Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$	**3p**
	$n=4\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x+1=2x-1$	**2p**
	$x=2\Rightarrow y=3$	**3p**
3.	$6-x^2=x\Rightarrow x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**
4.	Numerele $\overline{abc}$ cu $a+b+c=2$ sunt $101, 110$ și $200\Rightarrow 3$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul numerelor de 3 cifre este $900\Rightarrow 900$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{300}$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(2,2)$	**2p**
	$m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-1\Rightarrow$ panta mediatoarei segmentului AB este egală cu 1	**2p**
	Ecuația mediatoarei segmentului AB este $y=x$	**1p**
6.	ΔABC dreptunghic în $A\Rightarrow R=\dfrac{BC}{2}$	**3p**
	$R=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&x&1\\1&-1&1\\x&-1&1\end{vmatrix}=-1-1+x^2+x-x+1=$	**3p**
	$=x^2-1$	**2p**
c)	$(A(x))^{-1}$ este inversa lui $A(x)\Rightarrow A(x)\cdot(A(x))^{-1}=I_3\Rightarrow\det(A(x))\cdot\det\left((A(x))^{-1}\right)=1$	**1p**
	$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\det(A(x))\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$(A(x))^{-1}$ are elementele numere întregi $\Rightarrow\det\left((A(x))^{-1}\right)\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$\det(A(x))=\pm1\Rightarrow x=0$ care verifică cerința	**2p**

2.a)	$2\circ 3=\sqrt{4\cdot 9+4+9}=$ $=7$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=\sqrt{x^2\left(y^2+1\right)+y^2}=\sqrt{x^2\left(y^2+1\right)+\left(y^2+1\right)-1}=$ $=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
c)	$x\circ x\circ x=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3-1}$ $\sqrt{\left(x^2+1\right)^3-1}=x\Rightarrow\ x=0$, care verifică ecuația	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$g'(x)=2x+2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $g'(2)=6$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2x-2}{6x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{6x}=\dfrac{1}{6}$	**2p** **3p**
c)	$h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=2f(x)-g(x)\Rightarrow h'(x)=2e^x-2x-2$ și $h''(x)=2e^x-2\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ h' crescătoare $\Rightarrow h'(x)\geq h'(0)=0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ h crescătoare $\Rightarrow h(x)\geq h(0)=0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**2p** **1p** **2p**
2.a)	$(x+2)f(x)=x^2+4x+5$ $\int\limits_0^1\left(x^2+4x+5\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+2x^2+5x\right)\Big\|_0^1=$ $=\dfrac{22}{3}$	**1p** **2p** **2p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln(x+2)\right)'=x+2+\dfrac{1}{x+2}$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$ $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	**3p** **2p**
c)	$\int\limits_{-1}^0 F(x)\cdot f(x)dx=\int\limits_{-1}^0 F(x)\cdot F'(x)dx=$ $=\dfrac{F^2(x)}{2}\Big\|_{-1}^0=\dfrac{F^2(0)-F^2(-1)}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\ln^2 2-\dfrac{9}{4}\right)$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{6-x^2}=2^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, suma cifrelor acestuia să fie egală cu 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(3,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $BC=8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 1\\ 1 & -1 & 1\\ x & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $A(0)\cdot A(1)$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A(x)\right)=x^2-1$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele întregi x pentru care inversa matricei $A(x)$ are elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p **a)** Calculați $2\circ 3$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice x și y numere reale.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+2x+2$.

5p **a)** Calculați $g'(2)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-g(x)}{2x^3}=\dfrac{1}{6}$.

5p **c)** Demonstrați că $2f(x)\geq g(x)$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x+2}$ și $F:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln(x+2)$.

5p **a)** Calculați $\int\limits_0^1 (x+2)f(x)\,dx$.

5p **b)** Verificați dacă funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați $\int\limits_{-1}^{0} F(x)f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$3(3-2i)=9-6i$	**2p**
	$2(5+3i)=10+6i$	**2p**
	$a=19\in\mathbb{R}$	**1p**
2.	$f(1)+f(2)+...+f(10)=4\cdot(1+2+...+10)-10=$	**3p**
	$=210$	**2p**
3.	$2x=1+x$	**3p**
	Rezultă $x=1$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Se notează cu x preţul iniţial $x+10\%\cdot x=2200$	**2p**
	Preţul înainte de scumpire este 2000 de lei	**3p**
5.	$\frac{2}{1}=\frac{a+1}{4}$	**3p**
	$a=7$	**2p**
6.	$3\sin x+\cos x=4\sin x\Rightarrow\sin x=\cos x$	**3p**
	$x=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$D(2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&1\\3&9&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2$	**3p**
b)	$D(a,b)=\begin{vmatrix}0&0&1\\a-1&a^2-1&1\\b-1&b^2-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1&a+1\\1&b+1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b	**1p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta P_1P_2P_n}=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2^2&1\\n&n^2&1\end{vmatrix}=(n-1)(n-2)$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta P_1P_2P_n}=1\Leftrightarrow(n-1)(n-2)=2\Leftrightarrow n=3$	**3p**
2.a)	$f=X^3-4X^2+3X-4$	**2p**
	$f(4)=4^3-4\cdot4^2+3\cdot4-4=8$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$	**1p**
	$x_1+x_2=x_3\Rightarrow x_3=2$	**2p**
	$f(2)=0\Leftrightarrow m=-2$	**2p**

c)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3m+28$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)\Rightarrow m=0$	**1p**
	Dacă $m=0$, atunci $f(3)=0$, deci f se divide cu $X-3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)'=(\cos x)'+\left(\frac{x^2}{2}\right)'=$	**2p**
	$=-\sin x+2\cdot\frac{x}{2}=x-\sin x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y=1$	**1p**
c)	$f''(x)=-\cos x+1\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru $x\in(-\infty,0]$ şi $f'(x)\geq 0$, pentru $x\in[0,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\geq f(0)\Rightarrow f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
2.a)	$I_1=\int_0^1 xe^x dx=xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=e-e^x\Big\vert_0^1=1$	**2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=x^{n+1}e^x\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx=$	**3p**
	$=e-(n+1)I_n\Rightarrow I_{n+1}+(n+1)I_n=e$	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in[0,1]$, avem $1\leq e^x\leq e$ şi $x^n\geq 0\Rightarrow x^n\leq x^n e^x\leq x^n e$	**2p**
	$\int_0^1 x^n dx\leq\int_0^1 x^n e^x dx\leq e\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 1\leq(n+1)I_n\leq e$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $a=3(3-2i)+2(5+3i)$ este real.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$. Calculaţi $f(1)+f(2)+...+f(10)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x)=\log_2(1+x)$.

5p **4.** După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 2200 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ştiind că $\frac{3\sin x+\cos x}{\sin x}=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $D(2,3)=2$.

5p **b)** Verificaţi dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n\left(n,n^2\right)$, unde n este un număr natural nenul. Determinaţi numărul natural n, $n\geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-4X^2+3X-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=4$, arătaţi că $f(4)=8$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1+x_2=x_3$.

5p **c)** Dacă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)$, arătaţi că f se divide cu $X-3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătaţi că $1\leq(n+1)I_n\leq e$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_3=\frac{(a_1+a_3)\cdot 3}{2}=\frac{(2+8)\cdot 3}{2}=$	**3p**
	$=15$	**2p**
2.	$x_V=2$	**2p**
	$y_V=-2$	**3p**
3.	$x=4-x$	**3p**
	Rezultă $x=2$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Numerele de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 4 sunt 14, 22 şi $41\Rightarrow 3$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul de numere naturale de două cifre este $90\Rightarrow 90$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{30}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ şi $\overrightarrow{AM}=(x_M-1)\vec{i}+(y_M-1)\vec{j}$	**2p**
	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_M=2\\y_M=1\end{cases}$	**3p**
6.	$4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{6}=$	**3p**
	$=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(-1))=\begin{vmatrix}2&2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-8-8=-16$	**3p**
b)	$A(0)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}=5A(1)$	**3p**
c)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}2&2&m+1\\2&m+1&2\\m+1&2&2\end{vmatrix}=-(m+5)(m-1)^2$	**3p**
	$\det(A(m))=0\Leftrightarrow m=-5$ sau $m=1$	**2p**

2.a)	$xy-2x-2y+6=x(y-2)-2(y-2)+2=$	**3p**
	$=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
b)	$x\circ 2=(x-2)(2-2)+2=2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2\circ x=(2-2)(x-2)+2=2\Rightarrow x\circ 2=2\circ x=2$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013=(1\circ 2)\circ 3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013=$	**3p**
	$=2\circ(3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013)=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x^3-1)'(x^2+1)-(x^3-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=$	**3p**
	$=0$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$	**1p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x^3-1}{x^2+1}}=$	**2p**
	$=e^2$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big\vert_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{e}-e^{-x}\Big\vert_0^1=\dfrac{e-2}{e}$	**2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=-x^{n+1}e^{-x}\Big\vert_0^1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi pentru orice $x\in[0,1]$ avem $0<e^{-x}\le 1\Rightarrow 0\le x^n e^{-x}\le x^n$	**2p**
	$0\le\int_0^1 x^n e^{-x}dx\le\int_0^1 x^n dx\ \Rightarrow\ 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ şi $a_3 = 8$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x = \log_3(4 - x)$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 4.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(4,1)$. Determinaţi coordonatele punctului M ştiind că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
5p	**6.** Arătaţi că $4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați $\det(A(-1))$.
5p	**b)** Verificaţi dacă $A(0)\cdot A(1) = 5A(1)$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $\det(A(m)) = 0$.
	2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.
5p	**a)** Verificaţi dacă $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**b)** Arătaţi că $x \circ 2 = 2 \circ x = 2$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Calculaţi $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2012 \circ 2013$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x}$.
5p	**c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{f(x)}$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$.
5p	**a)** Arătaţi că $I_1 = \frac{e-2}{e}$.
5p	**b)** Verificaţi dacă $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Arătaţi că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4 = b_1 q^3 \Rightarrow q^3 = 27$ $q = 3$	**3p** **2p**
2.	$x_V = 3$ $y_V = -1$	**2p** **3p**
3.	$3^{x+2} = 3^{2(1-x)} \Rightarrow x + 2 = 2 - 2x$ $x = 0$	**3p** **2p**
4.	Numerele de două cifre, pătrate perfecte, sunt 16, 25, 36, 49, 64 şi 81 $\Rightarrow$ 6 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{15}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ $AC = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$	**3p** **2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ $\sin A = 1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1$	**2p** **3p**
b)	$A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1$	**3p** **2p**
c)	$A(1) + A(2) + \ldots + A(101) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{pmatrix}$ $\det(A(1) + A(2) + \ldots + A(101)) = \begin{vmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{vmatrix} = -51^2 \cdot 101^3$	**3p** **2p**

2.a)	$3\circ 4=3\cdot 4-4\cdot 3-4\cdot 4+20=$ $=4$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=x(y-4)-4(y-4)+4=$ $=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$x\circ x=(x-4)^2+4$ $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{x\text{ de }2013\text{ ori}}=(x-4)^{2013}+4$ $(x-4)^{2013}+4=5\Rightarrow x=5$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x\left(x+e^x\right)-e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=$ $=\dfrac{(x-1)e^x}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+e^x}=1$ Ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=1$	**3p** **2p**
c)	$f'(1)=0$; $f'(x)\le 0$, pentru $x\in(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru $x\in[1,+\infty)$ $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1 xdx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=$ $=\dfrac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}\left(e^{-x^2}-1\right)dx$ Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in[0,1]$ avem $e^{-nx^2}>0$ şi $e^{-x^2}-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**2p** **3p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx=-\dfrac{1}{2n}\int_0^1(e^{-nx^2})'dx=$ $=-\dfrac{1}{2n}e^{-nx^2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2n}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right)$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_4 = 27$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2} = 9^{1-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 4$, $BC = 5$ şi $\sin C = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m știind că $A(m)\cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + ... + A(101)) = -51^2 \cdot 101^3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.

5p **a)** Calculaţi $3 \circ 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = 5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x+e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x) \geq \dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2}\, dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n = \dfrac{1}{2n}\left(1 - \dfrac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}=\left(5-2\sqrt{5}+1\right)+2\sqrt{5}=$	**3p**
	$=6\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f\left(x\right)=0$ are două soluții reale distincte	**2p**
	$\Delta=m^2-16>0$	**1p**
	$m\in\left(-\infty,-4\right)\cup\left(4,+\infty\right)$	**2p**
3.	$2-x^2=x$	**1p**
	$x_1=1,\ x_2=-2$	**2p**
	x_1 convine şi x_2 nu convine	**2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul submulțimilor cu cel mult un element este egal cu $C_7^0+C_7^1=8\Rightarrow 8$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor mulțimii A este $2^7=128\Rightarrow 128$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{1}{16}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+12\vec{j}$	**3p**
	$AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$	**2p**
6.	$b=\dfrac{\pi}{3}-a\Rightarrow\cos b=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\cos a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a$, de unde concluzia	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(-1,2)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$	**1p**
	$D(-1,2)=-1+1+8+2+2+2$	**3p**
	$D(-1,2)=14$	**1p**
b)	$A(2,q)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & q & 2\end{pmatrix}$	**1p**
	Există minorul $d=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow$ rang $A(2,q)\geq 2$	**1p**
	rang $A(2,q)=2\Rightarrow D(2,q)=0$	**1p**
	$q=-\dfrac{1}{2}$	**2p**

c)	$D(x,y)=x^3+4y-4x-xy+1$	**1p**
	$D(y,x)=y^3+4x-4y-yx+1$	**1p**
	$D(x,y)=D(y,x)\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-8)=0\Rightarrow x^2+xy+y^2-8=0$	**2p**
	Finalizare: de exemplu $(x,y)=(0,2\sqrt{2})$	**1p**
2.a)	$f(1)=2-m$	**2p**
	$f(1)=8$	**2p**
	Finalizare: $m=-6$	**1p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$ şi $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$	**2p**
	${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=-2\in\mathbb{Z}$	**3p**
c)	x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+X-2\Rightarrow$ polinomul $-2X^3+X^2+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$	**2p**
	$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ cu $a>0\Rightarrow$ $g=2X^3-X^2+0\cdot X-1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$	**2p**
	un exemplu este $a=2,\ b=-1,\ c=0,\ d=-1$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0)=0$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ şi f este continuă pe $[0,+\infty)$, deci ecuația dată are cel puțin o soluție	**3p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty)\Rightarrow f$ este injectivă pe $[0,+\infty)$, deci soluția este unică	**2p**
c)	$f\left(x_n\right)=n\Rightarrow e^{x_n}=n+x_n\Rightarrow e^{x_n}>n$ pentru că $x_n>0$, oricare ar fi $n\geq 2$	**2p**
	$x_n>\ln n\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$	**3p**
2.a)	$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**2p**
	$=\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=1$	**3p**
b)	$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=$	**1p**
	$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2}{4}$	**4p**
c)	$t=kx\Rightarrow \int_0^{2\pi}f^n(kx)\,dx=\frac{1}{k}\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt$	**2p**
	$\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^n t\,dt+\int_{2\pi}^{4\pi}\cos^n t\,dt+\ldots+\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\cos^n t\,dt=$	**2p**

	$= k \int_0^{2\pi} \cos^n t \, dt$, deoarece $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_n(x) = \cos^n x$ este periodică de perioadă 2π , de unde concluzia	**1p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2-x^2\right)=\log_2 x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.

5p **6.** Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a+b=\frac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2\\ 2 & x & 1\\ 1 & y & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche (x,y) de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+X-m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X-1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m=2$ determinați patru numere întregi a,b,c,d, cu $a>0$, astfel încât polinomul $g=aX^3+bX^2+cX+d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuația $f(x)=n$ are exact o soluție în intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluție din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuației $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței S.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2x+2=\frac{1+7}{2}$	**3p**
	$x=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow x=1$ sau $x=3$	**3p**
	Distanţa este egală cu 2	**2p**
3.	$x^2+4=x^2+4x+4$	**3p**
	Rezultă $x=0$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	b impar $\Rightarrow b\in\{3,5\}\Rightarrow$ sunt două variante de alegere a lui b	**2p**
	Pentru fiecare b impar sunt trei variante de alegere a lui a	**2p**
	Se pot forma $2\cdot 3=6$ numere	**1p**
5.	$\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{AO}$	**3p**
	$\lvert\vec{v}\rvert=15$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$	**2p**
	$\sin A=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$(A(a))^2=\begin{pmatrix}a^2+2&2a+1&2a+1\\2a+1&a^2+2&2a+1\\2a+1&2a+1&a^2+2\end{pmatrix}$	**2p**
	$5A(a)-(A(a))^2=\begin{pmatrix}5a-a^2-2&4-2a&4-2a\\4-2a&5a-a^2-2&4-2a\\4-2a&4-2a&5a-a^2-2\end{pmatrix}$	**1p**
	$5A(a)-(A(a))^2=4I_3\Rightarrow 5a-a^2-2=4$ şi $4-2a=0\Rightarrow a=2$	**2p**
c)	$A(2)\cdot(5I_3-A(2))=4I_3$ şi $(5I_3-A(2))\cdot A(2)=4I_3$	**2p**
	Matricea $A(2)$ este inversabilă şi inversa ei este $B=\frac{1}{4}(5I_3-A(2))=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$f(2)=8-4m+6-1=-4m+13$ $f(-2)=-8-4m-6-1=-4m-15 \Rightarrow f(2)-f(-2)=28$	**2p** **3p**
b)	Restul împărţirii lui f la $X-2$ este $f(2) \Rightarrow f(2)=9$ Restul împărţirii lui f la $X+2$ este $f(-2) \Rightarrow f(-2)=-19$	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=3 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-6$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3=m^3-9m+3$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3 \Leftrightarrow m^3-9m=0 \Leftrightarrow m=-3$ sau $m=0$ sau $m=3$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1+x}{1-x}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$ $=-\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{x^2-1}$, pentru orice $x\in(-1,1)$	**3p** **2p**
b)	$x^2-1<0$, pentru orice $x\in(-1,1)$ $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,1) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1,1)$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$, pentru orice $x\in(-1,1)$ $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left(-1,0\right]$, $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[0,1\right)$, deci punctul de inflexiune este $x=0$	**2p** **1p** **2p**
2.a)	$I_0=\int_1^2 e^x dx=$ $=e^x\Big\vert_1^2=e^2-e$	**2p** **3p**
b)	$I_1=\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^x dx=$ $=e^2$	**3p** **2p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^2 x^{n+1}e^x dx=\int_1^2 x^{n+1}\left(e^x\right)'dx=$ $=x^{n+1}e^x\Big\vert_1^2-(n+1)I_n \Rightarrow I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 1, $2x+2$ şi 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+4}=x+2$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma, ştiind că $a,b\in\{2,3,4,5\}$ şi $a\neq b$.

5p **5.** În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=8$ şi $BC=6$, se consideră vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$, unde $\{O\}=AC\cap BD$. Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=6$, $BC=10$ şi $\sin C=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det(A(0))$.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+3X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(2)-f(-2)$.

5p **b)** Determinaţi restul împărţirii lui f la $X+2$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 9.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-1,1)$.

5p **b)** Verificați dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.

5p **c)** Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^2 x^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_1=e^2$.

5p **c)** Demonstrați că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$, pentru orice număr natural n.