Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=$	**2p**
	$=1-2i-1=-2i$	**3p**
2.	$f(0)=2016$	**2p**
	$(g\circ f)(0)=g\left(f(0)\right)=g(2016)=0$	**3p**
3.	$x^2-3x=x-4\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 10 pătrate perfecte, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	Panta unei drepte paralele cu dreapta d este egală cu 3	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d este $y=3x+1$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{6\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}}{2}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2-(-2)=4$	**3p**
b)	$A(1+m)+A(1-m)=\begin{pmatrix}1+m-1 & -1\\ 2 & 1+m-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-m-1 & -1\\ 2 & 1-m-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2A(1)$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$\det\left(A(m)\right)=\begin{vmatrix}m-1 & -1\\ 2 & m-2\end{vmatrix}=m^2-3m+4$	**2p**
	Pentru orice număr real m, $m^2-3m+4\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**3p**
2.a)	$x*y=-3xy+9x+9y-27+3=$	**2p**
	$=-3x(y-3)+9(y-3)+3=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$(x*y)*z=\left(-3(x-3)(y-3)+3\right)*z=9(x-3)(y-3)(z-3)+3$	**2p**
	$x*(y*z)=x*\left(-3(y-3)(z-3)+3\right)=9(x-3)(y-3)(z-3)+3=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z, deci legea de compoziție „$*$” este asociativă	**3p**

c)	$(x*x)*x=9(x-3)^3+3$	**2p**
	$9(x-3)^3+3=12 \Leftrightarrow (x-3)^3=1 \Leftrightarrow x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{3x^3-3}{x}=\dfrac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^3-3\ln x\right)=+\infty$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx=\int\limits_1^2(2x+3)\,dx=\left.(x^2+3x)\right\vert_1^2=$	**3p**
	$=10-4=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int\limits_0^3\lvert f(x)\rvert dx=\int\limits_0^3\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=\left.\ln(x^2+3x+3)\right\vert_0^3=$	**3p**
	$=\ln 21-\ln 3=\ln 7$	**2p**
c)	$\int\limits_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx=\left.\dfrac{1}{2}f^2(x)\right\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(-1)\right)=\dfrac{1}{2}(1-1)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2=-2i$.
5p	**2.** Calculați $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2016$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2016$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1, 2, 3,\ldots, 100\}$, acesta să fie pătrat perfect.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=3x-2016$.
5p	**6.** Determinaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=6$, $AC=4$ și $A=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.
5p	**c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx=6$.
5p	**b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_4}{b_3}=\frac{10}{5}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
2.	$x\le 5\Rightarrow x-3\le 2$	**2p**
	$f(x)\le 2$, deci valoarea maximă a funcției este 2	**3p**
3.	$x^2+12=(x+2)^2\Rightarrow 4x-8=0$	**3p**
	$x=2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=$	**3p**
	$=21$	**2p**
5.	$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-1}{3-1}$	**3p**
	$y=2x-2$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+x&-x\\2x&1-2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+y&-y\\2y&1-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x+y-xy&-y-x+xy\\2x+2y-2xy&1-2y-2x+2xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+(x+y-xy)&-(x+y-xy)\\2(x+y-xy)&1-2(x+y-xy)\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)A(x)=I_2$ și, cum $I_2=A(0)$, obținem $A\left(x+x-x^2\right)=A(0)$	**3p**
	$2x-x^2=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
2.a)	$x\circ y=2xy-6x-6y+18+3=$	**2p**
	$=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$1\circ 2\circ 3\circ 4=((1\circ 2)\circ 3)\circ 4=$	**3p**
	$=3\circ 4=3$	**2p**

c)	$x\circ x=2(x-3)^2+3$, $x\circ x\circ x=4(x-3)^3+3$	**2p**
	$4(x-3)^3+3=x \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ sau $x=3$ sau $x=\frac{7}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(\ln x)'=$	**2p**
	$=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f''(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\ge 1$, deci $\ln x\le x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx=\int_0^1 (x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^1 1dx=x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=$	**2p**
	$=x\Big\vert_0^1-\text{arctg}\,x\Big\vert_0^1=1-\text{arctg}1=1-\frac{\pi}{4}$	**3p**
c)	$\int_n^{n+1} 2xf(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)\Big\vert_n^{n+1}=\ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}$	**3p**
	$\ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\ln 2\Leftrightarrow n^2-2n=0\Leftrightarrow n=0$ sau $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_3=5$ şi $b_4=10$.
5p	**2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+12}=x+2$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ şi $B(1,0)$. Determinaţi ecuația dreptei AB.
5p	**6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=6$ şi $C=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & -x\\ 2x & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x, $x\neq 1$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.
5p	**a)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Arătați că $1\circ 2\circ 3\circ 4=3$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
5p	**c)** Demonstrați că $\ln x\leq x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $\int_0^1 x^2 f(x)dx=1-\frac{\pi}{4}$.
5p	**c)** Determinaţi numerele naturale n, ştiind că $\int_n^{n+1} 2x f(x)dx=\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 4 \cdot 2 =$ $= 8$	**3p** **2p**
2.	$x_V = 1$ $y_V = -1$	**2p** **3p**
3.	$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4$ $x = 2$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} =$ $= 10$	**3p** **2p**
5.	$0 = m \cdot 1 - 2$ $m = 2$	**3p** **2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$ $= 1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 - 1 = -1$	**2p** **3p**
b)	$A(a) + A(-a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
c)	$A(x)A(x) = \begin{pmatrix} x^2 - 4x + 5 & 4 - 2x \\ 4 - 2x & x^2 - 4x + 5 \end{pmatrix}$, $2A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ 4 - 2x = 2 \end{cases}$, de unde obținem $x = 1$	**3p** **2p**
2.a)	$f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) + 4 = -m - 1$ $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 4 = m + 1 \Rightarrow f(-1) + f(1) = -m - 1 + m + 1 = 0$, pentru orice număr real m	**2p** **3p**
b)	$m = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 0$ $X - 1$ divide f și $X + 1$ divide f, deci polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=16-2m$	**3p**
	Cum $x_1x_2x_3=-4$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2-\dfrac{4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{x_1x_2x_3}=16-2m-\dfrac{4m}{-4}=16-m$, obținem $m=16$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=3$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=3$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$	**2p**
	Cum $2<e<3$ şi $f(3)=\dfrac{7}{2}$, obținem $f(e)<\dfrac{7}{2}$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 x^2 f(x)dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$F''(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}\geq 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci funcția F este convexă pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^2 \lvert f(x)\rvert dx=\int_1^2 \dfrac{e^x}{x^2}dx$	**2p**
	Cum $x\geq 1\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow \dfrac{1}{x^2}\leq 1$, obţinem $\dfrac{e^x}{x^2}\leq e^x$, deci $\mathcal{A}\leq\int_1^2 e^x dx$, adică $\mathcal{A}\leq e(e-1)$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 4$ şi raţia $q = 2$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+1)=\log_3 5$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
5p	**5.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $M(1,0)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = mx-2$.
5p	**6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=\sqrt{2}$ şi $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(2))=-1$.
5p	**b)** Demonstraţi că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Determinaţi numărul real x, ştiind că $A(x)A(x)=2A(1)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+4$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $f(-1)+f(1)=0$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Pentru $m=-1$, arătaţi că polinomul f se divide cu polinomul X^2-1.
5p	**c)** Determinaţi numărul real m, ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=0$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(e)<\frac{7}{2}$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.
5p	**b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.
5p	**c)** Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1 \cdot q^4 = 48$ și $b_1 \cdot q^7 = 384 \Rightarrow q = 2$	**3p**
	$b_1 = 3$	**2p**
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 6$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în punctele $(1,0)$ și $(6,0)$	**3p**
	Distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egală cu 5	**2p**
3.	$\left(2^5\right)^x = 2^4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 5x = 4 + x$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sunt 2 numere care verifică egalitatea, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{2}{5}$	**2p**
5.	$\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{a-1}{2} \Leftrightarrow 2a + 2 = 6a - 6$	**3p**
	$a = 2$	**2p**
6.	$(2\sin x + \cos x)^2 = 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x$	**2p**
	$(\sin x + 2\cos x)^2 = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x \Rightarrow (2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 2\cos x)^2 -$ $-4\sin 2x = 5\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 8\sin x\cos x - 4 \cdot 2\sin x\cos x = 5$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(2A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} =$	**3p**
	$= 2 \cdot 2 - 4 \cdot 8 = 4 - 32 = -28$	**2p**
b)	$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2x \\ 4+2y & 1 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix} 1 & 2+2x \\ 4+2y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1$ și $y = -2$	**3p**
c)	$AB = \begin{pmatrix} 2y & x \\ y & 4x \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4x & x \\ y & 2y \end{pmatrix}$	**2p**
	$AB = BA \Leftrightarrow y = 2x$, deci $\det B = \begin{vmatrix} 0 & x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x^2 \le 0$, pentru orice număr real x	**3p**

2.a)	$(-1)\circ 1=3\cdot(-1)\cdot 1+3\cdot(-1)+3\cdot 1+2=$	**3p**
	$=-3-3+3+2=-1$	**2p**
b)	$3x^2+3x+3x+2=x \Leftrightarrow 3x^2+5x+2=0$	**3p**
	$x_1=-\frac{2}{3}$ şi $x_2=-1$	**2p**
c)	$3ab+3a+3b+3-1=8 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)=3$	**3p**
	Cum a şi b sunt numere întregi, obţinem $(-4,-2)$, $(-2,-4)$, $(0,2)$ şi $(2,0)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'=$	**2p**
	$=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{-x}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f''(x)=xe^x$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$	**2p**
	$f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0] \Rightarrow f'$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**1p**
	$f''(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty) \Rightarrow f'$ este crescătoare pe $[0,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge f'(0)=-1$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 2x\,dx=x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(x^2+\ln x+2016\right)'=2x+\frac{1}{x}=$	**2p**
	$=\frac{2x^2+1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcţiei f	**3p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(4x^2+4+\frac{1}{x^2}\right)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{4x^3}{3}+4x-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=\frac{83\pi}{6}<14\pi$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, ştiind că $b_5 = 48$ şi $b_8 = 384$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+6$. Determinaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $32^x = 16\cdot 2^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2-5n+6=0$.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, ştiind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătaţi că $(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=5$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $\det(2A)=-28$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x şi y, ştiind că $A+2B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Dacă $AB=BA$, arătaţi că $\det B\le 0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătaţi că $(-1)\circ 1=-1$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=x$.

5p **c)** Determinaţi perechile (a,b) de numerele întregi, ştiind că $a\circ b=8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f'(x)\ge -1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx=3$.

5p **b)** Demonstraţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mic decât 14π.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a_1+9r)=a_1+4r+a_1+5r+36 \Leftrightarrow 9r=36$	**3p**
	$r=4$	**2p**
2.	$x^2+3x-1=x-1 \Leftrightarrow x^2+2x=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=0$	**2p**
3.	$\log_2\frac{(x-1)(x^2-1)}{x+1}=4 \Rightarrow (x-1)^2=16$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere cu cifra unităților zero, 4 numere cu cifra zecilor cinci și cifra unităților număr par nenul și 4 numere cu cifra unităților cinci și cifra zecilor număr par, deci sunt 17 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{17}{90}$	**2p**
5.	$A(1,1)$, $B(1,4) \Rightarrow AB \parallel Oy$ și $A(1,1)$, $C(5,1) \Rightarrow AC \parallel Ox$, deci ΔABC este dreptunghic în A	**2p**
	Centrul cercului circumscris ΔABC este mijlocul laturii BC și are coordonatele $\left(3,\frac{5}{2}\right)$	**3p**
6.	$1+\cos 2x=2\cos^2 x$	**2p**
	$1-\cos 2x=2\sin^2 x \Rightarrow \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}=\operatorname{ctg}^2 x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\0&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=3+(-2)+0-0-(-1)-2=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$2M(x)-M(-x)=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&6&2\\2x&4x-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-x&-2x-1&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3x&6x-1&1\end{pmatrix}=M(3x)$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ n & 2n-1 & 1\\ n^2 & 2n^2-1 & 1\end{vmatrix}=n(n-1)$, deci $\mathcal{A}_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=\frac{n(n-1)}{2}$	**3p**
	Cum pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numerele $n-1$ și n sunt consecutive, produsul lor este număr par, deci $\mathcal{A}_{\Delta OAB}$ este număr natural	**2p**
2.a)	$1\circ\frac{1}{3}=6\cdot 1\cdot\frac{1}{3}-2\cdot 1-2\cdot\frac{1}{3}+1=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$x\circ e=6xe-2x-2e+1=6ex-2e-2x+1=e\circ x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ e=x\Leftrightarrow(3x-1)(2e-1)=0$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$x\circ\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\circ y=\frac{1}{3}$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}=\left(\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\ldots\circ\frac{335}{1008}\right)\circ\frac{1}{3}\circ\left(\frac{337}{1008}\circ\frac{338}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}\right)=\frac{1}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x^4+3)-x\cdot 4x^3}{(x^4+3)^2}=\frac{3(1-x^4)}{(x^4+3)^2}=$	**3p**
	$=-\frac{3(x^4-1)}{(x^4+3)^2}=-\frac{3(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=\frac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\frac{1}{3}x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**1p**
	$x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f crescătoare pe $[-1,1]$ și $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\frac{1}{4}$, $f(1)=\frac{1}{4}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obținem $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq\frac{1}{4}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
2.a)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x-2x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=2$, deci $F(x)=(x-1)e^x-2x+2$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(x^2e^x-2x\right)dx=x^2e^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 2xe^x dx-x^2\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e-3$	**2p**
c)	$\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)=(x-1)(e^x-2)$	**3p**
	$(x-1)(e^x-2)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, ştiind că $2a_{10}=a_5+a_6+36$.
5p	**2.** Determinați abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-1$ cu dreapta de ecuație $y=x-1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\frac{x-1}{x+1}+\log_2\left(x^2-1\right)=4$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 10.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(1,4)$ și $C(5,1)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătaţi că $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=\operatorname{ctg}^2 x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ x & 2x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det\left(M(0)\right)$.
5p	**b)** Demonstrați că $2M(x)-M(-x)=M(3x)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(n,\,2n-1)$ și $B\left(n^2,\,2n^2-1\right)$, unde n este număr natural, $n\ge2$. Demonstrați că aria triunghiului OAB este număr natural.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=6xy-2x-2y+1$.
5p	**a)** Calculați $1\circ\frac{1}{3}$.
5p	**b)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
5p	**c)** Calculați $\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $-\frac{1}{4}\le f(x)\le\frac{1}{4}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{x}-2$.

5p **a)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1)=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $\int_1^x f(t)\,dt=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=i(1+i)^2=2i^2=$	**2p**
	$=-2$, deci partea reală a numărului complex z este egală cu -2	**3p**
2.	$-\frac{m^2-4}{4}=-1\Leftrightarrow m^2-8=0$	**3p**
	$m=-2\sqrt{2}$ sau $m=2\sqrt{2}$	**2p**
3.	$2^{2x}+3\cdot 2^x-4=0\Leftrightarrow\left(2^x-1\right)\left(2^x+4\right)=0$	**3p**
	Deoarece $2^x>0$, soluția ecuației este $x=0$	**2p**
4.	$5, 15, 25, \ldots, 2005$ și 2015 sunt numerele din mulţimea M care sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 10	**2p**
	În mulţimea M sunt 202 numere care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10	**3p**
5.	Punctul B este mijlocul segmentului MC	**2p**
	$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\sin x\Leftrightarrow\sin x(2\cos x-1)=0$	**2p**
	Cum $x\in[0,\pi]$, obținem $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ sau $x=\pi$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2016)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2015&2016&2016\\2015^2&2016^2&2016^2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2016)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2015&2016&2016\\2015^2&2016^2&2016^2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(x)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2015&2016&x\\2015^2&2016^2&x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\2015-x&2016-x&x\\2015^2-x^2&2016^2-x^2&x^2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(2015-x)(2016-x)\begin{vmatrix}1&1\\2015+x&2016+x\end{vmatrix}=(2015-x)(2016-x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$\det\left(A(x)\right)=x^2-(2015+2016)x+2015\cdot 2016$	**2p**
	$\det\left(A(x)\right)$ are valoarea minimă pentru $x=\frac{4031}{2}$	**3p**

2.a)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b)A+abA\cdot A=$	**3p**
	$=I_2+(a+b)A=X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$M=X((-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4)=X(4)$	**2p**
	Cum $X(4)\cdot X(-4)=X(0)=I_2$, inversa matricei M este matricea $X(-4)=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{mx^2+4x-m}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(m(x+1)+\frac{4x}{x-1}\right)=$	**3p**
	$=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$y=3$ este asimptotă orizontală la graficul funcției $g\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx^2+4x-m}{x(x-1)}=m$, obținem $m=3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{-x^2+4x+1}{x-1}-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2-x+6}{(x-1)(x-2)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x-3}{x-1}=-5$	**3p**
2.a)	$f(-1)=-\frac{1}{2}$	**2p**
	$f(4)=2\Rightarrow f(-1)\cdot f(4)=-1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\frac{x}{2}+2a\right)=1+2a$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(ax+\log_2 x)=2a+1$ și $f(2)=2a+1$, deci funcția f este continuă în $x=2$, pentru orice număr real a	**3p**
	Cum, pentru orice număr real a, funcția f este continuă pe $(-\infty,2)$ și pe $(2,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$f(-1)\cdot f(4)=\left(-\frac{1}{2}+2a\right)(4a+2)=(4a-1)(2a+1)$	**2p**
	Deoarece f este continuă și pentru orice $a\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ avem $f(-1)\cdot f(4)<0$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,4)$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=i(1+i)^2$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale m, ştiind că imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$ este intervalul $[-1,+\infty)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+2^{x+1}=4-2^x$.

5p **4.** Determinaţi numărul elementelor mulţimii $M=\{1, 2, 3,\ldots, 2016\}$ care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BM}$. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Determinaţi numerele reale $x\in[0,\pi]$, pentru care $\sin 2x=\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2015 & 2016 & x\\ 2015^2 & 2016^2 & x^2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det\big(A(2016)\big)$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\big(A(x)\big)=(2015-x)(2016-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $\det\big(A(x)\big)$ are valoarea minimă.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $A\cdot A$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați inversa matricei $M=X(-3)\cdot X(-2)\cdot X(-1)\cdot X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot X(4)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{mx^2+4x-m}{x-1}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că dreapta de ecuaţie $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m, pentru care dreapta de ecuaţie $y=3$ este asimptotă orizontală la graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+2a, & x<2\\ ax+\log_2 x, & x\geq 2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=0$, calculaţi $f(-1)\cdot f(4)$.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,4)$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+2\right)^2=9+4\sqrt{5}$	**3p**
	$9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}=9$	**2p**
2.	$f(m)=4\Rightarrow m+2=4$	**3p**
	$m=2$	**2p**
3.	$x^2+9=25\Rightarrow x^2-16=0$	**2p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care verifică ecuația	**3p**
4.	Mulțimea M are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 4 numere divizibile cu 2, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{9}$	**2p**
5.	$\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{-3}{-6}$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot1-0\cdot0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+3x&2x\\-6x&1-4x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+3y&2y\\-6y&1-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3x+3y-3xy&2x+2y-2xy\\-6x-6y+6xy&1-4x-4y+4xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+3(x+y-xy)&2(x+y-xy)\\-6(x+y-xy)&1-4(x+y-xy)\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(2^x+2^x-2^x\cdot2^x\right)=A(1)\Leftrightarrow 2^x+2^x-2^x\cdot2^x=1$	**3p**
	$\left(2^x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3-(-1)^2+a\cdot(-1)+2=-a$	**2p**
	$f(1)=1^3-1^2+a\cdot1+2=a+2\Rightarrow f(-1)+f(1)=-a+a+2=2$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	Restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-2X+2 este aX	**3p**
	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2-2X+2\Leftrightarrow a=0$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=a \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2a$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-a\left(x_1+x_2+x_3\right)-6=1-2a-a-6=-3a-5$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\right)=-3a-5+3a=-5$, pentru orice număr real a	**3p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x-3)-\left(x^2+2x-11\right)}{(x-3)^2}=$ $=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-11}{x(x-3)}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-11-x^2+3x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-11}{x-3}=5$, deci dreapta de ecuație $y=x+5$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p** **3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(3,5)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(3,5)$ Cum $3<\pi<4$ și $f(4)=13$, obținem $f(\pi)>13$	**3p** **2p**
2.a)	$\int\limits_0^1\dfrac{1}{e^x}f(x)dx=\int\limits_0^1(3x+1)dx=$ $=\left.\left(\dfrac{3x^2}{2}+x\right)\right\|_0^1=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$	**2p** **3p**
b)	$F'(x)=(3x+m)'e^x+(3x+m)\left(e^x\right)'=3e^x+(3x+m)e^x=(3x+m+3)e^x$ $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow(3x+m+3)e^x=(3x+1)e^x$, pentru orice număr real x, deci $m=-2$	**3p** **2p**
c)	$\int\limits_0^a(3x+1)e^xdx=\left.(3x-2)e^x\right\|_0^a=(3a-2)e^a+2$ $(3a-2)e^a+2=3a\Leftrightarrow(3a-2)\left(e^a-1\right)=0$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a=\dfrac{2}{3}$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}=9$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(m,4)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2+9\right)=\log_4 25$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{1}{2}$, arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A\left(2^x\right)A\left(2^x\right)=A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\pi)>13$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+1)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real m, pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a, ştiind că $\int_0^a f(x)dx=3a$.