Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{7}=$	**2p**
	$=7+0=7$	**3p**
2.	$f(0)=8$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=8$	**2p**
3.	$x^2+9=5^2 \Rightarrow x^2-16=0$	**2p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care convin	**3p**
4.	$x-\frac{40}{100}\cdot x=300$, unde x este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=500$ de lei	**2p**
5.	$M(0,2)$, unde punctul M este mijlocul laturii AB	**2p**
	$CM=4$	**3p**
6.	$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60°-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{vmatrix}=6\cdot(-5)-3\cdot(-10)=$	**3p**
	$=-30+30=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=A$ și $M(a)\cdot M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A=$	**2p**
	$=I_2+aA+bA+abA=I_2+(a+b+ab)A=M(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	$(I_2+A)+(I_2+2A)+\ldots+(I_2+2019A)=2019I_2+(1+2+\ldots+2019)A=$	**3p**
	$=2019(I_2+1010A)=2019M(1010)$, de unde obținem $a=1010$	**2p**
2.a)	$f(1)=m\cdot 1^3+2\cdot 1^2-m\cdot 1-2=$	**3p**
	$=m+2-m-2=0$, pentru orice număr real nenul m	**2p**
b)	$f=3X^3+2X^2-3X-2\Rightarrow f=(X-1)(X+1)(3X+2)$	**2p**
	$x_1=-1,\ x_2=-\frac{2}{3},\ x_3=1$	**3p**
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1,\ x_1x_2x_3=\frac{2}{m}$	**2p**
	$\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=-4\Leftrightarrow\frac{-m}{2}=-4\Leftrightarrow m=8$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3=$ $=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f''(x)=6x$, $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $[0,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]$ $f(x)\leq f(-1)$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$ și $f(-1)=7$, deci $f(x)\leq 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(3x^2+6x+7\right)dx=\left.\left(\frac{3x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+7x\right)\right\|_0^1=$ $=1+3+7-0=11$	**3p** **2p**
b)	$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}\,dx=\int_{-1}^1\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+7}}\,dx=\left.\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+6x+7}\right\|_{-1}^1=$ $=\frac{1}{3}\left(\sqrt{16}-\sqrt{4}\right)=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
c)	$\sqrt{3x^2+6x+7}\geq\sqrt{7}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ $\mathcal{A}=\int_0^a\left\|f(x)\right\|dx=\int_0^a\sqrt{3x^2+6x+7}\,dx\geq\int_0^a\sqrt{7}\,dx=a\sqrt{7}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{7}=7$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-6x+8$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2+9\right)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 40%, preţul unui obiect este 300 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$, $B(-3,2)$ şi $C(0,6)$. Determinaţi, în triunghiul ABC, lungimea medianei din vârful C.

5p **6.** Arătați că $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60°-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45°=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $M(1)+M(2)+\ldots+M(2019)=2019M(a)$.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+2X^2-mX-2$, unde m este număr real nenul.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinaţi rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m pentru care $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+7}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=11$.

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$ are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6\sqrt{3}+2\left(1-\sqrt{27}\right)=6\sqrt{3}+2\left(1-3\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=6\sqrt{3}+2-6\sqrt{3}=2$	**2p**
2.	$f(2)=0$	**3p**
	$f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)=0$	**2p**
3.	$20x-6=14$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	$x+\frac{10}{100}\cdot x=440$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=400$ de lei	**2p**
5.	Mijlocul segmentului BC este punctul $M(3,3)$	**2p**
	$AM=1$	**3p**
6.	$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$	**3p**
	$\frac{\cos 30°}{1+\sin 30°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}30°$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -6 & -9\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-9)-(-6)\cdot 2=$	**3p**
	$=9+12=21$	**2p**
b)	$A(-a)+A(a)=\begin{pmatrix}-a+1 & -a+2\\ -a-2 & -a+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+1 & a+2\\ a-2 & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}a+1 & a+2\\ a-2 & a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ b-2 & b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & -9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2ab-a+3b-3 & 2ab+3a+3b+4\\ 2ab-a-b-4 & 2ab-b+3a-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & -9\end{pmatrix}$	**2p**
	Obținem $a=-1$, $b=1$	**3p**
2.a)	$2\circ(-2)=2\left(2+(-2)\right)-\frac{2\cdot(-2)}{2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**

b)	$2\left(n+\frac{1}{n}\right)-\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{2}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow n+\frac{1}{n}=\frac{5}{2}$	**3p**
	Cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**2p**
c)	$2(x+y)-\frac{xy}{2}=8\Leftrightarrow 4x+4y-xy-16=0\Leftrightarrow(x-4)(4-y)=0$, pentru orice număr real x	**3p**
	$y=4$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{x^2+4-x\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{(2-x)(2+x)}{\left(x^2+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-2]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-2,2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-2,2]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-2)=-\frac{1}{4}$, $f(2)=\frac{1}{4}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci mulțimea valorilor funcției f este $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 x(x+1)\left(f(x)+\frac{1}{x+2}\right)dx=\int_0^2 x\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^2=2$	**3p**
b)	$\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}-1+\frac{2}{x+2}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(-\ln(x+1)+2\ln(x+2)\right)\Big\vert_0^1=2\ln 3-3\ln 2=\ln\frac{9}{8}$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln(x+1)-\ln(x+2)\right)\Big\vert_0^1=\ln\frac{4}{3}$	**3p**
	$\ln\left(p^2+\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{4}{3}\Leftrightarrow p^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow p^2-1=0$ și, cum p este număr natural, obținem $p=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $6\sqrt{3}+2\left(1-\sqrt{27}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(20x-6)=\log_5 14$.

5p **4.** După o scumpire cu 10%, un obiect costă 440 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(0,6)$ și $C(6,0)$. Calculați distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC.

5p **6**. Arătați că $\dfrac{\cos 30°}{1+\sin 30°}=\operatorname{tg} 30°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & -9\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1 & a+2\\ a-2 & a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det M=21$.

5p **b)** Demonstrați că $A(-a)+A(a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $A(a)\cdot A(b)=M$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2(x+y)-\dfrac{xy}{2}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ(-2)=2$.

5p **b)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $n\circ\dfrac{1}{n}=\dfrac{9}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real y astfel încât $x\circ y=8$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(2-x)(2+x)}{\left(x^2+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 x(x+1)\left(f(x)+\frac{1}{x+2}\right)dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\ln\frac{9}{8}$.

5p **c)** Determinați numărul natural p, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\ln\left(p^2+\dfrac{1}{3}\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{13}{5}=\frac{5}{6}:\frac{13}{6}\cdot\frac{13}{5}=$	**3p**
	$=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{13}{5}=1$	**2p**
2.	$f(m+1)=2(m+1)-4=2m-2$	**3p**
	$2m-2=m\Leftrightarrow m=2$	**2p**
3.	$2x+3=9\Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 3 numere multiplu de 3, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**1p**
5.	$MP=4$, $NP=3$	**2p**
	ΔMPN este dreptunghic în P, deci $\mathcal{A}_{\Delta MPN}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$	**3p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin 60^\circ+\sin^2 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$M(a)\cdot M(b)=\begin{pmatrix}1+a & -a\\ a & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+b & -b\\ b & 1-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a+b & -b-a\\ a+b & 1-a-b\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+(a+b) & -(a+b)\\ a+b & 1-(a+b)\end{pmatrix}=M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$M(a)\cdot M(-a)=M(0)=I_2\Rightarrow\left(M(a)\right)^{-1}=M(-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$X=\left(M(1)\right)^{-1}\cdot A\cdot\left(M(2)\right)^{-1}\Rightarrow X=M(-1)\cdot A\cdot M(-2)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-11 & 18\\ -17 & 28\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(0)=2\cdot 0^3-4\cdot 0^2+4\cdot 0-3=$	**3p**
	$=0-0+0-3=-3$	**2p**

b)	$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$, $x_1x_2x_3=\frac{3}{2}$	**2p**
	$a=\frac{3}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{3}{x_3}=\frac{3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{x_1x_2x_3}=4$, care este număr natural	**3p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=2^2-2\cdot 2=0$	**2p**
	Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt numere reale, atunci $x_1=x_2=x_3=0$, ceea ce nu convine deoarece $f(0)=-3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{x^6+5-x\cdot 6x^5}{(x^6+5)^2}=\frac{5-5x^6}{(x^6+5)^2}=$	**3p**
	$=\frac{5(1-x^6)}{(x^6+5)^2}=\frac{5(1-x^3)(1+x^3)}{(x^6+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=\frac{1}{5}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\frac{1}{5}x$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\frac{1}{6}$, $f(1)=\frac{1}{6}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci mulțimea valorilor funcției f este $\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1(x-1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}-1-0=-\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$F'(x)=\left((x-2)e^x+2019\right)'=1\cdot e^x+(x-2)e^x+0=$	**3p**
	$=(x-1)e^x=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_0^1 f^2(x)f'(x)dx=\left.\frac{f^3(x)}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{f^3(1)-f^3(0)}{3}=\frac{0-(-1)}{3}=\frac{1}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{13}{5}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$. Determinați numărul real m, știind că $f(m+1)=m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x+3)=\log_7 9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(4,1)$, $N(1,5)$ și $P(4,5)$. Calculați aria triunghiului MNP.

5p **6**. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin 60^\circ+\sin^2 45^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}1+a & -a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M(1)\cdot X\cdot M(2)=A$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2+4X-3$.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-3$.

5p **b)** Demonstrați că numărul $a=\frac{3}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{3}{x_3}$ este natural, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

5p **c)** Demonstrați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^6+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{5(1-x^3)(1+x^3)}{(x^6+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-2)e^x+2019$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați $\int_0^1 f^2(x)f'(x)dx$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$N=16+24i+9i^2+9-24i+16i^2=$	**2p**
	$=16-9+9-16=0$, care este număr natural	**3p**
2.	$f(a)=a \Leftrightarrow 2-a^2=a \Leftrightarrow a^2+a-2=0$	**3p**
	$a=-2$ sau $a=1$	**2p**
3.	$5^x(1+5)=30 \Leftrightarrow 5^x=5$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea M are 49 de elemente, deci sunt 49 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 7 numere naturale, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{49}=\dfrac{1}{7}$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AC este punctul $M(2,3)$	**2p**
	$BM=\sqrt{(3-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$	**3p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=$	**2p**
	$=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\cdot 1=2$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}n-1 & 0\\ 0 & n-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n+1 & 0\\ 0 & n+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2018 & 0\\ 0 & 2018\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2n & 0\\ 0 & 2n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2018 & 0\\ 0 & 2018\end{pmatrix}$	**3p**
	$n=1009$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2\\ -2 & a\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x^2-1 & -2x\\ 2x & x^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2\\ -2 & a\end{pmatrix}$	**3p**
	$x=-1$, de unde obținem $a=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)-8=-m-16$	**2p**
	$f(1)=1^3-7\cdot 1^2+m\cdot 1-8=m-14 \Rightarrow f(-1)+f(1)=-m-16+m-14=-30$, pentru orice număr real m	**3p**
b)	$f(2)=0 \Rightarrow m=14$, deci $f=X^3-7X^2+14X-8$	**2p**
	Câtul este $X-4$ și restul este $X-4$	**3p**
c)	$x_1x_3=x_2^2 \Rightarrow x_1x_2x_3=x_2^3$ și, cum $x_1x_2x_3=8$, obținem $x_2=2$	**2p**
	Polinomul f are rădăcinile 1, 2 și 4, deci $m=14$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x+2)-(x^2+2x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+2)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\ln x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $F(1)=\dfrac{1}{3}+c$, obținem $F(1)=0\Leftrightarrow c=-\dfrac{1}{3}$, deci $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\ln x-\dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=x^2+\dfrac{1}{x}\Rightarrow V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,dx=\pi\int_1^2\left(x^4+2x+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\pi\cdot\left.\left(\dfrac{x^5}{5}+x^2-\dfrac{1}{x}\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\pi\left(\dfrac{32}{5}+4-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}-1+1\right)=\dfrac{97\pi}{10}$	**2p**
c)	$\int_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x\,dx=\int_1^m\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\left.\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right\|_1^m=\dfrac{1}{2}\ln^2 m$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\ln^2 m=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \ln m=-1$ sau $\ln m=1$, deci $m=\dfrac{1}{e}$, care nu convine sau $m=e$, care convine	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $N=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numerele reale a, știind că punctul $A(a,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x^2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{x+1}=30$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(3,5)$ și $C(2,1)$. Determinați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.

5p **6.** Demonstrați că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(1,1)\big)=2$.

5p **b)** Determinați numărul natural n pentru care $A(n-1,0)+A(n+1,0)=A(2018,0)$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că există un număr real x pentru care $A(x,1)\cdot A(x,1)=A(a,-2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-7X^2+mX-8$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=-30$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-3X+1, știind că f se divide cu $X-2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\dfrac{97\pi}{10}$.

5p **c)** Determinați numărul $m\in(1,+\infty)$, știind că $\displaystyle\int_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x\,dx=\frac{1}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1+\sqrt{5}\right)^2=6+2\sqrt{5}$	**3p**
	$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, deci $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{20}=6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=6$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$, deci $x=-3$ sau $x=1$	**3p**
	Distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox este egală cu 4	**2p**
3.	$2^{2x}\cdot 2^{3x+3}=2^{8x}\Leftrightarrow 2^{5x+3}=2^{8x}$	**3p**
	$5x+3=8x$, deci $x=1$	**2p**
4.	Numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 15 sunt formate cu cifrele 1, 3 și 5	**3p**
	Numerele sunt 135, 153, 315, 351, 513 și 531	**2p**
5.	$a+1=2a-1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	$4\sin^2 x+12\sin x\cos x+9\cos^2 x+9\sin^2 x-12\sin x\cos x+4\cos^2 x=$	**2p**
	$=13\sin^2 x+13\cos^2 x=13\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=13$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=2\cdot 2-1\cdot 1=3$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}x&x-1\\x-1&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&y-1\\y-1&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy+xy-x-y+1&xy-x+xy-y\\xy-y+xy-x&xy-x-y+1+xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2xy-x-y+1&2xy-x-y+1-1\\2xy-x-y+1-1&2xy-x-y+1\end{pmatrix}=A(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)=A\left(2\cdot x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, $A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(y)=A\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot y-\frac{1}{2}-y+1\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Pentru orice numere reale x și y, $\left(A(x)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot A(y)=A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(y)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $a=\frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	$6*2=6+2-\frac{6\cdot 2}{4}=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**

b)	$x+4x-\frac{x\cdot 4x}{4}=6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=3$	**2p**
c)	$x*4=4$ și $4*y=4$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$1*2*3*\ldots*2019=((1*2*3)*4)*(5*6*\ldots*2019)=4*(5*6*\ldots*2019)=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-(x-3)\cdot e^x}{(e^x)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x(1-(x-3))}{e^{2x}}=\frac{4-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{x-5}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[5,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $[5,+\infty)$	**2p**
c)	$x\in(-\infty,4]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,4]$ și $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\leq f(4)$, pentru orice număr real $x\Rightarrow 3+\frac{x-3}{e^x}\leq 3+\frac{1}{e^4}$, deci $x-3\leq e^{x-4}$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(6x^2+4x+1)dx=(2x^3+2x^2+x)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2+2+1-0=5$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=6x^2+4x+1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f(x)>0\Rightarrow F'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$\int_1^a \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^a\left(6x+4+\frac{1}{x}\right)dx=(3x^2+4x+\ln x)\Big\vert_1^a=3a^2+4a+\ln a-7$	**2p**
	$3a^2+4a+\ln a-7=13+\ln a\Leftrightarrow 3a^2+4a-20=0$, de unde obținem $a=-\frac{10}{3}$ care nu convine, $a=2$ care convine	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{20}=6$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$. Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x\cdot 8^{x+1}=16^{2x}$.

5p **4.** Determinaţi numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 15.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(a,a+1)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul A se află pe dreapta de ecuaţie $y=2x-1$.

5p **6.** Demonstraţi că $(2\sin x+3\cos x)^2+(3\sin x-2\cos x)^2=13$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x-1 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(2)\right)=3$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $A(a)=A(x)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(y)$, pentru orice numere reale x și y.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=x+y-\frac{xy}{4}$.

5p **a)** Arătaţi că $6*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(4x)=6$.

5p **c)** Calculaţi $1*2*3*\ldots*2019$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3+\frac{x-3}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{4-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe $[5,+\infty)$.

5p **c)** Demonstraţi că $x-3\le e^{x-4}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x^2+4x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=5$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x}dx=13+\ln a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XI-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**B**	**5p**
2.	**C**	**5p**
3.	**C**	**5p**
4.	**D**	**5p**
5.	**A**	**5p**
6.	**D**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(0)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+(-4)+10-(-3)-10-16=-5$	**3p**
b)	$D(a)=12(a+1)+4(a^2-1)+5(2a+2)-3(a^2-1)-10(a+1)-8(2a+2)=$	**3p**
	$=a^2-4a-5=(a-5)(a+1)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$(a-5)(a+1)<-3(a+1)\Leftrightarrow(a+1)(a-2)<0$	**2p**
	Cum a este număr întreg, obținem $a=0$ sau $a=1$	**3p**
2.a)	$M(-1)+M(1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2M(0)$	**2p**
b)	$M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -x & 1+x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-y & y\\ -y & 1+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x-y & y+x\\ -x-y & 1+x+y\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1-(x+y) & x+y\\ -(x+y) & 1+(x+y)\end{pmatrix}=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$M(2x)=M(a)\Leftrightarrow 2x=a$, unde x şi a sunt numere reale	**3p**
	Pentru orice număr real a, există un număr real $x=\frac{a}{2}$, astfel încât $M(x)\cdot M(x)=M(a)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-4)(x-1)}{x-1}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}(x-4)=-3$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+4}{(x+1)^2-5(x+1)+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1$	**2p**
c)	$g(x)=\frac{x^2-5x+4}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+4}{x^2}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x+4}{x}=-5$, deci dreapta de ecuație $y=x-5$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt{1-x}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2-x-x^2}{x}=0$	**2p**
	Cum $f(1)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x=1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{f(x)-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{-x-3}{(x+3)\left(\sqrt{1-x}+2\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to-3}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+2}=-\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x-x^2}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$	**2p**
	f continuă pe $(-\infty,1)$, f continuă în $x=1$ și f continuă pe $(1,+\infty)$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci mulțimea valorilor funcției f este $\mathbb{R}$, de unde obținem că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\left(\sqrt{3}-2\right)$ este:

A. $\sqrt{2}-1$ **B**. 1 **C.** $1+\sqrt{3}$ **D.** 3

5p **2.** Punctul de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+9$ este:

A. $P(1,1)$ **B.** $P(2,1)$ **C.** $P(2,3)$ **D.** $P(3,2)$

5p **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $3\cdot 2^x+2^{x+3}=44$ este:

A. $\{0\}$ **B**. $\{1\}$ **C**. $\{2\}$ **D.** $\{4\}$

5p **4.** Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0 este egală cu:

A. $\frac{9}{10}$ **B.** $\frac{8}{9}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{10}$

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,a)$, $B(3,4)$ și $C(6,0)$, unde a este număr real. Dacă $OB \parallel AC$, atunci numărul real a este egal cu:

A. -8 **B.** $-\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** 8

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB=5$ și $BC=13$. Tangenta unghiului B este egală cu:

A. $\frac{5}{13}$ **B.** $\frac{5}{12}$ **C.** $\frac{13}{12}$ **D.** $\frac{12}{5}$

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} a+1 & 2a+2 & a^2-1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $D(0)=-5$.

5p **b)** Demonstrați că $D(a)=(a-5)(a+1)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care $D(a)<-3a-3$.

2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $M(-1)+M(1)=2M(0)$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)\cdot M(y)=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstraţi că pentru orice număr real a, există un număr real x astfel încât $M(x)\cdot M(x)=M(a)$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+4$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-3$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p **c)** Determinaţi ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\in(-\infty,1)\\ \frac{2-x-x^2}{x}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este continuă în $x=1$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to -3}\frac{f(x)-2}{x+3}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{12-4+3}{12}:\frac{11}{12}=$	**3p**
	$=\frac{11}{12}\cdot\frac{12}{11}=1$	**2p**
2.	$f(-2)+f(2)=8+8=$	**2p**
	$=16=4\cdot 4=4f(0)$	**3p**
3.	$x^2-27=(x-3)^2\Rightarrow 6x-36=0$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea M are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 5 numere pare, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$8=\frac{4+x_C}{2}\Rightarrow x_C=12$	**3p**
	$3=\frac{3+y_C}{2}\Rightarrow y_C=3$	**2p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\cos^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ-2\cos 30^\circ\cdot\sin 60^\circ=(\cos 30^\circ-\sin 60^\circ)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a^2+3 & a+2\\ 3a+6 & 7\end{pmatrix}$	**2p**
	$4A(a)-I_2=\begin{pmatrix}4a-1 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}a^2+3 & a+2\\ 3a+6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a-1 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}$, de unde obținem $a=2$	**3p**
c)	$aA(a)+M=\begin{pmatrix}a^2+2 & a+1\\ 3a+1 & 2a+2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(aA(a)+M)=(a+1)(2a^2-3a+3)$	**3p**
	Cum $2a^2-3a+3\neq 0$, pentru orice număr real a, obținem $a=-1$	**2p**

2.a)	$f(2)=2^3-4\cdot 2^2+m\cdot 2+2=$ $=8-16+2m+2=2m-6$, pentru orice număr real m	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2x_3=-2$ Pentru orice număr real m, $E=x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)=-8$, care este număr întreg	**2p** **3p**
c)	$f=X^3-4X^2+3X+2=(X-2)\left(X^2-2X-1\right)$ $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=2$, $x_3=1+\sqrt{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=7\cdot 3x^2-5\cdot 2x+1=$ $=21x^2-10x+1=(3x-1)(7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(3x-1)(7x-1)}{7x^3-5x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(3-\frac{1}{x}\right)\left(7-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(7-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(3-\frac{1}{x}\right)\left(7-\frac{1}{x}\right)}{7-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right]$ Cum $f(x)\leq f\left(\frac{1}{7}\right)$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ și $f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{52}{49}$, obținem $f(x)\leq\frac{52}{49}$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2(x-2)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big\|_1^2=$ $=(2-4)-\left(\frac{1}{2}-2\right)=-\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(x^2+8x-2\right)=-2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x-2)=-2$ și $f(0)=-2$, obținem $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în $x=0$ Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**3p** **2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^0\|f(x)\|\,dx=\int_{-1}^0\left\|x^2+8x-2\right\|\,dx=\int_{-1}^0\left(-x^2-8x+2\right)dx=$ $=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}+2x\right)\Big\|_{-1}^0=\frac{17}{3}$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(1-\frac{1}{12}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$. Arătaţi că $f(-2)+f(2)=4f(0)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_8\left(x^2-27\right)=\log_8(x-3)^2$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$, acesta să fie număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ şi $B(8,3)$. Determinaţi coordonatele punctului C, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.

5p **6**. Arătaţi că $\cos^2 30°+\sin^2 60°-2\cos 30°\cdot\sin 60°=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a&1\\3&2\end{pmatrix}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det M=3$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(a)=4A(a)-I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(aA(a)+M\right)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(2)=2m-6$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, numărul $E=x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$ este întreg, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7x^3-5x^2+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=(3x-1)(7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\leq\frac{52}{49}$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+8x-2, & x\in(-\infty,0]\\ x-2, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2 f(x)dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=0$ are aria egală cu $\frac{17}{3}$.