CI 3 : Ingénierie Numérique & Simulation

Chapitre 4 – Résolution d'un système linéaire inversible par la méthode de Gauss

Savoir

Problème discret multidimensionnel, linéaire, conduisant à la résolution d'un système linéaire inversible (ou de Cramer) par la méthode de Gauss avec recherche partielle du pivot.

1 Système linéaire

Remarque

Les résultats du cours sont écrits avec des coefficients réels mais restent vrais avec des coefficients complexes.

1.1 Définitions

Définition

On dit d'un système qu'il est linéaire s'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1p}x_p=b_1 \\ ... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{np}x_p=b_n \end{array}\right.$$

On note $n, p \in \mathbb{N}^*$ (n équations et p inconnues), $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\forall j \in \{1,...,p\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. i désigne l'indice de la ligne et j l'indice de la colonne.

$b_1,...,b_n \in \mathbb{R}$ est appelé second membre.

Définition

On dit que le système est homogène su $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.

Définition

Une solution d'un système linéaire est un p-uplet de réels, c'est-à-dire un élément de $(x_1,...,x_p)$ qui vérifie les n équations.

Définition

Si un système a au moins une solution, il est dit compatible (incompatible sinon).

1.2 Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires toutes opérations de la forme :
- $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$ où $i,j \in \{1,...,n\}$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $(L_i) \leftarrow \alpha(L_i)$ où $i \in \{1,...,n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- $(L_i) \longleftrightarrow \alpha(L_j)$ où $i,j \in \{1,...,n\}$ échange de lignes.

Remarque

Pour éviter les fractions on peut également utiliser $(L_i) \leftarrow \alpha(L_i) + \lambda L_j$ où $i,j \in \{1,...,n\}$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ qui est une combinaison des deux premiers items.

Propriété

L'utilisation des opérations élémentaires sur un système ne change pas l'ensemble de ses solutions. Autrement dit, elles donnent des systèmes équivalents au premier.

1.3 Notation matricielle

Remarque

Les opérations élémentaires sur les lignes du système n'opèrent que sur les coefficients.

Définition

Au système défini précédemment, on associe la matrice de ses coefficients :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(p-1)} & a_{1p} \\ & & a_{ij} & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(p-1)} & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels à n lignes et p colonnes.

Définition

On note $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice de second memre et $(A|B)$ la matrice A augmentée de B.

Définition

Si deux matrices M et M' diffèrent d'un nombre fini d'opération sur les lignes, on duit qu'elles sont équivalentes en lignes et on note $M \underset{L}{\sim} M'$.

Remarque

Sous forme matricielle le système s'écrit $AX = B$ avec X le vecteur inconnu.

2 Pivot de Gauss

2.1 Pivot d'une ligne

Définition

On appelle pivot d'une ligne le premier nombre non nul de cette ligne.

2.2 Algorithme du pivot

Premier cas, chacun des coefficients de la première colonne est nul. En conséquence, on note $M = \begin{pmatrix} 0 & | & \\ \vdots & | & M \\ 0 & | & \end{pmatrix}$

Dans un second cas, la première colonne contient au moins un nombre non nul.

Quitte à effectuer un changement de ligne, on se ramène au cas où $a_{11} \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \alpha & & & \\ \alpha & & \alpha & \\ \alpha & & & \end{array}\right)$$

Les α représentent des nombres possiblement nuls.

Références

[1] Sylvie Delabriere, Équations différentielles, méthodes de résolution numérique – Approximation numérique des fonctions, des intégrales, des solutions d'équations. Équations différentielles : approximation numérique des solutions.

[2] Wack et Al., L'informatique pour tous en classes préparatoires aux grandes écoles, Editions Eyrolles.

[3] Olivier Guindet, Résolution d'un problème dynamique par la méthode d'Euler, UPSTI.

[4] Alain Caignot, Marc Derumaux, Résolution des équations différentielles, UPSTI.