Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+2i)^2=-3+4i$	**3p**
	Partea reală este egală cu -3	**2p**
2.	$x_1+x_2=3$	**2p**
	$x_1x_2=a$	**2p**
	$a=2$	**1p**
3.	$x=g(5)\Rightarrow f(x)=5$	**2p**
	$2^x+3=5$	**2p**
	$x=1$	**1p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul cazurilor posibile este $2^5=32$	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3=10$, adică 10 cazuri favorabile	**1p**
	$p=\dfrac{5}{16}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}=6\vec{i}+9\vec{j}$ și $\overrightarrow{AM}=(x_M-1)\vec{i}+(y_M-3)\vec{j}$	**2p**
	$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-1=2\\y_M-3=3\end{cases}$	**2p**
	$M(3,6)$	**1p**
6.	$\sin x+2\cos x=3\cos x$	**2p**
	$\sin x=\cos x$	**1p**
	$x=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(0,1,-1)=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&-2\\0&3&3\end{vmatrix}$	**2p**
	$D(0,1,-1)=12$	**3p**
b)	$A(0,1,x)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2x\\0&3&3x^2\end{pmatrix}$	**1p**
	Există minorul $d=\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2\neq0\Rightarrow\text{rang }A(0,1,x)\geq2$	**1p**
	$\text{rang }A(0,1,x)=2\Leftrightarrow D(0,1,x)=0$	**1p**
	$D(0,1,x)=6x(x-1)\Rightarrow x=0$ sau $x=1$	**2p**

c)	$D(a,b,c)=6\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$	**1p**
	$D(a,b,c)=6(b-a)(c-a)(c-b)$	**2p**
	$D(a,b,c)=0\Rightarrow a=b$ sau $b=c$ sau $c=a$, deci triunghiul este isoscel	**2p**
2.a)	$f(\hat{1})=\hat{0}$	**2p**
	$f(\hat{3})=\hat{0}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	P are rădăcinile $\hat{1}$, $\hat{3}$ şi $\hat{4}$	**3p**
	$P=(X-\hat{1})(X-\hat{3})(X-\hat{4})=(X+\hat{4})(X+\hat{2})(X+\hat{1})$	**2p**
c)	$f(\hat{1})=f(\hat{3})$, deci f nu este injectivă	**2p**
	$\operatorname{Im} f$ nu poate avea 5 elemente, deci f nu este nici surjectivă	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3-9x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$	**4p**
	Finalizare	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$	**2p**
	Din monotonie, valoarea maximă a funcției este $f\left(\frac{1}{3}\right)=2\sqrt{7}$	**2p**
	Imaginea funcției este $\left(-1,2\sqrt{7}\,\right]$	**1p**
2.a)	F este derivabilă şi $F'(x)=\ln x$, pentru orice $x>0$	**3p**
	$F'=f$	**2p**
b)	Aria este egală cu $\int\limits_1^e \lvert\ln x\rvert\,dx=$	**2p**
	$=F(x)\Big\rvert_1^e=1$	**3p**
c)	$(p+1)\int\limits_1^x f^p(t)dt=\int\limits_1^x t\cdot(p+1)\cdot f^p(t)\cdot\frac{1}{t}dt=$	**1p**
	$=\int\limits_1^x t\cdot\left(\ln^{p+1}t\right)'dt=t\cdot\ln^{p+1}t\Big\rvert_1^x-\int\limits_1^x\ln^{p+1}tdt=x\ln^{p+1}x-\int\limits_1^x\ln^{p+1}tdt$	**3p**
	Finalizare	**1p**

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

5p **2.** Se notează cu x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2-3x+a=0$, unde a este un număr real. Determinați a pentru care $x_1+x_2+x_1x_2=5$.

5p **3.** Se notează cu g inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(4,+\infty)$, $f(x)=2^x+3$. Determinați $g(5)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(7,12)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}=3$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se notează cu $D(a,b,c)$ determinatul matricei $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(0,1,-1)$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care matricea $A(0,1,x)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $D(a,b,c)=0$, atunci triunghiul este isoscel.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ și funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f(x)=x^3+\hat{2}x^2+\hat{4}x+\hat{3}$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{1})+f(\hat{3})$.

5p **b)** Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $P=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **c)** Arătați că funcția f nu este surjectivă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)\sqrt{x^2+3}=\frac{3-9x}{x^2+3}$, pentru orice număr real *x*.

5p **b)** Determinați asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Determinați imaginea funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x-x$ este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Arătați că $(p+1)\int_1^x f^p(t)dt+\int_1^x f^{p+1}(t)dt=xf^{p+1}(x)$, pentru orice $x\geq 1$ și orice $p>0$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2 = 2i$	**3p**
	$\lvert 2i \rvert = 2$	**2p**
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$	**1p**
	$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -1$	**2p**
	$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 0$	**2p**
3.	$2^{x+1} \le 2^2$	**1p**
	$x+1 \le 2$	**2p**
	$S = (-\infty, 1]$	**2p**
4.	$p = \frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ şi $\{1,3,5\} \Rightarrow$ 4 cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3 = 10 \Rightarrow$ 10 cazuri posibile	**1p**
	$p = \frac{2}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \Leftrightarrow a + 2 = 3$	**4p**
	$a = 1$	**1p**
6.	$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$	**2p**
	$\cos A = -\frac{1}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det A = 3m - 6$	**3p**
b)	Sistemul are o soluție unică dacă şi numai dacă $\det A \ne 0$	**2p**
	Finalizare: $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	**3p**

c)	$\det A = 0$ şi $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, deci matricea sistemului are rangul doi	1p
	$z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3\alpha \\ x + 2y = -3\alpha \end{cases} \Rightarrow x = -\alpha,\ y = -\alpha$	2p
	$x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2} = 3 \Rightarrow (-\alpha)^2 + (-\alpha)^2 + \alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha \in \{-1,1\}$	1p
	Soluția este $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,-1)$	1p
2.a)	$X(p) \cdot X(q) = X(p+q+pq)$	3p
	$p,q \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow (p+1)(q+1) \neq 0 \Rightarrow p+q+pq \neq -1$, deci $X(p+q+pq) \in G$	2p
b)	Pentru orice $X(p) \in G$, există $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ astfel încât $X(p) \cdot X\left(-\frac{p}{1+p}\right) = X(0)$	3p
	$-\frac{p}{1+p} \neq -1 \Rightarrow X\left(-\frac{p}{1+p}\right) \in G$ şi $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ este inversul lui $X(p)$	2p
c)	$(X(p))^3 = X(7)$	1p
	$(X(p))^3 = X((p+1)^3 - 1)$	3p
	$(p+1)^3 = 8$, deci $p = 1$ şi soluția este $X(1)$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 12$	3p
	$f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [2,+\infty)$, deci *f* este crescătoare pe $[2,+\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	2p
	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2-12} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$	3p
c)	Şirul lui Rolle pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = f(x) - a$ este $-\infty, 16-a, -16-a, +\infty$	3p
	Ecuația are trei soluții reale distincte dacă şi numai dacă $a \in (-16,16)$	2p
2.a)	$F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$	2p
	$f(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1,+\infty)$	1p
	F este strict crescătoare	2p
b)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x+2} =$	3p
	$= \ln(x+1)\Big\vert_0^1 + \ln(x+2)\Big\vert_0^1 = \ln 3$	2p
c)	$\int_x^{2x} f(t)\,dt = \left(2t - \ln(t+2)\right)\Big\vert_x^{2x} = 2x - \ln\frac{2x+2}{x+2}$, pentru $x > 0$	3p
	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x - \ln\frac{2x+2}{x+2}}{x} = 2$	2p

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1}\le 4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\ x+2y+3z=0\\ x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA \mid p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p),\ X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $\left(X(p)\right)^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}\,dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_x^{2x}f(t)\,dt}{x}$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$	**3p**
	Finalizare	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=-4$	**3p**
	Distanța este egală cu 3	**2p**
3.	Notăm $3^x=t$ şi obținem $t+3t=4$	**3p**
	$t=1 \Leftrightarrow x=0$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{20}^k\cdot x^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{20}^k\cdot x^{20-k-\frac{k}{2}}$	**2p**
	$20-k-\frac{k}{2}=14 \Leftrightarrow k=4$	**2p**
	Rangul termenului este 5	**1p**
5.	$m_d=-\frac{3}{2}$	**2p**
	Ecuația paralelei este $y-y_A=-\frac{3}{2}(x-x_A)$ adică $y=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{1}{2}$	**3p**
	$m(\sphericalangle C)=30^\circ$, deoarece $m(\sphericalangle A)>m(\sphericalangle C)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-1 & a & 2a+4\\ a+2 & a & a+1\\ a+1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{vmatrix}3a+3 & a & 2a+4\\ 3a+3 & a & a+1\\ 3a+3 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 1 & a & a+1\\ 1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 0 & 0 & -a-3\\ 0 & a-1 & -2a-1\end{vmatrix}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A\neq 0$	**2p**
	$\det A=0 \Leftrightarrow a\in\{-1,1,-3\}$	**2p**
	$a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1,-3\}$	**1p**
c)	$a=-2\Rightarrow\begin{cases}-x-2y=1\\ -2y-z=1\\ -x-5y+3z=2\end{cases}$	**1p**

	$x=-\frac{1}{9},\ y=-\frac{4}{9},\ z=-\frac{1}{9}$	4p
2.a)	$\hat{0}^5=\hat{0},\ \hat{1}^5=\hat{1},\ \hat{2}^5=\hat{2},\ \hat{3}^5=\hat{3},\ \hat{4}^5=\hat{4}$	5p
b)	$f=X^8+X^4+\hat{3}X^4+\hat{3}=X^4\left(X^4+\hat{1}\right)+\hat{3}\left(X^4+\hat{1}\right)$ $f=\left(X^4+\hat{1}\right)\left(X^4+\hat{3}\right)$	2p 3p
c)	$f\left(\hat{0}\right)=\hat{3}$ $a\neq\hat{0}\Rightarrow a^4=\hat{1}$ $f(a)=\hat{1}+\hat{4}+\hat{3}=\hat{3}$ pentru orice $a\neq\hat{0}$ Finalizare	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=2$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$ $y=2x$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 2p 1p
c)	f este continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow f$ este surjectivă, deci ecuația are soluție $f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă, deci soluția este unică	2p 3p
2.a)	$I_1=\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\|_0^1=$ $=\frac{e-1}{2}$	3p 2p
b)	$2I_p=\int_0^1 x^{p-1}\left(2xe^{x^2}\right)dx=\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'x^{p-1}dx=e^{x^2}x^{p-1}\Big\|_0^1-(p-1)\int_0^1 e^{x^2}x^{p-2}\,dx$ $2I_p=e-(p-1)I_{p-2}\ \Rightarrow\ 2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$	3p 2p
c)	Considerăm funcția continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{x^2}$, șirul de diviziuni $\Delta_n=\left(\frac{k}{n}\right)_{k=\overline{0,n}}$ cu $\lVert\Delta_n\rVert\to 0$ și punctele intermediare $\frac{k}{n}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{e-1}{2}$	1p 2p 2p

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=2$.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+4$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=4$.

5p **4.** Determinați rangul termenului care conține x^{14} în dezvoltarea binomului $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x>0$.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ şi este paralelă cu dreapta d de ecuație $3x+2y-1=0$.

5p **6.** Determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC, știind că $BC=2$, $AB=\sqrt{2}$ și măsura unghiului BAC este egală cu $45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} -x+ay+(2a+4)z=1 \\ (a+2)x+ay+(a+1)z=1 \\ (a+1)x+(2a-1)y+3z=2 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3+9a^2-3a-9$.
5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
5p **c)** Pentru $a=-2$, rezolvați sistemul.

2. Se consideră polinomul $f=X^8+\hat{4}X^4+\hat{3}$, $f\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Arătați că $a^5=a$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_5$.
5p **b)** Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.
5p **c)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.
5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m>0$, ecuația $f(x)=m$ are o soluție unică în $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul p, se consideră numărul $I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}\,dx$.

5p **a)** Calculați I_1.
5p **b)** Arătați că $2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$, pentru orice $p\geq 3$.
5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)$.

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-24 \le x+1 \le 24$ $-25 \le x \le 23$ Card $A = 49$	**2p** **1p** **2p**
2.	$2x-1 = 2x^2 - 3x + 1$ $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}$ Punctele de intersecție sunt $(2,3)$ și $\left(\frac{1}{2},0\right)$	**1p** **2p** **2p**
3.	$1+7x = 1+3x+3x^2+x^3$ $x(x^2+3x-4)=0$ $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -4$	**1p** **1p** **3p**
4.	Alegem 2 numere impare din cele 5 în $C_5^2 = 10$ moduri Alegem un număr par din cele 5 în 5 moduri Sunt 50 de submulțimi	**2p** **1p** **2p**
5.	Mijlocul segmentului are coordonatele (2,1) Dreapta *AB* are panta 3, deci mediatoarea are panta $-\frac{1}{3}$ Ecuația mediatoarei este $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$	**1p** **2p** **2p**
6.	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{3}$ $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = -(m^3-1)^2$ Finalizare: $m = 1$	**3p** **2p**
b)	Dacă sistemul are soluții nenule, atunci $\Delta = 0$ În acest caz, sistemul se reduce la $x+y+z=0$ Această ecuație nu are soluții cu toate componentele strict pozitive	**2p** **1p** **2p**
c)	Pentru $m=1$, rangul este 1 Pentru $m \ne 1$, rangul este 3	**2p** **3p**

2.a)	$(x*y)*z=\frac{1}{4}(x-1)(y-1)(z-1)+1$ şi $x*(y*z)=\frac{1}{4}(x-1)(y-1)(z-1)+1$	**4p**
	Finalizare: legea este asociativă	**1p**
b)	Trebuie să arătăm că există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$x*e=x\Leftrightarrow x+e-xe+1=2x\Leftrightarrow(e+1)(x-1)=0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci $e=-1$	**3p**
	Verificarea relației $(-1)*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$	**1p**
c)	$x*x*x=\frac{x^3-3x^2+3x+3}{4}$	**2p**
	Ecuația $x*x*x=3$ este echivalentă cu $(x-3)\underbrace{\left(x^2+3\right)}_{>0}=0\Rightarrow x=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f(-x)=-x^3+3x+2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+2}{-x^3+3x+2}=-1$	**3p**
b)	$f'(x)=3x^2-3$	**2p**
	$f'(x)\le 0,\ \forall x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]$	**3p**
c)	$f(1)=0,\ f(-1)=4,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$	**2p**
	Din studiul variației funcției deducem că ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte dacă şi numai dacă $m\in(0,4)$	**3p**
2.a)	$I_2=\int_0^1 1dx-2\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 x^4dx=$	**1p**
	$=\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{8}{15}$	**1p**
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx\ge 0$ pentru orice n, deci şirul este descrescător	**3p**
	$I_n\ge 0$, deci şirul este mărginit inferior	**1p**
	Finalizare	**1p**
c)	$I_n=x(1-x^2)^n\Big\vert_0^1-n\int_0^1 x(1-x^2)^{n-1}\cdot(-2x)dx=$	**2p**
	$=-2n\int_0^1\left[(1-x^2)-1\right](1-x^2)^{n-1}dx=$	**1p**
	$=-2nI_n+2nI_{n-1}\Rightarrow(2n+1)I_n=2nI_{n-1},\forall n\ge 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x+1|\le 24\}$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a dreptei $y=2x-1$ cu parabola $y=2x^2-3x+1$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,\ldots,10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii *A*, submulțimi care conțin exact 2 numere impare.

5p **5.** Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$, unde $A(1,-2)$ şi $B(3,4)$.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos 2x=\frac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+my+m^2z=0 \\ mx+m^2y+z=0 \\ m^2x+y+mz=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați valorile lui *m* pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

5p **b)** Arătați că, pentru nicio valoare a lui m, sistemul nu are o soluție (x_0,y_0,z_0) cu x_0,y_0,z_0 numere reale strict pozitive.

5p **c)** Arătați că rangul matricei sistemului este diferit de 2, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1)$.

5p **a)** Verificați dacă legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Rezolvați ecuația $x*x*x=3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția *f* este descrescătoare pe intervalul $[-1,1]$.

5p **c)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$.

5p **a)** Calculați I_2.

5p **b)** Demonstrați că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\ge 2$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x^2+mx+4=0$ are soluția $x=2 \Rightarrow m=-4$	**3p**
	Pentru $m=-4$ cele două mulțimi sunt egale	**2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$\Delta=1$	**1p**
	$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}$	**2p**
3.	Condiție: $x>0$	**2p**
	$3^{\log_3 x}<3^0 \Leftrightarrow x<1$	**2p**
	$x\in(0,1)$	**1p**
4.	$p=\frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	$\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,3,5,7,9\}$ sunt 25 de numere $\Rightarrow$ 25 de cazuri favorabile	**2p**
	$\overline{ab}$ cu $a\in\{1,2,3,...,9\}$ și $b\in\{0,1,2,3,...,9\}$ sunt 90 de numere $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{5}{18}$	**1p**
5.	$\frac{3}{a}=\frac{a}{2a-3}$	**2p**
	$a^2-6a+9=0$	**2p**
	$a=3$	**1p**
6.	$S_{ABC}=12$	**2p**
	$R=\frac{abc}{4S}$	**2p**
	$R=\frac{25}{8}$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(A(\pi))=1$	**2p**

b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & 0 & i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)\\ 0 & 1 & 0\\ i(\cos x\sin y+\sin x\cos y) & 0 & \cos x\cos y-\sin x\sin y\end{pmatrix}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$	**3p**
	$A(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & 0 & i\sin(x+y)\\ 0 & 1 & 0\\ i\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$	**1p**
	Finalizare	**1p**
c)	$A^{2012}(x)=A(2012x)$	**2p**
	$A(2012x)=I_3\Leftrightarrow\cos(2012x)=1$ și $\sin(2012x)=0$	**1p**
	$x=\dfrac{k\pi}{1006}, k\in\mathbb{Z}$	**2p**
2.a)	$x\circ\dfrac{1}{2}=\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}}{2x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$\dfrac{1}{2}\circ x=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$x\circ x'=\dfrac{xx'}{2xx'-x-x'+1}=\dfrac{x'x}{2x'x-x'-x+1}=x'\circ x$, pentru orice $x,x'\in G$	**1p**
	$x\circ x'=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x'=1-x$	**3p**
	$x'\in(0,1)$	**1p**
c)	*f* este bijectivă	**2p**
	$f(x\circ y)=\dfrac{1}{x\circ y}-1=\dfrac{(x-1)(y-1)}{xy}$, pentru orice $x,y\in G$	**2p**
	$f(x)f(y)=\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{y}-1\right)=\dfrac{(x-1)(y-1)}{xy}$, pentru orice $x,y\in G$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice *x* real, deci *f* este convexă	**2p**
c)	$g(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}$, pentru orice $x>0$	**2p**
	$x>0\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow e^{\sqrt{x}}>e^{-\sqrt{x}}$	**2p**
	$g'(x)>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**1p**

2.a)	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$	**1p**
	$J_1 = -\cos t \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}$	**2p**
	$J_1 = 1$	**2p**
b)	$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$	**1p**
	$I_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\Big\vert_0^1$	**3p**
	$I_1 = \frac{1}{3}$	**1p**
c)	$J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^2 x dx$	**2p**
	Cu schimbarea de variabilă $\sin x = t$ obținem $J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^1 t^{2n} \cdot \sqrt{1-t^2}\, dt = I_{2n}$	**3p**

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real m știind că mulțimile $A=\{2\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+4=0\right\}$ sunt egale.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3^{\log_3 x}<1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați $\det\left(A(\pi)\right)$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(A(x)\right)^{2012}=I_3$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ și $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Calculați J_1.

5p **b)** Calculați I_1.

5p **c)** Demonstrați că $J_{2n}-J_{2n+2}=I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.