

CI 3 : INGÉNIERIE NUMÉRIQUE & SIMULATION

CHAPITRE 2 – PROBLÈMES STATIONNAIRES RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION $f(x) = 0$

D'après ressources de A. Caignot.

1 Loi entrée–sortie du Clever

On s'intéresse au mouvement de la cabine du véhicule à trois roues Clever dont la cabine s'incline à l'image d'une moto pour prendre un virage.

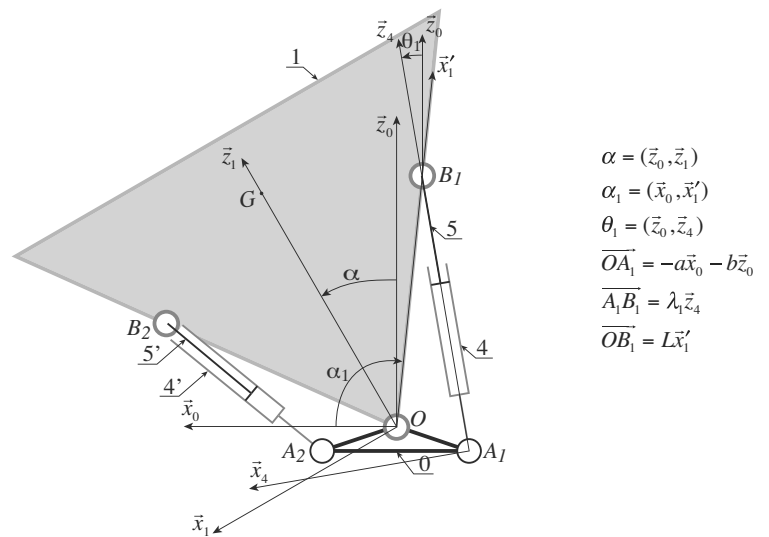


FIGURE 1 – cinématique adopté pour l'étude analytique

Pour piloter le mécanisme, il est nécessaire de connaître l'angle de la cabine en fonction de l'élongation des vérins. L'étude géométrique permet d'obtenir facilement l'élongation en fonction de l'angle :

$$\lambda_1(\alpha) = \sqrt{(L \cos(\alpha - 130^\circ) + a)^2 + (L \sin(\alpha - 130^\circ) - b)^2}$$

avec $\alpha \in [-50^\circ, 50^\circ]$, $a = 0,14 \text{ m}$, $b = 0,046 \text{ m}$ et $L = 0,49 \text{ m}$.

L'objectif du TP est de déterminer l'angle α pour une valeur d'élongation λ_1 donnée.

1.1 Approche graphique

Question 1

Définir la fonction $\lambda_1(\alpha)$.

Question 2

Tracer l'angle α en fonction de λ_1 sur le domaine d'étude considéré.

Question 3

Déterminer graphiquement, à l'aide de zoom sur la figure, l'angle α pour un allongement de $\lambda_1 = 0,4 \text{ m}$.

1.2 Utilisation de bibliothèques Numpy/Scipy

Un certain nombre d'algorithmes existent pour résoudre une équation, la plupart d'entre eux sont déjà implantés dans le module Scipy.

Nous allons utiliser la méthode de Newton pour déterminer une solution de référence. Cette méthode permet de résoudre une équation mise sous la forme $f(x) = 0$.

Question 4

Définir la fonction `f(alpha)`.

Pour utiliser la fonction de résolution avec l'algorithme de Newton, il faut taper les commandes :



```
import scipy.optimize as opt
opt.newton(f, 5) #la valeur initiale est 5
```

Question 5

Réaliser un schéma permettant d'expliquer la méthode de résolution utilisant l'algorithme de Newton.

Question 6

Expliquer alors le but d'avoir une valeur initiale dans la fonction proposée par Scipy.

Question 7

Déterminer numériquement l'angle α pour un allongement de $\lambda_1 = 0,4 \text{ m}$. Comparer la valeur obtenue avec la valeur initiale.

1.3 Étude de différents algorithmes de résolution

Vous allez dans cette partie implanter différents algorithmes de résolution.

Ces algorithmes sont des algorithmes itératifs qu'il convient d'arrêter lorsque l'on atteint un critère. Le critère d'arrêt retenu sera $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-10}$ sauf indication contraire.

Pour chacun des algorithmes, on observera l'ordre de convergence $\text{ordre}(i) = \frac{\log(|x_i - x_{i-1}|)}{\log(|x_{i-1} - x_{i-2}|)}$. Plus l'ordre est élevé, plus l'algorithme converge rapidement vers la solution.

1.3.1 Méthode par dichotomie

Question 8

Décrire sous la forme d'un algorithme en pseudo code ou d'un algorithme la méthode par dichotomie.

Question 9

Sous quelles conditions est-il possible d'utiliser cet algorithme.

Question 10

Implanter cet algorithme dans une fonction `dichotomie(f, a, b, epsilon)` et vérifier que le résultat renvoyé correspond à celui attendu.

Question 11

Modifier votre algorithme pour afficher le nombre d'itérations ainsi que la solution quand la convergence est atteinte.

Question 12

Modifier votre algorithme pour que celui-ci renvoie la liste contenant les solutions successives obtenues à chaque itération. On supposera que la solution à chaque itération est $\frac{a+b}{2}$.

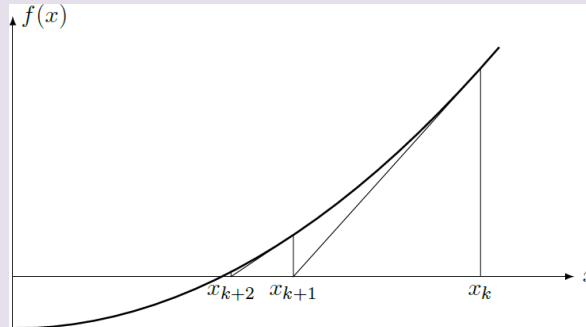
Question 13

Ecrire une fonction `ordre(liste_x)` qui renvoie la liste contenant l'ordre de convergence en fonction des itérations. En déduire l'ordre de convergence de la méthode par dichotomie.

1.3.2 Méthode de Newton

Question 14

En utilisant un schéma, expliquer le déroulement de la méthode de Newton.



L'équation générale de la tangente à la fonction f au point d'abscisse x_k , coupant l'axe des abscisses au point d'abscisse x_{k+1} est : $y(x) = f'(x_k)(x - x_{k+1})$.

En particulier, en x_k , on a : $y(x_k) = f'(x_k)(x_k - x_{k+1}) = f(x_k)$ (car la tangente et la courbe sont concourantes au point $(x_k, f(x_k))$).

On en déduit que
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Cette méthode a un ordre de convergence théorique de 2 (voir le cours) quand on est capable de déterminer précisément la dérivée.

Quand cette dérivée n'est pas connue, on peut déterminer une approximation. Ici, on l'approchera par : $f'(x_k) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$.

On donne la dérivée de $\lambda_1(x)$:

$$\lambda_1'(x) = \frac{-aL \sin(\alpha - 130^\circ) - bL \cos(\alpha - 130^\circ)}{\sqrt{(L \cos(\alpha - 130^\circ) + a)^2 + (L \sin(\alpha - 130^\circ) - b)^2}}$$

Question 15

Écrire une fonction `newton(f, xini)` qui affiche la solution, le nombre d'itérations et qui renvoie la liste des approximations x_k successives en prenant la dérivée exacte.

Question 16

Dans le cas où la dérivée de λ_1 n'est pas connue, donner une méthode permettant de la calculer.

Question 17

Écrire une fonction `newton2(f, xini)` qui affiche la solution, le nombre d'itérations et qui renvoie la liste des approximations x_k successives en prenant la dérivée approchée pour $h = 0,1$.

Question 18

Comparer la convergence de cet algorithme pour différentes valeurs de h par pas de 10 ($10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \dots$) et déterminer une valeur qui semble optimale.

Question 19

Déterminer l'évolution de l'ordre de convergence en fonction des itérations et en déduire l'ordre de convergence pour différentes valeurs de h . Comparer à la valeur théorique.

L'algorithme est initialisé avec la valeur -20 . Le résultat est aberrant.

Question 20

Tester votre algorithme avec cette valeur et expliquer ce qu'il se passe.

Corrigé

1.3.3 Méthode de la sécante

Cette méthode est une variante de la méthode de Newton dans laquelle la dérivée est approximée par la pente de la droite passant par les deux points d'abscisses x_{k-1} et x_{k-2} calculés précédemment.

$$x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{f(x_{k+1})}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}(x_{k+1} - x_k)$$

Question 21

Écrire une fonction `secante(f, xini1, xini2)` qui affiche la solution, le nombre d'itérations et qui renvoie la liste des approximations x_k successives.

Question 22

Déterminer l'évolution de l'ordre de convergence en fonction des itérations et en déduire l'ordre de convergence. Comparer à la valeur théorique qui est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.3.4 Méthode du point fixe

La méthode consiste cette fois à résoudre le problème sous la forme $g(x) = x$.

L'algorithme itératif consiste à déterminer successivement $x_{k+1} = g(x_k)$.

Toute la subtilité de cette méthode consiste à trouver une fonction g suffisamment intelligente pour obtenir un ordre de convergence correct.

Question 23

Déterminer une fonction g qui permettrait d'appliquer la méthode du point fixe.

Question 24

Écrire une fonction `point_fixe(g, xini)` qui affiche le résultat, le nombre d'itérations et qui renvoie la liste des approximations x_k successives.

Question 25

Déterminer l'évolution de l'ordre de convergence en fonction des itérations et en déduire l'ordre de convergence.

1.4 Conclusion

Question 26

Comparer les différentes méthodes mises en œuvre en terme de nombres d'itérations pour converger, l'ordre de convergence. Tracer l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations.