Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=1+i+\left(i^2-1\right)-i+1=$	**3p**
	$=1+i-2-i+1=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$f\left(f(1)\right)=f(0)=1$	**3p**
3.	$x^2-5x+7=3\Rightarrow x^2-5x+4=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=4$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale pare de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$x_A+x_C=6$, $x_B+x_D=6\Rightarrow x_A+x_C=x_B+x_D$	**2p**
	$y_A+y_C=6$, $y_B+y_D=6\Rightarrow y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow$ segmentele AC și BD au același mijloc, deci $ABCD$ este paralelogram	**3p**
6.	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg}x=1$, obținem $x=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**
	$\sin\dfrac{\pi}{4}+3\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(1)=\begin{pmatrix}1&5\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(X(1)\right)=\begin{vmatrix}1&5\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-1\cdot5=$	**3p**
	$=1-5=-4$	**2p**
b)	$X(-a)+X(a)=\begin{pmatrix}-a&5\\1&-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&5\\1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&10\\2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-2018&5\\1&-2018\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2018&5\\1&2018\end{pmatrix}=X(-2018)+X(2018)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}ab+5&5(a+b)\\a+b&ab+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&10\\2&a+b\end{pmatrix}$	**3p**
	Cum $a+b=2$ și $ab=-3$, obținem perechile $(-1,3)$ și $(3,-1)$	**2p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-X+2\Rightarrow f(2)=2^3-2\cdot2^2-2+2=$	**3p**
	$=8-8-2+2=0$	**2p**
b)	$f(-1)=0\Rightarrow m=2$, deci $f=X^3-2X^2-X+2$	**3p**
	Restul împărțirii lui f la X^2-3X+2 este 0, deci f se divide cu X^2-3X+2	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1$, $x_1x_2x_3=-m$	**3p**
	$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=6 \Leftrightarrow \frac{6}{-m}=6$, deci $m=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}+\frac{1\cdot(x+2)-(x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}+\frac{1\cdot(x+3)-(x+2)\cdot 1}{(x+3)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}+\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}+\frac{x+3-x-2}{(x+3)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}\right)=3$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1,+\infty)$	**2p**
	f este continuă pe $(-1,+\infty)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, deci $\operatorname{Im} f=(-\infty,3)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=\int_1^2 (3x^2+2x+1)\,dx=(x^3+x^2+x)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=(8+4+2)-(1+1+1)=11$	**2p**
b)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx=\int_1^e\left(3x+2+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}+2x+\ln x\right)\Big\vert_1^e+\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx=$	**3p**
	$=\frac{3e^2+4e-5}{2}+\frac{1}{2}\ln^2 x\Big\vert_1^e=\frac{3e^2+4e-4}{2}$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^a \vert f(x)\vert\,dx=\int_1^a (3x^2+2x+1+\ln x)\,dx=(x^3+x^2+x)\Big\vert_1^a+(x\ln x-x)\Big\vert_1^a=a^3+a^2+a\ln a-2$	**3p**
	$a^3+a^2+a\ln a-2=a^3+a^2+a-2\Rightarrow \ln a=1$, deci $a=e$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-5x+7\right)=\log_2 3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(4,3)$ și $D(8,5)$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Arătați că $\sin x+3\cos x=2\sqrt{2}$, știind că $\operatorname{tg} x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} a & 5\\ 1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(X(1))=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $X(-a)+X(a)=X(-2018)+X(2018)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinaţi perechile de numere reale (a,b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(2)=0$.

5p **b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+1$, atunci polinomul f se divide cu X^2-3X+2.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=6$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=11$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3e^2+4e-4}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$ are aria egală cu a^3+a^2+a-2.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1b_3=b_2^2$	**2p**
	$b_1b_2b_3=b_2^3=4^3=64$	**3p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$g(f(1))=g(0)=2018$	**3p**
3.	$5^{2x}=5^{x^2}\Leftrightarrow x^2-2x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 10 numere care au cifra zecilor egală cu 9, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{90}=\dfrac{1}{9}$	**2p**
5.	$m_d=\dfrac{a-1}{a^2}$	**2p**
	Dreapta d este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow\dfrac{a-1}{a^2}=0$, deci $a=1$	**3p**
6.	Cum $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	**2p**
	$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}=\dfrac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3&1\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}3&1\\1&-2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-1\cdot1=$	**3p**
	$=-6-1=-7$	**2p**
b)	$xA(y)-yA(x)=x\begin{pmatrix}y+2&y\\1&-2\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy+2x-yx-2y&xy-yx\\x-y&-2x+2y\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2(x-y)&0\\x-y&-2(x-y)\end{pmatrix}=(x-y)\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$aA(-1)-(-1)A(a)=(a+1)A(0)\Rightarrow(aA(-1)+A(a))A(0)=(a+1)A(0)A(0)=4(a+1)I_2$	**3p**
	$4(a+1)=a^2+7\Leftrightarrow a=1$ sau $a=3$	**2p**
2.a)	$f=4X^3-6X+2\Rightarrow f(1)=4\cdot1^3-6\cdot1+2=$	**3p**
	$=4-6+2=0$	**2p**

b)	Restul împărțirii polinomului f la X^2+X+1 este egal cu $-6X+m+4$	**3p**
	Cum pentru orice număr real m restul este nenul, polinomul f **nu** se divide cu X^2+X+1	**2p**
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2x_3=-\frac{m}{4}\Rightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{m}$	**3p**
	$\left(\frac{6}{m}\right)^2=-\frac{4}{m}$ și, cum m este număr real nenul, obținem $m=-9$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=0-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=-\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f\left(\sqrt{x}\right)\ge 0\Rightarrow 1-\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 0$, deci $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2(x+1)f(x)dx=\int_0^2\left(3x^3+3x^2+1\right)dx=\left(\frac{3x^4}{4}+x^3+x\right)\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=12+8+2=22$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx=\int_0^1 3x^2e^{x^3}dx=e^{x^3}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=e-1$	**2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{\pi}{x+1}\Big\|_0^1=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$	**3p**
	$\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_2=4$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2$ și $g(x)=2018-x$. Calculați $g(f(1))$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x=5^{x^2}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-1)x-a^2y-a^2=0$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.
5p	**6.** Arătaţi că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{5}{2}$, știind că $\sin x=\frac{1}{\sqrt5}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-7$.
5p	**b)** Demonstrați că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, știind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.
	2. Se consideră polinomul $f=4X^3-6X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2+X+1.
5p	**c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\frac{1}{x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)dx=22$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=\sqrt{3}\left(3-1\right)-2\sqrt{3}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**2p**
2.	$f(1)=g(1)\Leftrightarrow 1^2+2\cdot 1+3=1+a\Leftrightarrow 6=1+a$	**3p**
	$a=5$	**2p**
3.	$x+1=1-2\sqrt{x}+x\Rightarrow 2\sqrt{x}=0$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**3p**
5.	$m_{d_1}=a$, $m_{d_2}=\frac{1}{4}$	**2p**
	Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin x\cos x-\sin x(-\cos x)=$	**3p**
	$=2\sin x\cos x=\sin 2x$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(M(1)\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-2)\cdot 3-3\cdot(-2)=$	**3p**
	$=-6+6=0$	**2p**
b)	$M(x)-M(2018)=(I_2+xA)-(I_2+2018A)=I_2+xA-I_2-2018A=$	**2p**
	$=\left(I_2+(-2018)A\right)-\left(I_2+(-x)A\right)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$(I_2+mA)(I_2+nA)=I_2+mnA\Leftrightarrow I_2+mA+nA+mnA\cdot A=I_2+mnA$ și, cum $A\cdot A=-A$, obținem $m+n-mn=mn$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale nenule, $m+n=2mn\Rightarrow (m,n)=(1,1)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=8xy+x+y+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=$	**3p**
	$=8x\left(y+\frac{1}{8}\right)+\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$8\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{8}=1\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$	**3p**
	$x=-\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{4}$	**2p**

c)	$f(x\circ y)=8(8xy+x+y)+1=64xy+8x+8y+1=(8x+1)(8y+1)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$f(x\circ y\circ z)=f(x\circ y)\cdot f(z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+3\right)-(x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=\dfrac{1}{3}$, $f'(0)=\dfrac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**3p**
	$1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^3\frac{x f(x)}{e^x}dx=\int_0^3\frac{x^2e^x}{e^x}dx=\int_0^3 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}-0=9$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=xe^x$, $F''(x)=(x+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$, $F''(-1)=0$ și $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are un singur punct de inflexiune	**3p**
c)	$\displaystyle\mathcal{A}=\int_0^n\left\|f(x)\right\|dx=\int_0^n xe^x\,dx=\left.(x-1)e^x\right\|_0^n=(n-1)e^n+1$	**3p**
	$(n-1)e^n+1=1\Leftrightarrow n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=0$.

5p **2.** Determinați numărul real a, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x=1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=ax+2$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{4}+1$. Determinaţi numărul real a, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3&-2\\3&2\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechea de numere naturale nenule (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$. Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox și dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n(n+2)<14$ și $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=0$ sau $n=1$ sau $n=2$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii este egală cu $0+1+2=3$	**2p**
2.	$b=1$	**2p**
	$a(x+1)+1=ax+1+2$, pentru orice număr real $x\Rightarrow a=2$	**3p**
3.	$(x+2)(x+8)>0$	**2p**
	Mulțimea soluțiilor inecuației este $(-\infty,-8)\cup(-2,+\infty)$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor ordonate cu două elemente din $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ este egal cu $A_5^2=$	**3p**
	$=20$	**2p**
5.	$M(1,4)$ este mijlocul segmentului BC	**2p**
	Coordonatele simetricului punctului A față de punctul M sunt $x=2$ și $y=6$	**3p**
6.	$EF=3$	**2p**
	ΔDEF este dreptunghic în E, deci $\sin D=\dfrac{3}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=0+0+0-(-1)-(-1)-0=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=1,\ y=2$	**3p**
c)	$B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det B=2$	**2p**
	$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$2\circ 9=2^{2\log_3 9}=2^{2\cdot 2}=$	**3p**
	$=2^4=16$	**2p**
b)	$x^{2\log_3 3}=25\Leftrightarrow x^2=25$	**2p**
	$x=-5$ care nu convine, $x=5$ care convine	**3p**
c)	$x\circ y=x^{2\log_3 y}=x^{\log_3 y^2}=\left(y^2\right)^{\log_3 x}=$	**3p**
	$=y^{2\log_3 x}=y\circ x$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(e^x\right)'\cdot(x-1)-e^x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$	**2p**
	$x\in(1,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(1,2]$ şi $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f(2)=e^2$, deci $\dfrac{e^x}{x-1}\ge e^2\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-2}}{x-1}\ge 1\Leftrightarrow e^{x-2}-x+1\ge 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=-\cos x\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}}=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(-\cos x)'dx=-x\cos x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}+0\cdot\cos 0+\sin x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0=1$	**2p**
c)	$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}g^2(x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{\pi}{2}x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{\pi}{4}\sin 2x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi(\pi-2)}{8}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că suma elementelor mulțimii $\{n \in \mathbb{N} \mid n(n+2) < 14\}$ este egală cu 3.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Determinați numerele reale a și b, știind că $f(0) = 1$ și $f(x+1) = f(x) + 2$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(x+5)^2 - 9 > 0$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu două elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(3,5)$ și $C(-1,3)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Calculați sinusul unghiului D al triunghiului DEF, știind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 6, $DE = 4$ și $DF = 5$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A = 2$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A \cdot A \cdot A = xA + yI_3$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $B = A + I_3$.

2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x^{2\log_3 y}$.

5p **a)** Arătați că $2 \circ 9 = 16$.

5p **b)** Determinați numărul real x, $x \in M$ pentru care $x \circ 3 = 25$.

5p **c)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x-2} - x + 1 \geq 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx = 1$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=3+4i$	**3p**
	$\overline{z}=3-4i$	**2p**
2.	Cum n este număr natural, $(n+4)(n-3)<0\Rightarrow n<3$	**2p**
	$n=0$, $n=1$ sau $n=2$	**3p**
3.	$\lg(x+1)=\lg(x-5)^2\Rightarrow x+1=(x-5)^2$	**2p**
	$x^2-11x+24=0\Rightarrow x=3$, care nu verifică ecuația și $x=8$, care verifică ecuația	**3p**
4.	O mulțime cu n elemente are C_n^2 submulțimi cu două elemente	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=45\Rightarrow n=10$	**3p**
5.	$\vec{v}=2\overrightarrow{AC}$, deci $AC=10$	**3p**
	Cum $ABCD$ este dreptunghi, obținem $BD=10$	**2p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2=2\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&4\\-4&1&-8\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&4\\-4&1&-8\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a)+aA(0))=\begin{vmatrix}a+1&0&2a\\-2a&a+1&-2a^2\\0&0&a+1\end{vmatrix}=(a+1)^3$	**3p**
	$(a+1)^3=2^3\Rightarrow a=1$	**2p**
c)	$(m+n)^3=m^3+n^3+18$	**2p**
	$mn(m+n)=6$ deci, cum m și n sunt numere naturale și $m<n$, obținem $m=1$ și $n=2$	**3p**
2.a)	$x*y=\left(xy+\hat{6}x\right)+\left(\hat{6}y+\hat{1}\right)+\hat{1}=$	**3p**
	$=x\left(y+\hat{6}\right)+\hat{6}\left(y+\hat{6}\right)+\hat{1}=\left(x+\hat{6}\right)\left(y+\hat{6}\right)+\hat{1}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_7$	**2p**
b)	$x*\hat{1}=\left(x+\hat{6}\right)\left(\hat{1}+\hat{6}\right)+\hat{1}=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}$	**2p**
	$\hat{1}*x=\left(\hat{1}+\hat{6}\right)\left(x+\hat{6}\right)+\hat{1}=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}=x*\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$	**3p**

c)	$\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}=\left(\hat{0}*\hat{1}\right)*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}=$	**3p**
	$=\hat{1}*\left(\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}\right)=\hat{1}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(x^2-6x+9\right)+e^x\left(x^2-6x+9\right)'=$	**2p**
	$=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ și $x=3$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(1,3)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(3,+\infty)$, deci punctele de extrem ale funcției f sunt $x=1$ și $x=3$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $x\in(-\infty,1]$ și descrescătoare pe $x\in[1,3]$, deci $f(x)\le f(1)$ pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**3p**
	$f(1)=4e$, deci $f(x)\le 4e\Leftrightarrow e^x(x-3)^2\le 4e\Leftrightarrow (x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(3x^2-4x+1\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ și, cum $f(1)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\int_{-1}^{e} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{e} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2-4x+1\right)dx+\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$	**2p**
	$=\left(x^3-2x^2+x\right)\Big\vert_{-1}^{1}+\left(2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\right)\Big\vert_{1}^{e}=4-2\sqrt{e}+4=2\left(4-\sqrt{e}\right)$	**3p**
c)	$\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln^2 x}{x}dx=\frac{\ln^3 x}{3}\Big\vert_{e^n}^{e^{n+1}}=\frac{3n^2+3n+1}{3}$	**3p**
	$\frac{3n^2+3n+1}{3}=\frac{7}{3}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați conjugatul numărului complex $z=(1-i)(2+i)+5i$.

5p **2.** Determinați numerele naturale n pentru care $n^2+n-12<0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+1)=2\lg(x-5)$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Știind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 20, determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.

5p **6.** Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, atunci $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2x\\ -2x & 1 & -2x^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)+aA(0))=8$.

5p **c)** Știind că $\det((m+n)A(x))=\det(mA(x))+\det(nA(x))+18$, pentru orice număr real x, determinați numerele naturale m și n, $m<n$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_7$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+\hat{6}x+\hat{6}y+\hat{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=(x+\hat{6})(y+\hat{6})+\hat{1}$, pentru orice $x, y\in\mathbb{Z}_7$.

5p **b)** Demonstrați că $x*\hat{1}=\hat{1}*x=\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Calculați $\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $(x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+1, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=2\left(4-\sqrt{e}\right)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)\,dx=\dfrac{7}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_5(7\cdot 35)-\log_5\left(\frac{7}{25}\right)^2=$	**2p**
	$=\log_5\left(7\cdot 35\cdot\frac{25^2}{7^2}\right)=\log_5\left(5^5\right)=5\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$S=f\left(f(1)\right)+f\left(f(2)\right)+\ldots+f\left(f(10)\right)=5+6+7+\ldots+14=$	**3p**
	$=95$	**2p**
3.	$\log_2\left(x^2+1\right)+\log_2 8=\log_2\left(7x^2+9\right)\Rightarrow 8\left(x^2+1\right)=7x^2+9\Rightarrow x^2=1$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 4 elemente, deci sunt 4 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 2 numere reale, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{MN}=(n-1)\vec{i}+(3-n)\vec{j}$, $\overrightarrow{MP}=(2n-1)\vec{i}+(5-n)\vec{j}$	**2p**
	$\frac{n-1}{2n-1}=\frac{3-n}{5-n}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=2$	**3p**
6.	$\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$	**2p**
	$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(-1)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(X(-1)\right)=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&9&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=18+3+(-4)-(-9)-12-2=12$	**3p**
b)	$\det\left(X(a)-I_3\right)=\begin{vmatrix}1&4&1\\3&8&1\\a&a^2&0\end{vmatrix}=2a^2-4a$	**3p**
	$2a^2-4a=0\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**2p**
c)	$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{vmatrix}=a^2-5a+6$ și, cum ABC este triunghi, obținem $a^2-5a+6\neq 0$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, deci $\lvert a^2-5a+6\rvert<6$ și, cum a este număr natural, obținem $a=1$ sau $a=4$	**3p**

2.a)	$M(x)M(y)=\begin{pmatrix}1+3y+3x+9xy-9xy & 3y+9xy+3x-9xy\\ -3x-9xy-3y+9xy & -9xy+1-3y-3x+9xy\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1+3(x+y) & 3(x+y)\\ -3(x+y) & 1-3(x+y)\end{pmatrix}=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$M(x)M(-x)=M(x+(-x))=M(0)=I_2$, pentru orice număr real x $M(-x)M(x)=M((-x)+x)=M(0)=I_2$, pentru orice număr real x, deci inversa matricei $M(x)$ este matricea $M(-x)=\begin{pmatrix}1-3x & -3x\\ 3x & 1+3x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
c)	$M\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\right)=M(5)$, deci $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$ $x=4$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)}=$ $=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x}=\frac{3}{2}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{x}=-1$, deci dreapta de ecuație $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m^2x^2-mx-2}{mx}\cdot\frac{x}{x^2-x-2}\right)=m$ Cum m este nenul, din $m=m^2-m$, obținem $m=2$, deci există un singur număr natural nenul m care verifică relația	**3p** **2p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4f(x)}{(1-2x)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4\left(x^2-ax+2a-4\right)}{1-4x+4x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2-4ax+8a-16}{4x^2-4x+1}=1$, pentru orice număr real a	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(x^2-ax+2a-4\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(2^{x-1}-2\right)=0$ și, cum $f(2)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$, deci funcția f este continuă în $x=2$, pentru orice număr real a Cum, pentru orice număr real a, funcția f este continuă pe $(-\infty,2)$ și pe $(2,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
c)	$f(1)=a-3$, $f(3)=2$ Pentru orice număr real a, $a<3$, $f(1)\cdot f(3)<0$ și, cum funcția f este continuă, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\log_5 7+\log_5 35-2\log_5 \frac{7}{25}$ este natural.

5p **2.** Știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$, calculați $S=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+\ldots+(f\circ f)(10)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+1\right)+3=\log_2\left(7x^2+9\right)$.

5p **4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{i, i^2, i^3, i^4\right\}$, unde $i^2=-1$, acesta să fie număr real.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,n)$, $N(n,3)$ și $P(2n,5)$, unde n este număr natural. Știind că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, determinați numărul natural n.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(X(-1)\right)=12$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(X(a)-I_3\right)=0$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(3,9)$ și $C\left(a,a^2\right)$, unde a este număr natural. Determinați numerele naturale a pentru care ABC este triunghi și are aria mai mică decât 3.

2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1+3x&3x\\-3x&1-3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați inversa matricei $M(x)$, unde x este număr real.

5p **c)** Determinați numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $M\left(\sqrt{x}\right)M\left(\sqrt{x+5}\right)=M(5)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2a-4, & x\in(-\infty,2)\\ 2^{x-1}-2, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a<3$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{7+15}{2} =$	**3p**
	$= 11$	**2p**
2.	$3n + 2 < 8 \Leftrightarrow n < 2$	**2p**
	Cum n este număr natural, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	**3p**
3.	$x^2 - 1 = (x+1)^2 \Rightarrow 2x + 2 = 0$	**3p**
	$x = -1$, care convine	**2p**
4.	$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$	**3p**
	$= 10$	**2p**
5.	$m_{d_1} = \frac{1}{2}$, $m_{d_2} = m - 3$	**2p**
	d_1 și d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m-3) = -1 \Leftrightarrow m = 1$	**3p**
6.	$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x =$	**3p**
	$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(3,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(3,1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 9 \cdot 1 =$	**3p**
	$= 9 - 9 = 0$	**2p**
b)	$X(a,b)X(c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 9d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+9bd & ad+bc \\ 9bc+9ad & 9bd+ac \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= \begin{pmatrix} ac+9bd & ad+bc \\ 9(ad+bc) & ac+9bd \end{pmatrix} = X(ac+9bd, ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d	**2p**
c)	$\det(X(m,n)) = m^2 - 9n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, $(m-3n)(m+3n) = 1 \Rightarrow m - 3n = m + 3n = -1$ sau $m - 3n = m + 3n = 1$ și obținem $(-1,0)$ sau $(1,0)$	**3p**
2.a)	$f = 2X^3 - 4X^2 - 7X + 9 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 9 =$	**2p**
	$= 2 - 4 - 7 + 9 = 0$	**3p**
b)	$f(-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-2\sqrt{2}) - 4 \cdot 2 - 7 \cdot (-\sqrt{2}) + m = 0$	**3p**
	$m = 8 - 3\sqrt{2}$	**2p**

c)	$x_1+x_2=1$ și $x_1+x_2+x_3=2\Rightarrow x_3=1$ $f(1)=0\Rightarrow m=9$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'=$ $=e^x+(x-1)e^x=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{e^{-x}}+1\right)=1$, deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ $f\left(\dfrac{1}{n}\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, deci $\left(\dfrac{1}{n}-1\right)e^{\frac{1}{n}}+1\geq 0\Rightarrow\sqrt[n]{e}\leq\dfrac{n}{n-1}$	**3p** **2p**
2.a)	$\displaystyle\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\int_2^3 x(x-2)\,dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right\|_2^3=$ $=9-9-\dfrac{8}{3}+4=\dfrac{4}{3}$	**3p** **2p**
b)	$g(x)=\sqrt{xe^x}\Rightarrow V=\pi\displaystyle\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 xe^x\,dx=\pi(x-1)e^x\Big\|_0^1=$ $=0-\pi\cdot(-1)\cdot e^0=\pi$	**3p** **2p**
c)	$\displaystyle\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt=\int_3^x t\,dt=\left.\frac{t^2}{2}\right\|_3^x=\frac{x^2-9}{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{2x^2}=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=7$ şi $a_3=15$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n)<8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-1}=x+1$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=\frac{x}{2}+2$ și $d_2: y=(m-3)x+1$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.

5p **6**. Arătaţi că, dacă $\sin 2x=\frac{1}{2}$, atunci $(\sin x+\cos x)^2=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(X(3,1)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd, ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det\left(X(m,n)\right)=1$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-7X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=9$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt[n]{e}\leq\frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}$.