Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi \Rightarrow 2\overline{z}-z=a-3bi$, unde a și b sunt numere reale	**3p**
	$a-3bi=1-3i \Rightarrow a=1$ și $b=1$, deci $z=1+i$	**2p**
2.	$y_V=0 \Leftrightarrow \Delta=0$	**3p**
	Cum $\Delta=m^2-4$, obținem $m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$2\lg x=\lg(x+2) \Rightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifrele distincte și impare are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Panta dreptei d este $m_d=1 \Rightarrow$ panta unei drepte perpendiculare pe dreapta d este $m=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $y=-x-3$	**2p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin x-\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin x\right)=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x-\cos x-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}2m&1&1\\1&2m&1\\1&1&2m\end{vmatrix}=2(m+1)(2m-1)^2$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m=-1$ sau $m=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$a-b=\dfrac{1}{3}$, $b-c=\dfrac{1}{3}$ și $a-c=\dfrac{2}{3}$	**3p**
	Deoarece $a-b\notin\mathbb{Z}$, $b-c\notin\mathbb{Z}$ și $a-c\notin\mathbb{Z} \Rightarrow$ cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg	**2p**
2.a)	$x*y=4xy+3x+3y+\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{4}=$	**2p**
	$=4x\left(y+\dfrac{3}{4}\right)+3\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x*x=4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}$, $x*x*x=16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}$, pentru orice număr real x $16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
c)	$4\left(ae^x-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(ae^y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=ae^{x+y}-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y $4a^2=a$, deci $a=0$ sau $a=\frac{1}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=16x-\frac{1}{x}=$ $=\frac{16x^2-1}{x}=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=8$, $f'(1)=15$, deci ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=15x-7$ $15\cdot\frac{2}{3}-7=3$, deci punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$ Cum $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{1}{2}$, obținem $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1(x+3)f(x)dx=\int_0^1(2x+3)dx=\left(x^2+3x\right)\Big\|_0^1=$ $=1+3-0=4$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x+3}dx=\int_0^1\left(2-\frac{3}{x+3}\right)dx=2x\Big\|_0^1-3\ln(x+3)\Big\|_0^1=$ $=2-3(\ln 4-\ln 3)=2-3\ln\frac{4}{3}$	**3p** **2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+3)^n dx=e^x(2x+3)^n\Big\|_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+3)^{n-1}dx=$ $=e\cdot 5^n-3^n-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}-z=1-3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{\lg x}{\lg(x+2)}=\frac{1}{2}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,2)$ și dreapta d de ecuație $y=x+1$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.
5p	**6.** Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.
5p	**b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.
5p	**c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\frac{3}{2}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinaţi numărul real x pentru care $x*x*x=-\frac{1}{2}$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale a, ştiind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x+3)f(x)dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1$, $\left\|2-\sqrt{2}\right\|=2-\sqrt{2}$	**2p**
	$n=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$11-x\geq 1-11x\Leftrightarrow 10x\geq -10$	**3p**
	$x\in[-1,+\infty)$	**2p**
3.	$(3\cdot 2)^x\cdot 2=72\Leftrightarrow 6^x=36$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**3p**
5.	$AB=4$, $BC=2$	**2p**
	ΔABC este dreptunghic în B, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{2\cdot 4}{2}=4$	**3p**
6.	$A=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$	**2p**
	$R=\frac{BC}{2}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&y-2+x-2&0\\0&1&0\\0&0&e^{x-2}\cdot e^{y-2}\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y-4&0\\0&1&0\\0&0&e^{x+y-4}\end{pmatrix}=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(1+2+\ldots+10-2\cdot 9)=A\left(m^2+m+17\right)\Leftrightarrow m^2+m-20=0$	**3p**
	$m=-5$ sau $m=4$	**2p**
2.a)	$f(1)=a+2$	**2p**
	$f(-1)=a-10\Rightarrow f(1)-f(-1)=a+2-a+10=12$	**3p**

b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2 \Leftrightarrow f(2)=0$	**2p**
	$f(2)=a+2$, deci $a=-2$	**3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$	**2p**
	$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$, deci pătratele rădăcinilor sunt 1, 1 și 4; cum $x_1+x_2+x_3=4$, obținem rădăcinile 1, 1 și 2, deci $a=-2$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=-\frac{\ln x}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$2-\ln a=0 \Leftrightarrow a=e^2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(0,e^2\right)$, deci f este strict crescătoare pe $\left(0,e^2\right)$	**2p**
	$0<2<3<e^2 \Rightarrow f(2)<f(3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2<\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3 \Rightarrow \sqrt{3}\ln 2<\sqrt{2}\ln 3$, deci $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\left(4x-x^2\right)dx=\left.\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=18-9=9$	**2p**
b)	$\int_1^2\frac{2-x}{f(x)}dx=\int_1^2\frac{2-x}{4x-x^2}dx=\left.\frac{1}{2}\ln\left(4x-x^2\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_{n+1}-4I_n=\int_0^4 f^{n+1}(x)dx-4\int_0^4 f^n(x)dx=\int_0^4 f^n(x)\left(4x-x^2-4\right)dx=-\int_0^4 f^n(x)(x-2)^2\,dx$	**3p**
	$f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,4] \Rightarrow f^n(x)(x-2)^2\geq 0$, deci $I_{n+1}-4I_n\leq 0 \Rightarrow I_{n+1}\leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=11-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-11x$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\geq g(x)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x\cdot 2^{x+1}=72$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(1,3)$ și $C(1,5)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris ΔABC, știind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{x-2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A\left(m^2+m+17\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomului f sunt numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe axa Oy.

5p **c)** Demonstrați că $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=9$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^4 f^n(x)dx$. Demonstraţi că $I_{n+1} \le 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$n=\log_3\left(\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\right)=\log_3(7-4)=$	**3p**
	$=\log_3 3=1\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-1=x^2+6x+3\Leftrightarrow x^2+4x+4=0$	**2p**
	Coordonatele sunt $x=-2$ și $y=f(-2)=-5$	**3p**
3.	$(x+2)^3=(2-x)^3\Leftrightarrow x+2=2-x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Cifra zecilor poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere	**3p**
5.	$NP=2$	**2p**
	Punctul P aparține segmentului MN, deci $MP=MN-NP=1$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(2\pi-x)=-\sin x$	**3p**
	$\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=\sin x+\sin x+(-\sin x)+(-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2,3))=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+1+18-4-6-9=12$	**3p**
b)	$\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)=\begin{vmatrix}n^2&n&1\\1&n^2&n\\n^2&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\1&n^2&n\\1&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\0&n^2-n&n-1\\0&1-n&n-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=\left(n^2+n+1\right)(n-1)^2(n+1)\geq 0$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$B=\begin{pmatrix}x^2+x&1&x\\2x&x^2&1\\x^2+1&x&x\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=\begin{pmatrix}x^3+2x^2+1&2x&x^2+x\\3x^2+x&x^3+1&2x\\x^3+x^2+2x&x^2+x&x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	Inversa matricei B este matricea $A(x,0)\Leftrightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=I_3$, deci $x=0$	**2p**
2.a)	$f(1)=n\cdot 1^n+1^2-n\cdot 1-1=$	**3p**
	$=n+1-n-1=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**

b)	Pentru n număr natural impar, $n \geq 3$, $f(-1) = n \cdot (-1)^n + (-1)^2 - n \cdot (-1) - 1 = 0$, deci polinomul f este divizibil cu $X+1$	**2p**
	$f(1) = 0 \Rightarrow f$ este divizibil cu $X-1$, deci polinomul f este divizibil cu $X^2 - 1$	**3p**
c)	Dacă $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este o rădăcină a polinomului f care are coeficienții întregi, atunci $\alpha = \frac{1}{d}$, unde $d \in \mathbb{Z}^* \setminus \{\pm 1\}$ este un divizor al lui n	**1p**
	$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{n}{d^n} + \frac{1}{d^2} - \frac{n}{d} - 1 = 0 \Rightarrow d^{n-2}\left(d^2 + nd - 1\right) = n \Rightarrow d^{n-2}/n$, deci $\lvert d\rvert^{n-2} \leq n$	**2p**
	Cum $\lvert d\rvert^{n-2} \geq 2^{n-2} > n$ pentru orice număr natural n, $n \geq 5$, obținem o contradicție, deci polinomul f nu are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' - (x)' = \frac{1}{x^2+1} - 1 =$	**2p**
	$= \frac{1 - x^2 - 1}{x^2+1} = -\frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1\right) = -1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f(x) + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\operatorname{arctg} x - x + x\right) = \frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y = -x + \frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f(x) + g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(f(x) + g(x)\right)' = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f(0) + g(0) = \frac{\pi}{2}$, obținem că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este concavă pe $(0, +\infty)$	**3p**
c)	$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx \geq 0$, deci $I_{n+1} \geq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$0 \leq I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{-x^2} dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1dx = 1 - \frac{1}{n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent	**1p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\log_3\left(\sqrt{7}-2\right)+\log_3\left(\sqrt{7}+2\right)$ este natural.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+6x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)^3=(2-x)^3$.

5p **4.** Calculați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.

5p **5.** Punctele M, N și P verifică relația $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$. Calculați lungimea segmentului MP, știind că $MN=3$.

5p **6.** Arătați că $\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=12$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

2. Se consideră polinomul $f=nX^n+X^2-nX-1$, unde n este număr natural, $n\geq 3$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

5p **b)** Arătați că, dacă n este număr natural impar, $n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg} x+x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\dfrac{e-1}{e}$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=5+\sqrt{5}$	**2p**
	Cum $2<\sqrt{5}<3$, obținem $[a]=5+\left[\sqrt{5}\right]=7$	**3p**
2.	$(f\circ f)(x)=x+2m$, $f(x+1)=x+1+m$	**2p**
	$x+2m=x+1+m$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}\Leftrightarrow 4x+1\ge 3x+5$	**3p**
	$x\in[4,+\infty)$	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel puțin 3 elemente ale mulțimii A este $C_{10}^3+C_{10}^4+\dots+C_{10}^{10}=$	**3p**
	$=2^{10}-C_{10}^0-C_{10}^1-C_{10}^2=1024-1-10-45=968$	**2p**
5.	$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram	**2p**
	$m(\sphericalangle M)=90^\circ$, deci $MNQP$ este dreptunghi și $MQ=NP=10$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}+2=0\Leftrightarrow\frac{(\operatorname{tg}x+1)^2}{\operatorname{tg}x}=0$	**2p**
	$\operatorname{tg}x=-1$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x&0&2x-1\\0&\frac{1}{2}&0\\2x-1&0&x\end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}+0+0-\frac{(2x-1)^2}{2}-0-0=\frac{-3x^2+4x-1}{2}$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=1$	**2p**
b)	$A(x)+A(1-x)=\begin{pmatrix}x&0&2x-1\\0&\frac{1}{2}&0\\2x-1&0&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-x&0&1-2x\\0&\frac{1}{2}&0\\1-2x&0&1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$\begin{pmatrix} -5x^2+5x-1 & 0 & -4x^2+4x-1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -4x^2+4x-1 & 0 & -5x^2+5x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	**3p**
	$x=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$x \circ y = \left(xy+\hat{3}x\right)+\left(\hat{3}y+\hat{9}\right)=$	**2p**
	$=x\left(y+\hat{3}\right)+\hat{3}\left(y+\hat{3}\right)=\left(x+\hat{3}\right)\left(y+\hat{3}\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$	**3p**
b)	$\left(a+\hat{3}\right)\left(x+\hat{3}\right)=\hat{0}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$	**2p**
	$a+\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow a=\widehat{17}$	**3p**
c)	$\left(a+\hat{3}\right)\left(b+\hat{3}\right)=\hat{0}$	**2p**
	De exemplu, pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, obținem $a+\hat{3}=\hat{4}$ și $b+\hat{3}=\hat{5}$, deci $a\circ b=\hat{0}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{7}{2}$	**3p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$, deci f este descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$, deci f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	f continuă pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(x)\ge f\left(\frac{1}{4}\right)$ și, cum $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{8}$, obținem $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{3}{8},+\infty\right)$	**2p**
c)	$e^x>0$, deci $f\left(e^x\right)\ge -\frac{3}{8}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$2\left(e^x\right)^2-\sqrt{e^x}\ge -\frac{3}{8}$, deci $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge 0$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(\operatorname{tg}x)\,dx=\int_0^1 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}dx=\int_0^1(\operatorname{arctg}x)'\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{32}$	**2p**

c)	$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^{n+1}\right)'\operatorname{arctg} x\,dx=x^{n+1}\operatorname{arctg} x\Big\|_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx$	**2p**
	$x\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{x^2+1}\le 1\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1}dx\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\le\int_0^1 x^{n+1}dx$ și, cum $\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}$, obținem $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.
5p	**4.** Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin trei elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$.
5p	**5.** Se consideră triunghiul MNP cu $MN=6$, $MP=8$ și $m(\sphericalangle M)=90°$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.
5p	**6.** Determinaţi numărul real x, știind că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+2=0$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.
	2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x\circ y=(x+\hat{3})(y+\hat{3})$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.
5p	**b)** Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.
5p	**c)** Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{17}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$.
5p	**b)** Determinați imaginea funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge 0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a-ib)+i(a+ib)=4+5i \Leftrightarrow (2a-b)+i(a-2b)=4+5i$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=1$, $b=-2$, deci $z=1-2i$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=3-2(3-2x)=4x-3$	**2p**
	$4x-3<x \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)$	**3p**
3.	$3^{x^2+1}\cdot 3^1=3^3 \Leftrightarrow x^2+2=3$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are C_6^2 submulțimi cu două elemente, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 15	**1p**
	Mulțimea A are C_3^2 submulțimi cu două elemente care conțin numai numere pare, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 3	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, deci $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$	**3p**
	$AM=4\sqrt{2}$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{2\pi}{3}=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-2)=\begin{pmatrix}2&6&1\\6&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(-2))=\begin{vmatrix}2&6&1\\6&2&1\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+0+0-0-0-36=-32$	**3p**
b)	$\det(A(x)-xI_3)=\begin{vmatrix}x^2&x^2-x&1\\x^2-x&x^2&1\\0&0&1-x\end{vmatrix}=x^2(1-x)(2x-1)$	**3p**
	$x^2(1-x)(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\cup\{0\}$	**2p**

c)	$\Delta=\begin{vmatrix} a^2+a & a^2-a & 1 \\ a^2-a & a^2+a & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=4a^3$	**2p**
	Pentru orice a număr real nenul, obținem $\Delta\neq 0$, deci punctele P_a, P_{-a} și O **nu** sunt coliniare	**3p**
2.a)	$M(x)\cdot M(-x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 2^x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -x\\ 0 & 2^{-x} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -x+x\\ 0 & 2^x\cdot 2^{-x} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=M(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$M(x)\cdot M(-x)=M(-x)\cdot M(x)=I_3$, pentru orice număr real x	**3p**
	Inversa matricei $M(x)$ este matricea $M(-x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -x\\ 0 & 2^{-x} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$M(1)+M(2)+\ldots+M(n)=\begin{pmatrix}n & 0 & 1+2+\ldots+n\\ 0 & 2^1+2^2+\ldots+2^n & 0\\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(M(1)+M(2)+\ldots+M(n)\right)=\begin{vmatrix}n & 0 & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 2\left(2^n-1\right) & 0\\ 0 & 0 & n\end{vmatrix}=2n^2\left(2^n-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{(x+1)^2}=2$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n+1)=1-\frac{1}{n^2+4n+4}<1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum $a_n>0$ pentru orice număr natural nenul n, obținem $a_{n+1}<a_n$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător	**2p**

2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{3x-2-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{3}{(x+1)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}=\frac{3}{4}$	**2p**
b)	Pentru orice număr real m, funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(2^x+\sin(x-1)+m\right)=2+m$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\frac{3}{4}$ și $f(1)=2+m$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow m=-\frac{5}{4}$	**3p**
c)	$f(0)=-\frac{1}{4}-\sin 1$, $f(2)=\frac{1}{3}$	**2p**
	f este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f(0)\cdot f(2)<0$, deci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,2)$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}+iz=4+5i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-2x$. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(f\circ f)(x)<x$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+1}\cdot\sqrt[3]{27}=3^3$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, aceasta să conțină numai numere pare.
5p	**5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB=8$, $AD=4$ și punctul M, mijlocul laturii CD. Calculați lungimea vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BM}$.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{2x}{3}-\cos\frac{8x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că numărul $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este natural.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a^2+a&a^2-a&1\\a^2-a&a^2+a&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(-2))=-32$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det(A(x)-xI_3)\geq 0$.
5p	**c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_a(a^2+a,a^2-a)$, unde a este număr real. Demonstrați că pentru orice număr real nenul a, punctele P_a, P_{-a} și O **nu** sunt coliniare.
	2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&2^x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Demonstrați că $M(x)\cdot M(-x)=M(0)$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Calculați inversa matricei $M(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**c)** Arătați că $\det(M(1)+M(2)+\ldots+M(n))=2n^2(2^n-1)$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.
5p	**a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_n=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n)$ este descrescător.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^x+\sin(x-1)+m, & x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}, & x>1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\dfrac{3}{4}$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $m=-\dfrac{5}{4}$, demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,2)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-2z+5=(1-2i)^2-2(1-2i)+5=$	**2p**
	$=1-4i+4i^2-2+4i+5=1-4-2+5=0$	**3p**
2.	$M(2,8)\in G_f \Rightarrow f(2)=8\Rightarrow 4+a=8\Rightarrow a=4$	**3p**
	$M(2,8)\in G_g \Rightarrow g(2)=8\Rightarrow 2b+2=8\Rightarrow b=3$	**2p**
3.	$\log_3(4x+5)=\log_3 3(x+3)\Rightarrow 4x+5=3x+9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulţimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Numărul numerelor naturale de două cifre, care au cifrele pare este egal cu 20, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Punctul B este mijlocul segmentului AM, deci $M(6,0)$	**3p**
	$CM=10$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=2\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC\cdot\sin(\sphericalangle BAC)=6\cdot 10\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=$	**3p**
	$=6\cdot 10\cdot\dfrac{1}{2}=30$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(-1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-1)+0+1-(-1)-0-1=0$	**3p**
b)	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a+1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(a+1)(a+2)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=-2$ sau $a=-1$	**2p**
c)	Sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ şi soluţia sistemului este $\left(\dfrac{2a}{(a+1)(a+2)},\dfrac{2a^2+3a+2}{(a+1)(a+2)},\dfrac{1}{a+1}\right)$	**2p**
	$\dfrac{4a}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{2a^2+3a+2}{(a+1)^2(a+2)}=0\Leftrightarrow 6a^2+7a+2=0$, deci $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=-\dfrac{1}{2}$, care convin	**3p**

2.a)	$x * y = \frac{1}{10}xy - x - y + 10 + 10 =$	**2p**
	$= \frac{1}{10}x(y-10) - (y-10) + 10 = \frac{1}{10}(x-10)(y-10) + 10$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\frac{1}{10}(x-10)^2 + 10 \le \frac{101}{10} \Leftrightarrow (x-10)^2 \le 1$	**3p**
	$x \in [9,11]$	**2p**
c)	$x * 10 = 10$ și $10 * x = 10$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\log_2 1 * \log_2 2 * \ldots * \log_2 2018 = ((\log_2 1 * \ldots * \log_2 1023) * 10) * \log_2 1025 * \ldots * \log_2 2018 =$ $= 10 * (\log_2 1025 * \ldots * \log_2 2018) = 10$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 - \frac{6}{x+1} =$	**3p**
	$= \frac{6x^3 + 6x^2 - 6x^2 - 6x + 6x + 6 - 6}{x+1} = \frac{6x^3}{x+1}$, $x \in (-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	**1p**
	$f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (-1,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
	$f(x) \ge f(0)$, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$ și, cum $f(0) = 0$, valoarea minimă a funcției f este 0	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x+1} = 0$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{\lvert x\rvert} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{x} = 0$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1)\,dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{11}{6}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F''(-2) = 0$, $F''(-1) = 0$, $F''(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty,-2)$, $F''(x) < 0$ pentru orice $x \in (-2,-1)$ și $F''(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1,+\infty)$, deci F are exact două puncte de inflexiune	**3p**
c)	$\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{F'(t)}{1} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-2i$. Arătaţi că $z^2-2z+5=0$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care graficele funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=bx+2$ se intersectează în punctul $M(2,8)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(4x+5)=1+\log_3(x+3)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(4,1)$ şi $C(0,8)$. Determinaţi lungimea segmentului CM, ştiind că M este simetricul punctului A faţă de punctul B.

5p **6.** Calculaţi aria paralelogramului $ABCD$, ştiind că $AB=6$, $AC=10$ şi $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a+1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=2\\ (a+1)x-y+z=0\\ x+y-az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi $2x_0+y_0z_0=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x\le\frac{101}{10}$.

5p **c)** Calculaţi $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstraţi că valoarea minimă a funcţiei f este 0.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x+1)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Arătați că $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx = 1$.