**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 1**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $7+\sqrt{7}\in(9,10)$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $M=\{0,1,2,3\}$ | **3p** |
| | Mulțimea $M$ are $4$ elemente | **2p** |
| **2.** | $\Delta=36-4m\Rightarrow y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=m-9$ | **3p** |
| | $m-9>0\Leftrightarrow m\in(9,+\infty)$ | **2p** |
| **3.** | $x+3=(x-3)^2\Rightarrow x^2-7x+6=0$ | **3p** |
| | $x=1$, care nu convine; $x=6$, care convine | **2p** |
| **4.** | O mulțime cu $12$ elemente are $C_{12}^0+C_{12}^1+C_{12}^2=1+12+\dfrac{12\cdot 11}{2}=$ | **3p** |
| | $=13+66=79$ de submulțimi cu cel mult 2 elemente | **2p** |
| **5.** | Paralela prin $A$ la $OB$ intersectează paralela prin $B$ la $OA$ în punctul $C\Rightarrow OACB$ este paralelogram | **2p** |
| | $OC$ și $AB$ au același mijloc, deci $x_O+x_C=x_A+x_B$, $y_O+y_C=y_A+y_B$, de unde obținem $x_C=3$ și $y_C=3$ | **3p** |
| **6.** | $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}x}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+1}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=1$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(1)=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=0+0+0-0-0-(-4)=4$ | **3p** |
| **b)** | $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1-a-b-ab&2b+2ab+2a&0\\-a-b-ab&1+2a+2b+2ab&0\\0&0&1+a+b+ab\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=\begin{pmatrix}1-(a+b+ab)&2(a+b+ab)&0\\-(a+b+ab)&1+2(a+b+ab)&0\\0&0&1+(a+b+ab)\end{pmatrix}=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| c) | Cum $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(a+b+ab)\cdot A(c)=A(a+b+c+ab+ac+bc+abc)$, obținem $a+b+c+ab+ac+bc+abc=0$ | 3p |
| | $1+a+b+c+ab+ac+bc+abc=1\Rightarrow(1+a)+b(1+a)+c(1+a)+bc(1+a)=1$, de unde obținem $(1+a)(1+b+c+bc)=1$, deci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$ | 2p |
| 2.a) | $3*4=\sqrt{3^2+4^2}=$ | 3p |
| | $=\sqrt{25}=5$ | 2p |
| b) | $x*\sqrt{5}=\sqrt{x^2+5}$, $x\in M$ | 2p |
| | Cum $\sqrt{x^2+5}<x+1\Rightarrow x^2+5<x^2+2x+1$, obținem $x\in(2,+\infty)$ | 3p |
| c) | Pentru $m=3k$ și $n=4k$, unde $k\in\mathbb{N}^*$, obținem $m*n=5k$ | 2p |
| | Cum numerele $3k$, $4k$ și $5k$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, există o infinitate de perechi de numere naturale nenule $(m,n)$, de forma $(3k,4k)$, pentru care numerele $m$, $n$ și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice | 3p |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| 1.a) | $f'(x)=1-\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}=$ | 3p |
| | $=1-\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$ | 2p |
| b) | $\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{(x-2)^2+1}>x-2$, pentru orice număr real $x$ | 2p |
| | $f'(x)>0$, pentru orice număr real $x$, deci $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ | 3p |
| c) | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x+5}\right)}{x+\sqrt{x^2-4x+5}}=$ | 2p |
| | $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-5}{x+\sqrt{x^2-4x+5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}=2$, deci ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ este $y=2$ | 3p |
| 2.a) | $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=$ | 3p |
| | $=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$ | 2p |
| b) | $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1 e^x\left(x^2+1\right)dx=e^x\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx=2e-1-(2x-2)e^x\Big\vert_0^1=$ | 3p |
| | $=2e-1-2=2e-3$ | 2p |
| c) | $\int_{-1}^1\left\vert x\ln(f(x))\right\vert dx=\int_{-1}^0(-x)\ln\left(x^2+1\right)dx+\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx=\int_0^1 2x\ln\left(x^2+1\right)dx=$ | 2p |
| | $=\int_0^1\left(x^2+1\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx=\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1\left(x^2+1\right)\dfrac{2x}{x^2+1}dx=2\ln2-x^2\Big\vert_0^1=2\ln2-1$ | 3p |

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 2**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $n=1+12i+36i^2+9-12i+4i^2=$ | **2p** |
| | $=1-36+9-4=-30$, care este număr întreg negativ | **3p** |
| **2.** | $f(1)=f(5)\Rightarrow 1+a=25+5a\Rightarrow a=-6$ | **2p** |
| | $f(x)=x^2-6x$, de unde obținem $f(2)=-8$ și $f(4)=-8$, deci $f(2)=f(4)$ | **3p** |
| **3.** | $2x^2-2=(x+1)^2\Rightarrow x^2-2x-3=0$ | **2p** |
| | $x=-1$, care nu convine; $x=3$, care convine | **3p** |
| **4.** | Există 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile | **2p** |
| | Dacă cifra unităților este $c$, $1\le c\le 9$, atunci cifra sutelor poate fi aleasă în $c$ moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor există o singură alegere a cifrei zecilor; în total sunt $9+8+\ldots+1=45$ de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{900}=\dfrac{1}{20}$ | **1p** |
| **5.** | $OA=OB=5$ | **2p** |
| | $m_{AO}=\dfrac{4}{3}$ și $m_{BO}=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow AO\perp BO$ și, cum $AOBC$ este paralelogram, obținem că $AOBC$ este pătrat, deci triunghiul $ACB$ este dreptunghic isoscel | **3p** |
| **6.** | $2\sin^2 x=1\Rightarrow \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | **2p** |
| | Cum $x\in(0,\pi)$, obținem $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, deci $x=\dfrac{\pi}{4}$ sau $x=\dfrac{3\pi}{4}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(2)=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&2\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=8+4+9-8-6-6=1$ | **3p** |
| **b)** | $A(a)A(1)=\begin{pmatrix}3a+3&5a+4&7a+5\\6&9&12\\2+a&4+a&6+a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | $A(1)A(a)=\begin{pmatrix}a+5&a+8&4a+8\\a+5&a+8&4a+8\\a+2&a+4&2a+5\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $a$, deci $A(a)A(1)=A(1)A(a)$ implică $a=1$, care convine | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | $\det(A(a))=\begin{vmatrix}a & a+1 & a+2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a-1)^2$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| | Cum $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, matricea $A(a)$ are rangul doi $\Leftrightarrow a=1$ | **2p** |
| **2.a)** | $\hat{3}\circ\hat{3}=\hat{3}\cdot\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=$ | **2p** |
| | $=\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=\hat{3}$ | **3p** |
| **b)** | $x\circ\hat{0}=x\cdot\hat{0}+x+\hat{0}=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$ | **2p** |
| | $\hat{0}\circ x=\hat{0}\cdot x+\hat{0}+x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$, deci $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$” | **3p** |
| **c)** | $\hat{4}\circ\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow\hat{4}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$” și simetricul lui este $\hat{4}$ | **2p** |
| | $f(x)=f(y)\Rightarrow\hat{4}\circ x=\hat{4}\circ y\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ este injectivă, de unde obținem că $\operatorname{Im} f$ are 6 elemente, deci $\operatorname{Im} f=\mathbb{Z}_6$, de unde obținem că $f$ este bijectivă | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{2}{(x+1)^3}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{2\left((x-1)^3-(x+1)^3\right)}{(x+1)^3(x-1)^3}=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{(x+1)^3(x-1)^3}=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$ | **2p** |
| **b)** | Cum $f(0)=0$, graficul funcției $f$ intersectează axa $Oy$ în punctul $O(0,0)$ | **2p** |
| | $f'(0)=4$, deci ecuația tangentei este $y=4x$ | **3p** |
| **c)** | $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(4)+\ldots+f(2n)\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)^n=$ | **2p** |
| | $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{(2n+1)^2}\right)^{-(2n+1)^2}\right)^{\frac{-n}{(2n+1)^2}}=e^0=1$ | **3p** |
| **2.a)** | $\int\limits_0^2\left(x^2+4\right)f(x)dx=\int\limits_0^2(2x-2)dx=\left(x^2-2x\right)\Big\vert_0^2=$ | **3p** |
| | $=4-4=0$ | **2p** |
| **b)** | $\int\limits_0^{2\sqrt{3}}f(x)dx=\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\dfrac{2x}{x^2+4}dx-2\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2+4}dx=\ln\left(x^2+4\right)\Big\vert_0^{2\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\Big\vert_0^{2\sqrt{3}}=$ | **3p** |
| | $=\ln 16-\ln 4-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=2\ln 2-\dfrac{\pi}{3}$ | **2p** |
| **c)** | Funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int\limits_1^x f(t)dt$ este derivabilă și $F'(x)=f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| | $F'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow F$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ și $F'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow F$ este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow F(x)\geq F(1)$, pentru orice număr real $x$, de unde obținem că $\int\limits_1^x f(t)dt\geq 0$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $z^2-z-i=1+2i+i^2-1-i-i=$ | **3p** |
| | $=1+2i-1-1-2i=-1$ | **2p** |
| **2.** | $\Delta=9-4(3-n)=4n-3$ | **2p** |
| | $\Delta>0\Leftrightarrow n>\dfrac{3}{4}$, deci $n=1$ | **3p** |
| **3.** | $2+\log_5 x+\dfrac{1}{\log_5 x}=4\Rightarrow(\log_5 x-1)^2=0$ | **3p** |
| | $\log_5 x=1$, deci $x=5$, care convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are $90$ de elemente, deci sunt $90$ de cazuri posibile | **2p** |
| | În această mulțime există $45$ de numere divizibile cu $2$, $30$ de numere divizibile cu $3$ și $15$ numere divizibile atât cu $2$ cât și cu $3$, deci sunt $45+30-15=60$ de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{60}{90}=\dfrac{2}{3}$ | **1p** |
| **5.** | Distanța de la punctul $C$ la dreapta $AB$ este egală cu $2$ | **2p** |
| | $AB=5\Rightarrow\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{5\cdot 2}{2}=5$ | **3p** |
| **6.** | $\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x\Rightarrow E(x)=\operatorname{tg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ | **3p** |
| | $E\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=1+0+0-0-0-0=1$ | **3p** |
| **b)** | $A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | Pentru $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, obținem $A\cdot X=\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $X\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow d=h=0$, $g=0$, $a=e=i$, $b=f$, deci $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=aI_3+bA+cA\cdot A$, unde $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale | **3p** |
| **2.a)** | $5*2=\lvert 5-2\rvert=3$ | **2p** |
| | $(5*2)*1=3*1=\lvert 3-1\rvert=2$ | **3p** |
| **b)** | $x*y=\lvert x-y\rvert=\lvert -(y-x)\rvert=$ | **2p** |
| | $=\lvert y-x\rvert=y*x$, pentru orice numere reale $x$ și $y$, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă | **3p** |
| **c)** | $(a*b)+(b*c)=\lvert a-b\rvert+\lvert b-c\rvert\geq\lvert (a-b)+(b-c)\rvert=$ | **3p** |
| | $=\lvert a-b+b-c\rvert=\lvert a-c\rvert=a*c$, pentru orice numere reale $a$, $b$ și $c$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\dfrac{(2x-2)e^x-\left(x^2-2x+1\right)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x\left(2x-2-x^2+2x-1\right)}{e^{2x}}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}=\dfrac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$ | **2p** |
| | $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,3]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $f$ este crescătoare pe $[1,3]$, $f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$ și $f(3)=\dfrac{4}{e^3}$, deci $f(x)\leq\dfrac{4}{e^3}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$ | **2p** |
| | $\dfrac{(x-1)^2}{e^x}\leq 4e^{-3}\Rightarrow(x-1)^2\leq 4e^{x-3}$, deci $x-1\leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$ | **3p** |
| **2.a)** | $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)\,dx=\int_0^2(x+1)\,dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right\vert_0^2=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{4}{2}+2=4$ | **2p** |
| **b)** | $\displaystyle\int_0^1\ln\sqrt{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x+1)'\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}(x+1)\ln(x+1)\Big\vert_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 dx=$ | **3p** |
| | $=\ln 2-\dfrac{1}{2}x\Big\vert_0^1=\ln 2-\dfrac{1}{2}$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt$ derivabilă și $F'(x)=e^{f(x)}>0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ | **2p** |
| | $F$ este strict crescătoare și continuă, $F(0)=0$ și $F(2021)=\int_0^{2021} e^{\sqrt{t+1}}dt\geq\int_0^{2021}1dt=2021$, deci există un singur $x\in[0,+\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=2021$ | **3p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 4**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $z^4=\left(z^2\right)^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$ | **3p** |
| | $z^4+2i=-2i+2i=0$ | **2p** |
| **2.** | $\Delta=4-4m$ și valoarea minimă a funcției $f$ este $-\frac{\Delta}{4\cdot 1}=-\frac{4-4m}{4}=m-1$ | **3p** |
| | $m-1>1$, deci $m\in(2,+\infty)$ | **2p** |
| **3.** | $\log_5(x+2)(2x-1)=2\Rightarrow(x+2)(2x-1)=25\Rightarrow 2x^2+3x-27=0$ | **3p** |
| | $x=-\frac{9}{2}$, care nu convine; $x=3$, care convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile | **2p** |
| | Numerele naturale care au suma cifrelor divizibilă cu $9$ sunt multiplii de $9$, deci mulțimea cazurilor favorabile este $\{9\cdot 12, 9\cdot 13, 9\cdot 14,\ldots, 9\cdot 111\}$ și are $100$ de elemente | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$ | **1p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+4\vec{j}$ și $\overrightarrow{AD}=(x_D-2)\vec{i}+(y_D-1)\vec{j}$ | **3p** |
| | $\vec{i}+\vec{j}+2\vec{i}+4\vec{j}+(x_D-2)\vec{i}+(y_D-1)\vec{j}=\vec{0}\Rightarrow x_D=-1$ și $y_D=-4$ | **2p** |
| **6.** | Cum $\cos(\pi-x)=-\cos x$, obținem $-4\cos^2 x+3=0$, deci $\cos^2 x=\frac{3}{4}$ | **2p** |
| | Pentru $x\in(0,1)$, $\cos x>0$, deci $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x=\frac{\pi}{6}$, care convine | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det A=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=1\cdot 2\cdot 3+0+0-0-0-0=6$ | **3p** |
| **b)** | $A\cdot B+B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=B\cdot A$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | Cum $B\cdot B\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, obținem $x+1+2(y-2)=0$ și $2(x+1)+3(y-2)=0$ | **3p** |
| | $x=-1$, $y=2$ | **2p** |
| **2.a)** | $2*4=2^4=16$ | **2p** |
| | $4*2=4^2=16$, deci $2*4=4*2$ | **3p** |
| **b)** | $2*1=2^1=2$ și $1*2=1^2=1$ | **2p** |
| | Deoarece $2*1\neq 1*2$, legea de compoziție „$*$” nu este comutativă | **3p** |
| **c)** | $(2*2)*n<64 \Leftrightarrow 4*n<64 \Leftrightarrow 4^n<4^3$ | **3p** |
| | Cum $n$ este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=2+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{2(x^2+x+1)+2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $f(x+1)-f(x)=2(x+1)+\ln(x^2+3x+3)-2x-\ln(x^2+x+1)=2+\ln\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\ln\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}\right)=2+\ln 1=2$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x)>0$, pentru orice număr real $x\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este injectivă | **2p** |
| | $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(2+\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}\right)$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{1}=0$, deci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ și, cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$, obținem că $f$ este surjectivă, deci $f$ este bijectivă | **3p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(2x-1)dx=(x^2-x)\Big\vert_0^1=$ | **3p** |
| | $=1-1=0$ | **2p** |
| **b)** | $\int_0^1 e^x\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1 e^x\lvert 2x-1\rvert dx=\int_0^{\frac{1}{2}}e^x(1-2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 e^x(2x-1)dx=e^x(3-2x)\Big\vert_0^{\frac{1}{2}}+e^x(2x-3)\Big\vert_{\frac{1}{2}}^1=$ | **3p** |
| | $=2\sqrt{e}-3-e+2\sqrt{e}=4\sqrt{e}-e-3$ | **2p** |
| **c)** | $I_n=\int_0^1(2x-1)^n dx=\dfrac{(2x-1)^{n+1}}{2(n+1)}\Big\vert_0^1=\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2(n+1)}$, unde $n$ este număr natural nenul | **3p** |
| | Cum $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ | **2p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 5**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $a+ib-2(a-ib)=-2+6i \Leftrightarrow -a+3ib=-2+6i$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$ | **3p** |
| | $a=2$ și $b=2$, deci $z=2+2i$ | **2p** |
| **2.** | $f^2(1)=f(0)\cdot f(2) \Leftrightarrow (1+m)^2=m(4+m) \Leftrightarrow m^2+2m+1=4m+m^2$ | **3p** |
| | $2m=1$, deci $m=\frac{1}{2}$, care convine | **2p** |
| **3.** | $(x-1)^2=3x+1 \Rightarrow x^2-5x=0$ | **3p** |
| | $x=0$, care nu convine; $x=5$, care convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,20\}$ are $21$ de elemente, deci sunt $21$ de cazuri posibile | **2p** |
| | Numerele din mulțimea $A$ al căror pătrat aparține mulțimii $A$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt $5$ cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{21}$ | **1p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ | **2p** |
| | $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ | **3p** |
| **6.** | $\frac{BC}{\sin A}=2R$, unde $R$ este raza cercului circumscris triunghiului | **2p** |
| | Cum $\sin A=\frac{1}{2}$, obținem $2BC=2R$, deci $BC=R$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(m)+A(-m)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $m$ | **2p** |
| | $\det(A(m)+A(-m))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=8-0=8$, pentru orice număr real $m$ | **3p** |
| **b)** | $A(m)\cdot A(m)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2m&1&0\\m^2&2m&1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $m$ | **3p** |
| | $A(m)\cdot A(m)=A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\2m&1&0\\m^2&2m&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow m=0$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | $A(2k-1)-A(2k)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul $k$ | **2p** |
| | $A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=n\left(A(-1)-A(0)\right)$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **3p** |
| **2.a)** | $\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{4}+3+\frac{9}{4}=\frac{11}{2}$ | **2p** |
| **b)** | $x*(-x)=(-x)*x=-2x^2$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $\left(-2x^2\right)*\left(-2x^2\right)=24x \Leftrightarrow 24x^4=24x$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$ | **3p** |
| **c)** | $x*\frac{1}{x}=x^2+4\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+4+\frac{1}{x^2}$, pentru orice număr real nenul $x$ | **2p** |
| | $\left(x*\frac{1}{x}\right)-6=x^2+4+\frac{1}{x^2}-6=x^2-2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\geq 0$, deci $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul $x$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-(x+2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{x^2+2-x^2-2x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{2(1-x)}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+2)^2}{x^2+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4x+2}{x^2+2}\right)^x=$ | **3p** |
| | $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{4x+2}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+2}{4x+2}}\right)^{\frac{x(4x+2)}{x^2+2}}=e^4$ | **2p** |
| **c)** | $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ și, cum $f(1)=\sqrt{3}$, obținem că $f(x)\leq\sqrt{3}$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | $f\left(e^x\right)\leq\sqrt{3}\Rightarrow\frac{e^x+2}{\sqrt{e^{2x}+2}}\leq\sqrt{3}\Rightarrow\frac{e^x+2}{\sqrt{3}}\leq\sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\int\limits_1^{\sqrt{2}}x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\vert_1^{\sqrt{2}}=$ | **3p** |
| | $=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $\int_1^e x\left(x^3-f(x)\right)dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=$ | **3p** |
| | $=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$ | **2p** |
| **c)** | $\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\left(\left(\sqrt{x}\right)^3-\ln\sqrt{x}\right)dx=\int_1^{e^2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\ln x\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{4}\ln^2 x\right)\Big\vert_1^{e^2}=$ | **3p** |
| | $=\frac{2}{3}e^3-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\ln^2\left(e^2\right)=\frac{2}{3}e^3-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4=\frac{2e^3-5}{3}$ | **2p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4^3}=4=$ | **3p** |
| | $=2^2=(\log_3 9)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice | **2p** |
| **2.** | $f(-x)=-f(x)$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $g(-x)=(f(-x))^2=(-f(x))^2=(f(x))^2=g(x)$, pentru orice număr real $x$, deci funcția $g$ este pară | **3p** |
| **3.** | $2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^x-2\cdot 2^x+2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 2^x\left(2^x-\sqrt{2}\right)-2\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(2^x-2\right)\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0$ | **3p** |
| | $x=1$ sau $x=\frac{1}{2}$ | **2p** |
| **4.** | $T_{k+1}=C_{10}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{10-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=C_{10}^k x^{\frac{3(10-k)}{2}-2k}=C_{10}^k x^{\frac{30-7k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,10\}$ | **3p** |
| | $\frac{30-7k}{2}=8 \Leftrightarrow k=2$, deci $T_3=C_{10}^2x^8$ îl conține pe $x^8$ | **2p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, deci punctul $M$ este mijlocul segmentului $BC$ | **3p** |
| | $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{CM}$, deci $k=-2$ | **2p** |
| **6.** | $2\sin x\cos x+6\cos x-\sin x-3=0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+3)-(\sin x+3)=0 \Leftrightarrow (\sin x+3)(2\cos x-1)=0$ | **2p** |
| | $\sin x+3\neq 0$, deci $\cos x=\frac{1}{2}$ și, cum $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\frac{\pi}{3}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det A=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{vmatrix}=2+1+0-4-0-0=$ | **3p** |
| | $=3-4=-1$ | **2p** |
| **b)** | Cum $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ m-1 & m\end{vmatrix}=-m+m-1=$ | **3p** |
| | $=-1\neq 0$, deci matricea $M(m)$ are rangul cel puțin egal cu $2$, pentru orice număr real $m$ | **2p** |
| **c)** | $M(m)\cdot A=I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m+2 & -m-1 & 0\\ -m-2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ | **3p** |
| | $m=-2$, care convine | **2p** |
| **2.a)** | $(2+i)\circ(2-i)=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$ | **3p** |
| | $=4+4-i^2=9$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| b) | $A=-1+(a+1)i-1+(a-1)i+(-1+(a+1)i)(-1+(a-1)i)=$ | 2p |
| | $=-2+2ai+1-(a-1)i-(a+1)i-(a^2-1)=-a^2<0$, pentru orice număr real nenul $a$ | 3p |
| c) | $2z+z^2=-5 \Leftrightarrow z^2+2z+5=0$ | 3p |
| | $z=-1-2i$ sau $z=-1+2i$ | 2p |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| 1.a) | $f'(x)=(\ln(x+1)-\ln(x+3))'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=$ | 3p |
| | $=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$ | 2p |
| b) | $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\ln\frac{x+1}{x+3}=-\infty$ | 3p |
| | Dreapta de ecuație $x=-1$ este asimptotă verticală la graficul funcției $f$ | 2p |
| c) | $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^x=$ | 2p |
| | $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+3}}=\ln e^{-2}=-2$ | 3p |
| 2.a) | $\int_0^1\left(e^x f(x)-2\right)dx=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right\|_0^1=$ | 3p |
| | $=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$ | 2p |
| b) | $\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e\left(\ln^2 x+1\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\int_1^e\left(\ln^2 x+1\right)\cdot(\ln x)'dx=\left.\left(\frac{\ln^3 x}{3}+\ln x\right)\right\|_1^e=$ | 3p |
| | $=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$ | 2p |
| c) | $f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{e^x}\le 0$, pentru orice număr real $x$, deci $f$ este descrescătoare, de unde obținem că $f(1)\le f(x)\le f(0)$, pentru orice $x\in[0,1]$ | 2p |
| | Pentru orice $x\in[0,1]$, $\frac{2}{e}\le f(x)\le 1\Rightarrow\frac{2}{e}x^n\le x^n f(x)\le x^n$, deci $\frac{2}{e(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, de unde obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ | 3p |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 7**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $2n+1<10 \Leftrightarrow n<\frac{9}{2}$ | **2p** |
| | Cum $n$ este număr natural, obținem că mulțimea $M$ are 5 elemente | **3p** |
| **2.** | $\Delta=100-4m$, $y_V=m-25$ | **2p** |
| | Vârful parabolei asociate funcției $f$ este situat pe axa $Ox \Leftrightarrow y_V=0 \Leftrightarrow m=25$ | **3p** |
| **3.** | $\sqrt{x-5}=7-x \Rightarrow x-5=(7-x)^2$, deci $x^2-15x+54=0$ | **3p** |
| | $x=6$, care convine; $x=9$, care nu convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile | **2p** |
| | Sunt $9\cdot10\cdot8=720$ de numere naturale de trei cifre care nu sunt multipli de 5, deci sunt $720$ de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{720}{900}=\frac{4}{5}$ | **1p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, deci punctul $C$ este mijlocul segmentului $AB$ | **3p** |
| | Coordonatele punctului $C$ sunt $x_C=1$, $y_C=\frac{7}{2}$ | **2p** |
| **6.** | $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2} \Rightarrow 6=\frac{4\cdot5\cdot\sin A}{2} \Rightarrow \sin A=\frac{3}{5}$ | **3p** |
| | $\cos^2 A=1-\sin^2 A=\frac{16}{25}$ și, cum unghiul $A$ este ascuțit, obținem $\cos A=\frac{4}{5}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{vmatrix}=1+a^2+2(a+1)^2-2a-a(a+1)-(a+1)=$ | **3p** |
| | $=2a^2+2=2(a^2+1)$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| **b)** | $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A(a)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}3a+2 & a+2 & 2a+1\\ 2a+4 & 2 & a+2\\ a+4 & a+2 & a+1\end{pmatrix}$, $A(0)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}2 & a+2 & 2a+1\\ 4 & 2a+2 & 2a+2\\ 4 & 3a+2 & 2a+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| | $\begin{pmatrix}3a+2 & a+2 & 2a+1\\ 2a+4 & 2 & a+2\\ a+4 & a+2 & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & a+2 & 2a+1\\ 4 & 2a+2 & 2a+2\\ 4 & 3a+2 & 2a+1\end{pmatrix} \Leftrightarrow a=0$ | **2p** |
| **c)** | Sistemul este compatibil determinat și are soluția $(x_0,y_0,z_0)$, cu $x_0=1$, $y_0=2$ și $z_0=4$ | **3p** |
| | Cum $x_0z_0=4=y_0^2$, obținem că $x_0$, $y_0$ și $z_0$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $x*0=\dfrac{2(x+0)}{x\cdot 0+2}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{2x}{2}=x$, pentru orice $x\in M$ | **2p** |
| **b)** | $x*y-2=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}-2=\dfrac{2x+2y-2xy-4}{xy+2}=-2\cdot\dfrac{xy-x-y+2}{xy+2}=$ | **3p** |
| | $=-2\cdot\dfrac{(x-1)(y-1)+1}{xy+2}<0$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)\Rightarrow x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$ | **2p** |
| **c)** | Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale nenule, obținem $0<m*n<2$ și, cum $m*n$ este număr natural, obținem $m*n=1$ | **2p** |
| | $\dfrac{2(m+n)}{mn+2}=1\Leftrightarrow mn-2m-2n+2=0\Leftrightarrow(m-2)(n-2)=2$ şi, cum $m$ şi $n$ sunt numere naturale nenule, obținem perechile $(3,4)$ şi $(4,3)$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)+e^x(2x-4)=$ | **3p** |
| | $=e^x\left(x^2-2x+1\right)=e^x(x-1)^2,\ x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(x^2+4x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{e^x}=$ | **2p** |
| | $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ | **2p** |
| | Cum funcția $f$ este continuă în $x=1$, obținem că $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este injectivă, deci graficul funcției $f$ intersectează orice paralelă la $Ox$ în cel mult un punct | **3p** |
| **2.a)** | $\int_0^1\left(4x^3+1\right)dx=\left(x^4+x\right)\Big\|_0^1=$ | **3p** |
| | $=1+1=2$ | **2p** |
| **b)** | $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\int_0^1 x^2\left(4x^3+1\right)^3dx=\dfrac{1}{12}\int_0^1\left(4x^3+1\right)'\left(4x^3+1\right)^3dx=\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{\left(4x^3+1\right)^4}{4}\Big\|_0^1=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{5^4-1}{48}=13$ | **2p** |
| **c)** | $4t^3+1\geq 5$, pentru orice $t\in[1,+\infty)\Rightarrow\int_1^x\ln\left(f(t)\right)dt=\int_1^x\ln\left(4t^3+1\right)dt\geq\int_1^x\ln 5\,dt=(x-1)\ln 5$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$ | **3p** |
| | Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln 5=+\infty$, obținem $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\ln\left(f(t)\right)dt=+\infty$ | **2p** |

**Examenul naţional de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 8**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $1<\sqrt[3]{7}<2$ şi $4<\log_2 21<5$, deci $A=\{2,3,4\}$ | **3p** |
| | Produsul elementelor mulţimii $A$ este egal cu $24$ | **2p** |
| **2.** | $f(x)=y \Leftrightarrow x^2+4x=5x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$ | **3p** |
| | Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f$ cu dreapta $d$ sunt $x=-1$ și $x=2$ | **2p** |
| **3.** | $2\cdot 3^{2x}-3^{2x}-3=0 \Leftrightarrow 3^{2x}=3$ | **3p** |
| | $2x=1$, deci $x=\frac{1}{2}$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile | **2p** |
| | Mulțimea numerelor naturale de trei cifre, care au cifrele numere prime distincte, are $4\cdot 3\cdot 2=24$ de elemente, deci sunt $24$ de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{24}{900}=\frac{2}{75}$ | **1p** |
| **5.** | $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ | **3p** |
| | $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}$, deci $AMBC$ este paralelogram | **2p** |
| **6.** | $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{225}{289}$ | **2p** |
| | Cum $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=-\frac{15}{17}$, deci $\operatorname{tg} x=\frac{8}{15}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(2)=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&-1&-2\\0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}3&1&2\\1&-1&-2\\0&1&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=-3+2+0-0-(-6)-1=4$ | **3p** |
| **b)** | $\det(A(a))=a^2+a-2$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | Sistemul de ecuații nu este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, deci $a=-2$ sau $a=1$ | **3p** |
| **c)** | Sistemul are soluția unică $(x_0,y_0,z_0)$, deci $a\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ și $x_0=\frac{5}{a+2}$ | **3p** |
| | $x_0\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (a+2)\mid 5$ și, cum $a\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, obținem $a=3$ | **2p** |
| **2.a)** | $1*5=1+5-\frac{1\cdot 5}{5}=$ | **3p** |
| | $=1+5-1=5$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $\sqrt{x}+\sqrt{x}-\frac{x}{5}=5 \Leftrightarrow 10\sqrt{x}=25+x$, unde $x$ este număr real, $x\geq 0$ | **2p** |
| | $\left(\sqrt{x}-5\right)^2=0$, de unde obținem $x=25$ | **3p** |
| **c)** | $x*0=0*x=x$, pentru orice număr real $x$, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **1p** |
| | $a*a'=0 \Leftrightarrow 5a+5a'-aa'=0 \Leftrightarrow a'(a-5)=5a$, deci $a'=\frac{5a}{a-5}$, pentru orice număr real $a$, $a\neq 5$, unde $a'$ este simetricul lui $a$ | **3p** |
| | $\frac{5a}{a-5}<0 \Leftrightarrow a\in(0,5)$ | **1p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\ln(x+1)+(x-1)\cdot\frac{1}{x+1}=$ | **3p** |
| | $=\ln(x+1)+\frac{x+1-2}{x+1}=1+\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}$, $x\in(0,+\infty)$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{(x-1)^2}{x}\ln(x+1)\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)=$ | **2p** |
| | $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{(x-1)^2}{x^2}\ln(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)=-\infty$ | **3p** |
| **c)** | $f''(x)=\frac{x+3}{(x+1)^2}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty) \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ | **2p** |
| | $f'$ este injectivă pe $(0,+\infty)$, deci $f'(a)\neq f'(b)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$, cu $a\neq b$, de unde obținem că tangentele la graficul funcției $f$ în punctele $A(a,f(a))$ și $B(b,f(b))$ sunt concurente, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$, cu $a\neq b$ | **3p** |
| **2.a)** | $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\vert_1^2=$ | **3p** |
| | $=8-1=7$ | **2p** |
| **b)** | $\int_0^1\frac{9x^2}{x+1}dx=9\int_0^1\frac{x^2-1+1}{x+1}dx=9\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=9\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=$ | **3p** |
| | $=9\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2-0\right)=9\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$ | **2p** |
| **c)** | $\int_0^3 f(x)F(x)dx=\int_0^3 F'(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\vert_0^3=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{2}\left(F^2(3)-F^2(0)\right)=\frac{1}{2}\left(8^2-0^2\right)=32$ | **2p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 9**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}=1\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=$ | **3p** |
| | $=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{3^5}\right)>\frac{3}{4}$ | **2p** |
| **2.** | $(f\circ f)(x)=0\Leftrightarrow -3f(x)+18=0\Leftrightarrow f(x)=6$ | **3p** |
| | $-3x+18=6\Leftrightarrow x=4$, deci abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f\circ f$ cu axa $Ox$ este egală cu $4$ | **2p** |
| **3.** | $2^{2-x}\left(2-1+2^3\right)=9\Leftrightarrow 2^{2-x}=1$ | **3p** |
| | $x=2$ | **2p** |
| **4.** | $T_{k+1}=C_{14}^k\left(x^3\right)^{14-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{14}^k x^{42-3k-\frac{k}{2}}=C_{14}^k x^{\frac{84-7k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,14\}$ | **3p** |
| | $\frac{84-7k}{2}=0\Leftrightarrow k=12$, deci $T_{13}=C_{14}^{12}=91$ nu îl conține pe $x$ | **2p** |
| **5.** | Punctul $M\left(\frac{a-2}{2},3\right)$ este mijlocul segmentului $AB$ | **3p** |
| | $3=2\cdot\frac{a-2}{2}+3\Leftrightarrow a=2$ | **2p** |
| **6.** | În $\Delta ABC$, $\operatorname{tg} C=1\Rightarrow \sphericalangle C=\frac{\pi}{4}$, deci $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | **3p** |
| | $2R=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow AB=2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(3)\right)=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=12+1+(-1)-4-(-3)-1=10$ | **3p** |
| **b)** | $\det\left(A(a)\right)=a^2+a-2$, pentru orice număr real $a$, deci $\det\left(A(a)\right)=0\Leftrightarrow a=1$ sau $a=-2$ | **3p** |
| | Cum $\det\left(A(n)\right)\neq 0$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu $3$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 2$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | Pentru orice număr natural $m \geq 2$, $A(m)$ este inversabilă, deci $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det(A(m)) = -1$ sau $\det(A(m)) = 1$ | **3p** |
| | Cum $m \geq 2$, obținem $\det(A(m)) = m^2 + m - 2 \geq 4$, deci $A^{-1}(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi | **2p** |
| **2.a)** | $8 \circ 8 = \dfrac{8 \cdot 8 - 4}{8 + 8 - 4} =$ | **3p** |
| | $= \dfrac{60}{12} = 5$ | **2p** |
| **b)** | $(x+2) \circ (y+2) = \dfrac{xy + 2x + 2y}{x+y}$, $(x+y) \circ 4 = \dfrac{4x + 4y - 4}{x+y}$, pentru orice $x, y \in M$ | **2p** |
| | $(x+2) \circ (y+2) - (x+y) \circ 4 = \dfrac{xy - 2x - 2y + 4}{x+y} = \dfrac{(x-2)(y-2)}{x+y}$, pentru orice $x, y \in M$ și, cum $x > 2$ și $y > 2$, obținem că $(x+2) \circ (y+2) > (x+y) \circ 4$, pentru orice $x, y \in M$ | **3p** |
| **c)** | $x \circ x = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 4} = \dfrac{x+2}{2}$, $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x} = \dfrac{x + 2^{n+1} - 2}{2^n}$, unde $x \in M$ și $n$ este număr natural, $n \geq 2$ | **3p** |
| | $\dfrac{x + 2^{n+1} - 2}{2^n} = 2^n - \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow x = 2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 1 \Rightarrow x = \left(2^n - 1\right)^2$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x) = \dfrac{1}{x-3} - 2 \cdot \dfrac{2x}{x^2 - 9} =$ | **3p** |
| | $= \dfrac{x + 3 - 4x}{x^2 - 9} = \dfrac{3(1-x)}{x^2 - 9}$, $x \in (3, +\infty)$ | **2p** |
| **b)** | $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (3, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(3, +\infty)$, deci $f$ este injectivă | **2p** |
| | Cum $f$ este continuă pe $(3, +\infty)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, obținem că $f$ este surjectivă, deci $f$ este bijectivă | **3p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x \to 3} \left((x-3) f(x)\right) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{x-3}} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f'(x)}{\left(\dfrac{1}{x-3}\right)'} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-\dfrac{3(x-1)}{x^2 - 9}}{-\dfrac{1}{(x-3)^2}} =$ | **3p** |
| | $= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3(x-1)(x-3)^2}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3(x-1)(x-3)}{x+3} = 0$ | **2p** |
| **2.a)** | $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \left( f(x) - \dfrac{x^2}{x^2 - 4} \right) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} x\, dx = \dfrac{x^2}{2} \Bigg\vert_1^{\frac{3}{2}} =$ | **3p** |
| | $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{4} - 1\right) = \dfrac{5}{8}$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{x^2-4}dx=2\int_{-1}^{1}\frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx=2\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx=2\left(x+\ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\|\right)\Big\|_{-1}^{1}=$ | **3p** |
| | $=2\left(1+\ln\frac{1}{3}+1-\ln 3\right)=4(1-\ln 3)$ | **2p** |
| **c)** | $\int_{a}^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}dx=\int_{a}^{\sqrt{3}}\sqrt{x-x-\frac{x^2}{x^2-4}}dx=\int_{a}^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\sqrt{4-x^2}\Big\|_{a}^{\sqrt{3}}=\sqrt{4-a^2}-1$, $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ | **3p** |
| | $\sqrt{4-a^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2=1$ și, cum $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, obținem $a=1$ | **2p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 10**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)=2^2-(3i)^2-9+3i=4+3i$ | **3p** |
| | $\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+3^2}=5$ | **2p** |
| **2.** | $f(2)=0$ | **2p** |
| | $(g\circ f)(2)=g(f(2))=5\cdot 0+20=20$ | **3p** |
| **3.** | $4^{x-5}=4^{-2}\Leftrightarrow x-5=-2$ | **3p** |
| | $x=3$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile | **2p** |
| | Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 8 este $\{118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222\}$, deci sunt 10 cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{10}{900}=\frac{1}{90}$ | **1p** |
| **5.** | $ABCD$ este paralelogram, deci $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ | **2p** |
| | $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(\sphericalangle ABC)=76\Rightarrow AC=2\sqrt{19}\Rightarrow\lvert\overrightarrow{AM}\rvert=AM=\sqrt{19}$ | **3p** |
| **6.** | $BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ este dreptunghic în $A\Rightarrow R=\frac{BC}{2}=10$ | **2p** |
| | $P_{\Delta ABC}=48$ și $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{12\cdot 16}{2}=96\Rightarrow r=\frac{96}{24}=4$, de unde obținem $\frac{r}{R}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(4)=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(4))=\begin{vmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=4+21+(-8)-(-14)-2-24=5$ | **3p** |
| **b)** | $\det(A(a))=5a-15$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(a))=0$, deci $a=3$ | **3p** |
| **c)** | Pentru $a=3$ soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(1+5\alpha,-1-13\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$ | **3p** |
| | $z_0^2=x_0+y_0\Leftrightarrow\alpha^2+8\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-8$ sau $\alpha=0$, deci $(x_0,y_0,z_0)=(-39,103,-8)$ sau $(x_0,y_0,z_0)=(1,-1,0)$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $4*3=\sqrt{4^{\log_3 3}}=$<br>$=\sqrt{4}=2$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $x*9=\sqrt{x^{\log_3 9}}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$<br>$9*x=\sqrt{9^{\log_3 x}}=\sqrt{3^{2\log_3 x}}=\sqrt{\left(3^{\log_3 x}\right)^2}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **2p**<br>**3p** |
| **c)** | $x*x=e\Rightarrow\sqrt{x^{\log_3 x}}=9\Rightarrow x^{\log_3 x}=81\Rightarrow\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81$, deci $\log_3^2 x=4$<br>$\log_3 x=-2$ sau $\log_3 x=2\Rightarrow x=\frac{1}{9}$, care nu convine; $x=9$, care convine | **3p**<br>**2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=2x\cdot\left(x^2-4\right)+\left(x^2-9\right)\cdot 2x=$<br>$=2x\left(x^2-4+x^2-9\right)=2x\left(2x^2-13\right),\ x\in\mathbb{R}$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\frac{1}{(x+3)\left(x^2-4\right)}\right)=$<br>$=1\cdot\frac{1}{(3+3)\left(3^2-4\right)}=\frac{1}{30}$ | **2p**<br>**3p** |
| **c)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{13}{2}}, x=0$ sau $x=\sqrt{\frac{13}{2}}$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{13}{2}},+\infty\right)$<br>$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=-\frac{13}{4}$, $f(0)=39$, $f$ continuă pe $\mathbb{R}$, $f$ strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și pe $\left(0,\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și $f$ strict crescătoare pe $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},0\right)$ și pe $\left(\sqrt{\frac{13}{2}},+\infty\right)$, deci ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale $\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{13}{4},39\right)$ | **3p**<br>**2p** |
| **2.a)** | $\int_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int_1^2 2x\,dx=x^2\Big\|_1^2=$<br>$=4-1=3$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $\int_0^{\sqrt{3}}f(x)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x\Big\|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=4\cdot\frac{\pi}{3}-x\Big\|_0^{\sqrt{3}}=$<br>$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$, de unde obținem $a=\frac{3}{4}$ | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | $\int_{-1}^1 xf(x)dx=2\int_{-1}^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=2\int_1^{-1}(-x)^2\operatorname{arctg}(-x)(-1)dx=-2\int_{-1}^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=-\int_{-1}^1 xf(x)dx$<br>$2\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$, deci $\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$ | **3p**<br>**2p** |

**Examenul naţional de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 11**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1$ | **2p** |
| | Cum $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}=6-\sqrt{2}$, obținem că $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=6-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=5$ | **3p** |
| **2.** | $f(x)=0\Leftrightarrow x=3$, deci graficul funcției $f$ intersectează axa $Ox$ în punctul $(3,0)$ | **2p** |
| | $g(3)=0\Leftrightarrow 9-6m-6=0$, deci $m=\frac{1}{2}$ | **3p** |
| **3.** | $\log_2\left(x^2-4x+12\right)=3\Rightarrow x^2-4x+12=8\Rightarrow x^2-4x+4=0$ | **3p** |
| | $x=2$, care convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile | **2p** |
| | Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor divizibilă cu 3 sunt numerele naturale de două cifre care sunt divizibile cu $3$, deci sunt $30$ de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$ | **1p** |
| **5.** | $AB\perp BC\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$ | **2p** |
| | Cum $m_{AB}=1$ și $m_{BC}=\frac{m-3}{2}$, obținem $\frac{m-3}{2}=-1$, deci $m=1$ | **3p** |
| **6.** | $\sin\frac{25\pi}{6}=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ | **2p** |
| | Cum $\cos\frac{23\pi}{3}=\cos\left(6\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$, obținem că $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{23\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(-2,0,2)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(-2,0,2)\right)=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=-3+1+1-1-(-1)-3=-4$ | **3p** |
| **b)** | $\det\left(A(a,b,c)\right)=\begin{vmatrix}1+a&1&1\\1&1+b&1\\1&1&1+c\end{vmatrix}=(1+a)(1+b)(1+c)+1+1-(1+a)-(1+b)-(1+c)=$ | **2p** |
| | $=abc+ab+ac+bc\neq 0$, deci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă | **3p** |
| **c)** | Sistemul este compatibil nedeterminat, deci $\det\left(A(a,b,c)\right)=0\Rightarrow abc+ab+ac+bc=0$ | **3p** |
| | $ab+ac+bc=-abc\Rightarrow\frac{ab+ac+bc}{abc}=-1$, deci $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$, care este număr întreg | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $1*1=\frac{1\cdot 1}{1\cdot 1-1-1+2}=\frac{1}{1-1-1+2}=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{1}=1$ | **2p** |
| **b)** | $f(x)*f(y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2}=\frac{\frac{2}{x+1}\cdot\frac{2}{y+1}}{\frac{2}{x+1}\cdot\frac{2}{y+1}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{y+1}+2}=$ | **2p** |
| | $=\frac{4}{4-2(y+1)-2(x+1)+2(x+1)(y+1)}=\frac{4}{2xy+2}=\frac{2}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2020}{2021}\right)=\frac{2n}{n+1}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2021}\right)=\frac{2n}{n+1}$, unde $n$ este număr natural | **3p** |
| | $\frac{2}{\frac{1}{2021}+1}=\frac{2n}{n+1}\Leftrightarrow\frac{2\cdot 2021}{2022}=\frac{2n}{n+1}$, deci $n=2021$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=2\ln x-2x+2$, $x\in(0,+\infty)$ | **3p** |
| | $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$ | **2p** |
| **b)** | $f''(x)=\frac{2(1-x)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ | **2p** |
| | Cum $f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,1)$, obținem că funcția $f$ este convexă pe $(0,1)$ | **3p** |
| **c)** | $f''(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'$ strict descrescătoare pe $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)<f'(1)$, deci $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$ | **2p** |
| | $f$ continuă și $f$ strict descrescătoare pe $(1,+\infty)\Rightarrow f(x)<f(1)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci $2x\ln x-x^2+3<2$, de unde obținem $2\ln x<x-\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$ | **3p** |
| **2.a)** | $I_1+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\left(\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\int_0^1 1dx=$ | **3p** |
| | $=x\Big\vert_0^1=1$ | **2p** |
| **b)** | $I_2=2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=2(x-\operatorname{arctg}x)\Big\vert_0^1=$ | **3p** |
| | $=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$ | **2p** |
| **c)** | $I_n=n\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx=\int_0^1 x\cdot\left(\ln\left(1+x^n\right)\right)'dx\le\int_0^1\left(\ln\left(1+x^n\right)\right)'dx=$ | **3p** |
| | $=\ln\left(1+x^n\right)\Big\vert_0^1=\ln 2$, deci $I_n\le\ln 2$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **2p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 12**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $a=2\sqrt{2}$ | **2p** |
| | Cum $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$, deci $2<a<3$, obținem că $[a]=2$ | **3p** |
| **2.** | Axa $Ox$ este tangentă la graficul funcției $f \Rightarrow \Delta=0$ | **2p** |
| | $m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$ | **3p** |
| **3.** | $(x-1)(x+2)=(x-1)(x+2)^2 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x+1)=0$ | **2p** |
| | $x=-2$, care nu convine; $x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine | **3p** |
| **4.** | $C_n^2=55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=55 \Rightarrow n^2-n-110=0$ | **3p** |
| | Cum $n$ este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=11$ | **2p** |
| **5.** | Punctul de intersecție a dreptelor $d_1$ și $d_2$ este punctul $M(-1,-1)$ | **2p** |
| | $m_{d_2}=-1$ și, cum $m_d\cdot m_{d_2}=-1$, obținem $m_d=1$, deci ecuația dreptei $d$ este $y=x$ | **3p** |
| **6.** | $\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}=$ | **3p** |
| | $=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(4,2)=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&4&3\\3&-2&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4,2))=\begin{vmatrix}2&-2&1\\1&4&3\\3&-2&2\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=16+(-2)+(-18)-12-(-12)-(-4)=0$ | **3p** |
| **b)** | $A(2,1)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&3\\3&-2&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,1))=0 \Rightarrow \text{rang}(A(2,1))\leq 2$ | **3p** |
| | Cum $\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5\neq 0$, obținem că rangul matricei $A(2,1)$ este egal cu 2 | **2p** |
| **c)** | $n^2-3n+1=p^2-3p+1 \Leftrightarrow (n-p)(n+p-3)=0$ | **2p** |
| | Cum $n$ și $p$ sunt numere naturale nenule și distincte, obținem $n+p=3$, iar perechile sunt $(1,2)$ și $(2,1)$ | **3p** |
| **2.a)** | $(-1)*3=\frac{-3}{3}-(-1)-3+6=$ | **3p** |
| | $=-1+1-3+6=3$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $x*(y+z-3)=\frac{x(y+z-3)}{3}-x-(y+z-3)+6=\frac{xy+xz}{3}-2x-y-z+9=$ | **2p** |
| | $=\frac{xy}{3}-x-y+6+\frac{xz}{3}-x-z+6-3=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale $x$, $y$ și $z$ | **3p** |
| **c)** | $x*6=6*x=x$, pentru orice număr real $x$, deci $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”, de unde obținem că $x*x'=x'*x=6$, unde $x'$ este simetricul lui $x$ în raport cu legea de compoziție „$*$” | **2p** |
| | Deoarece $2x-3=x+x-3$ și $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, obținem $(x*x)+(x*x')-3+(x'*x)+(x'*x)-3=42 \Leftrightarrow (x*x)+6-3+6+6-3=42$, deci $x*x=30\Rightarrow \frac{x^2}{3}-2x+6=30$, de unde obținem $x=-6$ sau $x=12$, care convin | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f(x)=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot\left(x^2+2\right)'=$ | **3p** |
| | $=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$, situat pe graficul funcției $f$, este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'\left(\sqrt{2}\right)=0$ | **2p** |
| | Cum $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-a$, pentru orice număr real $a$, obținem că $\frac{\sqrt{2}}{2}-a=0$, deci $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | **3p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-ax}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-a\right)}{x}=1-a$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(1-a)x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$, deci, pentru orice număr real $a$, dreapta de ecuație $y=(1-a)x$ este asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int_1^3\frac{xf(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int_1^3 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_1^3=$ | **3p** |
| | $=\frac{81-1}{4}=20$ | **2p** |
| **b)** | $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left.\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x\right\|_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1}{x^2+1}dx=2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}1dx=$ | **3p** |
| | $=\frac{5\pi}{12}-\left.\frac{1}{2}x\right\|_1^{\sqrt{3}}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ | **2p** |
| **c)** | Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in[0,1]$, $0\le x^{2n}\le 1$ și $0\le\operatorname{arctg}x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le\operatorname{arctg}^n x\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$, de unde obținem că $0\le\int_0^1 f^n(x)dx\le\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}\right)^n dx=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ | **3p** |
| | Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)dx=0$ | **2p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Testul 1**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M=\left\{n\in\mathbb{N}\mid n^2<7+\sqrt{7}\right\}$. |
| **5p** | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+m$, unde $m$ este număr real. Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care vârful parabolei asociate funcției $f$ are ordonata strict mai mare decât $0$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$. |
| **5p** | **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel mult $2$ elemente ale unei mulțimi cu $12$ elemente. |
| **5p** | **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a paralelei prin $A$ la $OB$ cu paralela prin $B$ la $OA$. |
| **5p** | **6.** Arătați că $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}x}=1$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-a & 2a & 0\\ -a & 1+2a & 0\\ 0 & 0 & 1+a\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că, dacă $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale pentru care $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$. |
| | **2.** Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $3*4=5$. |
| **5p** | **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*\sqrt{5}<x+1$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi $(m,n)$ de numere naturale nenule, pentru care numerele $m$, $n$ și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. |
| **5p** | **c)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$. |
| | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{4}{3}$. |

| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$ . |
| **5p** | **c)** Arătați că $\int_{-1}^{1} \lvert x\ln(f(x))\rvert\,dx = 2\ln 2 - 1$ . |

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Testul 2**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Arătați că numărul $n=(1+6i)^2+(3-2i)^2$ este întreg negativ, unde $i^2=-1$. |
| **5p** | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax$, unde $a$ este număr real astfel încât $f(1)=f(5)$. Arătați că $f(2)=f(4)$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(2x^2-2\right)=2\log_3(x+1)$. |
| **5p** | **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor. |
| **5p** | **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și $C$, astfel încât $AOBC$ este paralelogram. Arătați că triunghiul $ACB$ este dreptunghic isoscel. |
| **5p** | **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$ pentru care $2\sin x\sin(\pi-x)=1$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$. |
| **5p** | **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care $A(a)A(1)=A(1)A(a)$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi. |
| | **2.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+x+y$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\hat{3}\circ\hat{3}=\hat{3}$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=\hat{4}\circ x$ este bijectivă. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul în care graficul funcției $f$ intersectează axa $Oy$. |
| **5p** | **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(4)+f(6)+\ldots+f(2n)\right)^n$. |

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^2 \left(x^2+4\right) f(x)\,dx=0$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\int_1^x f(t)\,dt \geq 0$, pentru orice număr real $x$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Testul 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-z-i=-1$. |
| **5p** | **2.** Determinați cel mai mic număr natural $n$ pentru care ecuația $x^2-3x+3-n=0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25x)+\log_x 5=4$. |
| **5p** | **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu $2$ sau cu $3$. |
| **5p** | **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(4,2)$ și $C(3,0)$. Calculați aria triunghiului $ABC$. |
| **5p** | **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x-\sin(\pi-x)+\cos x+\cos(\pi-x)+\operatorname{tg}2x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A+I_3)=1$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $A\cdot A\cdot A=O_3$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale $a$, $b$ și $c$, astfel încât $X=aI_3+bA+cA\cdot A$. |
| | **2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\lvert x-y\rvert$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $(5*2)*1=2$. |
| **5p** | **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $(a*b)+(b*c)\geq a*c$, pentru orice numere reale $a$, $b$ și $c$. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{e^x}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $x-1\leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$. |
| | **2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\int_0^2 f^2(x)\,dx=4$. |

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 \ln\left(f(x)\right)dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că există un singur număr real $x$, $x \in [0,+\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt = 2021$.

# Examenul național de bacalaureat 2021
## Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*

**Testul 4**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Se consideră un număr complex $z$ care are proprietatea $z^2=1-i$. Arătați că $z^4+2i=0$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde $m$ este număr real. Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care $f(x)>1$, pentru orice număr real $x$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+2)+\log_5(2x-1)=2$.

**5p** **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu $9$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$ și $C(4,5)$. Determinați coordonatele punctului $D$, știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

**5p** **6.** Determinați $x\in(0,1)$ pentru care $4\cos x\cos(\pi-x)+3=0$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Arătați că $\det A=6$.

**5p** **b)** Arătați că $A\cdot B+B=B\cdot A$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $x$ și $y$, știind că $(x+1)A\cdot B+(y-2)B\cdot A=B\cdot B\cdot B$.

**2.** Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x*y=x^y$.

**5p** **a)** Arătați că $2*4=4*2$.

**5p** **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” **nu** este comutativă.

**5p** **c)** Determinați numerele naturale nenule $n$ pentru care $(2*2)*n<64$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln\left(x^2+x+1\right)$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este bijectivă.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 e^x\left|f(x)\right|dx$.

**5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Testul 5**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinați numărul complex $z$, pentru care $z-2\overline{z}=-2+6i$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$, unde $m$ este număr real pozitiv. Determinați numărul real pozitiv $m$ pentru care numerele $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-1)=\log_5(3x+1)$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,20\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii $A$.

**5p** **5.** Se consideră punctele $A$, $B$, $C$ și $D$, astfel încât $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul $ABC$ cu măsura unghiului $A$ de $30°$. Arătați că lungimea laturii $BC$ este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&0&0\\m&1&0\\0&m&1\end{pmatrix}$, unde $m$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(m)+A(-m))=8$, pentru orice număr real $m$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $m$ pentru care are loc egalitatea $A(m)\cdot A(m)=A(0)$.

**5p** **c)** Demonstrați că $A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n(A(-1)-A(0))$, pentru orice număr natural nenul $n$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

**5p** **a)** Arătați că $\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

**5p** **b)** Determinați numerele reale $x$ pentru care $(x*(-x))*((-x)*x)=24x$.

**5p** **c)** Demonstrați că $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul $x$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{2x}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}}\leq\sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real $x$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\frac{3}{4}$.

**5p** **b)** Calculați $\int_1^{e}x\left(x^3-f(x)\right)dx$.

**5p** **c)** Arătați că $\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{2e^3-5}{3}$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Testul 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Arătați că numerele $\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**5p** **2.** Se consideră o funcție impară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ este pară.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^x=2^{x+1}-2\sqrt{2}$.

**5p** **4.** Determinați termenul care îl conține pe $x^8$ din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **5.** În planul triunghiului $ABC$ se consideră punctul $M$, astfel încât $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Determinați numărul real $k$, știind că $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{CM}$.

**5p** **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+6\cos x-\sin x-3=0$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & m & 1\\ m-1 & m & -m\end{pmatrix}$, unde $m$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det A=-1$.

**5p** **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m$, rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu $2$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $m$, $m\neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea $A$.

**2.** Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2+z_1z_2$.

**5p** **a)** Arătați că $(2+i)\circ(2-i)=9$.

**5p** **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul $a$, numărul $A=\left(-1+(a+1)i\right)\circ\left(-1+(a-1)i\right)$ este real strict mai mic decât $0$.

**5p** **c)** Determinați numerele complexe $z$ pentru care $z\circ z=-5$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+3}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(e^x f(x)-2\right)dx=-\frac{2}{3}$.

**5p** **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

**5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Calculați $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Testul 7**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M=\{n\in\mathbb{N} \mid 2n+1<10\}$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-10x+m$, unde $m$ este număr real. Determinați numărul real $m$ pentru care vârful parabolei asociate funcției $f$ este situat pe axa $Ox$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\sqrt{x-5}=7$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să **nu** fie multiplu de $5$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(-1,3)$. Determinați coordonatele punctului $C$ astfel încât $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic $ABC$ cu $AB=4$, $AC=5$ și aria egală cu $6$. Calculați cosinusul unghiului $A$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(a+1)y+az=6a+3\\ x+y+(a+1)z=4a+7\\ 2x+ay+z=2a+6\end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(a))=2(a^2+1)$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care $A(a)\cdot A(0)=A(0)\cdot A(a)$.

**5p** **c)** Demonstrați că, dacă $(x_0,y_0,z_0)$ este soluția sistemului de ecuații, atunci $x_0$, $y_0$ și $z_0$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**2.** Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $x*0=x$, pentru orice $x\in M$.

**5p** **b)** Arătați că $x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinați perechile $(m,n)$ de numere naturale nenule pentru care $m*n$ este număr natural.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

**5p** **c)** Demonstrați că graficul funcției $f$ intersectează orice dreaptă paralelă cu axa $Ox$ în cel mult un punct.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3 dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \ln\left(f(t)\right)dt=+\infty$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Testul 8**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Determinați produsul elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{N} \mid \sqrt[3]{7}<x\le \log_2 21\right\}$. |
| **5p** | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f$ cu dreapta $d$ de ecuație $y=5x+2$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 9^x-3^{2x}-3=0$. |
| **5p** | **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte. |
| **5p** | **5.** Se consideră punctul $M$ în planul triunghiului $ABC$ astfel încât $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Arătați că patrulaterul $AMBC$ este paralelogram. |
| **5p** | **6.** Calculați $\operatorname{tg} x$, știind că $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x=-\frac{8}{17}$. |

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x+y+az=-5 \\ x-y-az=10 \\ (2-a)x+y+z=1-a \end{cases}$, unde $a$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A(2))=4$. |
| **5p** | **b)** Determinați numerele reale $a$ pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul natural $a$ pentru care sistemul are soluția unică $(x_0,y_0,z_0)$ și $x_0$ este număr întreg. |
| | **2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=x+y-\frac{xy}{5}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $1*5=5$. |
| **5p** | **b)** Determinați numărul real $x$, $x\ge 0$, pentru care $\sqrt{x}*\sqrt{x}=5$. |
| **5p** | **c)** Determinați valorile reale ale lui $a$, $a\ne 5$, pentru care simetricul lui $a$ în raport cu legea de compoziție „$*$” este strict mai mic decât $0$. |

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln(x+1)$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=1+\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției $f$, sunt concurente. |

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)\,dx=7$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 f^2(x)\,dx$.

**5p** **c)** Știind că $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2(x+1)\sqrt{x+1}-6\sqrt{x+1}+4$ este o primitivă a funcţiei $f$, arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)\,dx=32$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Testul 9**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}>\frac{3}{4}$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+18$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f\circ f$ cu axa $Ox$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3-x}-2^{2-x}+2^{5-x}=9$.

**5p** **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe $x$ din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(a,1)$ și $B(-2,5)$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, știind că mijlocul segmentului $AB$ aparține dreptei de ecuație $y=2x+3$.

**5p** **6.** Calculați lungimea laturii $AB$ a triunghiului $ABC$, știind că $\operatorname{tg} C=1$ și că triunghiul $ABC$ este înscris într-un cerc de rază $3$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(3))=10$.

**5p** **b)** Demonstrați că, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu $3$.

**5p** **c)** Arătați că, pentru orice număr natural $m$, $m\geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.

**2.** Pe mulțimea $M=(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{xy-4}{x+y-4}$.

**5p** **a)** Arătați că $8\circ 8=5$.

**5p** **b)** Arătați că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$.

**5p** **c)** Demonstrați că, dacă $x\in M$ și $n$ este număr natural, $n\geq 2$, astfel încât $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=2^n-\frac{1}{2^n}$, atunci $x$ este pătratul unui număr natural.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x-3)-2\ln(x^2-9)$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(1-x)}{x^2-9}$, $x\in(3,+\infty)$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $f$ este bijectivă.

**5p** **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}((x-3)f(x))=0$.

**2.** Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)dx=\dfrac{5}{8}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+f(-x)\right)dx=4(1-\ln 3)$.

**5p** **c)** Determinați $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, pentru care $\int_a^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}\,dx=\sqrt{3}-1$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Testul 10**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)$.

**5p** **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5x+20$. Calculați $(g\circ f)(2)$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5}=\frac{1}{16}$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu $8$.

**5p** **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=4$, $BC=6$ și măsura unghiului $ABC$ de $120°$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul $M$ este mijlocul segmentului $BD$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde $r$ este raza cercului înscris în triunghiul $ABC$ și $R$ este raza cercului circumscris triunghiului $ABC$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

**5p** **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile $(x_0,y_0,z_0)$ ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

**2.** Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

**5p** **a)** Arătați că $4*3=2$.

**5p** **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

**5p** **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+3$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=2x(2x^2-13)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\frac{1}{30}$.

**5p** **c)** Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale .

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg} x}dx=3$.

| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Determinați numărul real nenul $a$ pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = 0$. |

# Examenul național de bacalaureat 2021
## Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*

**Testul 11**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=5$.

**5p** **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2mx-6$, unde $m$ este număr real. Determinați numărul real $m$, știind că graficul funcției $f$ intersectează axa $Ox$ într-un punct în care și graficul funcției $g$ intersectează axa $Ox$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-4x+12\right)=\log_3 27$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu $3$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(-1,3)$ și $C(1,m)$, unde $m$ este număr real. Determinați numărul real $m$ pentru care triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $B$.

**5p** **6.** Arătați că $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{23\pi}{3}=1$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(1+a)x+y+z=0\\ x+(1+b)y+z=0\\ x+y+(1+c)z=0\end{cases}$, unde $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale nenule.

**5p** **a)** Arătați că $\det\left(A(-2,0,2)\right)=-4$.

**5p** **b)** Arătați că, dacă $abc+ab+ac+bc\neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.

**5p** **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ este întreg.

**2.** Pe mulțimea $G=(0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{xy-x-y+2}$ și se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,2)$, $f(x)=\frac{2}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $1*1=1$.

**5p** **b)** Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$ pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right)*f\left(\frac{2}{3}\right)*f\left(\frac{3}{4}\right)*\ldots*f\left(\frac{2020}{2021}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\ln x-x^2+3$.

**5p** **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f$ este convexă pe $(0,1)$.

**5p** **c)** Demonstrați că $2\ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

**2.** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se consideră numărul $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

**5p** **a)** Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = 1$.

**5p** **b)** Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $I_n \le \ln 2$, pentru orice număr natural nenul $n$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Testul 12**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Calculați partea întreagă a numărului $a=\frac{4}{\sqrt{2}}$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde $m$ este număr real. Determinați numerele reale $m$, știind că axa $Ox$ este tangentă la graficul funcției $f$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{(x-1)(x+2)}=(x+2)\sqrt{x-1}$.

**5p** **4.** Determinați numărul natural $n$, $n\geq 2$, știind că mulțimea $\{3,4,5,\ldots,n+2\}$ are exact 55 de submulțimi cu 2 elemente.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră dreptele $d_1$ și $d_2$, de ecuații $2x-y+1=0$, respectiv $x+y+2=0$. Determinați ecuația dreptei $d$ care este perpendiculară pe dreapta $d_2$ și trece prin punctul de intersecție a dreptelor $d_1$ și $d_2$.

**5p** **6.** Arătați că $\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(m,x)=\begin{pmatrix}2 & -x & 1\\ 1 & m & 3\\ 3 & -2 & x\end{pmatrix}$, unde $m$ și $x$ sunt numere reale.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(4,2))=0$.

**5p** **b)** Determinați rangul matricei $A(2,1)$.

**5p** **c)** Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte $(n,p)$ pentru care $\det(A(3,n))=\det(A(3,p))$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\frac{xy}{3}-x-y+6$.

**5p** **a)** Arătați că $(-1)*3=3$.

**5p** **b)** Arătați că $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale $x$, $y$ și $z$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $x$, $x\neq 3$ pentru care $(x*(x+x'-3))+(x'*(2x-3))=42$, unde $x'$ este simetricul lui $x$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-ax$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Pentru $a=0$, arătați că $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$, situat pe graficul funcției $f$, este paralelă cu axa $Ox$.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $a$, graficul funcției $f$ admite asimptotă spre $+\infty$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\operatorname{arctg} x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x}dx=20$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)dx=0$.

# Examenul național de bacalaureat 2021
## Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*
## BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

**Varianta 2**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $(1+i)^2-2(1+i)+2=1+2i+i^2-2-2i+2=$ | **3p** |
| | $=1-1=0$ | **2p** |
| **2.** | $f(1)=2\Rightarrow 1+a-5=2$ | **3p** |
| | $a=6$ | **2p** |
| **3.** | $\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4\left(x(x+1)\right)$, deci $x^2+1=x^2+x$ | **3p** |
| | $x=1$, care convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are $90$ de elemente, deci sunt $90$ de cazuri posibile | **2p** |
| | În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $9$ numere divizibile cu $2$ și cu $5$, deci sunt $9$ cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$ | **1p** |
| **5.** | $m_{MN}=1$ și, cum dreptele sunt paralele, obținem $m_d=1$ | **3p** |
| | $P\in d$, deci ecuația dreptei $d$ este $y-y_P=m_d\left(x-x_P\right)$, adică $y=x-3$ | **2p** |
| **6.** | $\operatorname{tg}A=\dfrac{BC}{AC}$ | **2p** |
| | $\operatorname{tg}B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{\frac{BC}{AC}}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}A}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(0)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=8+0+0-0-0-0=8$ | **3p** |
| **b)** | $A(a)-2I_3=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&-a\\0&0&0\\3a&0&-3a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| | $aB=a\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\3&0&-3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $a$, deci $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\3&0&-3\end{pmatrix}$ | **2p** |
| **c)** | $A(n)\cdot A(-n)=\begin{pmatrix}4+2n^2&0&-2n^2\\0&4&0\\6n^2&0&4-6n^2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(n)\cdot A(-n)\right)=64\left(1-n^2\right)$, unde $n$ este număr natural | **3p** |
| | $64\left(1-n^2\right)>0$ şi, cum $n$ este număr natural, obţinem $n=0$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $2*0=\frac{1}{2}\left(2+0+\lvert 2-0\rvert\right)=$ <br> $=\frac{1}{2}(2+2)=2$ | **3p** <br> **2p** |
| **b)** | $a\le b\Rightarrow \lvert a-b\rvert=b-a$ <br> $a*b=\frac{1}{2}\left(a+b+\lvert a-b\rvert\right)=\frac{1}{2}(a+b+b-a)=\frac{1}{2}\cdot 2b=b$, pentru orice numere reale $a$ și $b$ astfel încât $a\le b$ | **2p** <br> **3p** |
| **c)** | $x^2+1\ge 2x$ și $x^2+1\ge -2x$, pentru orice număr real $x$, deci $\left((2x)*\left(x^2+1\right)\right)*(-2x)=$ $=\left(x^2+1\right)*(-2x)=(-2x)*\left(x^2+1\right)=x^2+1$, pentru orice număr real $x$ <br> $x^2+1=10$, deci $x=-3$ sau $x=3$ | **3p** <br> **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=$ <br> $=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$ | **3p** <br> **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+3\right)}{x+\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x+\sqrt{x^2+3}}=0$ <br> Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ | **3p** <br> **2p** |
| **c)** | $f'(x)>0$, pentru orice număr real $x$, deci $f$ este strict crescătoare <br> Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ și $f$ este funcție continuă, ecuația $f(x)=a$ are soluție $\Leftrightarrow a\in(-\infty,0)$ | **2p** <br> **3p** |
| **2.a)** | $\int_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)dx=\int_0^2\left(x^2+x+3\right)\frac{x}{x^2+x+3}dx=\int_0^2 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^2=$ <br> $=\frac{4}{2}=2$ | **3p** <br> **2p** |
| **b)** | $\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2\frac{2x+1}{x^2+x+3}dx=\int_1^2\frac{\left(x^2+x+3\right)'}{x^2+x+3}dx=$ <br> $=\ln\left(x^2+x+3\right)\Big\|_1^2=\ln 9-\ln 5=\ln\frac{9}{5}$ | **3p** <br> **2p** |
| **c)** | $0\le\frac{x}{x^2+x+3}\le\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci $0\le f^n(x)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ și orice număr natural nenul $n$ <br> $0\le I_n=\int_a^b f^n(x)dx\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)$, pentru orice număr natural nenul $n$ și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ | **2p** <br> **3p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 2**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că $(1+i)^2-2(1+i)+2=0$, unde $i^2=-1$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, știind că punctul $M(1,2)$ aparține graficului funcției $f$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4 x+\log_4(x+1)$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu $2$ și cu $5$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $M(3,4)$, $N(0,1)$ și $P(3,0)$. Determinați ecuația dreptei $d$ care trece prin punctul $P$ și este paralelă cu dreapta $MN$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul $ABC$, dreptunghic în $C$. Arătați că $\operatorname{tg} B=\dfrac{1}{\operatorname{tg} A}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

**5p** **b)** Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$ pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)$.

**5p** **a)** Arătați că $2*0=2$.

**5p** **b)** Demonstrați că, dacă $a$ și $b$ sunt numere reale astfel încât $a\le b$, atunci $a*b=b$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $x$ pentru care $(2x)*\left(x^2+1\right)*(-2x)=10$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui $a$ pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+3}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)\,dx=2$.

| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Arătați că $\int_1^2 g(x)dx = \ln\frac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$. |
| **5p** | **c)** Se consideră numerele reale $a$ și $b$, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 4**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{2021-\sqrt{2}+2021+\sqrt{2}}{2}=$ | **3p** |
| | $=\frac{2\cdot 2021}{2}=2021$ | **2p** |
| **2.** | $f(1)=m\Leftrightarrow 1-3+1=m$ | **3p** |
| | $m=-1$ | **2p** |
| **3.** | $\log_3\left(\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)\right)=2$, deci $\left(\sqrt{x}\right)^2-9=3^2$ | **3p** |
| | $x-9=9$, deci $x=18$, care convine | **2p** |
| **4.** | O mulțime cu $n$ elemente are $2^n$ submulțimi | **3p** |
| | $2^n=16$, deci $n=4$ | **2p** |
| **5.** | $MNQP$ este paralelogram, deci segmentele $MQ$ și $PN$ au același mijloc | **3p** |
| | Coordonatele punctului $Q$ sunt $x=11$ și $y=6$ | **2p** |
| **6.** | În $\Delta ABC$, $2\sin A\cdot\cos A\cdot\cos A=\sin A$, deci $\cos^2 A=\frac{1}{2}$ | **3p** |
| | Cum unghiul $A$ este ascuțit, obținem $\cos A=\frac{1}{\sqrt{2}}$, deci $A=\frac{\pi}{4}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=1+0+0-0-0-0=1$ | **3p** |
| **b)** | $\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&a&0\\1+\log_2 a&0&1\end{vmatrix}=a$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$ | **3p** |
| | $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă | **2p** |
| **c)** | $\left(A(a)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{a}&0\\-1-\log_2 a&0&1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$ | **2p** |
| | $A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a+\frac{1}{a}&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)=4\left(a+\frac{1}{a}\right)$ și, cum $a+\frac{1}{a}\geq 2$, obținem că $\det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)\geq 8$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | Pentru $m=1$, obținem $x\circ y=xy-(x+y)+2$, deci $2\circ 2=2\cdot 2-(2+2)+2=$<br>$=4-4+2=2$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $2\circ 1=5\Leftrightarrow 2\cdot 1-m(2+1)+m(m+1)=5\Leftrightarrow m^2-2m-3=0$ și, cum $m\in(0,+\infty)\Rightarrow m=3$<br>$2\circ 5=2\cdot 5-3(2+5)+3\cdot 4=10-21+12=1$ | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | $-m^2x^5-m\left(mx^3-mx^2\right)+m^2+m=m\Leftrightarrow m^2\left(x^5+x^3-x^2-1\right)=0$<br>Cum $m\in(0,+\infty)$, obținem $x^3\left(x^2+1\right)-x^2-1=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)=0$, deci $x=1$ | **2p**<br>**3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}=\frac{4x^4-4}{x}=$<br>$=\frac{4\left(x^4-1\right)}{x}=\frac{4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$<br>$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci $f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci $f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$ | **2p**<br>**3p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$<br>Cum $f(1)=-1$, $f$ este continuă, $f$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și $f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, obținem că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$ | **2p**<br>**3p** |
| **2.a)** | $\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^4+1+2x\right)dx=\left.\left(\frac{x^5}{5}+x+x^2\right)\right\|_0^1=$<br>$=\frac{1}{5}+1+1=\frac{11}{5}$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{x^4+1}\right)=1$<br>Asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $F$ are panta egală cu 1 | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | $G(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(1+\frac{2t}{t^4+1}\right)dt=\left.\left(t+\mathrm{arctg}\left(t^2\right)\right)\right\|_0^x=x+\mathrm{arctg}\left(x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$<br>$\int_0^1 xG(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x\,\mathrm{arctg}\left(x^2\right)\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2\right)'\mathrm{arctg}\left(x^2\right)dx=\frac{1}{3}+\left.\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}\left(x^2\right)\right\|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx=$<br>$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\left.\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\right\|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$ | **2p**<br>**3p** |

# Examenul național de bacalaureat 2021

**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 4**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Calculați media aritmetică a numerelor reale $a = 2021 - \sqrt{2}$ și $b = 2021 + \sqrt{2}$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Determinați numărul real $m$, știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției $f$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(\sqrt{x} + 3\right) + \log_3\left(\sqrt{x} - 3\right) = 2$.

**5p** **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact $16$ submulțimi.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $M(3,0)$, $N(8,3)$ și $P(6,3)$. Determinați coordonatele punctului $Q$, știind că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic $ABC$ în care $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$. Arătați că $A = \frac{\pi}{4}$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.

**5p** **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right) = 1$.

**5p** **b)** Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, $\det\left(A(a) + \left(A(a)\right)^{-1}\right) \geq 8$, unde $\left(A(a)\right)^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - m(x + y) + m(m + 1)$, unde $m \in (0, +\infty)$.

**5p** **a)** Pentru $m = 1$, arătați că $2 \circ 2 = 2$.

**5p** **b)** Demonstrați că, dacă $2 \circ 1 = 5$, atunci $2 \circ 5 = 1$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $x$, știind că $\left(mx^3\right) \circ \left(-mx^2\right) = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2 - 4\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{4\left(x^2 + 1\right)(x + 1)(x - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

**5p** **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0, +\infty)$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2x}{x^4+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \left(x^4+1\right)f(x)\,dx=\frac{11}{5}$.

**5p** **b)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f$. Știind că graficul funcției $F$ are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

**5p** **c)** Se consideră funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției $f$ pentru care $G(0)=0$. Arătați că $\displaystyle\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $N=\log_2 6-\log_2 9+\log_2 24=\log_2\frac{6\cdot 24}{9}=$ | **3p** |
| | $=\log_2 16=4$, care este număr natural | **2p** |
| **2.** | $f(x)=2\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow x^2-x=0$ | **2p** |
| | Cum ecuația $x^2-x=0$ are două soluții reale și distincte, obținem că dreapta $y=2$ intersectează graficul funcției $f$ în două puncte distincte | **3p** |
| **3.** | $x^2-5=3x-1\Rightarrow x^2-3x-4=0$ | **2p** |
| | $x=-1$, care nu convine, $x=4$, care convine | **3p** |
| **4.** | Mulțimea $A$ are $C_n^2$ submulțimi cu 2 elemente, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, este numărul de elemente ale lui $A$ | **2p** |
| | $C_n^2=15$, deci $\frac{n(n-1)}{2}=15$, de unde obținem că mulțimea $A$ are $6$ elemente | **3p** |
| **5.** | $M$ mijlocul lui $BC\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ | **2p** |
| | $M$ mijlocul lui $NP\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}\right)$, deci $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ | **3p** |
| **6.** | $2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x+\sin x)=0$ | **2p** |
| | Cum $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(0,1,2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0,1,2))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=0+0+4-2-0-0=2$ | **3p** |
| **b)** | $\det(A(a,b,c))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&ac-bc&ab-bc\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&-c(b-a)&-b(c-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale $a$, $b$ și $c$ | **3p** |
| **c)** | $\det(A(m,n,p))=(n-m)(p-m)(p-n)$ și, cum $m$, $n$ și $p$ sunt numere naturale, cu $m<n<p$, obținem $p-m>p-n>0$ și $p-m>n-m>0$ | **3p** |
| | Cum $\det(A(m,n,p))$ este număr prim, obținem $p-n=n-m=1$, deci numerele $m$, $n$ și $p$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $f=X^4+X^3+\hat{2}X+\hat{2}$, deci $f(\hat{0})=\hat{2}$ și $f(\hat{2})=\hat{0}$ | **3p** |
| | $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}+\hat{0}=\hat{2}$ | **2p** |
| **b)** | $f$ este divizibil cu $X+\hat{2} \Leftrightarrow f(\hat{1})=\hat{0}$, deci $a+b=\hat{0}$ | **3p** |
| | Cum $a,b\in\mathbb{Z}_3$, perechile sunt $(\hat{0},\hat{0})$, $(\hat{1},\hat{2})$ și $(\hat{2},\hat{1})$ | **2p** |
| **c)** | $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=\hat{2}$, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$ | **3p** |
| | Dacă $f(\hat{0})$, $f(\hat{1})$ și $f(\hat{2})$ ar fi distincte două câte două, atunci $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=$ $=\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$, ceea ce este fals, deci pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\dfrac{(e^x+xe^x)(e^x+2)-xe^{2x}}{(e^x+2)^2}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{e^{2x}+2e^x+2xe^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{e^x(e^x+2x+2)}{(e^x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+2}=1$ | **2p** |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x-x(e^x+2)}{e^x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{e^x+2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ | **3p** |
| **c)** | $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x+2x+2$ este strict crescătoare și, cum $g$ este continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, există un unic număr real $c$, astfel încât $g(c)=0$ | **3p** |
| | $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,c)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,c)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(c,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(c,+\infty)$ și, cum $f$ este continuă, obținem că $f$ are un unic punct de extrem | **2p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=\int_0^1 2(x+3)\,dx=(x^2+6x)\Big\|_0^1=$ | **3p** |
| | $=1+6-0-0=7$ | **2p** |
| **b)** | $\int_0^1\left(f^2(x)-4\right)dx=\int_0^1\dfrac{4(x+3)^2-4(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5}dx=4\int_0^1\dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}dx=$ | **2p** |
| | $=4\int_0^1\dfrac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}dx=4\ln(x^2+4x+5)\Big\|_0^1=4\ln 2$ | **3p** |
| **c)** | Cum $f^2(x)-4=\dfrac{4(2x+4)}{x^2+4x+5}\geq 0$ și $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, obținem $f(x)\geq 2$, deci $f^n(x)\geq 2^n$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ și orice număr natural nenul $n$ | **2p** |
| | Cum $0\leq a<b$, $I_n=\int_a^b f^n(x)dx\geq 2^n(b-a)$, pentru orice număr natural nenul $n$ și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=+\infty$ | **3p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Arătați că numărul $N=\log_2 6-2\log_2 3+\log_2 24$ este natural. |
| **5p** | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$. Arătați că dreapta de ecuație $y=2$ intersectează graficul funcției $f$ în două puncte distincte. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3x-1}$. |
| **5p** | **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi $A$, știind că mulțimea $A$ are exact 15 submulțimi cu două elemente. |
| **5p** | **5.** Se consideră triunghiul $ABC$ și punctele $M$, $N$ și $P$ mijloacele segmentelor $BC$, $BM$, respectiv $CM$. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. |
| **5p** | **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+2\sin^2 x=0$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{pmatrix}$, unde $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A(0,1,2))=2$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că $\det(A(a,b,c))=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale $a$, $b$ și $c$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că, dacă $m$, $n$ și $p$ sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele $m$, $n$ și $p$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. |
| | **2.** În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+\hat{2}X+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$. |
| **5p** | **a)** Pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, arătați că $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}$. |
| **5p** | **b)** Determinați perechile $(a,b)$, cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul $f$ este divizibil cu $X+\hat{2}$. |
| **5p** | **c)** Arătați că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+2}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+2x+2\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că funcția $f$ are un unic punct de extrem. |

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 \left(f^2(x)-4\right)dx=4\ln 2$.

**5p** **c)** Se consideră numerele reale $a$ și $b$, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $b_4^2 = b_2 \cdot b_6 \Rightarrow 4^2 = 2b_6$ | **3p** |
| | $b_6 = 8$ | **2p** |
| **2.** | $x_V = 1$, $y_V = m-1$, unde $V(x_V, y_V)$ este vârful parabolei asociate funcției $f$ | **2p** |
| | $y_V = 3x_V \Leftrightarrow m-1=3$, deci $m=4$ | **3p** |
| **3.** | $2^{2x} - 2\cdot 2^x - 3 = 0 \Rightarrow (2^x+1)(2^x-3)=0$ | **3p** |
| | Cum $2^x > 0$, obținem $x = \log_2 3$ | **2p** |
| **4.** | Numerele naturale de trei cifre care au exact două cifre egale sunt de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ sau $\overline{baa}$, unde $a$ și $b$ sunt cifre distincte | **2p** |
| | Sunt $9\cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{aab}$, $9\cdot 9=81$ de numere de forma $\overline{aba}$ și $9\cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{baa}$ cu $a$ și $b$ cifre distincte, deci numărul cerut este $81\cdot 3 = 243$ | **3p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{MB'}$, unde $M$ este mijlocul segmentelor $AB$, respectiv $A'B'$ | **2p** |
| | $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA'} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ | **3p** |
| **6.** | $2R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$ | **2p** |
| | $BC = 2R\sin A,\ AC = 2R\sin B$ și $AB = 2R\sin C \Rightarrow AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $X(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(0,1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ | **2p** |
| | $= 0+2+0-0-0-1 = 1$ | **3p** |
| **b)** | $\det(X(a,b)) = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b-a$, pentru orice numere reale $a$ și $b$ | **3p** |
| | Pentru $a \neq b$, $\det(X(a,b)) \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică | **2p** |
| **c)** | Dacă $a \neq b$, sistemul are soluția unică $(0,2,-1)$ și $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 2^2 - (-1)^2 - 2a\cdot 0 = 3$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | Dacă $a = b$, sistemul are soluțiile $(\alpha,\ 2+a\alpha,\ -1-a\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, deci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = (2+a\alpha)^2 - (-1-a\alpha)^2 - 2a\alpha = 4 + 4a\alpha + a^2\alpha^2 - 1 - 2a\alpha - a^2\alpha^2 - 2a\alpha = 3$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| **2.a)** | $5 * 10 = (5-1)^{\log_3(10-1)} + 1 = 4^{\log_3 9} + 1 =$ | **3p** |
| | $= 4^2 + 1 = 17$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $x*e=x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)}+1=x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)}=x-1$, pentru orice $x\in M$, de unde obținem $\log_3(e-1)=1$, deci $e=4\in M$ | **3p** |
| | Cum $4*x=3^{\log_3(x-1)}+1=(x-1)+1=x$, pentru orice $x\in M$, obținem că $e=4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **2p** |
| **c)** | $x*x=(x-1)^{\log_3(x-1)}+1$, $x*x*x=(x-1)^{\log_3^2(x-1)}+1$, pentru orice $x\in M$ | **2p** |
| | Cum $x\in M$, $(x-1)^{\log_3(x-1)}=(x-1)^{\log_3^2(x-1)} \Rightarrow \log_3(x-1)=\log_3^2(x-1)$, deci $\log_3(x-1)=0$ sau $\log_3(x-1)=1$ și, cum $x>2$, obținem $x=4$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}+4x^3}{2\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{2\left(e^{2x}+2x^3\right)}{2\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | Panta tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$, este egală cu $f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | **2p** |
| | Cum dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$ are panta egală cu $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, obținem că tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$ este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$ | **3p** |
| **c)** | $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{2x}+2x^3 \Rightarrow g'(x)=2e^{2x}+6x^2>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția $g$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ și $g$ este continuă, există un unic număr real $c$ cu $g(c)=0$ | **2p** |
| | $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,c)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,c]$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(c,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[c,+\infty)$, deci $f$ are un unic punct de extrem | **3p** |
| **2.a)** | $\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$ | **3p** |
| | $=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\dfrac{\pi}{4}$ | **2p** |
| **b)** | $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2+3-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}>0$, pentru orice număr real $x$, deci funcția $F$ este strict crescătoare | **2p** |
| **c)** | $\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx=\int_a^b F^2(x)F'(x)dx=\frac{1}{3}F^3(x)\Big\vert_a^b=\frac{1}{3}\left(F^3(b)-F^3(a)\right)$ | **3p** |
| | Cum $F$ este strict crescătoare, obținem că $F(a)<F(b)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$, cu $a<b$, deci $\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$ | **2p** |

**Examenul naţional de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_2=2$ și $b_4=4$. Determinați $b_6$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde $m$ este număr real. Determinați numărul real $m$ pentru care vârful parabolei asociate funcției $f$ este situat pe dreapta $y=3x$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-2^{x+1}-3=0$.

**5p** **4.** Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.

**5p** **5.** Segmentele $AB$ și $A'B'$ au același mijloc. Demonstrați că $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BA'}=\vec{0}$.

**5p** **6.** Demonstrați că, în orice triunghi $ABC$, are loc relația $AB+AC+BC=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$, unde $R$ este raza cercului circumscris triunghiului.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z=a \\ bx+(b+1)y+(b+2)z=b \\ y+z=1 \end{cases}$ și matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a$ și $b$ sunt numere reale.

**5p** **a)** Arătați că $\det(X(0,1))=1$.

**5p** **b)** Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte $a$ și $b$, sistemul de ecuații are soluție unică.

**5p** **c)** Demonstrați că, dacă $(x_0,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2-z_0^2-2ax_0=3$, pentru orice număr real $a$.

**2.** Pe mulţimea $M=(2,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=(x-1)^{\log_3(y-1)}+1$.

**5p** **a)** Arătați că $5*10=17$.

**5p** **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

**5p** **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x=x*x$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^4+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$, este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ are un unic punct de extrem.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+3}\right)$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{\pi}{4}$.

**5p** **b)** Demonstrați că orice primitivă $F$ a funcției $f$ este strict crescătoare.

**5p** **c)** Arătați că, pentru orice numere reale $a$ și $b$, cu $a<b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)\,dx>0$, pentru orice primitivă $F$ a funcției $f$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 7**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)=2^2-(3i)^2-9+3i=4+3i$ | **3p** |
| | $\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+3^2}=5$ | **2p** |
| **2.** | $f(2)=0$ | **2p** |
| | $(g\circ f)(2)=g(f(2))=5\cdot 0+20=20$ | **3p** |
| **3.** | $4^{x-5}=4^{-2}\Leftrightarrow x-5=-2$ | **3p** |
| | $x=3$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile | **2p** |
| | Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 8 este $\{118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222\}$, deci sunt 10 cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{900}=\dfrac{1}{90}$ | **1p** |
| **5.** | $ABCD$ este paralelogram, deci $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ | **2p** |
| | $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(\sphericalangle ABC)=76\Rightarrow AC=2\sqrt{19}\Rightarrow\lvert\overrightarrow{AM}\rvert=AM=\sqrt{19}$ | **3p** |
| **6.** | $BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ este dreptunghic în $A\Rightarrow R=\dfrac{BC}{2}=10$ | **2p** |
| | $P_{\Delta ABC}=48$ și $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96\Rightarrow r=\dfrac{96}{24}=4$, de unde obținem $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(4)=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(4))=\begin{vmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=4+21+(-8)-(-14)-2-24=5$ | **3p** |
| **b)** | $\det(A(a))=5a-15$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(a))=0$, deci $a=3$ | **3p** |
| **c)** | Pentru $a=3$ soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(1+5\alpha,-1-13\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$ | **3p** |
| | $z_0^2=x_0+y_0\Leftrightarrow\alpha^2+8\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-8$ sau $\alpha=0$, deci $(x_0,y_0,z_0)=(-39,103,-8)$ sau $(x_0,y_0,z_0)=(1,-1,0)$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $4*3=\sqrt{4^{\log_3 3}}=$<br>$=\sqrt{4}=2$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $x*9=\sqrt{x^{\log_3 9}}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$ | **2p** |
| | $9*x=\sqrt{9^{\log_3 x}}=\sqrt{3^{2\log_3 x}}=\sqrt{\left(3^{\log_3 x}\right)^2}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **3p** |
| **c)** | $x*x=e\Rightarrow\sqrt{x^{\log_3 x}}=9\Rightarrow x^{\log_3 x}=81\Rightarrow\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81$, deci $\log_3^2 x=4$ | **3p** |
| | $\log_3 x=-2$ sau $\log_3 x=2\Rightarrow x=\dfrac{1}{9}$, care nu convine; $x=9$, care convine | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=2x\cdot\left(x^2-4\right)+\left(x^2-9\right)\cdot 2x=$<br>$=2x\left(x^2-4+x^2-9\right)=2x\left(2x^2-13\right)$, $x\in\mathbb{R}$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\dfrac{1}{(x+3)\left(x^2-4\right)}\right)=$ | **2p** |
| | $=1\cdot\dfrac{1}{(3+3)\left(3^2-4\right)}=\dfrac{1}{30}$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{13}{2}}$, $x=0$ sau $x=\sqrt{\dfrac{13}{2}}$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{13}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\dfrac{13}{2}}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{13}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{13}{2}},+\infty\right)$ | **3p** |
| | $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f\left(-\sqrt{\dfrac{13}{2}}\right)=f\left(\sqrt{\dfrac{13}{2}}\right)=-\dfrac{13}{4}$, $f(0)=39$, $f$ continuă pe $\mathbb{R}$, $f$ strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{13}{2}}\right)$ și pe $\left(0,\sqrt{\dfrac{13}{2}}\right)$ și $f$ strict crescătoare pe $\left(-\sqrt{\dfrac{13}{2}},0\right)$ și pe $\left(\sqrt{\dfrac{13}{2}},+\infty\right)$, deci ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale $\Leftrightarrow m\in\left(-\dfrac{13}{4},39\right)$ | **2p** |
| **2.a)** | $\displaystyle\int_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int_1^2 2x\,dx=x^2\Big\vert_1^2=$<br>$=4-1=3$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}f(x)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=4\cdot\frac{\pi}{3}-x\Big\vert_0^{\sqrt{3}}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$, de unde obținem $a=\dfrac{3}{4}$ | **2p** |
| **c)** | $\displaystyle\int_{-1}^1 x f(x)dx=2\int_{-1}^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=2\int_1^{-1}(-x)^2\operatorname{arctg}(-x)(-1)dx=-2\int_{-1}^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=-\int_{-1}^1 x f(x)dx$ | **3p** |
| | $\displaystyle 2\int_{-1}^1 x f(x)dx=0$, deci $\displaystyle\int_{-1}^1 x f(x)dx=0$ | **2p** |

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 7**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)$.

**5p** **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=5x+20$. Calculați $(g\circ f)(2)$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5}=\frac{1}{16}$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu $8$.

**5p** **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=4$, $BC=6$ și măsura unghiului $ABC$ de $120°$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul $M$ este mijlocul segmentului $BD$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde $r$ este raza cercului înscris în triunghiul $ABC$ și $R$ este raza cercului circumscris triunghiului $ABC$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

**5p** **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile $(x_0,y_0,z_0)$ ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

**2.** Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

**5p** **a)** Arătați că $4*3=2$.

**5p** **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.

**5p** **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „*”.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+3$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=2x(2x^2-13)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\frac{1}{30}$.

**5p** **c)** Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale .

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=3$.

| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Determinați numărul real nenul $a$ pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x\, f(x)\,dx = 0$. |