מטוטלת יחידה:

$$\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + \sin(x) = u(t)$$

$$\ddot{x} = -\alpha\,\dot{x} - \sin(x) + u(t)$$

$$\dot{y} \equiv -\sin(x) - \frac{\alpha}{2}\dot{x} + u(t)$$

$$\ddot{x} = \dot{y} - \frac{\alpha}{2}\dot{x} \quad -> \quad \dot{x} = y - \frac{\alpha}{2}x \; -> \dot{y} = -\sin(x) - \frac{\alpha}{2}y + \frac{\alpha^2}{4}x$$

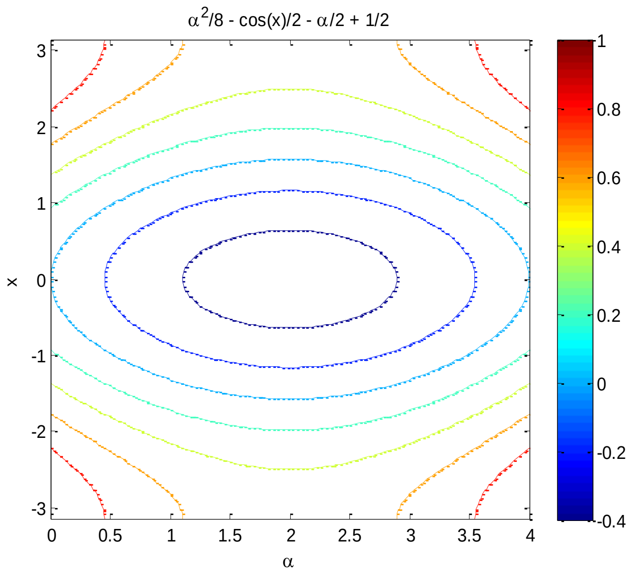
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = f\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2}x + y \\ \frac{\alpha^2}{4}x - \sin(x) - \frac{\alpha}{2}y\end{bmatrix} \qquad J(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}^T} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 1 \\ \frac{\alpha^2}{4} - \cos(x) & -\frac{\alpha}{2}\end{bmatrix}$$

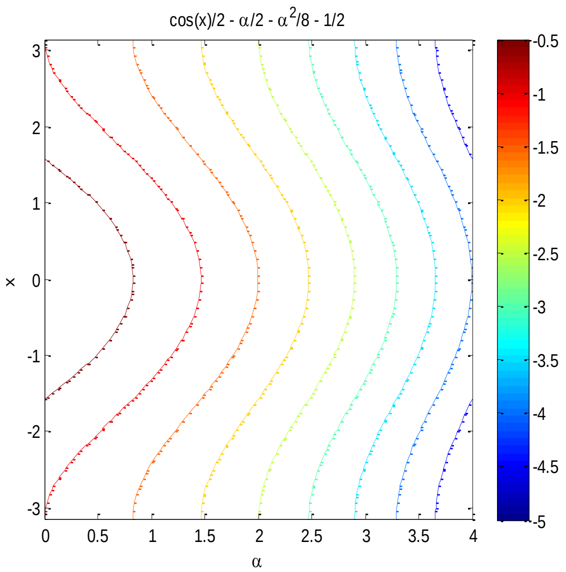
$$J_s = \frac{J+J^T}{2} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2}(\frac{\alpha^2}{4} - \cos(x) + 1) \\ \frac{1}{2}(\frac{\alpha^2}{4} - \cos(x) + 1) & -\frac{\alpha}{2}\end{bmatrix}$$

למערכת זו שני ערכים עצמיים:

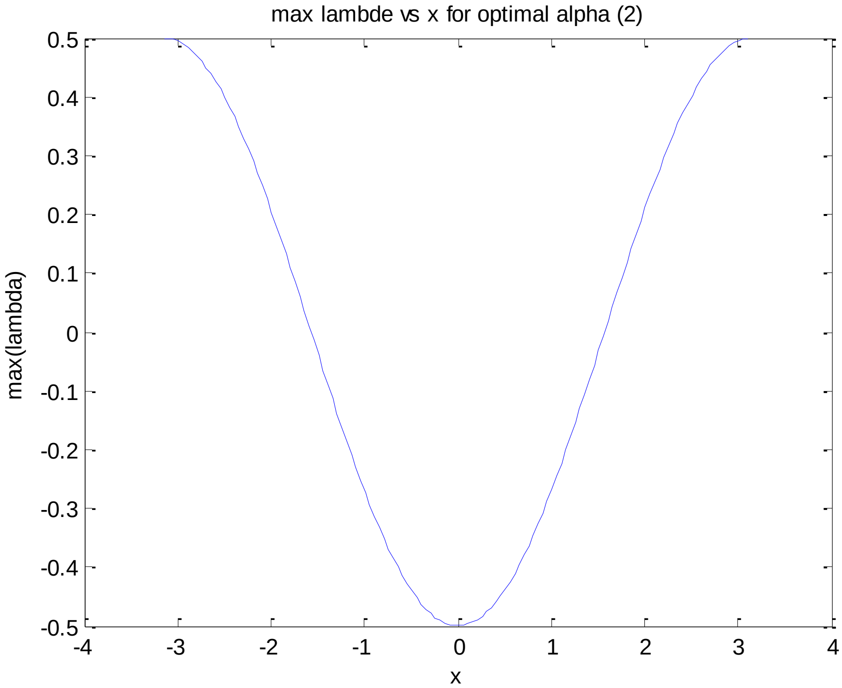
$$\lambda_1 = \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{1}{2}\ , \qquad \lambda_2 = -\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos(x)}{2} - \frac{1}{2}$$

ערכי λ במישור α, x:





מחישובים נומרים נקבל כי ה-λ האופטימלית היא 2. עבורה נחשב חסם לקצב ההתכנסות כתלות ב- x.



שתי מטוטלת, צימוד מהירות זוותיות:

לפי משפט 3. במאמר של Jean Jacques & Slotine, אם שתי מערכות מצומדות כך שממתקיים $\dot{x_1} + h(x_1) = \dot{x_2} + h(x_2)$

ו h contracting, אזי המערכות מסתנכרנות.

צימוד המהירות:

$$\ddot{x_1} + \alpha\,\dot{x_1} + \sin(x_1) = D(\dot{x_2} - \dot{x_1})$$

$$\ddot{x_2} + \alpha\,\dot{x_2} + \sin(x_2) = D(\dot{x_1} - \dot{x_2})$$

כלומר, עלינו לבדוק כי

$$\ddot{x_1} + (\alpha + D)\,\dot{x_1} + \sin(x_1) = u(t)$$

Contracting.

זוהי בדיוק המשוואה אותה חקרנו בסעיף הקודם, רק שבמקום α – המוכתב שרירותית על ידי המודל, נמצא הביטוי $\alpha + D$ כאשר במקרים רבים אנו יכולים לקבוע את D כרצונינו (למשל $\alpha + D = 2$ כך שנוכל להבטיח יציבות על תחום מקסימלי).

שתי מטוטלת, צימוד מהירות זוותיות, ופאזה:

$$\ddot{x_1} + \alpha\,\dot{x_1} + \sin(x_1) = D(\dot{x_2} - \dot{x_1}) + K(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x_2} + \alpha\,\dot{x_2} + \sin(x_2) = D(\dot{x_1} - \dot{x_2}) + K(x_1 - x_2)$$

כלומר, עלינו לבדוק כי

$$\ddot{x_1} + (\alpha + D)\,\dot{x_1} + \sin(x_1) + Kx_1 = u(t)$$

.Contracting

$$\ddot{x} = -(\alpha + D)\,\dot{x} - \sin(x) - Kx + u(t)$$

$$\dot{y} \equiv -Kx - \sin(x) - \frac{\alpha+D}{2}\dot{x} + u(t)$$

$$\ddot{x} = \dot{y} - \frac{\alpha+D}{2}\dot{x} \quad -> \quad \dot{x} = y - \frac{\alpha+D}{2}x \;-> \dot{y} = -Kx - \sin(x) - \frac{\alpha+D}{2}y + \frac{(\alpha+D)^2}{4}x$$

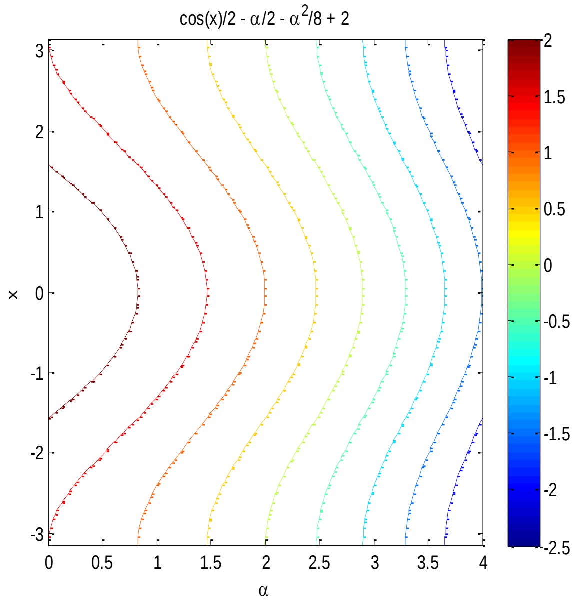
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = f\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha+D}{2}x + y \\ \frac{(\alpha+D)^2}{4}x - \sin(x) - Kx - \frac{\alpha+D}{2}y \end{bmatrix} \qquad J(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}^T} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha+D}{2} & 1 \\ \frac{(\alpha+D)^2}{4} - \cos(x) - K & -\frac{\alpha+D}{2} \end{bmatrix}$$

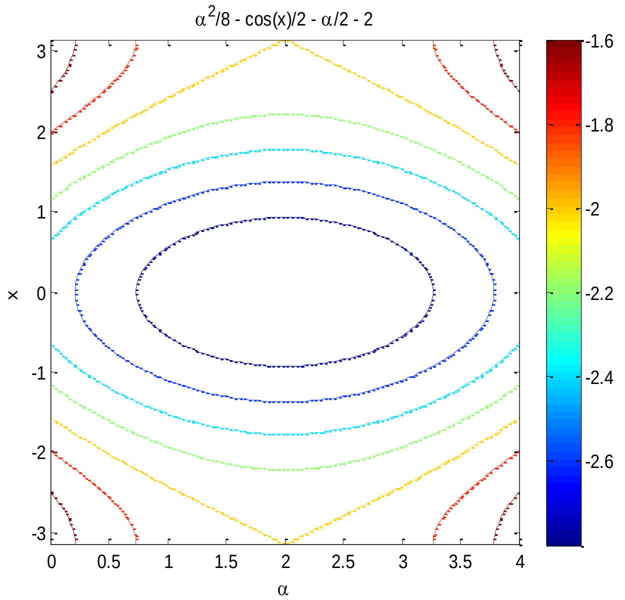
$$J_s = \frac{J+J^T}{2} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2}(\frac{\alpha^2}{4} - \cos(x) + 1 - K) \\ \frac{1}{2}(\frac{\alpha^2}{4} - \cos(x) + 1 - K) & -\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

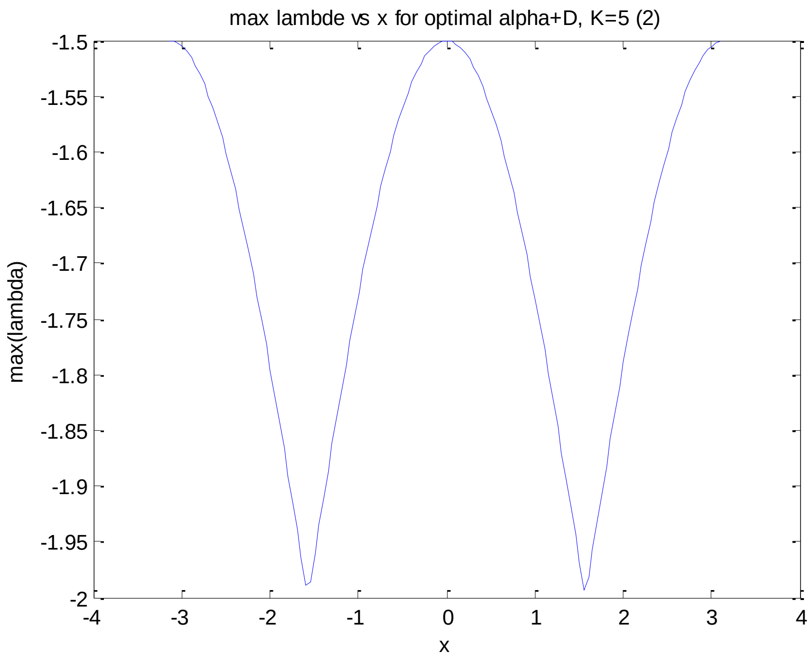
$$\lambda_1 = \frac{(\alpha+D)^2}{8} - \frac{\alpha+D}{2} - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{1}{2} - \frac{K}{2}\,, \qquad \lambda_2 = -\frac{(\alpha+D)^2}{8} - \frac{\alpha+D}{2} + \frac{\cos(x)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{K}{2}$$

אילו בדיוק הערכים העצמים אותם קיבלנו בסעיפים הקודמים, פרט לכך שמהערך העצמי הראשון אנו מורידים את הביטוי $\frac{K}{2}$, ואילו לערך העצמי השני אנו מוספים את הביטוי $\frac{K}{2}$, גורם זה יכול לסייע "באיזון" שני הע"ע ולהגדיל משמעותית הן את תחום ההתכנסות, והן את קצב ההתכנסות.

למשל עבור $\alpha + D = 4$, K=5 נקבל:







קיבלנו שכל התחום partial Contracting עם מקדם דעיכה הקטן מ-1.5 . זהו שיפור משמעותי.