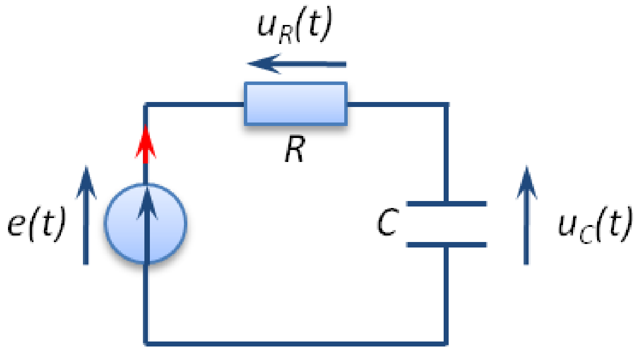
CI 3 : INGÉNIERIE NUMÉRIQUE & SIMULATION

TP – RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1 – Circuit RC



Question 1
Montrer que l'équation différentielle régissant la tension aux bornes du condensateur peut se mettre sous la forme :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

avec τ une constante à déterminer.

Le circuit est commandé par un échelon de tension de la forme :

$$\begin{cases} e(t) = E_0 \text{ si t>0} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Question 2
Déterminer, en justifiant votre réponse, la valeur de $u_c(0^+)$.

Question 3
Montrer que la solution de l'équation différentielle régissant la charge du condensateur est de la forme :

$$\forall t > 0 \quad u_c(t) = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Remarque

On prendra :
- $R = 20\ k\Omega$;
- $C = 10\ nF$.
- $E = 5\ V$;
- temps de calcul : $T = 5\ ms$;
- pas de calcul pour la solution théorique : $T/1000$;
- pas de calcul pour la solution numérique : de $T/10$ à $T/1000$.

Question 4
En utilisant Spyder, tracer la courbe correspondant à la charge du condensateur.

Connaissant la solution analytique de l'équation différentielle, on va maintenant chercher à tracer la solution numérique.

Question 5
En utilisant le schéma d'Euler explicite, déterminer la suite u_n définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

On approxime $\dfrac{du_C(t)}{dt} \simeq \dfrac{u_C(t+h)-u_C(t)}{h}$
On pose $u_n = u_c(n\cdot h)$. On a alors

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h}+\frac{u_n}{\tau}=\frac{e(t)}{\tau} \Longleftrightarrow u_{n+1}=h\frac{e(t)}{\tau}-h\frac{u_n}{\tau}+u_n=h\frac{e(t)}{\tau}+u_n\left(1-\frac{h}{\tau}\right)$$

Question 6
On souhaite réaliser en Python la fonction solveU *permettant de résoudre l'équation différentielle régissant la charge du condensateur. Quels paramètres la fonction doit-elle prendre comme argument ? Programmer la fonction.*

Question 7
Tracer sur un même graphe la solution analytique et la solution numérique pour des pas de résolution différents.
Le circuit est maintenant commandé par un signal sinusoïdal de la forme :

$$\begin{cases} e(t)=E_0\sin\omega t \text{ si t>0} \\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} e(t)=E_0\sin\left(2\pi f t\right) \text{ si t>0} \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

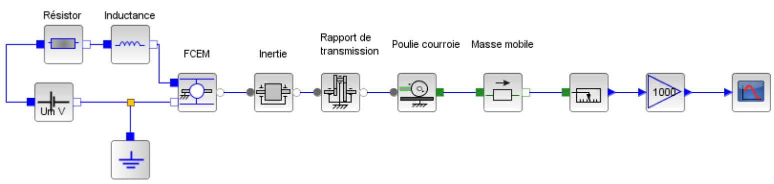
Question 8
Rechercher une solution numérique en tenant compte du nouveau signal d'entrée. Commenter l'allure de la courbe.

Question 9
Réaliser un tracé pour $f=\{10;100;1\,000;10\,000\}$. Interpréter les résultats.

Question 10
Que se passe-il quand le pas de calcul diminue. Que peut-on en conclure ? (Vous préciserez comment choisir le pas de calcul, en fonction de la constante de temps du circuit RC, pour avoir un bon compromis entre nombre d'itérations et validité (qualitative) de la solution numérique.)

Exercice 2 – Axe Emericc

L'axe Emericc permet le déplacement de masses, grâce à un motoréducteur et un système pignon courroie.



Modélisation causale de l'axe Emericc en boucle ouverte

Dans le circuit électrique, l'expression de la loi des mailles se traduit par :

$$u(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+e(t)$$

Dans un moteur à courant continu, le couple est lié à l'intensité du courant et la fréquence de rotation est liée à la force contre électro motrice :

$$C_m(t)=K_t i(t) \quad e(t)=K_e\omega_m(t)$$

En isolant l'arbre moteur, le réducteur, le système poulie-courroie on peut calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système :

$$\mathscr{E}_c(E/\mathscr{R})=\frac{1}{2}MV^2_{\text{chariot}/\mathscr{R}}+\frac{1}{2}J\omega_m^2$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, en négligeant les frottements, on a :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R})}{dt} = C_m(t)\omega_m(t) \Longleftrightarrow M\,V_{\text{chariot}/\mathcal{R}}\,\dot{V}_{\text{chariot}/\mathcal{R}} + J\,\dot{\omega}_m(t)\cdot\omega_m(t) = C_m(t)\omega_m(t)$$

Par ailleurs, en utilisant le rapport de réduction (k) du réducteur et de la poulie courroie (diamètre D), on a $V_{\text{chariot}/\mathcal{R}}(t) = \omega_m(t)\cdot k\dfrac{D}{2}$.

En conséquence,

$$M\,\omega_m(t)\cdot k\frac{D}{2}\,\dot{\omega}_m(t)\cdot k\frac{D}{2} + J\,\dot{\omega}_m(t)\cdot\omega_m(t) = C_m(t)\omega_m(t) \Longleftrightarrow M\frac{D^2k^2}{4}\dot{\omega}_m(t) + J\,\dot{\omega}_m(t) = C_m(t)$$

Au final, on peut donc écrire l'équation différentielle régissant le mouvement du chariot :

$$u(t) = \frac{R}{K_t}C_m(t) + \frac{L}{K_t}\dot{C}_m(t) + K_e\,\omega_m(t) \Longleftrightarrow u(t) = \frac{R}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4}\dot{\omega}_m(t) + J\,\dot{\omega}_m(t)\right) + \frac{L}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4}\ddot{\omega}_m(t) + J\,\ddot{\omega}_m(t)\right) + K_e\,\omega_m(t)$$

Soit :

$$\frac{R}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4} + J\right)\dot{\omega}_m(t) + \frac{L}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4} + J\right)\ddot{\omega}_m(t) + K_e\,\omega_m(t) = u(t) \Longleftrightarrow \alpha\omega_m(t) + \beta\,\dot{\omega}_m(t) + \gamma\,\ddot{\omega}_m(t) = u(t) \qquad (1)$$

Remarque

Pour les applications numériques, on aura :
- $M = 10\;kg$,
- $D_p = 0,0573\;m$;
- $L = 630\cdot 10^{-6}\;H$;
- $R = 4\,\Omega$;
- $k = 66$;
- $k_e = 0,0342\;SI$;
- $k_t = 0,0342\;SI$;
- $J_m = 47\cdot 10^{-7}\;kg\cdot m^2$.

Question 1
Préciser les unités des constantes k_e et k_t.

Question 2
Montrer que l'équation différentielle régissant la vitesse du chariot peut se mettre sous la forme :

$$a\,V_{(chariot/\mathcal{R})} + b\,\dot{V}_{(chariot/\mathcal{R})} + c\,\ddot{V}_{(chariot/\mathcal{R})} = u(t)$$

avec

$$c = \frac{L}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4} + J\right)\frac{2}{D_p k} \qquad b = \frac{R}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4} + J\right)\frac{2}{D_p k} \qquad a = K_e\frac{2}{D_p k}$$

Corrigé

On a $V(\text{chariot}/\mathcal{R}) = k\,\omega_m(t)\dfrac{D_p}{2}$

$$\alpha\omega_m(t) + \beta\,\dot{\omega}_m(t) + \gamma\,\ddot{\omega}_m(t) = u(t) \Longrightarrow \frac{2}{D_p k}V(\text{chariot}/\mathcal{R}) = \omega_m(t)$$

$$\frac{R}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4} + J\right)\frac{2}{D_p k}\dot{V}(\text{chariot}/\mathcal{R}) + \frac{L}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4} + J\right)\frac{2}{D_p k}\ddot{V}(\text{chariot}/\mathcal{R}) + K_e\frac{2}{D_p k}V(\text{chariot}/\mathcal{R}) = u(t) \qquad (2)$$

On pose :
- $c = \dfrac{L}{K_t}\left(M\dfrac{D^2k^2}{4} + J\right)\dfrac{2}{D_p k}$

Corrigé

- $b = \dfrac{R}{K_t}\left(M\dfrac{D^2k^2}{4}+J\right)\dfrac{2}{D_p k}$
- $a = K_e \dfrac{2}{D_p k}$

et
$$a\,V(\text{chariot}/\mathscr{R}) + b\,\dot{V}(\text{chariot}/\mathscr{R}) + c\,\ddot{V}(\text{chariot}/\mathscr{R}) = u(t)$$

Question 3

En utilisant le schéma d'Euler explicite, montrer que si on pose $v_1(t) = \dfrac{dV(\text{chariot}/\mathscr{R})}{dt}$ et $v_2(t) = V(\text{chariot}/\mathscr{R})$, résoudre l'équation différentielle, revient à calculer les termes des suites suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} v_2(n+1) = h\cdot v_1(t) + v_2(n) \\ v_1(n+1) = h\dfrac{u(t)-a\,v_2(n)-b\,v_1(n)}{c} + v_1(n) \end{array}\right.$$

On précisera les conditions initiales ($v_1(0)$ et $v_2(0)$).

Corrigé

On a :

$$a\,V(\text{chariot}/\mathscr{R}) + b\,\dot{V}(\text{chariot}/\mathscr{R}) + c\,\ddot{V}(\text{chariot}/\mathscr{R}) = u(t) \Longleftrightarrow \ddot{V}(\text{chariot}/\mathscr{R}) = \frac{u(t)-a\,V(\text{chariot}/\mathscr{R})-b\,\dot{V}(\text{chariot}/\mathscr{R})}{c}$$

Donc d'une part,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv_2(t)}{dt} = v_1(t) \\ \dfrac{dv_1(t)}{dt} = \ddot{V}(\text{chariot}/\mathscr{R}) = \dfrac{u(t)-a\,V(\text{chariot}/\mathscr{R})-b\,\dot{V}(\text{chariot}/\mathscr{R})}{c} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv_2(t)}{dt} = v_1(t) \\ \dfrac{dv_1(t)}{dt} = \dfrac{u(t)-a\,v_2(n)-b\,v_1(n)}{c} \end{array}\right.$$

D'autre part,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv_1(t)}{dt} \simeq \dfrac{v_1(n+1)-v_1(n)}{h} \\ \dfrac{dv_2(t)}{dt} \simeq \dfrac{v_2(n+1)-v_2(n)}{h} \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{v_2(n+1)-v_2(n)}{h} = v_1(n) \\ \dfrac{v_1(n+1)-v_1(n)}{h} = \dfrac{u(n)-a\,v_2(n)-b\,v_1(n)}{c} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_2(n+1) = h\cdot v_1(t) + v_2(n) \\ v_1(n+1) = h\dfrac{u(t)-a\,v_2(n)-b\,v_1(n)}{c} + v_1(n) \end{array}\right.$$

Remarque

On peut noter que :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_c \\ \ddot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{a}{c} & -\dfrac{b}{c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_c \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{u(t)}{c} \end{bmatrix}$$

Question 4

Pour un échelon de tension de $21,3\ V$, réaliser une fonction permettant de calculer le nième terme des suites v_1 et v_2.

Corrigé

Question 5

Tracer la courbe de correspondant à la vitesse du chariot pour un temps de simulation de 0,3 secondes. Pour quelle valeur du pas de calcul, la solution commence-t-elle à diverger.

Question 6

Tracer l'allure de la courbe de position du chariot. Commenter son allure.

La bilbiothèque Scipy de Python permet de résoudre les équations différentielles. Pour résoudre l'équation précédente, la méthode est la suivante :

```
from scipy.integrate import odeint

def emeric(v_dv_ddv,t):
    v,dv = v_dv_ddv
    return [dv,(21.3-a*v-b*dv)/(c)]

t=linspace(0,0.3,1000)
sol = odeint(emeric, (0, 0), ttt)
plot(sol)
```

Question 7

Expliquer le morceau de programme ci-dessus. Saisir le code et exécuter le fichier. Quel est le résultat obtenu ? Python affiche deux courbes, quelles sont-elles ? Les résultats vous semblent-ils comparables avec votre programme initial ?