Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=3 \Rightarrow b_3=9$	**3p**
	$b_1+b_2+b_3=1+3+9=13$	**2p**
2.	$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=7$	**2p**
	$-2m+21=1$, deci $m=10$	**3p**
3.	$(x-2)(x+2)=2^5 \Rightarrow x^2-36=0$	**3p**
	$x=-6$, care nu convine, $x=6$, care convine	**2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**3p**
5.	Punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$x_M=4$, $y_M=4$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}=$	**3p**
	$=\dfrac{12\cdot 3}{4}=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+(-1)-0-0-0=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&-a&-1\\1&1&a\end{vmatrix}=-a^3+a=$	**3p**
	$=a\left(1-a^2\right)=a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Pentru $a=0$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	Pentru orice α număr întreg, numerele $x_0=1+\alpha$, $y_0=1-\alpha$ și $z_0=\alpha$ sunt întregi	**2p**
2.a)	$x*2019=(x-2019)(2019-2019)+2019=$	**3p**
	$=0+2019=2019$, pentru orice număr real x	**2p**

b)	$x*x=(x-2019)^2+2019$, $(x*x)*x=(x-2019)^3+2019$	**2p**
	$(x-2019)^3+2019=x \Leftrightarrow (x-2019)\left((x-2019)^2-1\right)=0$, deci $x=2018$ sau $x=2019$ sau $x=2020$	**3p**
c)	$(m-2019)(n-2019)+2019=2020 \Leftrightarrow (m-2019)(n-2019)=1$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, obținem $m=2018$, $n=2018$ sau $m=2020$, $n=2020$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{x}}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$	**1p**
	$x\in(0,4]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $(0,4]$ și $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
	Cum $f(4)=2-\ln 4$, obținem $f(x)\ge 2-\ln 4$, deci $\sqrt{x}-\ln\frac{x}{4}\ge 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+9)f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2}{x^2+9}$, $F''(x)=f'(x)=\frac{18x}{(x^2+9)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, unde funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f	**2p**
	$F''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$x\in(-\infty,0)\Rightarrow F''(x)<0$ și $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F''(x)>0$, deci F are un singur punct de inflexiune	**2p**
c)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^{2n}\ge 0$ și, cum $0\le f(x)\le 1$, obținem $0\le x^{2n}f(x)\le x^{2n}$	**2p**
	$0\le I_n=\int_0^1 x^{2n}f(x)dx\le\int_0^1 x^{2n}dx=\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\|_0^1=\frac{1}{2n+1}$ și $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$, deci $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=3$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+mx+7=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $2x_1+2x_2+3x_1x_2=1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-2)+\log_2(x+2)=5$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,6)$ și $B(6,2)$. Determinaţi coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3\sqrt{3}$, $AC=4$ și $A=\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x-ay-z=1 \\ x+y+az=2 \end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(a))=a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții de forma (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x-2019)(y-2019)+2019$.
5p	**a)** Arătați că $x*2019=2019$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Determinați numerele reale x, știind că $(x*x)*x=x$.
5p	**c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $m*n=2020$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\sqrt{x}-\ln\frac{x}{4}\geq 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(x^2+9\right) f(x)\,dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=3^2-\left(i\sqrt{2}\right)^2=$ $=9-2i^2=11\in\mathbb{Z}$	**2p** **3p**
2.	$f(a)=3\Rightarrow 2a+a=3$ $a=1$	**3p** **2p**
3.	$2019^x+2019^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(2019^x-1\right)^2=0$ $2019^x=1$, deci $x=0$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de două cifre care au cifra unităților impară are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=1$ Ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, deci $y=x-6$	**2p** **3p**
6.	$\sin(a-b)\sin(a+b)=\sin^2 a\cdot\cos^2 b-\sin^2 b\cdot\cos^2 a=$ $=\sin^2 a\left(1-\sin^2 b\right)-\sin^2 b\left(1-\sin^2 a\right)=\sin^2 a-\sin^2 b=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}=$ $=2a^2+0+0-2a^2-0-0=0$, pentru orice număr real a	**2p** **3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix} 2ab & 0 & -2ab \\ 0 & 4 & 0 \\ -2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}=$ $=2\begin{pmatrix} ab & 0 & -ab \\ 0 & 2 & 0 \\ -ab & 0 & ab \end{pmatrix}=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b	**3p** **2p**
c)	$B=2^{13}A\left(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{15}16\right)=2^{13}A\left(\log_2 16\right)=$ $=2^{13}A(4)$, care are toate elementele numere întregi	**3p** **2p**

2.a)	$f(-1)=-m+n$, $f(0)=n$	**2p**
	$f(1)=2+m+n \Rightarrow f(-1)-2f(0)+f(1)=-m+n-2n+2+m+n=2$, pentru orice numere reale m și n	**3p**
b)	f este divizibil cu $X^2-1 \Leftrightarrow f(-1)=0$ și $f(1)=0$	**3p**
	$m=-1$, $n=-1$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$, $x_1x_2x_3=-n$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1+3m-3n$	**3p**
	$3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=3(m-n)-(-1+3m-3n)=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=$	**3p**
	$=\left(2x-x^2\right)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[0,2]$, deci f este crescătoare pe $[0,2]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(0)=0<a$, $f(2)=4e^{-2}>a$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0<a$, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,0)$, pe $(0,2)$ și pe $(2,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_1^2 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=2x+\ln x \Rightarrow \mathcal{A}=\int_1^e \left\|g(x)\right\|dx=\int_1^e (2x+\ln x)\,dx=\left.x^2\right\|_1^e+\left.x\ln x\right\|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx=$	**3p**
	$=e^2-1+e-0-(e-1)=e^2$	**2p**
c)	$\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\int_{e^{-1}}^1 x^n\ln x\,dx=\left.\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right\|_{e^{-1}}^1=\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}$	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}\right)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2019^x+2019^{-x}=2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ și $B(2,-2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe AB.
5p	**6.** Arătați că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m și n.
5p	**b)** Determinați numerele reale m și n, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.
5p	**c)** Demonstrați că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=\frac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1} x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n\le 5 \Rightarrow A=\{0,1,2,3,4,5\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este $0+1+2+3+4+5=15$	**2p**
2.	$\Delta=4-4m$	**2p**
	$\frac{4m-4}{4}=2$, de unde obținem $m=3$	**3p**
3.	$x+3=9-x\Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 10 elemente are $C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}$ submulțimi cu cel puțin 8 elemente	**3p**
	$C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}=45+10+1=56$	**2p**
5.	$D(2,2)$	**2p**
	$CD=10$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi=1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=1+(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1+(-1)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+0+0-0-0-0=4$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}ab+a+b+1&0&0\\a+b+1&ab&a+b+1\\0&0&ab+a+b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab&0&0\\0&ab&0\\0&0&ab\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+b+1&0&0\\a+b+1&0&a+b+1\\0&0&a+b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=ab\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(a+b+1)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(0)A(a)=(a+1)A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2020A(0)$, de unde obținem $n=2020$	**3p**
2.a)	$f(1)=6-2m$	**3p**
	$6-2m=0\Rightarrow m=3$	**2p**
b)	$f=X^3-3X^2+2X=X\left(X^2-3X+2\right)$	**2p**
	Rădăcinile sunt $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=m^3-3m-9$	**3p**
	$m^3-3m-9=m^3-12$, de unde obținem $m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-2\left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)-\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{2x-(x+1)}{x(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x}{x+1}\right)=1-0-0=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=\ln 2>0$, deci $f(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $g(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=0$, ecuația $g(x)=h(x)$ nu are soluție în $(0,+\infty)$, deci graficele funcțiilor g și h nu au niciun punct comun	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+4\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+4x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+4-0=\dfrac{13}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=x\sqrt{x^2+4}\Rightarrow\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}\left\|g(x)\right\|dx=-\int_{-1}^{0}x\sqrt{x^2+4}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx=$	**2p**
	$=-\dfrac{1}{3}\left.\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_{-1}^{0}+\dfrac{1}{3}\left.\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_0^1=-\dfrac{1}{3}\left(8-5\sqrt{5}\right)+\dfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)=\dfrac{10\sqrt{5}-16}{3}$	**3p**
c)	Din teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3 f(x)}{4x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}=\dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că suma elementelor mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N} \mid n-1\le 4\}$ este egală cu 15.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că vârful parabolei asociate funcției f are ordonata egală cu 2.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=\sqrt{9-x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel puțin 8 elemente ale unei mulțimi cu exact 10 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinaţi lungimea segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(1)\big)=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=ab\,I_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră funcțiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ și $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$. Demonstraţi că graficele funcţiilor g şi h **nu** au niciun punct comun.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\dfrac{10\sqrt{5}-16}{3}$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{3}{x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1=1$ sau $x+1=3$	**3p**
	Elementele mulțimii M sunt 0 și 2	**2p**
2.	$x_1^2-1=mx_1$, $x_2^2-1=mx_2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\frac{mx_1}{x_1}+\frac{mx_2}{x_2}=2$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\sqrt{2-x}=x \Rightarrow 2-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0$	**3p**
	$x=-2$, care nu convine sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 20 de numere, deci sunt 20 de cazuri posibile	**1p**
	Pentru $n \le 20$, obținem $\log_2 n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{1,2,4,8,16\}$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$	**2p**
5.	$m_{MP}=-1$, deci panta mediatoarei segmentului MP este $m=1$	**2p**
	$Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ este mijlocul lui MP, deci ecuația mediatoarei este $y-\frac{3}{2}=x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=x+1$	**3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**3p**
	$BC=10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-4)+0-0-(-6)-(-1)=3$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&m&-1\\m&1&3\end{vmatrix}=-4m^2+m+3$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\det(M(m))=0 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{4}$ sau $m=1$, deci sistemul are soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4},1\right\}$	**3p**
c)	Pentru $m=1$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt $(3-2\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$	**3p**
	$4(1-\alpha)^2=(3-\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha=-1$ sau $\alpha=\frac{5}{3}$, deci soluțiile sunt $(5,2,-1)$ sau $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$	**2p**

2.a)	$x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}x\left(y-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*x=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$, $x*x*x=\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}=x\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ sau $x=\frac{3}{2}$ sau $x=\frac{9}{2}$	**3p**
c)	$x*\frac{9}{2}=\frac{9}{2}*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{9}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”	**2p**
	$n*n'=n'*n=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 4nn'-6n-6n'=27$, unde n' este simetricul lui n și, cum pentru $n, n'\in\mathbb{N}$, numărul $4nn'-6n-6n'$ este par, obținem că nu există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{2x+1}{x^2+x+1}=$	**3p**
	$=\frac{x^2-x}{x^2+x+1}=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2\Leftrightarrow f'(a)=-\frac{1}{7}$	**2p**
	$\frac{a(a-1)}{a^2+a+1}=-\frac{1}{7}\Leftrightarrow 8a^2-6a+1=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$ sau $a=\frac{1}{2}$	**3p**
c)	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=0$, $f(1)=1-\ln 3\in(-1,0)$	**3p**
	f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, deci, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ nu are nicio soluție în $[0,+\infty)$	**1p**
	f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)\Rightarrow$ pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică în $(-\infty,0)$, deci pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică	**1p**
2.a)	$\int_0^2 e^x f(x)dx=\int_0^2 e^x\cdot\frac{x}{e^x}dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_{-1}^0 -xe^{-x}dx+\int_0^1 xe^{-x}dx=(x+1)e^{-x}\Big\vert_{-1}^0-(x+1)e^{-x}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-\frac{2}{e}+1=2-\frac{2}{e}$	**2p**
c)	$(n+2)I_n=(n+2)\int_0^1 x^n f(x)dx=(n+2)\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=\int_0^1\left(x^{n+2}\right)'e^{-x}dx=\frac{1}{e}+\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx$	**2p**
	$0\le x\le 1\Rightarrow\frac{1}{e}\le e^{-x}\le 1\Rightarrow\frac{1}{e}\cdot x^{n+2}\le x^{n+2}e^{-x}\le x^{n+2}\Rightarrow\frac{1}{e}\int_0^1 x^{n+2}dx\le\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx\le\int_0^1 x^{n+2}dx$	**1p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{n+2}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Determinați elementele mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-mx-1=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x}-x=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\log_2 n\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\le 20\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $P(1,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MP.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ şi $m(\sphericalangle C)=30^\circ$. Determinați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&m&-1\\m&1&3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+4z=5\\-x+my-z=-2\\mx+y+3z=4\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Pentru $m=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{9}{4}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(x^2+x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2$.

5p **c)** Demonstrați că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 e^x f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $2-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=6-3i+4i-2i^2-4-4i=4-3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$	**2p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-1)=8m+1$	**2p**
	$\Delta\le 0$, deci $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	**3p**
3.	$2\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}=1\Rightarrow(2\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel mult două elemente ale mulțimii A este $C_n^0+C_n^1+C_n^2$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii A	**3p**
	$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$ și, cum n este număr natural, obținem $n=5$	**2p**
5.	M mijlocul laturii $BC\Rightarrow\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{MN}$	**2p**
	N mijlocul segmentului AM, deci $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NA}$, deci $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NA}=\vec{0}$	**3p**
6.	$1+3\cos x=2\cos^2 x-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\Leftrightarrow(\cos x-2)(2\cos x+1)=0$	**3p**
	$\cos x=-\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{2\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{vmatrix}=8+a+2a-4-a^2-4=$	**3p**
	$=-a^2+3a=a(3-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$\det(A(0))=0$ și un minor principal este $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\ne 0$	**2p**
	Minor caracteristic este $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&0&3\end{vmatrix}=3\ne 0$, deci sistemul de ecuații este incompatibil	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \setminus \{0,3\}$ și soluția sistemului este $\left(1-\frac{2}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$	**3p**
	x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi, deci $\frac{1}{a}$ este număr întreg și, cum și a este număr întreg, obținem $a=-1$ sau $a=1$, care convin	**2p**
2.a)	$x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 - 1} =$	**2p**
	$= \sqrt{x^2\left(y^2+1\right)+\left(y^2+1\right)-1} = \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-1} = 1 \Leftrightarrow \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=2$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=1$, $b=0$ sau $a=0$, $b=1$	**3p**
c)	$\underbrace{1 \circ 1 \circ \ldots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}} = \sqrt{2^n - 1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**
	Dacă $\sqrt{2^n-1} \in \mathbb{N}$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = k^2 \Rightarrow k$ impar, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = (2m+1)^2$, de unde obținem $2^{n-1} = 2m^2 + 2m + 1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 =$	**3p**
	$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = -2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1} = 0$, deci dreapta de ecuație $y=-2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$\sqrt{x^2+2x+2} > x+1 \Rightarrow f'(x) < 0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, deci $\operatorname{Im} f = (2, +\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx = \int_1^2 \left(3x^2-2x\right)dx = \left(x^3-x^2\right)\Big\|_1^2 =$	**3p**
	$= 8-4-1+1 = 4$	**2p**
b)	$\int_0^1 x\ln(x+1)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2-1}{2}\right)' \ln(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big\|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)dx =$	**3p**
	$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\|_0^1 = \frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0} \frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx = \lim\limits_{t\to0} \frac{f(t)}{3t^2} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{t\to0} \frac{\ln(t+1)}{3t} = \frac{1}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2-i)(3+2i)-4(1+i)$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_2 x-\log_x 2=1$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul segmentului AM. Demonstrați că $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $1+3\cos x=\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 2 & a & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+az=2\\ 2x+ay+4z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a\circ b=1$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$ **nu** este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculați $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**B**	**5p**
2.	**A**	**5p**
3.	**C**	**5p**
4.	**D**	**5p**
5.	**A**	**5p**
6.	**A**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(0,1)=\begin{vmatrix}0&2&1\\0&0&1\\2&3&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+4-0-0-0=4$	**3p**
b)	$D(a,1)=\begin{vmatrix}a&2&1\\a&a&1\\2&3&1\end{vmatrix}=a^2-4a+4=$	**3p**
	$=(a-2)^2\geq 0$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$D(m,n)=m^2+m+4n^2-5mn$, unde m și n sunt numere întregi impare	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi impare, m^2 este impar, $4n^2$ este par și $5mn$ este impar, deci numărul întreg $D(m,n)$ este impar, de unde obținem că $D(m,n)\neq 0$	**3p**
2.a)	$A(-x)+A(x)=\begin{pmatrix}-x&1&x\\1&0&1\\x&1&-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&1&-x\\1&0&1\\-x&1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2xy+1&0&-2xy+1\\0&2&0\\-2xy+1&0&2xy+1\end{pmatrix}$, $A(2xy)=\begin{pmatrix}2xy&1&-2xy\\1&0&1\\-2xy&1&2xy\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

	$A(x)A(y)-A(2xy)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\big(A(x)A(y)-A(2xy)\big)=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(x)A\left(\frac{1}{2x}\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I_3$, pentru orice număr real nenul x	**3p**
	$\underbrace{2I_3+2I_3+\ldots+2I_3}_{\text{de 2019 ori } 2I_3}=4038I_3$, deci $m=4038$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=1$	**2p**
b)	$a_n=\frac{n+1}{n+2}$, deci $a_n>0$, pentru orice număr natural n, $n\ge1$	**2p**
	Cum $a_n=1-\frac{1}{n+2}<1$, pentru orice număr natural n, $n\ge1$, șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este mărginit	**3p**
c)	**c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt{f(n)}-1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\left(f(n)-1\right)}{\sqrt{f(n)}+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)}{\sqrt{f(n)}+1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{(n+2)\left(\sqrt{f(n)}+1\right)}=-\frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	Pentru orice număr real a, funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(a+\frac{\sin x}{x}\right)=a+1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x^2+2x}=0$ și $f(0)=0$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow a=-1$	**3p**
b)	$a=1\Rightarrow f(x)=1+\frac{\sin x}{x}$, $x\in(-\infty,0)$	**1p**
	$\left\lvert\frac{\sin x}{x}\right\rvert\le\frac{1}{\lvert x\rvert}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\lvert x\rvert}=0$	**2p**
	Obținem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, deci dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $[0,+\infty)$, deci mulțimea valorilor funcției f conține intervalul $[0,+\infty)$	**3p**
	Cum pentru orice număr real a, $\lvert a\rvert\in[0,+\infty)$, ecuația $f(x)=\lvert a\rvert$ are cel puțin o soluție	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 333. Al doilea termen al acestei progresii este egal cu:

A. 30 **B.** 111 **C.** 222 **D.** 333

5p **2**. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$. Numărul $(f\circ f)\left(\frac{10}{9}\right)$ este egal cu:

A. -10 **B.** $-\frac{5}{3}$ **C.** 0 **D.** $\frac{10}{9}$

5p **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $2\log_2(x+1)-\log_2(x+2)=\log_{\frac{1}{3}}3$ este:

A. $\left\{-\frac{3}{2},0\right\}$ **B**. $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ **C.** $\{0\}$ **D.** $\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$

5p **4.** Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puțin o cifră pară este egală cu:

A. $\frac{5}{18}$ **B.** $\frac{4}{9}$ **C.** $\frac{5}{9}$ **D.** $\frac{13}{18}$

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră triunghiul ale cărui laturi se află pe dreptele de ecuații $d_1: y=-2x$, $d_2: y=2x$ și $d_3: x=2$. Perimetrul acestui triunghi este egal cu:

A. $4\left(2+\sqrt{5}\right)$ **B.** 24 **C.** $6\sqrt{5}$ **D.** $4\left(3+\sqrt{5}\right)$

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x-\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, unde x este număr real. Pentru orice număr real x, expresia $E(x)$ este egală cu:

A. 0 **B.** $2\cos x$ **C.** $2\sin x$ **D.** 1

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix} a & 2b & 1 \\ a & a & b \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $D(0,1)$.

5p **b)** Arătați că $D(a,1)\geq 0$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, dacă numerele m și n sunt întregi impare, atunci $D(m,n)\neq 0$.

2. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(-x)+A(x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A(x)A(y)-A(2xy)\right)=0$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(2019)A\left(\frac{1}{4038}\right)=mI_3$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_n=f(n)$. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este mărginit.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{f(n)}-1\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} a+\dfrac{\sin x}{x}, & x\in(-\infty,0) \\ \sqrt{x^2+2x}, & x\in[0,+\infty) \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Pentru $a=1$, determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=|a|$ are cel puțin o soluție.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3z_1 - z_2 = 3(3-i)-(8-3i)=$ $=9-3i-8+3i=1$	**2p** **3p**
2.	$a-5+(a+1)-5=35$ $2a-9=35 \Rightarrow a=22$	**2p** **3p**
3.	$4^x(2-4)+32=0 \Leftrightarrow 4^x=16$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele naturale de o cifră care verifică relația sunt 6, 7, 8 și 9, deci sunt 4 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB $m=4$	**2p** **3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2} \Rightarrow 24=\dfrac{6\cdot AC}{2} \Rightarrow AC=8$ $BC=10$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&\ln 2\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&\ln 2\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=2+0+0-0-0-0=2$	**2p** **3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}(a+1)(b+1)&0&0\\0&1&\ln((a+1)(b+1))\\0&0&1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}(ab+a+b)+1&0&0\\0&1&\ln((ab+a+b)+1)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a și b, $a>0$, $b>0$	**3p** **2p**
c)	$A(a)A(a)=A\left((a+1)^2-1\right)$, $A(a)A(a)A(a)=A\left((a+1)^3-1\right)$, pentru a număr real, $a>0$ $(a+1)^3-1=7 \Leftrightarrow (a+1)^3=8$, deci $a=1$	**2p** **3p**
2.a)	$f(-2)=6m-6$, pentru m număr real $6m-6=0 \Rightarrow m=1$	**3p** **2p**

b)	$f = X^3 + X^2 - X + 2 = (X+2)(X^2 - X + 1)$	**2p**
	$x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$	**3p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -m$, $x_1x_2x_3 = -2$	**2p**
	$a = \frac{x_1^3 + mx_1^2}{x_1x_2x_3} + \frac{x_2^3 + mx_2^2}{x_1x_2x_3} + \frac{x_3^3 + mx_3^2}{x_1x_2x_3} = \frac{mx_1 - 2}{x_1x_2x_3} + \frac{mx_2 - 2}{x_1x_2x_3} + \frac{mx_3 - 2}{x_1x_2x_3} = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3) - 6}{x_1x_2x_3} =$ $= \frac{m^2 + 6}{2} \geq 3$, deci $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real m	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x\left(x^2 + 4x + 1\right) + e^x(2x + 4) =$	**3p**
	$= e^x\left(x^2 + 6x + 5\right) = e^x(x+5)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$	**2p**
	$e^{x_0}(x_0 + 5)(x_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -5$ sau $x_0 = -1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $f(-5) = \frac{6}{e^5}$, $f(-1) = -\frac{2}{e}$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty, -5)$, pe $(-5, -1)$ și pe $(-1, +\infty)$, ecuaţia $f(x) = a$ are exact trei soluţii reale $\Leftrightarrow a \in \left(0, \frac{6}{e^5}\right)$	**3p**
2.a)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$	**2p**
	$F'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$	**3p**
b)	$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x}\,dx = \ln(\ln x)\Big\|_e^{e^2} =$	**3p**
	$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$	**2p**
c)	$g(x) = \ln x \Rightarrow \mathcal{A} = \int_e^a \|g(x)\|\,dx = \int_e^a \ln x\,dx = x \ln x\Big\|_e^a - \int_e^a x \cdot \frac{1}{x}\,dx = a \ln a - a$	**3p**
	$a \ln a - a = 2a$ și, cum $a > e$, obținem $a = e^3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 8 - 3i$. Arătați că $3z_1 - z_2 = 1$.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(a+1) = 35$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 4^x - 4^{x+1} + 32 = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relația $n(n+1)\ge 42$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,4)$, $B(0,6)$ și $C(m,5)$. Determinați numărul real m, știind că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, știind că $AB = 6$ și aria triunghiului ABC este egală cu 24.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, $a > 0$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b) = A(ab + a + b)$, pentru orice numere reale a și b, $a > 0$, $b > 0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a > 0$, știind că $A(a)A(a)A(a) = A(7)$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + mX^2 - mX + 2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(-2) = 0$.

5p **b)** Pentru $m = 1$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Se consideră $a = \dfrac{x_1^2 + mx_1}{x_2x_3} + \dfrac{x_2^2 + mx_2}{x_1x_3} + \dfrac{x_3^2 + mx_3}{x_1x_2}$. Demonstrați că $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real m.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(x^2 + 4x + 1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = e^x(x+5)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a > e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = e$ și $x = a$ are aria egală cu $2a$.