CI 3 : Ingénierie Numérique & Simulation

Chapitre 4 – Résolution d'un système linéaire inversible par la méthode de Gauss

Savoir

Problème discret multidimensionnel, linéaire, conduisant à la résolution d'un système linéaire inversible (ou de Cramer) par la méthode de Gauss avec recherche partielle du pivot.

1 Système linéaire

Remarque

Les résultats du cours sont écrits avec des coefficients réels mais restent vrais avec des coefficients complexes.

1.1 Définitions

Définition

On dit d'un système qu'il est linéaire s'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1p}x_p=b_1 \\ ... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{np}x_p=b_n \end{array}\right.$$

On note $n,p\in\mathbb{N}^*$ (n équations et p inconnues), $\forall i\in\{1,...,n\}$, $\forall j\in\{1,...,p\}$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$. i désigne l'indice de la ligne et j l'indice de la colonne.

$b_1,...,b_n\in\mathbb{R}$ est appelé second membre.

Définition

On dit que le système est homogène su $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Définition

Une solution d'un système linéaire est un p-uplet de réels, c'est-à-dire un élément de $(x_1, \ldots, x_p)$ qui vérifie les n équations.

Définition

Si un système a au moins une solution, il est dit compatible (incompatible sinon).

1.2 Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires toutes opérations de la forme :
- $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$ où $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $(L_i) \leftarrow \alpha(L_i)$ où $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- $(L_i) \longleftrightarrow \alpha(L_j)$ où $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ échange de lignes.

Remarque

Pour éviter les fractions on peut également utiliser $(L_i) \leftarrow \alpha(L_i) + \lambda L_j$ où $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ qui est une combinaison des deux premiers items.

Propriété

L'utilisation des opérations élémentaires sur un système ne change pas l'ensemble de ses solutions. Autrement dit, elles donnent des systèmes équivalents au premier.

1.3 Notation matricielle

Remarque

Les opérations élémentaires sur les lignes du système n'opèrent que sur les coefficients.

Définition

Au système défini précédemment, on associe la matrice de ses coefficients :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(p-1)} & a_{1p} \\ & & a_{ij} & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(p-1)} & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels à n lignes et p colonnes.

Définition

On note $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice de second membre et $(A|B)$ la matrice A augmentée de B.

Définition

Si deux matrices M et M' diffèrent d'un nombre fini d'opération sur les lignes, on duit qu'elles sont équivalentes en lignes et on note $M \underset{L}{\sim} M'$.

Remarque

Sous forme matricielle le système s'écrit $AX = B$ avec X le vecteur inconnu.

2 Pivot de Gauss

2.1 Pivot d'une ligne

Définition

On appelle pivot d'une ligne le premier nombre non nul de cette ligne.

2.2 Algorithme du pivot

Premier cas, chacun des coefficients de la première colonne est nul. En conséquence, on note $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & M \\ 0 & \end{array}\right)$

Dans un second cas, la première colonne contient au moins un nombre non nul.

Quitte à effectuer un changement de ligne, on se ramène au cas où $a_{11} \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \alpha & & & \\ \alpha & & \alpha & \\ \alpha & & & \end{array}\right)$$

Les α représentent des nombres possiblement nuls.

On fait apparaître des zéros sous a_{11} avec des opérations de la forme $(L_2) \leftarrow (L_1) - \dfrac{a_{21}}{a11}(L_1)$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On effectue le pivot à nouveau sur la matrice M'.

Remarque

Le nombre de colonnes diminue à chaque pivot.

L'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes.

Exemple

Soit le système suivant à résoudre ainsi que la matrice augmentée qui lui est associée :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-2z+4t=5 \\ 2x+2y-3z+t=3 \\ 3x+3y-4z-2t=1 \\ 1x+2y+3z+3t=-1 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & | & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (L_2) \leftarrow (L_2)-2(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3)-3(L_1) \\ (L_4) \leftarrow (L_4)-(L_1) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & | & -14 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & | & -6 \end{pmatrix}$$

$$(L_2) \longleftrightarrow (L_4) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & | & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & | & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \end{pmatrix}$$

$$(L_4) \leftarrow (L_4)-\frac{1}{2}(L_3) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & | & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & | & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Matrice échelonnée

A la fin du pivot, on obtient une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \text{ non nul et } \beta \text{ réel quelconque.}$$

Définition

On dit d'une matrice qu'elle est échelonnée en ligne si :

1. une ligne est nulle, les suivantes le sont aussi ;
2. $L_1, ..., L_r$ désignent les lignes non nulles, $j(L_1), ..., j(L_r)$ désignent la position des pivots dans ces lignes et $j(L_1) < ... < j(L_r)$.

Exemple

Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Propriété

Le pivot de Gauss permet d'obtenir une matrice échelonnée en lignes.

Définition

Le rang d'une matrice échelonnée désigne le nombre de ses pivots (ce qui correspond aussi au nombre de lignes non nulles).

2.4 Matrices échelonnées réduites

On peut poursuivre le pivot en :

1. divisant les lignes non nulles par leur pivot, les pivot deviennent alors 1 ;
2. faisant apparaître des zéros au dessus des pivots.

Propriété

Toute matrice est équivalente en ligne à une et une seule matrice échelonnée réduite.

En conséquence, on peut définir le rang d'une matrice quelconque comme le rang de sa matrice échelonnée réduite en ligne.

On peut définir (le nombre) le rang d'un système comme le rang de la matrice de ses coefficients (A).

Remarque

Deux matrices équivalentes en ligne ont le même rang.

3 Résolution d'un système

3.1 Inconnu principal, inconnu secondaire

Définition

On dit d'une inconnue qu'elle est principale si dans une matrice échelonnée, sa colonne contient un pivot. Sinon on dit qu'elle est secondaire.

Exemple

Références

[1] Adrien Petri, *Pivot de Gauss – Chap 1 : Systèmes linéaires*, Notes de cours de TSI 1, Lycée Rouvière, Toulon.