

# CI 3 : INGÉNIERIE NUMÉRIQUE & SIMULATION

## CHAPITRE 3 – RÉOLUTION DES ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES

Savoir

Problème dynamique à une dimension, linéaire ou non, conduisant à la résolution approchée d'une équation différentielle ordinaire par la méthode d'Euler.

1	Présentation	1
1.1	Contexte	1
1.2	Première approche – Schéma d'Euler	2
2	Contexte mathématique	4
2.1	Problème de Cauchy	4
2.2	Existence et unicité de la solution	4
2.3	Résolution numérique	4
2.4	Convergence de la méthode à pas séparés	5
2.5	Notion d'erreur	5
3	Méthodes d'Euler	5
3.1	Description	5
3.2	Méthode d'Euler explicite	6
3.3	Méthode d'Euler implicite	9
4	Réduction de l'ordre d'une équation différentielle	12

## 1 Présentation

### 1.1 Contexte

Définition

#### Équation différentielle ordinaire – EDO

Soit  $I$  un intervalle compact (*ie.* fermé et borné) non vide.  $I \in \mathbb{R}$ .

Soit  $f$  une application continue telle que :

$$(t, x) \in I \times \mathbb{R}^m \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^m$$

On définit une équation différentielle ordinaire par :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Soit  $t \in I \rightarrow y(t) \in \mathbb{R}^m$  une fonction continue. Cette fonction est solution globale de l'équation si elle vérifie l'EDO.

Remarque

Dans notre cas, on se limitera aux équations à 1 dimension ( $m = 1$ ).

Équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants.

$$y'(t) = a y(t) \quad a \in \mathbb{R}$$

Équation différentielle régissant le mouvement d'un pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Équation différentielle régissant le mouvement d'un moteur à courant continu (lorsque l'inductance et les frottements visqueux sont négligés) :

$$\frac{RJ}{K_t K_e} \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{K_e} u(t)$$

avec  $R$ ,  $K_e$ ,  $K_t$  constantes électriques du moteur (résistance de l'induit, constante de force contre électromotrice et constante de couple). On note pour la suite :

$$\tau \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \omega_c u(t)$$

Exemple

Pour certains types d'équations différentielles, il est possible de déterminer une solution analytique. Pour d'autres, le problème peut s'avérer plus difficile.

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t)$$

où  $y^{(i)}$  désigne la  $i$ ème dérivée de  $y$  et où les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont des nombres réels. Pour cette «famille» d'équations différentielles, il existe une solution analytique (que l'on peut par exemple déterminer en passant par le domaine de Laplace). Le problème est alors de déterminer les pôles de la fonction de transfert.

Exemple

La résolution numérique des équations différentielles a pour but d'approximer le solution d'une équation différentielle dont on a pas de solution analytique.

## 1.2 Première approche – Schéma d'Euler

Supposons que l'on cherche à approximer la solution d'une équation différentielle suivante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

On va alors définir un pas de temps  $h > 0$  qui va permettre de discrétiser l'intervalle initial. On va alors chercher à résoudre l'équation différentielle à chaque instant  $t$  tel que  $t = nh$  pour  $n = 1, 2, \dots$ . À chaque instant on a donc :

$$y'(nh) = f(nh, y(nh))$$

Dans une certaine mesure,  $y'$  peut être approximé par :

$$y'(nh) \simeq \frac{y((n+1)h) - y(nh)}{h}$$

En introduisant la suite numérique  $y_n$  définie par récurrence, on peut donc réécrire le problème ainsi :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(nh, y_n)$$

Reprenons l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \omega_c u(t)$$

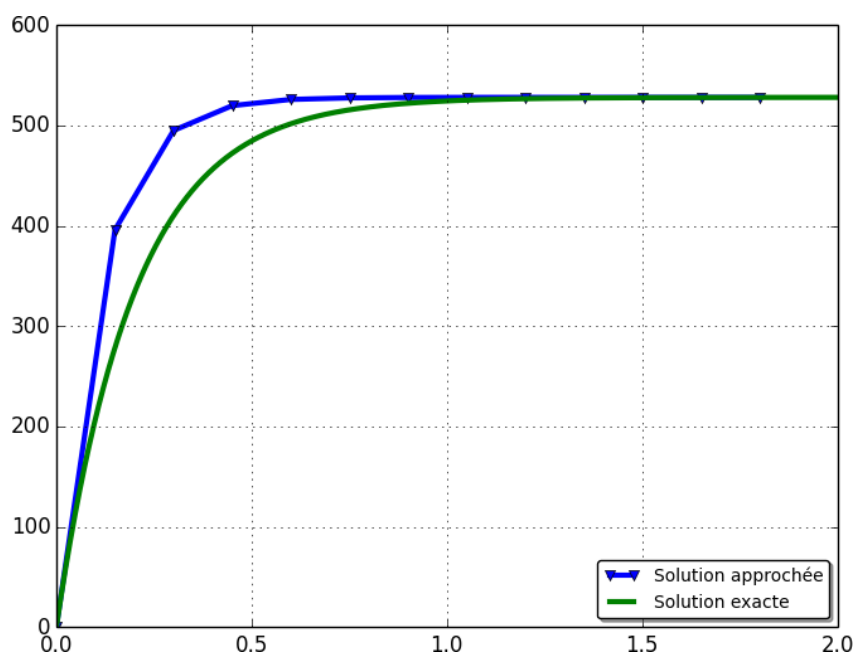
Il est donc possible d'approximer  $\omega(t)$  en recherchant  $\omega_n$  défini par récurrence de la manière suivante :

$$\tau \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{h} + \omega_n = \omega_c u_n \iff \omega_{n+1} = \frac{h\omega_c}{\tau} u_n + \omega_n \left(1 - \frac{h}{\tau}\right)$$

En fixant les conditions initiales du problème et en définissant  $u_n$ , on peut donc approximer une solution de l'équation différentielle. Par exemple, prenons  $\tau = 0,2$  et  $\omega_c = 528 \text{ rad/s}$ .

Par ailleurs, la solution exacte de l'équation différentielle est de la forme  $\omega(t) = \omega_c \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

Exemple



Remarque

- Dans cet exemple, en diminuant le pas de calcul, il est possible d’avoir une meilleure approximation de la solution.
- Dans cet exemple, on pourrait montrer que  $\omega_n$  tend vers  $\omega(t)$  lorsque  $h$  tend vers 0.

## 2 Contexte mathématique

### 2.1 Problème de Cauchy

Problématique

Le problème consiste à trouver les fonctions  $y$  de  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \text{ avec } t_0 \in [0, T] \text{ et } y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnés}$$

On verra que la plupart des systèmes d’équations différentielles peuvent se mettre sous la forme d’un système d’équations différentielles du premier ordre.

### 2.2 Existence et unicité de la solution

Définition

#### Fonction lipschitzienne

$f$  est lipschitzienne en  $y$  s’il existe un réel  $k > 0$  tel que  $\forall y \in \mathbb{R}^n, \forall z \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]$ , alors

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|$$

Théorème

#### Théorème de Cauchy – Lipschitz

Soit  $f$  une fonction de  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et lipschitzienne en  $y$ .

Alors,  $\forall t_0 \in [0, T]$  et  $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$ , le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur  $[0, T]$ .

On considérera dans ce cours que  $f$  est toujours lipschitzienne et que les conditions du théorème de Cauchy – Lipschitz sont remplies.

En d’autres termes, on peut dire que les variations de  $f$  restent bornées par un réel strictement positif  $k$ .

### 2.3 Résolution numérique

On pose  $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ .

Pour résoudre l’équation sur  $[0, T]$  on commence par discrétiser l’intervalle. Dans le cas d’une discrétisation en  $n$  pas constants d’amplitude  $h$  on a alors  $t_0 = 0, t_1 = h, \dots, t_n = n \cdot h$ .

En intégrant l'équation différentielle sur un intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , on a :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \iff y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

Cette relation de récurrence peut être écrite en connaissant un seul état du système. On parle de méthode à **pas séparé**.

On note  $\varphi(y, t, h) = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$ .

$y_n$  est une approximation de  $y(t_n)$ . Il faut donc s'assurer que l'approximation converge vers la solution.

## 2.4 Convergence de la méthode à pas séparés

Pour s'assurer que  $y_n$  converge vers  $y(t_n)$  lorsque le pas d'intégration tend vers 0, il faut que la méthode numérique réunisse deux conditions :

- la condition de consistance ;
- la condition de stabilité.

Ces conditions seront ici considérées comme étant réalisées.

## 2.5 Notion d'erreur

La notion d'erreur étant étroitement liée à la notion d'approximation, on définit 2 types d'erreurs lorsqu'on approxime la solution d'une équation différentielle.

Définition

**Erreur locale** –  $e^{\text{loc}} = y(t+h) - y(t) - h\varphi(y, t, h)$  : erreur commise en faisant un pas de la méthode partant de la solution exacte.

**Erreur cumulée** –  $e^{\text{cumu}} = y(t_n) - y_n$  : erreur commise par accumulation depuis l'abscisse initiale.

# 3 Méthodes d'Euler

## 3.1 Description

Pour la méthode d'Euler, la fonction  $\varphi$  équivaut à la fonction  $f$  :

$$y_{k+1} = y_k + hf(y, t)$$

Comme  $\varphi(y, t, h) = f(y, t)$ , la condition de consistance est donc vérifiée. Le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction  $y$  au temps  $t_k$  donne :

$$y(t_k + h) = y(t_k) + h \frac{dy(t_k)}{dt} + o(h) = y(t_k) + hf(y, t) + o(h)$$

Résultat

On approxime donc  $\frac{dy(t_k)}{dt}$  par

$$\frac{dy(t_k)}{dt} \simeq \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h}$$

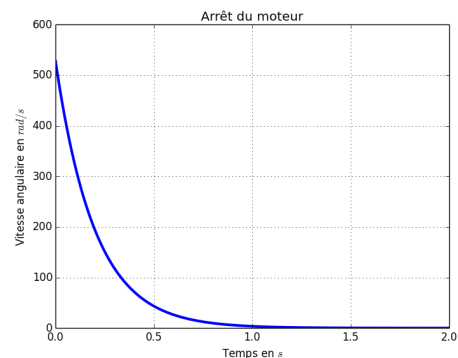
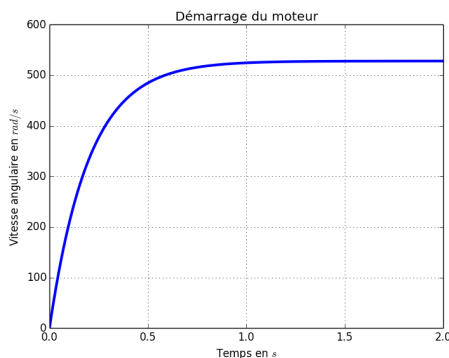
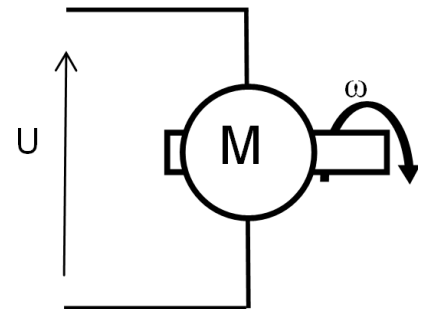
La méthode d'Euler est une méthode d'ordre 1. Une interprétation graphique de cette méthode est de calculer la tangente de la courbe et d'avancer linéairement sur cette tangente. Il reste donc à choisir le couple  $(y, t)$  pour déterminer si la méthode est explicite ou implicite.

Pour présenter les performances des méthodes d'Euler à une dimension, nous étudierons le moteur à courant continu.

On note  $\omega_c = 528 \text{ rad/s}$  la vitesse angulaire de consigne proportionnelle à la tension d'alimentation  $U$ , et  $\tau = 0,2 \text{ s}$  la constante de temps.

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{\omega_c - \omega(t)}{\tau} \quad \text{et} \quad \omega(0) = \omega_0$$

On étudie le démarrage ( $\omega_0 = 0$ ) et l'arrêt ( $U = 0$  et  $\omega_0 = \omega_c$ ).



C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la solution analytique est connue, ce qui permet de comparer la solution approchée à la solution exacte :

– au démarrage :  $\omega(t) = \omega_c \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$  ;

– à l'arrêt :  $\omega(t) = \omega_c e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

### 3.2 Méthode d'Euler explicite

La relation de récurrence s'écrit :  $y_{k+1} = y_k + h f(y_k, t_k)$

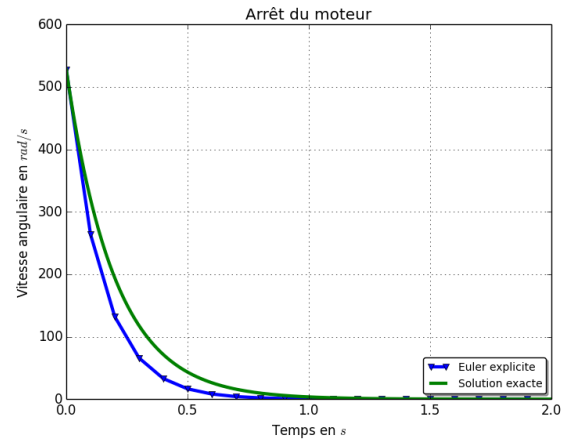
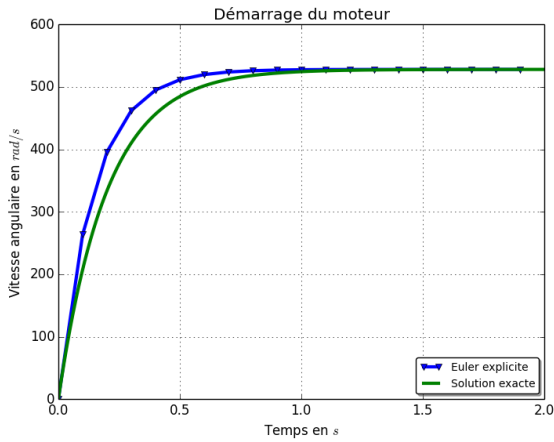
Appliquons cette méthode à notre cas d'étude de cas :

$$\omega_{k+1} = \omega_k + h \frac{\omega_c - \omega_k}{\tau}$$

D'où :

$$\omega_{k+1} = \omega_k \left(1 - \frac{h}{\tau}\right) + \omega_c \frac{h}{\tau} \quad \omega_k = \omega_0 \left(1 - \frac{h}{\tau}\right)^k + \omega_c \left(1 - \left(1 - \frac{h}{\tau}\right)^k\right)$$

Pour seulement 20 points, regardons ce que donne la méthode d'Euler explicite.



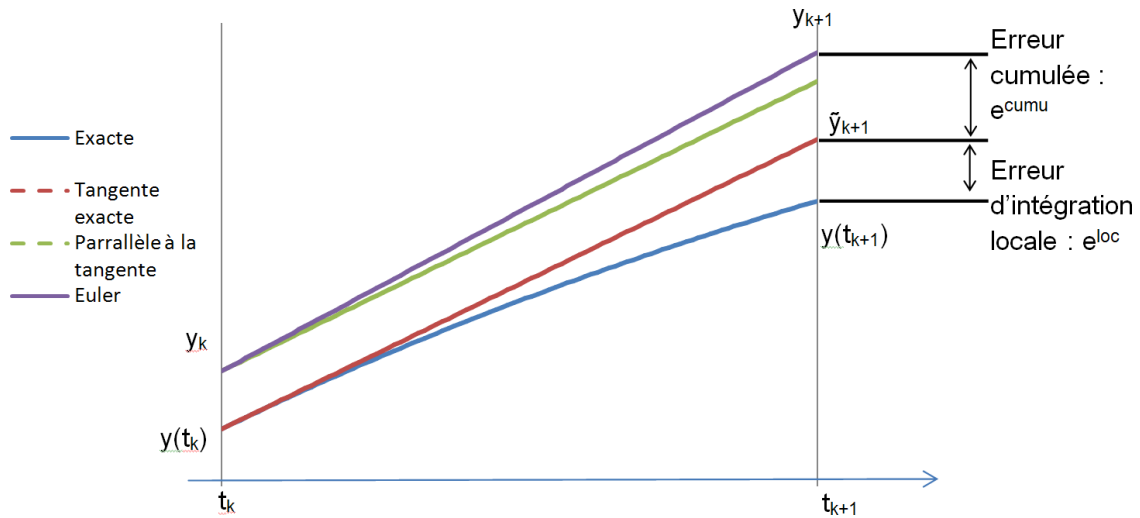
Donner la (ou les) fonctions python permettant de calculer un tableau contenant les  $n$  couples  $[\text{temps}_i, \omega_i]$ .

Exemple

### 3.2.1 Rapidité

La rapidité de la méthode d'Euler explicite ne dépend que des opérations de l'équation de récurrence et du nombre d'itérations souhaitées  $n$ . Ainsi, nous aurons un temps de calcul directement proportionnel au facteur  $n$  (et donc une complexité  $\mathcal{O}(n)$ ).

### 3.2.2 Précision – Calcul d'erreur

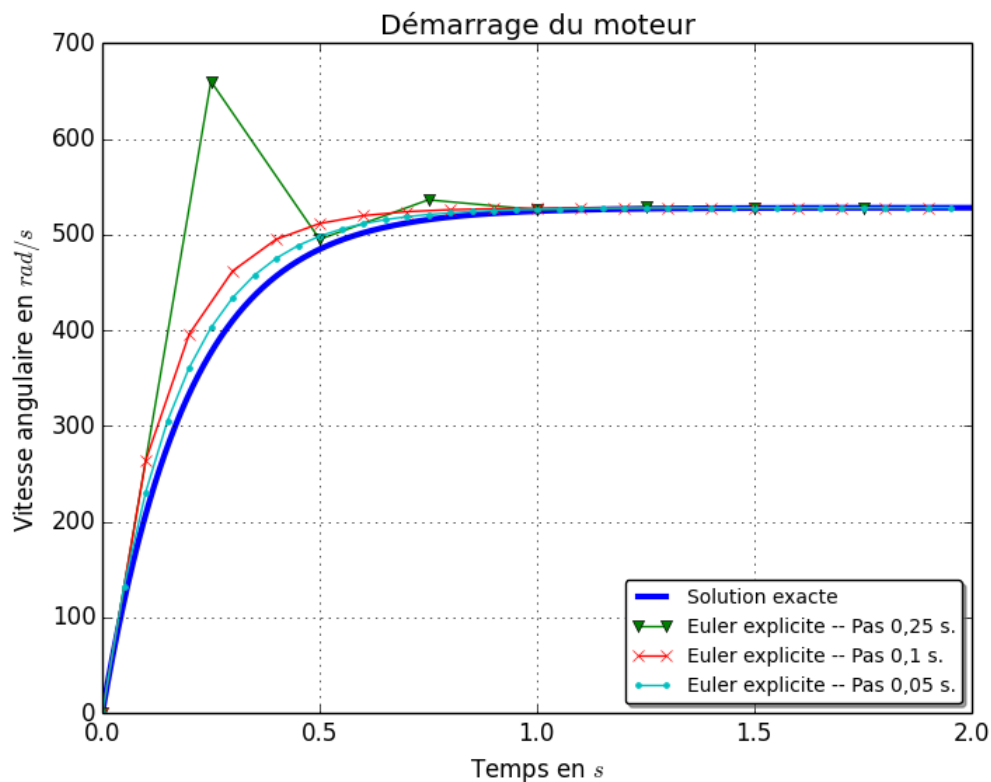


Pour chercher l'erreur commise par la méthode d'Euler il faut effectuer le calcul suivant :

$$e_{k+1} = |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| < |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| + |y_{k+1} - \tilde{y}_{k+1}|$$

$$e_{k+1} < e_{k+1}^{loc} + e_{k+1}^{cumu}$$

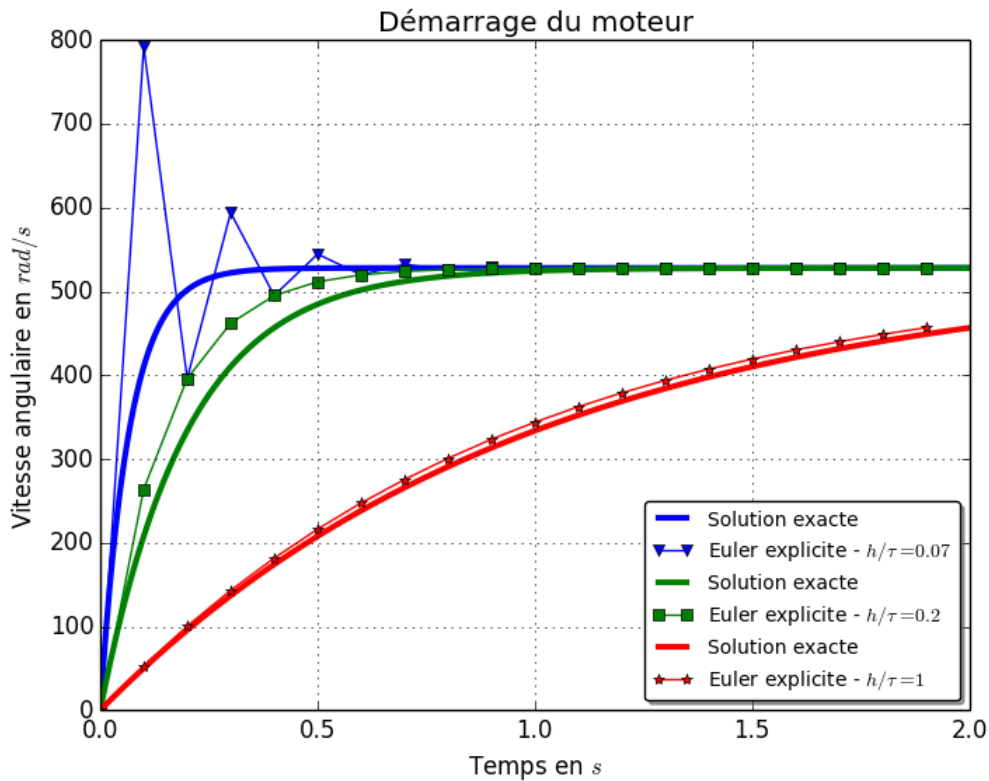
Influence du pas de temps  $h = T/n$  sur la précision



On remarque dans cet exemple que l'erreur diminue avec l'augmentation du pas et que le schéma explicite donne une approximation plus grande que la réalité, pour le cas du démarrage (et plus petite dans le cas de l'arrêt du moteur).



### 3.2.3 Stabilité – Influence du paramètre $\frac{h}{\tau}$



On remarque que le pas de temps  $h$  doit être en adéquation avec la constante de temps  $\tau$ . Pour la valeur de 0,07, le schéma d'intégration oscille autour de la solution exacte et pour une valeur de 0,05 le schéma n'est pas stable :

$$\omega_k = \omega_c \left[ 1 - \left( 1 - \frac{h}{\tau} \right)^k \right] = \omega_c [(1 - (-1))^k] = 2 \text{ ou } \omega_c \text{ pour } \tau = \frac{h}{2} = 0,05$$

Au-delà de cette valeur la suite diverge.

En conclusion, le pas de temps d'un schéma explicite doit être choisi suffisamment petit devant les constantes de temps de l'équation différentielle pour éviter des instabilités numériques.

### 3.3 Méthode d'Euler implicite

Résultat

La relation de récurrence s'écrit :

$$y_{k+1} = y_k + h f(y_{k+1}, t_k)$$

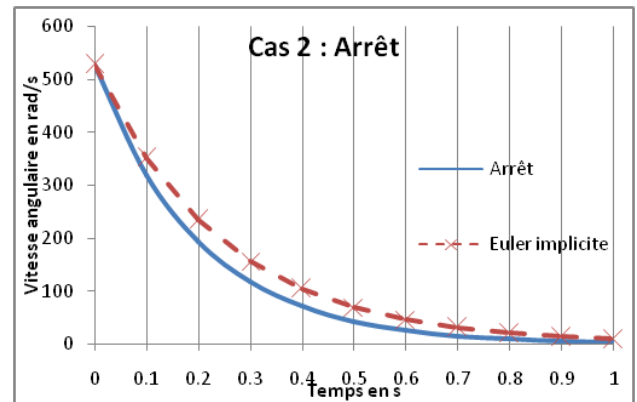
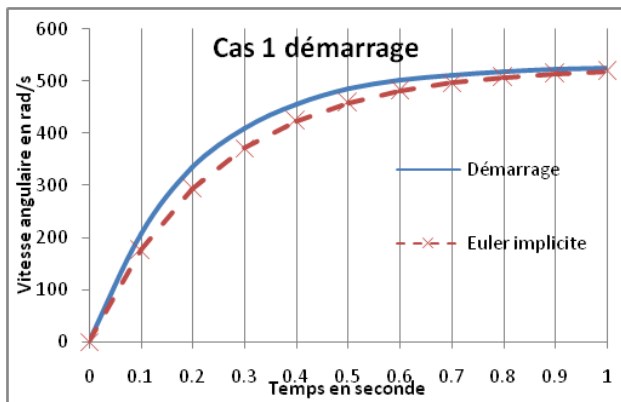
Appliquons cette méthode à notre étude de cas :

$$\omega_{c_{k+1}} = \omega_{c_k} + h \frac{\omega_c - \omega_{c_{k+1}}}{\tau}$$

Il faut donc résoudre une équation afin de déterminer  $\omega_{c_{k+1}}$ . Dans notre étude de cas, la résolution est aisée et on obtient :

$$\omega_{c_{k+1}} = \frac{\omega_{c_k}}{1 + \frac{h}{\tau}} + \omega_c \frac{\frac{h}{\tau}}{1 + \frac{h}{\tau}}$$

D'où :



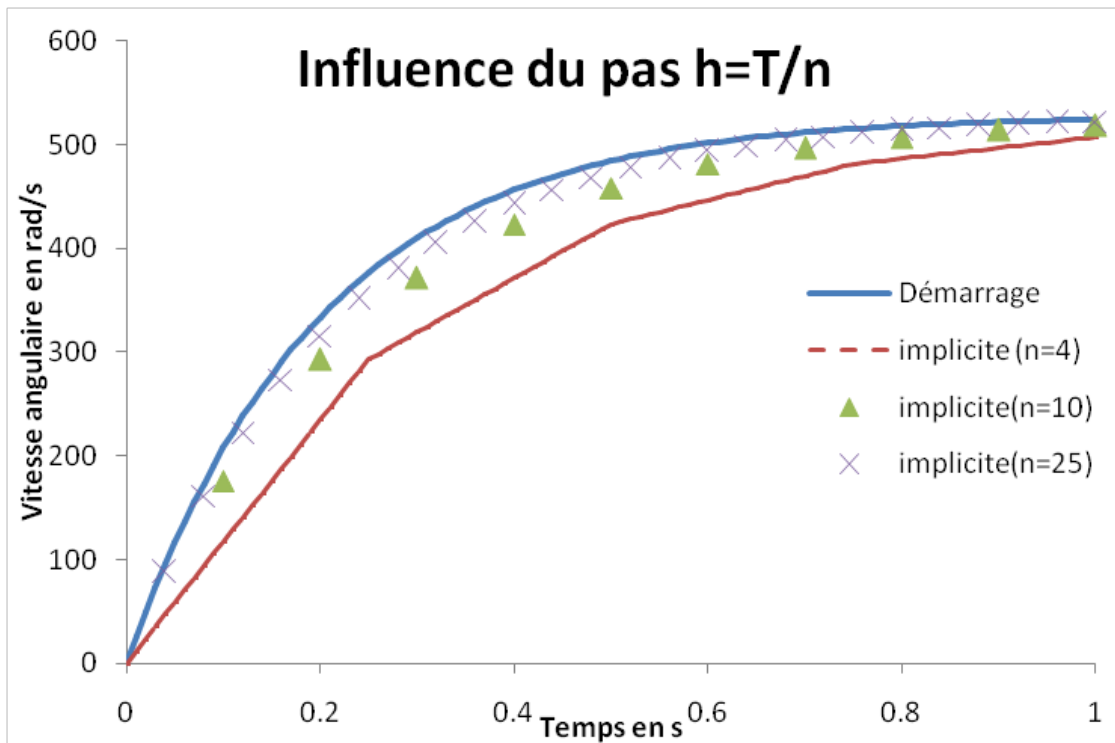
### 3.3.1 Rapidité

Ici, on remarque tout de suite qu'il faut résoudre une équation non linéaire du type (voir cours précédent) :  $g(y_{k+1}, y_k) = 0$ .

La rapidité dépendra donc de la méthode numérique de résolution de cette équation à chaque itération. Dans le cas où cette équation est particulièrement longue à résoudre, alors la méthode implicite est beaucoup plus lente que la méthode explicite.

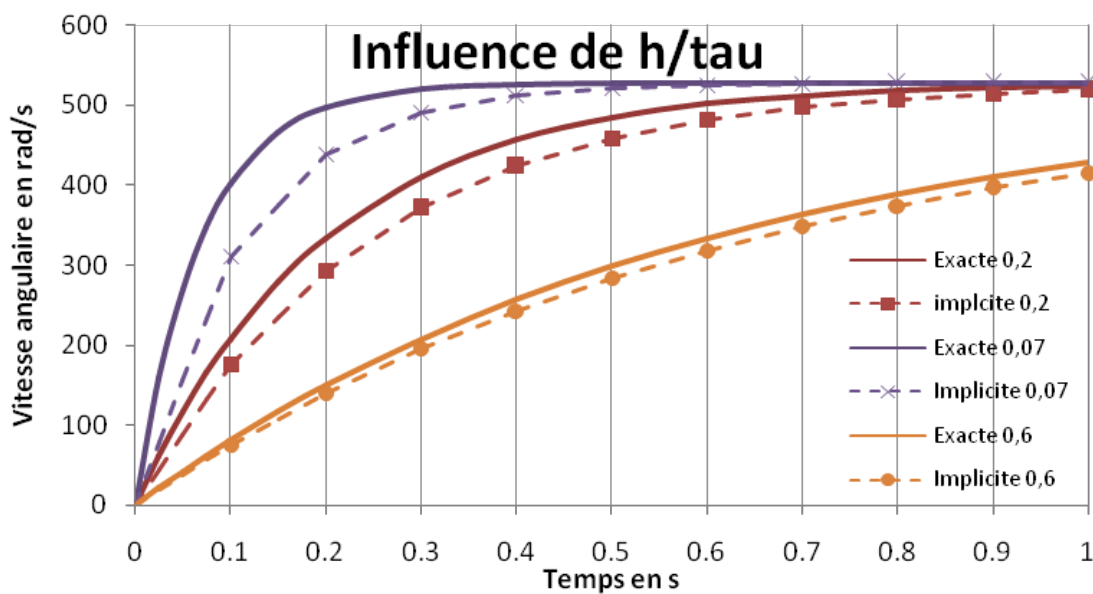
Dans notre cas, la résolution n'est pas faite par la machine ; la rapidité sera donc du même ordre de grandeur que celle du schéma explicite.

### 3.3.2 Précision – Calcul d'erreur



On note ici que le schéma implicite donne toujours une valeur plus petite que la valeur exacte dans le cas du démarrage.

### 3.3.3 Stabilité – Influence du paramètre $\frac{h}{\tau}$

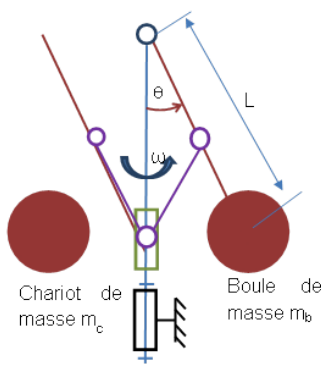


Seule la constante de temps change, sur le graphique, on remarque que le schéma n'oscille pas autour de la solution exacte malgré  $h > \tau$ .

$$\omega_{c_k} = \frac{\omega_{c_0}}{\left(1 + \frac{h}{\tau}\right)^k} + \omega_c \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{\tau}\right)^k} \right]$$

La suite  $\omega_{c_k}$  converge quel que soit le pas de temps  $h$  choisi. Par contre, plus la constante de temps  $\tau$  diminue, moins le schéma est précis. En effet, l'augmentation de la raideur (forte variation de la dérivée) engendre des erreurs importantes. En conclusion, le schéma implicite est beaucoup plus stable que le schéma explicite au détriment de la rapidité (résolution numérique d'une équation).

## 4 Réduction de l'ordre d'une équation différentielle



Nous avons vu que le problème de Cauchy peut être généralisé à plusieurs dimensions. À partir de ce constat, il est possible de transposer, tous les systèmes d'équations différentielles en un problème de Cauchy généralisé. L'idée est donc de réduire l'ordre de l'équation différentielle en augmentant la dimension du problème. Pour illustrer ce propos prenons les équations dynamiques du régulateur de Watt : L'équation de dynamique peut s'écrire :

$$(J + m_c a^2 \sin^2 \theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} (m_c a^2 \dot{\theta}^2 + m_b L^2 \omega_c^2) \sin 2\theta + C(t) = 0$$

Où  $J$  est un moment d'inertie,  $a$  une longueur caractéristique et  $C$  un couple.

Cette équation dynamique est non linéaire, elle peut s'écrire sous la forme :  $\ddot{\theta} = f(\dot{\theta}, \theta, t)$ . Posons alors le vecteur d'état  $\vec{Y}$  tel que  $\vec{Y} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . Le système d'équation devient alors :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} = - \frac{((m_c a^2 \dot{\theta}^2 + m_b L^2 \omega_c^2) \sin 2\theta + C(t))}{2(J + m_c a^2 \sin^2 \theta)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dt} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = - \frac{((m_c a^2 y_1^2 + m_b L^2 \omega_c^2) \sin 2y_2 + C(t))}{2(J + m_c a^2 \sin^2 y_2)} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(\vec{Y}, t)$$

En conclusion, les équations différentielles d'ordre  $n$  se ramènent à un système d'équations différentielles d'ordre 1 dont la variable est un vecteur caractérisant l'état du système. En automatique, ce type de méthode est souvent utilisé et est appelé la représentation d'état.

## Références

- [1] Sylvie Delabrière, Équations différentielles, méthodes de résolution numérique – Approximation numérique des fonctions, des intégrales, des solutions d'équations. Équations différentielles : approximation numérique des solutions.
- [2] Wack et Al., L'informatique pour tous en classes préparatoires aux grandes écoles, Editions Eyrolles.
- [3] Olivier Guindet, Résolution d'un problème dynamique par la méthode d'Euler, UPSTI.
- [4] Alain Caignot, Marc Derumaux, Résolution des équations différentielles, UPSTI.