Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=3\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$	**2p**
2.	$f(a)=a+2$	**2p**
	$a+2=6$, de unde obținem $a=4$	**3p**
3.	$2x+1=9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 14 numere n care verifică inegalitatea $n\geq 10$, deci sunt 14 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{14}{23}$	**3p**
5.	$x_M=\frac{-1+1}{2}=0$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$y_M=\frac{2+6}{2}=4$	**2p**
6.	$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{2}$	**3p**
	$AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot 2=$	**3p**
	$=3-4=-1$	**2p**
b)	$2B-A=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=3C$	**2p**
c)	$B+2C=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\frac{1}{2}(B+2C)\cdot A^{-1}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}9 & -14\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$5*4=(5-4)(4-4)+4=$	**3p**
	$=1\cdot 0+4=4$	**2p**

b)	$x*6=2x-4$, pentru orice număr real x $2x-4=6x$, de unde obținem $x=-1$	**3p** **2p**
c)	$\left(\frac{4}{n}-4\right)(n-4)+4>4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}-1\right)(n-4)>0$, unde n este număr natural nenul Cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$ și $n=3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2+6\cdot 2x-15=$ $=3x^2+12x-15=3\left(x^2+4x-5\right),\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-5$ sau $x=1$ $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-5]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-5]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-5,1]$, deci f este descrescătoare pe $[-5,1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=3(2x+4),\ x\in\mathbb{R}$, deci $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x f''(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-5}{e^x(2x+4)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{e^x(2x+6)}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x(2x+8)}=0$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 (x+9)\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 8x\,dx=4x^2\Big\|_0^1=$ $=4-0=4$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^6 \frac{1}{8x}\cdot f(x)dx=\int_1^6 \frac{1}{x+9}dx=\int_1^6 \frac{(x+9)'}{x+9}dx=\ln(x+9)\Big\|_1^6=$ $=\ln 15-\ln 10=\ln\frac{3}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^3 f\left(x^2\right)dx=\int_0^3 \frac{8x^2}{x^2+9}dx=8\int_0^3\left(1-\frac{9}{x^2+9}\right)dx=8x\Big\|_0^3-8\cdot\frac{9}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big\|_0^3=24-6\pi$ $24-6\pi=6(4+a\pi)$, de unde obținem $a=-1$	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=6$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x+1)=\log_7 9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,23\}$, acesta să verifice inegalitatea $n\geq 10$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(1,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=\sqrt{2}$ și $BC=2$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătați că $2B-A=3C$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X\cdot A=B+2C$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x-4)(y-4)+4$.

5p **a)** Arătați că $5*4=4$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*6=6x$.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{4}{n}*n>4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x^2-15x+9$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3\left(x^2+4x-5\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x f''(x)}=0$.

2. Se consideră funcția $f:(-9,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{8x}{x+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+9)\cdot f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x}\cdot f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f\left(x^2\right)dx=6(4+a\pi)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}=4\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$	**3p**
	$=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$	**2p**
2.	$f(0)=2$	**2p**
	$f(1)=5\Rightarrow f(0)\cdot f(1)=2\cdot 5=10$	**3p**
3.	$2x-3=x$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $n^2\le 23$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$OA=3$, $OB=4$	**2p**
	$AB=5$, deci $P_{\Delta OAB}=3+4+5=12$	**3p**
6.	$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$	**2p**
	$(1+2\cos 60^\circ)\cdot\sin 30^\circ=\left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-0\cdot 1=$	**3p**
	$=3-0=3$	**2p**
b)	$B(8)-3B(2)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}x & 0\\ x-3 & 3x-6\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}x & 0\\ x-3 & 3x-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ -1 & x-2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**2p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-2X+3\Rightarrow f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+3=$	**3p**
	$=1-2-2+3=0$	**2p**

b)	$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2$ și $x_1x_2x_3=-m \Rightarrow x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3=-2-m$	**3p**
	$-2-m=1$, de unde obținem $m=-3$	**2p**
c)	$f(-2)=m-12$, pentru orice număr real m	**2p**
	$m-12=0$, de unde obținem $m=12$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1 (f(x)-1)\,dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{2\cdot 1^3}{3}-\dfrac{2\cdot 0^3}{3}=\dfrac{2}{3}$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^2 \frac{4x}{f(x)}dx=\int_0^2\frac{4x}{2x^2+1}dx=\int_0^2\frac{(2x^2+1)'}{2x^2+1}dx=\ln(2x^2+1)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\ln 9-\ln 1=2\ln 3$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{2}{x^2}+1\right)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\left(-\frac{2}{x}+x\right)'\cdot\ln x\,dx=\left(-\frac{2}{x}+x\right)\cdot\ln x\Big\vert_1^e-\left(\frac{2}{x}+x\right)\Big\vert_1^e=3-\frac{4}{e}$	**3p**
	$3-\dfrac{4}{e}=2n^2+1-\dfrac{4}{e}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $4\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}=1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Arătați că $f(0)\cdot f(1)=10$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-3}=3^x$.
5p	**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2\le 23$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Arătați că perimetrul triunghiului OAB este egal cu 12.
5p	**6.** Arătați că $(1+2\cos 60°)\cdot\sin 30°=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x&0\\-1&x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=3$.
5p	**b)** Arătați că $B(8)-3B(2)=2A$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=3$, arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3=1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-1)\,dx=\frac{2}{3}$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^2 \frac{4x}{f(x)}\,dx=2\ln 3$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\,dx=f(n)-\frac{4}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1,5+3\cdot(1-0,5)=1,5+3\cdot 0,5=$ $=1,5+1,5=3$	**3p** **2p**
2.	$f(0)=5$ $f(1)=4$, deci $f(0)-f(1)=5-4=1$	**2p** **3p**
3.	$3x-8=1$ $x=3$, care convine	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele n, din mulțimea A, pentru care $2n\geq 9$ sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{3}{5}$	**2p** **3p**
5.	$AC=\sqrt{10}$ $BC=\sqrt{10}$, deci triunghiul ABC este isoscel	**2p** **3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 50=\frac{AB\cdot 5}{2}$ $AB=\frac{2\cdot 50}{5}=20$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot(-1)=$ $=1+1=2$	**3p** **2p**
b)	$3A(2)+A(6)=\begin{pmatrix}6&3\\-6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&1\\-6&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&4\\-12&-4\end{pmatrix}=$ $=4\begin{pmatrix}3&1\\-3&-1\end{pmatrix}=4A(3)$	**3p** **2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x^2-x&2\\-2x&x^2-5x+4\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix}x^2-x&2\\-2x&x^2-5x+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&2\\-2x&4-2x\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=0$ sau $x=3$	**2p** **3p**
2.a)	$1*1=1\cdot 1+2\cdot 1-1-1=$ $=1+2-1-1=1$	**3p** **2p**
b)	$x*2=4x-3$, pentru orice număr real x $4x-3=x$, de unde obținem $x=1$	**3p** **2p**

c)	$(1-x)*x=-x^2-2x-1+2=$	**3p**
	$=-(x+1)^2+2\le 2$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-2e^{-x}=2-\dfrac{2}{e^x}=$	**3p**
	$=\dfrac{2e^x-2}{e^x}=\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\dfrac{2}{e^x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{2}{xe^x}-\dfrac{1}{x}\right)=2$, deci $m=2$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{e^x}-1\right)=-1$, deci $n=-1$	**2p**
2.a)	$\int\limits_1^2\left(f(x)-3x\right)dx=\int\limits_1^2 4x^3\,dx=x^4\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=16-1=15$	**2p**
b)	$\int\limits_2^5\dfrac{1}{f(x)-4x^3+3}dx=\dfrac{1}{3}\int\limits_2^5\dfrac{1}{x+1}dx=\dfrac{1}{3}\ln(x+1)\Big\vert_2^5=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}(\ln 6-\ln 3)=\dfrac{1}{3}\ln 2$	**2p**
c)	$g(x)=5x^2+3$, $x\in[1,2]$, deci $\mathcal{V}=\pi\int\limits_1^2\left(25x^4+30x^2+9\right)dx=\pi\left(5x^5+10x^3+9x\right)\Big\vert_1^2=234\pi$	**3p**
	$f(3)=4\cdot 3^3+3\cdot 3=117$, deci $\mathcal{V}=2\pi f(3)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1,5+3\cdot(1-0,5)=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Arătați că $f(0)-f(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-8}=1$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,3,5,7,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $2n\geq 9$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(1,2)$ și $C(4,1)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu aria egală cu 50 și $AC=5$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu 20.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -x & 2-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $3A(2)+A(6)=4A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=2A(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+2x-y-1$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*2=x$.

5p **c)** Arătați că $(1-x)*x\leq 2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{2}{e^x}-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(e^x-1)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați numerele reale m și n, știind că dreapta d de ecuație $y=mx+n$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x)-3x)\,dx=15$.

5p **b)** Arătați că $\int_2^5 \frac{1}{f(x)-4x^3+3}\,dx=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **c)** Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x^3+f(x)}{x}$ este egal cu $2\pi f(3)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_6 = a_2 + 4r$, deci $4r = 16$, de unde obținem $r = 4$, unde r este rația progresiei aritmetice	**3p**
	$a_1 = a_2 - r = 7 - 4 = 3$	**2p**
2.	$f(a) = 3a \Leftrightarrow 8a - 5 = 3a$	**3p**
	$a = 1$	**2p**
3.	$\log_4\left(3x^2\right) = \log_4 12$, de unde obținem $3x^2 = 12$	**3p**
	$x = -2$, care nu convine; $x = 2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale n, de două cifre, pentru care $\sqrt{n}$ este număr natural par sunt 16, 36 și 64, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	**3p**
5.	$M(-1,3)$ și $N(3,0)$, unde punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv OC	**2p**
	$MN = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$	**3p**
6.	$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{16}$, deci $AC = 8$	**2p**
	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 8\sqrt{3}$ și, cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$, obținem $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) =$	**3p**
	$= 3 + 6 = 9$	**2p**
b)	$B(3) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(4) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B(3) \cdot B(4) = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 7\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 7B(1)$, de unde obținem $x = 7$	**2p**
c)	$C \cdot B(a) = \begin{pmatrix} \frac{-a+1}{3} & \frac{a+2}{3} \\ \frac{-2a-4}{9} & \frac{-a+7}{9} \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$C \cdot B(a) = B(a) \cdot C = I_2$, de unde obținem $a = -2$	**3p**

2.a)	$f = X^3 + X^2 + X - 4 \Rightarrow f(2) = 2^3 + 2^2 + 2 - 4 =$ $= 8 + 4 + 2 - 4 = 10$	**3p** **2p**
b)	$f = X^3 + X^2 - 4X - 4 \Rightarrow f = (X+1)(X-2)(X+2)$ Rădăcinile polinomului f sunt -2, -1 și 2	**2p** **3p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2m$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f Cum m este număr natural nenul, obținem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$, deci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x+2) - (x^2 - 2x + 1)\cdot 1}{(x+2)^2} =$ $= \dfrac{2x^2 + 4x - 2x - 4 - x^2 + 2x - 1}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{e^x(x+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2}{e^x(x+3)} =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x(x+4)} = 0$	**3p** **2p**
c)	$f''(x) = \dfrac{18}{(x+2)^3}$, $x \in (-2, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-2, +\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \int_1^3 (x+1)\, dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + x \right) \Big\|_1^3 =$ $= \dfrac{9}{2} + 3 - \dfrac{1}{2} - 1 = 6$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^8 \left(f(x) - x - 1 \right) dx = \int_0^8 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\int_0^8 (x+1)' \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1} \Big\|_0^8 =$ $= 2\cdot 3 - 2\cdot 1 = 4$	**3p** **2p**
c)	$V = \pi \int_0^3 g^2(x)\, dx = \pi \int_0^3 \left((x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x+1} \right) dx =$ $= \pi \int_0^3 (x+1)' \left((x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left(\dfrac{(x+1)^3}{3} + 4 \cdot \dfrac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + \ln(x+1) \right) \Big\|_0^3 =$ $= \pi \left(\dfrac{64}{3} + \dfrac{32}{3} + \ln 4 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3} \right) = \pi \left(\dfrac{91}{3} + \ln 4 \right)$	**2p** **3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_2=7$ și $a_6=23$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x-5$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,3a)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4 x+\log_4(3x)=\log_4 12$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,2)$, $B(1,4)$ și $C(6,0)$. Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor AB și OC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=16$ și măsura unghiului B egală cu $30°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -3\\ 2 & x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=9$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(4)=xB(1)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care matricea $B(a)$ este inversa matricei $C=\frac{1}{9}A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $f(2)=10$.

5p **b)** Pentru $m=-4$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul m, polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^8\left(f(x)-x-1\right)dx=4$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\pi\left(\frac{91}{3}+\ln 4\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1-0,2):2+0,3\cdot 2=0,8:2+0,6=$	**3p**
	$=0,4+0,6=1$	**2p**
2.	$f(2)=0$, $g(2)=2+m$	**3p**
	$0=2+m$, de unde obținem $m=-2$	**2p**
3.	$7^{x+3}=7^{2x}$, de unde obținem $x+3=2x$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	$x-\frac{30}{100}\cdot x=210$, unde x este prețul înainte de ieftinire	**3p**
	$x=300$ de lei	**2p**
5.	$M(1,2)$, deci $OM=\sqrt{5}$ și $MB=\sqrt{10}$	**3p**
	$OB=\sqrt{5}$, deci $MB^2=OB^2+OM^2$, de unde obținem că triunghiul OMB este dreptunghic în O	**2p**
6.	$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\sqrt{3}\sin 45°+2\sin 30°-\sqrt{2}\cos 30°=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4\cdot 1-(-2)\cdot 2=$	**3p**
	$=4+4=8$	**2p**
b)	$A(0)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A(0)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2 & -2\\ 2 & x-1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-2$	**2p**
c)	$\det(A(x))=x^2+x+2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2+x+2=y^2+y+2\Rightarrow(x-y)(x+y+1)=0$ și, cum x și y sunt numere reale distincte, obținem $x+y+1=0$, deci $x+y=-1$	**3p**
2.a)	$1*2=4\cdot 1\cdot 2-3\cdot 1+2\cdot 2-1=$	**3p**
	$=8-3+4-1=8$	**2p**
b)	$x*(-1)=-7x-3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-7x-3=4\Rightarrow -7x=7$, de unde obținem $x=-1$	**3p**

c)	$4ax-3x+2a-1=-x\Rightarrow 4ax-2x+2a-1=0\Rightarrow 2x(2a-1)+2a-1=0$, pentru orice număr real x	**3p**
	$a=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-\frac{8}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-8}{x^2}=\frac{2(x^2-4)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=7$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=7$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=2$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(0,2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,2]$	**2p**
	$0<1-x<1+x<2$, pentru orice $x\in(0,1)$, de unde obținem $f(1-x)\geq f(1+x)$, pentru orice $x\in(0,1)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 (f(x)-4x)dx=\int_0^2 (3x^2+2)dx=(x^3+2x)\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=2^3+2\cdot 2=12$	**2p**
b)	$\int_0^1 (f(x)-3x^2-2)e^x dx=\int_0^1 4xe^x dx=4(x-1)e^x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=0+4=4$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 a\cdot f'(x)\cdot(f(x))^{a-1}dx=(f(x))^a\Big\|_{-1}^0=2^a-1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
	$2^a-1=63$, de unde obținem $a=6$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(1-0,2):2+0,3\cdot 2=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(2)=g(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{x+3}=49^x$.

5p **4.** După o ieftinire cu 30%, un produs costă 210 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$ și $B(2,-1)$. Arătați că triunghiul OMB este dreptunghic în O, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sqrt{3}\sin 45^\circ+2\sin 30^\circ-\sqrt{2}\cos 30^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & -2 \\ 2 & x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=8$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(0)=A(x)$.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt numere reale distincte astfel încât $\det(A(x))=\det(A(y))$, atunci $x+y=-1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=4xy-3x+2y-1$.

5p **a)** Arătați că $1*2=8$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*(-1)=4$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $x*a=-x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1+\frac{8}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x^2-4)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(1-x)\ge f(1+x)$, pentru orice $x\in(0,1)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4x+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (f(x)-4x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-3x^2-2)e^x\,dx=4$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_{-1}^0 a\cdot f'(x)\cdot(f(x))^{a-1}\,dx=63$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_2 - a_1 = 10$, unde r este rația progresiei aritmetice	**2p**
	$a_3 = a_2 + r = 20 + 10 = 30$	**3p**
2.	$f(0) = 4$	**2p**
	$f(1) = 6 \Rightarrow f(0) + f(1) = 4 + 6 = 10$	**3p**
3.	$x - 4 = 4$	**3p**
	$x = 8$, care convine	**2p**
4.	$\frac{20}{100} \cdot 80 = 16$ lei	**2p**
	Prețul după ieftinire este $80 - 16 = 64$ de lei	**3p**
5.	$MN = \sqrt{9+16} =$	**3p**
	$= \sqrt{25} = 5$	**2p**
6.	$AC = 4$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) =$	**3p**
	$= 4 + 5 = 9$	**2p**
b)	$A(a) + A(-a) = \begin{pmatrix} a & a+3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -a+3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(a) \cdot A(-1) = \begin{pmatrix} -2a-3 & 4a+6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(a) \cdot A(-1) - aI_2 = \begin{pmatrix} -3a-3 & 4a+6 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(A(a) \cdot A(-1) - aI_2) = 3a^2 + a$, pentru orice număr real a	**3p**
	$3a^2 + a = 0$, de unde obținem $a = -\frac{1}{3}$ sau $a = 0$	**2p**
2.a)	$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + m \cdot 0 - 4 =$	**3p**
	$= 0 + 0 + 0 - 4 = -4$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$f(-1) = -m - 2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$f(-1) = 0$, de unde obținem $m = -2$	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9-2m$, pentru orice număr natural m	**3p**
	$9-2m>5$ și, cum m este număr natural, obținem $m=0$ sau $m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=2$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$; $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},1\right]$	**3p**
	$f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice $x\in(0,1]$ și, cum $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}-\ln 2$, obținem $f(x)\leq\frac{11}{4}-\ln 2$, pentru orice $x\in(0,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\frac{6}{2x+3}\right)dx=\int_1^3 e^x\,dx=e^x\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=e^3-e=e\left(e^2-1\right)$	**2p**
b)	$\int_{-1}^0\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_{-1}^0\frac{6}{2x+3}dx=3\int_{-1}^0\frac{(2x+3)'}{2x+3}dx=3\ln(2x+3)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=3(\ln 3-\ln 1)=3\ln 3$	**2p**
c)	$g(x)=\left(2x^2+3x\right)e^x+6x$, $x\in\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$, deci $\mathcal{A}=\int_0^1\lvert g(x)\rvert dx=\int_0^1\left(\left(2x^2+3x\right)e^x+6x\right)dx=$ $=\left(2x^2+3x\right)e^x\Big\vert_0^1-(4x+3)e^x\Big\vert_0^1+4e^x\Big\vert_0^1+3x^2\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=5e-7e+3+4e-4+3=2e+2=2(e+1)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 10$ și $a_2 = 20$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x+4$. Arătați că $f(0)+f(1)=10$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-4)=\log_2 4$.

5p **4.** Un produs costă 80 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $N(3,6)$. Arătați că distanța dintre punctele M și N este egală cu 5.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=4$ și măsura unghiului C egală cu $45°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 8.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a & a+3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=9$.

5p **b)** Arătați că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)\cdot A(-1)-aI_2)=0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3+3X^2+mX-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-4$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că -1 este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Determinați numerele naturale m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+4+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\leq\frac{11}{4}-\ln 2$, pentru orice $x\in(0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{6}{2x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{6}{2x+3}\right)dx=e\left(e^2-1\right)$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^0\left(f(x)-e^x\right)dx=3\ln 3$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(2x^2+3x\right)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2(e+1)$.