INITIATION AU LANGAGE PYTHON

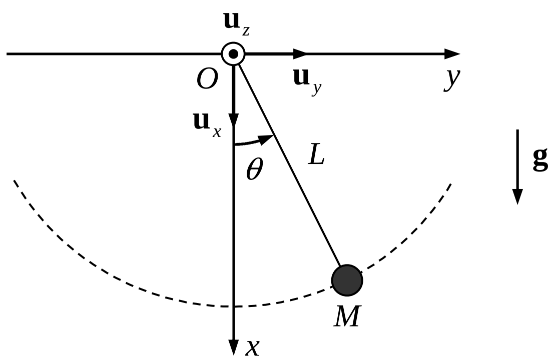
INTÉGRATION NUMÉRIQUE

EXERCICE 1 : PÉRIODE PROPRE D'UN PENDULE (temps : 75 min – difficulté : ★★★)

On se propose de déterminer la période T d'un pendule simple en mettant en œuvre une méthode d'intégration numérique.

Dans toute la suite, les questions 1), 2) 3), 4a), 4b) et 4c) seront abordées dans le cadre des travaux dirigés de sciences physiques. Elles permettent de comprendre l'intérêt de la mise en œuvre d'une méthode numérique. Seules les questions 5), 6), 7), 8) et 9) font l'objet de ce TD d'informatique.

Un pendule simple est constitué d'une masselotte $M\,(m)$ attachée à une tige de longueur L et de masse nulle pouvant osciller librement dans le plan vertical $(O, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$. La position de la masselotte est repérée à l'instant t par l'angle $\theta(t) = (\mathbf{u}_x, \mathbf{OM})$. À l'instant initial $t = 0$, on écarte la masselotte de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 $(0 < \theta_0 \leq \pi/2)$ et on la lâche sans vitesse initiale. Le référentiel terrestre $R_0\,(O, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z, t)$ d'étude est supposé galiléen.



Données : $L = 1\,\text{m}$; $g = 9{,}81\,\text{m.s}^{-2}$ (accélération de la pesanteur).

1) Montrer que l'énergie mécanique $E_m(M)_{/R_0}$ de la masselotte peut s'écrire indifféremment :

$$E_m(M)_{/R_0} = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 - mgL\cos\theta + \text{cte} \quad \text{ou} \quad E_m(M)_{/R_0} = -mgL\cos\theta_0 + \text{cte} \qquad \text{(E1)}$$

2) En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de la masselotte [sous la forme d'une équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle $\theta(t)$].

3) On envisage des mouvements de faible amplitude ($|\theta(t)| \ll 1$). Montrer que l'équation du mouvement de la masselotte est celle d'un oscillateur harmonique non amorti dont la période propre s'écrit $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$. *Application numérique*. Calculer T_0 .

4) On envisage maintenant des mouvements de grande amplitude ($|\theta(t)| \gg 1$).

4a) Montrer, à partir de l'équation (E1), que la période T des oscillations de la masselotte est telle que :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{E2}$$

4b) En utilisant la relation de trigonométrie $\cos u = 1 - 2\sin^2(u/2)$ montrer que :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} \tag{E3}$$

4c) En posant $k = \sin^2(\theta_0/2)$ et en effectuant le changement de variable $\sin(\theta/2) = k\sin\varphi$ montrer que :

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}} \tag{E4}$$

5) Écrire une fonction Python, appelée Periode, prenant en paramètres la période propre T_0 du pendule (exprimée en seconde), l'angle θ_0 (exprimé en degré) et le nom de la méthode d'intégration (sous la forme d'une chaîne de caractères du type "rectangle à gauche", "rectangle à droite", "trapèze", "Simpson"…) et retournant la période T du pendule (exprimée en seconde).

6) Écrire une fonction, appelée EcartRelatif, prenant en paramètres la période propre T_0 et la période T du pendule et retournant l'écart relatif $\varepsilon_{\%}$ (exprimé en %) entre T et T_0 . On rappelle que :

$$\varepsilon_{\%} = 100 \times \left|\frac{T - T_0}{T_0}\right| \tag{E5}$$

7) Écrire un programme Python permettant de créer trois listes nommées ListeAngle, ListePeriode et ListeEcartRelatif contenant respectivement :

- les valeurs de l'angle θ_0 pour θ_0 variant par pas de $1°$ dans l'intervalle $[1°; 90°]$;
- les valeurs correspondantes de la période T ;
- les valeurs correspondantes de l'écart relatif $\varepsilon_{\%}$.

8) Écrire une fonction Python, appelée EcartRelatifMax, prenant en paramètre un nombre, appelé PourcentageMax, exprimée en %, permettant de connaitre les valeurs de l'angle θ_0 telles que l'écart

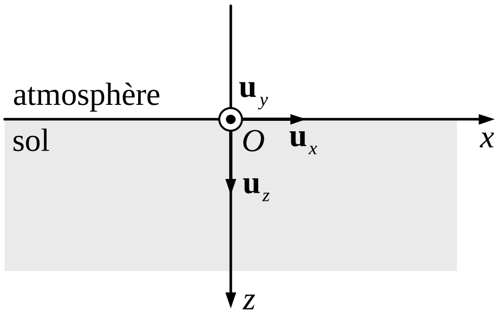
relatif entre T et T_0 soit toujours strictement inférieur à PourcentageMax. En déduire pour quelles valeurs de θ_0 cet écart relatif est toujours inférieur à $1\,\%$.

9) Écrire un programme Python permettant de créer un fichier texte nommé FichierDonnees.txt (ce fichier sera stocké dans votre répertoire), dans lequel seront stockées les valeurs de l'angle θ_0 et les valeurs correspondantes de T et $\varepsilon_{\%}$. Chaque triplet (θ_0, T, $\varepsilon_{\%}$) sera affiché sur une seule ligne, les éléments du triplet étant séparés par cinq espaces. Le fichier attendu est donc celui représenté ci-dessous :

```
35     2.05398     2.39
36     2.05682     2.53
37     2.05975     2.68
```

EXERCICE 2 : MISE HORS GEL DES CANALISATIONS D'EAU **(temps :** 45 min **– difficulté : ★★☆)**

La température dans le sol terrestre étant initialement constante, égale à $5\,°\mathrm{C}$, on cherche à déterminer à quelle profondeur minimale il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de sa surface à $-15\,°\mathrm{C}$ n'entraine pas le gel de cette canalisation après 10 jours.



Les hypothèses sont les suivantes :

- la température en un point quelconque du sol et de sa surface à tout instant $t < 0$ est constante et égale à $T_0 = 278\,\mathrm{K}$ ($\theta_0 = 5\,°\mathrm{C}$) ;
- la température à la surface du sol, confondue avec le plan d'équation $z = 0$, passe brutalement à l'instant $t = 0$, de $T_0 = 278\,\mathrm{K}$ à $T_1 = 258\,\mathrm{K}$ ($\theta_1 = -15\,°\mathrm{C}$) et se maintient à cette valeur pendant $t_f = 10$ jours.

On peut montrer que la température $T(z,t)$ à la profondeur z et à l'instant t est donnée par la relation suivante :

$$T(z,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\,\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) \qquad \text{(E6)}$$

où $\operatorname{erf}(x)$ désigne la fonction d'erreur définie par :

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(E7)}$$

Donnée numérique : $D=2{,}8.10^{-7}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$ (diffusivité thermique du sol terrestre).

1) Écrire une fonction Python, appelée erf, prenant en paramètre un nombre réel positif ou nul x et retournant la valeur de $\operatorname{erf}(x)$.
2) Écrire une fonction Python, appelée Temperature, prenant en paramètre la profondeur z (exprimée en m) et le temps t (exprimé en s) et retournant la valeur de la température $T(z,t)$.
3) Écrire un programme Python permettant de créer une liste, nommée ListeErreur, contenant les valeurs de la fonction $\operatorname{erf}(x)$ pour x variant par pas de $0{,}05$ dans l'intervalle $[0\,;2]$.
4) En déduire, à 1 cm près, à quelle profondeur minimale $z_{\min}$ il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de la surface du sol de $5\,°\mathrm{C}$ à $-15\,°\mathrm{C}$ n'entraine pas le gel de cette canalisation au bout de 10 jours.