Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$3\left(2-\sqrt{20}\right)+\sqrt{180}=3\left(2-2\sqrt{5}\right)+6\sqrt{5}=$	**3p**
	$=6-6\sqrt{5}+6\sqrt{5}=6$	**2p**
2.	$f(1)=3\cdot 1-1=2$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f(2)=3\cdot 2-1=5$	**3p**
3.	$\lg(5x-1)=\lg 14\Rightarrow 5x-1=14$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	$x+\frac{30}{100}\cdot x=5200$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=4000$ de lei	**2p**
5.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{d(A,BC)\cdot BC}{2}=\frac{4\cdot 8}{2}=16$	**2p**
	$AC=5$ și, cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{d(B,AC)\cdot AC}{2}$, obținem $d(B,AC)=\frac{32}{5}$	**3p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}45^\circ=1$, $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$	**3p**
	$\frac{2\cos 30^\circ}{2\operatorname{tg}45^\circ+1}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot 1+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}30^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A(10))=\begin{vmatrix}11 & 21\\ 10 & 20\end{vmatrix}=11\cdot 20-21\cdot 10=$	**3p**
	$=220-210=10$	**2p**
b)	$A(a)-A(b)=\begin{pmatrix}a-b & 2(a-b)\\ a-b & 2(a-b)\end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
	$\left(A(a)-A(b)\right)\left(A(a)-A(b)\right)=(a-b)^2\begin{pmatrix}3 & 6\\ 3 & 6\end{pmatrix}=3(a-b)^2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=3(a-b)\left(A(a)-A(b)\right)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	Pentru orice număr natural n, $\det(A(n))=n$, deci $\det(A(2))+\det(A(3))+\dots+\det(A(n))=$ $=2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}-1$	**3p**
	$\frac{n(n+1)}{2}-1=35$, deci $n(n+1)=72$ și, cum n este număr natural, obținem $n=8$	**2p**

2.a)	$4*\sqrt{3}=\sqrt{\left(4^2-2\right)\left(3-2\right)+2}=\sqrt{4^2-2+2}=$	**3p**
	$=\sqrt{16}=4$	**2p**
b)	$x*\sqrt{3}=\sqrt{3}*x=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=\sqrt{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
	$t*\sqrt{6}=\sqrt{6}*t=\sqrt{3}$, unde t este simetricul lui $x=\sqrt{6}$, deci $\sqrt{4\left(t^2-2\right)+2}=\sqrt{3}$, de unde $t^2=\dfrac{9}{4}$ și, cum $t\in M$, obținem $t=\dfrac{3}{2}$, care convine	**3p**
c)	$\sqrt{2}*x=\sqrt{(2-2)\left(x^2-2\right)+2}=\sqrt{2}$, unde $x\in M$	**2p**
	$\sqrt{2}*\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}=\sqrt{2}*\left(\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}\right)=\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{x}}(\ln x-1)+2\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{\sqrt{x}\ln x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$, $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{4}{\sqrt{e}}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f\left(\dfrac{1}{e}\right)=f'\left(\dfrac{1}{e}\right)\left(x-\dfrac{1}{e}\right)$, deci $y=-\dfrac{4}{\sqrt{e}}$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$	**3p**
	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{e}\right)$, deci $f(x)\ge-\dfrac{4}{\sqrt{e}}$, de unde obținem $\sqrt{e}f(x)+4\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-1=f(0)\Rightarrow$ funcția f este continuă în $x=0$	**3p**
	f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)\Rightarrow f$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\dfrac{3x-1}{x+1}\,dx=\int_1^2\dfrac{3x+3-4}{x+1}\,dx=\int_1^2\left(3-\dfrac{4}{x+1}\right)dx=\left(3x-4\ln(x+1)\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=6-4\ln 3-3+4\ln 2=3+4\ln\dfrac{2}{3}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^{0}e^x f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}e^x(2x-1)\,dx=e^x(2x-3)\Big\|_{-1}^{0}=$	**3p**
	$=e^0\cdot(-3)-e^{-1}\cdot(-5)=\dfrac{5-3e}{e}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{11}\left(\sqrt{11}+1\right)-\left(\sqrt{11}+3\right)=\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}+\sqrt{11}-\sqrt{11}-3=$	**2p**
	$=11-3=8$	**3p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$	**2p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x=2$ și $x=3$	**3p**
3.	$x^2+2=27\Rightarrow x^2-25=0$	**2p**
	$x=-5$ sau $x=5$, care convin	**3p**
4.	Numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte este egal cu $C_4^2=$	**2p**
	$=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=6$	**3p**
5.	N este mijlocul segmentului MP, unde $P(a,b)$ este simetricul punctului M față de punctul N, deci $2=\dfrac{-1+a}{2}$ și $1=\dfrac{2+b}{2}$	**3p**
	$a=5$ și $b=0$	**2p**
6.	$\cos B=\dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC\cdot AB}=$	**2p**
	$=\dfrac{81+18-45}{2\cdot 9\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de unde obținem că măsura unghiului B este de 45°	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}-9 & 8\\ -5 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}-9 & 8\\ -5 & 5\end{vmatrix}=(-9)\cdot 5-(-5)\cdot 8=$	**3p**
	$=-45+40=-5$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1-10b-10a+100ab-40ab & 8b-80ab+8a+32ab\\ -5a+50ab-5b-20ab & -40ab+1+4a+4b+16ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1-10(a+b-6ab) & 8(a+b-6ab)\\ -5(a+b-6ab) & 1+4(a+b-6ab)\end{pmatrix}=A(a+b-6ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(m+n-6mn)=A(6-5mn)$, deci $mn-m-n+6=0$	**2p**
	$(m-1)(n-1)=-5$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=0$, $n=6$ sau $m=6$, $n=0$	**3p**
2.a)	$1*3=1\cdot 3-3\cdot 1-3\cdot 3+12=$	**3p**
	$=3-3-9+12=3$	**2p**
b)	$x*y=xy-3x-3y+9+3=$	**3p**
	$=x(y-3)-3(y-3)+3=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$x*x=(x-3)^2+3$, $x*x*x=(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(x-3)^3+3=x$, deci $x=2$, $x=3$ sau $x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5x^4-5=5\left(x^4-1\right)=$	**3p**
	$=5\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=5(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f''(x)=20x^3$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci funcția f este concavă pe $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]\Rightarrow f(x)\le f(-1)$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
	$f(-1)=2024$, deci $f(x)\le 2024$ pentru orice $x\in[-1,1]$, deci ecuația $f(x)=2025$ **nu** admite nicio soluție în intervalul $[-1,1]$	**3p**
2.a)	$F'(x)=f(x)=\sin x$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\sin x\ge 0$, pentru orice $x\in[0,\pi]$, obținem $F'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,\pi]$, deci orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0,\pi]$	**2p**
b)	$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x)\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin x\cos x\,dx=\sin^2 x\Big\vert_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$	**3p**
	$=\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx=-x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**2p**
	$=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$	**2p**
	$5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow\left(5+\frac{1}{2}\right)\left(5-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{99}{4}$	**3p**
2.	$3x+4=8-x\Leftrightarrow x=1$	**3p**
	$y=7$	**2p**
3.	$2x+1=5^2$	**3p**
	$x=12$, care convine	**2p**
4.	$p-10\%\cdot p=630$, unde p este preţul tabletei înainte de ieftinire	**3p**
	$p=700$ de lei	**2p**
5.	$AB=4$	**2p**
	$AM=\frac{AB}{2}=2$	**3p**
6.	$\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30°=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\cos^2 45°-\sin^2 30°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}8 & 6\\ 6 & 5\end{vmatrix}=8\cdot 5-6\cdot 6=$	**3p**
	$=40-36=4$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(-a)=\begin{pmatrix}2+a & 2\\ 2 & 1+a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-a & 2\\ 2 & 1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-a^2 & 6\\ 6 & 5-a^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\begin{pmatrix}8-a^2 & 6\\ 6 & 5-a^2\end{pmatrix}+a^2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-a^2+a^2 & 6\\ 6 & 5-a^2+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 6 & 5\end{pmatrix}=M$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$\det M\neq 0$, deci există $M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=M^{-1}\cdot A(0)$ şi, cum $A(0)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, obţinem $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$5*5=5+5-10=$ $=10-10=0$	**3p** **2p**
b)	$n^2+n-10<-4 \Leftrightarrow n^2+n-6<0 \Leftrightarrow n\in(-3,2)$ Cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**2p** **3p**
c)	$x*x=2x-10$, $x*x*x=3x-20$, deci $3x-20=x^2-18 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ $x=1$ sau $x=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'+(1)'=$ $=6x^2-6x=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3+2x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+1\right)=2$	**2p** **3p**
c)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=12x+2020 \Leftrightarrow f'(a)=12$ $6a(a-1)=12 \Leftrightarrow a^2-a-2=0 \Leftrightarrow a=-1$ sau $a=2$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x+2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+x-2-x+2\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=$ $=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$	**2p** **3p**
b)	$\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3+2\right)e^x\,dx=\int_{0}^{1}xe^xdx=$ $=\left.(x-1)e^x\right\|_{0}^{1}=0-(-1)\cdot e^0=1$	**2p** **3p**
c)	$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{1}^{2}\left(x^3+x-2\right)dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_{1}^{2}+\left.\frac{x^2}{2}\right\|_{1}^{2}-\left.2x\right\|_{1}^{2}=\frac{13}{4}$ $m^2+1=\frac{13}{4}\Rightarrow m^2=\frac{9}{4}$ și, cum m este număr real pozitiv, obținem $m=\frac{3}{2}$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=\frac{12}{6}=2$	**3p**
	$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=2^2-2=2$	**2p**
2.	$x_1+x_2=4$, $x_1x_2=m\Rightarrow x_1^2+x_2^2=16-2m$	**3p**
	$16-2m=2\Leftrightarrow m=7$	**2p**
3.	$3x+1=(3x+1)^2\Rightarrow 3x(3x+1)=0$	**2p**
	$x=-\frac{1}{3}$ sau $x=0$, care convin	**3p**
4.	$x-\frac{25}{100}\cdot x=750$, unde x este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=1000$ de lei	**2p**
5.	$OABC$ este paralelogram, deci segmentele OB și AC au același mijloc	**2p**
	Punctul $M(4,3)$ este mijlocul segmentului OB, deci $x_C=8$ și $y_C=4$	**3p**
6.	$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 90°=0$	**3p**
	$\sqrt{3}\cos 30°+\sin 30°+\frac{1}{2}\cos 90°=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=I_2+A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(1))=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1-2=-1$	**2p**
b)	$M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=(I_2+aA)(I_2+bA)-(I_2+(a+b)A)=abA\cdot A$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	Cum $A\cdot A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$ și $M(0)=I_2$, obținem $M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=2abM(0)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det M(1)\neq 0$, $(M(1))^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=M(0)\cdot(M(1))^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$1*(-1)=4\cdot 1\cdot(-1)+4\cdot 1+4\cdot(-1)+3=$	**3p**
	$=-4+4-4+3=-1$	**2p**

b)	$x * y = 4xy + 4x + 4y + 4 - 1 =$	**2p**
	$= 4x(y+1) + 4(y+1) - 1 = 4(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x * \frac{1}{4} = 5x + 4$, $(5x+4) * (-x) = 20\left(1 - x^2\right) - 1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$20\left(1 - x^2\right) = 20$, de unde obținem $x = 0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+1) - \left(x^2+4x+4\right)}{(x+1)^2} =$	**3p**
	$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+4}{x(x+1)} = 1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{x+1} = 3$, deci dreapta de ecuație $y = x + 3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
	$f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci funcția f este convexă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 \left(x^2+1\right)\left(f(x) - x^2\right)dx = \int_0^1 \left(x^2+1\right) \cdot \frac{1}{x^2+1}dx = \int_0^1 dx =$	**2p**
	$= x \Big\vert_0^1 = 1 - 0 = 1$	**3p**
b)	$\int_{-1}^1 x f(x)dx = \int_{-1}^1 \left(x^3 + \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)\Big\vert_{-1}^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = 0$	**2p**
c)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \mathrm{arctg}x\right)\Big\vert_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$	**3p**
	$\frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n^2 = 4$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(3-3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{14}=\left(3-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{14}=$	**3p**
	$=\frac{14}{5}\cdot\frac{5}{14}=1$	**2p**
2.	$f(m)=6\Leftrightarrow m^2+2=6\Leftrightarrow m^2-4=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$14-x=3x+6\Rightarrow 4x=8$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 2 numere care verifică inegalitatea dată, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$	**1p**
5.	$AB=5$, $AC=6$, $BC=5$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+AC+BC=5+6+5=16$	**2p**
6.	$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\sin 30^\circ\cos 30^\circ+2\sin 45^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{2}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(-2)\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=-4-1=-5$	**2p**
b)	$A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & 3-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x-3 & 1\\ 1 & 3+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}(x-3)^2+1 & 0\\ 0 & 1+(3-x)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\Leftrightarrow (x-3)^2-9=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=6$	**2p**
2.a)	$1*2=2\cdot 1+2-3\cdot 1\cdot 2=$	**3p**
	$=2+2-6=-2$	**2p**

b)	$x*(x-1)=2x+(x-1)-3x(x-1)=-3x^2+6x-1$, unde x este număr real	**3p**
	$-3x^2+6x-1=-1 \Leftrightarrow -3x(x-2)=0$, deci $x=0$ sau $x=2$	**2p**
c)	De exemplu, $a=\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $b=-2\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	**2p**
	$a*b=2\cdot\sqrt{2}+\left(-2\sqrt{2}\right)-3\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+12=12\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=$	**2p**
	$=5x^2\left(x^2-4x+3\right)=5x^2(x-3)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$	**2p**
	$f(0)=0$, $f(1)=1$ și $f(3)=-27$, deci $-27\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[0,3]$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^x+1\right)dx=\left(e^x+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=(e+1)-(1+0)=e$	**2p**
b)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x^2+x+2\right)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(e^x+1\right)=2$ și $f(0)=2$, obținem că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 x f(x)dx=\int_{-1}^0 x\left(x^2+x+2\right)dx+\int_0^1 x\left(e^x+1\right)dx=\int_{-1}^0\left(x^3+x^2+2x\right)dx+\int_0^1\left(xe^x+x\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big\vert_{-1}^{0}+\left(xe^x-e^x+\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)+\left(e-e+\frac{1}{2}\right)-(-1)=\frac{7}{12}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3 = b_1 q^2 \Rightarrow b_1 = \frac{b_3}{q^2} =$	**3p**
	$= \frac{12}{2^2} = 3$	**2p**
2.	$2x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$	**3p**
	$x \in [1,+\infty)$	**2p**
3.	$x+1 = 11-x \Rightarrow 2x = 10$	**3p**
	$x = 5$, care convine	**2p**
4.	$C_{11}^9 = C_{11}^{11-9} = C_{11}^2$	**3p**
	$C_{11}^9 - C_{11}^2 = C_{11}^2 - C_{11}^2 = 0$	**2p**
5.	$AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $AC = 8$	**3p**
	$AC^2 = AB^2 + BC^2$ și, cum $AB = BC$, obținem că ΔABC este dreptunghic isoscel	**2p**
6.	$\sin 135° = \sin(180° - 135°) = \sin 45°$	**2p**
	$\frac{\sin 135°}{\cos 45°} = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) =$	**3p**
	$= -9 + 8 = -1$	**2p**
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	**3p**
	$A \cdot A \cdot A = A \cdot (A \cdot A) = A \cdot I_2 = A$	**2p**
c)	Matricea A este inversabilă și, cum $A \cdot A = I_2$, obținem că inversa matricei A este matricea A	**2p**
	$X = A^{-1} \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A + 3A \cdot A \Leftrightarrow X = A + 3I_2$, deci $X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$2 * 2020 = 2 \cdot 2020 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2020 + 6 =$	**3p**
	$= -4 + 6 = 2$	**2p**
b)	$x * y = xy - 2x - 2y + 4 + 2 =$	**3p**
	$= x(y-2) - 2(y-2) + 2 = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$(m-2)(n-2) + 2 = 13 \Leftrightarrow (m-2)(n-2) = 11$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m = 3$, $n = 13$ sau $m = 13$, $n = 3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2e^x+2(x-1)e^x=$	**3p**
	$=e^x(2+2x-2)=2xe^x,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^x\right)=$	**3p**
	$=2e^0=2$	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
	Pentru orice număr real x, $f(x)\ge f(0)$, deci $f(x)\ge -2$, de unde obținem $xe^x-e^x\ge -1$, deci $xe^x\ge e^x-1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2 (x+4)f(x)\,dx=\int\limits_0^2 (x+2)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}+4=6$	**2p**
b)	$\int\limits_{-2}^0 f(x)\,dx=\int\limits_{-2}^0 \frac{x+2}{x+4}\,dx=\int\limits_{-2}^0 \frac{x+4-2}{x+4}\,dx=\int\limits_{-2}^0\left(1-\frac{2}{x+4}\right)dx=\left(x-2\ln(x+4)\right)\Big\vert_{-2}^0=$	**3p**
	$=0-2\ln 4-(-2)+2\ln 2=2-2\ln 2$	**2p**
c)	$\int\limits_{-3}^a f'(x)\cdot f''(x)dx=\frac{1}{2}\left(f'(x)\right)^2\Big\vert_{-3}^a=\frac{1}{2}\left(f'(a)\right)^2-\frac{1}{2}\left(f'(-3)\right)^2$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$	**3p**
	$f'(x)=\frac{2}{(x+4)^2}$, deci $\int\limits_{-3}^a f'(x)f''(x)\,dx=2\left(\frac{1}{(a+4)^4}-1\right)$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)-\left(2-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2+3}{3}-\frac{6-4}{3}=$	**2p**
	$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$	**3p**
2.	$f(2)=5\Leftrightarrow 2^2-2m+3=5$	**3p**
	$2m=2$, deci $m=1$	**2p**
3.	$x+4=(x+2)^2\Rightarrow x^2+3x=0$	**2p**
	$x=-3$, care nu convine sau $x=0$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care au cifrele egale, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{AB}=-1$	**2p**
	$m_{AC}=\frac{a-1}{5}$, deci punctele A, B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB}=m_{AC}\Leftrightarrow a=-4$	**3p**
6.	$MN=6$	**2p**
	$P_{MNPQ}=4MN=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A-B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A-B)=\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}=0\cdot 0-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=0-(-1)=1$	**2p**
b)	$C=A\cdot A+B\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det C=\begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}=0$, deci matricea C nu este inversabilă	**2p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}1+x&2+y\\x&y\end{pmatrix}$, $X\cdot B=\begin{pmatrix}3&2\\x+y&y\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\begin{pmatrix}1+x&2+y\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\x+y&y\end{pmatrix}$, deci $x=2$ și $y=0$, care convin	**3p**

2.a)	$1*1=\frac{1\cdot 1+1}{1+1}=$	**3p**
	$=\frac{2}{2}=1$	**2p**
b)	$\frac{2x+1}{x+2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4x+2=3x+6$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
c)	$x*1=1$, unde $x\in M$	**2p**
	$\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8*\lg 10=(\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8)*\lg 10=(\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8)*1=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(x^{2020}+1\right)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+1}{x}=2$ și, cum $f(1)=2$, obținem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x_0=1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	Pentru $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, deci $f''(x)=\frac{2}{x^3}$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f' este crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$\int_e^{e^2}\frac{g(x)}{xe^x}\,dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln x\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(2^2-1^2\right)=\frac{3}{2}$	**2p**
c)	$\int_1^e\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_1^e\frac{e^x}{x}\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=\int_1^e\frac{e^x}{x}\,dx+e^x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}e^x\,dx=$	**3p**
	$=e^e\ln e-e^1\ln 1=e^e$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1,75:0,25-2\left(\frac{17}{4}-2,25\right)=175:25-2(4,25-2,25)=$	**3p**
	$=7-2\cdot 2=3$	**2p**
2.	Pentru orice $x\in[1,5]$, $f(x)=y\Leftrightarrow 2x+1=y\Leftrightarrow x=\frac{y-1}{2}$	**2p**
	$y\in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow$ există $x\in[1,5]$ astfel încât $f(x)=y\Leftrightarrow 1\le\frac{y-1}{2}\le 5\Leftrightarrow 3\le y\le 11$, deci $\operatorname{Im} f=[3,11]$	**3p**
3.	$2x+4=2^4$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	$x-\frac{20}{100}\cdot x=144$, unde x este prețul produsului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=180$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(5-2)^2+(0-a)^2}$, deci $\sqrt{a^2+9}=5$	**3p**
	$a=-4$ sau $a=4$	**2p**
6.	$\sin 130°=\sin(180°-130°)=\sin 50°$	**2p**
	$\sin^2 130°+\cos^2 50°=\sin^2 50°+\cos^2 50°=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-6\cdot(-2)=$	**3p**
	$=-12+12=0$	**2p**
b)	$A\cdot A+A=\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, unde x, y, z și t sunt numere reale și $X+I_2=\begin{pmatrix}x+1 & y\\ z & t+1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{vmatrix}x & y\\ z & t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+1 & y\\ z & t+1\end{vmatrix}\Leftrightarrow xt-yz=xt+x+t+1-yz\Leftrightarrow x+t=-1$ și, cum există o infinitate de numere reale x și t pentru care $x+t=-1$, există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det X=\det(X+I_2)$	**3p**
2.a)	$1\circ\sqrt{2}=-1\cdot\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=$	**3p**
	$=-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=1$	**2p**

b)	$x \circ y = -xy + x + y - 1 + 1 =$ $= -x(y-1) + (y-1) + 1 = -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x şi y	**2p** **3p**
c)	$-(3^x - 1)(5^x - 1) + 1 = 1 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 0$ sau $5^x - 1 = 0$ $x = 0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 4x^3 - 4x =$ $= 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$f(2) = -55$, $f'(2) = 24$ Ecuația tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, deci $y = 24x - 103$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f'(x)}{2x} =$ $= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x(x-1)(x+1)}{2x} = \lim\limits_{x\to 3} 2(x-1)(x+1) = 16$	**3p** **2p**
2.a)	$F'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} =$ $= \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = f(x)$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big\vert_0^1 = F(1) - F(0) =$ $= \dfrac{1}{2} - 0 = \dfrac{1}{2}$	**3p** **2p**
c)	$F(x) > 0$, pentru orice $x \in [1, a]$ și $\int_1^a \dfrac{f(x)}{F(x)}dx = \int_1^a \dfrac{F'(x)}{F(x)}dx = \ln(F(x))\Big\vert_1^a = \ln(F(a)) - \ln(F(1))$ $\ln(F(a)) - \ln\dfrac{1}{2} = \ln\dfrac{8}{3} \Leftrightarrow \ln(F(a)) = \ln\dfrac{8}{3} + \ln\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(F(a)) = \ln\dfrac{4}{3}$, deci $\dfrac{a^2}{a+1} = \dfrac{4}{3}$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4=\dfrac{(a_1+a_4)\cdot 4}{2}=$	**3p**
	$=\dfrac{(2+11)\cdot 4}{2}=26$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x=2x-4\Leftrightarrow (x-2)^2=0$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=2$, $y=0$	**2p**
3.	$\sqrt[3]{x+2}=2\Leftrightarrow x+2=8$	**3p**
	$x=6$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4\cdot 5=20$ de numere care au cifrele pare, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**1p**
5.	B este mijlocul segmentului AC, unde $C(a,b)$ este simetricul punctului A față de punctul B, deci $3=\dfrac{-1+a}{2}\Rightarrow a=7$	**3p**
	$1=\dfrac{5+b}{2}\Rightarrow b=-3$	**2p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2$, deci ΔABC este dreptunghic	**2p**
	$\cos B=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&0\\1&1&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=4+0+0-0-0-0=4$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&5&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A\cdot A+A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&5&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&2&0\\2&6&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}=2A\cdot A$	**3p**

c)	$B(x)=A+xI_3=\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1+x & 0 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(x))=x(1+x)^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$B(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(B(x))\neq 0 \Leftrightarrow x(1+x)^2\neq 0$, de unde obținem $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$	**3p**
2.a)	$2020*0=2020+a\cdot 0+1=$	**3p**
	$=2020+1=2021$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$(x*y)*z=(x+ay+1)*z=x+ay+1+az+1=x+ay+az+2$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**
	$x*(y*z)=x*(y+az+1)=x+a(y+az+1)+1=x+ay+a^2z+a+1$, pentru orice numere reale x, y și z și, cum, legea de compoziție „$*$” este asociativă, obținem $a=1$	**3p**
c)	$x*y=x-y+1$, deci $4^x-2^x+1=1$	**3p**
	$2^x(2^x-1)=0$, de unde obținem $x=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-2)-(x-1)^2}{(x-2)^2}=$	**3p**
	$=\frac{(x-1)(2x-4-x+1)}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(3)=0$, $f(3)=4$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(3)=f'(3)(x-3)$, deci $y=4$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, deci funcția f' este crescătoare pe $(2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)}dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\int_1^2 f^2(x)dx=\int_1^2 x^2(x^2+1)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\frac{32}{5}+\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{15}$	**2p**
c)	$\int_0^a f(x)dx-\int_0^{2020} f(x)dx=\int_0^{2020} f(x)dx+\int_{2020}^a f(x)dx-\int_0^{2020} f(x)dx=\int_{2020}^a f(x)dx$, pentru orice $a\in[2020,+\infty)$	**3p**
	Pentru orice $x\in[0,+\infty)$, $f(x)\geq 0$, deci , pentru orice $a\in[2020,+\infty)$, $\int_{2020}^a f(x)dx\geq 0$, de unde obținem $\int_0^{2020} f(x)dx\leq\int_0^a f(x)dx$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2{,}5:0{,}5-5\left(6{,}5-\frac{11}{2}\right)=25:5-5(6{,}5-5{,}5)=$	**3p**
	$=5-5\cdot 1=0$	**2p**
2.	$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=1$	**2p**
	$-m+2\cdot 1=1$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\sqrt{x-2}=3-1\Rightarrow x-2=4$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele divizibile cu 10 sunt: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 și 90, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$AB=8$, $AC=6$, $BC=10$	**2p**
	$P_{ABC}=6+8+10=24$	**3p**
6.	Unghiul A este ascuțit $\Rightarrow \cos A>0$ și, cum $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, obținem $\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A+I_2=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_2)=\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot 4-3\cdot 1=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}=4A$	**2p**
c)	$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci $AX=\begin{pmatrix}x+z&y+t\\3x+3z&3y+3t\end{pmatrix}$ și $XA=\begin{pmatrix}x+3y&x+3y\\z+3t&z+3t\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}x+z&y+t\\3x+3z&3y+3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y&x+3y\\z+3t&z+3t\end{pmatrix}\Leftrightarrow z=3y$ și $x+2y=t\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x&y\\3y&x+2y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale, deci există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$	**2p**

2.a)	$1*2=\frac{1\cdot 2+1+2-1}{2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**
b)	$\frac{x^2+2x-1}{2}\le 1\Leftrightarrow x^2+2x-3\le 0\Leftrightarrow (x+3)(x-1)\le 0$	**3p**
	$x\in[-3,1]$	**2p**
c)	$(-1)*x=-1$, unde x este număr real	**2p**
	$(-1)*0*1*\ldots*2020=(-1)*(0*1*\ldots*2020)=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge f(1)$ și, cum $f(1)=1$, obținem $x^2-2\ln x\ge 1$	**2p**
	$\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\ln\frac{2}{3}\ge 1$, deci $2\ln\frac{2}{3}\le\frac{4}{9}-1$, de unde obținem $\ln\frac{2}{3}\le-\frac{5}{18}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)+2020x-1\right)dx=\int_0^1 x^{2020}dx=\left.\frac{x^{2021}}{2021}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1^{2021}-0^{2021}}{2021}=\frac{1}{2021}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a funcției f, deci $F'(x)=f(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=2020x^{2019}-2020=2020\left(x^{2019}-1\right)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci orice primitivă F a funcției f este convexă pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	$\int_0^1\left(f(-x)-f(x)\right)e^x dx=\int_0^1 4040xe^x dx=4040\int_0^1 xe^x dx=4040xe^x\Big\|_0^1-4040\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=4040e-4040e^x\Big\|_0^1=4040e-4040e+4040=4040$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2}:0,5-\frac{1}{4}:0,25=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}-\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**3p**
	$f(-1)\cdot f(1)=0$	**2p**
3.	$3x-2=25$	**3p**
	$x=9$, care convine	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 1000=200$	**3p**
	Preţul după scumpire este $1000+200=1200$ de lei	**2p**
5.	$M(4,3)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$OM=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A și $B=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel	**3p**
	$AB=AC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(-2)-1\cdot 2=$	**3p**
	$=-2-2=-4$	**2p**
b)	$A-2B(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x & 2\\ 2y & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\det(A-2B(x,y))=\begin{vmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A\cdot B(x,y)=\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}$, $B(x,y)\cdot A=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$, de unde obţinem $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	$2020\circ(-2)=2020\cdot(-2)+2(2020+(-2))+2=$	**3p**
	$=2020\cdot(-2)+2\cdot 2020+2\cdot(-2)+2=-4+2=-2$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+2x+2y+4-2=$	**3p**
	$=x(y+2)+2(y+2)-2=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$\left(\frac{1}{x}+2\right)(x+2)-2=x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+2\right)(x+2)=x+2 \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+1\right)=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2+2(x-1)(x-1)'=$	**2p**
	$=3x^2+2(x-1)=3x^2+2x-2$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x^2+2x-2\right)}{x^3+(x-1)^2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2-2x}{x^3+x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$	**3p**
c)	Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=a$, situat pe graficul funcției f are panta egală cu $f'(a)$, deci este paralelă cu dreapta $y=3x+1 \Leftrightarrow f'(a)=3$	**2p**
	$3a^2+2a-5=0 \Leftrightarrow a=-\frac{5}{3}$ sau $a=1$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x-2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^5+x^3+2x+2-x^3-2x-2\right)dx=\int_{-1}^{1}x^5\,dx=\left.\frac{x^6}{6}\right\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3-3x-1\right)dx=\int_{0}^{2}e^x(-x+1)dx=e^x(-x+1)\Big\|_0^2-\int_{0}^{2}(-1)e^x dx=$	**3p**
	$=-e^2-1+e^2-1=-2$	**2p**
c)	F este primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=5x^4+3x^2+2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci F este convexă	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}:0,5\right)\cdot\frac{12}{13}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-1\right)\cdot\frac{12}{13}=\left(\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\right)\cdot\frac{12}{13}=$	**3p**
	$=\frac{13}{12}\cdot\frac{12}{13}=1$	**2p**
2.	$x_1+x_2=7$, $x_1x_2=10$	**2p**
	$2(x_1+x_2)-x_1x_2=2\cdot 7-10=4$	**3p**
3.	$5x+1=36$	**3p**
	$x=7$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele de două cifre care sunt multipli de 11 sunt 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 și 99, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$AO=6$, $BO=8$, $AB=10$	**3p**
	$h=\frac{AO\cdot BO}{AB}=\frac{6\cdot 8}{10}=\frac{24}{5}=4,8$	**2p**
6.	$\cos B=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AB}{5\sqrt{2}}$	**3p**
	$AB=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot(-2)=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$2A-A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2 & y\\ z+1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-3 & y\\ -2x+z+5 & -2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$x=3$, $y=0$, $z=1$	**3p**
2.a)	$0\circ 2=0\cdot 2+0^2+2^2-1=3$	**3p**
	$1\circ(0\circ 2)=1\circ 3=1\cdot 3+1^2+3^2-1=12$	**2p**

b)	$x\circ(-x)=x\cdot(-x)+x^2+(-x)^2-1=-x^2+x^2+x^2-1=x^2-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-1=3\Leftrightarrow x^2-4=0$, de unde obținem $x=-2$ sau $x=2$	**3p**
c)	$mn+m^2+n^2-1=-mn\Leftrightarrow m^2+n^2+2mn=1\Leftrightarrow(m+n)^2=1$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $(0,1)$ și $(1,0)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x\cdot\left(x^2+1-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2}{2}=1$	**2p**
c)	$f''(x)=\dfrac{4\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$, deci funcția f este convexă pe $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-3x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^2+3x-x^2-3x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=$	**2p**
	$=\left.\dfrac{x^4}{4}\right\|_{-1}^{1}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=0$	**3p**
b)	$\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3-x^2\right)e^x dx=\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2+3x-x^3-x^2\right)e^x dx=3\int_{0}^{1}xe^x dx=3(x-1)e^x\Big\|_{0}^{1}=$	**3p**
	$=3$	**2p**
c)	$F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+c$, $c\in\mathbb{R}$ și, cum $F(0)=1\Rightarrow c=1$, deci $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+1$	**3p**
	$\int_{0}^{1}\dfrac{f(x)}{F^2(x)}dx=\int_{0}^{1}\dfrac{F'(x)}{F^2(x)}dx=-\dfrac{1}{F(x)}\Big\|_{0}^{1}=-\dfrac{1}{F(1)}+\dfrac{1}{F(0)}=-\dfrac{12}{37}+1=\dfrac{25}{37}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{18}+\sqrt{2}-2^2=4-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{2}-4=$ $=(4-4)+(-4+3+1)\sqrt{2}=0$	**3p** **2p**
2.	$f(1)=1+a^2$, deci $1+a^2=2$ $a^2=1$, deci $a=-1$ sau $a=1$	**2p** **3p**
3.	$3x+1=4$ $x=1$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 5 numere impare, deci sunt 5 cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**
5.	A este mijlocul segmentului BC, unde C este simetricul lui B față de A, deci $3=\frac{3+x_C}{2}$ și $1=\frac{7+y_C}{2}$ $x_C=3$, $y_C=-5$	**3p** **2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=(\sin x-\cos x)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-3\cdot 3=$ $=4-9=-5$	**2p** **3p**
b)	$A\cdot M(x)=A\cdot(B+xI_2)=A\cdot B+xA$, $M(x)\cdot A=(B+xI_2)\cdot A=B\cdot A+xA$, pentru orice număr real x Cum $A\cdot B=B\cdot A$, obținem $A\cdot M(x)=M(x)\cdot A$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix}$, $A+M(x)=\begin{pmatrix}2+x & 4\\ 4 & 2+x\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A-3(A+M(x))=\begin{pmatrix}7-3x & 0\\ 0 & 7-3x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**

	$\begin{pmatrix}7-3x & 0\\ 0 & 7-3x\end{pmatrix}=I_2 \Leftrightarrow 7-3x=1$, de unde obținem $x=2$	**2p**
2.a)	$2020*(-3)=\frac{1}{3}\cdot 2020\cdot(-3)+2020+(-3)=$	**3p**
	$=-2020+2020-3=-3$	**2p**
b)	$6*x=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot x+6+x=3x+6$, $(6*x)*6=(3x+6)*6=\frac{1}{3}(3x+6)\cdot 6+3x+6+6=9x+24$	**3p**
	$9x+24=6 \Leftrightarrow x=-2$	**2p**
c)	$x*\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\cdot x\cdot\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}+x+\frac{1}{x}=\frac{3x^2+x+3}{3x}$, pentru orice număr real nenul x	**3p**
	$\frac{3x^2+x+3}{3x}=-3 \Leftrightarrow 3x^2+10x+3=0$, de unde obținem $x=-3$ sau $x=-\frac{1}{3}$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3-3x+3\right)'=3x^2-3=$	**3p**
	$=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+3}{x+1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-3$	**3p**
c)	$f(0)=3$, $f'(0)=-3$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-3x+3$	**3p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4+x+e^x-x-e^x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}x^4dx=\frac{x^5}{5}\Big\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$	**2p**
b)	$\int\limits_{1}^{e}\left(f(x)-x^4-e^x\right)\ln x\,dx=\int\limits_{1}^{e}x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big\|_{1}^{e}-\int\limits_{1}^{e}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\|_{1}^{e}=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$\int\limits_{0}^{a}\left(x^4+x+e^x\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}+e^x\right)\Big\|_{0}^{a}=\frac{a^5}{5}+\frac{a^2}{2}+e^a-1=\frac{2a^5+5a^2-10}{10}+e^a$	**3p**
	$\frac{2a^5+5a^2-10}{10}+e^a=\frac{5a^2+54}{10}+e^a \Leftrightarrow 2a^5=64$, deci $a=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{15}{16}+\sqrt[3]{-8}=\frac{30+5-3}{15}\cdot\frac{15}{16}+(-2)=$	**3p**
	$=\frac{32}{15}\cdot\frac{15}{16}-2=2-2=0$	**2p**
2.	$f(4)=0\Rightarrow -4+a=0$	**3p**
	$a=4$	**2p**
3.	$2x+1=25\Rightarrow 2x=24$	**3p**
	$x=12$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A care sunt multipli de 6 sunt 30, 60 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**1p**
5.	$M(5,5)$	**3p**
	$OM=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5}=\frac{12}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot B+A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B+B\cdot A-(A+B)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\log_2 x & 0\\ 0 & \log_3 y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x=1\\ \log_3 y=1\end{cases}$, de unde obținem $x=2$ și $y=3$, care convin	**3p**
2.a)	$2020*5=2020+\frac{5}{5}+1=$	**3p**

	$= 2020 + 1 + 1 = 2022$	**2p**
b)	$x * x = x + \frac{x}{5} + 1 = \frac{6x}{5} + 1$, $(x * x) * x = \left(\frac{6x}{5} + 1\right) * x = \frac{6x}{5} + 1 + \frac{x}{5} + 1 = \frac{7x}{5} + 2$	**2p**
	$\frac{7x}{5} + 2 = \frac{24}{5} \Leftrightarrow 7x + 10 = 24$, de unde obținem $x = 2$	**3p**
c)	$5^x + \frac{5^{x+1}}{5} + 1 = 11 \Leftrightarrow 5^x + 5^x = 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^x = 10$	**3p**
	$5^x = 5$, de unde obținem $x = 1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = -3x^2 + 3 =$	**3p**
	$= 3\left(1 - x^2\right) = 3(1 - x)(1 + x)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - 7}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$	**3p**
	$= f'(2) = -9$	**2p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$	**2p**
	$x \in [-1,1] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,1]$, $x \in [1,+\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ și, cum $f(1) = 11$, obținem $f(x) \leq 11$, pentru orice $x \in [-1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1} f(x) \cdot \left(x^2 + 1\right) dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \left(x^2 + 1\right) dx = \int\limits_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2} \Big\vert_{-1}^{1} =$	**3p**
	$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$	**2p**
b)	$\int\limits_{0}^{1} \left(x^2 + 1\right) e^x f(x)\, dx = \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 + 1\right) e^x \cdot \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \int\limits_{0}^{1} x e^x dx = (x - 1) e^x \Big\vert_{0}^{1} =$	**3p**
	$= 0 - (-1) e^0 = 1$	**2p**
c)	$\int\limits_{0}^{a} \left(f(x) - f(-x)\right) dx = \int\limits_{0}^{a} \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{-x}{x^2 + 1}\right) dx = \int\limits_{0}^{a} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln\left(x^2 + 1\right) \Big\vert_{0}^{a} = \ln\left(a^2 + 1\right)$	**2p**
	$\ln\left(a^2 + 1\right) = \ln(2a) \Rightarrow a^2 + 1 = 2a$, de unde obținem $a^2 - 2a + 1 = 0$, deci $a = 1$, care convine	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right):\frac{17}{60}=\left(\frac{60}{60}-\frac{40}{60}+\frac{45}{60}-\frac{48}{60}\right):\frac{17}{60}=$	**3p**
	$=\frac{17}{60}:\frac{17}{60}=1$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**3p**
	$f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)=0$	**2p**
3.	$4x-3=25\Rightarrow 4x=28$	**3p**
	$x=7$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele x din mulțimea A care verifică inegalitatea $x^2-2x\le 0\Leftrightarrow x(x-2)\le 0$ sunt 1 și 2, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$AO=6$	**2p**
	$BO=6\Rightarrow \Delta AOB$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=$	**3p**
	$=24$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(1))=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-0\cdot 1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$A\cdot A-2A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}2x-3 & x-2\\ x-2 & x-1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x-3 & x-2\\ x-2 & x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$, care convine	**2p**
2.a)	$(-1)*2020=(-1)\cdot 2020+(-1)+2020-2=$	**3p**
	$=-2020-1+2020-2=-3$	**2p**

b)	$x\cdot(2x)+x+2x-2=3 \Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0$	**3p**
	$x=-\frac{5}{2}$ sau $x=1$	**2p**
c)	$m*n=mn+m+n-2=m(n+1)+(n+1)-3=(m+1)(n+1)-3$, pentru orice numere naturale m și n	**2p**
	$(m+1)(n+1)-3=-1 \Leftrightarrow (m+1)(n+1)=2$ și, cum m și n sunt numerele naturale, obținem $(0,1)$ și $(1,0)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}=$	**2p**
	$=\frac{4x^2-5x+1}{x}=\frac{(x-1)(4x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x^2-5x+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(2x^2-5x+\ln x)'}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{4x^2-5x+1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2-5x+1}=0$	**2p**
c)	$f(1)=-3$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-3$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-x-1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^2+x+1-x^2-x-1\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)'=\frac{4x^3}{4}+\frac{3x^2}{3}+\frac{2x}{2}+1=$	**3p**
	$=x^3+x^2+x+1=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_{1}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}\cdot e^x dx=\int_{1}^{2}\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+1}\cdot e^x dx=\int_{1}^{2}(x+1)e^x dx=\left.xe^x\right\|_{1}^{2}=2e^2-e$	**3p**
	$2e^2-e=(ae)^2-e$, de unde obținem $a^2=2$, deci $a=-\sqrt{2}$ sau $a=\sqrt{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 16

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_5 5-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{5}{12}=1-\frac{6-4+3}{12}:\frac{5}{12}=1-\frac{5}{12}:\frac{5}{12}=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$f(n)=7\Rightarrow n^2+n+1=7\Rightarrow n^2+n-6=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**
3.	$x^2-9=x^2-6x+9\Rightarrow 6x=18$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele de două cifre de forma $\overline{aa}$ sunt 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 și 99, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$AB=4$, $d(C,AB)=4$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot d(C,AB)}{2}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A și $AC=\frac{BC}{2}$	**2p**
	$m(\sphericalangle B)=30^\circ$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)-2\cdot(-1)=$	**3p**
	$=2-(-2)=4$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $3A=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+3A+4I_2=\begin{pmatrix}2-6+4 & -6+6+0\\ 3-3+0 & -1-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}$, $xA+yI_2=\begin{pmatrix}-2x+y & 2x\\ -x & -x+y\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+y & 2x\\ -x & -x+y\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=5$, $y=12$	**2p**

2.a)	$2020*1=2\cdot 2020\cdot 1-2\cdot 2020-2\cdot 1+3=$ $=-2+3=1$	**3p** **2p**
b)	$x*y=2xy-2x-2y+2+1=2(xy-x-y+1)+1=$ $=2(x(y-1)-(y-1))+1=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
c)	$x*x=2(x-1)^2+1$, $(x*x)*x=4(x-1)^3+1$, pentru orice număr real x $4(x-1)^3+1=x\Leftrightarrow (x-1)\left(4(x-1)^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ sau $x=1$ sau $x=\dfrac{3}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=9x^2-9=$ $=9\left(x^2-1\right)=9(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=-1$, $f'(1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=-1$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$ $f(2019)\leq f(2020)$ și $f(2021)\leq f(2022)$, deci $f(2019)+f(2021)\leq f(2020)+f(2022)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^3 (f(x)+4)dx=\int_0^3 x^2dx=$ $=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_0^3=\dfrac{27}{3}=9$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1 \dfrac{1}{f(x)+5}dx=\int_0^1 \dfrac{1}{x^2+1}dx=\left.\operatorname{arctg} x\right\|_0^1=$ $=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\dfrac{\pi}{4}$	**3p** **2p**
c)	$\int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(\dfrac{1}{x^2}-4\right)dx=\left.\left(-\dfrac{1}{x}-4x\right)\right\|_{\frac{1}{a}}^{a}=\dfrac{3}{a}-3a$ $\dfrac{3}{a}-3a=-8\Leftrightarrow 3a^2-8a-3=0$ și, cum $a>0$, obținem $a=3$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 17

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_g = \sqrt{xy} = \sqrt{25 \cdot 144} =$	**3p**
	$= 5 \cdot 12 = 60$	**2p**
2.	$f(1) = 1 + m$	**2p**
	$1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$	**3p**
3.	$x + 4 = 25$	**3p**
	$x = 21$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 6 numere care **nu** sunt multipli de 3, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	**1p**
5.	$M(3,4)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$	**3p**
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	**3p**
	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 =$	**3p**
	$= 1 - 6 = -5$	**2p**
b)	$M(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A + M(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A + M(-1)\right) = -16$	**3p**
	$\det B = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16$, deci $\det\left(A + M(-1)\right) = \det B$	**2p**
c)	$M(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x+2 & 3x+1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A \cdot M(x) = \begin{pmatrix} x+6 & 10 \\ 2x+2 & 5 \end{pmatrix}$, $M(x) \cdot A - A \cdot M(x) = \begin{pmatrix} -4 & 3x-9 \\ 6-2x & 4 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix} -4 & 3x-9 \\ 6-2x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3$	**2p**
2.a)	$90 * 1 = 90 + 1 - 90 =$	**3p**
	$= 0 + 1 = 1$	**2p**

b)	$(x*y)*z=(x+y-90)*z=x+y-90+z-90=x+y+z-180$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**
	$x*(y*z)=x*(y+z-90)=x+y+z-90-90=x+y+z-180=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z	**3p**
c)	$(x^2)*(2x+1)=x^2+2x+1-90=x^2+2x-89$	**2p**
	$x^2+2x-15=0 \Leftrightarrow x=-5$ sau $x=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=12x^2-12=$	**3p**
	$=12(x^2-1)=12(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-4x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-12x+11}{x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-12+\frac{11}{x}\right)=-12$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]$, deci f este descrescătoare pe $[-1,1]$	**2p**
	Cum $f(-1)=19$, $f(1)=3$ și $f(1)\le f(x)\le f(-1)$, obținem $3\le f(x)\le 19$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^4 5x\,dx=\frac{5x^2}{2}\Big\vert_2^4=$	**3p**
	$=\frac{5}{2}\cdot(16-4)=30$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{5x^2+2020}{2}+\ln x\right)'=$	**2p**
	$=\frac{10x}{2}+\frac{1}{x}=5x+\frac{1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**3p**
c)	$\int_1^e(f(x)-5x)\ln x\,dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'\ln x\,dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{\ln^2 e}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}=\frac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=$	**3p**
	$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1=0$	**2p**
2.	$f(0)=3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=3$	**2p**
3.	$2x+1=4-x \Leftrightarrow 3x=3$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 45 de numere impare, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$AB=2$	**2p**
	A este mijlocul segmentului BC, deci $BC=2AB=4$	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2\cdot1-2\cdot1=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $xA=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=3$	**2p**
c)	$\det\left(A+I_2\right)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$, $\det\left(A-I_2\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$, $\det\left(aI_2\right)=a^2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a^2=2 \Leftrightarrow a=-\sqrt{2}$ sau $a=\sqrt{2}$	**2p**
2.a)	$(-1)\circ 2020=(-1)\cdot 2020+(-1)+2020-5=$	**3p**
	$=-1-5=-6$	**2p**

b)	$x \circ x = x^2 + 2x - 5$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 1$	**3p**
c)	$m \cdot (-2) + m + (-2) - 5 = 1 \cdot (-m) + 1 + (-m) - 5 \Leftrightarrow m = 3$	**3p**
	$m \circ (-m) = 3 \circ (-3) = 3 \cdot (-3) + 3 + (-3) - 5 = -14$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} =$	**3p**
	$= \dfrac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
	$f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este concavă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - 2)dx = \int_0^1 x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{1}{4}$	**2p**
b)	$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F(2) = 7 \Rightarrow c = -1$, deci $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x - 1$	**3p**
c)	$\int_0^1 e^x \left(f(x) - x^3 + x^2\right)dx = \int_0^1 e^x (x^2 + 2)dx = e^x (x^2 + 2)\Big\|_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx =$	**3p**
	$= 3e - 2 - 2\left(xe^x\Big\|_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = 3e - 4$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\frac{14}{12}=\frac{6-8+9}{12}:\frac{14}{12}=$	**3p**
	$=\frac{7}{12}\cdot\frac{12}{14}=\frac{1}{2}$	**2p**
2.	$f(1)=0\Rightarrow 1+a+1=0$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
3.	$3x-4=x+20\Rightarrow 2x=24$	**3p**
	$x=12$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea M are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 5 numere pare, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	Înălțimea din C a triunghiului ABC este distanța de la punctul C la dreapta AB	**3p**
	$d(C,AB)=4$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}$	**3p**
	$x\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5x & 5x\\ 5x & 5x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=\frac{1}{5}$	**2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, deci $A\cdot B-B\cdot A-C=\begin{pmatrix}-6 & -16\\ 14 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$2X=\begin{pmatrix}-6 & -16\\ 14 & 4\end{pmatrix}$, deci $X=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 7 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$2020\circ(-4)=2020\cdot(-4)+4\cdot 2020+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-16+12=-4$	**2p**

b)	$x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 =$	**2p**
	$= x(y+4) + 4(y+4) - 4 = (x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x \circ x = (x+4)^2 - 4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(x+4)^2 - 4 = x \Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ sau $x = -3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(4x^3\right)' + \left(6x^2\right)' + 5' =$	**2p**
	$= 12x^2 + 12x = 12x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x) - 4x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{12x^2 + 12x}{6x^2 + 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{12x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(6 + \frac{5}{x^2}\right)} =$	**3p**
	$= \dfrac{12}{6} = 2$	**2p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 0$	**2p**
	$x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$, $x \in [-1, 0] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$, $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2 \left(f(x) - 4x^2\right) dx = \int\limits_0^2 3x^3 dx = \dfrac{3x^4}{4}\Big\vert_0^2 =$	**3p**
	$= \dfrac{3}{4} \cdot 2^4 = 12$	**2p**
b)	$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{3x^4}{4} + \dfrac{4x^3}{3} + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F(0) = 2020 \Rightarrow c = 2020$, deci $F(x) = \dfrac{3x^4}{4} + \dfrac{4x^3}{3} + 2020$	**3p**
c)	$\int\limits_1^m \dfrac{f(x)}{x^2} dx = \int\limits_1^m (3x+4) dx = \left(\dfrac{3x^2}{2} + 4x\right)\Big\vert_1^m = \dfrac{3m^2}{2} + 4m - \dfrac{11}{2}$	**3p**
	$\dfrac{3m^2}{2} + 4m - \dfrac{11}{2} = \dfrac{17}{2} \Rightarrow 3m^2 + 8m - 28 = 0$ și, cum $m > 1$, obținem $m = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 20

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right):15=\frac{4-1}{2}\cdot\frac{9-1}{3}\cdot\frac{16-1}{4}:15=$	**3p**
	$=15:15=1$	**2p**
2.	$f(x)-f(-x)=x^2+5-\left((-x)^2+5\right)=$	**3p**
	$=x^2+5-x^2-5=0$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$4x-3=2x+1\Rightarrow 2x=4$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Soluțiile ecuației $x^2-3x+2=0$ sunt 1 și 2, care aparțin mulțimii A, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$m_{AB}=\frac{0-3}{3-0}=-1$	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta AB este $y=-x$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{6\cdot 4}{2}=$	**3p**
	$=12$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(B(0)\right)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=$	**3p**
	$=-9+10=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}-1+1 & 0\\ 0 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$B(x)=A-xI_2=\begin{pmatrix}3-x & -2\\ 5 & -3-x\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(B(x)\right)=\begin{vmatrix}3-x & -2\\ 5 & -3-x\end{vmatrix}=-9+x^2+10=$	**3p**
	$=x^2+1\geq 1$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$2020*(-1)=2020\cdot(-1)+2020+(-1)+4=$	**3p**
	$=-1+4=3$	**2p**
b)	$x*y=xy+x+y+1+3=$	**3p**
	$=x(y+1)+(y+1)+3=(x+1)(y+1)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$(m+1)(n+1)+3=2$	**2p**
	$(m+1)(n+1)=-1$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem $(-2,0)$ și $(0,-2)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=8x^3-8x=$	**3p**
	$=8x\left(x^2-1\right)=8x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=-5$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-5$	**3p**
c)	$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$, $x\in[-1,0]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,0]$ și $x\in[0,1]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,1]$	**3p**
	Cum $f(-1)=f(1)=-5$ și $f(0)=-3\Rightarrow -5\leq f(x)\leq -3$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^4\left(f(x)+\sqrt{x}\right)dx=\int_1^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_1^4=$	**3p**
	$=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2020\right)'=\frac{3x^2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=x^2-\sqrt{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_1^2\left(f(x)+\sqrt{x}\right)e^xdx=\int_1^2 x^2e^xdx=x^2e^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=4e^2-e-2\left(xe^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^xdx\right)=$	**3p**
	$=4e^2-e-2\left(2e^2-e\right)+2e^x\Big\vert_1^2=2e^2-e=e(2e-1)$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $3\left(2-\sqrt{20}\right)+\sqrt{180}=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(5x-1)=\lg 2+\lg 7$.

5p **4.** După o scumpire cu 30% un obiect costă 5200 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(4,8)$ și $C(4,0)$. Calculați distanța de la punctul B la dreapta AC.

5p **6**. Arătați că $\dfrac{2\cos 30^\circ}{2\operatorname{tg}45^\circ+1}=\operatorname{tg}30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a & 2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(10)\right)=10$.

5p **b)** Demonstrați că $\left(A(a)-A(b)\right)\left(A(a)-A(b)\right)=3(a-b)\left(A(a)-A(b)\right)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det\left(A(2)\right)+\det\left(A(3)\right)+\ldots+\det\left(A(n)\right)=35$.

2. Pe mulțimea $M=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\sqrt{\left(x^2-2\right)\left(y^2-2\right)+2}$.

5p **a)** Arătați că $4*\sqrt{3}=4$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului $x=\sqrt{6}$, în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **c)** Calculați $\sqrt{2}*\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}(\ln x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\dfrac{1}{e}$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{e}f(x)+4\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\in(-\infty,0] \\ \dfrac{3x-1}{x+1}, & x\in(0,+\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{-1}^{0} e^{x} f(x)\,dx = \frac{5-3e}{e}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt{11}\left(\sqrt{11}+1\right)-\left(\sqrt{11}+3\right)=8$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+6$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+2}=3\sqrt{3}$.
5p	**4.** Se consideră patru puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare. Calculați numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,2)$ și $N(2,1)$. Determinați coordonatele simetricului punctului M față de punctul N.
5p	**6**. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=3\sqrt{2}$, $BC=9$ și $AC=3\sqrt{5}$. Calculați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-10a & 8a\\ -5a & 1+4a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-5$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-6ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $A(m)\cdot A(n)=A(6-5mn)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-3x-3y+12$.
5p	**a)** Arătați că $1*3=3$.
5p	**b)** Demonstrați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele numere reale x pentru care $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x+2020$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=5(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,0]$.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=2025$ **nu** admite nicio soluție în intervalul $[-1,1]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.
5p	**a)** Arătați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0,\pi]$.
5p	**b)** Calculați $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=1$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(5+\frac{1}{2}\right)\left(5-\frac{1}{2}\right)=\frac{99}{4}$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+4$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=8-x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+1)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, prețul unei tablete este 630 de lei. Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,5)$. Calculați lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Arătați că $\cos^2 45°-\sin^2 30°=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}2+a & 2\\ 2 & 1+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det M=4$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(-a)+a^2\cdot I_2=M$, pentru orice număr real a, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $M\cdot X=A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-10$.

5p **a)** Arătați că $5*5=0$.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care $n^2*n<-4$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x^2-18$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3+2x^2+x-2}{x-1}=2$.

5p **c)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=12x+2020$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x^2+1\right)-2$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x+2\right)dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3+2\right)e^x\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real pozitiv m, știind că $\int_{1}^{2}f(x)\,dx=m^2+1$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=2$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-4x+m=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2=2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+1}=3x+1$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 25%, prețul unui obiect este 750 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$ și $B(8,6)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $OABC$ este paralelogram.
5p	**6**. Arătați că $\sqrt{3}\cos 30^\circ+\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cos 90^\circ=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(M(1))=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=2abM(0)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $X\cdot M(1)=M(0)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+4x+4y+3$.
5p	**a)** Arătați că $1*(-1)=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $x*y=4(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $x*\frac{1}{4}*(-x)=19$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este convexă.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+1)(f(x)-x^2)dx=1$.
5p	**b)** Calculați $\int_{-1}^1 x f(x)dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{n^2}{3}+\frac{\pi}{4}-1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $\left(3-3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{14}=1$.
5p	**2.** Determinați numerele reale m, știind că punctul $A(m,6)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{14-x}=\sqrt{3x+6}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să verifice inegalitatea $n(n-10)(n-11)\le 0$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(-1,4)$ şi $C(3,7)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.
5p	**6**. Arătaţi că $\sin 30°\cos 30°+2\sin 45°\cos 45°-\sin 60°\cos 60°=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x-3&1\\1&3-x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(1))=-5$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=10\cdot I_2$.
	2) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2x+y-3xy$.
5p	**a)** Arătaţi că $1*2=-2$.
5p	**b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $x*(x-1)=-1$.
5p	**c)** Dați exemplu de două numere iraționale a și b pentru care $a*b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x^4+5x^3$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=5x^2(x-3)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $-27\le f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[0,3]$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x+2, & x\in(-\infty,0)\\ e^x+1, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=e$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
5p	**c)** Calculați $\int_{-1}^1 xf(x)dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați primul termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\ge1}$ în care $b_3=12$ și rația $q=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x)\ge f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x+1)=\log_5(11-x)$.

5p **4.** Calculați $C_{11}^9-C_{11}^2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,4)$, $B(1,0)$ și $C(5,4)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

5p **6**. Arătați că $\frac{\sin 135°}{\cos 45°}=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & -3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A\cdot A\cdot A=A$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot X=I_2+3A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$.

5p **a)** Arătați că $2*2020=2$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n pentru care $m*n=13$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstrați că $xe^x\ge e^x-1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+4)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Calculați $\int_{-2}^0 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-3}^a f'(x)f''(x)\,dx=2\left(\frac{1}{(a+4)^4}-1\right)$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)-\left(2-\frac{4}{3}\right)=0$.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+3$ conține punctul $A(2,5)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+4}-2=x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$ și $B(2,-2)$. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și $C(4,a)$ sunt coliniare.

5p **6.** Diagonala pătratului $MNPQ$ are lungimea de $6\sqrt{2}$. Calculați perimetrul acestui pătrat.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A-B)=1$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $C=A\cdot A+B\cdot B$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot X=X\cdot B$, unde $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & y\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy+1}{x+y}$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $x*2=\frac{3}{2}$.

5p **c)** Calculați $\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8*\lg 10$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^{2020}+1, & x\in(0,1]\\ \frac{x+1}{x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă în $x_0=1$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x\,f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Calculați $\int_e^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x}\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^e \left(f(x)+g(x)\right)dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $1{,}75:0{,}25-2\left(\frac{17}{4}-2{,}25\right)=3$.
5p	**2.** Determinaţi imaginea funcţiei $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x+4)=4$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 20%, preţul unui produs este de 144 lei. Determinaţi preţul produsului înainte de ieftinire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,a)$ şi $B(5,0)$, unde a este număr real. Determinaţi numerele reale a, ştiind că segmentul AB are lungimea egală cu 5.
5p	**6**. Arătaţi că $\sin^2 130°+\cos^2 50°=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\det A=0$.
5p	**b)** Arătaţi că $A\cdot A+A=O_2$.
5p	**c)** Demonstraţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det X=\det(X+I_2)$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=-xy+x+y$.
5p	**a)** Arătaţi că $1\circ\sqrt{2}=1$.
5p	**b)** Demonstraţi că $x\circ y=-(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Determinaţi numărul real x pentru care $3^x\circ 5^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2-63$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2-9}$.
	2. Se consideră funcţiile $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^2}{x+1}$ şi $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$.
5p	**a)** Demonstraţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.
5p	**b)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{F(x)}dx=\ln\frac{8}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=2$ și $a_4=11$.
5p	**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x+2}-2=0$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre pare.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,5)$ și $B(3,1)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.
5p	**6**. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=8$, $AC=6$ și $BC=10$. Calculați $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det(A+I_3)=4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A\cdot A\cdot A+A=2A\cdot A$.
5p	**c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $B(x)=A+xI_3$ este inversabilă.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+ay+1$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $2020*0=2021$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Determinați numărul real a, știind că legea de compoziție „$*$" este asociativă.
5p	**c)** Pentru $a=-1$, determinați numărul real x pentru care $4^x*2^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x=3$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(2,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^e \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)}dx=1$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^2 f^2(x)dx$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_0^{2020} f(x)dx\leq\int_0^a f(x)dx$, pentru orice $a\in[2020,+\infty)$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $2{,}5:0{,}5-5\left(6{,}5-\frac{11}{2}\right)=0$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+mx+1=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1+x_2+2x_1x_2=1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1+\sqrt{x-2}=3$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,6)$, $B(4,6)$ și $C(-4,0)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC.
5p	**6.** Calculați $\cos A$, știind că A este unghi ascuțit astfel încât $\sin A=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det(A+I_2)=5$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A=4A$.
5p	**c)** Demonstrați că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $A\cdot X=X\cdot A$.
	2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy+x+y-1}{2}$.
5p	**a)** Arătați că $1*2=2$.
5p	**b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x*x\le 1$.
5p	**c)** Calculați $(-1)*0*1*\ldots*2020$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\ln\frac{2}{3}\le-\frac{5}{18}$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2020}-2020x+1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+2020x-1\right)dx=\frac{1}{2021}$.
5p	**b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $[1,+\infty)$.
5p	**c)** Calculați $\int_0^1\left(f(-x)-f(x)\right)e^x dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\frac{1}{2}:0,5-\frac{1}{4}:0,25=0$.
5p	**2.** Calculați $f(-1)\cdot f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-2}=5$.
5p	**4.** Un obiect costă 1000 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 20%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(6,3)$. Calculați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB.
5p	**6**. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=4$ și $B=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}$ și $B(x,y)=\begin{pmatrix}x&1\\y&-1\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-4$.
5p	**b)** Arătați că $\det\left(A-2B(x,y)\right)=0$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot B(x,y)=B(x,y)\cdot A$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+2(x+y)+2$.
5p	**a)** Arătați că $2020\circ(-2)=-2$.
5p	**b)** Demonstrați că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+(x-1)^2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=3x^2+2x-2$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\,f'(x)}{f(x)}=3$.
5p	**c)** Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta $y=3x+1$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3+2x+2$.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x-2\right)dx=0$.
5p	**b)** Arătați că $\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3-3x-1\right)dx=-2$.
5p	**c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}:0,5\right)\cdot\frac{12}{13}=1$.

5p **2.** Arătați că $2(x_1+x_2)-x_1x_2=4$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-7x+10=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x+1}=6$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(0,8)$. Determinați lungimea înălțimii din vârful O al triunghiului AOB.

5p **6**. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $BC=5\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B)=45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $2A-A\cdot A=I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, y și z, pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}x-2 & y\\ z+1 & 1\end{pmatrix}-I_2=O_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+x^2+y^2-1$.

5p **a)** Arătați că $1\circ(0\circ 2)=12$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ(-x)=3$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m\circ n=-mn$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+3x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-3x\right)dx=0$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x) - x^3 - x^2 \right) e^x dx = 3$.

5p **c)** Se consideră funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(0) = 1$. Demonstrați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \frac{25}{37}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 13

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{18}+\sqrt{2}-2^2=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+a^2$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a, pentru care $f(1)=2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+1}=3^4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,7)$. Determinați coordonatele simetricului punctului B față de punctul A.

5p **6**. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=B+xI_2$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot M(x)=M(x)\cdot A$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A-3\big(A+M(x)\big)=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{3}xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $2020*(-3)=-3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(6*x)*6=6$.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x*\frac{1}{x}=-3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x^2-3\right)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x+1}=-3$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+x+e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\frac{2}{5}$.

5p **b)** Arătați că $\int_{1}^{e}\left(f(x)-x^4-e^x\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_{0}^{a}f(x)dx=\frac{5a^2+54}{10}+e^a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 14

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{15}{16}+\sqrt[3]{-8}=0$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(4,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x+1}=5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 6.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ şi $B(7,5)$. Determinaţi lungimea segmentului OM, unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x=\frac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg} x=\frac{12}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=1$.

5p **b)** Arătaţi că $B\cdot B+A=O_2$.

5p **c)** Determinați $x,y\in(0,+\infty)$, pentru care $A\cdot B+B\cdot A-(A+B)=\begin{pmatrix}\log_2 x & 0\\ 0 & \log_3 y\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+\frac{y}{5}+1$.

5p **a)** Arătați că $2020*5=2022$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $(x*x)*x=\frac{24}{5}$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $5^x*5^{x+1}=11$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3+3x+9$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-7}{x-2}=-9$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 11$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\left(x^2+1\right)dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_{0}^{a}\left(f(x)-f(-x)\right)dx=\ln(2a)$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 15

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right):\frac{17}{60}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x-3}=5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să verifice inegalitatea $x^2-2x\le 0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$ și $B(6,0)$. Arătați că triunghiul AOB este isoscel.

5p **6**. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A cu $AB=6$ și $AC=8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}-1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A-2A=I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=I_2$.

2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y-2$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*2020=-3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(2x)=3$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=-1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(4x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=0$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-x-1\right)dx=0$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\int_{1}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}\cdot e^x dx=(ae)^2-e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 16

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\log_5 5-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{5}{12}=0$.

5p **2.** Determinaţi numărul natural n pentru care punctul $A(n,7)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-9}=x-3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie de forma $\overline{aa}$, unde a este cifră nenulă.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(5,4)$ şi $C(3,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați măsura unghiului B al triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=3$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=4$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+3A+4I_2=O_2$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x și y astfel încât $A\cdot A\cdot A=xA+yI_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Arătați că $2020*1=1$.

5p **b)** Demonstraţi că $x*y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $(x*x)*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3-9x+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=9(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(2019)+f(2021)\le f(2020)+f(2022)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 (f(x)+4)\,dx=9$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 \frac{1}{f(x)+5}\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(\frac{1}{x}\right)dx=-8$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 17

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că media geometrică a numerelor $x=25$ și $y=144$ este egală cu 60.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care $f(1)=0$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+4}=5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să **nu** fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$ și $B(8,4)$. Determinați lungimea medianei din vârful O al triunghiului AOB.

5p **6.** Calculați $\sin x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A+M(-1)\right)=\det B$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot A-A\cdot M(x)=B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+y-90$.

5p **a)** Arătați că $90*1=1$.

5p **b)** Demonstrați că $(x*y)*z=x*(y*z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x^2\right)*(2x+1)=-74$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-12x+11$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=12(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-4x^3}{x}$.

5p **c)** Demonstrați că $3\le f(x)\le 19$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=30$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{5x^2+2020}{2}+\ln x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați $\int_1^e\left(f(x)-5x\right)\ln x\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 18

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=0$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{2x+1}=7^{4-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(2,5)$. Determinați lungimea segmentului BC, unde punctul C este simetricul punctului B față de punctul A.

5p **6.** Calculați $\sin x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(A+I_2\right)+\det\left(A-I_2\right)=\det\left(aI_2\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+y-5$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 2020=-6$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=-2$.

5p **c)** Știind că m este număr real astfel încât $m\circ(-2)=1\circ(-m)$, calculați $m\circ(-m)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-2\right)dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(2)=7$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 e^x\left(f(x)-x^3+x^2\right)dx=3e-4$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 19

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\frac{14}{12}=\frac{1}{2}$.
5p	**2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(1,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-4}=\sqrt{x+20}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$, acesta să fie număr par.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$, $B(4,4)$ și $C(4,8)$. Determinați lungimea înălțimii din C a triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătați că $\sin x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-2$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $x(A+B)=C$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot B-B\cdot A=2X+C$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.
5p	**a)** Arătați că $2020\circ(-4)=-4$.
5p	**b)** Demonstrați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+6x^2+5$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=12x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-4x^3}$.
5p	**c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+4x^2$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-4x^2\right)dx=12$.
5p	**b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=2020$.
5p	**c)** Determinați numărul real m, $m>1$, știind că $\int_1^m\frac{f(x)}{x^2}dx=\frac{17}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 20

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right):15=1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5$. Arătați că $f(x)-f(-x)=0$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x-3}=\sqrt{2x+1}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-3x+2=0$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ şi $B(3,0)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta AB.
5p	**6**. Calculați aria rombului $ABCD$, știind că $AC=6$ și $BD=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=A-xI_2$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(B(0))=1$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\det(B(x))\geq 1$, pentru orice număr real x.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziţie $x*y=xy+x+y+4$.
5p	**a)** Arătați că $2020*(-1)=3$.
5p	**b)** Demonstrați că $x*y=(x+1)(y+1)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^4-4x^2-3$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=8x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $-5\leq f(x)\leq -3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\sqrt{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^4\left(f(x)+\sqrt{x}\right)dx=21$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2020$ este o primitivă a funcției f.
5p	**c)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+\sqrt{x}\right)e^x dx=e(2e-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=$	**3p**
	$=2\cdot 3=6$	**2p**
2.	$a^2-4a+2=2 \Leftrightarrow a^2-4a=0$	**3p**
	$a=0$ sau $a=4$	**2p**
3.	$x-1=9$	**3p**
	$x=10$, care convine	**2p**
4.	$x-\frac{10}{100}\cdot x=180$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$AB=BC \Rightarrow CD$ este înălțime în ΔABC, unde $D(0,1)$ este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CD=3$	**2p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ-\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-3\cdot 0=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**2p**
	$3A-A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 0 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2I_2$	**3p**
c)	$xA-I_2=\begin{pmatrix}x-1 & 3x\\ 0 & 2x-1\end{pmatrix}$, $(xA-I_2)(xA-I_2)=\begin{pmatrix}(x-1)^2 & 9x^2-6x\\ 0 & (2x-1)^2\end{pmatrix}$, $5A-I_2=\begin{pmatrix}4 & 15\\ 0 & 9\end{pmatrix}$	**3p**
	Cum $(x-1)^2=4$, $9x^2-6x=15$ și $(2x-1)^2=9$, obținem $x=-1$	**2p**
2.a)	$3\circ(-1)=3^2+(3+1)(-1+1)+(-1)^2=$	**3p**
	$=9+4\cdot 0+1=10$	**2p**
b)	$x\circ y=x^2+(x+1)(y+1)+y^2=$	**2p**
	$=y^2+(y+1)(x+1)+x^2=y\circ x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**3p**

c)	$x \circ 1 = x^2 + 2(x+1) + 1^2 = x^2 + 2x + 1 + 2 =$	**3p**
	$= (x+1)^2 + 2 \geq 2$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (x-1)' \ln x + (x-1)(\ln x)' =$	**3p**
	$= \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$f(1) = 0$, $f'(1) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = 0$	**3p**
c)	$x \in (0,1] \Rightarrow \ln x \leq 0$ și $1 - \frac{1}{x} \leq 0$	**3p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice număr real $x \in (0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+1) f(x)\, dx = \int_0^1 (x^2 + 1 + x - 2)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right) \Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{6}$	**2p**
b)	$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \left(1 + \frac{t}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \left(t + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - 2\operatorname{arctg} t \right) \Big\|_0^x =$	**3p**
	$= x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
c)	$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x}{x^2+1}$, pentru orice număr real x, $x \neq 0$	**2p**
	$\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln(x^2+1) \Big\|_1^2 = \ln \frac{5}{2}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{3}=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+2$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=3$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, un obiect costă 180 de lei. Determinaţi preţul iniţial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$, $B(-4,1)$ și $C(0,4)$. Determinaţi lungimea înălțimii din vârful C în triunghiul ABC.

5p **6**. Arătați că $\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ-\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $3A-A\cdot A=2I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $(xA-I_2)(xA-I_2)=5A-I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2+(x+1)(y+1)+y^2$.

5p **a)** Arătați că $3\circ(-1)=10$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ 1\geq 2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=-\frac{1}{6}$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=0$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\ln\frac{5}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(10+\frac{1}{2}\right)\left(10-\frac{1}{2}\right)=100-\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{400-1}{4}=\frac{399}{4}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x+1=10-x$	**3p**
	$3x=9\Rightarrow x=3$	**2p**
3.	$x^2+13=7^2\Rightarrow x^2-36=0$	**3p**
	$x=-6$ sau $x=6$, care convin	**2p**
4.	$p-\frac{20}{100}\cdot p=800$, unde p este prețul tabletei înainte de ieftinire	**3p**
	$p=1000$ de lei	**2p**
5.	$AB=6$	**2p**
	$AM=\frac{AB}{2}=3$	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$2\sin^2 30^\circ-\sin^2 45^\circ=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\cdot\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-1\cdot1=$	**3p**
	$=-1-1=-2$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(-a)=\begin{pmatrix}a+1&1\\1&a-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a+1&1\\1&-a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-a^2&0\\0&2-a^2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\left(2-a^2\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\left(2-a^2\right)I_2$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=-1\neq0$, deci există $\left(A(1)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=A^{-1}(1)\cdot A(2)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$3*2=3^2+3\cdot2-3-2+1=$	**3p**
	$=9+6-3-2+1=11$	**2p**

b)	$x*(-x)=x^2+x\cdot(-x)-x-(-x)+1=$	**3p**
	$=x^2-x^2-x+x+1=1$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$2^{2x}+4\cdot 2^x-2^x-4+1=1 \Leftrightarrow 2^{2x}+3\cdot 2^x-4=0 \Leftrightarrow \left(2^x+4\right)\left(2^x-1\right)=0$	**3p**
	$2^x=1$, de unde obținem $x=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)\left(x^2+2x+2\right)-\left(x^2+2x+3\right)(2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{(2x+2)\left(x^2+2x+2-x^2-2x-3\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\dfrac{-2(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$; pentru $x\in(-\infty,-1]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și pentru $x\in[-1,+\infty)$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $f(-1)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, f este continuă și $f(x)\neq 1$, pentru orice număr real x, deci $\operatorname{Im} f=(1,2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\,dx=\int_0^1 (x+2)\,dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big\|_0^1=\dfrac{5}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^1\left(f^2(x)-1\right)dx=\int_0^1\left(\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4}-1\right)dx=\int_0^1\dfrac{4x}{x^2+4}\,dx=$	**2p**
	$=2\ln\left(x^2+4\right)\Big\|_0^1=2\ln 5-2\ln 4=2\ln\dfrac{5}{4}$	**3p**
c)	$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}\,dt+\int_0^x\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}\,dt=\left(\sqrt{t^2+4}+2\ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)\right)\Big\|_0^x=$	**3p**
	$=\sqrt{x^2+4}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)-2-2\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(10+\frac{1}{2}\right)\left(10-\frac{1}{2}\right)=\frac{399}{4}$.

5p **2.** Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=10-x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7\left(x^2+13\right)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 20%, preţul unei tablete este 800 de lei. Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(2,7)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB. Calculați lungimea segmentului AM.

5p **6**. Arătați că $2\sin^2 30°-\sin^2 45°=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(-a)=\left(2-a^2\right)I_2$, pentru orice număr real a, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=A(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+xy-x-y+1$.

5p **a)** Arătaţi că $3*2=11$.

5p **b)** Demonstrați că $x*(-x)=1$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $2^x*4=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f^2(x)-1\right)dx=2\ln\frac{5}{4}$.

5p **c)** Determinați $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva lui f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$10-2\cdot 3=4$	**2p**
	$10+2\cdot 3=16 \Rightarrow (10-2\cdot 3)(10+2\cdot 3)=4\cdot 16=64$	**3p**
2.	$x_1+x_2=7$	**2p**
	$x_1x_2=10 \Rightarrow 2(x_1+x_2)-x_1x_2=14-10=4$	**3p**
3.	$\log_2(x-2020)=\log_2 3^2 \Rightarrow x-2020=9$	**3p**
	$x=2029$, care convine	**2p**
4.	10% din 200 reprezintă $\frac{10}{100}\cdot 200=20$	**3p**
	Prețul după scumpire este $200+20=220$ de lei	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(3,4)$	**2p**
	$OM=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$	**3p**
6.	$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\cos 150°=\cos(180°-30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 60°+\cos 150°=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 9\\ 0 & -2\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-2)-0\cdot 9=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$B(x)\cdot B(-x)=\begin{pmatrix}-x^2 & 6x^2\\ 0 & -x^2\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot B(-x)+B(x)=\begin{pmatrix}-x^2+x & 6x^2-3x\\ 0 & -x^2+x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}-x^2+x & 6x^2-3x\\ 0 & -x^2+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det(B(1))=1$, $(B(1))^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(B(1))^{-1}\cdot A \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$3\circ\frac{1}{3}=\frac{9+\frac{1}{9}}{3\cdot\frac{1}{3}}=$	**3p**
	$=9+\frac{1}{9}=\frac{82}{9}$	**2p**
b)	$x\circ y-2=\frac{x^2+y^2}{xy}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}$	**3p**
	Cum $x>0$, $y>0$ și $(x-y)^2\geq 0$, obținem $x\circ y\geq 2$, pentru orice $x,\ y\in M$	**2p**
c)	$a^4+\frac{1}{a^4}-2=0\Leftrightarrow\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2=0$, deci $a^4=1$	**3p**
	$a=-1$, care nu convine, $a=1$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3-12x+3\right)'=3x^2-12=$	**3p**
	$=3\left(x^2-4\right)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-(-6)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=$	**3p**
	$=3(3-2)(3+2)=15$	**2p**
c)	$x\in[-2,2]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-2,2]$	**2p**
	Cum $f(-2)=19$ și $f(2)=-13$, obținem $-13\leq f(x)\leq 19$, pentru orice $x\in[-2,2]$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^5-1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^5+x+1-x^5-1\right)dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\vert_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$	**3p**
b)	$\int_{0}^{1}x^{2020}\left(f(x)-x-1\right)dx=\int_{0}^{1}x^{2025}dx=\frac{x^{2026}}{2026}\Big\vert_{0}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2026}$	**2p**
c)	$g(x)=1+\frac{1}{x}\Rightarrow V=\pi\int_{1}^{2}g^2(x)\,dx=\pi\int_{1}^{2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(x+2\ln x-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_{1}^{2}=\pi\left(2\ln 2+\frac{3}{2}\right)$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $(10-2\cdot 3)(10+2\cdot 3)=64$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-7x+10=0$. Arătați că $2(x_1+x_2)-x_1x_2=4$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-2020)=2\log_2 3$.
5p	**4.** Un obiect costă 200 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(4,4)$. Calculați distanța de la punctul $O(0,0)$ la mijlocul segmentului AB.
5p	**6**. Arătați că $\sin 60° + \cos 150° = 0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & -3x\\ 0 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=4$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $B(x)\cdot B(-x)+B(x)=A$.
5p	**c)** Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $B(1)\cdot X=A$.
	2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.
5p	**a)** Arătați că $3\circ\dfrac{1}{3}=\dfrac{82}{9}$.
5p	**b)** Demonstrați că $x\circ y\geq 2$, pentru orice $x,\ y\in M$.
5p	**c)** Determinați $a\in M$, pentru care $a^2\circ\dfrac{1}{a^2}=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x^2-12)+3$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+6}{x-3}=15$.
5p	**c)** Demonstrați că $-13\leq f(x)\leq 19$, pentru orice $x\in[-2,2]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x+1$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^5-1\right)dx=0$.
5p	**b)** Calculați $\displaystyle\int_{0}^{1}x^{2020}\left(f(x)-x-1\right)dx$.
5p	**c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}\left(f(x)-x^5\right)$ este egal cu $\pi\left(2\ln 2+\dfrac{3}{2}\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{5}\left(1+2\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}=\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}=$	**3p**
	$=2\cdot5=10$	**2p**
2.	$f(1)=1^2-3\cdot1+1=-1$	**2p**
	$f(2)=2^2-3\cdot2+1=-1$, deci $f(1)=f(2)$	**3p**
3.	$x^2-21=4\Rightarrow x^2-25=0$	**3p**
	$x=-5$ sau $x=5$, care convin	**2p**
4.	$x+\frac{10}{100}\cdot x=220$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=2$	**3p**
	$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=6$	**2p**
6.	$m(\sphericalangle A)=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$	**3p**
	$\cos A=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & -4\end{vmatrix}=1\cdot(-4)-(-1)\cdot6=$	**3p**
	$=-4+6=2$	**2p**
b)	$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot A=-B$, deci $B\cdot A+B=O_2$	**2p**
c)	$B+nA=\begin{pmatrix}1+n & 2+6n\\ 2-n & 4-4n\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B+nA)=\begin{vmatrix}1+n & 2+6n\\ 2-n & 4-4n\end{vmatrix}=2n^2-10n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Cum $\det B=0$, obținem $2n^2-10n=2n$, deci $n=0$ sau $n=6$, care convin	**3p**
2.a)	$1\circ(-1)=1+2(-1)+1=$	**3p**
	$=1-2+1=0$	**2p**
b)	$x\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=x+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=$	**3p**
	$=x+(-1)+1=x$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	Presupunem că legea de compoziție „$\circ$” admite elementul neutru $e \Rightarrow 0 \circ e = e \circ 0 = 0$	**3p**
	$0 \circ e = 0 \Leftrightarrow 2e+1=0 \Leftrightarrow e=-\frac{1}{2}$, $e \circ 0 = 0 \Leftrightarrow e+1=0 \Leftrightarrow e=-1$, contradicție, deci legea de compoziție „$\circ$” nu admite element neutru	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x\left(x^2+1-x^2-2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	Dacă $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\ln\left(x^2+1\right)$, atunci $g'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci g este crescătoare pe $[0,1]\Rightarrow g(x)\leq g(1)$, pentru orice $x\in[0,1]$	**3p**
	Cum $g(1)=\frac{3}{2}+\ln 2<\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$, obținem $g(x)<\frac{5}{2}$, deci $f(x)+\ln\left(x^2+1\right)<\frac{5}{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^2 (x+1)f(x)\,dx=\int\limits_0^2 (x+1)\cdot\frac{e^x}{x+1}\,dx=\int\limits_0^2 e^x dx=e^x\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=e^2-e^0=e^2-1$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln\lvert f(x)\rvert\Big\vert_0^1=\ln\frac{e^x}{x+1}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\ln\frac{e}{2}=1-\ln 2$	**2p**
c)	$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{x+1}\,dx+\int\limits_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=\int\limits_0^1 e^x\left(\ln(x+1)\right)'dx+\int\limits_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=$	**3p**
	$=e^x\ln(x+1)\Big\vert_0^1-\int\limits_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx+\int\limits_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=e\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{5}\left(1+2\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}=10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. Arătați că $f(1)=f(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2-21\right)=\log_5 4$.

5p **4.** După o scumpire cu 10%, un obiect costă 220 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,8)$ și $B(0,4)$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB, determinați coordonatele punctului M.

5p **6**. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=60°$. Calculați cosinusul unghiului A.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $B\cdot A+B=O_2$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $\det(B+nA)=\det B+n\det A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+2y+1$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ(-1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+\ln\left(x^2+1\right)<\frac{5}{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=e^2-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=1-\ln 2$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=e\ln 2$.