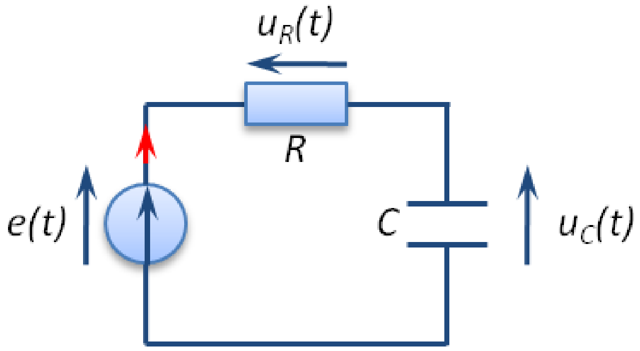
CI 3 : Ingénierie Numérique & Simulation

TP – Résolution d'équations différentielles

Exercice 1 – Circuit RC



Question 1
Montrer que l'équation différentielle régissant la tension aux bornes de lu condensateur peut se mettre sous la forme :

$$\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{u_C(t)}{\tau}=\frac{e(t)}{\tau}$$

avec τ une constante à déterminer.

Le circuit est commandé par un échelon de tension de la forme :

$$\begin{cases} e(t)=E_0 \text{ si t>0} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Question 2
Montrer que l'équation différentielle de la charge d'un condensateur est de la forme :

$$\forall t>0 \quad u_c(t)=E_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Remarque

On prendra :
- $R=20\ k\Omega$;
- $C=10\ nF$.
- $E=5\ V$;
- temps de calcul : $T=5\ ms$;
- pas de calcul pour la solution théorique : $T/1000$;
- pas de calcul pour la solution numérique : de $T/10$ à $T/1000$.

Question 3
En utilisant Spyder, tracer la courbe correspondant à la charge du condensateur.

Connaissant la solution analytique de l'équation différentielle, on va maintenant chercher à tracer la solution numérique.

Question 4
En utilisant le schéma d'Euler explicite, déterminer la suite u_n définie par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Question 5
On souhaite réaliser en Python la fonction solveU permettant de résoudre l'équation différentielle régissant la charge du condensateur. Quels paramètres la fonction doit-elle prendre comme argument ? Programmer la fonction.

Question 6
Tracer sur un même graphe la solution analytique et la solution numérique pour des pas de résolution différents.
Le circuit est maintenant commandé par une signal sinusoïdal de la forme :

$$\begin{cases} e(t) = E_0 \sin \omega t \text{ si t>0} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} e(t) = E_0 \sin(2\pi f t) \text{ si t>0} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

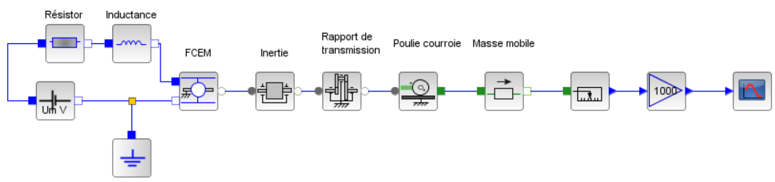
Question 7
Rechercher une solution numérique en tenant compte du nouveau signal d'entrée. Commenter l'allure de la courbe.

Question 8
Réaliser un tracé pour $f = \{10; 100; 1\,000; 10\,000\}$. *Interpréter les résultats.*

Question 9
Que se passe-il quand le pas de calcul diminue. Que peut-on en conclure ? (Vous pourrez commenter les influences entre la constante de temps, le temps de simulation, la constante de temps du circuit.)

Exercice 2 – Axe Emericc

L'axe Emericc permet le déplacement de masses, grâce à un motoréducteur et un système pignon courroie.



Modélisation causale de l'axe Emericc

Dans le circuit électrique, l'expression de la loi des mailles se traduit par :

$$u(t) = R\,i(t) + L\frac{d\,i(t)}{d\,t} + e(t)$$

Dans un moteur à courant continu, le couple est lié au courant et la fréquence de rotation est liée à la force contre électro motrice :

$$C_m(t) = K_t\, i(t) \quad e(t) = K_e\,\omega_m(t)$$

En isolant l'arbre moteur, le réducteur, le système poulie-courroie on peut calculer l'énergie cinétique de l'ensemble :

$$T(E/\mathscr{R}) = \frac{1}{2} M\, V^2_{\text{chariot}/\mathscr{R}} + \frac{1}{2} J\,\omega_m^2$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, en négligeant les frottements, on a :

$$\frac{d\,T(E/\mathscr{R})}{d\,t} = C_m(t)\omega_m(t) \Longleftrightarrow M\,V_{\text{chariot}/\mathscr{R}}\,\dot{V}_{\text{chariot}/\mathscr{R}} + J\,\dot{\omega}_m(t)\cdot\omega_m(t) = C_m(t)\omega_m(t)$$

Par ailleurs, en utilisant le rapport de réduction (k) du réducteur et de la poulie courroie (diamètre D), on a $\dot{V}_{\text{chariot}/\mathscr{R}}(t) = \omega_m(t)\cdot k\frac{D}{2}$.
En conséquence,

$$M\,\omega_m(t)\cdot k\frac{D}{2}\,\dot{\omega}_m(t)\cdot k\frac{D}{2} + J\,\dot{\omega}_m(t)\cdot\omega_m(t) = C_m(t)\omega_m(t) \Longleftrightarrow M\frac{D^2k^2}{4}\dot{\omega}_m(t) + J\,\dot{\omega}_m(t) = C_m(t)$$

Au final, on peut donc écrire l'équation différentielle régissant le mouvement du chariot :

$$u(t) = \frac{R}{K_t}C_m(t) + \frac{L}{K_t}\dot{C}_m(t) + K_e\,\omega_m(t) \Longleftrightarrow u(t) = \frac{R}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4}\dot{\omega}_m(t) + J\,\dot{\omega}_m(t)\right) + \frac{L}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4}\ddot{\omega}_m(t) + J\,\ddot{\omega}_m(t)\right) + K_e\,\omega_m(t)$$

Soit :

$$\frac{R}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4}+J\right)\dot{\omega}_m(t)+\frac{L}{K_t}\left(M\frac{D^2k^2}{4}+J\right)\ddot{\omega}_m(t)+K_e\omega_m(t)=u(t)\Longleftrightarrow \alpha\omega_m(t)+\beta\dot{\omega}_m(t)+\gamma\ddot{\omega}_m(t)=0$$