Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$	**3p**
	$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$	**2p**
2.	$f(a)=3a-2$, $f(-a)=-3a-2$	**2p**
	$6a=12$, de unde obținem $a=2$	**3p**
3.	$\frac{20}{100}\cdot x=28$ de lei, deci $\frac{x}{5}=28$ de lei, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=140$ de lei	**2p**
4.	$4^{2x-1}=4^3$	**2p**
	$2x-1=3$, deci $x=2$	**3p**
5.	Panta unei drepte perpendiculare pe dreapta d este egală cu $-\frac{1}{2}$	**3p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $x+2y-8=0$	**2p**
6.	$AC=\frac{BC}{2}=5\text{cm}$, $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=5\sqrt{3}\text{cm}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{5\cdot 5\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1*0=1\cdot 0-\sqrt{3}(1+0)+\sqrt{3}+3=$	**2p**
	$=0-\sqrt{3}+\sqrt{3}+3=3$	**3p**
2.	$x*y=xy-\sqrt{3}x-\sqrt{3}y+3+\sqrt{3}=$	**3p**
	$=x\left(y-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
3.	$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}=9+\sqrt{3}$, deci $x-\sqrt{3}=\pm 3$	**2p**
	$x=3+\sqrt{3}$ sau $x=-3+\sqrt{3}$	**3p**
4.	$x*\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\left(\sqrt{3}+1\right)*x=\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\sqrt{3}+1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
5.	$\sqrt{3}*x=\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=$	**2p**
	$=0\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=\sqrt{3}$, pentru orice număr real x	**3p**
6.	$\sqrt{3}*\sqrt{4}*\sqrt{5}*\ldots*\sqrt{2022}=\sqrt{3}*\left(\sqrt{4}*\sqrt{5}*\ldots*\sqrt{2022}\right)=$	**3p**
	$=\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 =$	**3p**
	$= 1 - 0 = 1$	**2p**
2.	$A \cdot A - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$	**2p**
3.	$A - aI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}$	**3p**
	$\det\left(A - aI_2\right) = 0 \Leftrightarrow (1-a)^2 = 0$, deci $a = 1$	**2p**
4.	$m \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$, $\det\left(m(A+B)\right) = 4m^2$	**3p**
	$m \cdot \det(A+B) = 4m$, deci $4m^2 = 4m$, de unde obținem $m = 0$ sau $m = 1$	**2p**
5.	$x \cdot A + y \cdot B = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 3x-3y & x+y \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 3x-3y & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = y = 1$	**2p**
6.	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	**2p**
	$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A \cdot B$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2022
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 1

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\sqrt{18}+\sqrt{8}=5\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=12$.

5p **3.** După o reducere cu 20% preţul unui obiect scade cu 28 de lei. Determinaţi preţul iniţial al obiectului.

5p **4.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{2x-1}=64$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,3)$ şi dreapta d de ecuaţie $y=2x+1$. Determinaţi ecuaţia dreptei ce trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A cu măsura unghiului B de $30°$ şi $BC=10$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-\sqrt{3}(x+y)+\sqrt{3}+3$.

5p **1.** Arătaţi că $1*0=3$.

5p **2.** Demonstraţi că $x*y=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **3.** Determinaţi numărul real x pentru care $x*x=\sqrt{3}$.

5p **4.** Arătaţi că $e=\sqrt{3}+1$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **5.** Arătaţi că $\sqrt{3}*x=\sqrt{3}$, pentru orice număr real x.

5p **6.** Determinaţi numărul natural n pentru care $\sqrt{3}*\sqrt{4}*\sqrt{5}*\ldots*\sqrt{2022}=\sqrt{n}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **1**. Arătaţi că $\det(A)=1$.

5p **2.** Arătaţi că $A\cdot A-2A=-I_2$.

5p **3.** Arătaţi că $A\cdot B=B\cdot A=I_2$.

5p **4.** Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A-aI_2)=0$.

5p **5.** Determinaţi numerele reale m pentru care $\det\left(m(A+B)\right)=m\cdot\det(A+B)$.

5p **6.** Determinaţi numerele reale x şi y, ştiind că $xA+yB=2I_2$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 16=4$, $\log_2 8=3$, $\log_2 1=0$	**3p**
	$\log_2 16-\log_2 8+\log_2 1=4-3+0=1$	**2p**
2.	$f(m)=2022$	**3p**
	$5m+7=2022$, de unde obținem $m=403$	**2p**
3.	$5x-2=3$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	$x+\frac{20}{100}x=\frac{6x}{5}$, unde x este prețul inițial	**2p**
	$\frac{6x}{5}+\frac{20}{100}\cdot\frac{6x}{5}=\frac{36x}{25}\Rightarrow\frac{36x}{25}=180$, de unde obținem $x=125$ lei	**3p**
5.	Ecuația dreptei AB este $\frac{x-6}{2-6}=\frac{y-7}{5-7}$	**3p**
	$x-2y+8=0$	**2p**
6.	$\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$(-2)\circ 2=-2\cdot 2+5(-2+2)+7=$	**3p**
	$=-4+0+7=3$	**2p**
2.	$x\circ y=xy+5(x+y)+7=yx+5(y+x)+7=$	**3p**
	$=y\circ x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**2p**
3.	$x\circ y=xy+5x+5y+25-18=$	**3p**
	$=x(y+5)+5(y+5)-18=(x+5)(y+5)-18$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
4.	$x^2+10x+7=7$	**2p**
	$x^2+10x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=-10$	**3p**
5.	$(-x)\circ(-y)=xy-5x-5y+7$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$(xy-5x-5y+7)+(-xy-5x+5y+7)+(-xy+5x-5y+7)+(xy+5x+5y+7)=28$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
6.	$(a+5)(b+5)=-1$	**3p**
	Cum a și b sunt numere întregi, obținem perechile (a,b) de numere întregi $(-6,-4)$ și $(-4,-6)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}5 & 5\\ -4 & -4\end{vmatrix}=5\cdot(-4)-5\cdot(-4)=$	**3p**
	$=-20+20=0$	**2p**
2.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}25-20 & 25-20\\ -20+16 & -20+16\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -4 & -4\end{pmatrix}=A$	**2p**
3.	$X(-1)=I_2-A$	**2p**
	$X(1)=I_2+A$, deci $X(-1)+X(1)=I_2-A+I_2+A=2I_2$	**3p**
4.	$X(a)\cdot X(-1)=(I_2+aA)\cdot(I_2-A)=I_2{}^2-I_2\cdot A+aA\cdot I_2-aA^2=$	**3p**
	$=I_2-A=X(-1)$, pentru orice număr real a	**2p**
5.	$\det(X(a))=\begin{vmatrix}1+5a & 5a\\ -4a & 1-4a\end{vmatrix}=(1+5a)(1-4a)-5a(-4a)=1+a$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det(X(a))=0$, de unde obținem $a=-1$	**2p**
6.	$\det\left(X\left(a^2\right)\right)=a^2+1$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a^2+1\le 10$, de unde obținem $a\in[-3,3]$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2022
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 7

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\log_2 16 - \log_2 8 + \log_2 1 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+7$. Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,2022)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x-2}=\sqrt{3}$.

5p **4.** După două scumpiri succesive cu 20% prețul unui obiect este de 180 lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,7)$ și $B(2,5)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Arătați că $\left(\sin 45^\circ - \sin 30^\circ\right)\left(\sin 45^\circ + \sin 30^\circ\right)=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 5(x+y) + 7$.

5p **1.** Arătați că $(-2)\circ 2 = 3$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **3.** Demonstrați că $x\circ y=(x+5)(y+5)-18$, pentru orice numere reale x și y.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x = 7$.

5p **5.** Demonstrați că $\left((-x)\circ(-y)\right)+\left((-x)\circ y\right)+\left(x\circ(-y)\right)+\left(x\circ y\right)=28$, pentru orice numere reale x și y.

5p **6.** Determinați perechile (a,b) de numere întregi pentru care $a\circ b=-19$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det A = 0$.

5p **2.** Arătați că $A\cdot A = A$.

5p **3.** Arătați că $X(-1)+X(1)=2I_2$.

5p **4.** Demonstrați că $X(a)\cdot X(-1)=X(-1)$, pentru orice număr real a.

5p **5.** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **6.** Determinați valorile reale ale lui a pentru care $\det\left(X\left(a^2\right)\right)\le 10$.

Examenul naţional de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)+3=2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+3=2\sqrt{3}$	**3p**
	$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, deci $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)+3=\sqrt{12}$	**2p**
2.	$a+1>2a-1$	**2p**
	$a<2$ și cum a este număr natural, obținem $a=0$ sau $a=1$	**3p**
3.	$3^x\cdot 3^2\cdot 2^x\cdot 2+2\cdot 6^x=120 \Leftrightarrow 18\cdot 6^x+2\cdot 6^x=120$, deci $20\cdot 6^x=120$	**3p**
	$6^x=6\Rightarrow x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114 are 113 elemente, deci sunt 113 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114 sunt 28 numere divizibile cu 4, deci sunt 28 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{28}{113}$	**1p**
5.	$M(a,15)\in d\Rightarrow 15=3a+2a$	**3p**
	$15=5a\Rightarrow a=3$	**2p**
6.	$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$, $AB^2=BD\cdot BC\Rightarrow BD=\dfrac{9}{5}$	**3p**
	$\sin\sphericalangle BAD=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$\left(-1\right)\circ\left(-1\right)=2\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)-(-1)+1=$	**2p**
	$=2+1+1+1=5$	**3p**
2.	$x\circ y=2xy-x-y+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=2x\left(y-\dfrac{1}{2}\right)-\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=$	**3p**
	$=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
3.	$x\circ 1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1\circ x=2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=x=x\circ 1$, pentru orice număr real x, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

4.	$x\circ\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{2}\circ x=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, deci $x\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\circ x=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real x	**3p**
5.	$\frac{1}{3}\circ\frac{2}{4}\circ\frac{3}{5}\circ\ldots\circ\frac{2020}{2022}=\left(\frac{1}{3}\circ\frac{1}{2}\right)\circ\frac{3}{5}\circ\ldots\circ\frac{2020}{2022}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\circ\left(\frac{3}{5}\circ\ldots\circ\frac{2020}{2022}\right)=\frac{1}{2}$	**3p**
6.	$\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)\circ\left(\log_3 x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\log_2 x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\log_3 x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=2\cdot\log_2 x\cdot\log_3 x+\frac{1}{2}$,	**3p**
	$2\cdot\log_2 x\cdot\log_3 x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\log_2 x\cdot\log_3 x=0$, de unde obținem $x=1$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$	**3p**
	$4I_2=4\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$, deci $A\cdot A=4I_2$	**2p**
2.	$aI_2+A=a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}a&2\\2&a\end{pmatrix}=M(a)$, pentru orice număr real a	**2p**
3.	$M(2)\cdot M(4)=\left(2I_2+A\right)\left(4I_2+A\right)=8I_2+6A+4I_2=$	**3p**
	$=12I_2+6A=6\left(2I_2+A\right)=6\cdot M(2)$	**2p**
4.	$M(a)\cdot M(b)=(ab+4)\cdot I_2+(a+b)\cdot A=7\cdot I_2+4\cdot A\Rightarrow$	**3p**
	$\Rightarrow ab=3$ și $a+b=4$ și cum a și b sunt numere naturale, obținem perechile $(3,1)$ și $(1,3)$	**2p**
5.	$M(k+2)=\begin{pmatrix}k+2&2\\2&k+2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(M(k+2)\right)=(k+2)^2-4=k^2+4k$	**3p**
	$k^2+4k\le 0$ și k număr natural, obținem $k=0$	**2p**
6.	$M(a)-2\cdot A=\begin{pmatrix}a&2\\2&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&4\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-2\\-2&a\end{pmatrix}$	**2p**
	$M(a)\cdot\left(M(a)-2\cdot A\right)=\left(M(a)-2\cdot A\right)\cdot M(a)=I_2$, deci $a^2=5$, și cum $a<-2$, obținem că $a=-\sqrt{5}$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)+3=\sqrt{12}$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$. Determinați numerele naturale a pentru care $f(a)>g(a)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}\cdot 2^{x+1}+2\cdot 6^{x}=120$.
5p	**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114, acesta să fie divizibil cu 4.
5p	**5.** Determinați numărul real a, știind că punctul $M(a,15)$ aparține dreptei d de ecuație $y=3x+2a$.
5p	**6**. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=3$, $AC=4$ și înălțimea AD, unde punctul D aparține laturii BC. Arătați că $\sin\sphericalangle BAD=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-x-y+1$.
5p	**1.** Arătați că $(-1)\circ(-1)=5$.
5p	**2.** Demonstrați că $x\circ y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**3.** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**4.** Arătați că $x\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\circ x=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real x.
5p	**5.** Calculați $\frac{1}{3}\circ\frac{2}{4}\circ\frac{3}{5}\circ\ldots\circ\frac{2020}{2022}$.
5p	**6.** Determinați numărul real strict pozitiv x, pentru care $\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)\circ\left(\log_3 x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}a&2\\2&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**1.** Arătați că $A\cdot A=4I_2$.
5p	**2.** Arătați că $aI_2+A=M(a)$, pentru orice număr real a.
5p	**3.** Arătați că $M(2)\cdot M(4)=6M(2)$.
5p	**4.** Determinați perechile (a,b) de numere naturale pentru care $M(a)\cdot M(b)=7\cdot I_2+4\cdot A$.
5p	**5.** Determinați numărul natural k pentru care $\det(M(k+2))\le 0$.
5p	**6.** Determinați numărul real a, $a<-2$, știind că inversa matricei $M(a)$ este matricea $M(a)-2\cdot A$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3=a_1+2r$	**2p**
	$a_3=7$, $S_3=\frac{(a_1+a_3)\cdot 3}{2}=15$	**3p**
2.	$f(1)=2-2a$, $f(-1)=2a$	**2p**
	$2-2a=2a \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$	**3p**
3.	$1+\log_2(2x+1)=2$	**2p**
	$\log_2(2x+1)=1 \Rightarrow 2x+1=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$, care convine	**3p**
4.	Numerele naturale de o cifră, pătrate perfecte sunt: $0,1,4,9$, deci sunt patru cazuri favorabile	**2p**
	Numerele naturale de o cifră sunt $0,1,2,...,9$, deci sunt zece cazuri posibile	**2p**
	$P=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	AM mediană $\Rightarrow M$ mijlocul laturii BC $\Rightarrow x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=1$, $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=2$	**2p**
	$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{4}=2$	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$3*4=-\frac{(3-1)\cdot(4-1)}{3}+1=$	**2p**
	$=-\frac{2\cdot 3}{3}+1=-2+1=-1$	**3p**
2.	$x*(-2)=-\frac{(x-1)\cdot(-3)}{3}+1=x-1+1=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(-2)*x=-\frac{(-2-1)\cdot(x-1)}{3}+1=x-1+1=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-2$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	**3p**
3.	$-\frac{(a-1)\cdot(7-1)}{3}+1=5$	**2p**
	$-(a-1)\cdot 2+1=5$, de unde obținem $a=-1$	**3p**

4.	$x*(1+x)=-\frac{(x-1)\cdot(1+x-1)}{3}+1=-\frac{x(x-1)}{3}+1$	**2p**
	$-\frac{x(x-1)}{3}+1\geq -3$, deci $x^2-x-12\leq 0$, de unde obținem $x\in[-3,4]$	**3p**
5.	$n*n=-\frac{(n-1)^2}{3}+1$, $n*n*n=(n*n)*n=\left(-\frac{(n-1)^2}{3}+1\right)*n=\frac{(n-1)^3}{9}+1$	**3p**
	$\frac{(n-1)(n-4)(n+2)}{9}\leq 0$, n număr natural $\Rightarrow n=4$ este cel mai mare număr natural căutat	**2p**
6.	$-\frac{(m-1)(n-1)}{3}+1=-1\Rightarrow(m-1)(n-1)=6$	**2p**
	Perechile (m,n) de numere naturale sunt: $(2,7);(3,4);(4,3);(7,2)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-1\cdot 3=$	**3p**
	$=-4-3=-7$	**2p**
2.	$A+xI_2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+x & 3\\ 1 & -2+x\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(A+xI_2)=x^2-7$, deci $x^2-7\geq -7\Leftrightarrow x^2\geq 0$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$, $aI_2=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\Rightarrow a=7$	**2p**
4.	$\det(mA-I_2)=1-7m^2$, $\det(A+I_2)=-6$	**2p**
	$7m^2-6m-1=0$, de unde obținem $m=-\frac{1}{7}$ sau $m=1$	**3p**
5.	$A\cdot M=\begin{pmatrix}2x+3y & 3x+2y\\ x-2y & -2x+y\end{pmatrix}$, $M\cdot A=\begin{pmatrix}2x+y & 3x-2y\\ x+2y & -2x+3y\end{pmatrix}$	**3p**
	$2x+3y=2x+y\Rightarrow y=0$ care verifică	**2p**
6.	$\det(aA)=-7a^2$	**2p**
	$-7a^2\geq -28\Rightarrow a^2\leq 4$, și cum $a\in\mathbb{Z}$, obținem $a=-2$, $a=-1$, $a=0$, $a=1$ sau $a=2$ deci a poate avea 5 valori	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2022
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Simulare

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=3$ și $r=2$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-2a)x+1$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $f(1)=f(-1)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1+\log_2(2x+1)=\log_2 4$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie pătrat perfect.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(-3,2)$ și $C(5,2)$. Determinați lungimea medianei triunghiului ABC construită din vârful A.
5p	**6.** Calculați $\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 45^\circ-3\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-\dfrac{(x-1)(y-1)}{3}+1$.
5p	**1.** Arătați că $3*4=-1$.
5p	**2.** Verificați dacă $e=-2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
5p	**3.** Determinați numărul real a pentru care $a*7=5$.
5p	**4.** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*(1+x)\geq -3$.
5p	**5.** Determinați cel mai mare număr natural n pentru care $n*n*n\leq n$.
5p	**6.** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=-1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**1.** Arătați că $\det(A)=-7$.
5p	**2.** Arătați că $\det(A+xI_2)\geq -7$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Determinați numărul real a pentru care $A\cdot A=aI_2$.
5p	**4.** Determinați numerele reale m pentru care $\det(mA-I_2)=m\cdot\det(A+I_2)$.
5p	**5.** Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot M=M\cdot A$. Arătați că $y=0$.
5p	**6.** Determinați pentru câte valori întregi ale lui a obținem $\det(aA)\geq -28$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{3}+1\right)^2=4+2\sqrt{3}$, $\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$	**3p**
	$\left(4+2\sqrt{3}\right)-\left(4-2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}=\sqrt{48}$	**2p**
2.	$2x+1=-2x+5$, deci $x=1$	**2p**
	$f(1)=3$, deci coordonatele punctului de intersecție sunt $(1,3)$	**3p**
3.	$3^{x-2}=3^{2x}$, de unde obținem $x-2=2x$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 8 moduri, deci se pot forma $4\cdot 8=32$ de numere naturale impare de două cifre	**3p**
5.	$x_M=3$ și $y_M=4$, unde M este mijlocul segmentului AC	**3p**
	$BM=\sqrt{(3-5)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$	**2p**
6.	$AB^2+AC^2=BC^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A	**3p**
	$\sin B+\sin C=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$4*2=-\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2+\frac{1}{3}(4+2)+\frac{2}{3}=$	**3p**
	$=-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=0$	**2p**
2.	$x*y=-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}x(y-1)+\frac{1}{3}(y-1)+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=$	**3p**
	$=-\frac{1}{3}x(y-1)+\frac{1}{3}(y-1)+1=-\frac{1}{3}(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
3.	$4*x=-\frac{1}{3}(4-1)(x-1)+1=-x+2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x+2=x$, deci $x=1$	**3p**
4.	$(-2)*x=-\frac{1}{3}(-2-1)(x-1)+1=x-1+1=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x*(-2)=-\frac{1}{3}(x-1)(-2-1)+1=x-1+1=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**

5.	$x * x = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-\frac{1}{3}(x-1)^2 + 1 = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9$, de unde obținem $x = -2$ sau $x = 4$	**3p**
6.	$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 \leq 0$	**3p**
	$\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 \geq 0$, deci $\frac{1}{x} * \frac{1}{x} \leq 1$, pentru orice număr real nenul x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) =$	**3p**
	$= 0 + 2 = 2$	**2p**
2.	$A(2n, 2n+1) = \begin{pmatrix} 2n & 2n+1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\det\left(A(2n,2n+1)\right) = 2n-1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	$2n-1$ este număr natural impar, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
3.	$A(2x,0) + A(0,2x) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2x \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2 \cdot \begin{pmatrix} x & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2A(x,x)$, pentru orice număr real x	**2p**
4.	$\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-y & 2x \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 & y+4 \\ -x & -y \end{pmatrix}$	**3p**
	$x = 1$ și $y = -2$	**2p**
5.	$A(\log_3 x, 1) = \begin{pmatrix} \log_3 x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, deci suma elementelor matricei este $4 + \log_3 x$	**3p**
	$4 + \log_3 x = 5 \Leftrightarrow \log_3 x = 1$, de unde obținem $x = 3$, care convine	**2p**
6.	$A(x,y) \cdot A(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y & xy+2y \\ x+2 & y+4 \end{pmatrix}$, $2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix} x^2+y & xy+2y \\ x+2 & y+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = -2$ și $y = -2$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2022
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 3

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2=\sqrt{48}$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-2x+5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare de două cifre se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 și 8.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(5,2)$ și $C(6,6)$. Determinați distanța de la punctul B la mijlocul segmentului AC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=9$, $AC=12$ și $BC=15$. Arătați că $\sin B+\sin C=\frac{7}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{3}(x+y)+\frac{2}{3}$.

5p **1.** Arătați că $4*2=0$.

5p **2.** Demonstrați că $x*y=-\frac{1}{3}(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **3.** Determinați numărul real x pentru care $4*x=x$.

5p **4.** Arătați că $e=-2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **5.** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=-2$.

5p **6.** Arătați că $\frac{1}{x}*\frac{1}{x}\leq 1$, pentru orice număr real nenul x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **1.** Arătați că $\det B=2$.

5p **2.** Arătați că $\det\left(A(2n,2n+1)\right)$ este număr natural impar, pentru orice număr natural nenul n.

5p **3.** Arătați că $A(2x,0)+A(0,2x)=2A(x,x)$, pentru orice număr real x.

5p **4.** Determinați numerele reale x și y, astfel încât $A(x,y)\cdot B=B\cdot A(x,y)$.

5p **5.** Determinați numărul real strict pozitiv x, știind că suma elementelor matricei $A\left(\log_3 x,\,1\right)$ este egală cu 5.

5p **6.** Determinați numerele reale x și y, știind că $A(x,y)\cdot A(x,y)=2I_2$.