \\ 2a & 1 & a+1 \end{vmatrix} = -2(2a-1)(a-1)(a+1)$	**3p**
	$a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm 1, \frac{1}{2} \right\}$	**2p**
2.a)	$x_1 = 2 + i \Rightarrow x_2 = 2 - i$	**1p**
	Folosind relațiile lui Viète, obținem $x_3 = 3 - x_1 - x_2 = -1$	**2p**
	$m = 1,\ n = -5$	**2p**
b)	Restul este $r = X(m-3) + 1 - n$	**3p**
	$m = 3$ şi $n = 1$	**2p**
c)	Presupunând prin absurd că $x_1 \le 0$, rezultă $x_1^3 \le 0,\ -3x_1^2 \le 0,\ mx_1 \le 0,\ -n < 0$	**3p**
	Adunând cele patru relații se obține $0 = f(x_1) < 0,$ contradicție	**2p**

SUBIECTUL III **30 de puncte**

1.a)	$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$	**2p**
	$n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x + 2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} + x^2} = 0$	**2p**
	Asimptota oblică este $y = x$	**1p**
b)	$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 (x+2)$	**1p**
	$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}}$	**1p**
	$\lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \infty$	**2p**
	Deci *f* nu e derivabilă în -2	**1p**
c)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x^3 - 3x^2 + 2\right)}{\ln x^3} =$	**2p**
	Finalizare: limita este egală cu 1	**3p**
2.a)	Cu substituția $\sin x = t$ se obține $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} =$	**3p**
	$= \operatorname{arctg} t \Big\vert_0^1 = \frac{\pi}{4}$	**2p**
b)	Dacă funcția *F* este o primitivă a funcției *f*, atunci $F'(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x},\ \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	**2p**
	Cum $\cos x \in [-1, 1],\ \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $F'(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} \ge 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	**2p**
	F este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	**1p**
c)	$f(y) = f(2\pi - y)$	**1p**

	Cu substituția $x = 2\pi - y$ se obține $I = \int_0^{2\pi} (2\pi - y) f(y)\,dy =$	**1p**
	$= 2\pi \int_0^{2\pi} f(y)\,dy - I$	**1p**
	$\int_0^{2\pi} f(y)\,dy = 0$	**1p**
	Deci $I = 0$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $i\sqrt{2}-1$ este soluție a ecuației $z^2+2z+3=0$.

5p **2.** Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+a$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x+1}=x+1$.

5p **4.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{1, 3^3, 3^6, 3^9, ..., 3^{2010}\}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(-2,5)$ şi $C(6,-3)$. Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii $[BC]$, în triunghiul ABC.

5p **6.** Calculați $\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi a este parametru real.

5p **a)** Rezolvați sistemul pentru $a=0$.
5p **b)** Verificați dacă pentru $a=-1$ sistemul este compatibil.
5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

2. Fie $m, n\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^3-3X^2+mX-n$ care are rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Determinați valorile reale m şi n pentru care $x_1=2+i$.
5p **b)** Determinați valorile reale m şi n pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$ este egal cu 0.
5p **c)** Arătați că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi $m>0$, $n>0$, atunci x_1,x_2,x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică pentru graficul funcției f spre $+\infty$.
5p **b)** Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x=-2$.
5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Calculați $\int_0^{2\pi} x \cdot f(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1+2r=5 \\ a_1+4r=11 \end{cases} \Rightarrow a_1=-1, r=3$	**3p**
	$a_7=a_1+6r=17$, $S_7=56$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-1=x+3$	**2p**
	$x=4$ şi $y=7$	**2p**
	$A(4,7)$	**1p**
3.	$x^2-1=8$	**3p**
	$x=\pm 3$	**2p**
4.	$a+b=150\Rightarrow \frac{b}{4}+b=150\Rightarrow b=120$	**3p**
	$a=30$	**1p**
	$a\cdot b=3600$	**1p**
5.	$AB:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{2}\Rightarrow x-y+1=0$	**2p**
	$C\in AB\Rightarrow m^2-m-2=0$	**1p**
	$m=-1$ sau $m=2$	**2p**
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=$	**1p**
	$=m^2+1-2m$	**4p**
b)	$\begin{cases} y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y=0 \end{cases}$	**2p**
	$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$	**3p**

c)	$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ Scăzând ultimele 2 ecuații se obține $0=3 \Rightarrow$ sistem incompatibil	**2p** **3p**
2.a)	$(x*y)*z=(x*y-4)(z-4)+4=$ $((x-4)(y-4)+4-4)(z-4)+4=$ $=(x-4)(y-4)(z-4)+4=$ $=(x-4)((y-4)(z-4)+4-4)+4=$ $=(x-4)(y*z-4)+4=$ $=x*(y*z)$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
b)	$\left.\begin{array}{l} x>4 \Rightarrow x-4>0 \\ y>4 \Rightarrow y-4>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-4)(y-4)>0$ $(x-4)(y-4)+4>4, \forall x,y>4$	**3p** **2p**
c)	$x*4=4*x=4, \forall x \in \mathbb{R}$ $1*2*3*...*2010=(1*2*3)*4*(5*...*2010)=4$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$(x^2)'=2x, \left(\frac{2}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2}$ $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$	**2p** **3p**
b)	$y-f(2)=f'(2)(x-2)$ $f(2)=5$ şi $f'(2)=\frac{7}{2}$ $y=\frac{7}{2}x-2$	**2p** **2p** **1p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=-\infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=+\infty$ Dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției	**4p** **1p**
2.a)	g derivabilă pe $(0,+\infty)$ $g'(x)=\left(2\sqrt{x}(\ln x-2)\right)'=\frac{2}{2\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\sqrt{x}\frac{1}{x}=$ $=f(x), \forall x\in(0,+\infty)$	**1p** **3p** **1p**
b)	$\int_1^4 f(x)dx=g(x)\Big\|_1^4=$ $=2\sqrt{x}(\ln x-2)\Big\|_1^4=$ $=8\ln 2-4$	**1p** **2p** **2p**
c)	$g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$ şi $g'(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int_1^{e^2} 2^{g(x)}g'(x)dx=\frac{2^{g(x)}}{\ln 2}\Big\|_1^{e^2}=$ $=\frac{15}{16\ln 2}$	**3p** **2p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_3=5$ şi $a_5=11$. Calculați suma primilor şapte termeni ai progresiei.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g(x)=x+3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor *f* şi *g*.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculați $a\cdot b$ ştiind că $a+b=150$ şi numărul *a* reprezintă 25% din numărul *b*.

5p **5.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ şi $C\left(m+1,m^2\right)$ sunt coliniare.

5p **6.** Calculați $\cos x$, ştiind că $\sin x=\frac{1}{3}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y=-1\\ x+y+z=3\\ x+y+mz=0\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei *A*.
5p **b)** Rezolvați sistemul pentru $m=0$.
5p **c)** Verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=(x-4)(y-4)+4$.

5p **a)** Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.
5p **b)** Demonstrați că $x*y\in(4,+\infty)$, oricare ar fi $x,y\in(4,+\infty)$.
5p **c)** Calculați $1*2*3*...*2010$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.
5p **b)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul $A(2,5)$.
5p **c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ şi $g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$.

5p **a)** Demonstrați că funcția *g* este o primitivă a funcției *f*.
5p **b)** Calculați $\int_1^4 f(x)dx$.
5p **c)** Calculați $\int_1^{e^2} 2^{g(x)}\cdot f(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\left((1-i)(i-1)\right)^4=(2i)^4=$	**3p**
	$=16$	**2p**
2.	$f(-x)=\ln\dfrac{3+x}{3-x}=$	**2p**
	$=\ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{3-x}{3+x}=$	**2p**
	$=-f(x)$	**1p**
3.	$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$	**2p**
	$x\in(-4,2)$	**1p**
	$(-4;2)\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1,0,1\}$	**2p**
4.	25 de numere sunt divizibile cu 4	**1p**
	20 de numere sunt divizibile cu 5	**1p**
	5 numere sunt divizibile cu 4 şi cu 5	**1p**
	Deci 40 de numere sunt divizibile cu 4 sau cu 5	**2p**
5.	Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ}=(a-1)\vec{i}+(b+2)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}+3\vec{j}$	**2p**
	$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a-1=2$ şi $b+2=3$	**2p**
	Punctul căutat este $Q(3,\ 1)$	**1p**
6.	$A_{ABC}=2\sqrt{14}$	**3p**
	$AD=\dfrac{4\sqrt{14}}{5}$	**2p**

SUBIECTUL II **30 de puncte**

1.a)	$\det(A)=0$	**3p**
	$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7$ (sau orice alt minor de ordinul 2 nenul), deci rangul matricei A este 2	**2p**
b)	Minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil nedeterminat	**2p**
	De exemplu, luând $z=\alpha$ necunoscută secundară se obține $x=2\alpha-3,\ y=31-3\alpha,\ z=\alpha$	**3p**
c)	$x=2\alpha-3\geq 0,\ y=31-3\alpha\geq 0,\ z=\alpha\geq 0\Rightarrow$	**1p**
	$\dfrac{3}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{31}{3}$	**2p**
	$\alpha\in\{2,3,4,...,10\}$	**1p**
	Sunt 9 soluții în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	**1p**
2.a)	$a,b\in\mathbb{Z}_5$ şi card $\mathbb{Z}_5=5$	**2p**
	Deci mulțimea A are 25 de elemente	**3p**

b)	$\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3}a-b & \hat{3}b+a \\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a \end{pmatrix}$	2p
	$\begin{pmatrix} \hat{3}a-b & \hat{3}b+a \\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ dacă $\hat{3}a = b$ şi $\hat{3}b = -a$	1p
	Un exemplu: $M = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$	2p
c)	Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ atunci $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2-y^2 & \hat{2}xy \\ -\hat{2}xy & x^2-y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^2-y^2=\hat{1}$ şi $xy=\hat{0}$	1p
	Dacă $x=\hat{0} \Rightarrow y^2=\hat{4} \Rightarrow y \in \{\hat{2};\hat{3}\}$; dacă $y=\hat{0} \Rightarrow x^2=\hat{1} \Rightarrow x \in \{\hat{1};\hat{4}\}$	2p
	Obținem matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$	2p

SUBIECTUL III **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$	3p
	Deci $y = \frac{\pi}{4}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.	2p
b)	$f'(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$	2p
	$2x^2+2x+1>0$ pentru orice x real, deci $f'(x)>0,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	2p
	Funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(-1,+\infty)$	1p
c)	$f''(x) = \frac{-2(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2},\ x \neq -1$	2p
	$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$	1p
	Din tabelul de variație rezultă că $x=-\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune al funcției f	2p
2.a)	$I_n = \int_n^{n+1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx = (2x-\ln x)\Big\vert_n^{n+1} = 2-\ln\frac{n+1}{n}$	2p
	$I_{n+1}-I_n = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n+2}{n+1} =$	1p
	$=\ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este strict crescător	2p
b)	$1 < \frac{n+1}{n} \le 2 < e \Rightarrow 0 < \ln\frac{n+1}{n} < 1$	2p
	$1 < 2-\ln\frac{n+1}{n} < 2$	2p
	$1 < I_n < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit	1p
c)	$\lim\limits_{n\to\infty} n(2-I_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n} =$	2p

	$= \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$	**3p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.

5p **2.** Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$ este impară.

5p **3.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

5p **4.** Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ şi $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=6,\ AC=3$ şi $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-8z=-65 \\ 3x+y-3z=22 \\ x+y+z=28 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că rangul matricei A este egal cu 2.

5p **b)** Rezolvați sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul soluțiilor sistemului din mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Determinați numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Arătați că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea A ecuația $X^2=I_2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Studiați monotonia funcției *f*.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției *f*.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx$.

5p **a)** Arătați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

5p **b)** Arătați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2-I_n)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$	2p
	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$	2p
	$\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27} = 0$	1p
2.	$x_V = -\frac{b}{2a} = 1$	2p
	$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 2$	2p
	$V(1,2)$	1p
3.	$3^{x^2-1} = 1$	1p
	$x^2 - 1 = 0$	2p
	$x \in \{-1,1\}$	2p
4.	$A_4^3 =$	2p
	$= 24$	3p
5.	$\vec{w} = 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (\vec{i} + 3\vec{j}) =$	2p
	$= 3\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{w}(3,-5)$	3p
6.	$BC = 5$	2p
	$h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	3p
	$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p
b)	$\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$	1p
	$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	2p

c)	Prin înmulțire la stânga cu A^{-1} se obține $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2009 & 2010\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	2p 2p 1p
2.a)	$f(\hat{0})=\hat{0}$ $f(\hat{1})=\hat{2}$ $f(\hat{0})+f(\hat{1})=\hat{2}$	2p 2p 1p
b)	$f(\hat{0})=\hat{0}, f(\hat{1})=\hat{2}, f(\hat{2})=\hat{0}$ Rădăcinile lui *f* sunt $\hat{0}$ şi $\hat{2}$	3p 2p
c)	$g(\hat{0})=a,\ g(\hat{1})=a, g(\hat{2})=\hat{2}+a$ $g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})=a+a+\hat{2}+a=\hat{2}$ $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})=\hat{2}, \forall a\in\mathbb{Z}_3$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\left(x^2e^x\right)'=$ $=2xe^x+x^2e^x=\left(2x+x^2\right)e^x$	2p 3p
b)	$f'(x)\le 0, \forall x\in[-2,0]$ f descrescătoare pe $[-2,0]$	2p 3p
c)	*f* descrescătoare pe $[-1,0]\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(-1)$ f crescătoare pe $[0,1]$ şi $x^2\in[0,1]\Rightarrow f(0)\le f\left(x^2\right)\le f(1)$ Prin adunarea celor 2 relații se obține $0\le f(x)+f\left(x^2\right)\le\frac{e^2+1}{e}, \forall x\in[-1,0]$	1p 2p 2p
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 xdx=$ $=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_1^3=$ $=4$	2p 2p 1p
b)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=$ $=\pi\int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=$ $=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\right\|_1^2=$ $=\frac{29\pi}{6}$	1p 1p 2p 1p

c)	$\int_1^e f(x)\cdot \ln x dx = \int_1^e x\cdot \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\cdot \ln x dx =$	1p
	$= \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big\|_1^e + \frac{\ln^2 x}{2}\Big\|_1^e =$	2p
	$= \frac{e^2+3}{4}$	2p

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.

5p **4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$.

5p **6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3,\ AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din *A*.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați A^2-A.

5p **b)** Determinați inversa matricei *A*.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010&2010\\2009&2010\end{pmatrix},\ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X],\ f=X^2+X,\ g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru oricare $a\in\mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2\cdot e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția *f* este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le \frac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1,0]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox* a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\sqrt{6}-\log_2\sqrt{3}=\log_2\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=$	**2p**
	$=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$	**3p**
2.	$f(5)=0$	**3p**
	$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**2p**
3.	$2^x=y\Rightarrow y^2-y-12=0$	**2p**
	$y_1=-3,\ y_2=4$	**2p**
	$x=2$	**1p**
4.	$Card\ A=9$	**2p**
	Numărul submulțimilor cu două elemente este C_9^2	**1p**
	$C_9^2=36$	**2p**
5.	$m=6+20\Rightarrow m=26$	**2p**
	Mijlocul lui $[AB]$ este $M\left(\frac{5}{2},15\right)$	**3p**
6.	$E(30^\circ)=\cos 30^\circ+\sin 60^\circ=$	**2p**
	$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

a.	Fie $x,y\in M, x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}$	**2p**
	$x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\Rightarrow x+y\in M$	**3p**
b.	Fie $x,y\in M, x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}$	**1p**
	$x\cdot y=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd$	**2p**
	$x\cdot y=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\Rightarrow x\cdot y\in M$	**2p**
c.	$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$	**2p**
	$x\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)=1\Rightarrow x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}\in M$	**3p**
d.	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}$	**2p**
	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2},\quad \frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$	**2p**
	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=2+0\cdot\sqrt{2}\in M$	**1p**

e.	$(x \circ y) \circ z = x + y + z + 2\sqrt{2}$ $x \circ (y \circ z) = x + y + z + 2\sqrt{2}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
f.	Asociativitatea din e) Element neutru $e = -\sqrt{2} \in M$ Simetricul lui $x \in M$ este $x' = -x - 2\sqrt{2} \in M$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a.	$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4-2 & 4-2 \\ -2+1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	**1p** **4p**
b.	$A(2010) = M + 2010I_2$ $A(2010) = \begin{pmatrix} 2012 & 2 \\ -1 & 2009 \end{pmatrix}$	**2p** **3p**
c.	$A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 2 \\ -1 & a-1 \end{pmatrix}$ $\det(A(a)) = a^2 + a$ $a \in \{1, -2\}$	**2p** **2p** **1p**
d.	$A^{-1}(1) \cdot A(1) = A(1) \cdot A^{-1}(1) = I_2$ Verificare	**2p** **3p**
e.	$A(a) + (A(a))^t = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1 \\ 1 & 2a-2 \end{pmatrix}$ $\det(A(a) + (A(a))^t) = 4a^2 + 4a - 9$ $4a^2 + 4a - 9 = \text{impar} \neq 0, \forall a \in \mathbb{Z}$	**2p** **2p** **1p**
f.	$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot (A(1))^{-1}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	**2p** **3p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la MATEMATICĂ – Proba E c)

Varianta 9

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_2 \sqrt{6} - \log_2 \sqrt{3}$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$. Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} - 2^{x+1} = 24$.

5p **4.** Calculați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 8\}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,4)$ şi $B(2,m)$. Ştiind că B aparține dreptei de ecuație $y = 3x + 20$ determinați coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.

5p **6.** Calculați valoarea expresiei $E(x) = \cos x + \sin 2x$ pentru $x = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x \circ y = x + y + \sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $x + y \in M$, oricare ar fi $x, y \in M$.

5p **b)** Arătați că $x \cdot y \in M$, oricare ar fi $x, y \in M$.

5p **c)** Determinați $x \in M$ cu proprietatea că $x \cdot (1+\sqrt{2})^2 = 1$.

5p **d)** Verificați dacă $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} \circ \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} \in M$.

5p **e)** Arătați că legea „$\circ$” este asociativă pe mulțimea M.

5p **f)** Arătați că legea „$\circ$” determină pe mulțimea M o structură de grup.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Fie matricele $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = M + aI_2$, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $M^2 = M$.

5p **b)** Determinați matricea $A(2010)$.

5p **c)** Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care $\det(A(a)) = 2$.

5p **d)** Arătați că $A^{-1}(1) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5p **e)** Arătați că pentru oricare $a \in \mathbb{Z}$ matricea $A(a) + (A(a))^t$ este inversabilă, unde $(A(a))^t$ este transpusa matricei $A(a)$.

5p **f)** Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matricială $X \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **Varianta 8**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)=\log_2\left(9-5\right)=$	**3p**
	$=\log_2 4=2$	**2p**
2.	$-\dfrac{2}{2m}=2$	**3p**
	$m=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
3.	$3^{1-x^2}=3^{-3}\Rightarrow 1-x^2=-3$	**3p**
	$x^2=4\Rightarrow x\in\{2,-2\}$	**2p**
4.	$C_6^2=\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=15$	**2p**
	$A_4^2=\dfrac{4!}{(4-2)!}=12$	**2p**
	$C_6^2-A_4^2=3$	**1p**
5.	Dacă C este mijlocul lui $(AB)\Rightarrow C(4,3)$	**2p**
	Finalizare: $OC=5$	**3p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\cos130^\circ+\cos50^\circ=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ m & 0 & 2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=6+m+0+3m+0+2=8+4m$	**2p**
b)	A inversabilă $\Leftrightarrow\det(A)\neq0\Leftrightarrow 8+4m\neq0$	**3p**
	$m\in\mathbb{R}-\{-2\}$	**2p**
c)	Pentru $m=-1$ rezultă $\det(A)=4\neq0$	**2p**
	Se obține $x=y=0,\ z=2$	**3p**
2.a)	$x\circ y=2xy-2x-2y+2+1=$	**2p**
	$=2x(y-1)-2(y-1)+1=2(x-1)(y-1)+1$	**3p**
b)	$x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2(x-1)(e-1)+1=x,\forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	Finalizare: $e=\dfrac{3}{2}$	**3p**

c)	Un exemplu este $a=\frac{5}{2}, b=\frac{5}{3}$	**2p**
	$\frac{5}{2}\circ\frac{5}{3}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+1=3\in\mathbb{Z}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\frac{\left(x^2+3\right)'}{2\sqrt{x^2+3}}=$	**3p**
	$=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$	**2p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**1p**
	$f(1)=2$ şi $f'(1)=\frac{1}{2}$	**2p**
	$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	**2p**
c)	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}=1$	**2p**
	$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=$	**1p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$	**1p**
	Dreapta $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$	**1p**
2.a)	$f_1(x)=x\ln x$	**1p**
	$\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=$	**1p**
	$=\ln x\Big\vert_e^{e^2}=$	**1p**
	$=1$	**2p**
b)	Fie F o primitivă a funcției f_1. $F''(x)=f_1'(x)=1+\ln x$	**3p**
	$1+\ln x\geq 0, \forall x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow F$ convexă pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$	**2p**
c)	$f_{2009}(x)=x^{2009}\ln x$	**1p**
	$\int_1^e\frac{x^{2009}\ln x}{x^{2010}}dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=$	**1p**
	$=\frac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_1^e=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+2x-5$. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcţiei *f* este egală cu 2.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{1-x^2}=\dfrac{1}{27}$.

5p **4.** Calculaţi $C_6^2-A_4^2$.

5p **5.** În sistemul de coordinate *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ şi $B(6,8)$. Calculaţi distanţa de la punctul *O* la mijlocul segmentului (AB).

5p **6.** Calculaţi $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&3&-1\\m&0&2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y-z=-2\\x+3y-z=-2\\mx+2z=4\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi determinantul matricei *A*.

5p **b)** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea *A* este inversabilă.

5p **c)** Rezolvaţi sistemul pentru $m=-1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Demonstraţi că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **c)** Daţi exemplu de două numere $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ pentru care $a\circ b\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul $A(1,2)$.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Demonstraţi că primitivele funcţiei f_1 sunt convexe pe intervalul $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

5p **c)** Calculaţi $\displaystyle\int_1^e\frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{48}$	**2p**
	$3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}$	**2p**
	$2\sqrt[3]{6}<3\sqrt[3]{3}$	**1p**
2.	$\lvert x\rvert\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \operatorname{Im} f\subset[0,+\infty)$	**2p**
	$x\geq 0\Rightarrow x=f(x)\Rightarrow[0,+\infty)\subset\operatorname{Im} f$	**2p**
	$\operatorname{Im}f=[0,+\infty)$	**1p**
3.	$\Delta=1-4m^2$	**2p**
	Ecuația are două soluții egale $\Leftrightarrow\Delta=0$	**1p**
	$\Delta=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{41}^k\sqrt[4]{2^k}=C_{k+1}^k 2^{\frac{k}{4}}$	**2p**
	$T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 4$ divide k	**1p**
	Sunt 11 termeni raționali	**2p**
5.	$m_{AB}=m_{CD}$	**1p**
	$m_{AB}=-\frac{1}{2}$ şi $m_{CD}=\frac{a+3}{3}$	**2p**
	Finalizare: $a=-\frac{9}{2}$	**2p**
6.	$\sin^3 x+\cos^3 x=1, x\in A$, numai pentru $x\in\left\{0;\ \frac{\pi}{2}\right\}$	**3p**
	$P=\frac{2}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}$	**1p**
	$A^3=aI_3$	**2p**
	$A^{2010}=\left(A^3\right)^{670}=a^{670}I_3$	**2p**

b)	$B_1 = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}$ $\det(B_1) = a(a-1)^2$ $\det(B_1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $a = 1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$B_n = A^{n-1}B_1$ B_n inversabilă $\Leftrightarrow \det(B_n) \neq 0$ $\det B_n = a^n(a-1)^2$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$	**1p** **1p** **2p** **1p**
2.a)	$x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} + m - 6$ Dacă $m = 6$, atunci oricare ar fi $x, y \in M$ rezultă că $x * y \neq \frac{3}{2}$, adică $x * y \in M$ Dacă $m \neq 6$, atunci $0 * \frac{2m-3}{6} = \frac{3}{2}$ Cum $0, \frac{2m-3}{6} \in M$ rezultă $0 * \frac{2m-3}{6} \notin M$, deci $m = 6$	**1p** **2p** **1p** **1p**
b)	Asociativitatea Justificarea faptului că elementul neutru este 2 Justificarea faptului că pentru $x \in M$, există $x' = \frac{3x-4}{2x-3} \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = 2$	**1p** **2p** **2p**
c)	Verificarea relației $f(x * y) = f(x) \cdot f(y),\ \forall x, y \in M$ Justificarea faptului că f este bijectivă	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}, x \neq \pm\frac{1}{2}$ $f(0) = -2$ şi $f'(0) = 0$ $y + 2 = 0$	**2p** **2p** **1p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$	**3p** **2p**
c)	$f(1) + f(2) + ... + f(n) = 1 - \sqrt[3]{2n+1}$ $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{-\sqrt[3]{2n+1}} \right]^{\frac{\sqrt[3]{2n}}{-\sqrt[3]{2n+1}}} =$ $= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)} =$ $= e^{-1} = \frac{1}{e}$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	$I_1 + I_2 + I_3 = \int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + x + 1} dx =$	**2p**

	$=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}$	**3p**
b)	$0\le x\le 1\Rightarrow x^n\ge x^{n+1}$	**1p**
	$x^2+x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\frac{x^n}{x^2+x+1}\ge\frac{x^{n+1}}{x^2+x+1},\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow I_n\ge I_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, adică şirul este descrescător	**2p**
c)	$x^2+x+1\ge 1,\ \forall x\ge 0\Rightarrow 0\le\frac{x^n}{x^2+x+1}\le x^n,\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow$	**2p**
	$\Rightarrow 0\le I_n\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Care dintre numerele $2\sqrt[3]{6}$ şi $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$.

5p **3.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2-x+m^2=0$ are două soluții reale egale.

5p **4.** Determinați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{41}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ şi $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele.

5p **6.** Fie mulțimea $A=\left\{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să fie soluție a ecuației $\sin^3 x+\cos^3 x=1$?

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

5p **a)** Arătați că $A^{2010}=a^{670}\cdot I_3$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B_1)=0$.

5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt inversabile.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=2xy-3x-3y+m$, $m\in\mathbb{R}$. Fie mulțimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

5p **a)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*y\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Pentru $m=6$ arătați că $(M,*)$ este grup.

5p **c)** Pentru $m=6$, demonstrați că funcția $f:M\to\mathbb{R}^*$, $f(x)=2x-3$ este un izomorfism între grupurile $(M,*)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$.

5p **a)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Calculați $I_1 + I_2 + I_3$.

5p **b)** Arătați că şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$-1\le\frac{x+1}{3}\le1\Rightarrow-3\le x+1\le3$ $-4\le x\le2\Rightarrow x\in[-4,2]$ $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$	**2p** **2p** **1p**
2.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\f(2)=2\\f(-1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\4a+2b+c=2\\a-b+c=2\end{cases}$ $\begin{cases}c=0\\a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^2-x$	**3p** **2p**
3.	Condiții $\begin{cases}x+3>0\\x>0\end{cases}\Rightarrow x\in(0,+\infty)$ $\log_2\frac{x+3}{x}=2$ $x=1\in(0,+\infty)$	**1p** **2p** **2p**
4.	$p=\frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$ Cazuri posibile sunt 4 Cazuri favorabile sunt 3 $p=\frac{3}{4}$	**1p** **1p** **2p** **1p**
5.	$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+\vec{i}-\vec{j}=5\vec{i}-\vec{j}$ $C(5,-1)$	**3p** **2p**
6.	Din teorema sinusului $\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{AB}{2\sin C}$ $R=\frac{6}{2\cdot\frac{1}{2}}=6$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$	**3p**
	Calculul determinantului: $\det(A)=1$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ sau	**2p**
	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	Deci $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$	**1p**
c)	Prin înmulțire cu A^{-1} la stânga se obține $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f\left(\hat{1}\right)=\hat{1}^3+\hat{2}\cdot\hat{1}^2=$	**2p**
	$=\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$	**3p**
b)	$f=X^2(X+2)$	**2p**
	Rădăcinile lui f sunt $\hat{0},\hat{0}$ şi $\hat{1}$	**3p**
c)	$\mathbb{Z}_3=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\right\}\Rightarrow a,b,c,d$ pot lua câte trei valori fiecare	**3p**
	Deci G are $3^4=81$ elemente	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}$	**3p**
	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x+1},\ \forall x\in[0,1]$	**2p**
b)	$f'(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}\geq 0,\forall x\in[0,1]$	**2p**
	f este crescătoare pe $[0,1]$	**3p**
c)	$0\leq x\leq 1\Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(1)\Rightarrow$	**2p**
	$1\leq f(x)\leq\dfrac{e}{2}\Rightarrow\dfrac{2}{e}\leq\dfrac{1}{f(x)}\leq 1,\ \forall x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$l_s(1)=l_d(1)=f(1)=2\Rightarrow f$ continuă în 1	**3p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**

b)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,dx=$	**1p**
	$=\pi\int_1^2\left(x^2+3\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{16}{3}\pi$	**1p**
c)	$\int_1^{\sqrt{6}} x\sqrt{x^2+3}\,dx=$	**1p**
	$=\frac{1}{2}\int_4^9\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big\|_4^9=\frac{19}{3}$	**4p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1$.

5p **2.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0,0), B(2,2), C(-1,2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element n din mulțimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n \ge n^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0), B(1,-1), O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 6$ şi $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Verificați dacă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 + \hat{2}X^2$ şi mulțimea $G = \left\{ g = aX^3 + bX^2 + cX + d \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul elementelor mulțimii G.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

5p **a)** Demonstrați că $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x+1}$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $[0,1]$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2}{e} \le \frac{1}{f(x)} \le 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}, \text{ pentru } x\geq 1\\ 2x, \text{ pentru } x<1\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^{\sqrt{6}} x\cdot f(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **Varianta 6**

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Numărul de submulțimi C_5^2 $C_5^2=10$	**4p** **1p**
2.	Funcția este crescătoare dacă $3m-1>0$ $m\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$	**2p** **3p**
3.	$x_1+x_2=\frac{2a+1}{a}$, $x_1x_2=\frac{5}{a}$ Finalizare	**2p** **3p**
4.	Condiții $\frac{3x-2}{x+2}>0,\ x+2\neq 0$ $\frac{3x-2}{x+2}=2$ $x=6$ care verifică condițiile de existență, deci este soluție a ecuației	**1p** **2p** **2p**
5.	Vectorul de poziție $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}$ Rezultă $\overrightarrow{r_G}=2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$	**2p** **3p**
6.	$m=\text{tg}45^\circ=1$ Ecuația dreptei este $y=x-1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

a.	$(x*y)*z=x+y+z+4$ $x*(y*z)=x+y+z+4$, finalizare	**2p** **2p** **1p**
b.	$11\circ 1=11-22-2+m=m-13$ $m=13$	**3p** **2p**
c.	$(x-1)\circ 4=4(x-1)-2(x-1)-8+m=2x-10+m$ $(3*3)+m=3+3+2+m=m+8$ $x=9$	**2p** **2p** **1p**
d.	Din $x\circ 3=x\Rightarrow 3x-6-2x+m=x\Rightarrow x-6+m=x$ $m=6$	**3p** **2p**
e.	$m=6\Rightarrow e=3$ $x\circ x'=x'\circ x=3\Rightarrow x'=\frac{2x-3}{x-2},x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $x'=\frac{3}{2}-x\Rightarrow\frac{2x-3}{x-2}=\frac{3}{2}-x\Rightarrow x\in\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$	**1p** **2p** **2p**
f.	$a=2x+2,\quad b=3x+4,\quad c=4x+6$ finalizare	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a.	$C = I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(A) = 0, \det(C) = 1, \det(A) + \det(C) = 1$	**3p**
b.	$\det(C) = 1 \neq 0$	**2p**
	$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
c.	$C - 2A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
	$M = O_3$	**2p**
d.	$I_3 + xA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(I_3 + xA) = 1$	**2p**
e.	$C + C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(C + C^t) = 4 \Rightarrow C + C^t$ este matrice inversabilă	**2p**
f.	$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**2p**
	$A^3 = O_3$	**2p**
	$\left(A^3\right)^{670} = \left(O_3\right)^{670} = O_3$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la MATEMATICĂ – Proba E c)
Varianta 6

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul submulțimilor mulțimii $A=\{1,3,5,7,9\}$, care au două elemente.

5p **2.** Determinați $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3m-1)x+2$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **3.** Arătați că $x_1x_2-5(x_1+x_2)=-10$, unde x_1,x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2-(2a+1)x+5=0$, $a\in\mathbb{R}^*$.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\frac{3x-2}{x+2}=1$.

5p **5.** Determinați vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC ştiind că $\overrightarrow{r_A}=3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=-5\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}$, $\overrightarrow{r_C}=8\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}$.

5p **6.** Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(4,3)$ şi are panta $m=\text{tg}45^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=x+y+2$ şi $x\circ y=xy-2x-2y+m$, $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă pe mulțimea numerelor reale.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $11\circ 1=0$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x-1)\circ 4=(3*3)+m$.

5p **d)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care legea „$\circ$” admite elementul neutru $e=3$.

5p **e)** Pentru $m=6$ determinați elementele $x\in\mathbb{R}$ ale căror simetrice, în raport cu legea „$\circ$”, verifică relația $x'=\frac{3}{2}-x$.

5p **f)** Arătați că numerele reale $a=x*x$, $b=a*x$, $c=b*x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $C=I_3+A$.

5p **a)** Calculați $\det(C)+\det(A)$.

5p **b)** Calculați C^{-1}, unde C^{-1} este inversa matricei C.

5p **c)** Calculați $M=C\cdot\left(C-2A+A^2\right)-I_3$.

5p **d)** Arătați că $\det(I_3+xA)=1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Arătați că matricea $C+C^t$ este inversabilă, unde C^t este transpusa matricei C.

5p **f)** Calculați A^{2010}.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$z^6=2^6\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=-2^6\Rightarrow \operatorname{Re} z^6=-64$	**3p**
2.	$f(512)=\frac{1}{8}$	**2p**
	$(f\circ f)(512)=f\left(\frac{1}{8}\right)=2$	**3p**
3.	Ecuația devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$, cu soluțiile $\sin x=-\frac{1}{2}$ şi $\sin x=1$.	**3p**
	Obținem $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, sau $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.	**2p**
4.	Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M	**3p**
	Acesta este $C_6^3=20$.	**2p**
5.	Punctul $A(0,\ 3)$ se află pe prima dreaptă.	**2p**
	Distanța este $\mathrm{d}(A,\ d_2)=\frac{\lvert 2\cdot 0+4\cdot 3-11\rvert}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.	**3p**
6.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$	**3p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1$	**1p**
	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1+2^2=5$	**1p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$	**2p**

	$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$, de unde rezultă concluzia	**3p**
b)	Observăm că $x=0,\ y=1,\ z=0$ verifică sistemul. Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată.	**3p** **2p**
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$. Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta,\ z=1-\alpha-\beta$. Putem lua $\beta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha})$, cu $4\alpha^2+4\alpha-1\le 0$.	**2p** **2p** **1p**
2.a)	a, b, c pot lua fiecare 4 valori Avem $4^3=64$ matrice.	**3p** **2p**
b)	Luăm $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ $\det(A)=\hat{2},\ \det(A^2)=\hat{0}$	**3p** **2p**
c)	$X=\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$ Ecuația devine $a^2=\hat{1}$, $b(a+c)=\hat{0}, c^2=\hat{0}$. Obținem $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}, c\in\{\hat{0},\hat{2}\}, b=\hat{0}$, deci există 4 soluții	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow m=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$, deci avem asimptota oblică $y=x$.	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(x)<0, \forall x\in(-\infty,-1)$, deci f este concavă pe $(-\infty,-1)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^{\pi}\lvert\sin 2x\rvert dx=\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2x dx$ $I=\frac{-\cos 2x}{2}\Big\rvert_0^{\pi/2}+\frac{\cos 2x}{2}\Big\rvert_{\pi/2}^{\pi}$ $I=2$	**2p** **2p** **1p**
b)	$I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx\le\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx$ $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx=\ln x\rvert_{\pi}^{2\pi}=\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt$	**1p**

	$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\|\sin t\|}{t} dt + \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \frac{\|\sin t\|}{t} dt + ... + \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \frac{\|\sin t\|}{t} dt$	**2p**
	$I_n \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \|\sin t\| dt + \frac{1}{\pi(n+2)} \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \|\sin t\| dt + ... + \frac{1}{2n\pi} \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \|\sin t\| dt$	**1p**
	Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \|\sin t\| dt = 2, \forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă concluzia.	**1p**

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculaţi $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinaţi numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$.

5p **5.** Calculaţi distanţa dintre dreptele paralele de ecuaţii $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Calculaţi produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătaţi că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Rezolvaţi sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, arătaţi că sistemul are o infinitate de soluţii (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii G.

5p **b)** Daţi un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

5p **b)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ şi numerele $I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^{\pi} f_2(x)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Arătaţi că $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\right)$.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$ $a_{10} = 21$ $S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 120$	**2p** **1p** **2p**
2.	$A(m,-1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = -1$ $m = 2$ sau $m = 1$	**3p** **2p**
3.	$2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$ $2x + 3 = 25 \Rightarrow x = 11 \in \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$	**1p** **4p**
4.	$C_5^3 =$ $= 10$	**3p** **2p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow M(0,0)$ Scrierea formulei distanței dintre 2 puncte $CM = \sqrt{5}$	**2p** **1p** **2p**
6.	Aria $\Delta ABC = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$ $= \dfrac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(I_3 + B) = 1$	**2p** **3p**

b)	$A^2=\begin{pmatrix}9&6&7\\0&9&6\\0&0&9\end{pmatrix}$	**2p**
	$f(A)=A^2-3A+I_3=$	**1p**
	$=I_3+B$	**2p**
c)	$\left(f(A)\right)^3=\left(I_3+B\right)^3=I_3+3B+3B^2+B^3$	**2p**
	$B^3=O_3$	**2p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	$(x-3)^2-2(x-3)=0$	**2p**
	$(x-3)(x-5)=0$	**1p**
	$x=3$ sau $x=5$	**2p**
b)	$(x-3)(a-3)+3=3$	**2p**
	$a=3\in\mathbf{Z}$	**3p**
c)	$\begin{cases}x+y=6\\(x-y-3)(-2)=2\end{cases}$	**3p**
	$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\left(x^3\right)'=3x^2$	**2p**
	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	**3p**
	$f'(1)=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=-1$	**1p**
	Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty,-1]$ şi pe $[1;+\infty)$	**2p**
	şi f descrescătoare pe $[-1;0)$ şi pe $(0;1]$	**2p**
2.a)	$V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)dx=$	**1p**
	$=\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big\|_0^1=$	**2p**
	$=\frac{7\pi}{15}$.	**2p**
b)	$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{t}\,dt=$	**3p**

	$=\frac{t\sqrt{t}}{3}\Big\|_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$	**2p**
c)	$\int\limits_0^x f(t)\,dt=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{3}\cdot(-2x)}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ şi $a_3 = 7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+3) = 2$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Calculați distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB = 8$, $AC = 8$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, unde $X^2 = X\cdot X$.

5p **a)** Calculați $\det(I_3 + B)$.

5p **b)** Demonstrați că $f(A) = I_3 + B$.

5p **c)** Arătați că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, unde $(f(A))^3 = f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$.

5p **a)** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = x * x$.

5p **b)** Determinați numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x), x\in \mathbb{R}^*$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to \mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1)	$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$ Finalizare: $P=\frac{2}{5}$	**2p** **3p**
2)	$1+2+3+\ldots+40=\frac{40\cdot 41}{2}=$ $=820$	**3p** **2p**
3)	$\Delta=16m^2-4$ $m\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$	**2p** **3p**
4)	Scrierea formulei $d(A,d)=\frac{\lvert 1+2+1\rvert}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$	**3p** **2p**
5)	$7^x=y$; $y^2-8y+7=0$ $y_1=1\Rightarrow x_1=0$ $y_2=7\Rightarrow x_2=1$	**1p** **2p** **2p**
6)	$\cos 135^\circ=-\cos 45^\circ$; $\sin 135^\circ=\sin 45^\circ$ Finalizare: $\frac{1}{2}\cos 135^\circ+3\sin 135^\circ=\frac{5\sqrt{2}}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

a)	Din definiția elementului neutru şi cum legea este comutativă, avem $x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ $(e+2)x+2e+a=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ de unde $\begin{cases} e+2=1 \\ 2e+a=0 \end{cases}$ Deci $a=2$ şi $e=-1$.	**1p** **2p** **2p**
b)	$(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$ $(x*y)*z=xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+6$ $x*(y*z)=xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+6$	**1p** **2p** **2p**
c)	$x*y=(x+2)(y+2)-2\Rightarrow(x+y+2)*z=(x+y+4)(z+2)-2$	**2p**

	$(x*z)+(y*z)+2=(x+2)(z+2)-2+(y+2)(z+2)-2+2=$ $=(x+y+4)(z+2)-2=(x+y+2)*z$	2p 1p
d)	Din $x*x'=(x+2)(x'+2)-2=-1$, rezultă $x'=-2+\dfrac{1}{x+2}\in\mathbb{Z}$ pentru $x\in\mathbb{Z}$ $(x+2)\mid 1$, adică $(x+2)\in\{-1,1\}$ $M=\{-3,-1\}$	2p 2p 1p
e)	Din $x*y=3$ se obține $(x+2)(y+2)=5$ Finalizare: $(x;y)\in\{(-1;3),(-3;-7),(3,-1),(-7;-3)\}$	1p 4p
f)	$(-3)*(-3)=a-3=(-1)*(-1)\in\{-3,-1\}\Rightarrow a\in\{0,2\}$ $(-3)*(-1)=(-1)*(-3)=a-5\in\{-3,-1\}\Rightarrow a\in\{2,4\}$ $a=2$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

a)	$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}$ Finalizare: $D=2$	2p 3p
b)	$a=b\Rightarrow D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&a&a^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$ Finalizare: $D=0$	2p 3p
c)	$D=a^2-5a+6$ $D=2\Rightarrow a^2-5a+4=0$ $a=1$ sau $a=4$	2p 1p 2p
d)	Scăzând prima linie din celelalte două obținem $D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}$ $D=(b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&1&c+a\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$	2p 3p
e)	$D=(b-a)(c-a)(c-b)=0\Rightarrow b-a=0$ sau $c-a=0$ sau $c-b=0$ Finalizare	3p 2p
f)	Dintre cele 3 numere întregi *a*, *b*, *c*, cel puțin două au aceeaşi paritate, deci diferența lor este număr par. Dar cum $D=(b-a)(c-a)(c-b)$ rezultă că D este număr par	3p 2p

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-4x+3=0$.
5p **2.** Calculați suma $S=1+2+3+\ldots+40$.
5p **3.** Determinați valorile parametrului real m astfel încât ecuația $x^2-4mx+1=0$ să aibă soluții reale.
5p **4.** Calculați distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta $d: x+y+1=0$.
5p **5.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $7^{2x}-8\cdot 7^x+7=0$.
5p **6.** Calculați $\frac{1}{2}\cos 135^\circ+3\sin 135^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x*y=xy+2x+2y+a$, cu $a\in\mathbb{Z}$.
5p **a)** Determinați $a\in\mathbb{Z}$ ştiind că legea ”$*$” admite element neutru.
5p **b)** Pentru $a=2$ demonstrați că legea ”$*$” este asociativă.
5p **c)** Dacă $a=2$ arătați că $(x+y+2)*z=(x*z)+(y*z)+2$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{Z}$.
5p **d)** Pentru $a=2$ determinați mulțimea $M=\{x\in\mathbb{Z} \mid \text{există } x'\in\mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x*x'=-1\}$.
5p **e)** Pentru $a=2$ determinați $x,y\in\mathbb{Z}$, astfel încât $x*y=3$.
5p **f)** Fie mulțimea $H=\{-3,-1\}$. Determinați $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât, pentru oricare $x,y\in H$, să rezulte că $x*y\in H$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Fie numerele reale a,b,c şi determinantul $D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=1,\ b=2$ şi $c=3$, calculați determinantul D.
5p **b)** Arătați că dacă $a=b$, atunci $D=0$.
5p **c)** Pentru $b=2$ şi $c=3$, determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $D=2$.
5p **d)** Demonstrați că $D=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$.
5p **e)** Arătați că dacă $D=0$, atunci cel puțin două dintre numerele $a,\ b$ şi c sunt egale.
5p **f)** Arătați că dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$, atunci D este număr întreg par.