CI 3 : INGÉNIERIE NUMÉRIQUE & SIMULATION

TP – ÉTUDE D'UN PENDULE SIMPLE ET D'UNE CANALISATION D'EAU

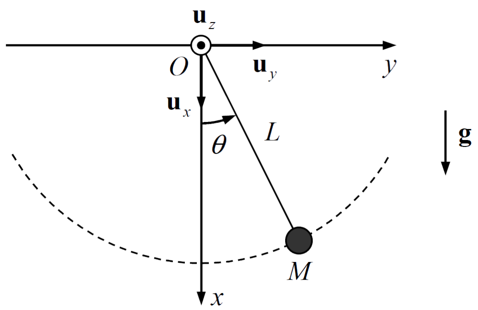
Exercice 1 – Période propre d'un pendule – Difficulté ⋆⋆⋆

On se propose de déterminer la période T d'un pendule simple en mettant en œuvre une méthode d'intégration numérique.

Remarque

Dans toute la suite, les questions 1 à 6 seront abordées dans le cadre des travaux dirigés de sciences physiques. Elles permettent de comprendre l'intérêt de la mise en oeuvre d'une méthode numérique. Seules les questions 7 à 11 font l'objet de ce TP d'informatique.

Un pendule simple est constitué d'une masselotte M considérée comme ponctuelle et de masse m attachée à une tige de longueur L et de masse nulle pouvant osciller librement dans le plan vertical $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. La position de la masselotte est repérée à l'instant t par l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM})$. À l'instant initial $t = 0$, on écarte la masselotte de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 ($0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$) et on la lâche sans vitesse initiale. Le référentiel terrestre $\mathscr{R}_0(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}, t)$ d'étude est supposé galiléen.



On donne $L = 1\ m$ et l'accélération de la pesanteur $g = 9,81\ m \cdot s^{-2}$.

Question 1

Montrer que l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m(M/\mathscr{R}_0)$ de la masselotte peut s'écrire indifféremment :

$$\mathscr{E}_m(M/\mathscr{R}_0) = \frac{1}{2} m \left(L\dot{\theta}\right)^2 - mgL\cos\theta + \text{cte} \quad \text{ou} \quad \mathscr{E}_m(M/\mathscr{R}_0) = -mgL\cos\theta + \text{cte} \tag{1}$$

Question 2

En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de la masselotte (sous la forme d'une équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle $\theta(t)$).

Question 3

On envisage des mouvements de faible amplitude ($|\theta(t)| << 1$). Montrer que l'équation du mouvement de la masselotte est celle d'un oscillateur harmonique non amorti dont la période propre s'écrit $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$. Application numérique. Calculer T_0.

On envisage maintenant des mouvements de grande amplitude ($|\theta(t)| >> 1$).

Question 4

Montrer, à partir de l'équation (1), que la période T des oscillations de la masselotte est telle que :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Question 5

En utilisant la relation de trigonométrie $\cos u = 1 - 2\sin^2(u/2)$ *montrer que :*

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

Question 6

En posant $k = \sin(\theta_0/2)$ et en effectuant le changement de variable $\sin(\theta/2) = k\sin\varphi$ montrer que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Question 7

Écrire une fonction Python, appelée Periode, prenant en paramètres la période propre T_0 du pendule (exprimée en seconde), l'angle θ_0 (exprimé en degré) et le nom de la méthode d'intégration (sous la forme d'une chaîne de caractères du type "rectangle à gauche", "rectangle à droite", "trapèze") et retournant la période T du pendule (exprimée en seconde).

Question 8

Écrire une fonction, appelée EcartRelatif, prenant en paramètres la période propre T_0 et la période T du pendule et retournant l'écart relatif $\varepsilon_{\%}$ (exprimé en %) entre T et T_0. On rappelle que :

$$\varepsilon_{\%} = 100 \times \left|\frac{T-T_0}{T_0}\right|$$

Question 9

Écrire un programme Python permettant de créer trois listes nommées ListeAngle, ListePeriode et ListeEcartRelatif contenant respectivement :

- *les valeurs de l'angle θ_0 pour θ_0 variant par pas de 1^o dans l'intervalle $[1^o; 90^o]$;*
- *les valeurs correspondantes de la période T ;*
- *les valeurs correspondantes de l'écart relatif $\varepsilon_{\%}$.*

Question 10

Écrire une fonction Python, appelée EcartRelatifMax, prenant en paramètre un nombre, appelé PourcentageMax, exprimée en %, permettant de connaitre les valeurs de l'angle θ_0 telles que l'écart relatif entre T et T_0 soit toujours strictement inférieur à PourcentageMax. En déduire pour quelles valeurs de θ_0 cet écart relatif est toujours inférieur à 1%.

Question 11

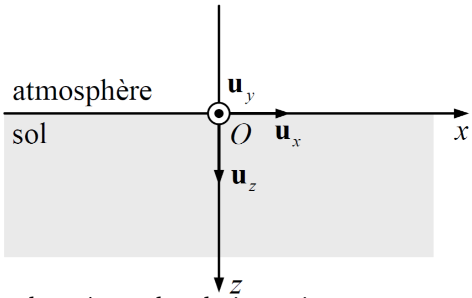
Écrire un programme Python permettant de créer un fichier texte nommé FichierDonnees.txt (ce fichier sera stocké dans votre répertoire), dans lequel seront stockées les valeurs de l'angle θ_0 et les valeurs correspondantes de T et $\varepsilon_{\%}$. Chaque triplet $(\theta_0, T, \varepsilon_{\%})$ sera affiché sur une seule ligne, les éléments du triplet étant séparés par cinq espaces. Le fichier attendu est donc celui représenté ci-dessous :

```
35     2.05398     2.39
36     2.05682     2.53
37     2.05975     2.68
```

Exercice 2 : Mise hors gel des canalisations d'eau (temps : 45 min – difficulté : ⋆⋆)

La température dans le sol terrestre étant initialement constante, égale à 5°C , on cherche à déterminer à quelle profondeur minimale il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de sa surface à -15°C n'entraine pas le gel de cette canalisation après 10 jours.

Les hypothèses sont les suivantes :
- la température en un point quelconque du sol et de sa surface à tout instant $t < 0$ est constante et égale à $T_0 = 278\ K$ ($\theta_0 = 5^o C$) ;
- la température à la surface du sol, confondue avec le plan d'équation $z = 0$, passe brutalement à l'instant $t = 0$, de $T_0 = 278\ K$ à $T_1 = 258\ K$ ($\theta_1 = -15^o C$) et se maintient à cette valeur pendant t_f =10 jours.



On peut montrer que la température $T(z,t)$ à la profondeur z et à l'instant t est donnée par la relation suivante :

$$T(z,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

où erf(x) désigne la fonction définie par :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

Données numériques : $D = 2,8 \cdot 10^{-7}\ m^2 \cdot s^{-1}$ (diffusivité thermique du sol terrestre).

Question 1

Écrire une fonction Python, appelée erf, prenant en paramètre un nombre réel positif ou nul x et retournant la valeur de erf(x).

Question 2

Écrire une fonction Python, appelée Temperature, prenant en paramètre la profondeur z (exprimée en m) et le temps t (exprimé en s) et retournant la valeur de la température $T(z,t)$.

Question 3

Écrire un programme Python permettant de créer une liste, nommée ListeErreur, contenant les valeurs de la fonction erf(x) pour x variant par pas de 0,05 dans l'intervalle $[0;2]$.

Question 4

En déduire, à 1 cm près, à quelle profondeur minimale z_{min} il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de la surface du sol de 5°C à -15 °C n'entraine pas le gel de cette canalisation au bout de 10 jours.