Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{2}=$	**3p**
	$=\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}=3$	**2p**
2.	$f(1)=1-m$, deci $1-m\geq 0$	**2p**
	$m\leq 1$ și, cum m este număr natural , obținem $m=0$ sau $m=1$	**3p**
3.	$\log_2 x^2=\log_2(3x+4)\Rightarrow x^2-3x-4=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine sau $x=4$**,** care convine	**2p**
4.	$x+\frac{10}{100}\cdot x=440$, unde x este prețul obiectului înainte de scumpire	**3p**
	$x=400$ lei	**2p**
5.	Panta dreptei $d: y=x+2$ este $m_d=1$	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul $M(1,2)$ și este paralelă cu dreapta d este $y=x+1$	**3p**
6.	$AD=\frac{AB\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 3\sqrt{3}=\frac{AB\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=6$	**3p**
	$P_{\triangle ABC}=3\cdot AB=3\cdot 6=18$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$(-2)*2=-2\cdot 2-2(-2+2)+4+2=$	**3p**
	$=-4-2\cdot 0+6=2$	**2p**
2.	$x*y=xy-2(x+y)+6=yx-2(y+x)+6=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$x*y=xy-2x-2y+6=$	**2p**
	$=x(y-2)-2(y-2)+2=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
4.	$(x+1-2)(x-2)+2=4\Leftrightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=3$	**2p**
5.	$(2^{2x}-2)(2^x-2)+2=2 \Leftrightarrow 2^{2x}-2=0$ sau $2^x-2=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**2p**
6.	$(x-1)*x\leq 2\Leftrightarrow(x-3)(x-2)\leq 0$	**2p**
	$x\in[2,3]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}3 & a\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-0\cdot a=$	**3p**
	$=9-0=9$, pentru orice număr real a	**2p**
2.	$A(0)\cdot A(2021)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2021\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2021\\ 0 & 3\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=3\cdot\begin{pmatrix}3 & 2021\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3\cdot A(2021)$	**3p**
3.	$A(a-1)+A(a+1)=\begin{pmatrix}3 & a-1\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & a+1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2a\\ 0 & 6\end{pmatrix}=,$	**3p**
	$=2\cdot\begin{pmatrix}3 & a\\ 0 & 3\end{pmatrix}=2\cdot A(a)$, pentru orice număr real a	**2p**
4.	$A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}9 & 3(n+m)\\ 0 & 9\end{pmatrix}$, $3A(3)=\begin{pmatrix}9 & 9\\ 0 & 9\end{pmatrix}$, deci $n+m=3$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $n=1$, $m=2$ sau $n=2$, $m=1$	**2p**
5.	$\begin{pmatrix}3 & a^2\\ 0 & 3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}3 & a\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**2p**
	$a=1$	**3p**
6.	$\det(k\cdot A(k))\leq 36\Leftrightarrow 9k^2\leq 36$	**2p**
	Cum k este număr întreg, obținem $k\in\{-2,-1,0,1,2\}$, deci sunt 5 matrice care verifică cerința	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4=\log_3\frac{6\cdot 2}{4}=$	**3p**
	$=\log_3 3=1$	**2p**
2.	$f(m)=3m-4$	**2p**
	$f(m)=m\Leftrightarrow 3m-4=m\Leftrightarrow m=2$	**3p**
3.	$2^{2x}=2^{x^2-3}\Leftrightarrow 2x=x^2-3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele care au suma cifrelor egală cu 9 sunt: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 și 90, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	B este mijlocul segmentului AM, deci $1=\frac{-3+x_M}{2}$ și $3=\frac{5+y_M}{2}$	**3p**
	$x_M=5$, $y_M=1$	**2p**
6.	$(\cos 120°-\sin 30°)^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=1$	**2p**
	$\cos^2 30°+\cos^2 60°=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$, deci $(\cos 120°-\sin 30°)^2=\cos^2 30°+\cos^2 60°$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$4*2021=4\cdot 2021-4(4+2021)+20=$	**3p**
	$=-16+20=4$	**2p**
2.	$x*y=xy-4(x+y)+20=yx-4(y+x)+20=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$x*y=xy-4x-4y+16+4=$	**3p**
	$=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
4.	$(x-4)(x-8)+4=x\Leftrightarrow(x-4)(x-9)=0$	**3p**
	$x=4$ sau $x=9$	**2p**
5.	Cum $x\geq 6$ și $y\geq 6$, obținem $x-4\geq 2$ și $y-4\geq 2$, deci $(x-4)(y-4)\geq 4$	**3p**
	$(x-4)(y-4)+4\geq 8\Rightarrow x*y\geq 8$, pentru orice numere reale x și y, cu $x\geq 6$ și $y\geq 6$	**2p**
6.	$x*4=4$, $4*y=4$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$1^2*2^2*3^2*\ldots*2021^2=(1^2*4)*(3^2*4^2*\ldots*2021^2)=4*(3^2*4^2*\ldots*2021^2)=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-2\cdot 0-1\cdot 3=$	**3p**
	$=0-3=-3$	**2p**
2.	$M(6)=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, deci $A+M(6)=\begin{pmatrix}-2+6 & 1+3\\ 3+1 & 0+4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
3.	$\det(M(x))=\begin{vmatrix}x & 3\\ 1 & x-2\end{vmatrix}=x(x-2)-3=$	**3p**
	$=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$, pentru orice număr real x	**2p**
4.	$A+M(2)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+M(2))=-16$	**2p**
	$9-a^2=-16\Leftrightarrow a^2=25$, de unde obținem $a=-5$ sau $a=5$	**3p**
5.	$M(x)\cdot M(x)=\begin{pmatrix}x^2+3 & 6x-6\\ 2x-2 & x^2-4x+7\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}x^2+3 & 6x-6\\ 2x-2 & x^2-4x+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$, care convine	**3p**
6.	$M(n)+M(n+1)+M(n+2)=\begin{pmatrix}3n+3 & 9\\ 3 & 3n-3\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}3n+3 & 9\\ 3 & 3n-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2022 & 9\\ 3 & 3\cdot 2020\end{pmatrix}$, deci $n=2021$, care convine	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(20^2+2\cdot 20\cdot 21+21^2\right):\left(20+\frac{1}{2}\right)=(20+21)^2:\frac{41}{2}=41^2\cdot\frac{2}{41}=$	**3p**
	$=41\cdot 2=82$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 3x-1=x+5$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=3$, $y=8$	**2p**
3.	$1-9x=100$	**3p**
	$x=-11$, care convine	**2p**
4.	$\overline{ab}$ este număr natural impar, de unde rezultă că b este cifră impară, deci sunt 5 modalități de alegere a cifrei unităților	**2p**
	Cum produsul numerelor a și b este număr par și b este cifră impară, obținem că a este cifră pară nenulă, deci sunt 4 modalități de alegere a cifrei zecilor	**2p**
	Sunt $4\cdot 5=20$ de numere naturale impare de două cifre care au produsul cifrelor număr par	**1p**
5.	Triunghiul ABC este dreptunghic în B cu $AB=5$ și $BC=4$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$	**2p**
6.	$\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 150°=\frac{1}{2}$	**3p**
	$\cos 60°\cdot(5\sin 30°-\sin 150°)=\frac{1}{2}\cdot\left(5\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1*3=1+3+2^{1\cdot 3}-1=$	**3p**
	$=4+8-1=11$	**2p**
2.	$x*y=x+y+2^{xy}-1=y+x+2^{yx}-1=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$a+1+2^a-1=-1-a+2^a-1$	**3p**
	$2a=-2\Leftrightarrow a=-1$	**2p**
4.	$x*\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}+1=\left(x+\frac{1}{x}-2\right)+3=$	**3p**
	$=\frac{(x-1)^2}{x}+3\geq 3$, pentru orice număr real x, $x>0$	**2p**
5.	$x+3x+2^{3x^2}-1=4x-1+1+2^{4x-1}-1\Leftrightarrow 2^{3x^2}=2^{4x-1}\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=1$	**2p**

6.	$N = n * (n+1) = 2n + 1 + 2^{n(n+1)} - 1 = 2n + 2^{n(n+1)}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum n este număr natural nenul, rezultă că numerele naturale $2n$ și $2^{n(n+1)}$ sunt pare, deci numărul $N = n * (n+1)$ este natural par	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 6 =$	**3p**
	$= 2 - 24 = -22$	**2p**
2.	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, $3A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1) \cdot A(1) - 3A(1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$	**2p**
3.	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 3x & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6x^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-6x^2 + 54 = 0$, de unde obținem $x = -3$ sau $x = 3$	**2p**
4.	$aA(1) - A(a) = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 3a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 2a-2 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= (a-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (a-1)A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
5.	$A(m) + A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2m+2 \\ 3m+3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(m) + M(1)) = -6m^2 - 12m + 2$, pentru orice număr real m	**3p**
	$-6m^2 - 12m = 0$, de unde obținem $m = -2$ sau $m = 0$	**2p**
6.	$A(n) \cdot A\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{pmatrix} 7 & \frac{2}{n} + 4n \\ 3n + \frac{6}{n} & 10 \end{pmatrix}$, $A\left(\frac{1}{n}\right) \cdot A(n) = \begin{pmatrix} 7 & \frac{4}{n} + 2n \\ \frac{3}{n} + 6n & 10 \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\begin{pmatrix} 7 & \frac{2}{n} + 4n \\ 3n + \frac{6}{n} & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{4}{n} + 2n \\ \frac{3}{n} + 6n & 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = n$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n = 1$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 4

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)(3,2-2,3)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow -3x^2-x+2=0$	**2p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x=-1$ și $x=\frac{2}{3}$	**3p**
3.	$16+3x=5^2\Rightarrow 16+3x=25$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Diferența dintre noile prețuri ale produselor este egală cu $\frac{40}{100}\cdot x$, unde x este prețul inițial al produselor	**3p**
	$\frac{40}{100}\cdot x=26$, de unde obținem $x=65$ de lei	**2p**
5.	$m_{AO}=-\frac{1}{2}$, $m_{BC}=\frac{7-a}{6}$	**2p**
	$m_{AO}=m_{BC}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=\frac{7-a}{6}$, de unde obținem $a=10$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{romb}=AB\cdot AD\cdot\sin A\Leftrightarrow 72=9\cdot 9\cdot\sin A$	**3p**
	$\sin A=\frac{8}{9}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$(-1)*4=(-1-4+1)(4+1+1)=$	**3p**
	$=-4\cdot 6=-24$	**2p**
2.	$x*y=(1+x-y)(1+y-x)=(1+(x-y))(1-(x-y))=$	**3p**
	$=1^2-(x-y)^2=1-(x-y)^2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
3.	$x*(x-1)=1-(x-x+1)^2=$	**3p**
	$=1-1=0$, pentru orice număr real x	**2p**
4.	$x*\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=0$	**3p**

5.	$2^x * 2^{x-1} = 1-\left(2^x-2^{x-1}\right)^2 = 1-2^{2x-2}\cdot 1 = 1-2^{2x-2}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$1-2^{2x-2} = 1-2^{4040}$, de unde obținem $x=2021$	**2p**
6.	$\lg x * \lg\frac{x}{10} = 0$, $\lg\frac{x}{10} * \lg\frac{x}{100} = 0$, pentru orice număr real x, $x>0$	**2p**
	$0*0 = x*1$, de unde obținem $1=1-\left(x-1\right)^2$, deci $x=1$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-3)-2\cdot(-5) =$	**3p**
	$=-15+10=-5$	**2p**
2.	$A\cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-10 & 10+(-10) \\ -15+15 & -10+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5I_2$	**2p**
3.	$\det\left(A-xI_2\right) = \begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ -5 & -3-x \end{vmatrix} = x^2-2x-5$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x^2-2x-15=0$, de unde obținem $x=-3$ sau $x=5$	**2p**
4.	$A\cdot B = 5I_2 \Rightarrow A\cdot\left(\frac{1}{5}B\right) = I_2$ și, cum $\left(\frac{1}{5}B\right)\cdot A = I_2$, obținem că $A^{-1} = \frac{1}{5}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	**3p**
	Suma elementelor matricei A^{-1} este egală cu $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-1-1=-1$	**2p**
5.	Matricea B este inversabilă și $B^{-1} = \frac{1}{5}A$	**2p**
	$X=-20B^{-1} \Rightarrow X=-4A$, deci $X = \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}$	**3p**
6.	$A\cdot\left(B\cdot B-I_2\right)-\left(A\cdot A-I_2\right)\cdot B = A\cdot B\cdot B-A-A\cdot A\cdot B+B = 5B-A-5A+B = 6B-6A$	**3p**
	$6\left(B-A\right) = x\left(B-A\right)$, de unde obținem $x=6$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 5

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}=$	**3p**
	$=4+2\sqrt{3}-3-2\sqrt{3}=1$	**2p**
2.	$f(a)=2a-6$, $f(2a)=4a-6$, $f(9)=12$	**3p**
	$6a-12=12\Leftrightarrow a=4$	**2p**
3.	$\sqrt{3x}=x\Rightarrow 3x=x^2$	**2p**
	$x=0$ sau $x=3$, care convin	**3p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 5 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei unităților și a cifrei zecilor, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 5 moduri, deci se pot forma $3\cdot 5\cdot 5=75$ de numere	**3p**
5.	$M(3,-1)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$3-2\cdot(-1)+a=0$, de unde obținem $a=-5$	**3p**
6.	$AC=16$, $AB=12$	**2p**
	$\mathcal{A}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{16\cdot 12}{2}=96$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1\circ 5=5\cdot 1\cdot 5-5\cdot 1-5\cdot 5+6=$	**3p**
	$=25-5-25+6=1$	**2p**
2.	$x\circ y=5xy-5x-5y+5+1=5x(y-1)-5(y-1)+1=$	**2p**
	$=(y-1)(5x-5)+1=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
3.	$x\circ\frac{6}{5}=5x\cdot\frac{6}{5}-5x-5\cdot\frac{6}{5}+6=6x-5x-6+6=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{6}{5}\circ x=5\cdot\frac{6}{5}\cdot x-5\cdot\frac{6}{5}-5x+6=6x-6-5x+6=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
4.	$\frac{4}{5}\circ x=5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot(x-1)+1=-x+2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-x+2=\frac{6}{5}$, de unde obținem $x=\frac{4}{5}$	**2p**
5.	$5(a-1)(b-1)+1=21\Leftrightarrow(a-1)(b-1)=4$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem perechile $(2,5)$, $(3,3)$, $(5,2)$	**3p**
6.	$x\circ 1=1$ și $1\circ y=1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\left(\frac{5}{1}\circ\frac{5}{2}\circ\frac{5}{3}\circ\frac{5}{4}\right)\circ 1\circ\frac{5}{6}\circ\ldots\circ\frac{5}{9}=1\circ\left(\frac{5}{6}\circ\ldots\circ\frac{5}{9}\right)=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-2\cdot 2-(-4)\cdot 3=$	**3p**
	$=-4+12=8$	**2p**
2.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-12 & 8+(-8)\\ -6+6 & -12+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=-8\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-8I_2$	**2p**
3.	$B(x)=\begin{pmatrix}-4x-1 & -8x\\ 6x & 4x-1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(x))=\begin{vmatrix}-4x-1 & -8x\\ 6x & 4x-1\end{vmatrix}=32x^2+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$32x^2+1>0$, deci $\det(B(x))\neq 0$, adică matricea $B(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**2p**
4.	$B(x)\cdot B\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-4x-1 & -8x\\ 6x & 4x-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12x+3 & 8x+4\\ -6x-3 & -20x-1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}-12x+3 & 8x+4\\ -6x-3 & -20x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$xB(x)-yB(y)=2x^2A-xI_2-2y^2A+yI_2=$	**2p**
	$=2(x-y)(x+y)A-(x-y)I_2=(x-y)\big(2(x+y)A-I_2\big)=(x-y)B(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
6.	$\big(B(1)-20B(20)\big)-\ldots-\big(10B(10)-11B(11)\big)=(-19+17-15+\ldots-3+1)B(21)=$	**3p**
	$=5\cdot(-2)B(21)=-10B(21)$, deci $k=-10$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$9:\left(\frac{1}{2^3}-(-1)^3\right)=9:\left(\frac{1}{8}-(-1)\right)=9:\left(\frac{1}{8}+1\right)=$	**3p**
	$=9\cdot\frac{8}{9}=8$	**2p**
2.	$f(1)=3 \Leftrightarrow a-2=3$, de unde obținem $a=5$	**3p**
	$f(-1)=5\cdot(-1)-2=-7$, deci punctul $B(-1,-7)$ aparține graficului funcției f	**2p**
3.	$5^{2x-5}=5^3 \Leftrightarrow 2x-5=3$	**3p**
	$x=4$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	$3^{n-3}<1 \Rightarrow n-3<0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$ sau $n=2$, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{10}$	**1p**
5.	$M(-1,3)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	M este mijlocul segmentului CD, deci $-1=\frac{1+x_D}{2}$, $3=\frac{3+y_D}{2}$, de unde obținem $x_D=-3$ și $y_D=3$	**3p**
6.	$AC=12\sqrt{2}$, $MO=3\sqrt{2}$	**2p**
	$MO\perp AC$, deci $\mathcal{A}_{\Delta AMC}=\frac{MO\cdot AC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2}}{2}=36$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1\circ(-2)=1^3-1^2\cdot(-2)-1\cdot(-2)^2+(-2)^3=$	**3p**
	$=1+2-4-8=-9$	**2p**
2.	$x\circ y=x^2(x-y)-y^2(x-y)=\left(x^2-y^2\right)(x-y)=$	**2p**
	$=(x+y)(x-y)(x-y)=(x+y)(x-y)^2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
3.	$x\circ y=(x+y)(x-y)^2=(y+x)(y-x)^2=$	**3p**
	$=y\circ x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**2p**
4.	$x\circ(-x)=(x+(-x))(x-(-x))^2=$	**2p**
	$=(x-x)(x+x)^2=0$, pentru orice număr real x	**3p**
5.	$(2x)\circ x=(2x+x)(2x-x)^2=3x\cdot x^2=3x^3$, pentru orice număr real x	**3p**
	$3x^3=24 \Leftrightarrow x^3=8$, de unde obținem $x=2$	**2p**

6.	$(m+n)(m-n)^2=9$, pentru orice numere naturale m și n	**2p**
	Cum $m+n$ și $m-n$ sunt numere naturale, rezultă că $m+n=1$ și $m-n=3$ sau $m+n=9$ și $m-n=1$, de unde obținem $m=2$ și $n=-1$, care nu convin și $m=5$ și $n=4$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1\cdot 1=$	**3p**
	$=0-1=-1$	**2p**
2.	$B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow 3A-2B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 4\\ -2 & -6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 5 & 6\end{pmatrix}$	**2p**
3.	$B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, deci $A\cdot B=B\cdot A$	**2p**
4.	$B\cdot B=\begin{pmatrix}a^2+2b & 2a-6\\ ab-3b & 2b+9\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$\begin{pmatrix}a^2+2b & 2a-6\\ ab-3b & 2b+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=3$ și $b=-4$	**2p**
5.	$A-B=\begin{pmatrix}-a & -1\\ 1-b & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-B)=1-(3a+b)$, pentru orice numere naturale a și b	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale nenule, rezultă că $3a+b\geq 4$, deci $\det(A-B)\leq 1-4=-3$	**3p**
6.	$A\cdot B+B\cdot A=\begin{pmatrix}b+2 & a-3\\ a-3 & b+2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A\cdot B+B\cdot A)=(b+2)^2-(a-3)^2$, pentru orice numere naturale a și b	**2p**
	$a=b+5$, deci $\det(A\cdot B+B\cdot A)=(b+2)^2-(b+5-3)^2=0$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=\frac{3}{2}$, $b=24$	**2p**
	$m_g=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot 24}=\sqrt{36}=6$	**3p**
2.	$f(a)=a^2+2a+3$, $f(-2)=3$	**2p**
	$a^2+2a+3=3 \Leftrightarrow a^2+2a=0$, și, cum $a\neq -2$, obținem $a=0$	**3p**
3.	$\log_5(3x-15)=\log_5 6 \Rightarrow 3x-15=6$	**3p**
	$x=7$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre, care au toate cifrele egale, are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre, care au toate cifrele egale și sunt multipli de 9, sunt 333, 666 și 999, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**1p**
5.	$AB=\sqrt{49+9a^2}$, unde a este număr real	**2p**
	$\sqrt{49+9a^2}=7$, de unde obținem $a=0$	**3p**
6.	$\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$	**3p**
	$2\sin^2 135^\circ-\sin 30^\circ-\cos 60^\circ=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=2\cdot\frac{2}{4}-1=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$5*2021=6-5-2021=$	**3p**
	$=1-2021=-2020$	**2p**
2.	$(1*x)*1=(5-x)*1=6-(5-x)-1=$	**3p**
	$=6-5+x-1=x$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$(x+1)*(4x)=5-5x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$5-5x=15$, de unde obținem $x=-2$	**3p**
4.	$(x*y)*(z*t)=6-(6-x-y)-(6-z-t)=$	**3p**
	$=6-6+x+y-6+z+t=x+y+z+t-6$, pentru orice numere reale x, y, z și t	**2p**
5.	$x^2*(-x)=6-x^2+x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x^2+x+6\geq 0$, de unde obținem $x\in[-2,3]$	**3p**

6.	$\left(2^{n^2} * 2^{n^2}\right) * \left(2^{n^2} * 2^{n^2}\right) = 4 \cdot 2^{n^2} - 6$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$4 \cdot 2^{n^2} = 8 \Leftrightarrow 2^{n^2} = 2 \Leftrightarrow n^2 = 1$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(-1,3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(-1,3)\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) =$	**3p**
	$= -2 + 1 = -1$	**2p**
2.	$2A(1,1) - A(2,2) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A(0,0)$	**2p**
3.	$A(0,0) \cdot A(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 0+1 \\ -1+0 & -1+0 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A(-1,0)$	**2p**
4.	$A(x,1) - xA(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1-x \\ -1+x & 1-x \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(x,1) - xA(1,1)\right) = (x-1)^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x-1)^2 = 9$, de unde obținem $x = -2$ sau $x = 4$	**2p**
5.	$\det\left(A(x,y)\right) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x+y \end{vmatrix} = x(x+y) + 1$, $\det\left(A(y,x)\right) = \begin{vmatrix} y & 1 \\ -1 & y+x \end{vmatrix} = y(x+y) + 1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\det\left(A(x,y)\right) + \det\left(A(y,x)\right) = x(x+y) + y(x+y) + 2 = (x+y)^2 + 2 \geq 2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
6.	$A(x,y) \cdot A(-y,-x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x+y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y & 1 \\ -1 & -y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy-1 & -y \\ -x & -1-(x+y)^2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$\begin{pmatrix} -xy-1 & -y \\ -x & -1-(x+y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 1$ și $y = -1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 8

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2,5-0,7):2+\left\|-\frac{1}{10}\right\|=1,8:2+\frac{1}{10}=0,9+\frac{1}{10}=$	**3p**
	$=0,9+0,1=1$	**2p**
2.	$f(2a-4)=4a-12$, $f(a)=2a-4$, pentru orice număr real a	**2p**
	$4a-12=2a-4+4$, de unde obținem $a=6$	**3p**
3.	$3^{9-x}=3^{2(3-x)}\Leftrightarrow 9-x=6-2x$	**3p**
	$x=-3$	**2p**
4.	$x-\frac{45}{100}\cdot x=77$, unde x este prețul produsului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=140$ de lei	**2p**
5.	$BC=12$	**2p**
	$BC\parallel Ox\Rightarrow d(A,BC)=8\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{8\cdot 12}{2}=48$	**3p**
6.	$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AC\cdot BC}=\frac{6^2+6^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 6}=$	**3p**
	$=\frac{36+36-16}{2\cdot 6\cdot 6}=\frac{7}{9}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$(-2)\circ 3=4(-2+3)-2\cdot(-2)\cdot 3=$	**3p**
	$=4+12=16$	**2p**
2.	$y\circ x=4(y+x)-2yx=4(x+y)-2xy=$	**3p**
	$=x\circ y$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**2p**
3.	$(1-x)\circ x=4-2x+2x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4-2x+2x^2=8\Leftrightarrow x^2-x-2=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=2$	**3p**
4.	$1\circ n=2n+4$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$2n+4\geq 2021\Rightarrow n\geq\frac{2017}{2}$, de unde obținem că 1009 este cel mai mic număr natural n pentru care $1\circ n\geq 2021$	**3p**
5.	$A=a\circ\sqrt{2}=4a+4\sqrt{2}-2a\sqrt{2}=4a+(4-2a)\sqrt{2}$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	A este număr întreg și, cum a este număr întreg, rezultă $4-2a=0$, de unde obținem $a=2$	**3p**
6.	$y=\frac{x+z}{2}\Rightarrow x+z=2y$	**2p**
	$\frac{(x\circ m)+(z\circ m)}{2}=\frac{4(x+2m+z)-2m(x+z)}{2}=\frac{4(2y+2m)-2m\cdot 2y}{2}=4(y+m)-2my=y\circ m$, deci numerele $x\circ m$, $y\circ m$ și $z\circ m$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}1&2\\3&8\end{vmatrix}=1\cdot 8-2\cdot 3=$	**3p**
	$=8-6=2$	**2p**
2.	$A+B=\begin{pmatrix}0&4\\6&0\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)\cdot(A+B)=\begin{pmatrix}24&0\\0&24\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=24\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=24I_2$	**2p**
3.	$2(X-A)=3(X-B)\Leftrightarrow X=3B-2A$	**2p**
	$X=\begin{pmatrix}-3&6\\9&-24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4\\6&16\end{pmatrix}$, deci $X=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-40\end{pmatrix}$	**3p**
4.	$\det(A+xI_2)=\begin{vmatrix}1+x&2\\3&8+x\end{vmatrix}=x^2+9x+2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x^2+9x+2=2\Leftrightarrow x^2+9x=0$, de unde obținem $x=-9$ sau $x=0$	**2p**
5.	$N=\det((1+n)A+(1-n)B)=\begin{vmatrix}2n&4\\6&16n\end{vmatrix}=32n^2-24=8(4n^2-3)$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum, pentru orice număr natural nenul n, numărul $4n^2-3$ este număr natural, obținem că numărul N este natural, multiplu de 8	**2p**
6.	$A\cdot(A-xI_2)=B\cdot(B+xI_2)\Leftrightarrow A\cdot A-B\cdot B=x(A+B)$	**2p**
	$\begin{pmatrix}0&36\\54&0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0&4\\6&0\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=9$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 9

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{81}-\sqrt{196}+\left(3\sqrt{2}\right)^2:\sqrt{9}=9-14+18:3=$	**3p**
	$=-5+6=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x-2=x^2+5x+2\Leftrightarrow x^2+4x+4=0$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g sunt $x=-2$ și $y=f(-2)=-4$	**2p**
3.	$\sqrt{12-x}=\sqrt{3x}\Rightarrow 12-x=3x$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	După prima scumpire, prețul produsului este $400+\frac{20}{100}\cdot 400=480$ de lei	**3p**
	După a doua scumpire, prețul produsului este $480+\frac{15}{100}\cdot 480=552$ de lei	**2p**
5.	$m_{OA}=3$	**2p**
	$m_d=3$, deci $m_{OA}=m_d$, de unde rezultă că dreapta OA este paralelă cu dreapta d	**3p**
6.	$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\frac{AC}{\frac{1}{4}}=\frac{8}{\frac{1}{3}}$	**3p**
	$\frac{1}{3}\cdot AC=8\cdot\frac{1}{4}$, deci $AC=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1*2=6\cdot 1+6\cdot 2-3\cdot 1\cdot 2-10=$	**3p**
	$=12-10=2$	**2p**
2.	$x*y=2-3xy+6x+6y-12=2-3(xy-2x-2y+4)=$	**3p**
	$=2-3(x(y-2)-2(y-2))=2-3(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
3.	$x*\frac{5}{3}=2-3(x-2)\left(\frac{5}{3}-2\right)=2-3(x-2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=2+x-2=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{5}{3}*x=2-3\left(\frac{5}{3}-2\right)(x-2)=2-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(x-2)=2+x-2=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{5}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
4.	$N=5*n=20-9n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Pentru orice număr natural n, numărul $20-9n$ este întreg și, cum N este număr natural, rezultă că $20-9n\geq 0$, deci $n\leq\frac{20}{9}$, de unde obținem $n=0$ sau $n=1$ sau $n=2$	**3p**
5.	$x*2=2$, $2*y=2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

	$\left((-10)*(-9)*(-8)*\ldots*0*1\right)*2*3*\ldots*10=2*\left(3*\ldots*10\right)=2$	**3p**
6.	$\frac{1}{x}*\left(x^2+2\right)=6x^2-3x+2$, pentru orice număr real nenul x	**2p**
	$6x^2-3x+2=5 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$M(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(M(1)\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
2.	$4M(2)-M(-1)=4\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 9 & 18\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 6\end{pmatrix}=3M(3)$	**2p**
3.	$A\cdot A+7M(1)=\begin{pmatrix}17 & -7\\ -7 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 7\\ 7 & 14\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}24 & 0\\ 0 & 24\end{pmatrix}=24I_2$	**2p**
4.	$A-2I_2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\left(A-2I_2\right)M(1)=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2\\ (-1)\cdot 1+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
	$M(1)\left(A-2I_2\right)=I_2$, de unde rezultă că $A-2I_2$ este inversa matricei $M(1)$	**2p**
5.	$M(1)+M(2)+M(3)+\ldots+M(9)=\begin{pmatrix}45 & 9\\ 45 & 90\end{pmatrix}$, $aM(b)=\begin{pmatrix}ab & a\\ ab & 2ab\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale	**3p**
	$\begin{pmatrix}45 & 9\\ 45 & 90\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab & a\\ ab & 2ab\end{pmatrix}$, de unde obținem $a=9$ și $b=5$	**2p**
6.	$M(a)\cdot M(b)-M(b)\cdot M(a)=\begin{pmatrix}ab+b & a+2b\\ 3ab & a+4ab\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}ba+a & b+2a\\ 3ba & b+4ba\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-a & b-a\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$\det\left(M(a)\cdot M(b)-M(b)\cdot M(a)\right)=-(a-b)^2\le 0$, pentru orice numere reale a și b	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 10

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{3}:\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=\frac{10}{3}-\frac{2}{15}-\frac{1}{5}=$	**3p**
	$=\frac{50-2-3}{15}=3$	**2p**
2.	$f(1)=-1$	**2p**
	$3-4x\leq -5 \Leftrightarrow 4x\geq 8$, de unde obținem $x\in[2,+\infty)$	**3p**
3.	$2^{3(2x-1)}=2^{5x} \Leftrightarrow 3(2x-1)=5x$	**3p**
	$6x-3=5x$, de unde obținem $x=3$	**2p**
4.	$5\cdot\frac{25}{100}\cdot x+x=27$, unde x este prețul blocului de desen	**3p**
	$x=12$ lei	**2p**
5.	$m_{OA}=\frac{1}{a}$, $m_{OB}=\frac{a}{4}$, unde a este număr real, $a>0$	**2p**
	$\frac{1}{a}=\frac{a}{4} \Leftrightarrow a^2-4=0$ și, cum $a>0$, obținem $a=2$	**3p**
6.	Cum $AC=BC-1$, obținem $BC^2=(BC-1)^2+25$, de unde rezultă $BC=13$ și $AC=12$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+CA=5+13+12=30$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$(-1)*2=(-1)^2+2^2-(-1)\cdot 2-2\cdot(-1)-2\cdot 2=$	**3p**
	$=1+4+2+2-4=5$	**2p**
2.	$x*y=x^2+y^2-xy-2x-2y=y^2+x^2-yx-2y-2x=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$(-x)*x=(-x)^2+x^2-(-x)x-2(-x)-2x=$	**3p**
	$=x^2+x^2+x^2+2x-2x=3x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
4.	$x*1=x^2+1-x-2x-2=x^2-3x-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-3x-1=3 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=4$	**3p**
5.	$m*m=m^2-4m$, pentru orice număr natural m	**2p**
	$m^2-4m=n^2-4n \Leftrightarrow (m-n)(m+n-4)=0$ și, cum m și n sunt numere naturale cu $m<n$, obținem perechile $(0,4)$ sau $(1,3)$	**3p**
6.	$\lg x*\lg\frac{1}{x}=\lg x*(-\lg x)=3\lg^2 x$, pentru orice număr real x, $x>0$	**2p**
	$3\lg^2 x=9\lg x$, de unde obținem $x=1$ sau $x=1000$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}2 & -6\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-(-6)\cdot 1=$	**3p**
	$=-2+6=4$	**2p**
2.	$B=\begin{pmatrix}0 & -12\\ 2 & -6\end{pmatrix}\Rightarrow 2A-B=2\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -12\\ 2 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4I_2$	**2p**
3.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 1 & -5\end{pmatrix}$, $xA+yI_2=\begin{pmatrix}2x+y & -6x\\ x & -x+y\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y & -6x\\ x & -x+y\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$ și $y=-4$	**2p**
4.	$B\cdot A=\begin{pmatrix}2a & -2a\\ 4+a & -12-a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$2a+(-2a)+(4+a)+(-12-a)=-8$, pentru orice număr real a, deci suma elementelor matricei $B\cdot A$ nu depinde de a	**2p**
5.	$A+B=\begin{pmatrix}2 & -6+2a\\ 3 & -1+a\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+B)=\begin{vmatrix}2 & -6+2a\\ 3 & -1+a\end{vmatrix}=16-4a$, pentru orice număr natural a	**2p**
	$\det(A+B)=2^2(4-a)$ este pătratul unui număr natural, de unde rezultă că $4-a$ este pătratul unui număr natural și, cum a este număr natural, obținem $a=0$ sau $a=3$ sau $a=4$	**3p**
6.	$(B+aI_2)(B-aI_2)=aB\Leftrightarrow B\cdot B-a^2I_2=aB\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4a-a^2 & 2a^2\\ 2a & 4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2a^2\\ 2a & a^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a^2-4a=0$, de unde obținem $a=0$ sau $a=4$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2r = a_3 - a_1$, de unde obținem $r = 3$	**3p**
	$a_4 = 7$	**2p**
2.	$f(2) = 0$	**2p**
	$2a + 2 = 0$, de unde obținem $a = -1$	**3p**
3.	$\log_8(7x+8) = 2 \Rightarrow 7x+8 = 8^2 \Rightarrow 7x+8 = 64$	**3p**
	$x = 8$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale nenule de o cifră are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale n, nenule, de o cifră, pentru care $2n$ este număr natural de două cifre sunt 5, 6, 7, 8 și 9, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{5}{9}$	**1p**
5.	$AB = 5$, $BC = 5$, deci triunghiul ABC este isoscel	**2p**
	$AC = \sqrt{50}$, de unde obținem $AC^2 = AB^2 + BC^2$, deci triunghiul este dreptunghic isoscel	**3p**
6.	Cum triunghiul ADB este dreptunghic, rezultă că $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 15$	**2p**
	Cum triunghiul ADC este dreptunghic, rezultă că $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 6$ și, cum $BC = BD + DC$, obținem $BC = 21$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1 * 2 = \dfrac{1+2+6}{1 \cdot 2 + 1} =$	**3p**
	$= \dfrac{9}{3} = 3$	**2p**
2.	$x * y = \dfrac{x+y+6}{xy+1} = \dfrac{y+x+6}{yx+1} =$	**3p**
	$= y * x$, pentru orice numere x și y din mulțimea M, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$x * 1 = \dfrac{x+1+6}{x+1} =$	**2p**
	$= 1 + \dfrac{6}{x+1} > 1$, pentru orice $x \in M$	**3p**
4.	$3 * x = \dfrac{x+9}{3x+1}$, pentru orice $x \in M$	**2p**
	$\dfrac{x+9}{3x+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+18 = 3x+1$, de unde obținem $x = 17$, care convine	**3p**

5.	$x*x=\dfrac{2x+6}{x^2+1}$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$\dfrac{2x+6}{x^2+1}\geq 2 \Leftrightarrow x^2-x-2\leq 0$ și, cum $x\in M$, obținem $x\in[0,2]$	**3p**
6.	$m*n=1\Leftrightarrow \dfrac{m+n+6}{mn+1}=1\Leftrightarrow mn-m-n+1=6$, unde m și n sunt numere naturale	**2p**
	$(m-1)(n-1)=6$ și, cum m și n sunt numere naturale cu $m<n$, obținem perechile $(2,7)$ și $(3,4)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-(-2)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=0-4=-4$	**2p**
2.	$B(-6)=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 6 & 0\end{pmatrix}$, $B(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(-6)+3B(2)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=4B(0)$	**2p**
3.	$B(-2)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(2)\cdot B(-2)-A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4I_2$	**2p**
4.	$B(2x)=\begin{pmatrix}1 & 2x\\ -2x & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(2x)+xA=\begin{pmatrix}1+x & 0\\ -4x & 0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\det(B(2x)+xA)=(1+x)\cdot 0-(-4x)\cdot 0=0$, pentru orice număr real x	**2p**
5.	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(1))=1$, deci matricea $B(1)$ este inversabilă și inversa ei este $(B(1))^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(B(1))^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$	**2p**
6.	$B(m)\cdot B(n)=\begin{pmatrix}1-mn & n\\ -m & -mn\end{pmatrix}\Rightarrow B(m)\cdot B(n)+mnI_2=\begin{pmatrix}1 & n\\ -m & 0\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(B(m)\cdot B(n)+mnI_2)=mn$, pentru orice numere întregi m și n	**3p**
	$mn=4$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m\leq n$, obținem $(-4,-1)$, $(-2,-2)$, $(1,4)$ și $(2,2)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 12

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+2\left(1-\sqrt{3}\right)=\sqrt{12}+2+2-2\sqrt{3}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}+2+2-2\sqrt{3}=4$	**2p**
2.	$f(0)=-1$, $f(3)=11$, $f(a)=4a-1$, unde a este număr real	**2p**
	$(4a-1)(-1)+11=0 \Leftrightarrow -4a+12=0$, de unde obținem $a=3$	**3p**
3.	$2^4\cdot 2^{2x}=2^{3x} \Leftrightarrow 2^{4+2x}=2^{3x} \Leftrightarrow 4+2x=3x$	**3p**
	$x=4$	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei unităților și a cifrei zecilor, cifra sutelor poate fi aleasă în câte două moduri, deci se pot forma $4\cdot 3\cdot 2=24$ de numere	**3p**
5.	$\mathcal{A}_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\Delta ABC}$	**2p**
	Triunghiul ABC este dreptunghic în B, cu $AB=4$ și $BC=6 \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=12$, de unde rezultă că $\mathcal{A}_{\Delta ABD}=6$	**3p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{tg}60^\circ=\sqrt{3}$	**3p**
	$\left(\mathrm{tg}30^\circ+\mathrm{tg}60^\circ\right)\sin 60^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1*2=9\cdot 1\cdot 2+1+2=$	**3p**
	$=18+1+2=21$	**2p**
2.	$x*y=9xy+x+y=9yx+y+x=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$x*0=9\cdot x\cdot 0+x+0=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
4.	$(-1)*x=-8x-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-8x-1=15$, de unde obținem $x=-2$	**3p**
5.	$1*x'=0 \Leftrightarrow 9x'+1+x'=0$	**2p**
	Simetricul elementului $x=1$ în raport cu legea de compoziție „$*$” este $x'=-\frac{1}{10}$	**3p**
6.	$N=\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*n$, $\frac{1}{3}*\frac{2}{3}=3$	**2p**
	$N=3*n=28n+3$, pentru orice număr natural n și, cum N este număr natural de două cifre, obținem $n=1$ sau $n=2$ sau $n=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=8+1=9$	**2p**
2.	$A+X(2)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=3X(1)$	**2p**
3.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}15 & 6\\ -6 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
	$6A-9I_2=\begin{pmatrix}24 & 6\\ -6 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 6\\ -6 & 3\end{pmatrix}$, deci $A\cdot A=6A-9I_2$	**2p**
4.	$M(a)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2a^2 & 2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2a^2 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$, deci matricea $M(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a	**3p**
5.	$B=X(-1)\cdot X(n)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & n\\ n^2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-n^2 & 2n-1\\ 2+n^2 & n+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Numerele $2+n^2$ și $n+1$ sunt naturale pentru orice număr natural n și, cum $4-n^2$ și $2n-1$ sunt numere naturale, obținem că $n=1$ sau $n=2$	**3p**
6.	$X(2a)=\begin{pmatrix}2 & 2a\\ 4a^2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(X(2a)-X(a))=\begin{vmatrix}0 & a\\ 3a^2 & 0\end{vmatrix}=-3a^3$, pentru orice număr real a	**3p**
	$-3a^3=3\Leftrightarrow a^3=-1$, de unde obținem $a=-1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică

Testul 1

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)=3$.
5p	**2.** Determinați numerele naturale m pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-m$ verifică relația $f(1)\geq 0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_2 x=\log_2(3x+4)$.
5p	**4.** După o scumpire cu 10% prețul unui obiect este 440 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.
5p	**5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $M(1,2)$ și este paralelă cu dreapta d de ecuație $y=x+2$.
5p	**6**. Calculați perimetrul triunghiului echilateral ABC, știind că înălțimea AD este de lungime $3\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-2(x+y)+6$.
5p	**1.** Arătați că $(-2)*2=2$.
5p	**2.** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.
5p	**3.** Demonstrați că $x*y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**4.** Determinați numerele reale x pentru care $(x+1)*x=4$.
5p	**5.** Determinați numerele rele x pentru care $2^{2x}*2^{x}=2$.
5p	**6.** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x-1)*x\leq 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**1.** Arătați că $\det(A(a))=9$, pentru orice număr real a.
5p	**2.** Arătați că $A(0)\cdot A(2021)=3A(2021)$.
5p	**3** Arătați că $A(a-1)+A(a+1)=2A(a)$, pentru orice număr real a.
5p	**4.** Determinaţi numerele naturale nenule m și n pentru care $A(m)\cdot A(n)=3A(3)$.
5p	**5.** Determinați numărul real a pentru care $A(a^2)-2A(a)+A(1)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**6.** Determinați numărul matricelor $A(k)$, unde k este număr întreg și $\det(k\cdot A(k))\leq 36$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică

Testul 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4 = 1$.

5p **2** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$. Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,m)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x = 2^{x^2-3}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,5)$ și $B(1,3)$. Determinați coordonatele punctului M, unde M este simetricul punctului A față de punctul B.

5p **6.** Arătați că $\left(\cos 120° - \sin 30°\right)^2 = \cos^2 30° + \cos^2 60°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 4(x+y) + 20$.

5p **1.** Arătați că $4 * 2021 = 4$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$*$" este comutativă.

5p **3.** Demonstrați că $x * y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $x * (x-4) = x$.

5p **5.** Arătați că $x * y \geq 8$, pentru orice numere reale x și y, cu $x \geq 6$ și $y \geq 6$.

5p **6.** Calculați $1^2 * 2^2 * 3^2 * \ldots * 2021^2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det A = -3$.

5p **2.** Arătați că $A + M(6) = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **3** Arătați că $\det\left(M(x)\right) = (x+1)(x-3)$, pentru orice număr real x.

5p **4.** Determinați numerele întregi a pentru care $\det\left(A + M(2)\right) = 9 - a^2$.

5p **5.** Determinați numărul real x pentru care $M(x) \cdot M(x) = 4I_2$.

5p **6.** Determinați numărul natural n pentru care $M(n) + M(n+1) + M(n+2) = 3M(2022)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Testul 3

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $\left(20^2+2\cdot 20\cdot 21+21^2\right):\left(20+\frac{1}{2}\right)=82$.
5p	**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+5$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-9x)=2$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale impare de două cifre au produsul cifrelor număr par.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$, $B(3,1)$ și $C(3,-3)$. Calculați aria triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătați că $\cos 60°\cdot(5\sin 30°-\sin 150°)=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+y+2^{xy}-1$.
5p	**1.** Arătați că $1*3=11$.
5p	**2.** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.
5p	**3.** Determinați numărul real a pentru care $a*1=(-1)*(-a)$.
5p	**4.** Arătați că $x*\frac{1}{x}\geq 3$, pentru orice număr real x, $x>0$.
5p	**5.** Determinați numerele reale x pentru care $x*(3x)=(4x-1)*1$.
5p	**6.** Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $N=n*(n+1)$ este natural par.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&2a\\3a&2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**1.** Arătați că $\det(A(2))=-22$.
5p	**2.** Arătați că $A(1)\cdot A(1)-3A(1)=4I_2$.
5p	**3.** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=-52$.
5p	**4.** Arătați că $aA(1)-A(a)=(a-1)A(0)$, pentru orice număr real a.
5p	**5.** Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(m)+A(1))=2$.
5p	**6.** Determinați numărul natural nenul n pentru care $A(n)\cdot A\left(\frac{1}{n}\right)=A\left(\frac{1}{n}\right)\cdot A(n)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Testul 4

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)(3,2-2,3)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$.

5p **2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x^2-x+2$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{16+3x}=5$.

5p **4.** Două produse s-au vândut, o perioadă de timp, cu același preț. După ce unul dintre ele s-a scumpit cu 20% și celălalt s-a ieftinit cu 20%, diferența dintre prețul primului produs și prețul celui de-al doilea este de 26 de lei. Determinați prețul inițial al produselor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-8,4)$, $B(6,7)$ și $C(0,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele AO și BC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră rombul $ABCD$, cu unghiul A ascuțit, $AB=9$ și aria egală cu 72. Calculați $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x-y+1)(y-x+1)$.

5p **1.** Arătați că $(-1)*4=-24$.

5p **2.** Arătați că $x*y=1-(x-y)^2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **3.** Arătați că $x*(x-1)=0$, pentru orice număr real x.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $x*\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

5p **5.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x*2^{x-1}=1-2^{4040}$.

5p **6.** Determinați numărul real x, $x>0$, pentru care $\left(\lg x*\lg\frac{x}{10}\right)*\left(\lg\frac{x}{10}*\lg\frac{x}{100}\right)=x*1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -5\end{pmatrix}$.

5p **1.** Arătați că $\det A=-5$.

5p **2.** Arătați că $A\cdot B=5I_2$.

5p **3.** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A-xI_2)=10$.

5p **4.** Arătați că suma elementelor matricei A^{-1} este egală cu -1, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **5.** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $B\cdot X=-20I_2$.

5p **6.** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot(B\cdot B-I_2)-(A\cdot A-I_2)\cdot B=x(B-A)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Testul 5

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\frac{2}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)=1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$. Determinați numărul real a, știind că $f(a)+f(2a)=f(9)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\sqrt{3x}=2x$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-3)$, $B(5,1)$ și dreapta d de ecuație $x-2y+a=0$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că mijlocul segmentului AB este situat pe dreapta d.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=20$ și $\sin B=\frac{4}{5}$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=5xy-5x-5y+6$.
5p	**1.** Arătați că $1\circ 5=1$.
5p	**2.** Arătați că $x\circ y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**3.** Arătați că $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii „$\circ$”.
5p	**4.** Determinați numărul real x pentru care $\frac{4}{5}\circ x=\frac{6}{5}$.
5p	**5.** Determinați perechile (a,b) de numere naturale pentru care $a\circ b=21$.
5p	**6.** Calculați $\frac{5}{1}\circ\frac{5}{2}\circ\frac{5}{3}\circ\ldots\circ\frac{5}{9}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=2xA-I_2$, unde x este număr real.
5p	**1.** Arătați că $\det A=8$.
5p	**2.** Arătați că $A\cdot A=-8I_2$.
5p	**3.** Demonstrați că matricea $B(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.
5p	**4.** Determinați numărul real x pentru care $B(x)\cdot B\left(\frac{1}{2}\right)=9I_2$.
5p	**5.** Arătați că $xB(x)-yB(y)=(x-y)B(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**6.** Determinați numărul întreg k pentru care $B(1)-2B(2)+3B(3)-\ldots-20B(20)=kB(21)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Testul 6

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $9:\left(\frac{1}{2^3}-(-1)^3\right)=8$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax-2$, unde a este număr real. Arătați că, dacă punctul $A(1,3)$ aparține graficului funcției f, atunci punctul $B(-1,-7)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x-5}=125$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, numărul 3^{n-3} să fie subunitar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$, $B(0,2)$, $C(1,3)$ și D, astfel încât segmentele AB și CD au același mijloc. Determinați coordonatele punctului D.

5p **6.** Se consideră pătratul $ABCD$ de latură 12 și punctul O, intersecția dreptelor AC și BD. Determinați aria triunghiului AMC, știind că M este mijlocul segmentului OB.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

5p **1.** Arătați că $1\circ(-2)=-9$.

5p **2.** Arătați că $x\circ y=(x+y)(x-y)^2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **3.** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **4.** Arătați că $x\circ(-x)=0$, pentru orice număr real x.

5p **5.** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=24$.

5p **6.** Determinați numerele naturale m și n, cu $m>n$, pentru care $m\circ n=9$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a&2\\b&-3\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **1.** Arătați că $\det A=-1$.

5p **2.** Pentru $a=3$ și $b=-1$, calculați $3A-2B$.

5p **3.** Pentru $a=-3$ și $b=2$, arătați că $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **4.** Determinați numerele reale a și b pentru care $B\cdot B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **5.** Arătați că $\det(A-B)\le -3$, pentru orice numere naturale nenule a și b.

5p **6.** Arătați că, dacă numărul a este cu 5 mai mare decât numărul b, atunci $\det(A\cdot B+B\cdot A)=0$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Testul 7

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că media geometrică a numerelor $a=1+\frac{1}{2}$ și $b=6\sqrt{16}$ este egală cu 6.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$. Determinați numărul real a, $a\neq -2$, pentru care $f(a)=f(-2)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_5(3x-15)=\log_5 2+\log_5 3$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, care au toate cifrele egale, acesta să fie multiplu de 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2a)$ și $B(5,5a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că lungimea segmentului AB este egală cu 7.

5p **6.** Arătați că $2\sin^2 135°-\sin 30°-\cos 60°=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=6-x-y$.

5p **1.** Arătați că $5*2021=-2020$.

5p **2.** Arătați că $(1*x)*1=x$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Determinați numărul real x pentru care $(x+1)*(4x)=15$.

5p **4.** Arătați că $(x*y)*(z*t)=x+y+z+t-6$, pentru orice numere reale x, y, z și t.

5p **5.** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x^2*(-x)\geq 0$.

5p **6.** Determinați numărul natural n pentru care $\left(2^{n^2}*2^{n^2}\right)*\left(2^{n^2}*2^{n^2}\right)=2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x+y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **1.** Arătați că $\det(A(-1,3))=-1$.

5p **2.** Arătați că $2A(1,1)-A(2,2)=A(0,0)$.

5p **3.** Arătați că $A(0,0)\cdot A(1,0)=A(-1,0)$.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x,1)-xA(1,1))=9$.

5p **5.** Demonstrați că $\det(A(x,y))+\det(A(y,x))\geq 2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **6.** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x,y)\cdot A(-y,-x)=A(0,-1)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Testul 8

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(2,5-0,7):2+\left|-\frac{1}{10}\right|=1$, unde $|x|$ reprezintă modulul numărului real x.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$. Determinați numărul real a pentru care $f(2a-4)=f(a)+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{9-x}=9^{3-x}$.

5p **4.** După o ieftinire cu 45%, un produs costă 77 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-1)$, $B(-5,7)$ și $C(7,7)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=6$ și $BC=4$. Calculați $\cos A$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4(x+y)-2xy$.

5p **1.** Arătați că $(-2)\circ 3=16$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **3.** Determinați numerele reale x pentru care $(1-x)\circ x=8$.

5p **4.** Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $1\circ n\geq 2021$.

5p **5.** Determinați numărul întreg a pentru care numărul $A=a\circ\sqrt{2}$ este întreg.

5p **6.** Se consideră numerele reale x, y și z, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Arătați că, pentru orice număr real m, numerele $x\circ m$, $y\circ m$ și $z\circ m$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -8\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **1.** Arătați că $\det A=2$.

5p **2.** Arătați că $(A+B)\cdot(A+B)=24I_2$.

5p **3.** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2(X-A)=3(X-B)$.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A+xI_2)=2$.

5p **5.** Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $N=\det\left((1+n)A+(1-n)B\right)$ este natural, multiplu de 8.

5p **6.** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot(A-xI_2)=B\cdot(B+xI_2)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Testul 9

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $\sqrt{81}-\sqrt{196}+\left(3\sqrt{2}\right)^2:\sqrt{9}=1$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+5x+2$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{12-x}=\sqrt{3x}$.
5p	**4.** Prețul unui obiect este de 400 de lei. Determinați prețul obiectului după două scumpiri succesive, cu 20%, respectiv cu 15%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1,3)$ și dreapta d de ecuație $y=3x-4$. Arătați că dreapta OA este paralelă cu dreapta d.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, în care $\sin A=\frac{1}{3}$, $\sin B=\frac{1}{4}$ și $BC=8$. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=6x+6y-3xy-10$.
5p	**1.** Arătați că $1*2=2$.
5p	**2.** Arătați că $x*y=2-3(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**3.** Arătați că $e=\frac{5}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
5p	**4.** Determinați numerele naturale n pentru care numărul $N=5*n$ este natural.
5p	**5.** Calculați $(-10)*(-9)*(-8)*\ldots*10$.
5p	**6.** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*\left(x^2+2\right)=5$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}a & 1\\ a & 2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**1.** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=1$.
5p	**2.** Arătați că $4M(2)-M(-1)=3M(3)$.
5p	**3.** Arătați că $A\cdot A+7M(1)=24I_2$.
5p	**4.** Arătați că matricea $A-2I_2$ este inversa matricei $M(1)$.
5p	**5.** Determinați numerele reale a și b pentru care $M(1)+M(2)+M(3)+\ldots+M(9)=aM(b)$.
5p	**6.** Arătați că $\det\left(M(a)\cdot M(b)-M(b)\cdot M(a)\right)\le 0$, pentru orice numere reale a și b.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Testul 10

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{3}:\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-4x$. Determinați valorile reale x pentru care $f(x)\le 5f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{2x-1}=32^x$.

5p **4.** Pentru cinci caiete de același tip și un bloc de desen s-au plătit 27 de lei. Știind că prețul unui caiet este 25% din prețul blocului de desen, determinați prețul blocului de desen.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,1)$ și $B(4,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, $a>0$, știind că punctul O aparține dreptei AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, în care $AB=5$ și lungimea catetei AC este cu 1 mai mică decât lungimea ipotenuzei BC. Determinați perimetrul triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+y^2-xy-2x-2y$.

5p **1.** Arătați că $(-1)*2=5$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **3.** Arătați că $(-x)*x=3x^2$, pentru orice număr real x.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $x*1=3$.

5p **5.** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m<n$, pentru care $m*m=n*n$.

5p **6.** Determinați numerele reale x, $x>0$, pentru care $\lg x*\lg\frac{1}{x}=9\lg x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-6\\1&-1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&2a\\2&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det A=4$.

5p **2.** Pentru $a=-6$, arătați că $2A-B=4I_2$.

5p **3.** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A=xA+yI_2$.

5p **4.** Arătați că suma elementelor matricei $B\cdot A$ **nu** depinde de a.

5p **5.** Determinați numerele naturale a pentru care numărul $\det(A+B)$ este pătratul unui număr natural.

5p **6.** Determinați numerele reale a pentru care $(B+aI_2)(B-aI_2)=aB$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Testul 11

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_1=-2$ și $a_3=4$. Calculați termenul a_4.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+2$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în punctul $A(2,0)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8(7x+8)=2$.
5p	**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale nenule de o cifră, numărul $2n$ să fie număr natural de două cifre.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(2,5)$ și $C(5,1)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=17$, $AC=10$ și înălțimea $AD=8$, unde punctul D aparține laturii BC. Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y+6}{xy+1}$.
5p	**1.** Arătați că $1*2=3$.
5p	**2.** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.
5p	**3.** Arătați că $x*1>1$, pentru orice $x\in M$.
5p	**4.** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $3*x=\dfrac{1}{2}$.
5p	**5.** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x\geq2$.
5p	**6.** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m<n$, pentru care $m*n=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}1&x\\-x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**1.** Arătați că $\det A=-4$.
5p	**2.** Arătați că $B(-6)+3B(2)=4B(0)$.
5p	**3.** Arătați că $B(2)\cdot B(-2)-A=4I_2$.
5p	**4.** Arătați că $\det\left(B(2x)+xA\right)=0$, pentru orice număr real x.
5p	**5.** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $B(1)\cdot X=A$.
5p	**6.** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, $m\leq n$, pentru care $\det\left(B(m)\cdot B(n)+mnI_2\right)=4$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Testul 12

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+2\left(1-\sqrt{3}\right)=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)\cdot f(0)+f(3)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16\cdot 2^{2x}=8^x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{6,7,8,9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-1,4)$ și $C(-1,-2)$. Determinați aria triunghiului ABD, știind că punctul D este mijlocul segmentului AC.

5p **6.** Arătați că $\left(\mathrm{tg}30^\circ+\mathrm{tg}60^\circ\right)\sin 60^\circ=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=9xy+x+y$.

5p **1.** Arătați că $1*2=21$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **3.** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **4.** Determinați numărul real x pentru care $(-1)*x=15$.

5p **5.** Determinați simetricul elementului $x=1$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **6.** Determinați numerele naturale n pentru care $N=\frac{1}{3}*n*\frac{2}{3}$ este număr natural de două cifre.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix}2 & a\\ a^2 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det A=9$.

5p **2.** Arătați că $A+X(2)=3X(1)$.

5p **3.** Arătați că $A\cdot A=6A-9I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **4.** Arătați că matricea $M(a)=X(a)+X(-a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **5.** Determinați numerele naturale n pentru care matricea $B=X(-1)\cdot X(n)$ are toate elementele numere naturale.

5p **6.** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(X(2a)-X(a)\right)=3$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{2}\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)-\sqrt{18}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{18}=$ $=3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}=2$	**2p** **3p**
2.	$a+1=3a+7$ $a=-3$	**3p** **2p**
3.	$4+2x=16$ $x=6$, care convine	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale nenule de o cifră are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Divizorii numărului 18, din mulțimea numerelor naturale nenule de o cifră, sunt 1, 2, 3, 6 și 9, deci sunt 5 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{9}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$A\in OB\Rightarrow m_{AO}=m_{OB}$ $-2=\dfrac{a}{3}$, deci $a=-6$	**2p** **3p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A și măsura unghiului C de două ori mai mare decât măsura unghiului B, deci $\sphericalangle B=30^\circ$ $AC=\dfrac{BC}{2}$, de unde obținem $AC=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1*2=3\cdot1+3\cdot2-3\cdot1\cdot2-2=$ $=3-2=1$	**3p** **2p**
2.	$x*y=1-3xy+3x+3y-3=$ $=1-3x(y-1)+3(y-1)=1-3(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
3.	$x*\dfrac{2}{3}=1-3(x-1)\left(\dfrac{2}{3}-1\right)=1+x-1=x$, pentru orice număr real x $\dfrac{2}{3}*x=1-3\left(\dfrac{2}{3}-1\right)(x-1)=1+x-1=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\dfrac{2}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
4.	$(2-x)*2=3x-2$, pentru orice număr real x $3x-2=2+x$, de unde obținem $x=2$	**3p** **2p**
5.	$1-3(m-1)(n-1)=19\Leftrightarrow(m-1)(n-1)=-6$, unde m și n sunt numere naturale m și n sunt numere naturale, deci $m-1\geq-1$ și $n-1\geq-1$, de unde obținem $(0,7)$ și $(7,0)$	**2p** **3p**

6.	$a*1=1$, $a*2=4-3a$, $a*3=7-6a$, deci $(a*1)+(a*2)+(a*3)=12-9a$, pentru orice număr real a	**3p**
	$12-9a=3a^2 \Leftrightarrow a^2+3a-4=0$, de unde obținem $a=-4$ sau $a=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-(-1)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
2.	$xA-2I_2=\begin{pmatrix}x & -x\\ -2x & 4x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}x-2 & -x\\ -2x & 4x-2\end{pmatrix}=B(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -10 & 18\end{pmatrix}$	**3p**
	$B(5)=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -10 & 18\end{pmatrix}$, deci $A\cdot A=B(5)$	**2p**
4.	$\det(B(x))=2x^2-10x+4$, pentru orice număr real x	**3p**
	$2x^2-10x+4=4 \Leftrightarrow x^2-5x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=5$	**2p**
5.	$B(xy)-xB(y)=xyA-2I_2-x(yA-2I_2)=xyA-2I_2-xyA+2xI_2=$	**3p**
	$=2xI_2-2I_2=2(x-1)I_2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
6.	$B\left(2^x\cdot 3^x\right)-2^x B\left(3^x\right)=2\left(2^x-1\right)I_2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$2\left(2^x-1\right)=6$, de unde obținem $x=2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)-\sqrt{18}=2$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x+7$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4+2x}=4$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale nenule de o cifră, numărul n să fie divizor al numărului 18.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul A aparține dreptei OB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $BC=4$ și măsura unghiului C de două ori mai mare decât măsura unghiului B. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3x+3y-3xy-2$.

5p **1.** Arătați că $1*2=1$.

5p **2.** Arătați că $x*y=1-3(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **3.** Arătați că $e=\frac{2}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$“.

5p **4.** Determinați numărul real x pentru care $(2-x)*2=2+x$.

5p **5.** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=19$.

5p **6.** Determinați numerele reale a pentru care $(a*1)+(a*2)+(a*3)=3a^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x-2 & -x\\ -2x & 4x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det A=2$.

5p **2.** Arătați că $xA-2I_2=B(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Arătați că $A\cdot A=B(5)$.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B(x)\right)=4$.

5p **5.** Arătați că $B(xy)-xB(y)=2(x-1)I_2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **6.** Determinați numărul real x pentru care $B\left(6^x\right)-2^xB\left(3^x\right)=6I_2$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{2+14}{2}=$	**3p**
	$=8$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0$	**3p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x=0$ și $x=2$	**2p**
3.	$7^{3-x}=7^{2x} \Leftrightarrow 3-x=2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $n+2$ este impar sunt $1, 3, 5, 7$ și 9, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{9}$	**1p**
5.	$AB=AC \Leftrightarrow \sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{a^2+3^2}$	**2p**
	$a^2=4^2$, de unde obținem $a=-4$ sau $a=4$	**3p**
6.	$\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$	**3p**
	$(1+\sin 30°)\cdot\cos^2 45°+\cos^2 60°=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$0*3=4\cdot 0+4\cdot 3-3=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
2.	$x*y=4x+4y-3=4y+4x-3=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$(-3)*x=4x-15$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x-15=9$, de unde obținem $x=6$	**2p**
4.	$(-x)*(2x)=4x-3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4x-3=x^2 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=3$	**3p**
5.	$2^x*2^x=8\cdot 2^x-3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$8\cdot 2^x-3=1 \Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{2}$, de unde obținem $x=-1$	**3p**
6.	$\frac{x}{2}*\frac{x}{4}=3x-3$, $x*\left(\frac{x}{2}*\frac{x}{4}\right)=16x-15$, pentru orice număr real x	**3p**
	$16x-15-x=x-1$, de unde obținem $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 6\\ -2 & -7\end{vmatrix}=1\cdot(-7)-6\cdot(-2)=$	**3p**
	$=-7+12=5$	**2p**
2.	$B(1)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow 2B(1)-A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 6\\ -2 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=3I_2$	**2p**
3.	$B(3)=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow B(1)\cdot B(3)=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -4 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$B(1)\cdot B(3)-3I_2=\begin{pmatrix}4 & 4\\ -4 & -4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=2B(0)$	**2p**
4.	$B(x)\cdot B(x)=\begin{pmatrix}4+\left(x^2-4\right) & 2(x+2)-2(x+2)\\ 2(x-2)-2(x-2) & \left(x^2-4\right)+4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}x^2 & 0\\ 0 & x^2\end{pmatrix}=x^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=x^2I_2$, pentru orice număr real x	**2p**
5.	$\det\left(B(x)\right)=-x^2$ și $\det\left(B(x+1)\right)=-(x+1)^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-x^2=-(x+1)^2\Leftrightarrow 2x+1=0$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$	**2p**
6.	$B(3)\cdot B(3)=3^2I_2$, $B(4)\cdot B(4)=4^2I_2$ și $B(n)\cdot B(n)=n^2I_2$, unde n este număr natural	**3p**
	$25I_2=n^2I_2$, deci $n^2=25$ și, cum n este număr natural, obținem $n=5$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Varianta 4

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1=2$ și $a_3=14$. Calculați termenul a_2.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $7^{3-x}=49^x$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,9\}$, numărul $n+2$ să fie impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-3)$, $B(3,1)$ și $C(a,0)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $AB=AC$.

5p **6.** Arătați că $(1+\sin 30°)\cdot\cos^2 45°+\cos^2 60°=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=4x+4y-3$.

5p **1.** Arătați că $0*3=9$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **3.** Determinați numărul real x pentru care $(-3)*x=9$.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $(-x)*(2x)=x^2$.

5p **5.** Determinați numărul real x pentru care $2^x*2^x=1$.

5p **6.** Determinați numărul real x, știind că scăzând x din numărul $x*\left(\frac{x}{2}*\frac{x}{4}\right)$, se obține numărul cu 1 mai mic decât x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&6\\-2&-7\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2&x+2\\x-2&-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det A=5$.

5p **2.** Arătați că $2B(1)-A=3I_2$.

5p **3.** Arătați că $B(1)\cdot B(3)-3I_2=2B(0)$.

5p **4.** Arătați că $B(x)\cdot B(x)=x^2I_2$, pentru orice număr real x.

5p **5.** Determinați numărul real x pentru care $\det(B(x))=\det(B(x+1))$.

5p **6.** Determinați numărul natural n pentru care $B(3)\cdot B(3)+B(4)\cdot B(4)=B(n)\cdot B(n)$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{2}=$	**3p**
	$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$	**2p**
2.	$f(n)=n-2$, deci $n-2<0$	**2p**
	$n<2$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**
3.	$x^2-1=3\Rightarrow x^2-4=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	$x+\frac{20}{100}\cdot x=660$, unde x este prețul obiectului înainte de scumpire	**3p**
	$x=550$ de lei	**2p**
5.	Panta unei drepte paralele cu dreapta d este egală cu 3	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin M și este paralelă cu dreapta d este $y-0=3(x-2)$, deci $y=3x-6$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=$	**2p**
	$=\frac{2\sqrt{5}\cdot 4}{2}=4\sqrt{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$(-3)*3=3\cdot(-3)\cdot 3+7\cdot((-3)+3)+14=$	**3p**
	$=-27+14=-13$	**2p**
2.	$x*y=3xy+7(x+y)+14=3yx+7(y+x)+14=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$x*y=3xy+7x+7y+14=3xy+7x+7y+\frac{49}{3}-\frac{7}{3}=$	**3p**
	$=3x\left(y+\frac{7}{3}\right)+7\left(y+\frac{7}{3}\right)-\frac{7}{3}=3\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(y+\frac{7}{3}\right)-\frac{7}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
4.	$x*x=3\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$3\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{7}{3}=x\Leftrightarrow\left(x+\frac{7}{3}\right)(3x+6)=0$, deci $x=-\frac{7}{3}$ sau $x=-2$	**3p**

5.	$x*\frac{1}{x}\geq 31\Leftrightarrow 3\cdot x\cdot\frac{1}{x}+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14\geq 31\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$	**3p**
	$x+\frac{1}{x}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$, adevărat pentru orice număr real x, $x>0$	**2p**
6.	$3\left(3^x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{7}{3}=83\Leftrightarrow\left(3^x+\frac{7}{3}\right)^2=\frac{256}{9}$	**2p**
	Cum $3^x>0$, obţinem $3^x+\frac{7}{3}=\frac{16}{3}\Rightarrow 3^x=3$, deci $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(1)=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}=3\cdot 3-1\cdot 1=$	**3p**
	$=9-1=8$	**2p**
2.	$A(0)=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=3I_2$	**2p**
	$A(0)\cdot A(2020)=3I_2\cdot A(2020)=3A(2020)$	**3p**
3.	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}3&a\\a&3\end{vmatrix}=9-a^2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$9-a^2=-16\Leftrightarrow a^2-25=0$, de unde obținem $a=-5$ sau $a=5$	**3p**
4.	$A(1)+A(2)+\ldots+A(10)=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}3&10\\10&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 10&1+2+\ldots+10\\1+2+\ldots+10&3\cdot 10\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}30&55\\55&30\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}3&\frac{11}{2}\\\frac{11}{2}&3\end{pmatrix}=10A\left(\frac{11}{2}\right)$	**3p**
5.	$B=A(m)+A\left(m^2\right)=\begin{pmatrix}6&m+m^2\\m+m^2&6\end{pmatrix}\Rightarrow\det B=36-\left(m+m^2\right)^2$, pentru orice număr natural m	**2p**
	Matricea B nu este inversabilă $\Leftrightarrow\det B=0$, deci $\left(m+m^2\right)^2=36$ şi, cum m este număr natural, obținem $m=2$	**3p**
6.	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}9+ab&3b+3a\\3a+3b&ab+9\end{pmatrix}$, deci $2(9+ab)+6(a+b)=2\Leftrightarrow ab+3a+3b+9=1$	**2p**
	$(a+3)(b+3)=1$ și, cum a şi b sunt numere întregi, obținem $(-2,-2)$ sau $(-4,-4)$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$. Determinați numerele naturale n pentru care $f(n)<0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-1\right)=1$.

5p **4.** După o scumpire cu 20%, prețul unui obiect este 660 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $M(2,0)$ și este paralelă cu dreapta d de ecuație $y=3x$.

5p **6.** Calculați aria rombului $ABCD$, știind că $AC=2\sqrt{5}$ și $BD=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy+7(x+y)+14$.

5p **1.** Arătați că $(-3)*3=-13$.

5p **2.** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **3.** Arătați că $x*y=3\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(y+\frac{7}{3}\right)-\frac{7}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=x$.

5p **5.** Arătați că $x*\frac{1}{x}\geq 31$, pentru orice număr real x, $x>0$.

5p **6.** Determinați numărul real x pentru care $3^x*3^x=83$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det(A(1))=8$.

5p **2.** Arătați că $A(0)\cdot A(2020)=3A(2020)$.

5p **3.** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=-16$.

5p **4.** Arătați că $A(1)+A(2)+\ldots+A(10)=10A\left(\frac{11}{2}\right)$.

5p **5.** Determinați numărul natural m pentru care matricea $B=A(m)+A\left(m^2\right)$ **nu** este inversabilă.

5p **6.** Determinați perechile de numere întregi (a,b) pentru care suma elementelor matricei $A(a)\cdot A(b)$ este egală cu 2.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5=\frac{1}{2}+3r \Leftrightarrow r=\frac{3}{2}$, unde r este rația progresiei	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=3a_1+3r=6$	**3p**
2.	$f(1)=2a-2$, $f(-2)=-a-2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$2a-2-a-2=0$, deci $a=4$	**3p**
3.	$\log_6(2x+6)=2 \Rightarrow 2x+6=6^2$	**3p**
	$2x+6=36 \Rightarrow x=15$, care convine	**2p**
4.	Sunt 10 de numere naturale de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Sunt 3 numere naturale de o cifră care pot fi scrise sub forma n^3, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{10}$	**1p**
5.	$D(2,4)$	**2p**
	Ecuația dreptei AD este $y=x+2$	**3p**
6.	$\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\cos 120°=-\frac{1}{2}$	**3p**
	$2\sin 30°\cos 60°-\cos 120°=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$2*(-5)=\frac{(2-1)(-5-1)}{2}+1=$	**3p**
	$=-3+1=-2$	**2p**
2.	$x*3=\frac{(x-1)(3-1)}{2}+1=x-1+1=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$3*x=\frac{(3-1)(x-1)}{2}+1=x-1+1=x$, pentru orice număr real x, deci $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
3.	$a*5=2(a-1)+1=2a-1$, pentru orice număr real a	**3p**
	$2a-1=3$, deci $a=2$	**2p**
4.	$x*(1-x)=\frac{-x^2+x+2}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{-x^2+x+2}{2}\geq -5 \Leftrightarrow -x^2+x+12\geq 0$, de unde obținem $x\in[-3,4]$	**3p**

5.	$N=\left(\sqrt{n}+1\right)*\left(\sqrt{n}+1\right)=\frac{n}{2}+1$, pentru orice număr natural n	**2p**
	De exemplu, pentru $n=4k+2$, unde $k\in\mathbb{N}$, obținem că $N=2(k+1)$, care este număr natural par	**3p**
6.	$m*n*p=\frac{(m-1)(n-1)(p-1)}{4}+1$, pentru orice numere naturale m, n și p	**3p**
	$\frac{(m-1)(n-1)(p-1)}{4}+1=8\Leftrightarrow(m-1)(n-1)(p-1)=28$ și, cum m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, obținem tripletele $(2,5,8)$ și $(2,3,15)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1-(-1)\cdot3=$	**3p**
	$=1+3=4$	**2p**
2.	$A+xI_2=\begin{pmatrix}1+x & 3\\ -1 & 1+x\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A+xI_2\right)=\begin{vmatrix}1+x & 3\\ -1 & 1+x\end{vmatrix}=(1+x)(1+x)-3\cdot(-1)=$	**3p**
	$=(1+x)^2+3\geq3$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, $B(3)=(A\cdot A)\cdot A=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}=-8I_2$	**3p**
	$-8I_2=aI_2$, de unde obținem $a=-8$	**2p**
4.	$\det\left(2mA+I_2\right)=\begin{vmatrix}2m+1 & 6m\\ -2m & 2m+1\end{vmatrix}=16m^2+4m+1$ și $2m\det\left(A-I_2\right)=6m$, pentru orice număr real m	**3p**
	$16m^2+10m+1=0$, de unde obținem $m=-\frac{1}{2}$ sau $m=-\frac{1}{8}$	**2p**
5.	$A\cdot M=\begin{pmatrix}x+3z & y+3t\\ -x+z & -y+t\end{pmatrix}$, $M\cdot A=\begin{pmatrix}x-y & 3x+y\\ z-t & 3z+t\end{pmatrix}$, unde x, y, z și t sunt numere reale	**2p**
	$A\cdot M=M\cdot A\Rightarrow 3z=-y$ și $t=x$, de unde obținem $x+y+3z-t=x+y-y-x=0$	**3p**
6.	$B(3)=-8I_2$, deci $B(6n)=\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A\cdot A\cdot A}_{\text{de } 6n \text{ ori } A}=\underbrace{B(3)\cdot B(3)\cdot\ldots\cdot B(3)}_{\text{de } 2n \text{ ori } B(3)}=(-8)^{2n}I_2$, unde n este număr natural nenul	**3p**
	$B(6n)=64^nI_2$, deci $B(6n)$ are toate elementele numere naturale, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Simulare

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=\frac{1}{2}$ și $a_4=5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+a-2$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $f(1)+f(-2)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1+\log_6(2x+6)=3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să poată fi scris sub forma n^3, unde n este număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(0,6)$, $C(4,2)$ și punctul D, mijlocul segmentului BC. Determinați ecuația dreptei AD.

5p **6.** Calculați $2\sin 30°\cos 60°-\cos 120°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{(x-1)(y-1)}{2}+1$.

5p **1.** Arătați că $2*(-5)=-2$.

5p **2.** Verificați dacă $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **3.** Determinați numărul real a pentru care $a*5=3$.

5p **4.** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*(1-x)\ge-5$.

5p **5.** Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care numărul $N=(\sqrt{n}+1)*(\sqrt{n}+1)$ este natural par.

5p **6.** Determinați tripletele (m,n,p) de numere naturale, cu $m<n<p$, pentru care $m*n*p=8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $B(n)=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{de } n \text{ ori A}}$, unde n este număr natural nenul.

5p **1.** Arătați că $\det A=4$.

5p **2.** Arătați că $\det(A+xI_2)\ge3$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Arătați că există un număr real a, astfel încât $B(3)=aI_2$.

5p **4.** Determinați numerele reale m pentru care $\det(2mA+I_2)+2m\det(A-I_2)=0$.

5p **5.** Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot M=M\cdot A$. Arătați că $x+y+3z-t=0$.

5p **6.** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, matricea $B(6n)$ are toate elementele numere naturale.