CI 2 : ALGORITHMIQUE & PROGRAMMATION

CHAPITRE 4 – INTRODUCTION À LA COMPLEXITÉ

Savoir

SAVOIRS :
– s'interroger sur l'efficacité algorithmique temporelle.

1 Mise en évidence du problème

On prend l'exemple de la recherche d'un élément dans une liste :

Pseudo Code

Algorithme : Recherche d'un nombre dans une liste triée ou non

Données :
– nb, int : un entier
– tab, liste : une liste d'entiers triés ou non triés

Résultat : un booléen : Vrai si le nombre est dans la liste, Faux sinon.

```
is_number_in_list(nb,tab) :
    l ← longueur(tab)
    Pour i allant de 1 à l faire :
        Si tab[i] = nb alors :
            Retourne Vrai
        Fin Si
    Fin Faire
    Retourne Faux
Fin fonction
```

python

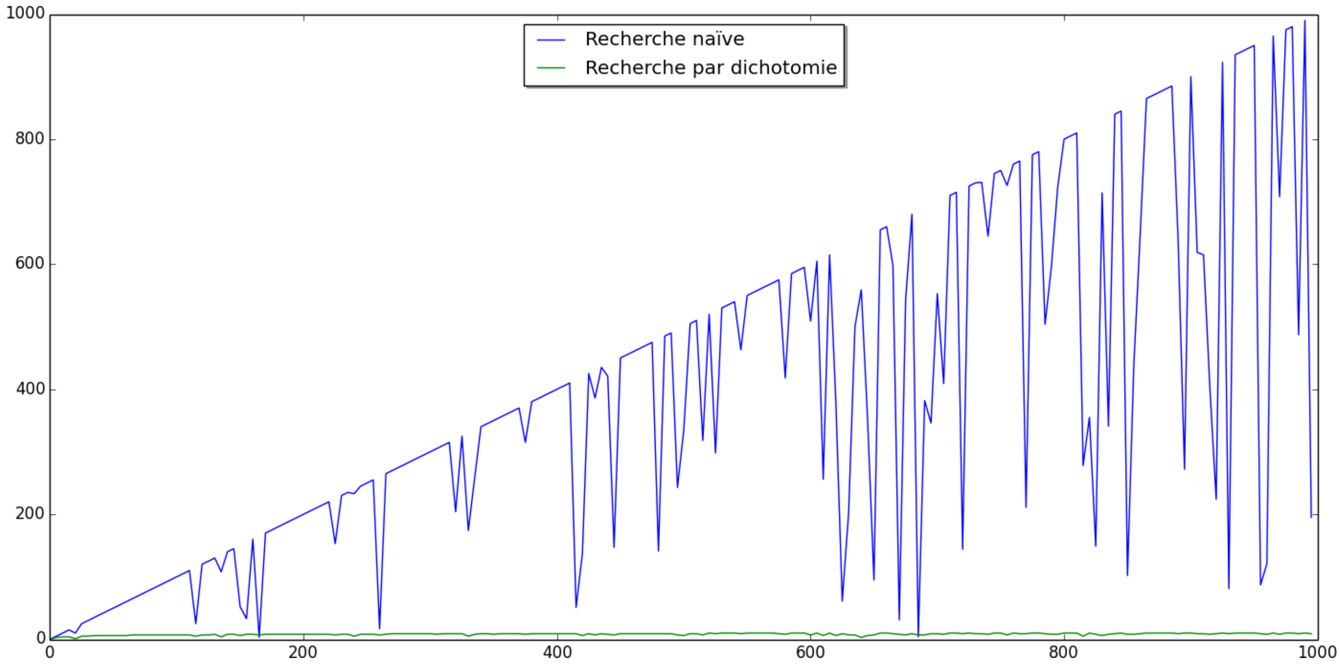
```python
def is_number_in_list(nb,tab):
    """Renvoie True si le nombre nb est dans la liste
    de nombres tab
    Keyword arguments:
      * nb, int -- nombre entier
      * tab, list -- liste de nombres entiers
    """
    for i in range(len(tab)):
        if tab[i]==nb:
            return True
    return False
```

Exemple

À partir de l'algorithme précédent, évaluer :
– le nombre de tour de boucles dans le pire des cas ;
– le nombre de tour de boucles dans le meilleur des cas.

python

```python
def is_number_in_list_dicho(nb,tab):
    """
    Recherche d'un nombre par dichotomie dans un tableau trié.
    Renvoie l'index si le nombre nb est dans la liste de nombres tab.
    Renvoie None sinon.
    Keyword arguments:
    nb, int -- nombre entier
    tab, list -- liste de nombres entiers triés
    """
    g, d = 0, len(tab)-1
    while g <= d:
        m = (g + d) // 2
        if tab[m] == nb:
            return m
        if tab[m] < nb:
            g = m+1
        else:
            d = m-1
    return None
```



Évolution du nombre d'opérations pour rechercher un nombre dans une liste de 1 à 1000 nombres

2 Complexité des algorithmes

2.1 Présentation

Il existe souvent plusieurs façons de programmer un algorithme. Si le nombre d'opérations à effectuer est peu important et les données d'entrée de l'algorithme sont de faibles tailles, le choix de la solution importe peu. En revanche, lorsque le nombre d'opérations et la taille des données d'entrée deviennent importants, deux paramètres deviennent déterminants : le temps d'exécution et l'occupation mémoire.

Définition

Complexité en temps

La complexité en temps donne le nombre d'opérations effectuées lors de l'exécution d'un programme. On appelle C_o le coût en temps d'une opération o.

Complexité en mémoire (ou en espace)

La complexité en mémoire donne le nombre d'emplacements mémoires occupés lors de l'exécution d'un programme.

Remarque

On distingue la complexité dans le pire des cas, la complexité dans le meilleure des cas, ou la complexité en moyenne. En effet, pour un même algorithme, suivant les données à manipuler, le résultat sera déterminé plus ou moins rapidement.

Généralement, on s'intéresse au cas le plus défavorable à savoir, la complexité dans le pire des cas.

2.2 Coût temporel d'un algorithme et d'une opération

Résultat

On considère que le coût élémentaire C_e correspond au coût d'une affectation, d'une comparaison ou de l'évaluation d'une opération arithmétique.

Exemple

Chacune de ces 3 opérations expressions ont le même coût temporel C_e :

python

```
>>> a=20
>>> a<=100
>>> a+a
```

Résultat

Pour une séquence de deux instructions de coûts respectifs C_1 et C_2, le coût total est de la séquence est de $C_1 + C_2$.

Exemple

```python
>>> a=20
>>> print(a)
```

Le coût temporel correspond à l'addition du coût élémentaire de l'affectation ajouté au coût de l'affichage.

Résultat

Le coût d'un test `if test : inst_1 else : inst_2` est inférieur ou égal au maximum du coût de l'instruction 1 et du coût de l'instruction 2 additionné au coût du test (coût élémentaire).

Exemple

Soit le programme suivant (sans application réelle) :

```python
>>>  if x<0 :
          x=x+1
          x=x+2
     else :
          x=x+1
```

La comparaison a un coût élémentaire C_e. Dans le « pire » des cas, on réalise deux additions et deux affectations. Le coût temporel total est est donc $C_e + 4C_e = 5C_e$.

Résultat

Le coût d'une boucle `for i in range(n) : inst` est égal à : n fois le coût de l'instruction inst si elle est indépendante de la valeur de i.

Exemple

```python
>>> for i in range(20) :  print(i)
```

Si on note C_p le coût de l'affichage, le coût total est de $20C_p$.

Résultat

Soit la boucle `while cond : inst`, la condition cond faisant intervenir un variant de boucle. Il est donc possible de connaître le nombre n d'itérations de la boucle. Le coût de la boucle est donc égal à n fois le coût de l'instruction inst.

2.3 Exemple

Exemple

Calcul de factorielle

Pseudo Code

```
Début Fonction
    factorielle(n) :
    si n=0 alors
        retourner 1
    sinon
        i ← 1
        res ← 1
        tant que i ≤ n faire
            res ← res · i
            i ← i + 1
        fin
        retourner res
    fin
Fin
```

Complexité en mémoire : lors de l'exécution du programme, il sera nécessaire de stocker les variables suivantes :
- n ;
- res ;
- i.

Complexité en temps : La première comparaison a un coût élémentaire C_e.

Pour $n = 0$ le coût du retour est C_r.

Pour $n \neq 0$:
- les deux affectations ont un coût respectif C_e ;
- la boucle tant que sera réalisée n fois. Pour chaque itération,
  - la multiplication ainsi que l'affectation ont un chacun un coût C_e ;
  - l'incrémentation et l'affectation ont chacun un coût C_e ;
- le coût du retour est C_r.

En conséquence, la complexité en temps s'élève à :

$$C_T(n) = C_e + \max(C_r ; C_e + C_e + n(4C_e) + C_r)$$

Ainsi $C_T(n) = C_e(3+4n) + C_r$ et $C_T(n) \underset{+\infty}{\sim} 4C_e n$ lorsque n tend vers l'infini. On parle d'une complexité algorithmique linéaire, notée $\mathcal{O}(n)$.

Il est fréquent que la complexité en temps soit améliorée au prix d'une augmentation de la complexité en espace, et vice-versa. La complexité dépend notamment :
- de la puissance de la machine sur laquelle l'algorithme est exécuté ;
- du langage et compilateur / interpréteur utilisé pour coder l'algorithme ;
- du style du programmeur.

Remarque

Le coût de la mémoire étant aujourd'hui relativement faible, on cherche en général à améliorer la complexité en temps plutôt que le complexité en mémoire.

2.4 D'autres exemples

2.4.1 Recherche d'un maximum

Exemple

Soit une liste de nombre entiers désordonnés. Comment déterminer le plus grand nombre de la liste ?

Intuitivement, une solution est de parcourir la liste d'élément et de déterminer le plus grand élément par comparaisons successives.

Pseudo Code

Data : tab tableau de taille n
$max \leftarrow -\infty$
for $i = 1$ **to** n **do**
    if $tab[i] > max$ **then**
        $max \leftarrow tab[i]$
    end
end

Dans ce cas, le coût temporel est : $C_T(n) = C_e + n(2C_e)$. Ici encore, la complexité de cet algorithme est linéaire car $C_T(n) \underset{+\infty}{\sim} 2C_e n$.

2.4.2 Tri d'une liste

Exemple

Algorithme naïf

Soit une liste de nombre entiers désordonnés. Comment les trier par ordre croissant ?

Une méthode dite naïve pourrait être la suivante :
- trouver le plus petit élément du tableau. Notons min son indice ;
- on permute alors le min^{e} élément avec le premier élément ;
- ...
- on trouve le plus petit élément du tableau compris entre l'indice i et N ;
- on permute alors le min^{e} élément avec le i^{e} élément.

Exemple

Pseudo Code

Data : tab tableau d'entiers désordonnés de taille n
Result : tab tableau d'entiers ordonnés
for $i = 1$ **to** $n-1$ **do**
  $min \leftarrow i$
  for $j = i+1$ **to** n **do**
    if $tab[j] < tab[min]$ **then**
      $min \leftarrow j$
    end
  end
  $tmp \leftarrow tab[i]$
  $tab[i] \leftarrow tab[min]$
  $tab[min] \leftarrow tmp$
end

Ici les bornes de la boucle imbriquée dépendent de l'indice i. Ainsi :
- au rang 1, $C_1 = C_e + (n-1)(2C_e) + 3C_e$;
- au rang 2, $C_2 = C_e + (n-2)(2C_e) + 3C_e$;
- au rang i, $C_i = C_e + (n-i)(2C_e) + 3C_e$.

Le coût temporel peut donc s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} C_T(n) &= \sum_{i=0}^{n}(Ce+(n-i)(2C_e)+3C_e) = C_e\sum_{i=0}^{n}(1+2n-2i+3) \\ &= C_e\sum_{i=0}^{n}(4+2n-2i) = C_e\left(4n+2n^2-2\frac{n(n+1)}{2}\right) = C_e\left(3n+n^2\right) \end{aligned}$$

Dans ce cas, $C_T(n) \sim C_e n^2$. On parle de complexité quadratique. Lorsque la taille du tableau double, le temps de calcul est multiplié par 4.

2.4.3 Diviser pour régner – recherche dichotomique

Exemple

python

```python
def recherche_dichotomique(x, a):
    g, d = 0, len(a)-1
    while g <= d:
        m = (g + d) // 2
        if a[m] == x:
            return m
        elif a[m] < x:
            g = m+1
        else :
            d = m-1
    return None
```

Exemple

On peut montrer que la suite $d-g$ décroit strictement (car d décroit et g croit). Dans ce cas, la difficulté consiste en déterminer le nombre de fois que sera exécutée la boucle while. On note $C_w = C_e + \max(C_e + C_r; 2C_e + 2C_e; 3C_e + C_e) = C_e + \max(C_e + C_r; 4C_e)$ le coût d'une itération de la boucle while.

Au cours de l'algorithme, on va devoir diviser en 2 la taille le tableau jusqu'à ce qu'on trouve (ou pas) l'élément recherché. On cherche donc combien de fois m on peut diviser par 2 la taille du tableau n :

$$\frac{n}{2^m} \geq 1 \Longleftrightarrow n \geq 2^m \Longleftrightarrow \ln(n) \geq m \ln(2)$$

On parlera ici de complexité logarithmique.

2.5 Complexité algorithmique

Définition

[5] Soient f et g deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_*^+$. On note $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ lorsqu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Intuitivement, cela signifie que f est inférieur à g à une constante multiplicative près pour les données suffisamment grandes.

Exemple

Ainsi, l'algorithme de recherche du maximum dans une liste non trié (présenté précédemment) est de complexité $\mathcal{O}(n)$ où n est le nombre d'éléments de la liste. Cet algorithme est proportionnel au nombre d'éléments.

L'algorithme de tri naïf est de complexité $\mathcal{O}(n^2)$. On parle d'algorithme quadratique. Le temps d'exécution devient très grand lorsque le nombre de données et très important.

Par ordre de complexité croissante on a donc :
- $\mathcal{O}(1)$: algorithme s'exécutant en temps constant, quelle que soit la taille des données ;
- $\mathcal{O}(log(n))$: algorithme rapide (complexité logarithmique) (Exemple : recherche par dichotomie dans un tableau trié) ;
- $\mathcal{O}(n)$: algorithme linéaire ;
- $\mathcal{O}(n \cdot log(n))$: complexité $n \log n$;
- $\mathcal{O}(n^2)$: complexité quadratique ;
- $\mathcal{O}(2^n)$: complexité exponentielle.

Exemple

- Le coût temporel de l'algorithme pour calculer une factorielle est $4C_e n$ et on a $4C_e n \leq c n$. La complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$.
- Le coût temporel de l'algorithme de recherche d'un maximum est $2C_e n$ et on a $2C_e n \leq c n$. La complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$.
- Le coût temporel de l'algorithme de tri dans une liste en utilisant l'algorithme naïf est $C_e n^2$ et on a $C_e n^2 \leq c n^2$. La complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(n^2)$.
- Le coût temporel de l'algorithme de recherche dichotomique est de l'ordre de $C_w \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$ et on a $C_w \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \leq c \ln(n)$. La complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(\log(n))$.

Résultat

Pour une opération ayant un temps d'exécution de $10^{-9}s$, on peut calculer le temps d'exécution en fonction du nombre de données et de la complexité de l'algorithme :

Données	$\mathcal{O}(log(n))$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n \cdot log(n))$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(2^n)$
100	$2\cdot 10^{-9}\ s$	$0,1\cdot 10^{-6}\ s$	$0,2\cdot 10^{-6}\ s$	$10\cdot 10^{-6}\ s$	$1,26765\cdot 10^{21}\ s$
1 000	$3\cdot 10^{-9}\ s$	$1\cdot 10^{-6}\ s$	$3\cdot 10^{-6}\ s$	$0,001\ s$	$1,0715\cdot 10^{292}\ s$
10 000	$4\cdot 10^{-9}\ s$	$10\cdot 10^{-6}\ s$	$40\cdot 10^{-6}\ s$	$0,1\ s$	$+\infty$

3 Profiling des algorithmes

Afin d'évaluer la performance des algorithmes, il existe des fonctionnalités permettant de compter le temps consacré à chacune des fonctions ou à chacune des instructions utilisées dans un programme http://docs.python.org/2/library/profile.html.

Exemple

Voici un exemple du crible d'Eratosthène.

```python
def crible(n):
    tab=[]
    for i in range(2,n):
        tab.append(i)
    # Liste en comprehension tab=[x for x in range(2,n)]
    for i in range(0,len(tab)):
        for j in range(len(tab)-1,i,-1):
            if (tab[j]%tab[i]==0):
                tab.remove(tab[j])
    return tab

import cProfile
cProfile.run('crible(10000)')
```

cProfile renvoie alors le message suivant :

```
28770 function calls in 1.957 seconds

  Ordered by: standard name

  ncalls  tottime  percall  cumtime  percall filename:lineno(function)
       1    0.000    0.000    1.957    1.957 <string>:1(<module>)
       1    0.420    0.420    1.957    1.957 eratosthene.py:4(crible)
       1    0.000    0.000    1.957    1.957 {built-in method exec}
    9999    0.015    0.000    0.015    0.000 {built-in method len}
    9998    0.016    0.000    0.016    0.000 {method 'append' of 'list' objects}
       1    0.000    0.000    0.000    0.000 {method 'disable' of '_lsprof.Profiler' objects}
    8769    1.505    0.000    1.505    0.000 {method 'remove' of 'list' objects}
```

Exemple

On alors le bilan du temps passé à effectuer chacune des opérations. Ainsi pour améliorer notablement l'algorithme, le plus intéressant serait d'optimiser la méthode remove.

Références

[1] François Denis http://pageperso.lif.univ-mrs.fr/~francois.denis/algoL2/chap1.pdf

[2] Alain Soyeur http://asoyeur.free.fr/

[3] François Morain, Cours de l'Ecole Polytechnique, http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Francois.Morain/TC/X2004/Poly/www-poly009.html.

[4] Renaud Kerivent et Pascal Monasse, La programmation pour ... , Cours de l'École des Ponts ParisTech - 2012/2013 http://imagine.enpc.fr/~monasse/Info.

[5] Olivier Bournez, Cours INFO 561 de l'Ecole Polytechnique, Algorithmes et programmation, http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF561/uploads/Main/poly-good.pdf.

[6] Wack et Al., *L'informatique pour tous en classes préparatoires aux grandes écoles*, Editions Eyrolles.