

## CI 3 : INGÉNIERIE NUMÉRIQUE & SIMULATION

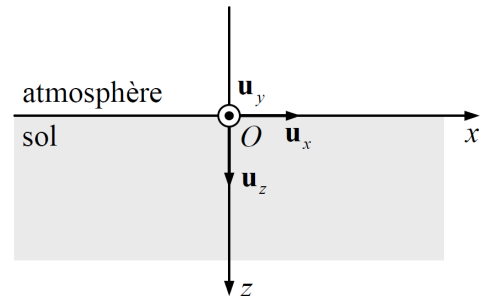
### TD – ÉTUDE DU GEL D'UNE CANALISATION D'EAU

#### Exercice 1 : Mise hors gel des canalisations d'eau (temps : 45 min – difficulté : \*\*)

La température dans le sol terrestre étant initialement constante, égale à  $5^{\circ}\text{C}$ , on cherche à déterminer à quelle profondeur minimale il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de sa surface à  $-15^{\circ}\text{C}$  n'entraîne pas le gel de cette canalisation après 10 jours.

Les hypothèses sont les suivantes :

- la température en un point quelconque du sol et de sa surface à tout instant  $t < 0$  est constante et égale à  $T_0 = 278\text{ K}$  ( $\theta_0 = 5^{\circ}\text{C}$ ) ;
- la température à la surface du sol, confondue avec le plan d'équation  $z = 0$ , passe brutalement à l'instant  $t = 0$ , de  $T_0 = 278\text{ K}$  à  $T_1 = 258\text{ K}$  ( $\theta_1 = -15^{\circ}\text{C}$ ) et se maintient à cette valeur pendant  $t_f = 10$  jours.



On peut montrer que la température  $T(z, t)$  à la profondeur  $z$  et à l'instant  $t$  est donnée par la relation suivante :

$$T(z, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

où  $\operatorname{erf}(x)$  désigne la fonction définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Données numériques :  $D = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (diffusivité thermique du sol terrestre).

#### Question 1

Écrire une fonction python, appelée *integrale*, permettant de réaliser d'intégrer une fonction sur un intervalle, en utilisant la méthode du point milieu.

#### Question 2

Écrire une fonction Python, appelée *erf*, prenant en paramètre un nombre réel positif ou nul  $x$  et retournant la valeur de  $\operatorname{erf}(x)$ .

#### Question 3

Écrire une fonction Python, appelée *Temperature*, prenant en paramètre la profondeur  $z$  (exprimée en m) et le temps  $t$  (exprimé en s) et retournant la valeur de la température  $T(z, t)$ .

#### Question 4

Écrire un programme Python permettant de créer une liste, nommée *ListeErreur*, contenant les valeurs de la fonction  $\operatorname{erf}(x)$  pour  $x$  variant par pas de 0,05 dans l'intervalle  $[0; 2]$ .

#### Question 5

En déduire, à 1 cm près, à quelle profondeur minimale  $z_{\min}$  il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de la surface du sol de  $5^{\circ}\text{C}$  à  $-15^{\circ}\text{C}$  n'entraîne pas le gel de cette canalisation au bout de 10 jours.