Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+0,5)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{5}{10}\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$	**2p**
2.	$3x-5=1-3x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$x+5=9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	$x-\frac{30}{100}\cdot x=700$, unde x este preţul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=1000$ de lei	**2p**
5.	Triunghiul AOB este dreptunghic în O, $AB=10$	**2p**
	Lungimea medianei din O este egală cu $\frac{AB}{2}=\frac{10}{2}=5$	**3p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$	**3p**
	$\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ-(\sin 30^\circ+\cos 60^\circ)=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{2}-1=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-1)\cdot 3=$	**3p**
	$=2+3=5$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3 & 3+x\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=-3$	**3p**
	$A\cdot B(-3)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I_2$	**2p**
c)	$B(x)\cdot B(x)-I_2=\begin{pmatrix}4+x & 3x\\ 3 & x+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+x & 3x\\ 3 & x\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{vmatrix}3+x & 3x\\ 3 & x\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=6$	**3p**
2.a)	$10\circ 8=10\cdot 8-9(10+8)+90=$	**3p**
	$=80-162+90=8$	**2p**
b)	$x\circ y=xy-9x-9y+81+9=$	**2p**
	$=x(y-9)-9(y-9)+9=(x-9)(y-9)+9$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**

c)	$(n-9)^2+9\le 10 \Leftrightarrow (n-10)(n-8)\le 0$	2p
	Cum n este număr natural, obținem $n=8$, $n=9$ sau $n=10$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+3\right)-(x-1)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=$	3p
	$=\dfrac{-x^2+2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{(3-x)(x+1)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=0$	3p
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,3]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	2p
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $f(3)=\dfrac{1}{6}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, deci $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{6}$ și $-\dfrac{1}{2}\le f(y)\le\dfrac{1}{6}$, de unde obținem $-1\le f(x)+f(y)\le\dfrac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y	3p
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-\dfrac{1}{e^x}\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\|_{-1}^{1}=$	3p
	$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$	2p
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $F''(x)=-\dfrac{1}{e^x}+1$, $x\in\mathbb{R}$	2p
	$F''(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci funcția F este concavă pe intervalul $(-\infty,0]$	3p
c)	$\int\limits_{0}^{1}e^x f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{1}\left(1+xe^x\right)dx=\left(x+(x-1)e^x\right)\Big\|_{0}^{1}=$	3p
	$=1+0-0-(-1)\cdot e^0=2$	2p

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+0,5)=\frac{3}{4}$.

5p **2.** Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-3x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+5)=\log_3 9$.

5p **4.** După o ieftinire cu 30%, prețul unui obiect este 700 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$ și $B(8,0)$. Determinați lungimea medianei din vârful O în triunghiul AOB.

5p **6**. Arătați că $\sqrt{2}\cdot\sin 45°-(\sin 30°+\cos 60°)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2 & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=5$.

5p **b)** Arătați că, dacă $A+B(x)=3I_2$, atunci $A\cdot B(x)=5I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B(x)\cdot B(x)-I_2\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-9(x+y)+90$.

5p **a)** Arătați că $10\circ 8=8$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x-9)(y-9)+9$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n\le 10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(3-x)(x+1)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-1\le f(x)+f(y)\le\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{e^x}+x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-\frac{1}{e^x}\right)dx=0$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $30\cdot\left(\frac{1}{3}-0,3\right)=1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-x+a=0$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1x_2-1<0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}=9^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$ și $B(4,4)$. Demonstrați că punctele A, O și B sunt coliniare.

5p **6**. Demonstrați că $(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=16$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A\cdot B=aI_2$.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(xA+\frac{1}{x}B\right)\geq 49$, pentru orice număr real nenul x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=5xy+15(x+y)+42$.

5p **a)** Arătați că $(-2)\circ(-2)=2$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x-3)\circ(x-3)\circ(x-3)=197$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

5p **c)** Demonstrați că $-e\leq f(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}(f(x)-1)\,dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Calculați $\int\limits_{1}^{e} f(x)\ln x\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$30\cdot\left(\frac{1}{3}-0,3\right)=30\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{10}\right)=30\cdot\frac{10-9}{30}=$	**3p**
	$=30\cdot\frac{1}{30}=1$	**2p**
2.	$x_1x_2=a$	**3p**
	$a-1<0\Leftrightarrow a\in(-\infty,1)$	**2p**
3.	$3^{x+1}=3^{2x}\Leftrightarrow x+1=2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 9 numere naturale de două cifre care au cifra unităților egală cu 3, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$AO=\sqrt{2}$, $OB=4\sqrt{2}$	**2p**
	$AB=5\sqrt{2}\Rightarrow AB=AO+OB$, deci punctele A, O și B sunt coliniare	**3p**
6.	$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=$	**3p**
	$=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\end{vmatrix}=1\cdot 6-2\cdot(-5)=$	**3p**
	$=6+10=16$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$	**3p**
	$a=16$	**2p**
c)	$\det\left(xA+\frac{1}{x}B\right)=\begin{vmatrix}x+\frac{6}{x} & -5x+\frac{5}{x}\\ 2x-\frac{2}{x} & 6x+\frac{1}{x}\end{vmatrix}=16x^2+\frac{16}{x^2}+17$	**3p**
	$16x^2+\frac{16}{x^2}+17\geq 49\Leftrightarrow 16x^2+\frac{16}{x^2}-32\geq 0\Leftrightarrow 16\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\geq 0$, relație adevărată pentru orice număr real nenul x	**2p**

2.a)	$(-2)\circ(-2)=5\cdot(-2)\cdot(-2)+15(-2+(-2))+42=$ $=20-60+42=2$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=5xy+15x+15y+45-3=$ $=5x(y+3)+15(y+3)-3=5(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$(x-3)\circ(x-3)=5x^2-3$, $(x-3)\circ(x-3)\circ(x-3)=25x^3-3$ $25x^3-3=197 \Leftrightarrow x=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1\cdot e^x+(x-2)e^x=$ $=e^x(1+x-2)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{-x}}=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,2]$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $f(1)=-e$ și $f(2)=0$, deci $-e\le f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}(f(x)-1)dx=\int_{-1}^{1}3x^2dx=x^3\Big\vert_{-1}^{1}=$ $=1-(-1)=2$	**3p** **2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=3x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$ $F'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p** **3p**
c)	$\int_1^e f(x)\ln x\,dx=\int_1^e(3x^2+1)\ln x dx=(x^3+x)\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e(x^3+x)\cdot\frac{1}{x}dx=e^3+e-\int_1^e(x^2+1)dx=$ $=e^3+e-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_1^e=e^3+e-\left(\frac{e^3}{3}+e\right)+\left(\frac{1^3}{3}+1\right)=\frac{2e^3+4}{3}$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{4-1}{2}\cdot\frac{9-1}{3}\cdot\frac{16-1}{4}\cdot\frac{1}{5}=$	**3p**
	$=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{5}=3$	**2p**
2.	$a^2+2+(a+1)^2+2=5 \Leftrightarrow 2a^2+2a=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=0$	**2p**
3.	$5^{2x-4}=5^2 \Leftrightarrow 2x-4=2$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea M are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 5 numere divizibile cu 10, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{9}$	**2p**
5.	$M(4,3)$	**2p**
	$OM=5$	**3p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$	**3p**
	$2\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 4 & 8\end{vmatrix}=5\cdot 8-4\cdot 1=$	**3p**
	$=40-4=36$	**2p**
b)	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}a-2 & 1\\ 4 & a+1\end{vmatrix}=a^2-a-6$	**2p**
	$M(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(M(a))\neq 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$	**3p**
c)	$\begin{pmatrix}xy-2x-2y+8 & x+y-1\\ 4x+4y-4 & xy+x+y+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 8\end{pmatrix} \Leftrightarrow xy=1$ și $x+y=2$	**3p**
	$x=1$, $y=1$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+m\cdot 1-6=$	**3p**
	$=1+m-6=m-5$, pentru orice număr real m	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2m$ $-2m=4 \Leftrightarrow m=-2$	**3p** **2p**
c)	$X^3-7X-6=X^3+(p+1)X^2+(p+q)X+q$ $p=-1$, $q=-6$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3\cdot 2x=$ $=3x^2-6x=3x(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=-3$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-3x+4$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[0,2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,2]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ și $f(2)=-1$, deci $f(x)\ge -1$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(3x^2-x)dx=\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_{-1}^{1}=$ $=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)=2$	**3p** **2p**
b)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}(3x^2-x)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\left(2+\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)=2$ și $f(1)=2$, obținem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(3x^2-x)dx+\int_1^2\left(2+\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)dx=\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_0^1+2x\Big\|_1^2+\frac{\ln^2 x}{2}\Big\|_1^2=\frac{5+\ln^2 2}{2}$ $\frac{5+\ln^2 2}{2}=\frac{n^2-4+\ln^2 2}{2}\Leftrightarrow n^2-9=0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=3$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$. Determinaţi numerele reale a pentru care $f(a)+f(a+1)=5$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x-4}=25$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,15,20,25,30,35,40,45,50\}$, acesta să fie un număr divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,1)$ și $B(2,5)$. Calculaţi lungimea segmentului OM, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Arătați că $2\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}a-2 & 1\\ 4 & a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=36$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $M(x)\cdot M(y)=A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX-6$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)=m-5$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=-7$, determinați numerele reale p și q, pentru care $f=(X+1)\left(X^2+pX+q\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3x(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\ge -1$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-x, & x\in(-\infty,1]\\ 2+\frac{1}{x}\cdot\ln x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural n pentru care $\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{n^2-4+\ln^2 2}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=\sqrt{16}+\sqrt{8}-2\sqrt{2}=$	**2p**
	$=4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4=2^2$	**3p**
2.	$f(a)=a^2-a+2$, $g(a)=a+1$	**2p**
	$a^2-a+2=a+1\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1$	**3p**
3.	$2x^2-6x+5=x^2-2x+1\Rightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$ care convine	**2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=-1$, deci panta dreptei d este $m_d=-1$	**2p**
	Mijlocul segmentului OA este punctul $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$, deci ecuaţia dreptei d este $y=-x+\frac{3}{2}$	**3p**
6.	$(\sin x+7\cos x)^2=\sin^2 x+14\sin x\cos x+49\cos^2 x$	**2p**
	$(7\sin x-\cos x)^2=49\sin^2 x-14\sin x\cos x+\cos^2 x\Rightarrow(\sin x+7\cos x)^2+(7\sin x-\cos x)^2=$ $=50\sin^2 x+50\cos^2 x=50\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=50$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1-0=1$	**3p**
b)	$A(m)+A(-m)=\begin{pmatrix}1&2\\m&m+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-m&-m+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=-1\Rightarrow(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(5)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}7&6\\-3&-2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=$	**2p**
	$=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x\circ\left(-\frac{2}{3}\right)=3(x+1)\left(-\frac{2}{3}+1\right)-1=3(x+1)\cdot\frac{1}{3}-1=$	**3p**
	$=x+1-1=x$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$3(n+1)n-1<17\Leftrightarrow n^2+n-6<0$	**3p**
	$n\in(-3,2)$ şi, cum n este număr natural, obţinem $n=0$, $n=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x+6)(x-2)-\left(x^2+6x\right)\cdot 1}{(x-2)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}=\frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x}{x(x-2)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x-x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x}{x-2}=8$, deci dreapta de ecuaţie $y=x+8$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{32}{(x-2)^3}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)\Rightarrow f$ nu are puncte de inflexiune	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)dx=\int_0^1\left(e^x+1\right)\cdot\frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^1 1dx=x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{x}{f(x)}dx=\int_0^1 x\left(e^x+1\right)dx=\int_0^1 xe^x dx+\int_0^1 xdx=$	**2p**
	$=(x-1)e^x\Big\|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big\|_0^1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
c)	$g(x)=\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=$	**2p**
	$=\pi\ln\left(e^x+1\right)\Big\|_0^1=\pi\ln\frac{e+1}{2}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\sqrt{8}\left(\sqrt{2}+1\right)-2\sqrt{2}$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2-6x+5}=x-1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(3,0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin mijlocul segmentului AO și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Arătați că $(\sin x+7\cos x)^2+(7\sin x-\cos x)^2=50$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & m+1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(m)+A(-m)=2A(0)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(5)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x\circ\left(-\frac{2}{3}\right)=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ(n-1)<17$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+6x}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f **nu** are puncte de inflexiune.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)\,dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\frac{x}{f(x)}\,dx=\frac{3}{2}$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{e^x f(x)}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1q^3=24\Rightarrow q^3=8$	**3p**
	$q=2$	**2p**
2.	$f(a)=2\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$\log_3\left((x+1)(x-1)\right)=\log_3 8\Rightarrow x^2-1=8$	**3p**
	$x=-3$, care nu verifică ecuația și $x=3$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Cifrele pot fi 1 sau 7	**2p**
	Numerele sunt 117, 171 și 711	**3p**
5.	$AB=5$	**2p**
	$AC=10\Rightarrow AC=2AB$	**3p**
6.	$MP=4$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{4\cdot 4\cdot\frac{1}{2}}{2}=4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$5A-3B=5\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&35\\10&25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15&-21\\-6&9\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&56\\16&16\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}0&7\\2&2\end{pmatrix}$	**2p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}3\cdot5+7\cdot(-2)&3\cdot(-7)+7\cdot3\\2\cdot5+5\cdot(-2)&2\cdot(-7)+5\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}5\cdot3+(-7)\cdot2&5\cdot7+(-7)\cdot5\\(-2)\cdot3+3\cdot2&(-2)\cdot7+3\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$, deci matricea B este inversa matricei A	**3p**
c)	$xA\cdot A\cdot B-8A\cdot B=yI_2\cdot B\Leftrightarrow xA-8I_2=yB\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3x&7x\\2x&5x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5y&-7y\\-2y&3y\end{pmatrix}$	**3p**
	$x=1$, $y=-1$	**2p**
2.a)	$x*y=xy-2x-2y+4+2=$	**2p**
	$=x(y-2)-2(y-2)+2=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$(x-2)(3-2)+2=2018$	**2p**
	$x=2018$	**3p**

c)	$x*2=2$ și $2*y=2$, pentru x și y numere reale $\log_2 2*\log_2 3*\log_2 4*\ldots*\log_2 2018=\left(\left(\log_2 2*\log_2 3\right)*2\right)*\left(\log_2 5*\ldots*\log_2 2018\right)=$ $=2*\left(\log_2 5*\ldots*\log_2 2018\right)=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^5-6$, $x\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$f(x)\geq f(1)$, deci $f(x)\geq 5$, pentru orice număr real x $f(0,9)\geq 5$ și $f(1,1)\geq 5$, deci $f(0,9)+f(1,1)\geq 10$	**2p** **3p**
2.a)	$\int\limits_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_1^2 e^x dx=e^x\Big\|_1^2=$ $=e^2-e=e(e-1)$	**3p** **2p**
b)	$F(x)=\int xe^x dx=(x-1)e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$ $(1-1)e+c=0\Rightarrow c=0$, deci $F(x)=(x-1)e^x$	**3p** **2p**
c)	$\int\limits_0^1 f(x)\,f'(x)dx=\frac{1}{2}f^2(x)\Big\|_0^1=\frac{1}{2}e^2$ $\frac{1}{2}e^2=\frac{1}{2}e^a\Rightarrow a=2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 3$ și $b_4 = 24$.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = \log_3 8$.

5p **4.** Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 7.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,5)$ și $C(7,10)$. Arătați că $AC = 2AB$.

5p **6.** Calculați aria triunghiului MNP, știind că $MN = 4$ și $m(\sphericalangle N) = m(\sphericalangle P) = 75^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $5A - 3B = 8\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **b)** Demonstrați că matricea B este inversa matricei A.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y, știind că $xA \cdot A - 8A = yI_2$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 2(x+y) + 6$.

5p **a)** Demonstrați că $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numărul real x, pentru care $x * 3 = 2018$.

5p **c)** Calculați $\log_2 2 * \log_2 3 * \log_2 4 * \ldots * \log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 6x + 10$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 5}{x - 1} = 0$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(0{,}9) + f(1{,}1) \geq 10$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x}\,dx = e(e-1)$.

5p **b)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 0$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(x)\, f'(x)\,dx = \dfrac{1}{2}e^a$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=$	**3p**
	$=\frac{2}{2}=1\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(1)=2\Leftrightarrow -1+3m=2$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=2\Rightarrow(\log_2 x-1)^2=0$	**3p**
	$\log_2 x=1\Rightarrow x=2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea M are 4 elemente, deci sunt 4 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 3 numere care verifică inegalitatea dată, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{4}$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $C(2,5)$, deci $\frac{1+b}{2}=2$ și $\frac{a+7}{2}=5$	**3p**
	$a=3$ și $b=3$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow AC=\frac{6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=6\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(-2)=\begin{vmatrix}-2&-2&-2\\3&-1&-2\\2&-2&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+12+8-4+8-6=16$	**3p**
b)	$D(x)=\begin{vmatrix}x&x&x\\3&-1&x\\2&x&-1\end{vmatrix}=x+3x^2+2x^2+2x-x^3+3x=-x^3+5x^2+6x=$	**3p**
	$=x(-x^2+5x+6)=x(x+1)(6-x)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)(6-\sqrt{a})=0$	**2p**
	$a=0$ sau $a=36$	**3p**

2.a)	$M(1)+M(3)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=2M(2)$	**2p**
b)	$M(m)\cdot M(n)=\begin{pmatrix}1&2-m\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2-n\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2-n+2-m\\0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&2-(m+n-2)\\0&1\end{pmatrix}=M(m+n-2)$, pentru orice numere reale m și n	**2p**
c)	$M(2x-2)=M\left(x^2-1\right)$	**3p**
	$2x-2=x^2-1$, de unde obținem $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-3)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-1}{x-2}=2$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-8x+3}{2x-2}\cdot\frac{x-2}{x^2-4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(4-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^3\left(2-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+3}{x(x-2)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x+3}{x-2}=-2$, deci dreapta de ecuație $y=x-2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(2x^2-3x+4\right)=3$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(3x)=3$	**2p**
	Cum $f(1)=3$, obținem $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în punctul $x=1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{3x-9}{(x-3)\left(\sqrt{3x}+3\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to3}\frac{3}{\sqrt{3x}+3}=\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=\begin{cases}-x^4+x^3+2x^2-3x+5, & x\in(-\infty,1)\\-x^4+x^3+3x+1, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$ este funcție continuă	**2p**
	$(f+g)(0)=5>0$ și $(f+g)(2)=-1<0$, deci ecuația $(f+g)(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,2)$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ este natural.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+3m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_x 2=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $M=\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $\frac{(n+2)!}{n!}\le 20$.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,a)$, $B(b,7)$ și $C(2,5)$, unde a și b sunt numere reale. Știind că punctul C este mijlocul segmentului AB, determinați numerele reale a și b.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AC a ΔABC, știind că $AB=6$, $m(\sphericalangle B)=45^\circ$ și $m(\sphericalangle C)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} x & x & x \\ 3 & -1 & x \\ 2 & x & -1 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $D(-2)=16$.

5p **b)** Demonstrați că $D(x)=x(x+1)(6-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele naturale a pentru care $D(\sqrt{a})=0$.

2. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix} 1 & 2-m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $M(1)+M(3)=2M(2)$.

5p **b)** Demonstrați că $M(m)\cdot M(n)=M(m+n-2)$, pentru orice numere reale m și n.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $M(x)\cdot M(x)=M(x^2-1)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=2$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+4, & x\in(-\infty,1) \\ 3x, & x\in[1,+\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x=1$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-3}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1+x^3-x^4$. Demonstrați că ecuația $(f+g)(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,2)$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{12}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2$	**2p**
	$a^2-2=a$, deci $a=-1$ sau $a=2$	**3p**
3.	$2^{7x-5}=2^{2x}\Leftrightarrow 7x-5=2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**1p**
	În mulţimea A sunt 4 numere care verifică relaţia dată, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{5}$	**2p**
5.	$Q(5,2)$	**2p**
	$MQ=\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2}=4$	**3p**
6.	$\sin 30°=\cos 60°$, $\sin 45°=\cos 45°$	**2p**
	$\sin 30°+\sin 45°-\cos 60°-\cos 45°=\sin 30°+\sin 45°-\sin 30°-\sin 45°=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=4+1=5$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}x & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}xy-1 & x+2\\ -y-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
	$x=-2$, $y=-2$	**2p**
c)	$A(p)\cdot A(p)+I_2=\begin{pmatrix}p^2 & p+2\\ -p-2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(p)\cdot A(p)+I_2\right)=5p^2+4p+4$	**2p**
	$5p^2+4p+4=5\Leftrightarrow 5p^2+4p-1=0$ și, cum p este număr întreg, obținem $p=-1$	**3p**
2.a)	$2*2=2\cdot 2-(2+2)+2=$	**3p**
	$=4-4+2=2$	**2p**
b)	$x*y=xy-x-y+1+1=$	**2p**
	$=x(y-1)-(y-1)+1=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$1*x=x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$1*2*3*\ldots*2018=1*(2*3*\ldots*2018)=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+1)\left(x^2+2x+2\right)-\left(x^2+x+1\right)(2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+2x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\dfrac{x(x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1)=1$, $f'(-1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$, adică $y=-x$	**3p**
c)	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-2]$, $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-2,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2,0]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $f(-2)=\dfrac{3}{2}$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, deci $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{3}{2}$ și $\dfrac{1}{2}\le f(y)\le\dfrac{3}{2}$, de unde obținem $1\le f(x)+f(y)\le 3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-x^3\right)dx=\int_0^1\left(-6x^2+12x+5\right)dx=\left(-2x^3+6x^2+5x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=-2+6+5-0=9$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $F''(x)=3x^2-12x+12$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F''(x)=3(x-2)^2\ge 0$, pentru orice număr real x, deci funcția F este convexă pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$f'(x)=3(x-2)^2\Rightarrow\int_2^4\dfrac{3}{f'(x)+12}dx=\int_2^4\dfrac{1}{(x-2)^2+4}dx=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{2}\Big\|_2^4=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Determinați numerele reale a, știind că $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{7x-5}=4^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice relația $2^n\le 16$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$, $N(4,3)$ și $P(6,1)$. Determinați lungimea segmentului MQ, unde Q este mijlocul segmentului NP.

5p **6**. Arătați că $\sin 30°+\sin 45°-\cos 60°-\cos 45°=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1\\-1&2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x)\cdot A(y)=3I_2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg p pentru care $\det\left(A(p)\cdot A(p)+I_2\right)=5$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-(x+y)+2$.

5p **a)** Arătați că $2*2=2$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\ldots*2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $1\le f(x)+f(y)\le 3$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+12x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-x^3\right)dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că $\int_2^4\dfrac{3}{f'(x)+12}dx=\dfrac{\pi}{8}$.