Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3z_1+2z_2=3(5+2i)+2(3-3i)=15+6i+6-6i=$ $=15+6=21$	**3p** **2p**
2.	$x+1=x^2-x+2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$ $x=1$	**2p** **3p**
3.	$3^{x^2+3}=3^{1+3x} \Leftrightarrow x^2+3=1+3x \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ $x=1$ sau $x=2$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care sunt divizibile cu 3 și cu 5, are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15}$	**2p** **2p** **1p**
5.	Ecuația dreptei AB este $y=x+2$ Punctul C aparține dreptei $AB \Leftrightarrow m=-2$	**2p** **3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=16+64-2\cdot4\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}=48$ $BC=4\sqrt{3}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&3\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**3p** **2p**
b)	$A(x)A(-x)=\begin{pmatrix}2+x^2&0&-x^2-1\\0&1&0\\2+2x^2&0&-2x^2-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x)A(-x))=\begin{vmatrix}2+x^2&0&-x^2-1\\0&1&0\\2+2x^2&0&-2x^2-1\end{vmatrix}=$ $=(x^2+2)(-2x^2-1)-(-x^2-1)(2x^2+2)=-x^2\leq0$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
c)	$A(m)A(n)=\begin{pmatrix}2-mn&0&mn-1\\0&1&0\\2(1-mn)&0&2mn-1\end{pmatrix}=A(mn)$ $A(mn)=A(2)$, deci $mn=2$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m+n=3$	**3p** **2p**
2.a)	$f(1)=0\Leftrightarrow1^3+2\cdot1^2+a\cdot1+1=0$ $a=-4$	**2p** **3p**

b)	$f = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ și câtul este $X + 1$	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$x_1x_2x_3 = -1$ și $\lvert x_1\rvert = \lvert x_2\rvert = \lvert x_3\rvert \Rightarrow \lvert x_1\rvert = \lvert x_2\rvert = \lvert x_3\rvert = 1$	**2p**
	Cum f are cel puțin o rădăcină reală, una dintre rădăcini este egală cu -1 sau cu 1	**1p**
	Dacă $x_1 = -1$, obținem $f(-1) = 0$, deci $a = 2$, ceea ce convine, deoarece $\lvert x_2\rvert = \lvert x_3\rvert = 1$	**1p**
	Dacă $x_1 = 1$, obținem $f(1) = 0$, deci $a = -4$, ceea ce nu convine, deoarece $\lvert x_2\rvert \neq \lvert x_3\rvert$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(e^x\right)' - 1' - \left(\ln(x+2)\right)' =$	**2p**
	$= e^x - 0 - \frac{(x+2)'}{x+2} = e^x - \frac{1}{x+2},\ x \in (-2,+\infty)$	**3p**
b)	$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+2)^2},\ x \in (-2,+\infty)$	**2p**
	$f''(x) \geq 0$, deci funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{\ln(x+2)}{x}\right) = +\infty$	**1p**
2.a)	$\int_1^e x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big\vert_1^e =$	**3p**
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$	**2p**
b)	$x \in [1,e] \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow \ln x - 1 \leq 0$	**2p**
	$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x\ln^n x(\ln x - 1)\,dx \leq 0$, deci $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
c)	$I_{n+1} = \int_1^e x\ln^{n+1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^{n+1} x\Big\vert_1^e - \frac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx =$	**3p**
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$, deci $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + 2i$ și $z_2 = 3 - 3i$. Arătați că $3z_1 + 2z_2 = 21$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x + 2$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+3} = 3\cdot 3^{3x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,4)$ și $C(m,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB = 4$, $AC = 8$ și $A = \frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2)) = 2$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(-x)) \le 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că, dacă numerele naturale m și n verifică relația $A(m)A(n) = A(2)$, atunci $m + n = 3$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + aX + 1$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1) = 0$.

5p **b)** Pentru $a = 2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+2)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$, $x \in (-2,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_1^e x\ln^n x\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^e x\,dx = \frac{e^2 - 1}{2}$.

5p **b)** Demonstraţi că $I_{n+1} \le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z+\overline{z}+z\overline{z}=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**
2.	$f(1)=m\Rightarrow 1+2-3=m$	**3p**
	$m=0$	**2p**
3.	$1-\log_2 x=0$ sau $2-\log_2 x=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților are 36 de elemente, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{90}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$M(3,2)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CM=3$	**2p**
6.	$\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)\cos^2x-\left(1+\operatorname{ctg}^2x\right)\sin^2x=\left(1+\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}\right)\cos^2x-\left(1+\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)\sin^2x=$	**3p**
	$=\cos^2x+\sin^2x-\left(\sin^2x+\cos^2x\right)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(9)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(9))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+(-2)+(-18)-(-8)-(-9)-3=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{vmatrix}=9-a$	**3p**
	Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow\det(A(a))\neq0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{9\}$	**2p**
c)	Sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, deci $a=9$ și soluția sistemului este de forma $(5\alpha,-7\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$-x_0+y_0+z_0=-5\alpha+(-7\alpha)+\alpha=-11\alpha=11(5\alpha+(-7\alpha)+\alpha)=11(x_0+y_0+z_0)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=xy+7x+7y+49-7=$	**2p**
	$=x(y+7)+7(y+7)-7=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x \circ x = (x+7)^2 - 7$, deci $(x+7)^2 - 7 = x$ $(x+7)(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ sau $x = -6$	**2p** **3p**
c)	$\left(2017^a + 7\right)(-6+7) - 7 = 1 \Leftrightarrow 2017^a + 7 - 7 = 1$ $2017^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1-x) - \ln x \cdot (-1)}{(1-x)^2} =$ $= \dfrac{\frac{1-x}{x} + \ln x}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x \in (1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$g:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\ln x - x + 1 \Rightarrow g'(x) = \ln x$, deci $g'(x) > 0$ pentru orice $x \in (1,+\infty)$ Funcția g este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$, obținem $g(x) > 0$, deci $x\ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x) - 3x^2\right)dx = \int_0^1 \left(e^x + 3x^2 - 3x^2\right)dx = \int_0^1 e^x dx =$ $= e^x \Big\vert_0^1 = e - 1$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \left(xe^x + 3x^3\right)dx = (x-1)e^x \Big\vert_0^1 + \dfrac{3x^4}{4}\Big\vert_0^1 =$ $= 1\cdot e^0 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$	**3p** **2p**
c)	$g(x) = 3x^2 \Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^n \lvert g(x)\rvert dx = \int_0^n 3x^2\, dx = x^3 \Big\vert_0^n = n^3$ $n^3 = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (n-1)\left(n^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow n = 1$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătaţi că $z+\overline{z}+z\overline{z}=9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,m)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităţilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ şi $C(0,2)$. Determinaţi lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătaţi că $\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)\cos^2 x-\left(1+\mathrm{ctg}^2 x\right)\sin^2 x=0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & a\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+2z=0\\ x+2y+az=0\\ -2x-y+3z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(9))=0$.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.

5p **c)** Demonstraţi că, dacă sistemul are soluţia (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+7x+7y+42$.

5p **a)** Arătaţi că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x, ştiind că $x\circ x=x$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $2017^a\circ(-6)=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=e-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\frac{7}{4}$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=n$ are aria egală cu n^2-n+1.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$25-40i+16i^2+25+40i+16i^2=$	**3p**
	$=50+32i^2=50-32=18$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0$	**3p**
	$x=2$ și $x=4$	**2p**
3.	$x^2-x-2=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-x-2=x^2-4x+4 \Rightarrow 3x=6$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 9 sunt 19, 33 și 91, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{90}=\dfrac{1}{30}$	**1p**
5.	$x_B=\dfrac{x_A+x_M}{2} \Rightarrow x_M=2$	**3p**
	$y_B=\dfrac{y_A+y_M}{2} \Rightarrow y_M=5$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot BC\cdot\sin(\sphericalangle ABC)=6\cdot 3\cdot\sin 30^\circ=$	**3p**
	$=18\cdot\dfrac{1}{2}=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)A(z)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&y\\y&0&0\\0&y&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&z\\z&0&0\\0&z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&xy&0\\0&0&xy\\xy&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&z\\z&0&0\\0&z&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}xyz&0&0\\0&xyz&0\\0&0&xyz\end{pmatrix}=xyzI_3$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**

c)	$A(n)A(n)+A(n)+I_3=\begin{pmatrix}0&n^2&0\\0&0&n^2\\n^2&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&n\\n&0&0\\0&n&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n^2&n\\n&1&n^2\\n^2&n&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A(n)A(n)+A(n)+I_3\right)=\begin{vmatrix}1&n^2&n\\n&1&n^2\\n^2&n&1\end{vmatrix}=n^6-2n^3+1=\left(n^3-1\right)^2$, care este pătratul unui număr natural	**3p**
2.a)	$f(2)=0\Leftrightarrow 2^4+a\cdot 2^2+4=0$	**3p**
	$4a+20=0\Leftrightarrow a=-5$	**2p**
b)	$f=X^4-5X^2+4$; câtul este X^2-X-2	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$1-a+4=0\Rightarrow a=5$	**2p**
	$f=\left(X^2+1\right)\left(X^2+4\right)$, de unde obținem $x_1=i$, $x_2=-i$, $x_3=2i$ și $x_4=-2i$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\infty$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$\int_{-1}^{1}x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-1}^{1}x\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}+1-\dfrac{1}{e^{-x}+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\int_{-1}^{1}x\left(2-\dfrac{e^x+1}{e^x+1}\right)dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_{-1}^{1}=0$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big\vert_0^1=\ln\dfrac{e+1}{2}$	**3p**
	Cum $e<3\Rightarrow\dfrac{e+1}{2}<2$, obținem $\mathcal{A}<\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $(5-4i)^2+(5+4i)^2=18$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,3)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că punctul B este mijlocul segmentului AM.
5p	**6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $BC=3$ și $m(\sphericalangle ABC)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)A(z)=xyz\,I_3$, pentru orice numere reale x, y și z.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.
	2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+4$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real a, știind că $f(2)=0$.
5p	**b)** Pentru $a=-5$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X-2.
5p	**c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{e^x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 \left(e^x+1\right)f(x)\,dx=e-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} x\left(f(x)+f(-x)\right)dx = 0$.

5p **c)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=1$ are aria mai mică decât $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z_1-3z_2=2(2+3i)-3(1+2i)=$	**2p**
	$=4+6i-3-6i=1$	**3p**
2.	$x_1+x_2=3m$, $x_1x_2=2\Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2+1=3m+3$	**3p**
	$3m+3=0\Leftrightarrow m=-1$	**2p**
3.	$\log_4\left((x+3)(x-3)\right)=2\Rightarrow x^2-9=4^2\Rightarrow x^2-25=0$	**3p**
	$x=-5$, care nu convine, $x=5$, care convine	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 6 sunt 16, 23, 32 și 61, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{90}=\dfrac{2}{45}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{-3}$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
6.	$(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=$	**3p**
	$=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+1-1-0-1=-1$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x&1&1\\x+1&1&1\\1&x&1\end{vmatrix}=x-1$, $\det(A(x+1))=x\Rightarrow (x-1)x=12$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=4$	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=1\neq 0$, $(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&1&1\\5&-3&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(0)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&2&1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-(m+2)\cdot 0^2+\left(m^2+2\right)\cdot 0-1=$	**2p**
	$=0-0+0-1=-1$, pentru orice număr real m	**3p**

b)	$x_1+x_2+x_3=m+2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m^2+2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-m^2+4m$	**3p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$ $=2\left(-m^2+4m-m^2-2\right)=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}\Rightarrow x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\in\mathbb{R}\Rightarrow(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\geq 0$, deci $(m-1)^2\leq 0$	**2p**
	$m=1$, caz în care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2e^x\right)'-\left(x^2\right)'-(2x)'-(2)'=$	**2p**
	$=2e^x-2x-2=2\left(e^x-x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=2\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$x\in(-\infty,0]\Rightarrow f''(x)\leq 0$, deci f' este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**1p**
	$x\in[0,+\infty)\Rightarrow f''(x)\geq 0$, deci f' este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**1p**
	$f'(x)\geq f'(0)$ și $f'(0)=0$ implică $f'(x)\geq 0$ pentru orice număr real x, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=\frac{(x+2)^3}{3}\Big\vert_{-2}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-0=9$	**2p**
b)	$\int_0^1(x+2)e^x\,dx=(x+2)e^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=3e-2-e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=3e-2-e+1=2e-1$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_{-1}^{1}(x+2)^n\,dx=\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}\Big\vert_{-1}^{1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=\frac{242}{n+1}\Leftrightarrow 3^{n+1}=243\Leftrightarrow 3^{n+1}=3^5\Leftrightarrow n=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1=2+3i$ și $z_2=1+2i$. Arătați că $2z_1-3z_2=1$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-3mx+2=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1+x_2+x_1x_2+1=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x+3)+\log_4(x-3)=2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
5p	**5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}-3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Arătați că $(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\big(A(0)\big)=-1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\big(A(x)\big)\cdot\det\big(A(x+1)\big)=12$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(0)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+2)X^2+\left(m^2+2\right)X-1$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0)=-1$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Demonstrați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2e^x-x^2-2x-2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=2\left(e^x-x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=9$.
5p	**b)** Pentru $n=1$, arătați că $\int_0^1 f(x)e^x dx=2e-1$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{242}{n+1}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1 z_2 + 2z_1 + z_2 = (2+3i)(4-6i) + 2(2+3i) + 4 - 6i =$	**2p**
	$= 8 - 12i + 12i - 18i^2 + 4 + 6i + 4 - 6i = 34$, care este număr real	**3p**
2.	$g(0) = 1$	**2p**
	$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 1$	**3p**
3.	$x^2 - 4 = 5x - 8 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care nu verifică ecuația; $x = 4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre, multipli de 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 3	**2p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 3x - 3$	**3p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\sin x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x - x\right) =$	**3p**
	$= \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 4$	**3p**
b)	$A(x) + B(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(x) + B(x)) = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 - 4x^2 =$	**3p**
	$= -2x^2 = \det(B(x))$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(n)B(p) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & np \\ 0 & np & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**2p**
	$A(n)B(p) = B(3) \Leftrightarrow np = 3$ și, cum n și p sunt numere naturale, obținem $n = 1$, $p = 3$ sau $n = 3$, $p = 1$	**3p**
2.a)	$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 3 = 0$	**2p**
	$a = -12$	**3p**

b)	$a=6 \Rightarrow f=X^3+6X^2+8X+3$ și câtul este $X+1$ Restul este 0	**3p** **2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-16$ Pentru $a\in(-4,4)$, obținem $a^2-16<0$, deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2<0$, adică polinomul f nu are toate rădăcinile reale	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^{2018}\right)'+(2018x)'+2'=$ $=2018x^{2017}+2018=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=2018x+2$ $2020=2018a+2 \Leftrightarrow a=1$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $f(-1)=-2015$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii reale distincte	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{3}+1+2=\frac{10}{3}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}+2x^n+2x^{n-1}}{x^2+2x+2}dx=$ $=\int_0^1\frac{x^{n-1}\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}dx=\int_0^1 x^{n-1}dx=\left.\frac{x^n}{n}\right\|_0^1=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+2x+2}dx\leq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n $5I_{n+1}\leq I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}\leq 5I_{n-1} \Rightarrow 5I_{n+1}\leq\frac{1}{n}\leq 5I_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$ Pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, $\frac{n}{5(n+1)}\leq nI_n\leq\frac{n}{5(n-1)}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$	**1p** **2p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 4-6i$. Arătați că numărul $z_1z_2 + 2z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Calculați $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2-4\right)=\log_5(5x-8)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x-2017$ și punctul $A(1,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=B(3)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=6$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2020)$ aparține tangentei la graficul funcției f care trece prin punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=$	**2p**
	$=\frac{4+4i+i^2+4-4i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{6}{5}$	**3p**
2.	$x_1+x_2=2m+3$, $x_1x_2=m^2+3m+2$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2+12m+9-4m^2-12m-8=1$, pentru orice număr real m	**3p**
3.	$\sqrt{x-3}=5-x\Rightarrow x-3=(5-x)^2$, deci $x^2-11x+28=0$	**3p**
	$x=7$, care nu verifică ecuaţia, sau $x=4$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri	**2p**
	Cifra unităților se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot4\cdot3=48$ de numere	**3p**
5.	$MP\parallel BC$, $NP\parallel AB$	**2p**
	$BNPM$ paralelogram, deci $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\cos x\Leftrightarrow\cos x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\cos x=0$ sau $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, obținem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{5\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{vmatrix}=a^2+3+3-a-9-a=$	**3p**
	$=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(m)A(2-m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&3\\1&3&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2-m&3\\1&3&2-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6-m&6-m\\m+4&-m^2+2m+10&7\\m+4&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(2-m)A(m)=\begin{pmatrix}3&m+4&m+4\\6-m&-m^2+2m+10&7\\6-m&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$, de unde obținem $m=1$	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică, deci $a\neq -1$ și $a\neq 3$; pentru fiecare număr întreg a, $a\neq -1$ și $a\neq 3$, soluția sistemului este de forma $\left(\frac{a-1}{a+1},\frac{1}{a+1},\frac{1}{a+1}\right)$	**3p**
	Cum $a\in\mathbb{Z}$, obținem $\frac{a-1}{a+1},\frac{1}{a+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a+1$ este divizor al lui 1, deci $a=-2$ sau $a=0$	**2p**
2.a)	$x*y=-5xy+10x+10y-20+2=$	**2p**
	$=-5x(y-2)+10(y-2)+2=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$n*n=2-5(n-2)^2$, $(n*n)*n=2+25(n-2)^3$	**3p**
	$2+25(n-2)^3=n\Leftrightarrow(n-2)\left(25(n-2)^2-1\right)=0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**
c)	$a*a=b\Leftrightarrow b-2=-5(a-2)^2$	**1p**
	$b*b=a\Leftrightarrow a-2=-5(b-2)^2$, deci $a-2=-125(a-2)^4$	**2p**
	$a-2=0$, de unde $a=b=2$ sau $a-2=-\frac{1}{5}$, de unde $a=b=\frac{9}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,-2]$	**1p**
	$x\in[-2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-2,+\infty)$	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\cdot x}=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}}=\frac{1}{e^2}$	**2p**
c)	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-a$ este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x)=f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2)$ și strict crescătoare pe $(-2,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1-a>0$, $g(-2)=-\sqrt{2}-a<0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1-a>0$, pentru orice $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$	**2p**
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x+1}}\leq 1$ și $x^n\geq 0$, deci $\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\leq x^n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}dx\leq\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

c)	$I_n = 2\int_0^1 x^n \left(\sqrt{x+1}\right)' dx = 2x^n \left(\sqrt{x+1}\right)\Big\|_0^1 - 2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{x+1}\, dx = 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\, dx =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}\, dx = 2\sqrt{2} - 2nI_n - 2nI_{n-1} \Rightarrow (2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$. Arătați că $(x_1-x_2)^2=1$, pentru orice număr real m.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-3}=5-x$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P, mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Demonstrați că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$.
5p	**6.** Determinați numerele reale x, știind că $\sin 2x=\cos x$ și $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\x+ay+3z=2\\x+3y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.
5p	**c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele naturale n, știind că $(n*n)*n=n$.
5p	**c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.
5p	**a)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.
5p	**c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $I_n\le\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}=(4-i)(4+i)-(4-i)-(4+i)=$	**2p**
	$=4^2-i^2-8=9$	**3p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4\left(m^2-m+2\right)=8m-7$	**2p**
	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 8m-7=0 \Leftrightarrow m=\frac{7}{8}$	**3p**
3.	$3\log_x 5+\log_5(5x)=5 \Rightarrow \frac{3}{\log_5 x}+\log_5 5+\log_5 x=5 \Rightarrow (\log_5 x-1)(\log_5 x-3)=0$	**3p**
	$x=5$ sau $x=125$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 900	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre, care sunt multipli de 11, sunt $10\cdot 11, 11\cdot 11, \ldots, 90\cdot 11$, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 81	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{81}{900}=\frac{9}{100}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$\sin^2 x+6\sin x\cos y+9\cos^2 y+\cos^2 x-6\cos x\sin y+9\sin^2 y=10 \Leftrightarrow 6\sin(x-y)=0$	**3p**
	$x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x-y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, deci obținem $x-y=0$, adică $x=y$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta(0,2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 6 & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+6+0-0-2-12=-2$	**3p**
b)	$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-1 & y-1 & 2\\ x^2+x-2 & y^2+y-2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-1 & y-1 & 2\\ (x-1)(x+2) & (y-1)(y+2) & 2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(x-1)(y-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ x+2 & y+2\end{vmatrix}=(x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$\Delta(m,n)=\begin{vmatrix}1&1&1\\m+1&n+1&2\\m^2+m&n^2+n&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\m+1&n+1&2\\m(m+1)&n(n+1)&2\end{vmatrix}$	**1p**
	Cum numerele m și n sunt întregi, numerele $m(m+1)$ și $n(n+1)$ sunt divizibile cu 2, deci există numerele întregi k și l astfel încât $m(m+1)=2k$ și $n(n+1)=2l$	**2p**
	$\Delta(m,n)=\begin{vmatrix}1&1&1\\m+1&n+1&2\\2k&2l&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&1\\m+1&n+1&2\\k&l&1\end{vmatrix}$, deci numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2	**2p**
2.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(0)+A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}a&0&a-1\\0&1&0\\a-1&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0&b-1\\0&1&0\\b-1&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ab-a-b+1&0&2ab-a-b\\0&1&0\\2ab-a-b&0&2ab-a-b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2ab-a-b+1&0&(2ab-a-b+1)-1\\0&1&0\\(2ab-a-b+1)-1&0&2ab-a-b+1\end{pmatrix}=A(2ab-a-b+1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{2}\right)A(a)=A\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot a-\frac{1}{2}-a+1\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru a număr real	**2p**
	$A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=\left(A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=$ $=\left(A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=\ldots=A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{2017}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{x^3(x+1)^3}=\frac{(x+1)^3-x^3}{x^3(x+1)^3}=$	**3p**
	$=\frac{(x+1)^3}{x^3(x+1)^3}-\frac{x^3}{x^3(x+1)^3}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**

c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^{2n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{(n+1)^3}\right)^{\frac{(n+1)^3}{-1}}\right)^{\frac{-2n^3}{(n+1)^3}}=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^3}{(n+1)^3}}=\frac{1}{e^2}$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2-x+a}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)}{x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)=1$	**2p**
b)	f este continuă în $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=f(0)$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(x^3+3x^2-x+a\right)=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\left(e^x+1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+e^x+1}=\frac{4}{3}$, $f(0)=a$	**3p**
	$a=\frac{4}{3}$	**1p**
c)	Pentru $a\in(-6,-3)$, avem $f(-3)=3+a<0$, $f(-1)=3+a<0$ și $f(-2)=6+a>0$	**3p**
	Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$, deci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție reală în intervalul $(-3,-2)$ și cel puțin o soluție reală în intervalul $(-2,-1)$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=4-i$. Calculați $z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că axa Ox este tangentă graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+1)x+m^2-m+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\log_x 5+\log_5(5x)=5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul medianei AM. Demonstrați că $\overrightarrow{BN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Arătați că, dacă $(\sin x+3\cos y)^2+(\cos x-3\sin y)^2=10$ și $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci $x=y$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x+1 & y+1 & 2\\ x^2+x & y^2+y & 2\end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\Delta(0,2)=-2$.

5p **b)** Arătați că $\Delta(x,y)=(x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstrați că numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2, pentru orice numere întregi m și n.

2. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 0 & a-1\\ 0 & 1 & 0\\ a-1 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $A(0)+A(2)$.

5p **b)** Arătați că $A(a)A(b)=A(2ab-a-b+1)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Arătați că $A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$.

5p **a)** Arătați că $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{2n^3}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-x+a, & x\le 0 \\ \dfrac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}, & x>0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care funcţia f este continuă în punctul $x=0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-6,-3)$, atunci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin două soluții reale distincte în intervalul $(-3,-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4=$ $=0$	**3p** **2p**
2.	$f(1)=0$ $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=-1$	**2p** **3p**
3.	$x+3=x^2-6x+9\Rightarrow x^2-7x+6=0$ $x=1$ care nu convine, $x=6$ care convine	**3p** **2p**
4.	În mulțimea A sunt 100 de numere, deci sunt 100 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{100}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$P\in Ox\Rightarrow y_P=0$ $PM=PN\Leftrightarrow(2-x_P)^2+(2-0)^2=(4-x_P)^2+(2-0)^2\Leftrightarrow x_P=3$	**2p** **3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\dfrac{6\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=$ $=6$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&1&2\end{vmatrix}=$ $=4+1+4-2-4-2=1$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2^x&4^x\\1&x&2x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2^x-1&4^x-1\\0&x-1&2x-1\end{vmatrix}=(2^x-1)\begin{vmatrix}1&2^x+1\\x-1&2x-1\end{vmatrix}=$ $=(2^x-1)(2x-1-x\cdot2^x+2^x-x+1)=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot2^x)$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
c)	$A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&2^1+2^2+\ldots+2^{2017}&4^1+4^2+\ldots+4^{2017}\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&\dfrac{2(2^{2017}-1)}{2-1}&\dfrac{4(4^{2017}-1)}{4-1}\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&2(2^{2017}-1)&\dfrac{4}{3}(4^{2017}-1)\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}$	**3p** **2p**

2.a)	$x * y = 7xy + 7x + 7y + 7 - 1 =$	**2p**
	$= 7x(y+1) + 7(y+1) - 1 = 7(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x * x * x = 7^2(x+1)^3 - 1$, deci $7^2(x+1)^3 - 1 = x$	**2p**
	$(x+1)\left(7^2(x+1)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7}$ sau $x = -1$ sau $x = -\frac{6}{7}$	**3p**
c)	$49(a+1)(b+1)(c+1) - 1 = 48 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = 1$	**2p**
	Cum a, b și c sunt numere naturale, obținem $a+1 = b+1 = c+1 = 1$, deci $a = b = c$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{\left(x^2-3\right)' \cdot e^x - \left(x^2-3\right) \cdot \left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} = \frac{2xe^x - \left(x^2-3\right)e^x}{\left(e^x\right)^2} =$	**3p**
	$= \frac{e^x\left(2x - x^2 + 3\right)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1) = -2e$, $f'(-1) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$, adică $y = -2e$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 3$	**1p**
	$x \in [-1,3] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,3]$ și $x \in [3,+\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p**
	Cum $f(-1) = -2e$, $f(3) = \frac{6}{e^3}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, obținem $-2e \leq f(x) \leq \frac{6}{e^3}$, pentru orice $x \in [-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)dx = \int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx =$	**2p**
	$= \ln(x+1)\Big\|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$	**3p**
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in (0,+\infty)$	**2p**
	$F'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**3p**
c)	$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^2 \|g(x)\| dx = \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx = x\Big\|_1^2 - \ln(x+1)\Big\|_1^2 = 1 - \ln\frac{3}{2}$	**3p**
	$1 - \ln\frac{m+1}{m} = 1 - \ln\frac{3}{2} \Rightarrow m = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-5, 5)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ și $N(4,2)$. Determinați coordonatele punctului P, situat pe axa Ox, astfel încât $PM=PN$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $AB=6\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x))=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2\left(2^{2017}-1\right) & \frac{4}{3}\left(4^{2017}-1\right)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy+7x+7y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\frac{m+1}{m}$.