Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{12}>3$	**2p**
	$2\sqrt{2}<3$	**2p**
	$2\sqrt{2}<3<\sqrt{12}$	**1p**
2.	x și y sunt soluțiile ecuației $t^2-5t+6=0$	**2p**
	$t_1=2,\ t_2=3$	**2p**
	$S=\{(2,3),(3,2)\}$	**1p**
3.	$g(1)=1$	**2p**
	$f\left(g(1)\right)=f(1)=1$	**3p**
4.	$C_n^2=10$	**2p**
	$n=5$	**3p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $(AB)\Rightarrow M(4,3)$	**2p**
	$OM=5$	**3p**
6.	$\dfrac{MN}{\sin P}=\dfrac{MP}{\sin N}$	**2p**
	$MN=8$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei este egală cu $m+(-m)+2$	**3p**
	Finalizare	**2p**
b)	$\det A=-2m^2-2m+12$, unde A este matricea sistemului	**3p**
	$m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$	**2p**
c)	Pentru $m=1\Rightarrow x_1=4$, $y_1=2$, $z_1=1$	**4p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	Pentru $m=0\Rightarrow f=X^3+1$	**2p**
	Restul este egal cu $f(1)=2$	**3p**
b)	$f(-1)=-1+m-m+1=0$	**3p**
	$X+1\mid f$	**2p**
c)	$f=(X+1)\left(X^2+(m-1)X+1\right)$	**2p**
	f are trei rădăcini reale $\Leftrightarrow X^2+(m-1)X+1$ are două rădăcini reale $\Leftrightarrow m^2-2m-3\geq 0$	**2p**
	$m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{4x\left(x^2+2\right)-2x\left(2x^2-1\right)}{\left(x^2+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}=2$	**3p**
	Ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției *f* spre $+\infty$ este $y=2$	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe intervalul $[0,1]$	**2p**
	$0\leq x\leq 1\Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(1)\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{3}$, oricare ar fi $x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{x+1}dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\left(\dfrac{x^n}{x+1}+\dfrac{x^{n+1}}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\dfrac{x^n(x+1)}{x+1}dx=\dfrac{1}{n+1}$	**3p**
c)	$\dfrac{x^{2012}}{2}\leq\dfrac{x^{2012}}{x+1}\leq\dfrac{x^{2012}}{1}$ pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
	$\int_0^1\dfrac{x^{2012}}{2}dx\leq\int_0^1\dfrac{x^{2012}}{x+1}dx\leq\int_0^1 x^{2012}\,dx$	**1p**
	$\dfrac{1}{4026}\leq I_{2012}\leq\dfrac{1}{2013}$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Ordonați crescător numerele $\sqrt{12}$, $2\sqrt{2}$ și 3.

5p **2.** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

5p **3.** Se consideră funcțiile $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(x+1)$ și $g:\mathbb{R}\to(-1,+\infty)$, $g(x)=2^x-1$. Calculați $f(g(1))$.

5p **4.** Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi este egal cu 10. Determinați numărul elementelor mulțimii.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(5,1)$, $B(3,5)$. Calculați lungimea medianei din vârful O în triunghiul OAB.

5p **6.** Se consideră triunghiul MNP cu $MP=6$, $\sin N=\frac{3}{5}$ și $\sin P=\frac{4}{5}$. Calculați lungimea laturii (MN).

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-2y+z=1 \\ 2x-my-3z=3 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului este egală cu 2.
5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea sistemului are determinantul diferit de zero.
5p **c)** Pentru $m=1$, arătați că $y_1^2=x_1\cdot z_1$, unde (x_1,y_1,z_1) este soluția sistemului.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m=0$, calculați restul împărțirii polinomului f la $X-1$.
5p **b)** Arătați că polinomul f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.
5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.
5p **c)** Demonstrați că $-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{3}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{4026} \le I_{2012} \le \frac{1}{2013}$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2^{-1}+2^{-2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{3}{4}=0{,}75$	**2p**
2.	$\frac{2}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0$	**3p**
	$x\in(-\infty,3)$	**2p**
3.	Condiție: $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$	**1p**
	$x+2=x^2+4x+4$	**2p**
	$x_1=-2$ şi $x_2=-1$	**2p**
4.	Dobânda obținută este $D=1008\,\text{lei}-900\,\text{lei}=108\,\text{lei}$	**1p**
	$\frac{p}{100}\cdot 900=108$	**2p**
	$p=12$	**2p**
5.	$x_A=\frac{x_O+x_B}{2}$ şi $y_A=\frac{y_O+y_B}{2}$	**3p**
	$x_B=4$ şi $y_B=6$	**2p**
6.	$\sin x+4\cos x=5\cos x$	**1p**
	$\sin x=\cos x$	**2p**
	$x=45°$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(H(x))=1+0+0-0-0-0$	**4p**
	Finalizare	**1p**
b)	$H(x)\cdot H(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ln a+\ln x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\ln a=0\Rightarrow a=1$	**2p**

c)	$H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)=\begin{pmatrix}2012 & 0 & 0\\ 0 & 2012 & \ln(2012!)\\ 0 & 0 & 2012\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{vmatrix}2012 & 0 & 0\\ 0 & 2012 & \ln(2012!)\\ 0 & 0 & 2012\end{vmatrix}=2012^3$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+3\cdot 1^2-3\cdot 1-1=0$	**3p**
	$f(1)=0\Rightarrow X-1\mid f$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-3$	**1p**
	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$	**1p**
	$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}=15$	**3p**
c)	$f=X^3+3X^2-3X-1=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)\Rightarrow f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$	**3p**
	$f(2)=13$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x},\ x>0$	**2p**
	f derivabilă în $x=4\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	f este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(4,+\infty)$ $\Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)=+\infty$	**3p**
	$x=0$ este ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f	**2p**
2.a)	F este derivabilă și $F'(x)=xe^x+e^x-e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F'=f$	**2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=$	**1p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x=$	**2p**
	$=\pi\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\dfrac{e^{2x}}{2}\Big\vert_1^2=$	**2p**
	$=\dfrac{\pi e^2\left(e^2-1\right)}{2}$	**1p**

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2^{-1}+2^{-2}=0,75$.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2}{x-3}<0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x+2$.

5p **4.** La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de $p\%$ pe an. Calculați *p*, știind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A(2,3)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că A este mijlocul segmentului (OB).

5p **6.** Determinați măsura x a unui unghi ascuțit, știind că $\frac{\sin x+4\cos x}{\cos x}=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $H(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ln x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, cu $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(H(x)\right)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real *a*, $a>0$, astfel încât $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, pentru orice $x>0$.

5p **c)** Calculați determinantul matricei $H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-3X-1$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Arătați că polinomul *f* se divide cu $X-1$.

5p **b)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **c)** Verificați dacă $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=13$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.

5p **b)** Demonstrați că funcția *f* este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x-e^x+2012$ este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 6 = \log_3 3 + \log_3 2$	**2p**
	$1 + \log_3 2 = 1 + a$	**3p**
2.	$A(0,1) \in G_f \Leftrightarrow f(0) = 1$	**2p**
	$f(0) = m - 3$	**2p**
	$m = 4$	**1p**
3.	$\log_2 \frac{x+1}{x+3} = -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+3} = 2^{-1}$	**3p**
	$x = 1$	**1p**
	Verificarea condițiilor de existență	**1p**
4.	$p = \frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	Numerele divizibile cu 7 sunt $7, 14, 21, 28 \Rightarrow 4$ cazuri favorabile	**2p**
	Mulțimea are 30 de elemente $\Rightarrow$ 30 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \frac{2}{15}$	**1p**
5.	O este mijlocul segmentului $(AB) \Leftrightarrow x_B = 2x_O - x_A \Leftrightarrow x_B = -4$	**3p**
	$y_B = 2y_O - y_A \Leftrightarrow y_B = 1$	**2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$	**3p**
	$\cos A = \frac{1}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 4 & a^2 & 9 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -a^2 + 5a - 6$	**3p**
b)	A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$	**2p**
	$-a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 3$	**2p**
	$a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$	**1p**
c)	$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 4x + y + 9z = 1 \end{cases}$	**2p**
	$x = 0,\ y = 1,\ z = 0$	**3p**
2.a)	$f(\hat{1}) = m + n$	**2p**

	$m+n=m \Leftrightarrow n=\hat{0}$	**3p**
b)	$f=X^5+\hat{4}X$	**1p**
	$f(\hat{0})=f(\hat{1})=f(\hat{2})=f(\hat{3})=f(\hat{4})=\hat{0}$	**3p**
	Rădăcinile polinomului f sunt $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ și $\hat{4}$	**1p**
c)	$f(\hat{1})=m+n,\ f(\hat{2})=\hat{2}(m+n)$	**1p**
	$f(\hat{1})=f(\hat{2}) \Rightarrow m+n=\hat{0}$	**2p**
	$f(\hat{3})=\hat{3}(m+n)=\hat{0},\ f(\hat{4})=\hat{4}(m+n)=\hat{0} \Rightarrow f(\hat{3})=f(\hat{4})$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$	**3p**
c)	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2+x}=1$	**2p**
	$n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{x+1}=-2$	**2p**
	$y=x-2$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$	**1p**
2.a)	$g(x)=e^x$	**2p**
	$\int g(x)dx=e^x+C$	**3p**
b)	$\int_1^2\sqrt{x+1}\cdot f(x)dx=\int_1^2(x+1)\cdot e^x dx=$	**1p**
	$=(x+1)e^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^x dx=$	**3p**
	$=2e^2-e$	**1p**
c)	$h(x)=\sqrt{x+1}$	**1p**
	$A=\int_2^3\lvert h(x)\rvert dx=\int_2^3\sqrt{x+1}\,dx=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=\frac{2}{3}(8-3\sqrt{3})$	**1p**

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul $a=\log_3 2$. Arătați că $\log_3 6=1+a$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(0,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1)-\log_2(x+3)=-1$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1,2,3,...,30\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(4,-1)$. Determinați coordonatele punctului *B*, știind că O este mijlocul segmentului (AB).

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului *ABC*, știind că $AB=5$, $AC=6$ și $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+3z=1 \\ 4x+a^2y+9z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ și se notează cu A matricea sistemului.

5p **a)** Arătați că $\det A=-a^2+5a-6$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=1$, rezolvați sistemul.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f=mX^5+nX$, cu $m,n\in\mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Determinați $n\in\mathbb{Z}_5$ pentru care $f(\hat{1})=m$.

5p **b)** Pentru $m=\hat{1}$ și $n=\hat{4}$, determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

5p **c)** Arătați că, dacă $f(\hat{1})=f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Determinați primitivele funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 \sqrt{x+1}\cdot f(x)dx$.

5p **c)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_5=\frac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}$	**3p**
	$S_5=45$	**2p**
2.	$\Delta=0$	**1p**
	$m^2+2m+1-4m=0$	**2p**
	$m=1$	**2p**
3.	$G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=-1$	**2p**
	$A(-1,0)$	**1p**
	$G_f\cap Oy: f(0)=1$	**1p**
	$B(0,1)$	**1p**
4.	$C_4^2=6$	**2p**
	$A_4^1=4$	**2p**
	$2C_4^2-3A_4^1=0$	**1p**
5.	$\frac{2}{a+3}=\frac{a}{2}$	**2p**
	$a^2+3a-4=0\Rightarrow a=1$ sau $a=-4$	**2p**
	$a>0\Rightarrow a=1$	**1p**
6.	Aria $\Delta MNP=\frac{MN\cdot NP\cdot\sin N}{2}$	**2p**
	$\sin N=\frac{2\cdot 16}{8\cdot 8}$	**2p**
	$\sin N=\frac{1}{2}$	**1p**

SUBIECTUL al II -lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A_1(0,3)$, $A_2(1,4)$	**2p**
	$A_1A_2:\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=0$	**2p**
	$A_1A_2: y=x+3$	**1p**

b)	Justificarea faptului că $\begin{vmatrix} m-1 & m+2 & 1 \\ n-1 & n+2 & 1 \\ p-1 & p+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**3p**
	$\Rightarrow A_m, A_n, A_p$ coliniare	**2p**
c)	$A_n A_{2011} \le 2$	**1p**
	$\sqrt{(n-2011)^2 + (n-2011)^2} \le 2$	**1p**
	$\lvert n-2011 \rvert \le \sqrt{2}$	**1p**
	$M_{2011} = \{2010, 2011, 2012\}$	**2p**
2.a)	$m = 4 \Rightarrow f = X^3 + X^2 - 17X + 15$	**1p**
	$C = X^2 + 4X - 5$	**3p**
	$R = 0$	**1p**
b)	$f \vdots (X-1) \Leftrightarrow f(1) = 0$	**2p**
	$f(1) = 1 + m - 3 - 17 + 2m + 7 = 3m - 12$	**1p**
	$3m - 12 = 0 \Rightarrow m = 4$	**2p**
c)	Cu notația $3^x = y > 0 \Rightarrow y^3 + y^2 - 17y + 15 = 0 \Rightarrow (y-1)(y-3)(y+5) = 0$	**2p**
	$y = -5 < 0$	**1p**
	$y = 1 \Rightarrow x = 0$	**1p**
	$y = 3 \Rightarrow x = 1$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -4$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -4$, $f(0) = -4$	**3p**
	f este continuă în punctul $x_0 = 0$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x)}{16 - x^2} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{(4-x)(4+x)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{-1}{4+x}$	**3p**
	$\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x)}{16 - x^2} = -\frac{1}{8}$	**2p**
c)	Ecuația tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$	**2p**
	Pentru $x \le 0$, $f(x) = \frac{-4}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{8x}{(x^2+1)^2}$, oricare ar fi $x < 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y = -2x - 4$	**1p**
2.a)	Mulțimea primitivelor este $\int 9dx =$	**2p**
	$= 9x + C$	**3p**
b)	$A = \int_0^1 \lvert 3x^2 + 6x + 9 \rvert dx = \int_0^1 (3x^2 + 6x + 9) dx =$	**2p**
	$= (x^3 + 3x^2 + 9x)\Big\rvert_0^1 =$	**2p**
	$= 13$	**1p**

c)	$\int_1^2 (12x+12)e^x dx = 12xe^x \Big\|_1^2 =$	**3p**
	$= 24e^2 - 12e$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1 = 5$ şi $r = 2$. Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați numărul real *m* pentru care ecuația $x^2 - (m+1)x + m = 0$ are soluții reale egale.

5p **3.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2^{x+1} - 1$ cu axele *Ox* şi respectiv *Oy*.

5p **4.** Calculați $2C_4^2 - 3A_4^1$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2} = (a+3)\vec{i} + 2\vec{j}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul $a > 0$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari.

5p **6.** Aria triunghiului *MNP* este egală cu 16, iar $MN = NP = 8$. Calculați $\sin N$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A_n(n-1, n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Determinați ecuația dreptei A_1A_2.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^*$ notăm $M_p = \left\{n \in \mathbb{N}^* \middle| A_nA_p \leq 2\right\}$. Determinați elementele mulțimii M_{2011}.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m = 4$ determinați câtul şi restul împărțirii polinomului f la $X - 3$.

5p **b)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul *f* este divizibil cu $X - 1$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17\cdot 3^x + 15 = 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ x - 4, & x > 0 \end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 0$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{16 - x^2}$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-1, -2)$.

2. Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x) = 3m^2x^2 + 6mx + 9$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați mulțimea primitivelor funcției f_0.

5p **b)** Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\int_1^2 \frac{f_2(x) - 9}{x}\cdot e^x dx$.

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_9 = a_4 + 5r \Rightarrow r = 3$	**2p**
	$a_{14} = a_9 + 5r = 37$	**3p**
2.	*A* este punctul de intersecție a graficelor funcțiilor *f* și *g*; $f(x) = g(x) \Rightarrow x - 3 = 5 - x$	**1p**
	$x - 3 = 5 - x \Rightarrow x_A = 4$	**2p**
	$y_A = 1$	**2p**
3.	$2^{3-x} = 2^{-2}$	**2p**
	$3 - x = -2 \Rightarrow x = 5$	**3p**
4.	Numărul tripletelor (a,b,c), cu *a, b, c* distincte din *M* este A_4^3	**2p**
	Numărul tripletelor $(0,b,c)$, cu *b, c* distincte nenule din *M* este A_3^2	**2p**
	$A_4^3 - A_3^2 = 18$ numere	**1p**
5.	Fie *C* simetricul lui *A* față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului (AC)	**1p**
	$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5$	**2p**
	$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -2$	**2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$	**2p**
	$BC = \sqrt{31}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2a - 4$	**3p**
b)	Matricea asociată sistemului este inversabilă $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$	**3p**
	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	**2p**
c)	$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$	**2p**
	$x = 1,\ y = 1,\ z = 1$	**3p**
2.a)	$x * 1 = x + 1 - 1 =$	**4p**
	$= x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**1p**
b)	$x * x = 2x - 1$	**2p**

	$(x*x)*x=3x-2$ $x=2$	**2p** **1p**
c)	$C_n^1=n, C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ $n^2+n-30=0$ Finalizare: $n=5$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x+1)'\cdot e^x-(x+1)\cdot\left(e^x\right)'}{e^{2x}}=-\dfrac{x}{e^x}$, $\forall x\in(0,+\infty)$ Finalizare	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=-\dfrac{x}{e^x}\Rightarrow f'(x)<0$, oricare ar fi $x>0$ Finalizare	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$ $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-mx\right)=2$ $y=x+2$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției g	**1p** **1p** **1p** **2p**
2.a)	$\int f(x)dx=\dfrac{x^{2013}}{2013}+\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C$ $F(x)=\dfrac{x^{2013}}{2013}+\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+c$ şi $F(0)=1\Rightarrow c=1$ $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^{2013}}{2013}+\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+1$	**2p** **2p** **1p**
b)	$\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\left(x^{2011}+x\right)dx=$ $=\left.\left(\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^2}{2}\right)\right\|_0^1=\dfrac{1}{2012}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1007}{2012}$	**2p** **3p**
c)	$g(x)=x^2+x$ $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x^4+2x^3+x^2\right)dx=\pi\left.\left(\dfrac{x^5}{5}+2\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}\right)\right\|_1^2=$ $=\dfrac{481\pi}{30}$	**1p** **3p** **1p**

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_4 = 7$ și $a_9 = 22$. Calculați a_{14}.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 5-x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x} = \frac{1}{4}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M = \{0,1,2,3\}$.

5p **5.** Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(3,0)$. Determinați coordonatele simetricului punctului *A* față de punctul *B*.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB = 6$, $AC = 5$ și $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-y+z=1 \\ x+y+az=2 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei asociate sistemului.
5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea asociată sistemului este inversabilă.
5p **c)** Pentru $a = 0$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 1$.

5p **a)** Arătați că $x * 1 = x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = 4$.
5p **c)** Determinați numărul natural *n*, $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 * C_n^2 = 14$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{x+1}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{e^{2x}\cdot f^2(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x$.

5p **a)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției *f*, care verifică relația $F(0) = 1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}dx$.

5p **c)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x^{2012} - x^{2011}$.