**מטוטלת יחידה:**

-> ->

למערכת זו שני ערכים עצמיים:

,

ערכי במישור *:*



מחישובים נומרים נקבל כי ה- האופטימלית היא 2. עבורה נחשב חסם לקצב ההתכנסות כתלות ב- x.



**שתי מטוטלת מצומדות:, צימוד מהירות זוותיות:**

לפי משפט 3. במאמר של Jean Jacques & Slotine, אם שתי מערכות מצומדות כך שממתקיים

וh contracting, אזי המערכות מסתנכרנות.

נחשב עבור מערכות עם צימוד במהירות ובזווית:

נגדיר

,

נגדיר

*, , ,*

וכעת נכתוב את המשוואה בצורה וקטורית:

ולפי המשפט יתקיים כי:

כאשר:

נחשב באופן מפורש את :

, , ->

*נחשב את הקבוע מתוך תנאי ההתחלה:*

->

*כלומר:*

נשאר להראות ש contracting עבור המקרים השונים:

**צימוד מהירות זוותיות:**

עבור צימוד של המהירות בלבד (קיים D , K=0)*.*

*זוהי בדיוק המשוואה אותה חקרנו בסעיף הקודם, רק שבמקום המוכתב שרירותית על ידי המודל, נמצא הביטוי כאשר במקרים רבים אנו יכולים לקבוע את כרצונינו (למשל כך שנוכל להבטיח יציבות על תחום מקסימלי).*

**שתי מטוטלת, צימוד מהירות זוותיות, ופאזה:**

כלומר, עלינו לבדוק כי

Contracting*.*

,

*אילו בדיוק הערכים העצמים אותם קיבלנו בסעיפים הקודמים, פרט לכך שמהערך העצמי הראשון אנו מורדים את הביטוי , ואילו לערך העצמי השני אנו מוספים את הביטוי , גורם זה יכול לסייע "באיזון" שני הע"ע ולהגדיל משמעותית הן את תחום ההתכנסות, והן את קצב ההתכנסות.*

*למשל עבור ,K=2.5 נקבל:*

**

**

*קיבלנו שכל התחום* partial Contracting *עם מקדם דעיכה הקטן מ1.5- . זהו שיפור משמעותי.*

***נראה תוצאה של סימולציה המראה התכנסות אקספוננצילית:***

*נגריל את בתחום [0,1], ונחשב את כך שיתקיים נבחר*  ונגריל תנאי התחלה

*ונסמלץ את המערכת:*

**

*נחשב (באופן נומרי) את*

על פני המסלולים.



קיבלנו כי  *- זוהי תוצאה לא מפתיעה. זהו החסם העליון עבור כל המישור כולו.*

*נראה את הנורמה של המסלולים לאורך הזמן:*

**

*זוהי (לכאורה) תוצאה מפתיעה. לא רק שהנורמה לא נחסמת על ידי האקספוננט אלא שהיא אפילו לא מונטונית יורדת.*

*אולם, עלינו לזכור כי התוצאות שקיבלנו נכונות במערכת הצירים שבחרנו (הווקטור ), ולא במערכת הצירים "הטבעית".*

*נראה את הנורמה במערכת הצירים הזו לאורך הזמן:*



ואכן, הנורמה יורדת מונוטונית ונחסמת על יד האקספוננט.