

CI 2 : ALGORITHMIQUE & PROGRAMMATION

ALGORITHMES D'INFORMATIQUE

1	Recherches dans une liste	2
1.1	Recherche d'un nombre dans une liste	2
1.2	Recherche du maximum dans une liste de nombre	3
1.3	Recherche par dichotomie dans un tableau trié	3
2	Gestion d'une liste de nombres	4
2.1	Calcul de la moyenne	4
2.2	Calcul de la variance	4
2.3	Calcul de la médiane	5
3	Chaînes de caractères	5
3.1	Recherche d'un mot dans une chaîne de caractères	5
4	Calcul numérique	6
4.1	Recherche du zéro d'une fonction continue monotone par la méthode de dichotomie	6
4.2	Recherche du zéro d'une fonction continue monotone par la méthode de Newton	6
4.3	Méthode des rectangles pour le calcul approché d'une intégrale sur un segment	6
4.3.1	Méthode des rectangles à gauche	6
4.3.2	Méthode des rectangles à droite	7
4.3.3	Méthode des rectangles – Point milieu	8
4.4	Méthode des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale sur un segment	10
4.5	Méthode d'Euler pour la résolution d'une équation différentielle	10
4.5.1	Méthode d'Euler explicite	10
4.6	Algorithme de Gauss – Jordan	11
5	Algorithmes de tris	12
5.1	Tri par sélection	12
5.2	Tri par insertion	12
5.2.1	Méthode 1	12
5.2.2	Méthode 2	13
5.3	Tri shell	13
5.4	Tri rapide «Quicksort»	14
5.5	Tri fusion	14
6	Algorithmes classiques	14
6.1	Division euclidienne	14
6.2	Algorithme d'Euclide	14
6.3	Recherche des nombres premiers – Crible d'Ératosthène	15
6.4	Calcul de puissance	15
6.4.1	Algorithme naïf	15
6.4.2	Exponentiation rapide	15
7	Calcul d'un polynôme	15
7.1	Algorithme naïf	15
7.2	Méthode de Horner	15

1 Recherches dans une liste

1.1 Recherche d'un nombre dans une liste

Pseudo Code

Algorithme : Recherche naïve d'un nombre dans une liste triée ou non

Données :

- n, int : un entier
- tab, liste : une liste d'entiers triés ou non triés

Résultat :

- un booléen : Vrai si le nombre est dans la liste, Faux sinon.

```
is_number_in_list(n,tab) :
    l ← longueur(tab)
    Pour i allant de 1 à l faire :
        Si tab[i] = n alors :
            Retourne Vrai
        Fin Si
    Fin Faire
    Retourne Faux
Fin fonction
```

python

```
def is_number_in_list(nb,tab):
    """Renvoie True si le nombre nb est dans la liste
    de nombres tab
    Keyword arguments:
    * nb, int — nombre entier
    * tab, list — liste de nombres entiers
    """
    for i in range(len(tab)):
        if tab[i]==nb:
            return True
    return False
```

python

```
def is_number_in_list(nb,tab):
    """Renvoie True si le nombre nb est dans la liste
    de nombres tab
    Keyword arguments:
    * nb, int — nombre entier
    * tab, list — liste de nombres entiers
    """
    i=0
    while i<len(tab) and tab[i]!=nb:
        i+=1
    return i<len(tab)
```

Remarque

Ces algorithmes sont modifiables aisément dans le cas où on souhaiterait connaître l'index du nombre recherché.

1.2 Recherche du maximum dans une liste de nombre

Pseudo Code

Algorithme : Recherche du maximum dans une liste de nombres

Données :

– tab, liste : une liste de nombres

Résultat :

– maxi, réel : maximum de la liste

```
what_is_max(tab) :
    n ← longueur(tab)
    i ← 2
    maxi ← tab[1]
    Tant que i < n faire :
        Si tab[i] > maxi alors :
            maxi ← tab[i]
        Fin si
        i ← i+1
    Fin tant que
    Retourner maxi
Fin fonction
```

python

```
def what_is_max(tab):
    """
    Renvoie le plus grand nombre d'une liste
    Keyword arguments:
    tab — liste de nombres
    """
    i=1
    maxi=tab[0]
    while i<len(tab):
        if tab[i]>maxi:
            maxi=tab[i]
        i+=1
    return maxi
```

1.3 Recherche par dichotomie dans un tableau trié

Pseudo Code

Algorithme : Recherche par dichotomie d'un nombre dans une liste triée ou non

Données :

– nb, int : un entier

– tab, liste : une liste d'entiers triés

Résultat :

– m, int : l'index du nombre recherché

– None : cas où nb n'est pas dans tab

```
is_number_in_list_dicho(nb,tab) :
    g ← 0
    d ← longueur(tab)
    Tant que g < d alors :
        m ← (g+d) div 2 alors :
            Si tab[m]=nb alors :
                Retourne m
            Sinon si tab[m]<nb alors :
                g ← m+1
            Sinon, alors :
                d ← m-1
    Fin Si
    Fin Tant que
    Retourne None
Fin fonction
```

python

```
def is_number_in_list_dicho(nb,tab):
    """
    Recherche d'un nombre par dichotomie dans un
    tableau trié.
    Renvoie l'index si le nombre nb est dans la liste
    de nombres tab.
    Renvoie None sinon.
    Keyword arguments:
    nb,int — nombre entier
    tab, list — liste de nombres entiers triés
    """
    g, d = 0, len(tab)-1
    while g <= d:
        m = (g + d) // 2
        if tab[m] == nb:
            return m
        if tab[m] < nb:
            g = m+1
        else:
            d = m-1
    return None
```

2 Gestion d'une liste de nombres

2.1 Calcul de la moyenne

Pseudo Code

Algorithme : Calcul de la moyenne arithmétique des nombres d'une liste

Données :

– tab, liste : une liste de nombres

Résultat :

– res, réel : moyenne des nombres

calcul_moyenne(tab) :

 n ← longueur(tab)

 res ← 0

Pour i allant de 1 à n **faire** :

 res ← res+tab[i]

Fin faire

Retourner res/n

Fin fonction

python

```
def calcul_moyenne(tab):
```

```
    """
```

```
    Renvoie la moyenne des valeurs d'une liste de nombres.
```

```
    Keyword arguments:
```

```
    tab — liste de nombres
```

```
    """
```

```
    res = 0
```

```
    for i in range(len(tab)):
```

```
        res = res+tab[i]
```

```
    return res/(len(tab))
```

2.2 Calcul de la variance

Soit une série statistique prenant les n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n . Soit m la moyenne de ces valeurs. La variance est définie par :

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

Pseudo Code

python

```
def calcul_variance(tab,m):
```

```
    """
```

```
    Renvoie la variance des valeurs d'un tableau.
```

```
    Keyword arguments:
```

```
    tab — liste de nombres
```

```
    m — moyenne des valeurs
```

```
    """
```

```
    res = 0
```

```
    for i in range(len(tab)):
```

```
        res = res+(tab[i]-m)**2
```

```
    return res/(len(tab))
```

2.3 Calcul de la médiane

Algorithme : Recherche de la valeur médiane d'une liste de nombres triés

Données :

– tab, liste : liste de nombres triés

Résultat :

– flt : valeur de la médiane

mediane(tab) :

n ← Longueur(tab)

Si n modulo 2 = 0 **Alors :**

i ← n/2

Retourner (tab[i] + tab[i+1])/2

Sinon :

i ← n div 2 + 1

Retourner (tab[i])

Fin fonction

Pseudo Code



3 Chaînes de caractères

3.1 Recherche d'un mot dans une chaîne de caractères

Pseudo Code

```
def index_of_word_in_text(mot, texte):
    """ Recherche si le mot est dans le texte.
    Renvoie l'index si le mot est présent, None sinon.

    Keyword arguments:
    mot — mot recherché
    texte — texte

    """
    for i in range(1 + len(texte) - len(mot)):
        j = 0
        while j < len(mot) and mot[j] == texte[i + j]:
            j += 1
        if j == len(mot):
            return i
    return None
```



4 Calcul numérique

4.1 Recherche du zéro d'une fonction continue monotone par la méthode de dichotomie

Pseudo Code

```

Début Fonction
  Données :  $f, a, b, \varepsilon$ 
   $g \leftarrow a$ 
   $d \leftarrow b$ 
   $f_g \leftarrow f(g)$ 
   $f_d \leftarrow f(d)$ 
  tant que  $(d - g) > 2\varepsilon$  faire
     $m \leftarrow (g + d)/2$ 
     $f_m \leftarrow f(m)$ 
    si  $f_g \cdot f_m \leq 0$  alors
       $d \leftarrow m$ 
       $f_d \leftarrow f_m$ 
    sinon
       $g \leftarrow m$ 
       $f_g \leftarrow f_m$ 
    fin
  fin
  retourner  $(g + d)/2$ 
Fin
  
```

python

```

def rechercheDichotomique(f, a, b, eps):
    g = a
    d = b
    f_g = f(g)
    f_d = f(d)
    while (d - g) > 2*eps:
        m = (g + d) / 2
        f_m = f(m)
        if f_g * f_m <= 0 :
            d = m
            f_d = f_m
        else :
            g = m
            f_g = f_m
    return (g + d) / 2
  
```

4.2 Recherche du zéro d'une fonction continue monotone par la méthode de Newton

Pseudo Code

```

Début Fonction
  Données :  $f, f', a, \varepsilon$ 
   $g \leftarrow a$ 
   $c \leftarrow g - \frac{f(g)}{f'(g)}$ 
  tant que  $|c - g| > \varepsilon$  faire
     $g \leftarrow c$ 
     $c \leftarrow g - \frac{f(g)}{f'(g)}$ 
  fin
  retourner  $c$ 
Fin
  
```

python

```

# Python code for Newton's method
  
```

4.3 Méthode des rectangles pour le calcul approché d'une intégrale sur un segment

4.3.1 Méthode des rectangles à gauche

Algorithme : Calcul d'intégrale par la méthode des rectangles à gauche

Données :

- f, fonction : fonction définie sur $[a, b]$
- a, réel : borne inférieure de l'intervalle de définition
- b, réel : borne supérieure de l'intervalle de définition, $b \geq a$
- nb, entiers : nombre d'échantillons pour calculer l'intégrale

Résultat :

- res, réel : valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$

integrale_rectangles_gauche(f,a,b,nb) :

```

res ← 0
pas ← (b-a)/nb
x ← a
Tant que x < b-pas : Faire
    res ← res + pas * f(x)
    x ← x + pas
Fin Tant que
Retourner res
    
```

```

def integrale_rectangles_gauche(f,a,b,nb):
    """
    Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la
    méthode des rectangles à gauche.
    Keywords arguments :
    f — fonction à valeur dans IR
    a — float, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
    b — float, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
    nb — int, nombre d'échantillons pour le calcul
    """
    res = 0
    pas = (b-a)/nb
    x = a
    while x < b-pas:
        res = res + pas * f(x)
        x = x + pas
    return res
    
```

4.3.2 Méthode des rectangles à droite

Algorithme : Calcul d'intégrale par la méthode des rectangles à droite

Données :

- f, fonction : fonction définie sur $[a, b]$
- a, réel : borne inférieure de l'intervalle de définition
- b, réel : borne supérieure de l'intervalle de définition, $b \geq a$
- nb, entiers : nombre d'échantillons pour calculer l'intégrale

Résultat :

- res, réel : valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$

integrale_rectangles_droite(f,a,b,nb) :

```

res ← 0
pas ← (b-a)/nb
x ← a+pas
Tant que x < b-pas : Faire
    res ← res + pas * f(x)
    x ← x + pas
    
```

```
def integrale_rectangles_droite (f,a,b,nb):
    """
    Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la
    méthode des rectangles à droite.
    Keywords arguments :
    f — fonction à valeur dans IR
    a — flt, borne inférieure de l' intervalle d'intégration
    b — flt, borne supérieure de l' intervalle d'intégration
    nb — int, nombre d'échantillons pour le calcul
    """
    res = 0
    pas = (b-a)/nb
    x = a+pas
    while x<b-pas:
        res = res + pas *f(x)
        x = x + pas
    return res
```

4.3.3 Méthode des rectangles – Point milieu

Algorithme : Calcul d'intégrale par la méthode des rectangles – point milieu

Données :

- f, fonction : fonction définie sur $[a, b]$
- a, réel : borne inférieure de l'intervalle de définition
- b, réel : borne supérieure de l'intervalle de définition, $b \geq a$
- nb, entiers : nombre d'échantillons pour calculer l'intégrale

Résultat :

- res, réel : valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$

integrale_rectangles_droite(f,a,b,nb) :

```
res ← 0
pas ← (b-a)/nb
x ← a
Tant que x<b-pas : Faire
    res← res + pas *( f(x)+f(x+pas))/2
    x ← x+pas
Fin Tant que
Retourner res
```




```
def integrale_rectangles_milieu(f,a,b,nb):
    """
```



Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de $f(x)$ entre a et b par la méthode du point milieu.

Keywords arguments :

f — fonction à valeur dans \mathbb{R}

a — flt , borne inférieure de l'intervalle d'intégration

b — flt , borne supérieure de l'intervalle d'intégration

nb — int , nombre d'échantillons pour le calcul

"""

res = 0

pas = (b-a)/nb

x = a+pas

while x < b-pas:

 res = res + pas * (f(x)+f(x+pas))/2

 x = x + pas

return res

4.4 Méthode des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale sur un segment

cf. méthodes des rectangles par la méthode du point milieu.

4.5 Méthode d'Euler pour la résolution d'une équation différentielle

4.5.1 Méthode d'Euler explicite

Résolution de l'équation différentielle :

$$y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = y_f$$

Algorithme : Méthode d'Euler explicite

Données :

- tau, réel : constante de temps
- y_0, réel : valeur initiale de y
- y_f, réel : valeur finale y
- t_f, réel : temps de la simulation numérique
- nb, entier : nombre d'échantillons pour calculer les valeurs de y

Résultat :

- res, liste : liste des couples (t,y(t)).

euler_explicite(tau,y_0,y_f,t_f,nb):

 Initialiser res

 t ← 0

 y ← y_0

 pas ← t_f/nb

 Tant que t < t_f Faire :

 Ajouter (t,y) à res

 y ← y + pas * (y_f - y) / tau

 t ← t + pas

 Fin Tant que

 Retourner res

Pseudo Code



```
def euler_explicite (tau,y0,yf,tf,nb):
    """
    Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 en utilisant la méthode
    d'Euler explicite .
    Keywords arguments :
    tau — flt , constante de temps de l'équation différentielle
    y0 — flt , valeur initiale de y(t)
    yf — flt valeur finale de y(t)
    tf — flt temps de fin de la simulation
    nb — int , nombre d'échantillons pour la simulation
    """
    t = 0
    y = y0
    pas = tf / nb
    res = []
    while t < tf:
        res.append((t,y))
        y = y + pas*(yf-y)/tau
        t = t + pas
    return res
```

4.6 Algorithme de Gauss – Jordan



```
def recherche_pivot(A,i):
    n = len(A) # le nombre de lignes
    j = i # la ligne du maximum provisoire
    for k in range(i+1, n):
        if abs(A[k][i]) > abs(A[j][i]):
            j = k # un nouveau maximum provisoire
    return j

def echange_lignes(A,i,j):
    # Li <=> Lj
    A[i][:], A[j][:] = A[j][:], A[i][:]

def transvection_ligne (A, i, j, mu):
    # L_i <- L_i + mu.L_j """
    nc = len(A[0]) # le nombre de colonnes
    for k in range(nc):
        A[i][k] = A[i][k] + mu * A[j][k]

def resolution (AA, BB):
    """Résolution de AA.X=BB; AA doit etre inversible"""
    A, B = AA.copy(), BB.copy()
    n = len(A)
    assert len(A[0]) == n
    # Mise sous forme triangulaire
    for i in range(n):
        j = recherche_pivot(A, i)
        if j > i:
            echange_lignes(A, i, j)
            echange_lignes(B, i, j)
        for k in range(i+1, n):
```



```
x = A[k][i] / float(A[i][i])
transvection_ligne(A, k, i, -x)
transvection_ligne(B, k, i, -x)

# Phase de remontée
X = [0.] * n
for i in range(n-1, -1, -1):
    X[i] = (B[i][0]-sum(A[i][j]*X[j] for j in range(i+1,n))) / A[i][i]
return X
```

5 Algorithmes de tris

5.1 Tri par sélection



```
# Tri par sélection
def tri_selection(tab):
    for i in range(0, len(tab)):
        indice = i
        for j in range(i+1, len(tab)):
            if tab[j] < tab[indice]:
                indice = j
        tab[i], tab[indice] = tab[indice], tab[i]
    return tab
```

5.2 Tri par insertion

5.2.1 Méthode 1

Algorithme : Tri par insertion – Méthode 1

Données :

– tab, liste : une liste de nombres

Résultat :

– tab, liste : la liste de nombres triés

```
tri_insertion(tab) :
    n ← longueur(tab)
    Pour i de 2 à n :
        x ← tab[i]
        j ← 1
        Tant que j ≤ i-1 et tab[j] < x :
            j ← j+1
        Fin Tant que
        Pour k de i-1 à j-1 par pas de -1 faire :
            tab[k+1] ← tab[k]
        Fin Pour
        tab[j] ← x
    Fin Pour
```

Pseudo Code



```
def tri_insertion_01(tab):
    """
    Trie une liste de nombre en utilisant la méthode
    du tri par insertion .
    En Python, le passage se faisant par référence, il
    n'est pas indispensable de retourner le tableau.
    Keyword arguments:
    tab — liste de nombres
    """
    for i in range(1, len(tab)):
        x = tab[i]
        j = 0
        while j <= i-1 and tab[j] < x:
            j = j+1
        for k in range(i-1, j-1, -1):
            tab[k+1] = tab[k]
        tab[j] = x
```

Estimation de la complexité

- Meilleur des cas, le tableau est trié à l'envers, la complexité est linéaire : $\mathcal{O}(n)$.
- Pire des cas, le tableau est trié, la complexité est quadratique : $\mathcal{O}(n^2)$.

5.2.2 Méthode 2

Pseudo Code

Algorithme : Tri par insertion – Méthode 2

Données :

- tab, liste : une liste de nombres

Résultat :

- tab, liste : la liste de nombres triés

```

tri_insertion(tab) :
    n ← longueur(tab)
    Pour i de 2 à n :
        x ← tab[i]
        j ← i
        Tant que j > 1 et tab[j-1] > x :
            tab[j] ← tab[j-1]
            j ← j-1
        Fin Tant que
        tab[j] ← x
    Fin Pour
    
```

python

```

def tri_insertion_02(tab):
    """
    Trie une liste de nombre en utilisant la méthode
    du tri par insertion .
    En Python, le passage se faisant par référence,
    il n'est pas indispensable de retourner le tableau .
    Keyword arguments:
    tab — liste de nombres
    """
    for i in range (1, len(tab)):
        x=tab[i]
        j=i
        while j>0 and tab[j-1]>x:
            tab[j]=tab[j-1]
            j = j-1
        tab[j]=x
    
```

Estimation de la complexité

- Meilleur des cas, le tableau est trié, la complexité est linéaire : $\mathcal{O}(n)$.
- Pire des cas, le tableau est trié à l'envers, la complexité est quadratique : $\mathcal{O}(n^2)$.

5.3 Tri shell

python

```

def shellSort (array ):
    "Shell sort using Shell's ( original ) gap sequence: n/2, n/4, ..., 1."
    "http://en.wikibooks.org/wiki/Algorithm_Implementation/Sorting/Shell_sort#Python"
    gap = len(array) // 2
    # loop over the gaps
    while gap > 0:
        # do the insertion sort
        for i in range(gap, len(array )):
            val = array[i]
            j = i
            while j >= gap and array[j - gap] > val:
                array[j] = array[j - gap]
                j -= gap
            array[j] = val
        gap //= 2
    
```

5.4 Tri rapide «Quicksort»

5.5 Tri fusion

6 Algorithmes classiques

6.1 Division euclidienne

Pseudo Code

```

Data :  $a, b \in \mathbb{N}^*$ 
reste  $\leftarrow$  a
quotient  $\leftarrow$  0
tant que reste  $\geq$  b faire
    | reste  $\leftarrow$  reste - b
    | quotient  $\leftarrow$  quotient + 1
fin
Retourner quotient, reste
    
```

6.2 Algorithme d'Euclide

Cet algorithme permet de calculer le PGCD de deux nombres entiers. Il se base sur le fait que si a et b sont deux entiers naturels non nuls, $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a \bmod b)$.

Pseudo Code

```

Fonction PGCD : algorithme d'Euclide
Données : a et b : deux entiers naturels non nuls
tels que a > b
Résultat : le PGCD de a et b

Euclide_PGCD(a,b)
    Répéter
        r  $\leftarrow$  a mod b
        a  $\leftarrow$  b
        b  $\leftarrow$  r
    Jusqu'à r == 0
    Retourner a
    
```

python

Codage en Python de l'algorithme d'Euclide :

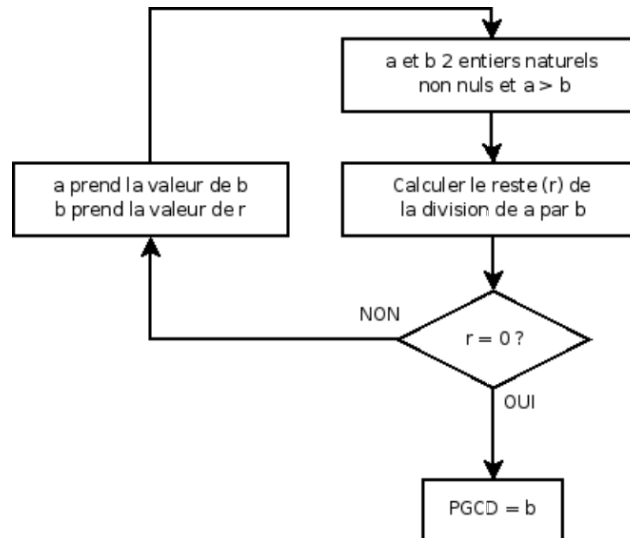
```

def Euclide_PGCD(a,b): # on définit le nom de la
                        # fonction et ses variables
                        # d'entrées/d'appel
    r=a%b               # on calcule le reste dans
                        # la division de a par b

    while r!=0:         # tant que r est non nul :
        a=b             # b devient le nouveau a
        b=r             # r devient le nouveau b
        r=a%b           # on recalcule le reste

    return(b)           # une fois la boucle terminée,
                        # on retourne le dernier b

print(Euclide_PGCDpgcd(1525,755))
                        # on affiche le résultat
                        # retourné par la fonction
    
```



6.3 Recherche des nombres premiers – Crible d'Ératosthène

6.4 Calcul de puissance

6.4.1 Algorithme naïf

6.4.2 Exponentiation rapide

7 Calcul d'un polynôme

7.1 Algorithme naïf

7.2 Méthode de Horner

Références

- [1] Patrick Beynet, Cours d'informatique de CPGE, Lycée Rouvière de Toulon, UPSTI.
- [2] Adrien Petri et Laurent Deschamps, Cours d'informatique de CPGE, Lycée Rouvière de Toulon, UPSTI.
- [3] Damien Iceta, Cours d'informatique de CPGE, Lycée Gustave Eiffel de Cachan, UPSTI.