Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	**3p**
	$\frac{1}{12}:\frac{1}{12}=1$	**2p**
2.	$x_1+x_2=5$, $x_1x_2=6$	**2p**
	$4(x_1+x_2)-3x_1x_2=4\cdot 5-3\cdot 6=2$	**3p**
3.	$x-1=4$	**3p**
	$x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$p-10\%\cdot p=90$, unde p este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$p=100$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(3-5)^2+(1-1)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-3\cdot 3=$	**3p**
	$=4-9=-5$	**2p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2x+3 & 2+3x\\ 3x+2 & 3+2x\end{pmatrix}$	**2p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}2x+3 & 3x+2\\ 2+3x & 3+2x\end{pmatrix}=A\cdot B$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}2+x & 4\\ 4 & 2+x\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A-3(A+B)=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}13-3(2+x) & 12-12\\ 12-12 & 13-3(2+x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**3p**
2.a)	$1*(-3)=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-3)+1+(-3)=$	**3p**
	$=-1+1+(-3)=-3$	**2p**

b)	$x * y = \frac{1}{3}xy + x + y + 3 - 3 = \frac{1}{3}(xy + 3x + 3y + 9) - 3 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3}(x(y+3) + 3(y+3)) - 3 = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$\frac{1}{3}(x+3)\left(\frac{1}{x}+3\right) - 3 = -3 \Leftrightarrow (x+3)\left(\frac{1}{x}+3\right) = 0$	**3p**
	$x = -3$ sau $x = -\frac{1}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 3 =$	**3p**
	$= 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) + 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} =$	**2p**
	$= \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$	**2p**
	$x \in [-1,1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,1]$	**1p**
	$x \in [1,+\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1) = -2$, obținem $f(x) \geq -2$, pentru orice $x \in [-1,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - x - 1)dx = \int_0^1 \left(x^4 + x + 1 - x - 1\right)dx = \int_0^1 x^4 dx =$	**2p**
	$= \frac{x^5}{5}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$	**3p**
b)	$\int_1^e \left(f(x) - x^4 - 1\right)\ln x\,dx = \int_1^e x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx =$	**3p**
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$	**2p**
c)	$\mathcal{A} = \int_0^1 \lvert f(x) \rvert\,dx = \int_0^1 \left(x^4 + x + 1\right)dx = \frac{x^5}{5}\Big\vert_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1 + x\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{17}{10}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{12}=1$.

5p **2.** Arătați că $4(x_1+x_2)-3x_1x_2=2$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+6=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, preţul unui obiect este 90 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$ și $B(3,1)$. Calculați lungimea segmentului AB.

5p **6**. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$, arătați că $\sin x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $A\cdot A-3(A+B)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{3}xy+x+y$.

5p **a)** Arătaţi că $1*(-3)=-3$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x*\frac{1}{x}=-3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+3x}{x}=0$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq -2$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-x-1)dx=\frac{1}{5}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^e (f(x)-x^4-1)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox și dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$	**3p**
	$\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{3}=1$	**2p**
2.	$f(1)=0\Rightarrow 1-a=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$x+1=25$	**3p**
	$x=24$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Mulţimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	Multiplii de 30 din mulţimea M sunt 30, 60 şi 90, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**2p**
5.	$x_M=5$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$y_M=5$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$ şi, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\sin x=\frac{12}{13}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5}=\frac{12}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot B+A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 4^y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=1\\ 4^y=1\end{cases}$, deci $x=0$ şi $y=0$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+1=$	**3p**
	$=1-2-2+1=-2$	**2p**

b)	Câtul este X^2-3X+1 Restul este 0	**3p** **2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=2$ $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=f(2)=-3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-3x^2+3=$ $=3\left(1-x^2\right)=3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$ $=f'(2)=-9$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$ $x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,1]$ $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ Cum $f(1)=4$, obținem $f(x)\leq 4$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}(f(x)-2)dx=\int\limits_{-1}^{1}(x+2-2)dx=\int\limits_{-1}^{1}xdx=$ $=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$	**2p** **3p**
b)	$\int\limits_{0}^{1}e^x f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}e^x(x+2)dx=\left.e^x(x+2)\right\|_{0}^{1}-\left.e^x\right\|_{0}^{1}=$ $=(3e-2)-(e-1)=2e-1$	**3p** **2p**
c)	$\int\limits_{0}^{a}f(x)dx=\int\limits_{0}^{a}(x+2)dx=\frac{a^2}{2}+2a$ $\int\limits_{0}^{6-a}(f(x)-4)dx=\int\limits_{0}^{6-a}(x-2)dx=\frac{(6-a)^2}{2}-2(6-a)$ $\frac{a^2}{2}+2a=\frac{(6-a)^2}{2}-2(6-a)\Leftrightarrow a=1$	**2p** **2p** **1p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{10}{3}=1$.

5p **2.** Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(1,0)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}=5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ şi $B(7,5)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{5}{13}$, arătaţi că $\operatorname{tg} x=\frac{12}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=1$.

5p **b)** Arătaţi că $B\cdot B+A=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x şi y, pentru care $A+B=\begin{pmatrix}2^x&0\\0&4^y\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+1$.

5p **a)** Arătaţi că $f(1)=-2$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X+1$.

5p **c)** Demonstraţi că $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)=-3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3+3x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-9$.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\le 4$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-2\right)dx=0$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{0}^{1}e^x f(x)\,dx=2e-1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_{0}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{6-a}\left(f(x)-4\right)dx$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=1$	**2p**
2.	$f(-1)=0$	**2p**
	$f(1)=0 \Rightarrow f(-1)+f(1)=0$	**3p**
3.	$3x+4=16$	**3p**
	$x=4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	Multiplii de 3 din mulțimea A sunt 3, 6 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{10}$	**2p**
5.	$AO=5$	**2p**
	$BO=5 \Rightarrow \Delta AOB$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{4\cdot 3}{2}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 1=$	**3p**
	$=1-2=-1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A-2A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2x-3 & x-2\\ x-2 & x-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x-3 & x-2\\ x-2 & x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+5\cdot 1^2-4=$	**3p**
	$=1+5-4=2$	**2p**
b)	Câtul este X^2+4X-4	**3p**
	Restul este 0	**2p**

c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$, $x_1x_2x_3=4$	**2p**
	$x_1+x_2+x_3=-5\Rightarrow\frac{x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_3}=\frac{-5-x_1}{x_1}+\frac{-5-x_2}{x_2}+\frac{-5-x_3}{x_3}=-5\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)-3=$ $=-5\cdot\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}-3=-5\cdot0-3=-3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x)'-\left(x^3\right)'=$	**2p**
	$=3-3x^2=3\left(1-x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{3x-x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(3x-x^3\right)'}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3-3x^2}=0$	**2p**
c)	$f(1)=2$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)+x^2-x+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-x^2+x-1+x^2-x+1\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right)'=\frac{4x^3}{4}-\frac{3x^2}{3}+\frac{2x}{2}-1=$	**3p**
	$=x^3-x^2+x-1=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$g(x)=x-1\Rightarrow V=\pi\int_{1}^{2}g^2(x)dx=\pi\int_{1}^{2}(x-1)^2dx=\pi\cdot\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right\|_{1}^{2}=$	**3p**
	$=\frac{\pi}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{3}{4}\right):\frac{1}{4}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $f(-1)+f(1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+4}=4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,5)$ şi $B(5,0)$. Arătați că triunghiul AOB este isoscel.

5p **6**. Calculați aria triunghiului ABC, dreptunghic în A cu $AB=4$ și $AC=3$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A-2A=I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $A\cdot B=I_2$, unde $B=\begin{pmatrix}-1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2-4$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=2$.

5p **b)** Determinaţi câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+1$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_3}=-3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-x^3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(1-x^2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=0$.

5p **c)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x^2+x-1$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)+x^2-x+1\right)dx=0$.

5p **b)** Arătaţi că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}:0,5=1$	**3p**
	$1-\frac{1}{2}:0,5=1-1=0$	**2p**
2.	$x_1+x_2=8$, $x_1x_2=15$	**2p**
	$2(x_1+x_2)-x_1x_2=2\cdot 8-15=1$	**3p**
3.	$5x+1=36$	**3p**
	$x=7$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile	**1p**
	Numerele divizibile cu 2 din mulțimea A sunt 2, 4, 6 și 8, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(0-6)^2+(8-0)^2}=$	**3p**
	$=10$	**2p**
6.	$\cos B=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AB}{3\sqrt{2}}$	**3p**
	$AB=3$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot(-2)=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=2A$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-2 & b\\ c+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a-2 & b\\ -2(a-2)+c+1 & -2b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$a=3$, $b=0$, $c=1$	**3p**
2.a)	$1\circ(-3)=1\cdot(-3)+3\cdot 1+3\cdot(-3)+6=$	**3p**
	$=-3+3+(-9)+6=-3$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+3x+3y+9-3=$	**2p**
	$=x(y+3)+3(y+3)-3=(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$(x+3)(x+3)-3\le x \Leftrightarrow (x+3)(x+2)\le 0$	**3p**
	$x\in[-3,-2]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+7'=$	**2p**
	$=6x^2-6x=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-11}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=$	**3p**
	$=6\cdot 2\cdot 1=12$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=1$	**2p**
	$x\in[0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=6$, obținem $f(x)\ge 6$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-3x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+3x-3x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}x^2dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$	**3p**
b)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-x^2\right)e^xdx=\int\limits_0^1\left(x^2+3x-x^2\right)e^xdx=3\int\limits_0^1 xe^xdx=3\left(xe^x\Big\|_0^1-\int\limits_0^1 e^xdx\right)=$	**3p**
	$=3(x-1)e^x\Big\|_0^1=3$	**2p**
c)	$g(x)=3(x+3)\Rightarrow V=\pi\int\limits_1^2 g^2(x)dx=\pi\int\limits_1^2 9(x+3)^2dx=9\pi\cdot\frac{(x+3)^3}{3}\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=183\pi$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $1-\frac{1}{2}:0,5=0$.

5p **2.** Arătaţi că $2(x_1+x_2)-x_1x_2=1$, unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-8x+15=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{5x+1}=6$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ şi $B(0,8)$. Calculaţi lungimea segmentului AB.

5p **6**. Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dreptunghic în A, ştiind că $BC=3\sqrt{2}$ şi $m(\sphericalangle B)=45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=1$.

5p **b)** Arătaţi că $A\cdot A+I_2=2A$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a, b şi c, pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}a-2 & b\\ c+1 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+3x+3y+6$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ(-3)=-3$.

5p **b)** Demonstraţi că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui x, pentru care $x\circ x\le x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+7$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-11}{x-2}=12$.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\ge 6$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(f(x)-3x)dx=\frac{2}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{0}^{1}(f(x)-x^2)e^x dx=3$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{3f(x)}{x}$.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x_1=1$ și $x_2=2$	**2p**
3.	$2x-1=5^2$	**3p**
	$x=13$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 4 divizori ai lui 1000, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{9}$	**2p**
5.	$AO=3$, $BO=4$, $AB=5$	**3p**
	$P_{\Delta AOB}=3+4+5=12$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-1\cdot 0-1\cdot 0=0$	**3p**
b)	$A+I_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot(A+I_2)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**3p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1+m & -1\\ 0 & m\end{pmatrix}$, $\det B=m(m+1)$	**3p**
	$\det B=0 \Leftrightarrow m=-1$ sau $m=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3+(-1)^2+4\cdot(-1)+4=$	**3p**
	$=-1+1-4+4=0$	**2p**
b)	Câtul este $X-2$	**3p**
	Restul este $8X+8$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=4$, $x_1x_2x_3=-4$	**3p**
	$\frac{(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)+(x_3+x_1+x_2)}{x_1x_2x_3}=\frac{4+(-1)}{-4}=-\frac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-12=$	**3p**
	$=3\left(x^2-4\right)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(2)=-16$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=-16$	**3p**
c)	$f'(-2)=0$, $f'(2)=0$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-2,2]$	**3p**
	$f(2)\le f(x)\le f(-2)\Rightarrow -16\le f(x)\le 16$, pentru orice $x\in[-2,2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-3x^2-1\right)dx=\int_0^1 5x^4\,dx=x^5\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2\left\|f(x)\right\|dx=\int_1^2\left(5x^4+3x^2+1\right)dx=\left(x^5+x^3+x\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=\left(2^5+2^3+2\right)-\left(1^5+1^3+1\right)=39$	**2p**
c)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ pentru orice număr real x, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

5p **2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x-1)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie divizor al lui 1000.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Calculați perimetrul triunghiului AOB.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{3}{5}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Verificați dacă $A\cdot(A+I_2)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $\det B=0$, unde $B=A\cdot A+mI_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+4X+4$.

5p **a)** Arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+3X+2.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=-\frac{3}{4}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $-16\le f(x)\le 16$, pentru orice $x\in[-2,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x^4+3x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2-1\right)dx=1$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{10}{3+i}=\frac{10(3-i)}{3^2-i^2}=3-i$	**3p**
	$3-i=a+ib\Rightarrow a=3,\ b=-1$	**2p**
2.	$f(1)=0,\ f(0)=-1$	**2p**
	$\left(f(1)\right)^{2016}+\left(f(0)\right)^{2016}=0^{2016}+(-1)^{2016}=1$	**3p**
3.	$6^{x^2-3x+5}=6^3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=2$	**2p**
4.	$C_6^5=\frac{6!}{5!(6-5)!}=$	**3p**
	$=6$	**2p**
5.	Punctul C este mijlocul segmentului $AB\Rightarrow 10=\frac{5+2m+1}{2}$	**3p**
	$2m+6=20\Rightarrow m=7$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A	**2p**
	$\cos C=\frac{12}{13}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=$	**3p**
	$=1$	**2p**
b)	$A-I_3=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$(A-I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow(A-I_3)(A-I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	**3p**
c)	$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+2y+4z\\y+3z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$	**2p**
	$x=2,\ y=-5,\ z=2$	**3p**

2.a)	$x*y=xy-x-y+1+1=$	**2p**
	$=x(y-1)-(y-1)+1=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$0*1*2*3=(0*1)*2*3=1*(2*3)=$	**3p**
	$=1$	**2p**
c)	$a*a=(a-1)^2+1\Rightarrow a*a*2016=2015(a-1)^2+1$	**2p**
	$2015(a-1)^2+1=2016\Leftrightarrow(a-1)^2=1\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$	**2p**
	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ și $f'(2)=-\frac{1}{4}\Rightarrow\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$f(1)=2$, $f'(1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=-x+3$	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p**
	Cum $f(1)=2$ și $f(2016)=\frac{2017}{2016}$, obținem $\frac{2017}{2016}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[1,2016]$	**3p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)+3x^2-2\right)dx=\int_0^2 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_0^2=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-x^3+3x^2+x\right)e^x\,dx=\int_0^1(2+x)e^x\,dx=$	**2p**
	$=\left.(1+x)e^x\right\|_0^1=2e-1$	**3p**
c)	$\int_{1-a}^{1+a}f(x)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right)\right\|_{1-a}^{1+a}=$	**2p**
	$=2a+2a^3-2a^3-6a+4a=0$, pentru orice număr real a	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numerele reale a și b, pentru care $\frac{10}{3+i}=a+ib$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $(f(1))^{2016}+(f(0))^{2016}$.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{x^2-3x+5}=216$.
5p	**4.** Calculați în câte moduri poate fi aleasă o echipă formată din 5 elevi din totalul de 6 elevi pe care îi are la dispoziţie un antrenor.
5p	**5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,0)$ și $B(2m+1,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul $C(10,0)$ este mijlocul segmentului AB.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB=5$, $AC=12$ și $BC=13$. Calculați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați $\det A$.
5p	**b)** Arătați că $(A-I_3)(A-I_3)(A-I_3)=O_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-x-y+2$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**b)** Calculaţi $0*1*2*3$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale a, ştiind că $a*a*2016=2016$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$.
5p	**a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstraţi că $\frac{2017}{2016}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[1, 2016]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+2$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^2 \left(f(x)+3x^2-2\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x)-x^3+3x^2+x\right)e^x dx=2e-1$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{1-a}^{1+a} f(x)\,dx=0$, pentru orice număr real a.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei este egală cu 4	**2p**
	$b_1+b_2+b_3=2+8+32=42$	**3p**
2.	$f(5)=6$, $f(a-5)=a^2-14a+46$	**2p**
	$a^2-14a+40=0 \Leftrightarrow a=4$ sau $a=10$	**3p**
3.	$2^{x+1}=2^{2x-4} \Leftrightarrow x+1=2x-4$	**3p**
	$x=5$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 3 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri	**3p**
	Cifra unităților se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a celorlalte două cifre, în câte 4 moduri, deci se pot forma $3\cdot 4\cdot 4=48$ de numere	**2p**
5.	Punctul M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$M(2,1)$	**3p**
6.	Înălțimea din A a triunghiului ABC este de $\frac{1}{2}\cdot 8=4$	**2p**
	Aria triunghiului ABC este egală cu $\frac{4\cdot 12}{2}=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$d(0)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&3&2\end{vmatrix}=0+6+3-0-3-4=$	**3p**
	$=2$	**2p**
b)	$d(x)=0+6+3(x+1)-0-2\left(x^2+2\right)-3(x+1)=-2x^2+2=$	**3p**
	$=-2\left(x^2-1\right)=-2(x-1)(x+1)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$-2(x-1)(x+1)=-2(y-1)(y+1) \Leftrightarrow x^2-y^2=0$	**2p**
	Cum $x\ne y$, din $(x-y)(x+y)=0$, obținem $x+y=0$	**3p**
2.a)	$A+I_2=\begin{pmatrix}0+1&1+0\\-1+0&0+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_2 \Rightarrow M=A+I_2+\left(-I_2\right)=A$	**2p**
	Cum $A\cdot(-A)=(-A)\cdot A=I_2$, obținem că inversa matricei M este matricea $-A$	**3p**

c)	$\left(A+I_2\right)\left(B+I_2\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ x^2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x^2 & x+1\\ -1+x^2 & -x+1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+x^2 & x+1\\ -1+x^2 & -x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{x+2}=\frac{\sqrt{1^2+3\cdot 1+5}}{1+2}=$	**3p**
	$=1$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{x+2}=$	**3p**
	$=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=-2$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
2.a)	$f(-1)=-1$	**2p**
	$f(1)=0 \Rightarrow f(-1)+f(1)=-1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2x+1)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(1-x^3\right)=1$	**1p**
	Cum $f(0)=1$, obținem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în punctul $x=0$	**3p**
c)	$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**2p**
	Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f are semn constant pe fiecare din intervalele $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ și $(1,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$	**1p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și $b_2 = 8$. Calculați $b_1 + b_2 + b_3$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale a pentru care $f(a-5) = f(5)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 2^x = 4^{x-2}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre se pot forma cu cifrele din mulțimea $A = \{0,2,4,5\}$.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$ și $B(-1,4)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle ABC) = 30°$, $AB = 8$ şi $BC = 12$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $d(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x+1 \\ 3 & 3 & x^2+2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $d(0)$.

5p **b)** Demonstrați că $d(x) = -2(x-1)(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătaţi că, dacă x şi y sunt două numere reale diferite astfel încât $d(x) = d(y)$, atunci $x + y = 0$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $A + I_2$.

5p **b)** Arătați că inversa matricei $M = A + I_2 + A\cdot A$ este matricea $-A$.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care avem $(A+I_2)(B+I_2) = 2I_2$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}}{x+2}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Determinaţi ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x\in(-\infty,0] \\ 1-x^3, & x\in(0,+\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Calculaţi $f(-1) + f(1)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x = 0$.

5p **c)** Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale inecuaţia $f(x)\geq 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{4}:0,25=1$	**3p**
	$1-\frac{1}{4}:0,25=1-1=0$	**2p**
2.	$f(-1)=0$	**3p**
	$f(-1)\cdot f(1)=0$	**2p**
3.	$2x-3=25$	**3p**
	$x=14$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	20% din 100 este egal cu $\frac{20}{100}\cdot 100=20$	**3p**
	Preţul după scumpire este $100+20=120$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(5-2)^2+(4-4)^2}=$	**3p**
	$=3$	**2p**
6.	ΔABC este isoscel $\Rightarrow AB=AC=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(-2)-1\cdot 2=$	**3p**
	$=-2-2=-4$	**2p**
b)	$A-2B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x & 2\\ 2y & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(A-2B)=\begin{vmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$, de unde obţinem $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	$1\circ(-2)=1\cdot(-2)+2\cdot 1+2\cdot(-2)+2=$	**3p**
	$=-2+2-4+2=-2$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+2x+2y+4-2=$	**3p**
	$=x(y+2)+2(y+2)-2=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**

c)	$(x+2)\left(\frac{1}{x}+2\right)-2=x \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+2\right)=x+2 \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+1\right)=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3\right)'+\left(x^2\right)'-x'+1'=$	**2p**
	$=3x^2+2x-1+0=3x^2+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2-x}{x^3+x^2-x+1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$	**3p**
c)	$f'(x)=4$	**2p**
	$3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$ sau $x=1$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^5+x^3+2x-x^3-2x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^5\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^6}{6}\Big\vert_{-1}^{1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$	**3p**
b)	$\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3+1\right)dx=\int_{0}^{2}e^x(2x+1)dx=e^x(2x+1)\Big\vert_{0}^{2}-\int_{0}^{2}2e^x dx=$	**3p**
	$=5e^2-1-2\left(e^2-1\right)=3e^2+1$	**2p**
c)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=5x^4+3x^2+2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci F este convexă pe $\mathbb{R}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 01

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1-\frac{1}{4}:0,25=0$.

5p **2.** Calculați $f(-1)\cdot f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-3}=5$.

5p **4.** Un obiect costă 100 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(5,4)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.

5p **6**. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că $AC=6$ și $B=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & -1\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=-4$.

5p **b)** Arătați că $\det(A-2B)=0$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y, pentru care $A\cdot B=B\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ(-2)=-2$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x\circ\frac{1}{x}=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2-x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3x^2+2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=3$.

5p **c)** Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta $y=4x+1$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3+2x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x\right)dx=0$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3+1\right)dx=3e^2+1$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.