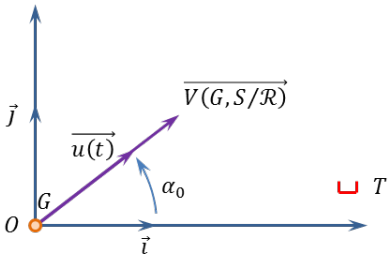
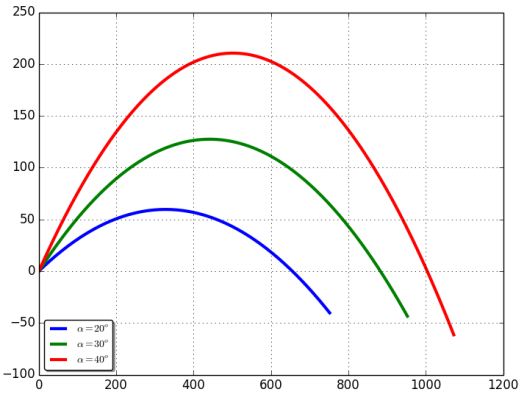
CI 3 : Ingénierie Numérique & Simulation

Chapitre 2 – Problèmes stationnaires
Résolution numérique de l'équation $f(x)=0$





En première approximation, sans prendre en compte le mouvement de rotation de la balle et les divers effets aérodynamiques, quel doit être l'angle à l'impact du club avec la balle et la vitesse initiale de la balle pour que le balle aille directement dans le trou (sans rebond) ?

Savoir

Problème stationnaire à une dimension, linéaire ou non conduisant à la résolution approchée d'une équation algébrique.Méthode de dichotomie, méthode de Newton.

1 Introduction

1.1 Mise en situation

Recherche l'équation paramétrique de la position de la balle de golf.

En modélisant la balle de golf S comme un solide dont la masse m est considérée concentrée en son centre d'inertie G. On considère qu'en première approximation la balle est soumise à son propre poids.En l'isolant et en lui appliquant le théorème de la résultante dynamique, on a :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to\text{balle}}} = m\overrightarrow{\Gamma(G\in S/\mathscr{R})}$$

L'action de pesanteur de la balle est donnée par $\overrightarrow{F_{\text{pesanteur}\to\text{balle}}} = -mg\,\vec{j}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in S/\mathscr{R})} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}\right]_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{bmatrix}_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}}$$

En intégrant successivement $x''(t)$ et $y''(t)$, on a :

$$\begin{cases} x'(t) = V_0\cos\alpha_0 \\ y'(t) = -g\,t + V_0\sin\alpha_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = V_0\cos\alpha_0\ t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + V_0\sin\alpha_0\ t \end{cases}$$

Mise en équation du problème.

On note $\overrightarrow{OT} = x_T\,\vec{i} + y_T\,\vec{j}$ la position du trou T.

A l'instant t_f où la balle atteint sa position, on a :

$$\begin{cases} x_T = V_0\cos\alpha_0\ t_f \\ y_T = -\dfrac{1}{2}g\,t_f^2 + V_0\sin\alpha_0\ t_f \end{cases} \Longrightarrow y_T = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x_T}{V_0\cos\alpha_0}\right)^2 + V_0\sin\alpha_0\ \frac{x_T}{V_0\cos\alpha_0}$$

$$\Longleftrightarrow y_T + \frac{1}{2}g\,\frac{x_T^2}{V_0^2\cos^2\alpha_0} - x_T\tan\alpha_0 = 0$$

Considérant que le golfeur a un swing régulier et que sa vitesse d'impact est constante. On cherche l'angle α_0 qui permettra de choisir le club le mieux adapté.

1.2 Définitions

Définition

Problème stationnaire

On appelle problème stationnaire un problème dont l'énoncé reste invariant au cours du temps.

Définition

Application linéaire

Soit f une application de E dans F, E et F étant deux espaces vectoriels. Soit K un corps commutatif. f est une application linéaire si :

- $\forall x\in E, \forall y\in E,\ f(x+y) = f(x)+f(y)$;
- $\forall \lambda\in K, \forall x\in E,\ f(\lambda x) = \lambda\cdot f(x)$.

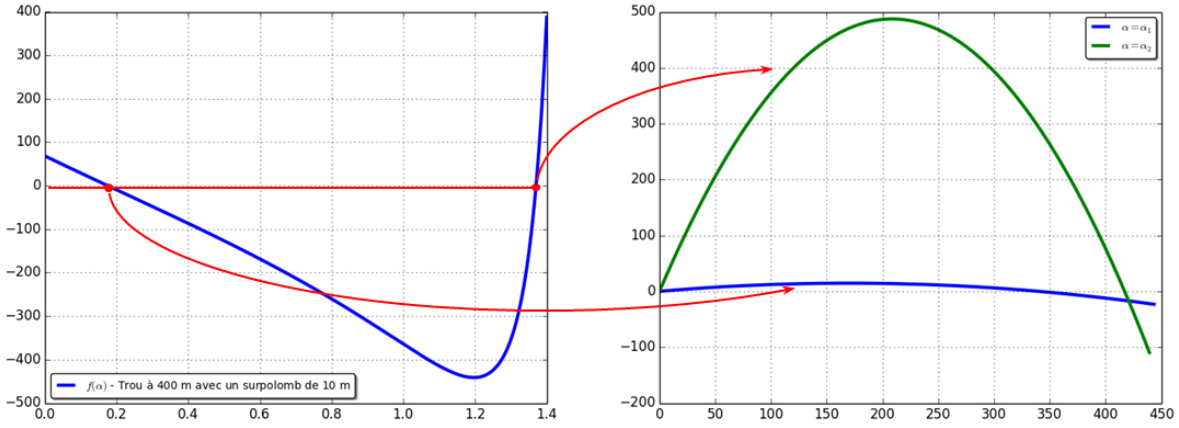
Exemple

Soient a un réel et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f : x \mapsto ax$. f est une application linéaire.

$g : x \mapsto \cos x$ n'est pas une application linéaire.

1.3 Représentation graphique

Afin de résoudre un problème, il est possible d'avoir une représentation de la courbe. Ainsi, en traçant $f(\alpha_0)$ dans le cas du swing de golf, il est possible de répondre au problème en identifiant les points où la courbe sectionne l'axe des abscisses.



Remarque

A priori il n'est pas possible de connaître le nombre de solutions que comporte notre problème. Dans notre cas, deux solutions sont possibles. Dans le cas général, il faudra faire attention

Attention

Il est important de faire attention aux représentations graphiques : selon la discrétisation de la courbe affichée, il est possible que des intersections entre la courbe et l'axe des abscisses n'apparaissent pas alors que mathématiquement ces intersections existent.

1.4 Critères de convergence

Numériquement, il n'est jamais possible de trouver la solution exacte à l'équation. Ainsi, sur un intervalle $[a, b]$, il est impossible de trouver c tel que $f(c) = 0$.

Il sera donc nécessaire de définir un critère de convergence, c'est à dire une valeur ε telle que $|f(c)| < \varepsilon$.

On pourra par exemple prendre ε de l'ordre de 10^{-9}.

2 Méthode de dichotomie

2.1 Principe

Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Pour tout $u \in [f(a), f(b)]$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = u$.

En particulier (Théorème de Bolzano), si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, il existe au moins un réel c tel que $f(c) = 0$.

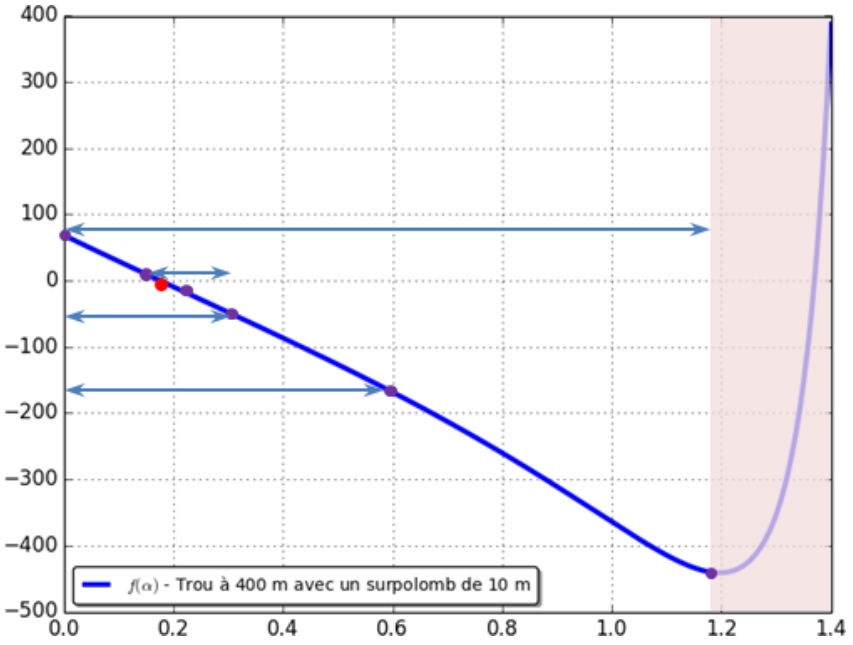
Ainsi, pour une fonction donnée définie sur un intervalle donné, le but de l'algorithme de dichotomie va être de découper en 2 l'intervalle [a,b] en deux, afin d'y trouver la solution. Par divisions successives de l'intervalle, on convergera vers la solution.

Remarque

Tester le signe de $f(a)$ et $f(b)$.

Il existe plusieurs méthodes pour tester si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents. Si on ne se préoccupe pas de savoir la relation d'ordre entre $f(a)$ et $f(b)$, un test efficace consiste en un test du signe de $f(a) \cdot f(b)$.

Interprétation graphique



2.2 Algorithme de dichotomie

L'algorithme de dichotomie est le suivant :

Pseudo Code

Début Fonction
  Données : f, a, b, ε
  $g \leftarrow a$
  $d \leftarrow b$
  $f_g \leftarrow f(g)$
  $f_d \leftarrow f(d)$
  tant que $(d-g) > 2\varepsilon$ **faire**
    $m \leftarrow (g+d)/2$
    $f_m \leftarrow f(m)$
    si $f_g \cdot f_m \leq 0$ **alors**
      $d \leftarrow m$
      $f_d \leftarrow f_m$
    sinon
      $g \leftarrow m$
      $f_d \leftarrow f_m$
    fin
  fin
  retourner $(g+d)/2$
Fin

Exemple

Implémenter cet algorithme en Python

On veillera à vérifier que l'équation comporte initialement au moins une solution. On étudiera, a posteriori, la possibilité d'existence de deux solutions.

2.3 Étude théorique de l'algorithme

2.3.1 Variant de boucle

Montrons que $d-g$ est un variant de boucle.

Tout d'abord, la quantité $d-g$ reste positive tout au long de l'algorithme. En effet, suivant le cas, après une itération, si $d_i - g_i > 0$ on a :
- dans un cas, $d_{i+1} \leftarrow (g_i + d_i)/2$ et $g_{i+1} = g_i$ en conséquence, $d_{i+1} - g_{i+1} = (d_i - g_i)/2 > 0$;
- dans l'autre cas, $g_{i+1} \leftarrow (g_i + d_i)/2$ et $d_{i+1} = d_i$ en conséquence, $d_{i+1} - g_{i+1} = (d_i - g_i)/2 > 0$.

En conséquence, à chaque itération, $d-g$ est toujours positif.

Par ailleurs, la quantité $d-g$ décroit tout au long de l'algorithme. En effet, à chaque itération i, $d-g = \dfrac{b-a}{2^{i-1}}$. Ainsi, il existera un entier i tel que $d-g > 2\varepsilon$.

$d-g$ est donc un variant de boucle.

2.3.2 Invariant de boucle

Montrons que $f(d) \cdot f(g) \leq 0$ est un invariant de boucle.

On rappelle qu'il faut :
1. définir les préconditions (état des variables avant d'entrer dans la boucle) ;
2. définir un invariant de boucle ;
3. prouver que l'invariant de boucle est vrai ;
4. montrer la terminaison du programme ;
5. montrer qu'en sortie de boucle, la condition reste vraie.

2.3.3 Complexité algorithmique

La boucle while s'exécute jusqu'à ce que $\frac{b-a}{2^n} < 2\varepsilon$. En conséquence, la boucle s'exécutera suivant la condition suivante :

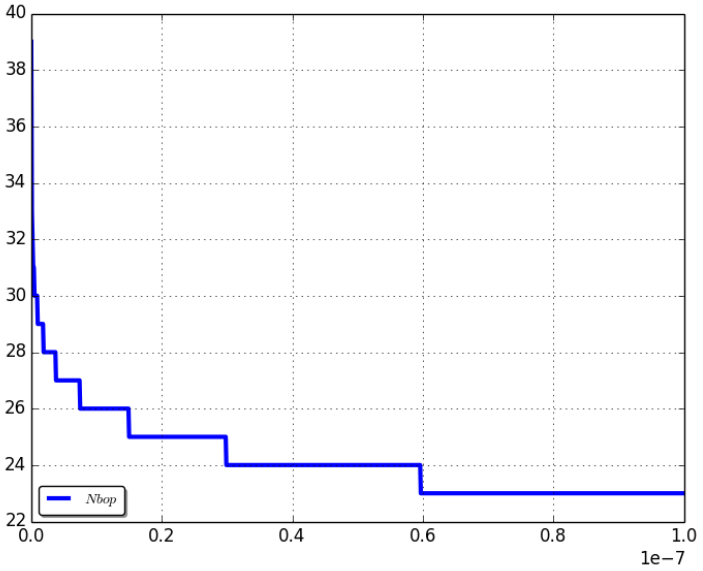
$$\frac{b-a}{2^n} < 2\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{b-a}{2\varepsilon} < 2^n \Longleftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

La complexité de l'algorithme de recherche dichotomique est donc en $\mathcal{O}(log(n))$.

2.4 Application sur l'exemple

Le trou étant d'un diamètre de 108 mm et la balle ayant un diamètre de 42,67 mm. L'erreur admissible sur l'impact de la balle est donc de $((108-42,67)/2)/1000 \simeq 0,032$ m. Dans ce cas, obtenir une erreur inférieure pourrait accroître les calculs sans pour autant apporter une réelle plus value du point de vue du golfeur.

Cependant, on peut tout de même observer le nombre d'opérations en fonction de l'erreur demandée :



2.5 Méthode de Lagrange – Méthode des cordes

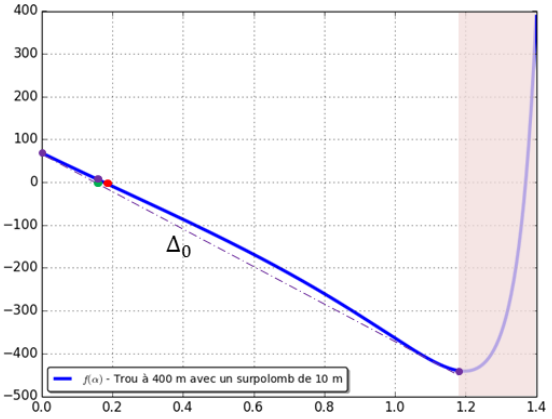
La méthode de Lagrange diffère de la méthode de dichotomie par le fait que l'intervalle n'est pas divisé en 2 parts égales. Dans cette méthode, on cherche c, intersection de l'axe des abscisses et de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

1. Donner une interprétation graphique de cette méthode.
2. Donner l'algorithme permettant de résoudre l'équation $f(x) = 0$ en utilisant la cette méthode.

La droite Δ_i passe par les points $(g_i, f(g_i))$ et $(d_i, f(d_i))$, elle a pour équation $y = a\,x + b$, trouvons l'ordonnée à l'origine et la pente de la droite :

$$\begin{cases} f(g_i) = a\,g_i + b \\ f(d_i) = a\,d_i + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{f(g_i) - b}{g_i} \\ f(d_i) = \dfrac{f(g_i) - b}{g_i}\,d_i + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{f(g_i) - b}{g_i} \\ b = \dfrac{g_i f(d_i) - d_i f(g_i)}{(g_i - d_i)} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{f(g_i)(g_i - d_i) - (g_i f(d_i) - d_i f(g_i))}{g_i(g_i - d_i)} \\ b = \dfrac{g_i f(d_i) - d_i f(g_i)}{(g_i - d_i)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} a = \dfrac{f(g_i) - f(d_i)}{g_i - d_i} \\ b = \dfrac{g_i f(d_i) - d_i f(g_i)}{g_i - d_i} \end{cases}$$

On cherche alors c tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $0 = a\,c + b \iff c = -\dfrac{b}{a}$.

On a donc :

$$c = -\frac{g_i f(d_i) - d_i f(g_i)}{f(g_i) - f(d_i)}$$

L'algorithme est le suivant :

Pseudo Code

Début Fonction
  Données : f, a, b, ε
  $g \leftarrow a$
  $d \leftarrow b$
  $f_g \leftarrow f(g)$
  $f_d \leftarrow f(d)$
  tant que $(d - g) > 2\varepsilon$ **faire**
    $m \leftarrow -\dfrac{g_i f(d_i) - d_i f(g_i)}{f(g_i) - f(d_i)}$
    $f_m \leftarrow f(m)$
    si $f_g \cdot f_m \leq 0$ **alors**
      $d \leftarrow m$
      $f_d \leftarrow f_m$
    sinon
      $g \leftarrow m$
      $f_d \leftarrow f_m$
    fin
  fin
  retourner $(g + d)/2$
Fin

3 Méthode de Newton

3.1 Principe

Théorème

Développement de Taylor à l'ordre 1

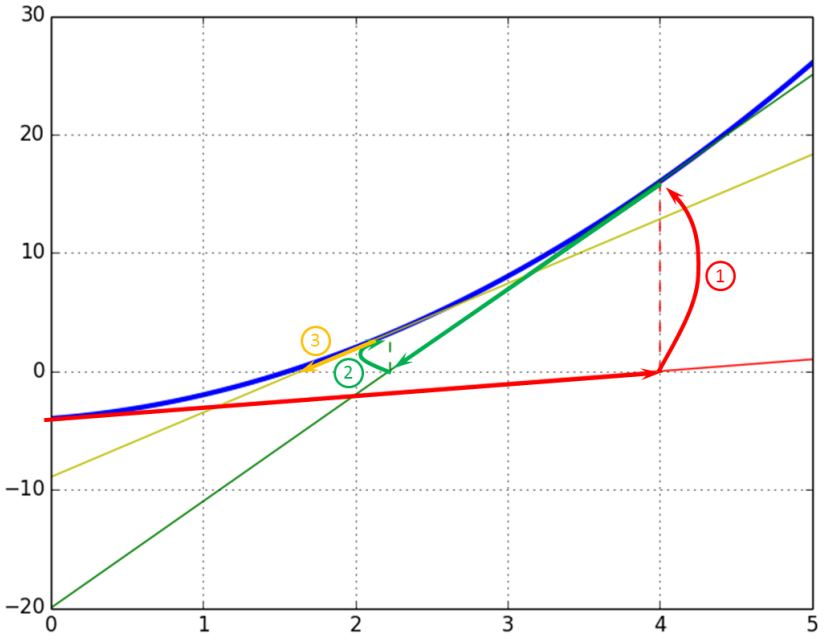
Soit f une fonction C^1 sur un intervalle I et $a \in I$. Le développement de Taylor à l'ordre 1 de f est donné par

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + o(x-a)$$

Géométriquement, lorsqu'on néglige le reste, le développement de Taylor donne l'équation de la tangente en a. Notons $\Delta(x)$ cette équation.

L'abscisse c de l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses est donné par la résolution de

$$\Delta(c) = 0 \iff f(a) + f'(a)\cdot(c-a) = 0 \iff c = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$



3.2 Algorithme de Newton

L'algorithme est le suivant :

Pseudo Code

Début Fonction
  Données : f, f', a, ε
  $g \leftarrow a$
  $c \leftarrow g - \dfrac{f(g)}{f'(g)}$
  tant que $|c-g| > \varepsilon$ **faire**
    $g \leftarrow c$
    $c \leftarrow c - \dfrac{f(c)}{f'(c)}$
  fin
  retourner c
Fin

3.3 Étude théorique de l'algorithme

Il n'est pas aisé de démontrer la terminaison de l'algorithme de Newton. Cela s'explique par le fait que si la dérivée s'annule en un point, la division $\dfrac{f(c)}{f'(c)}$ ne peut plus se calculer. Par ailleurs, suivant le profil de la courbe, il est possible de trouver une valeur de c pour laquelle $|c-g|$ soit inférieure à ε sans que c soit une solution satisfaisante de l'équation $f(c)=0$.

Par ailleurs, dans le cadre cet algorithme, il est nécessaire d'initialiser la résolution du problème ce qui n'est pas toujours aisé.

3.4 Évaluation de la dérivée numérique

3.4.1 Principe

L'algorithme de Newton fait apparaître le besoin de calculer la dérivée de la fonction en un point. Pour cela, deux cas de figures peuvent se présenter :

- ou bien, il est possible de calculer la dérivée de la fonction analytiquement. Dans ce cas, il est possible de programmer directement une fonction permettant d'évaluer la dérivée d'une fonction ;
- ou bien ce calcul de dérivée n'est pas possible. Dans ce cas on a recours à la dérivation numérique.

Résultat

En première approximation, il est possible d'approximer la dérivée en approximant la tangente à la courbe par une droite passant par deux points successifs. Dans ces conditions, pour une valeur de h suffisamment faible, on a :

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

3.4.2 Méthodes à un pas

Résultat

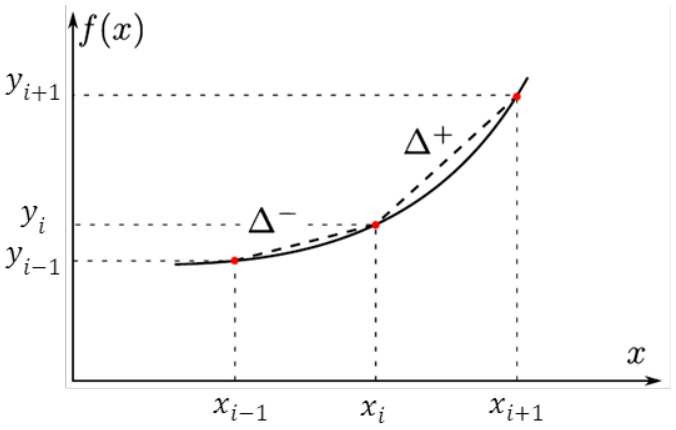
Différence avant – Schéma d'Euler explicite
Dans ce cas, l'estimation de la dérivée au point P_i s'appuie sur le point P_{i+1} :

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Résultat

Différence arrière – Schéma d'Euler implicite
Dans ce cas, l'estimation de la dérivée au point P_i s'appuie sur le point P_{i-1} :

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

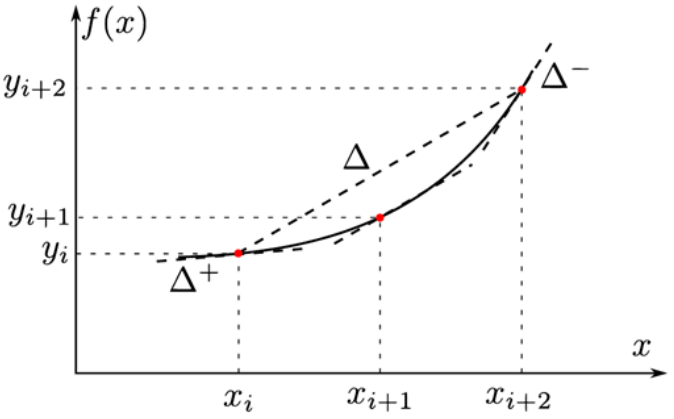


3.4.3 Méthodes à dux pas

Résultat

On peut aussi utiliser les points P_{i-1} et P_{i+1} pour estimer la dérivée en P_i :

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



Remarque

- Lorsqu'il s'agit de dériver une fonction temporelle « en temps réel », le point suivant n'est pas encore connu donc seule la différence arrière peut être calculée.
- Le calcul de la dérivée conduit à un tableau de valeurs de dimension $n-1$.

Références

[1] Germain Gondor, Problèmes stationnaires à une dimension du type $f(x)=0$, Lycée Carnot, Dijon. UPSTI.

[2] Wack et Al., L'informatique pour tous en classes préparatoires aux grandes écoles, Editions Eyrolles.

[3] Pierre Debout, Dérivation numérique.

[4] Marc Derumaux, Damion Iceta, Interpolation, intégration et dérivation numérique, Manipulation de fonctions décrites numériquement, UPSTI.