

CI 3 : INGÉNIERIE NUMÉRIQUE & SIMULATION

TP – ETUDE D'UN PENDULE SIMPLE ET D'UNE CANALISATION D'EAU

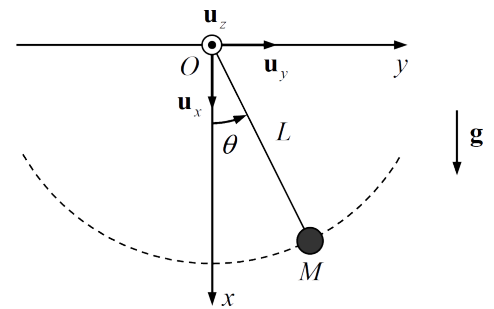
Exercice 1 – Période propre d'un pendule – Difficulté ★★★

On se propose de déterminer la période T d'un pendule simple en mettant en œuvre une méthode d'intégration numérique.

Remarque Dans toute la suite, les questions 1 à 6 seront abordées dans le cadre des travaux dirigés de sciences physiques. Elles permettent de comprendre l'intérêt de la mise en œuvre d'une méthode numérique. Seules les questions 7 à 11 font l'objet de ce TP d'informatique.

Un pendule simple est constitué d'une masselotte M considérée comme ponctuelle et de masse m attachée à une tige de longueur L et de masse nulle pouvant osciller librement dans le plan vertical $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. La position de la masselotte est repérée à l'instant t par l'angle $\theta(t) = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$. À l'instant initial $t = 0$, on écarte la masselotte de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 ($0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$) et on la lâche sans vitesse initiale. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_0(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ d'étude est supposé galiléen.

On donne $L = 1 \text{ m}$ et l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Question 1

Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_0)$ de la masselotte peut s'écrire indifféremment :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m (L\dot{\theta})^2 - mgL \cos \theta + \text{cte} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_0) = -mgL \cos \theta + \text{cte} \quad (1)$$

Question 2

En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de la masselotte (sous la forme d'une équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle $\theta(t)$).

Question 3

On envisage des mouvements de faible amplitude ($|\theta(t)| \ll 1$). Montrer que l'équation du mouvement de la masselotte est celle d'un oscillateur harmonique non amorti dont la période propre s'écrit $T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$. Application numérique. Calculer T_0 .

On envisage maintenant des mouvements de grande amplitude ($|\theta(t)| \gg 1$).

Question 4

Montrer, à partir de l'équation (1), que la période T des oscillations de la masselotte est telle que :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Question 5

En utilisant la relation de trigonométrie $\cos u = 1 - 2\sin^2(u/2)$ montrer que :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

Question 6

En posant $k = \sin(\theta_0/2)$ et en effectuant le changement de variable $\sin(\theta/2) = k \sin \varphi$ montrer que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Question 7

Écrire une fonction Python, appelée *Periode*, prenant en paramètres la période propre T_0 du pendule (exprimée en seconde), l'angle θ_0 (exprimé en degré) et le nom de la méthode d'intégration (sous la forme d'une chaîne de caractères du type "rectangle à gauche", "rectangle à droite", "trapèze") et retournant la période T du pendule (exprimée en seconde).

Question 8

Écrire une fonction, appelée *EcartRelatif*, prenant en paramètres la période propre T_0 et la période T du pendule et retournant l'écart relatif $\varepsilon_{\%}$ (exprimé en %) entre T et T_0 . On rappelle que :

$$\varepsilon_{\%} = 100 \times \left| \frac{T - T_0}{T_0} \right|$$

Question 9

Écrire un programme Python permettant de créer trois listes nommées *ListeAngle*, *ListePeriode* et *ListeEcartRelatif* contenant respectivement :

- les valeurs de l'angle θ_0 pour θ_0 variant par pas de 1° dans l'intervalle $[1^\circ; 90^\circ]$;
- les valeurs correspondantes de la période T ;
- les valeurs correspondantes de l'écart relatif $\varepsilon_{\%}$.

Question 10

Écrire une fonction Python, appelée *EcartRelatifMax*, prenant en paramètre un nombre, appelé *PourcentageMax*, exprimée en %, permettant de connaître les valeurs de l'angle θ_0 telles que l'écart relatif entre T et T_0 soit toujours strictement inférieur à *PourcentageMax*. En déduire pour quelles valeurs de θ_0 cet écart relatif est toujours inférieur à 1%.

Question 11

Écrire un programme Python permettant de créer un fichier texte nommé *FichierDonnees.txt* (ce fichier sera stocké dans votre répertoire), dans lequel seront stockées les valeurs de l'angle θ_0 et les valeurs correspondantes de T et $\varepsilon_{\%}$. Chaque triplet $(\theta_0, T, \varepsilon_{\%})$ sera affiché sur une seule ligne, les éléments du triplet étant séparés par cinq espaces. Le fichier attendu est donc celui représenté ci-dessous :

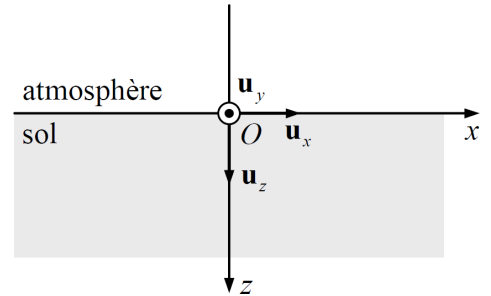
```
35  2.05398  2.39
36  2.05682  2.53
37  2.05975  2.68
```

Exercice 2 : Mise hors gel des canalisations d'eau (temps : 45 min – difficulté : **)

La température dans le sol terrestre étant initialement constante, égale à 5°C , on cherche à déterminer à quelle profondeur minimale il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de sa surface à -15°C n'entraîne pas le gel de cette canalisation après 10 jours.

Les hypothèses sont les suivantes :

- la température en un point quelconque du sol et de sa surface à tout instant $t < 0$ est constante et égale à $T_0 = 278\text{ K}$ ($\theta_0 = 5^{\circ}\text{C}$) ;
- la température à la surface du sol, confondue avec le plan d'équation $z = 0$, passe brutalement à l'instant $t = 0$, de $T_0 = 278\text{ K}$ à $T_1 = 258\text{ K}$ ($\theta_1 = -15^{\circ}\text{C}$) et se maintient à cette valeur pendant $t_f = 10$ jours.



On peut montrer que la température $T(z, t)$ à la profondeur z et à l'instant t est donnée par la relation suivante :

$$T(z, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

où $\operatorname{erf}(x)$ désigne la fonction définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Données numériques : $D = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (diffusivité thermique du sol terrestre).

Question 1

Écrire une fonction Python, appelée `erf`, prenant en paramètre un nombre réel positif ou nul x et retournant la valeur de $\operatorname{erf}(x)$.

Question 2

Écrire une fonction Python, appelée `Temperature`, prenant en paramètre la profondeur z (exprimée en m) et le temps t (exprimé en s) et retournant la valeur de la température $T(z, t)$.

Question 3

Écrire un programme Python permettant de créer une liste, nommée `ListeErreur`, contenant les valeurs de la fonction $\operatorname{erf}(x)$ pour x variant par pas de 0,05 dans l'intervalle $[0; 2]$.

Question 4

En déduire, à 1 cm près, à quelle profondeur minimale z_{\min} il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de la surface du sol de 5°C à -15°C n'entraîne pas le gel de cette canalisation au bout de 10 jours.