Examenul de bacalaureat național 2020 Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- **5p** 1. Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=3$ și $b_6=6$.
- **5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 20$. Determinați numerele reale a, știind că f(a) = a.
- **5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x = \frac{1}{5^{3x}}$.
- **5p 4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
- **5p 5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(-1,0), B(0,1) și C(1,0). Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.
- **5p 6.** Calculați $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

- **1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și M(x) = A + xB, unde x este număr real.
- **5p** a) Arătați că $\det(M(1)) = 0$.
- **5p b**) Demonstrați că M(x)M(y) = M(y)M(x) dacă și numai dacă x = y.
- **5p** c) Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $M(m^2+1)M(n^2)=M(n^2)M(m^2+1)$.
 - 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 7xy$.
- **5p** a) Arătați că $x \circ y = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y.
- **5p b**) Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x = 5$.
- **5p** c) Dați exemplu de numere distincte $a,b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care numărul $a \circ b$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

- **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x \frac{2(x-1)}{x}$.
- **5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.
- **5p b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație y = -x.
- **5p** c) Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.
 - **2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
- **5p** a) Arătați că $\int_{1}^{e} f'(x) dx = 1$.
- **5p b)** Calculați $\int_{1}^{e} \frac{f^{2}(x)}{x} dx$.
- **5p** c) Determinați numărul real p, p > 1, știind că $\int_{1}^{p} x f(x) dx = \frac{p^2}{2} \ln p \frac{3}{4}$.