Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z(z-2i)=(3+i)(3-i)=3^2-i^2=$	**3p**
	$=9+1=10$	**2p**
2.	$f(2x)=10x+1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(2x)-2f(x)=10x+1-2(5x+1)=10x+1-10x-2=-1$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$x^3-2x+2=x^3$, deci $-2x+2=0$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 9 numere n pentru care $n+5$ este multiplu de 10, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**3p**
5.	$m_{AB}=4$ și, cum $d \parallel AB$, obținem $m_d=4$	**3p**
	Ecuația dreptei este $y-0=4(x-0)$, adică $y=4x$	**2p**
6.	$AD=\frac{BC}{2}$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AD\cdot BC}{2}=4$, de unde obținem $BC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+2+0-0-0+2=8$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{vmatrix}=-a^2+2a+8$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0 \Leftrightarrow a=-2$ sau $a=4$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$	**3p**
c)	Pentru $a=-2$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(2,-2-2\alpha,\alpha)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$	**3p**
	$x_0z_0+y_0=2\alpha-2-2\alpha=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații	**2p**
2.a)	$2\circ 3=2\cdot 3+(2^2-2)(2^3-2)=$	**3p**
	$=6+12=18$	**2p**

b)	$x\circ 1=x\cdot 1+\left(2^x-2\right)\left(2^1-2\right)=x+0=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1\circ x=1\cdot x+\left(2^1-2\right)\left(2^x-2\right)=x+0=x$, pentru orice număr real x, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$x\circ(-x)=-x^2+1-2\cdot 2^x-2\cdot 2^{-x}+4=$	**2p**
	$=-x^2+1-2\cdot\left(2^x-2+\dfrac{1}{2^x}\right)=1-x^2-2\cdot\left(\sqrt{2^x}-\dfrac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2\leq 1$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+3\left(\ln(x+3)-\ln(x-1)\right)'=1+\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3}{x-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+2x-3+3x-3-3x-9}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{x^2+2x-15}{(x+3)(x-1)}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\ln\dfrac{x+3}{x-1}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln\dfrac{x+3}{x-1}\right)=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=3$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(1,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1,3]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(3)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f(3)=3+3\ln 3$, deci $x+3\ln\dfrac{x+3}{x-1}\geq 3+3\ln 3$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, de unde obținem $\ln\dfrac{x+3}{3(x-1)}\geq 1-\dfrac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^3 f(x)e^x dx=\int\limits_0^3\left(x^2+2x\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}+9=18$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{x+2}dx=\int\limits_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=x\left.\left(-e^{-x}\right)\right\|_0^1-\left.e^{-x}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{e-2}{e}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\int\limits_0^x f(t)dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)'}{\left(x^2\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)e^{-x}}{2}=1$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3+i$. Arătați că $z(z-2i)=10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x+1$. Arătați că $f(2x)-2f(x)=-1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3-2x+2}=x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $n+5$ să fie multiplu de 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$ și $B(5,4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 4. Arătați că $BC=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+2z=2\\ x-y+az=4\\ ax+(a+1)y-2z=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 3=18$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ(-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+3\ln\frac{x+3}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)},\ x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $\ln\frac{x+3}{3(x-1)}\ge 1-\frac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x\,dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx = \frac{e-2}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt\right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4r = a_5 - a_1 = 20$, deci $r = 5$, unde r este rația progresiei aritmetice	**3p**
	$a_6 = a_5 + r \Rightarrow a_6 = 28$	**2p**
2.	$f(m) = -1$, de unde obținem $m^2 - 6m + 9 = 0$	**3p**
	$m = 3$	**2p**
3.	$3^{2x-1} = 3^{x+3}$, de unde obținem $2x - 1 = x + 3$	**3p**
	$x = 4$	**2p**
4.	$C_5^1 + C_5^2 =$	**3p**
	$= 5 + 10 = 15$	**2p**
5.	$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = (x_C - 4)\vec{i} + (y_C - 4)\vec{j}$	**3p**
	$x_C = 7$ și $y_C = 5$	**2p**
6.	Triunghiul ADB este dreptunghic în D, deci $BD = 3\sqrt{3}$	**2p**
	$BC = 4\sqrt{3}$, deci $R = 2\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 0$	**3p**
b)	$A(x) \cdot A(y) - A(xy) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y + x - 2 & 0 & y + x - 2 \\ -y - x + 2 & 0 & -y - x + 2 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= (y + x - 2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (x + y - 2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(-3) \cdot A(x) = A(-3x) + (x - 5)A(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$A(-3x) + (x - 5)A(0) = A(y)$, de unde obținem $x = 5$ și $y = -15$	**3p**
2.a)	$f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 6X + 2 \Rightarrow f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2 =$	**3p**
	$= 1 + 2 - 8 + 6 + 2 = 3$	**2p**
b)	$f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 = X^2\left(X^2 + 2X - 8\right)$	**2p**
	Rădăcinile polinomului f sunt $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -4$, $x_4 = 2$	**3p**
c)	Polinomul f are coeficienți raționali, deci $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ este rădăcină a polinomului f	**2p**
	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -8$, unde x_3 și x_4 sunt celelalte rădăcini ale polinomului f, de unde obținem $x_3 + x_4 = -4$ și $x_3x_4 = 2$ și, cum $x_1x_2x_3x_4 = m$, rezultă $m = -4$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3e^x\left(x^2+x+1\right)-3e^x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3e^x\left(x^2+x+1-2x-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{3e^x\left(x^2-x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{2x}}{4x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{3e^x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{x^2+x+1}{4x^2+2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=1$; pentru orice $x\in(-\infty,0)$, $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$; pentru orice $x\in(0,1)$, $f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$; pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(0)=3$, $f(1)=e$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și, cum f este continuă, obținem că ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții, pentru orice $m\in(e,3)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\ln(x+1)\right)dx=\int_1^2 6x\,dx=3x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
b)	$\int_0^{e-1}\dfrac{f(x)-6x}{x+1}dx=\int_0^{e-1}\ln(x+1)\left(\ln(x+1)\right)'dx=\dfrac{\ln^2(x+1)}{2}\Big\vert_0^{e-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln^2 e}{2}-\dfrac{\ln^2 1}{2}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$g(x)=6x^2+\ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow\mathcal{A}=\int_0^1\left\vert g(x)\right\vert dx=2x^3\Big\vert_0^1+\int_0^1 x'\ln\left(x^2+1\right)dx=2+\ln 2-\int_0^1\dfrac{2x^2}{x^2+1}dx=$	**3p**
	$=2+\ln 2-2x\Big\vert_0^1+2\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=\dfrac{\pi}{2}+\ln 2$, deci $\dfrac{\pi}{2}+\ln 2=a\pi+\ln 2$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_6 al progresiei aritmetice $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 3$ și $a_5 = 23$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1} = 9\cdot 3^{x+1}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul submulțimilor nevide ale mulțimii A, care au cel mult două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(4,4)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 6$ și înălțimea $AD = 3$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right) = 0$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y) - A(xy) = (x + y - 2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(-1)\cdot A(3)\cdot A(x) = A(y)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 3mX + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m = 2$, arătați că $f(1) = 3$.

5p **b)** Pentru $m = 0$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul rațional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3e^x}{x^2 + x + 1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{3e^x\left(x^2 - x\right)}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)} = +\infty$.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții, pentru orice $m\in(e,3)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 6x + \ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x) - \ln(x+1)\right)dx = 9$.

5p **b)** Arătați că $\int_{0}^{e-1} \frac{f(x)-6x}{x+1} dx = \frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(x^2\right)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $a\pi+\ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a-b+(a+b)i=4$, de unde obținem $a-b=4$ și $a+b=0$	**3p**
	$a=2$ și $b=-2$	**2p**
2.	$m(m-x)^2-2(m-x)+m=m(m+x)^2-2(m+x)+m \Rightarrow x\left(m^2-1\right)=0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x, obținem $m^2-1=0$	**3p**
	$m=-1$ sau $m=1$, care convin	**2p**
3.	$\log_2\left(2x^2\right)=\log_2\left(x^2+x+2\right)$, de unde obținem $x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea F are $4^4=256$ de elemente, deci sunt 256 de cazuri posibile	**2p**
	Pentru fiecare $n\in A$, $f(n)$ se poate alege în n moduri, deci sunt $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{24}{256}=\frac{3}{32}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$, unde M este mijlocul segmentului AB, de unde obținem $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OC}$, deci punctul C este mijlocul segmentului OM	**3p**
	Cum $x_M=2$ și $y_M=4$, obținem $x_C=1$ și $y_C=2$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{AB}{2\sin C}=\frac{8}{2\cdot\frac{1}{2}}=8$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC	**2p**
	Triunghiul OAB este echilateral cu latura egală cu 8, deci distanța de la punctul O la latura AB este $OM=4\sqrt{3}$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3+4+0+4-6-0=5$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}3 & a & -2\\ 2a+1 & 1-a & -1\\ a+2 & -2 & 1\end{vmatrix}=5(1+a)(1-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det\left(A(a)\right)=0 \Leftrightarrow a=-1$ sau $a=1$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**

c)	Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numerele reale b și c; pentru $a\in\{-1,1\}$, $\begin{vmatrix} a & -2 \\ 1-a & -1\end{vmatrix}\neq 0$, deci sistemul este compatibil dacă și numai dacă $\begin{vmatrix} -1 & -2 & b \\ 2 & -1 & c \\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ și $\begin{vmatrix} 1 & -2 & b \\ 0 & -1 & c \\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$	**3p**
	$b=2$ și $c=1$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^4+a\cdot(-1)^3+a\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)-8=$	**3p**
	$=1-a+a-8-8=-15$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	Restul împărțirii polinomului f la polinomul g este egal cu $(a+8)X+a-7$, pentru orice număr real a	**3p**
	$(a+8)X+a-7=15X$, de unde obținem $a=7$	**2p**
c)	Presupunând că rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4 ale polinomului f sunt numere întregi, cum $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$, obținem că $a\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$x_1x_2x_3x_4=-8\Rightarrow\lvert x_1\rvert\cdot\lvert x_2\rvert\cdot\lvert x_3\rvert\cdot\lvert x_4\rvert=8$, de unde obținem că cel puțin o rădăcină a polinomului f are modulul egal cu 1 și, cum $f(-1)\neq 0$ pentru orice număr real a, obținem $f(1)=0$, deci $a=-\frac{1}{2}$, ceea ce este fals, deci polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-1-4x^3\operatorname{arctg}x-(x^4-1)\cdot\frac{1}{x^2+1}=$	**3p**
	$=-1-4x^3\operatorname{arctg}x-x^2+1=-x^2(4x\operatorname{arctg}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(x_0,f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(x_0)=0$	**2p**
	$-x_0{}^2(4x_0\operatorname{arctg}x_0+1)=0$ și, cum $x_0\operatorname{arctg}x_0\geq 0$ pentru orice $x_0\in\mathbb{R}$, obținem $x_0=0$, deci ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $f(0)=1$ și $f(1)=0$, obținem $0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
	Pentru $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{tg}x-x$, $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci g este crescătoare, de unde obținem $\operatorname{tg}x\geq x$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci $\operatorname{tg}(f(x))\geq f(x)\geq f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^3(1+e^{-x})f(x)\,dx=\int_0^3(x^2+e^x)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+e^x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+e^3-0-1=8+e^3$	**2p**
b)	$\int_{-m}^{m}\frac{f(x)}{x^2+e^x}\,dx=\int_{-m}^{m}\frac{1}{1+e^{-x}}\,dx=\int_{-m}^{m}\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx=$	**3p**
	$=\ln(1+e^x)\Big\vert_{-m}^{m}=\ln(1+e^m)-\ln\left(\frac{1+e^m}{e^m}\right)=\ln e^m=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{ax}-1}\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)'}{\left(e^{ax}-1\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{ae^{ax}}=\frac{1}{2a}$, de unde obținem $\frac{1}{2a}=1$, deci $a=\frac{1}{2}$, care convine	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b pentru care $(a+bi)(1+i)=4$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+m$, unde m este număr real nenul. Determinați numerele reale m pentru care $f(m-x)=f(m+x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(2x)-1=\log_2\left(x^2+x+2\right)$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $F=\{f \mid f:A\to A\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un element f din mulțimea F, acesta să verifice inegalitatea $f(n)\le n$, pentru orice $n\in A$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,3)$ și $B(-1,5)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=8$, măsura unghiului C de $30°$ și punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Determinați distanța de la punctul O la latura AB.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a & -2\\ 2a+1 & 1-a & -1\\ a+2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}3x+ay-2z=b\\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c\\ (a+2)x-2y+z=-1\end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+8X-8$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)=-15$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu $15X$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x-\left(x^4-1\right)\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-x^2(4x\operatorname{arctg}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x))\ge f(x)\ge f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=8+e^3$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-m}^{m}\dfrac{f(x)}{x^2+e^x}\,dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1^2+4z_2=(1+2i)^2+4(1-i)=1+4i+4i^2+4-4i=$	**3p**
	$=5+4\cdot(-1)=5-4=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x+m-1=0$	**2p**
	$\Delta=0$ și, cum $\Delta=8-4m$, obținem $8-4m=0$, deci $m=2$	**3p**
3.	$\lg\left(x^2+9\right)=\lg\left(10x^2\right)\Rightarrow x^2+9=10x^2$, de unde obținem $x^2-1=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A, divizibile cu 9, sunt $9\cdot 0$, $9\cdot 1$, $9\cdot 2$, ... $9\cdot 11$, deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$	**2p**
	$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=2\cos^2 x\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x-\cos x)=0$	**2p**
	Cum $x\in[0,\pi]$, obținem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\2&2&1\end{vmatrix}=0\cdot 0\cdot 1+1\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 2\cdot 2-2\cdot 0\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 0=$	**3p**
	$=0-2+4-0-1-0=1$	**2p**
b)	$\det(A(a))=(a-1)^2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=1$, deci sistemul are soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$	**2p**
c)	Pentru $a=1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha,2-\alpha,-2)$, unde $\alpha\in\mathbb{C}$	**2p**
	Cum α este număr întreg și $\alpha>2-\alpha>-2$, obținem $\alpha=2$ sau $\alpha=3$, deci soluțiile sunt $(2,0,-2)$ și $(3,-1,-2)$	**3p**

2.a)	$1*\frac{1}{2}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1+\sqrt{\left(1-1^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}}=$	**3p**
	$=\frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{0}}=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$x*(-x)=\frac{-x^2}{1+\left\|1-x^2\right\|}=\frac{-x^2}{2-x^2}$, pentru orice $x\in M$	**3p**
	$\left(x*(-x)\right)+x^2=\frac{x^2\left(1-x^2\right)}{2-x^2}\geq 0$, deci $x*(-x)\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$	**2p**
c)	$a*b=1\Rightarrow\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}=ab-1$, deci $ab\geq 1$	**3p**
	Cum $a,b\in M$, obținem $ab=1$, deci perechile sunt $(-1,-1)$ și $(1,1)$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{1}{e^x+x^2}\cdot\left(e^x+2x\right)=$	**3p**
	$=\frac{x^2-2x}{e^x+x^2}=\frac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$\frac{a(a-2)}{e^a+a^2}=0\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in(-\infty,0]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,0]$; pentru orice $x\in[0,2]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,2]$; pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	Cum f este continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=-1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$, imaginea funcției f este $(-\infty,-1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=9+3=12$	**2p**
b)	$\int_{-2}^1\frac{f(x)}{x^2+1}dx=\int_{-2}^1\frac{(x+3)'}{\sqrt{x+3}}dx=\left.2\sqrt{x+3}\right\|_{-2}^1=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
c)	$\frac{1}{f(x)}=\frac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}\leq\frac{2}{x^2+1}$, pentru orice $x\in[0,1]$, de unde obținem $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\leq 2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=$	**3p**
	$=\left.2\mathrm{arctg}x\right\|_0^1=\frac{\pi}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1+2i$ și $z_2 = 1-i$. Arătați că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care graficele funcțiilor f și g au exact un punct comun.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x^2+9\right)=2\lg\left(x\sqrt{10}\right)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de cel mult două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii AC, iar punctele D și E aparțin segmentului AB, astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Determinați $x\in[0,\pi]$ pentru care $\sin 2x = 1+\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+2z=-2 \\ x+ay-z=4 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0 > y_0 > z_0$.

2. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy}{1+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}$.

5p **a)** Arătați că $1*\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $x*(-x)\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numere din mulțimea M pentru care $a*b=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1-\ln\left(e^x+x^2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-2}^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,dx=2$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 \dfrac{1}{f(x)}\,dx\le\dfrac{\pi}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2-i)^2+i(4+i)=4-4i+i^2+4i+i^2=$	**3p**
	$=4-1-1=2$	**2p**
2.	$(f\circ f)(m)=m+6$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m+6=2m$, de unde obținem $m=6$	**2p**
3.	$5\cdot 5^x-3\cdot 5^x=10$, deci $2\cdot 5^x=10$, de unde obținem $5^x=5$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Deoarece cifrele pot fi 7, 8 și 9, sunt $3\cdot 3=9$ numere naturale de două cifre care au cifrele mai mari sau egale cu 7, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**3p**
5.	$m_{AB}=-2$	**2p**
	$m_{OC}=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real nenul a și, cum $m_{AB}\cdot m_{OC}=(-2)\cdot\frac{1}{2}=-1$, obținem că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+4\cdot\frac{3}{4}=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&-2&0\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&-1&2a\\1&-2&a\\1&1&1-a\end{vmatrix}=(a+1)^2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**3p**
c)	Pentru $a=-1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(-\alpha,-\alpha,\alpha)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$	**2p**
	$x_0^2+y_0^2+z_0^2=3\alpha^2$, deci $3\alpha^2=3$, de unde obținem $\alpha=-1$ sau $\alpha=1$, deci soluțiile sunt $(1,1,-1)$ și $(-1,-1,1)$	**3p**

2.a)	$0*1=0^2\cdot1^2-4(0+1)^2+1=$ $=0-4+1=-3$	**3p** **2p**
b)	$x*(-1)=-3x^2+8x-3=$ $=-3x^2+6x-3+2x=-3(x-1)^2+2x\le 2x$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
c)	$m^2n^2-4(m+n)^2+1=1$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $mn-2m-2n=0$ $(m-2)(n-2)=4$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m\le n$, perechile sunt $(3,6)$ și $(4,4)$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{5}-\frac{2x+1}{x^2+x+5}=$ $=\frac{x^2+x+5-10x-5}{5(x^2+x+5)}=\frac{x^2-9x}{5(x^2+x+5)}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a)=0$ $a^2-9a=0$, de unde obținem $a=0$ sau $a=9$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,0]$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[0,9]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,9]$, deci $f(x)\le f(0)$, pentru orice $x\in(-\infty,9]$ $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(9,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(9,+\infty)$ și, cum $f(0)=-\ln 5<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^2 (x^3+8)f(x)\,dx=\int_0^2 4x\,dx=2x^2\Big\vert_0^2=$ $=8-0=8$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^4 xf(x)\,dx=\int_1^4\frac{4x^2}{x^3+8}dx=\frac{4}{3}\int_1^4\frac{(x^3+8)'}{x^3+8}dx=\frac{4}{3}\cdot\ln(x^3+8)\Big\vert_1^4=$ $=\frac{4}{3}\ln 8=4\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot f(x)}{3x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{3(x^3+8)}=\frac{1}{6}$	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(2-i)^2+i(4+i)=2$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Determinați numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=2m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}-3\cdot 5^x=10$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(3,-2)$ și $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul. Arătați că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+4\cos\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-y+2az=0 \\ x-2y+az=0 \\ x+y+(1-a)z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=-1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-4(x+y)^2+1$.

5p **a)** Arătați că $0*1=-3$.

5p **b)** Arătați că $x*(-1)\le 2x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $m*n=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{5}-\ln\left(x^2+x+5\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-9x}{5\left(x^2+x+5\right)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(x^3+8\right)f(x)\,dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4 xf(x)\,dx = 4\ln 2$.

5p **c)** Calculați $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)$.