

## CI 3 : INGÉNIERIE NUMÉRIQUE & SIMULATION

### TP – ETUDE D'UN PENDULE SIMPLE ET D'UNE CANALISATION D'EAU

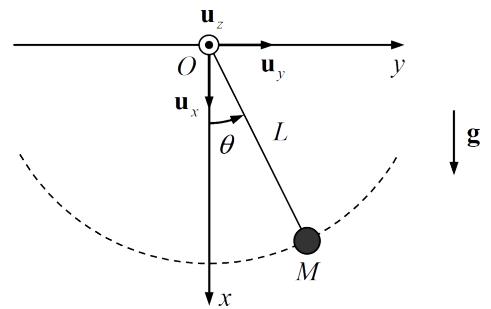
#### Exercice 1 – Période propre d'un pendule – Difficulté ★★★

On se propose de déterminer la période  $T$  d'un pendule simple en mettant en œuvre une méthode d'intégration numérique.

**Remarque** Dans toute la suite, les questions 1 à 6 seront abordées dans le cadre des travaux dirigés de sciences physiques. Elles permettent de comprendre l'intérêt de la mise en œuvre d'une méthode numérique. Seules les questions 7 à 11 font l'objet de ce TP d'informatique.

Un pendule simple est constitué d'une masselotte  $M$  considérée comme ponctuelle et de masse  $m$  attachée à une tige de longueur  $L$  et de masse nulle pouvant osciller librement dans le plan vertical  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ . La position de la masselotte est repérée à l'instant  $t$  par l'angle  $\theta(t) = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$ . À l'instant initial  $t = 0$ , on écarte la masselotte de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_0$  ( $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ ) et on la lâche sans vitesse initiale. Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  d'étude est supposé galiléen.

On donne  $L = 1 \text{ m}$  et l'accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



#### Question 1

Montrer que l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_t)$  de la masselotte peut s'écrire indifféremment :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_t) = \frac{1}{2} m (L\dot{\theta})^2 - mgL \cos \theta + \text{cte} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_t) = -mgL \cos \theta + \text{cte} \quad (1)$$

#### Question 2

En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de la masselotte (sous la forme d'une équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle  $\theta(t)$ ).

#### Question 3

On envisage des mouvements de faible amplitude ( $\theta(t) \ll 1$ ). Montrer que l'équation du mouvement de la masselotte est celle d'un oscillateur harmonique non amorti dont la période propre s'écrit  $T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$ . Application numérique. Calculer  $T_0$ .

On envisage maintenant des mouvements de grande amplitude ( $\theta(t) \gg 1$ ).

#### Question 4

Montrer, à partir de l'équation (1), que la période  $T$  des oscillations de la masselotte est telle que :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

#### Question 5

En utilisant la relation de trigonométrie  $\cos u = 1 - 2\sin^2(u/2)$  montrer que :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

### Question 6

En posant  $k = \sin(\theta_0/2)$  et en effectuant le changement de variable  $\sin(\theta/2) = k \sin \varphi$  montrer que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

### Question 7

Écrire une fonction Python, appelée *Periode*, prenant en paramètres la période propre  $T_0$  du pendule (exprimée en seconde), l'angle  $\theta_0$  (exprimé en degré) et le nom de la méthode d'intégration (sous la forme d'une chaîne de caractères du type "rectangle à gauche", "rectangle à droite", "trapèze") et retournant la période  $T$  du pendule (exprimée en seconde).

### Question 8

Écrire une fonction, appelée *EcartRelatif*, prenant en paramètres la période propre  $T_0$  et la période  $T$  du pendule et retournant l'écart relatif  $\varepsilon_{\%}$  (exprimé en %) entre  $T$  et  $T_0$ . On rappelle que :

$$\varepsilon_{\%} = 100 \times \left| \frac{T - T_0}{T_0} \right|$$

### Question 9

Écrire un programme Python permettant de créer trois listes nommées *ListeAngle*, *ListePeriode* et *ListeEcartRelatif* contenant respectivement :

- les valeurs de l'angle  $\theta_0$  pour  $\theta_0$  variant par pas de  $1^\circ$  dans l'intervalle  $[1^\circ; 90^\circ]$  ;
- les valeurs correspondantes de la période  $T$  ;
- les valeurs correspondantes de l'écart relatif  $\varepsilon_{\%}$ .

### Question 10

Écrire une fonction Python, appelée *EcartRelatifMax*, prenant en paramètre un nombre, appelé *PourcentageMax*, exprimée en %, permettant de connaître les valeurs de l'angle  $\theta_0$  telles que l'écart relatif entre  $T$  et  $T_0$  soit toujours strictement inférieur à *PourcentageMax*. En déduire pour quelles valeurs de  $\theta_0$  cet écart relatif est toujours inférieur à 1%.

### Question 11

Écrire un programme Python permettant de créer un fichier texte nommé *FichierDonnees.txt* (ce fichier sera stocké dans votre répertoire), dans lequel seront stockées les valeurs de l'angle  $\theta_0$  et les valeurs correspondantes de  $T$  et  $\varepsilon_{\%}$ . Chaque triplet  $(\theta_0, T, \varepsilon_{\%})$  sera affiché sur une seule ligne, les éléments du triplet étant séparés par cinq espaces. Le fichier attendu est donc celui représenté ci-dessous :

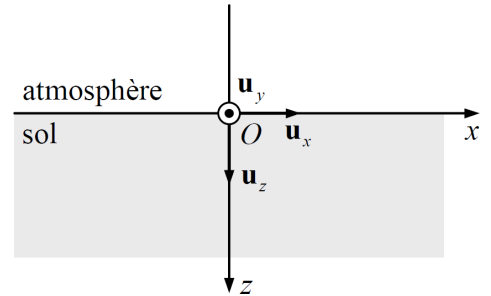
```
35  2.05398  2.39
36  2.05682  2.53
37  2.05975  2.68
```

## Exercice 2 : Mise hors gel des canalisations d'eau (temps : 45 min – difficulté : \*\*)

La température dans le sol terrestre étant initialement constante, égale à  $5^{\circ}\text{C}$ , on cherche à déterminer à quelle profondeur minimale il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de sa surface à  $-15^{\circ}\text{C}$  n'entraîne pas le gel de cette canalisation après 10 jours.

Les hypothèses sont les suivantes :

- la température en un point quelconque du sol et de sa surface à tout instant  $t < 0$  est constante et égale à  $T_0 = 278\text{ K}$  ( $\theta_0 = 5^{\circ}\text{C}$ ) ;
- la température à la surface du sol, confondue avec le plan d'équation  $z = 0$ , passe brutalement à l'instant  $t = 0$ , de  $T_0 = 278\text{ K}$  à  $T_1 = 258\text{ K}$  ( $\theta_1 = -15^{\circ}\text{C}$ ) et se maintient à cette valeur pendant  $t_f = 10$  jours.



On peut montrer que la température  $T(z, t)$  à la profondeur  $z$  et à l'instant  $t$  est donnée par la relation suivante :

$$T(z, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

où  $\operatorname{erf}(x)$  désigne la fonction définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Données numériques :  $D = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (diffusivité thermique du sol terrestre).

### Question 1

Écrire une fonction Python, appelée `erf`, prenant en paramètre un nombre réel positif ou nul  $x$  et retournant la valeur de  $\operatorname{erf}(x)$ .

### Question 2

Écrire une fonction Python, appelée `Temperature`, prenant en paramètre la profondeur  $z$  (exprimée en m) et le temps  $t$  (exprimé en s) et retournant la valeur de la température  $T(z, t)$ .

### Question 3

Écrire un programme Python permettant de créer une liste, nommée `ListeErreur`, contenant les valeurs de la fonction  $\operatorname{erf}(x)$  pour  $x$  variant par pas de 0,05 dans l'intervalle  $[0; 2]$ .

### Question 4

En déduire, à 1 cm près, à quelle profondeur minimale  $z_{\min}$  il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de la surface du sol de  $5^{\circ}\text{C}$  à  $-15^{\circ}\text{C}$  n'entraîne pas le gel de cette canalisation au bout de 10 jours.