Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_3-a_2=6$, unde r este rația progresiei aritmetice	**2p**
	$a_1=a_2-r=6-6=0$	**3p**
2.	$a-5+2a-5=2 \Leftrightarrow 3a=12$	**3p**
	$a=4$	**2p**
3.	$5^{x-1}=5^2$, deci $x-1=2$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 6 numere care sunt multipli de 16, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	**3p**
5.	$A\left(\frac{1+x_C}{2},\frac{4+y_C}{2}\right)$, de unde obținem $x_C=5$	**3p**
	$y_C=0$	**2p**
6.	$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot(-1)=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
b)	$B(0)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow B(x)-B(0)=\begin{pmatrix}x & -x\\ -x & x\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=x\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=xA$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$C(a)=\begin{pmatrix}a & 3-a\\ 2-a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+1 & 2-a\\ 1-a & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-a & 2a+1\\ a+1 & 3-2a\end{pmatrix} \Rightarrow \det(C(a))=-10a+5$, pentru orice număr întreg a	**3p**
	$-10a+5=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$, deci matricea $C(a)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a	**2p**
2.a)	$1*2=(2\cdot 1-1)(2\cdot 2-1)+1=$	**3p**
	$=1\cdot 3+1=4$	**2p**

b)	$x*x=4x^2-4x+2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4x^2-4x+2=2\Rightarrow 4x^2-4x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**3p**
c)	$m*\left(1+\frac{1}{m}\right)=(2m-1)\left(1+\frac{2}{m}\right)+1$, pentru orice număr întreg nenul m	**2p**
	$(2m-1)\left(1+\frac{2}{m}\right)=0$ și, cum m este număr întreg nenul, obținem $m=-2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2x^2\right)'+1'+(\ln x)'=$	**2p**
	$=4x+\frac{1}{x}=\frac{4x^2+1}{x},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}=2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci f este injectivă	**2p**
	f este continuă, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^4\frac{f(x)}{e^x+2x^2}dx=\int_0^4 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^4=$	**3p**
	$=\frac{16}{2}-0=8$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-2x^3\right)dx=\int_0^1 xe^x\,dx=\left.xe^x\right\|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-\left.e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=e-e+1=1$	**2p**
c)	$\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_1^2\frac{1}{x}\cdot x^2\left(e^{x^2}+2x^4\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2\right)'e^{x^2}\,dx+\int_1^2 2x^5\,dx=\left.\frac{1}{2}e^{x^2}\right\|_1^2+\left.\frac{x^6}{3}\right\|_1^2=\frac{e^4-e}{2}+21$	**3p**
	$\frac{e^4-e}{2}+21=\frac{e^4-e}{2}+a$, de unde obținem $a=21$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 6$ și $a_3 = 12$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x-5$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)+f(2a)=2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x \cdot \frac{1}{5} = 25$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 16.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,4)$. Determinați coordonatele punctului C, astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x) = \sin x + \sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 3-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = 0$.

5p **b)** Arătați că $B(x) - B(0) = xA$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că matricea $C(a) = B(a)\cdot B(1) - B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (2x-1)(2y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1 * 2 = 4$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $m * \left(1+\frac{1}{m}\right) = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1 + \ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4} = 2$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\left(e^x + 2x^2\right)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x+2x^2}\,dx = 8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-2x^3\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\frac{e^4-e}{2}+a$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{20-\sqrt{21}+22+\sqrt{21}}{2} =$	**3p**
	$= \frac{42}{2} = 21$	**2p**
2.	$f(a) = a-1$, pentru orice număr real a	**2p**
	$g(a) = 3-a \Rightarrow f(a)+g(a) = a-1+3-a = 2$, pentru orice număr real a	**3p**
3.	$7x-6 = x^2 \Rightarrow x^2-7x+6 = 0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=6$, care convin	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 4 = 8$ numere	**3p**
5.	$M(3,3)$	**2p**
	$OM = 3\sqrt{2}$, $AM = 3\sqrt{2}$, de unde obținem că triunghiul AOM este isoscel	**3p**
6.	Măsura unghiului ACB este egală cu $30°$	**2p**
	Dacă AD este înălțimea din vârful A a triunghiului ABC, atunci triunghiul ACD este dreptunghic, cu unghiul ACD de $30°$, de unde obținem $AD = \frac{AC}{2} = 2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2-(-1)\cdot 1 =$	**3p**
	$= 2+1 = 3$	**2p**
b)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A(-1)\cdot A(2)-A(-1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(-x)+xA(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x^2 \\ -x^2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -x^2 \\ x^2 & x^2+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x+x^2 & 0 \\ 0 & 1+x+x^2 \end{pmatrix} = (x^2+x+1)I_2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x^2+x+1)I_2 = 3I_2$, de unde obținem $x^2+x-2 = 0$, deci $x=-2$ sau $x=1$	**2p**
2.a)	$1\circ 2 = 4(1\cdot 2+1)-3(1+2) =$	**3p**
	$= 12-9 = 3$	**2p**
b)	$a\circ 3 = 9a-5$, deci $9a-5 = 4$, de unde obținem $a=1$	**3p**
	$a\circ(-a) = 1\circ(-1) = 4(-1+1)-3(1-1) = 0$	**2p**

c)	$x\circ 1=x+1$, $(x\circ 1)\circ(x-1)=4x^2-6x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2-6x\le 4$, de unde obținem $x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x+1-\frac{5}{x}=$	**3p**
	$=\frac{4x^2+x-5}{x}=\frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+3}{3-x-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}-1}=-2$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=6$, deci $2x^2+x+3-5\ln x\ge 6$, de unde obținem $2x^2+x\ge 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1(3-2x)\,dx=\left.\left(3x-2\cdot\frac{x^2}{2}\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**
b)	$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(3-2x)e^x dx=\left.(3-2x)e^x\right\|_0^2+\left.2e^x\right\|_0^2=$	**3p**
	$=-e^2-3+2e^2-2=e^2-5$	**2p**
c)	$\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}dx=\int_a^1\frac{1}{(3-2x)^3}dx=-\frac{1}{2}\int_a^1\frac{(3-2x)'}{(3-2x)^3}dx=\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{1}{(3-2x)^2}\right\|_a^1=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{(3-2a)^2}\right)$, pentru orice $a\in(-\infty,1)$	**3p**
	$\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{(3-2a)^2}\right)=\frac{2}{9}$ și, cum $a\in(-\infty,1)$, obținem $a=0$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că media aritmetică a numerelor $a=20-\sqrt{21}$ și $b=22+\sqrt{21}$ este egală cu 21.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3-x$. Arătați că $f(a)+g(a)=2$, pentru orice număr real a.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{7x-6}=x$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(6,6)$. Arătați că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $AC=4$ și măsura unghiului B este egală cu $60°$. Arătați că înălțimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 2.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1&-x\\x&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.
5p	**b)** Arătați că $A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=2I_2$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=3I_2$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4(xy+1)-3(x+y)$.
5p	**a)** Arătați că $1\circ 2=3$.
5p	**b)** Arătați că, dacă $a\circ 3=4$, atunci $a\circ(-a)=0$.
5p	**c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\le 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+x+3-5\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.
5p	**c)** Demonstrați că $2x^2+x\ge 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-2x)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\dfrac{f(x)}{e^x}\,dx=2$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-5$.
5p	**c)** Determinați $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\int_a^1\dfrac{e^{3x}}{f^3(x)}\,dx=\dfrac{2}{9}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_2\frac{24}{12}+3=\log_2 2+3=$	**3p**
	$=1+3=4=2^2$	**2p**
2.	$f(a)=a^2 \Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$x^2-2x-2=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-2x-2=x^2-4x+4$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele divizibile cu 9 din mulțimea A sunt $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ și $10!$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$	**2p**
	$2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=4\sin x\cos x=$	**2p**
	$=2\sin 2x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(-1)\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-1\cdot(-2)=3$	**3p**
b)	$\det\left(A(x)\right)=\begin{vmatrix}x^2 & 1\\ x-1 & 1\end{vmatrix}=x^2-x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\det\left(A(x)\right)\neq 0$ pentru orice număr real x, obținem că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A(1)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	Cum $A(2)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $X=\left(A(1)\right)^{-1}\cdot A(2)\cdot\left(A(1)\right)^{-1}$, obținem $X=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}\cdot 0-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+0-1\right)+2=$	**3p**
	$=-2+\sqrt{2}+2=\sqrt{2}$	**2p**

b)	$x^2-2-\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}+x+\sqrt{2}-1\right)+2=x \Leftrightarrow x^2-\left(2\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$	**3p**
	$x=\sqrt{2}-1$ sau $x=\sqrt{2}+2$	**2p**
c)	$e=\sqrt{2}+1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”, deci a este simetrizabil în raport cu „$\circ$” dacă și numai dacă există a', astfel încât $a\circ a'=a'\circ a=\sqrt{2}+1$	**2p**
	$aa'-\sqrt{2}\left(a+a'-1\right)+2=\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow aa'+1-\sqrt{2}\left(a+a'\right)=0$ deci, dacă a și a' sunt numere raționale, obținem $a+a'=0$ și $aa'=-1$, deci $a=-1$ sau $a=1$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x-\ln\left(x^2+1\right)\right)'=1-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul A este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\dfrac{1}{5}x+1$, deci $f'(n)=\dfrac{1}{5}$	**3p**
	$5(n-1)^2=n^2+1 \Leftrightarrow 2n^2-5n+2=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,1)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0,1)$, $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci injectivă	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă și strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, obținem că f este surjectivă, deci bijectivă	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{5}}\left(x^2+3\right)'\cdot f\left(x^2+3\right)dx=\frac{1}{2}F\left(x^2+3\right)\Big\vert_1^{\sqrt{5}}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 8}{64}-\dfrac{\ln 4}{16}\right)=-\dfrac{5\ln 2}{128}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_e^{e^2} xF(x)\,dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_e^{e^2}=\frac{\ln^2\left(e^2\right)-\ln^2 e}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
	$\dfrac{a^2-1}{2}=\dfrac{3}{2}$, de unde obținem $a=-2$ sau $a=2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N = \log_2 24 - \log_2 12 + 3$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A\left(a, a^2\right)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1!, 2!, 3!, ..., 10!\}$, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctul D mijlocul segmentului BC. Arătați că, pentru orice puncte E și F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FD}$, are loc relația $2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Arătați că $(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=3$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=A(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{2}(x+y-1)+2$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{2}\right)\circ\left(x+\sqrt{2}\right)=x$.

5p **c)** Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr rațional.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x\left(1-\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul natural nenul n, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(n, f(n)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\frac{1}{5}x+1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=-\frac{5\ln 2}{128}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_2}{b_1}=2\sqrt{2}$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$	**2p**
	$b_4=b_1q^3=\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^3=32$	**3p**
2.	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^{x-1}\left(3^3-3-6\right)=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}\cdot18=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}=\frac{1}{3}$	**3p**
	$x-1=-1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul $2n-60$ aparține mulțimii A dacă $10\le 2n-60\le 99$, deci sunt 45 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$m_{AB}=-\frac{1}{3}$ și, cum $d\perp AB$, obținem $m_d=3$	**2p**
	$C(2,3)$ și, cum $C\in d$, obținem că ecuația dreptei d este $y-3=3(x-2)$, adică $y=3x-3$	**3p**
6.	$AC=AB=6$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin120^\circ}{2}=\frac{6\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=9\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B(3)\cdot B(5)=(3I_2+iA)(5I_2+iA)=15I_2+8iA+i^2A\cdot A=16I_2+8iA=$	**3p**
	$=8(2I_2+iA)=8B(2)$, deci $x=2$	**2p**
c)	$B(m)+iB(n)=\begin{pmatrix}m+in & i-1\\ -i+1 & m+in\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(B(m)+iB(n)\right)=(m+in)^2-2i$, unde $m,n\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$B(m)+iB(n)$ nu este inversabilă, deci $\det\left(B(m)+iB(n)\right)=0\Rightarrow m^2-n^2+2(mn-1)i=0$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem perechile $(-1,-1)$ și $(1,1)$	**3p**
2.a)	$2*5=2\cdot5-\sqrt{(2-1)(5-1)}=$	**3p**
	$=10-\sqrt{4}=8$	**2p**

b)	$x*1=x\cdot 1-\sqrt{(x-1)(1-1)}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$1*x=1\cdot x-\sqrt{(1-1)(x-1)}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$((nx)*y)-x(n*y)=x\sqrt{(n-1)(y-1)}-\sqrt{(nx-1)(y-1)}=\sqrt{y-1}\cdot\dfrac{(x-1)(nx-x-1)}{x\sqrt{n-1}+\sqrt{nx-1}}$, pentru $x,y\in M$ și $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$	**2p**
	Cum $nx-x-1=x(n-1)-1$ și $x\geq 1$, n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $nx-x-1\geq 0$, deci $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot(x^2+3)-4\sqrt{x}\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+6-8x^2}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a)=0$, deci $1-a^2=0$	**3p**
	Cum $a\in(0,+\infty)$, obținem $a=1$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$1<x<x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)>f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, deci $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x+2x\right)dx=\left(e^x+x^2\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e+1-1=e$	**2p**
b)	$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_{-1}^0\left(1+2xe^{-x}\right)dx=\left(x-2(x+1)e^{-x}\right)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=-2-(-1)=-1$	**2p**
c)	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci $\int_0^1 F(x)f''(x)dx=F(x)f'(x)\Big\vert_0^1-\dfrac{f^2(x)}{2}\Big\vert_0^1=$ $=F(1)f'(1)-F(0)f'(0)-\dfrac{f^2(1)-f^2(0)}{2}$	**3p**
	$f'(x)=2(1-x)e^{-x}$, deci $f'(1)=0$ și, cum $F(0)=0$, obținem $\int_0^1 F(x)f''(x)dx=\dfrac{-2(e+1)}{e^2}$, deci $a=-2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = \sqrt{2}$ și $b_2 = 4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2x + 1$, unde m este număr real nenul. Determinați numărul real nenul m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} - 3^x - 6\cdot 3^{x-1} = 6$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $2n - 60$ să aparțină mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(5,2)$ și C, mijlocul segmentului AB. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu măsura unghiului A egală cu $120°$ și $AB = 6$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $9\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = xI_2 + iA$, unde x este număr real și $i^2 = -1$.

5p **a)** Arătați că $\det A = 1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(5) = 8B(x)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care matricea $B(m) + iB(n)$ **nu** este inversabilă.

2. Pe mulțimea $M = [1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - \sqrt{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Arătați că $2 * 5 = 8$.

5p **b)** Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că $(nx) * y \geq x(n * y)$, pentru orice $x, y \in M$ și orice număr natural n, $n \geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3} > \dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x)f''(x)\,dx=\dfrac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f cu proprietatea $F(0)=0$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
3.	$2^{x-3}=2^{-2x} \Leftrightarrow x-3=-2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**3p**
5.	$AC=5$	**2p**
	$BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$, deci $AC=BC$, de unde obținem că triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+1-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(M(1)\right)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot3-(-1)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$M(x)\cdot M(1)=\begin{pmatrix}4x+2 & -4x-1\\ -8x-2 & 8x+3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}(4x+1)+1 & -(4x+1)\\ -2(4x+1) & 2(4x+1)+1\end{pmatrix}=M(4x+1)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=\left(M(x)\cdot M(1)\right)\cdot M(1)=M(4x+1)\cdot M(1)=M(16x+5)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$M(16x+5)=M(x+2)$, de unde obținem $16x+5=x+2$, deci $x=-\frac{1}{5}$	**2p**
2.a)	$(-1)\circ 0=5\cdot(-1)\cdot 0+10\cdot(-1)+10\cdot 0+18=$	**3p**
	$=-10+18=8$	**2p**
b)	$x\circ y=5xy+10x+10y+20-2=5x(y+2)+10(y+2)-2=$	**3p**
	$=(5x+10)(y+2)-2=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$m \circ m = 5(m+2)^2 - 2$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$5(m+2)^2 - 2 = m \Rightarrow (m+2)(5m+9) = 0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} =$	**3p**
	$= \dfrac{x^2-2x-1+x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x \in (1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2) = 5$, $f'(2) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, adică $y = 5$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$; pentru $x \in (1,2] \Rightarrow f'(x) \le 0$, deci f este descrescătoare pe $(1,2]$ și pentru $x \in [2,+\infty) \Rightarrow f'(x) \ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(x) \ge f(2)$, pentru orice $x \in (1,+\infty)$, de unde obținem $\dfrac{x^2+1}{x-1} + \ln(x-1) \ge 5$, pentru orice $x \in (1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)(6x^2+1)dx = \int_0^2 (x+4)dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + 4x\right)\Big\|_0^2 =$	**3p**
	$= 2 + 8 = 10$	**2p**
b)	$\int_0^2 \left(f(x) - \dfrac{4}{6x^2+1}\right)dx = \int_0^2 \dfrac{x}{6x^2+1}dx = \dfrac{1}{12}\int_0^2 \dfrac{(6x^2+1)'}{6x^2+1}dx = \dfrac{1}{12}\ln(6x^2+1)\Big\|_0^2 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{12}\ln 25 = \dfrac{\ln 5}{6}$	**2p**
c)	$\int_0^1 \dfrac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x}dx = \int_0^1 (6x^2+1) \cdot e^{2x}dx = \int_0^1 (6x^2+1) \cdot \left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)' dx = (6x^2+1) \cdot \left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)\Big\|_0^1 - \int_0^1 6xe^{2x}dx =$ $= \dfrac{7e^2-1}{2} - 3xe^{2x}\Big\|_0^1 + \dfrac{3e^{2x}}{2}\Big\|_0^1 = 2e^2 - 2$	**3p**
	$2e^2 - 2 = m(e^2-1)$, de unde obținem $m = 2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3}=\frac{1}{2^{2x}}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,3)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\text{tg}\,x+\sin\frac{3x}{2}-2\cos\frac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=4$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=5xy+10x+10y+18$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 0=8$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\geq 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+4}{6x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\left(6x^2+1\right)dx=10$.

5p	**b)** Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{4}{6x^2+1} \right) dx = \frac{\ln 5}{6}$.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x} dx = m\left(e^2 - 1\right)$.