CI 3 : Ingénierie Numérique & Simulation

Chapitre 3 – Résolution des équations différentielles

Résolution numérique d'équations différentielles

Donner la méthode de résolution numérique des équations différentielles suivantes en utilisant le schéma d'Euler explicite :

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t)+\alpha y(t)=\beta \\ y(0)=\gamma \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{\theta}(t)+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0 \\ \theta(0)=0 \quad \dot{\theta}(0)=0 \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t)=-t\,y^2(t) \quad \text{si } t>0 \\ y(0)=\alpha \end{array}\right. \tag{3}$$

Équation 1

On a :

$$y'(t)\simeq\frac{y(t+h)-y(h)}{h}$$

En discrétisant le problème, on a $y_k=y(kh)=y(t)$; donc :

$$\frac{y(t+h)-y(h)}{h}+\alpha y(t)=\beta \Longrightarrow \frac{y_{k+1}-y_k}{h}+\alpha y_k=\beta \Longleftrightarrow y_{k+1}=\beta h-\alpha y_k+y_k \Longleftrightarrow y_{k+1}=\beta h+y_k(1-\alpha)$$

Équation 2

On pose $y_0(t)=\theta(t)$ et $y_1(t)=\dot{\theta}(t)=y_0'(t)$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} y_0'(t)=y_1(t) \\ y_1'(t)+\dfrac{g}{l}\sin y_0(t)=0 \end{array}\right.$$

Par ailleurs, $y_0(t)=0$ et $y_1(t)=0$.

En discrétisant, on a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_{0,k+1}-y_{0,k}}{h}=y_{1,k} \\ \dfrac{y_{1,k+1}-y_{1,k}}{h}+\dfrac{g}{l}\sin y_{0,k}=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_{0,k+1}=h\,y_{1,k}+y_{0,k} \\ y_{1,k+1}=-h\dfrac{g}{l}\sin y_{0,k}+y_{1,k} \end{array}\right.$$

Résolution d'une équation du premier ordre [1]

La population d'un corps radioactif évolue suivant la loi de désintégration $\dfrac{dN(t)}{dt}=-\dfrac{N(t)}{\tau}$, où $N(t)$ est le nombre d'atomes à l'instant t et τ le temps caractéristique de désintégration du corps considéré. Résolvons numériquement cette équation avec $\tau=1$ et $N(t=0)=1$.

1. http://python.physique.free.fr/outils_math.html

Question 1 *Donner la solution analytique de cette équation.*

$$y(t) = e^{-t}$$

Question 2 *Donner la suite permettant de déterminer la solution numérique de cette équation en utilisant un schéma d'Euler explicite.*

On a $\dfrac{dN}{dt} \simeq \dfrac{N_{k+1} - N_k}{h}$. En conséquences,

$$\frac{N_{k+1} - N_k}{h} = -\frac{N_k}{\tau} \Longleftrightarrow N_{k+1} = -\frac{hN_k}{\tau} + N_k \Longleftrightarrow N_{k+1} = N_k\left(1 - \frac{h}{\tau}\right)$$

Question 3 *Donner la suite permettant de déterminer la solution numérique de cette équation en utilisant un schéma d'Euler implicite.*

On a $\dfrac{dN}{dt} \simeq \dfrac{N_k - N_{k-1}}{h}$. En conséquences,

$$\frac{N_k - N_{k-1}}{h} = -\frac{N_k}{\tau} \Longleftrightarrow N_k - N_{k-1} = -h\frac{N_k}{\tau} \Longleftrightarrow N_k\left(1 + \frac{h}{\tau}\right) = N_{k-1} \Longleftrightarrow N_k\frac{\tau + h}{\tau} = N_{k-1} \Longleftrightarrow N_k = N_{k-1}\frac{\tau}{\tau + h}$$

Question 4 *Donner le code Python permettant de tracer le solution analytique et la solution numérique.*

Résolution d'une équation du second ordre

On cherche à résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Question 1 *Donner la suite permettant de déterminer la solution numérique de cette équation en utilisant un schéma d'Euler explicite.* On pose $x_0(t) = x(t)$ et $x_1(t) = \dot{x}(t)$. On a alors $\ddot{x}(t) \simeq \dfrac{x_{1,k+1} - x_{1,k}}{h}$. En conséquence,

$$\left\{\begin{array}{l} x_{1,k} = \dfrac{x_{0,k+1} - x_{0,k}}{h} \\ \dfrac{x_{1,k+1} - x_{1,k}}{h} + \dfrac{\omega_0}{Q}x_{1,k} + \omega_0^2 x_{0,k} = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{0,k+1} = k\,x_{1,k} + x_{0,k} \\ x_{1,k+1} = x_{1,k} - \dfrac{h\omega_0}{Q}x_{1,k} - h\omega_0^2 x_{0,k} \end{array}\right.$$

Question 2 *Donner le code Python permettant de tracer la solution numérique.*