

فاز دوم پروژه تحقیق در عملیات 2

الهه رحمتی

95103923

فهرست

3.....	سوال 1
4.....	مدلسازی و توضیحات
8.....	جواب بهینه کد GAMS
10.....	کد CPLEX
19.....	جواب بهینه کد CPLEX و تحلیل آن
25.....	سوال 2
26.....	مدلسازی و توضیحات
30.....	جواب بهینه کد GAMS
31.....	کد CPLEX
35.....	جواب بهینه کد CPLEX و تحلیل آن

سوال ۱

یک شرکت هواپیمایی می‌خواهد برنامه پروازی خود از شهر O به مقصد 4 شهر A، B، C و D برنامه‌ریزی کند. ناوگان این شرکت شامل 10 هواپیمای سایز بزرگ از نوع هواپیمای B777، 15 هواپیمای متوسط از نوع A330 و 2 هواپیمای کوچک از نوع A320 است. با فرض ثابت بودن شرایط پرواز و تعداد مسافران اطلاعات زیر موجود است.

	شهر	هزینه پرواز (\$)	درآمد پرواز (\$)	متوسط زمان پرواز (ساعت)
B777	A	6,000	5,000	1
	B	7,000	7,000	2
	C	8,000	10,000	5
	D	10,000	18,000	10
A330	A	1,000	3,000	2
	B	2,000	4,000	4
	C	4,000	6,000	8
	D	-	-	20
A320	A	2,000	4,000	1
	B	3,500	5,500	2
	C	6,000	8,000	6
	D	10,000	14,000	12

اطلاعات جدول مربوط به یک مسیر رفت و برگشت است.

محدودیت‌های زیر را در نظر بگیرید:

1. شهرهای A, B, C باید روزانه 4 پرواز و شهر D باید روزانه 2 پرواز داشته باشد.

2. سقف پروازی هر هواپیما 18 ساعت در روز است.

توابع هدف را برای خواسته‌های زیر فرموله و مقادیر بهینه را محاسبه کنید.

الف) مینیمم کردن هزینه‌ها

ب) ماکسیمم کردن سود

ج) مینیمم کردن مجموع زمان پروازها

مدلسازی و توضیحات

• متغیر تصمیم‌گیری

B_{ik} = تعداد پروازهای روزانه با i امین هواپیمای بزرگ به شهر k (رفت و برگشت)

$$i = 1, 2, \dots, 10$$

W_{jk} = تعداد پروازهای روزانه با j امین هواپیمای متوسط به شهر k (رفت و برگشت)

$$j = 1, 2, \dots, 15$$

L_{mk} = تعداد پروازهای روزانه با m امین هواپیمای کوچک به شهر k (رفت و برگشت)

$$m = 1, 2$$

• محدودیت‌ها

- محدودیت تعداد پرواز: (شهر A,B,C باید روزانه 4 پرواز و شهر D باید روزانه 2 پرواز داشته باشد).

$$\sum_{i=1}^{10} B_{ik} + \sum_{j=1}^{15} W_{jk} + \sum_{m=1}^2 L_{mk} = 4 \quad k = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{10} B_{i4} + \sum_{j=1}^{15} W_{j4} + \sum_{m=1}^2 L_{m4} = 2$$

- محدودیت ساعت پرواز: (هر هواپیما روزانه حداکثر 18 ساعت می تواند پرواز کند).

$$1 * B_{i1} + 2 * B_{i2} + 5 * B_{i3} + 10 * B_{i4} \leq 18 \quad i = 1,2,3, \dots, 10$$

$$2 * W_{j1} + 4 * W_{j2} + 8 * W_{j3} \leq 18 \quad j = 1,2,3, \dots, 15$$

$$1 * L_{m1} + 2 * L_{m2} + 6 * L_{m3} + 12 * L_{m4} \leq 18 \quad m = 1,2$$

از آنجا که هواپیمای متوسط پروازش به مقصد D، 20 ساعت (بیشتر از محدودیت پرواز روزانه) طول می کشد لذا مقدار آن برابر 0 خواهد بود. یعنی :

$$W_{j4} = 0 \quad \forall j$$

- محدودیت علامت :

$$B_{ik}, W_{jk}, L_{mk} \geq 0 \quad int$$

$$i = 1,2,\dots,10, \quad j = 1,2,\dots,15, \quad m = 1,2, \quad k = 1,2,3,4$$

• تابع هدف

• الف)

در قسمت الف به دنبال مینیمم کردن هزینه‌ها هستیم. لذا :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 6000 * \sum_{i=1}^{10} B_{i1} + 7000 * \sum_{i=1}^{10} B_{i2} + 8000 * \sum_{i=1}^{10} B_{i3} + 10000 * \sum_{i=1}^{10} B_{i4} + \\ & 1000 * \sum_{j=1}^{15} W_{j1} + 2000 * \sum_{j=1}^{15} W_{j2} + 4000 * \sum_{j=1}^{15} W_{j3} + 2000 * \sum_{m=1}^2 L_{m1} + 3500 \\ & * \sum_{m=1}^2 L_{m2} + 6000 * \sum_{m=1}^2 L_{m3} + 10000 * \sum_{m=1}^2 L_{m4} \end{aligned}$$

• ب)

در قسمت ب به دنبال ماکسیمم کردن سود هستیم. لذا :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & (-1000) * \sum_{i=1}^{10} B_{i1} + 0 * \sum_{i=1}^{10} B_{i2} + 2000 * \sum_{i=1}^{10} B_{i3} + 8000 * \sum_{i=1}^{10} B_{i4} + \\ & 2000 * \sum_{j=1}^{15} W_{j1} + 2000 * \sum_{j=1}^{15} W_{j2} + 2000 * \sum_{j=1}^{15} W_{j3} + 2000 * \sum_{m=1}^2 L_{m1} + 2000 \\ & * \sum_{m=1}^2 L_{m2} + 2000 * \sum_{m=1}^2 L_{m3} + 4000 * \sum_{m=1}^2 L_{m4} \end{aligned}$$

• ج)

در قسمت ج به دنبال مینیمم کردن مجموع زمان پرواز هستیم. لذا :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 1 * \sum_{i=1}^{10} B_{i1} + 2 * \sum_{i=1}^{10} B_{i2} + 5 * \sum_{i=1}^{10} B_{i3} + 10 * \sum_{i=1}^{10} B_{i4} + 2 * \sum_{j=1}^{15} W_{j1} + \\ & 4 * \sum_{j=1}^{15} W_{j2} + 8 * \sum_{j=1}^{15} W_{j3} + 1 * \sum_{m=1}^2 L_{m1} + 2 * \sum_{m=1}^2 L_{m2} + 6 * \sum_{m=1}^2 L_{m3} + 12 * \sum_{m=1}^2 L_{m4} \end{aligned}$$

جواب بهینه کد GAMS

جواب‌های بدست آمده از حل مدل Gams در زیر آورده شده است : توجه کنید در هر سه بخش تمامی متغیرهایی که در جداول نیامده‌اند، مقدار 0 گرفته‌اند.

(الف)

$$Z^*=48000$$

		هواپیمای A330			
شماره هواپیما	شهر	A	B	C	D
1		0	0	2	0
5		0	4	0	0
8		4	0	1	0
15		0	0	1	0

		هواپیمای B777			
شماره هواپیما	شهر	A	B	C	D
8		0	0	0	1
9		0	0	0	1

(ب)

$$Z^*=40000$$

هواپیمای A320				
شماره هواپیما \ شهر	A	B	C	D
2	0	1	0	0

هواپیمای A330				
شماره هواپیما \ شهر	A	B	C	D
1	4	2	0	0
5	0	1	1	0
6	0	0	2	0

هواپیمای B777				
شماره هواپیما \ شهر	A	B	C	D
1	0	0	1	1
10	0	0	0	1

(ج)

$$Z^*=52$$

هواپیمای B777				
شماره هواپیما \ شهر	A	B	C	D
1	4	4	1	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1
6	0	0	3	0

کد CPLEX

(الف)

کد فایل .mod

```
/******
 * OPL 12.9.0.0 Model
 * Author: Elahe
 * Creation Date: Dec 19, 2019 at 6:24:10 PM
 *****/

//Large Airplanes Index
range i = 1..10;
//Medium Airplanes Index
range j = 1..15;
//Small Airplanes Index
range m = 1..2;
//1 = City A , 2 = City B , 3 = City C , 4 = City D
range k = 1..4;
//Airplane type
{string} Type={"B777","A330","A320"};

//inputs from Question which are read from excel
//Cost is the Table of Flight Costs given in Prob, First Argument (k) is the city and the
Second Argument (Type) is the Airplane type
//Flight_Hour is the Table of Flight Hours given in Prob, First Argument (k) is the city
and the Second Argument (Type) is the Airplane type
int Cost[k][Type]=...;
int Flight_Hour[k][Type]=...;

//Decision Variables
//Number of Daily Flights of ith Large Airplane to City k
dvar int+ B[i][k];
//Number of Daily Flights of jth Medium Airplane to City k
dvar int+ W[j][k];
//Number of Daily Flights of mth Small Airplane to City k
dvar int+ L[m][k];
//Best Solution
dvar int+ obj;

//Goal: Minimizing Cost
```

```
minimize obj;
```

```
subject to {
```

```
    //Objective value
```

```
    obj==Cost[1]["B777"]*sum(i in i) B[i][1]+ Cost[2]["B777"]*sum(i in i)
    B[i][2]+ Cost[3]["B777"]*sum(i in i) B[i][3]+ Cost[4]["B777"]*sum(i in
    i) B[i][4]+
    Cost[1]["A330"]*sum(j in j) W[j][1]+Cost[2]["A330"]* sum(j in j)
    W[j][2]+ Cost[3]["A330"]*sum(j in j) W[j][3]+
    Cost[1]["A320"]*sum(m in m) L[m][1]+ Cost[2]["A320"]*sum(m in m)
    L[m][2]+ Cost[3]["A320"]*sum(m in m) L[m][3]+ Cost[4]["A320"]*sum(m in
    m) L[m][4];
```

```
    //Constraints related to the number of flights that each city should
    have daily.
```

```
    forall (k in k : k <= 3)
```

```
    sum (i in i) B[i][k] +sum (j in j) W[j][k]+sum (m in m) L[m][k] == 4;
```

```
    sum (i in i) B[i][4] +sum (j in j) W[j][4]+sum (m in m) L[m][4] == 2;
```

```
    //Constraints related to the Maximum daily flight hour limit of each
    airplane
```

```
    forall (i in i)
```

```
    Flight_Hour[1]["B777"]*B[i][1]+Flight_Hour[2]["B777"]*B[i][2]+Flight_Ho
    ur[3]["B777"]*B[i][3]+Flight_Hour[4]["B777"]*B[i][4]<=18;
```

```
    forall (j in j)
```

```
    Flight_Hour[1]["A330"]*W[j][1]+Flight_Hour[2]["A330"]*W[j][2]+Flight_Ho
    ur[3]["A330"]*W[j][3]<=18;
```

```
    forall (m in m)
```

```
    Flight_Hour[1]["A320"]*L[m][1]+Flight_Hour[2]["A320"]*L[m][2]+Flight_Ho
    ur[3]["A320"]*L[m][3]+Flight_Hour[4]["A320"]*L[m][4]<=18;
```

```
    //Medium Airplanes cant fly to City D
```

```
    forall (j in j)
```

```
        W[j][4]== 0;
```

```
}
```

کد فایل .dat

```
/******  
* OPL 12.9.0.0 Data  
* Author: Elahe  
* Creation Date: Dec 19, 2019 at 6:24:10 PM  
*****/  
SheetConnection sheet("Input.xlsx");  
Cost from SheetRead(sheet,"Data!C2:E5");  
Flight_Hour from SheetRead(sheet,"Data!I2:K5");  
  
SheetConnection sheet1("Output_1.xlsx");  
B to SheetWrite(sheet1,"B777!A1:D10");  
W to SheetWrite(sheet1,"A330!A1:D15");  
L to SheetWrite(sheet1,"A320!A1:D2");  
obj to SheetWrite(sheet1,"Objective!A1:A1");
```

(ب)

کد فایل .mod

```

/*****
 * OPL 12.9.0.0 Model
 * Author: Elahe
 * Creation Date: Dec 19, 2019 at 7:21:32 PM
 *****/
//Large Airplanes Index
range i = 1..10;
//Medium Airplanes Index
range j=1..15;
//Small Airplanes Indices
range m = 1..2;
//1 = City A , 2 = City B , 3 = City C , 4 = City D
range k=1..4;
//Airplane type
{string} Type= {"B777","A330","A320"};

//inputs from Question which are read from excel
/* Cost is the Table of Flight Costs given in Prob, First Argument (k) is the city and
the Second Argument (Type) is the Airplane type
//Flight_Hour is the Table of Flight Hours given in Prob, First Argument (k) is the city
and the Second Argument (Type) is the Airplane type
//Profit is the Table of Profit given in Prob, First Argument (k) is the city and the
Second Argument (Type) is the Airplane type
int Cost[k][Type]=...;
int Flight_Hour[k][Type]=...;
int Profit [k][Type]=...;

//Decision Variables
//Number of Daily Flights of ith Large Airplane to City k
dvar int+ B[i][k];
//Number of Daily Flights of jth Medium Airplane to City k
dvar int+ W[j][k];
//Number of Daily Flights of mth Small Airplane to City k
dvar int+ L[m][k];
//Best Solution
dvar int+ obj;

//Goal: Maximizing Profit
```

```
maximize obj;
```

```
subject to {
```

```
    //Objective value
```

```
    obj == sum(i in i) Profit[1]["B777"]*B[i][1]+ sum(i in i)
    Profit[2]["B777"]*B[i][2]+ sum(i in i) Profit[3]["B777"]* B[i][3]+
    sum(i in i) Profit[4]["B777"]*B[i][4]+
    sum(j in j) Profit[1]["A330"]* W[j][1]+ sum(j in j)Profit[2]["A330"]*
    W[j][2]+ sum(j in j)Profit[3]["A330"]* W[j][3]+
    sum(m in m)Profit[1]["A320"]* L[m][1]+ sum(m in m)
    Profit[2]["A320"]*L[m][2]+ sum(m in m) Profit[3]["A320"]*L[m][3]+ sum(m
    in m)Profit[4]["A320"]* L[m][4];
```

```
    //Constraints related to the number of flights that each city should
    have daily.
```

```
    forall (k in k : k < 4)
```

```
    sum (i in i) B[i][k] +sum (j in j) W[j][k]+sum (m in m) L[m][k] == 4;
```

```
    sum (i in i) B[i][4] +sum (j in j) W[j][4]+sum (m in m) L[m][4] == 2;
```

```
    //Constraints related to the Maximum daily flight hour limit of each
    airplane
```

```
    forall (i in i)
```

```
    Flight_Hour[1]["B777"]*B[i][1]+Flight_Hour[2]["B777"]*B[i][2]+Flight_Ho
    ur[3]["B777"]*B[i][3]+Flight_Hour[4]["B777"]*B[i][4]<=18;
```

```
    forall (j in j)
```

```
    Flight_Hour[1]["A330"]*W[j][1]+Flight_Hour[2]["A330"]*W[j][2]+Flight_Ho
    ur[3]["A330"]*W[j][3]<=18;
```

```
    forall (m in m)
```

```
    Flight_Hour[1]["A320"]*L[m][1]+Flight_Hour[2]["A320"]*L[m][2]+Flight_Ho
    ur[3]["A320"]*L[m][3]+Flight_Hour[4]["A320"]*L[m][4]<=18;
```

```
    //Medium Airplanes cant fly to City D
```

```
    forall (j in j)
```

```
        W[j][4]==0;
```

```
}
```

کد فایل .dat

```
/******  
* OPL 12.9.0.0 Data  
* Author: Elahe  
* Creation Date: Dec 19, 2019 at 7:21:32 PM  
*****/  
SheetConnection sheet("Input.xlsx");  
Cost from SheetRead(sheet,"Data!C2:E5");  
Flight_Hour from SheetRead(sheet,"Data!I2:K5");  
Profit from SheetRead(sheet,"Data!O2:Q5");  
  
SheetConnection sheet1("Output_2.xlsx");  
B to SheetWrite(sheet1,"B777!A1:D10");  
W to SheetWrite(sheet1,"A330!A1:D15");  
L to SheetWrite(sheet1,"A320!A1:D2");  
obj to SheetWrite(sheet1,"Objective!A1:A1");
```

ج

کد فایل .mod

```

/*****
 * OPL 12.9.0.0 Model
 * Author: Elahe
 * Creation Date: Dec 19, 2019 at 7:25:59 PM
 *****/
//Large Airplanes Index
range i = 1..10;
//Medium Airplanes Index
range j=1..15;
//Small Airplanes Indices
range m = 1..2;
//1 = City A , 2 = City B , 3 = City C , 4 = City D
range k=1..4;
//Airplane type
{string} Type= {"B777","A330","A320"};

//inputs from Question which are read from excel
//Cost is the Table of Flight Costs given in Prob, First Argument (k) is the city and the
Second Argument (Type) is the Airplane type
//Flight_Hour is the Table of Flight Hours given in Prob, First Argument (k) is the city
and the Second Argument (Type) is the Airplane type
int Cost[k][Type]=...;
int Flight_Hour[k][Type]=...;

//Decision Variables
//Number of Daily Flights of ith Large Airplane to City k
dvar int+ B[i][k];
//Number of Daily Flights of jth Medium Airplane to City k
dvar int+ W[j][k];
//Number of Daily Flights of mth Small Airplane to City k
dvar int+ L[m][k];
//Best Solution
dvar int+ obj;

//Goal: Minimizing Total Flight Hour
minimize obj ;

subject to {
```



```

//Objective value
obj == sum(i in i) Flight_Hour[1]["B777"]*B[i][1]+ sum(i in i)
Flight_Hour[2]["B777"]*B[i][2]+ sum(i in i) Flight_Hour[3]["B777"]*
B[i][3]+ sum(i in i) Flight_Hour[4]["B777"]*B[i][4]+
sum(j in j) Flight_Hour[1]["A330"]* W[j][1]+ sum(j in
j)Flight_Hour[2]["A330"]* W[j][2]+ sum(j in j)Flight_Hour[3]["A330"]*
W[j][3]+
sum(m in m)Flight_Hour[1]["A320"]* L[m][1]+ sum(m in m)
Flight_Hour[2]["A320"]*L[m][2]+ sum(m in m)
Flight_Hour[3]["A320"]*L[m][3]+ sum(m in m)Flight_Hour[4]["A320"]*
L[m][4];

//Constraints related to the number of flights that each city should
have daily.
forall (k in k : k < 4)
sum (i in i) B[i][k] +sum (j in j) W[j][k]+sum (m in m) L[m][k] == 4;

sum (i in i) B[i][4] +sum (j in j) W[j][4]+sum (m in m) L[m][4] == 2;

//Constraints related to the Maximum daily flight hour limit of each
airplane
forall (i in i)

Flight_Hour[1]["B777"]*B[i][1]+Flight_Hour[2]["B777"]*B[i][2]+Flight_Ho
ur[3]["B777"]*B[i][3]+Flight_Hour[4]["B777"]*B[i][4]<=18;

forall (j in j)

Flight_Hour[1]["A330"]*W[j][1]+Flight_Hour[2]["A330"]*W[j][2]+Flight_Ho
ur[3]["A330"]*W[j][3]<=18;

forall (m in m)

Flight_Hour[1]["A320"]*L[m][1]+Flight_Hour[2]["A320"]*L[m][2]+Flight_Ho
ur[3]["A320"]*L[m][3]+Flight_Hour[4]["A320"]*L[m][4]<=18;

//Medium Airplanes cant fly to City D
forall (j in j)
    W[j][4]==0;

}

```

کد فایل .dat

```
/******  
* OPL 12.9.0.0 Data  
* Author: Elahe  
* Creation Date: Dec 19, 2019 at 7:25:59 PM  
*****/  
SheetConnection sheet("Input.xlsx");  
Cost from SheetRead(sheet,"Data!C2:E5");  
Flight_Hour from SheetRead(sheet,"Data!I2:K5");  
  
SheetConnection sheet1("Output_3.xlsx");  
B to SheetWrite(sheet1,"B777!A1:D10");  
W to SheetWrite(sheet1,"A330!A1:D15");  
L to SheetWrite(sheet1,"A320!A1:D2");  
obj to SheetWrite(sheet1,"Objective!A1:A1");
```

جواب بهینه کد CPLEX و تحلیل آن

(الف)

در قسمت الف، هدف ما مینیمم کردن هزینه‌های پرواز است درحالی که تعداد پروازها به شهرهای مختلف مقدار ثابت و مشخصی داشته باشد. مقدار تابع هدف در این قسمت برای نرم افزار CPLEX همانطور که در تصویر مشخص است برابر مقدار به دست آمده از کد Gams و 48000 شده است.

Solution with objective 48,000

از آنجایی که هزینه‌های مربوط به هواپیماهای متوسط در شهرهای A و B و C نسبت به سایر هواپیماها کمتر هستند، لذا تمامی این پروازها توسط هواپیماهای متوسط انجام خواهند شد. در جواب بهینه‌ی ما نیز هواپیماهای متوسط تمامی پروازهای A و B و C را انجام می‌دهند که این مورد در تصویر زیر نیز مشخص است.

Value for W				
j (size 15)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	0	4	0	0
2	0	0	2	0
3	0	0	2	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	4	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

دقت داشته باشید که در اینجا همانطور که در متغیرهای تصمیم تعریف شده است و در کد نیز کامنت‌گذاری شده است، منظور از ستون‌های k همان شهرها هستند و به ترتیب شهر A مقدار 1، شهر B مقدار 2، شهر C مقدار 3 و شهر D مقدار 4 را دارد. می‌بینیم که تمامی 4 پرواز شهرهای A B C توسط هواپیماهای متوسط (W) انجام می‌شوند.

همچنین مانند فاز اول، از آنجایی که فرقی بین هواپیمای متوسط وجود ندارد و همچنین ترجیحی در انتخاب بین هواپیماهای مختلف متوسط وجود ندارد و حتی نمی‌خواهیم در صورت امکان از ظرفیت کامل یک هواپیمای متوسط استفاده کنیم، جواب بدست آمده منطقی است و در واقع در این حالت جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت.

از سوی دیگر چون پرواز متوسط به شهر D نداریم، پروازهای شهر D باید توسط هواپیماهای بزرگ یا کوچک انجام شود که در جواب بهینه‌ی ما باز هم مانند پاسخ Gams، دو هواپیمای بزرگ این پرواز را انجام داده‌اند.

Value for B				
i (size 10)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0

Value for L				
m (size 2)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0

در نهایت از 2 هواپیمای بزرگ و 4 هواپیمای متوسط استفاده کرده‌ایم که هواپیماهای بزرگ هر کدام یک پرواز و هواپیماهای متوسط 4، 2، 2 و 4 پرواز داشته‌اند که این متفاوت با بخش قبل است و درواقع جواب متغیرهای تصمیم عوض شده‌اند که همانطور که پیشتر توضیح دادیم این جواب بهینه چندگانه با تابع هدف ثابت به دلیل ماهیت سوال منطقی می‌باشد. در نهایت هر دو جواب درست و منطقی هستند. در نهایت مقدار هزینه کلی پروازها برابر **48000** شده است.

(ب)

در قسمت ب، هدف ماکسیم کردن سود پروازها است، درحالی که تعداد پروازها به شهرهای مختلف مقدار ثابت و مشخصی داشته باشد. مقدار تابع هدف در این بخش که در تصویر زیر مشخص شده است نیز مقدار 40000 است.

Solution with objective 40,000

j (size 15)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	4	0	0	0
2	0	4	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

با توجه به میزان سود هر پرواز هر هواپیما (درآمد - هزینه) برای شهرهای مختلف، مشخص است که سود پروازهای هواپیماهای متوسط و کوچک برای شهر A و B برابر و بیشتر از هواپیماهای بزرگ است. لذا انتظار داریم در پروازهای این شهرها از این دو نوع هواپیما استفاده شود که در جواب بهینه نیز همین طور است.

در این بخش هم تمایزی میان هواپیماهای متوسط و کوچک و ترجیحی در استفاده از هریک از آنها وجود ندارد، پس باز هم جوابهای چندگانه خواهیم داشت. در شهر C سود پروازها برابر است و هریک از هواپیماها می توانند این پرواز را انجام دهند که در جواب ما هواپیماهای بزرگ این 4 پرواز را انجام داده اند. در شهر D، سود پرواز هواپیماهای بزرگ بسیار بیشتر از متوسط و کوچک بوده و در نتیجه تمامی پروازها به شهر D از نوع هواپیماهای بزرگ هستند.

m (size 2)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0

Value for B				
i (size 10)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	0	0	1	1
2	0	0	3	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0

در نهایت با کمی تفاوت نسبت به بخش Gams، که از 1 هواپیمای کوچک و 3 هواپیمای متوسط و 2 هواپیمای بزرگ استفاده کرده بودیم، این بار از 0 هواپیمای کوچک، 2 هواپیمای متوسط و 3 هواپیمای بزرگ استفاده کرده‌ایم که هواپیماهای متوسط 4 و 4 پرواز، و هواپیماهای بزرگ هر یک 1، 2 و 3 پرواز داشته‌اند. در نهایت مقدار سود 40000 می‌باشد.

ج)

در این قسمت به دنبال مینیمم کردن مجموع زمان پرواز هواپیماها هستیم. با توجه به صورت سوال در مورد پروازهای شهرهای A و B هواپیماهای بزرگ و کوچک زمان پرواز یکسانی دارند و در انتخاب میان آنها با توجه به اینکه ترجیحی وجود ندارد می‌توان از هر کدام استفاده کرد. در سایر شهرها متوسط زمان پرواز هواپیماهای بزرگ نسبت به سایرین، کمتر است و منطقی است که از هواپیماهای بزرگ استفاده کنیم و همین اتفاق در جواب بهینه ما نیز مشهود است.

مقدار تابع هدف در این بخش برابر 52 ساعت که برابر با جواب کد Gams می‌باشد، است.

Solution with objective 52

می‌بینیم که در تمامی شهرهای A و B، C و D از هواپیماهای بزرگ استفاده شده است و هواپیماهای متوسط و کوچک نقشی در جواب بهینه نداشته‌اند.

Value for L

m (size 2)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0

Value for B

i (size 10)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	0	4	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	3	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	4	0	0	0

در نهایت در جواب از 4 هواپیمای بزرگ استفاده شده است که به ترتیب 5، 2، 3 و 4 پرواز داشته‌اند.

مقدار تابع هدف یعنی مجموع زمان پرواز نیز 52 ساعت بوده است.

Value for W				
j (size 15)	k (size 4)			
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

سوال ۲

بودجه بخش بازاریابی شرکتی \$150000 است. مسئولان بازاریابی قصد دارند جهت افزایش میزان مشتری‌های شرکت، این بودجه را به صورت تبلیغات در روزنامه و تلویزیون مصرف نمایند. طبق تجربه مشخص شده‌است که تعداد تبلیغات با افزایش مشتری رابطه مستقیم (اما نه خطی) دارد. اگر بدانیم که هزینه‌ی هر یک تبلیغ روزنامه‌ای و تلویزیونی به ترتیب \$1000 و \$10000 است، بیشینه تعداد ممکن تبلیغات در روزنامه و تلویزیون هم به ترتیب 30 و 15 است و همچنین اثرپذیری آگهی‌ها (مشتری جذب شده به ازای هر تبلیغ) به شکل زیر می‌باشد:

	تعداد مشتری جدید	تعداد آگهی
روزنامه	900	1-10
	600	11-20
	300	21-30
تلویزیون	10000	1-5
	5000	6-10
	2000	11-15

با مشخص کردن تعداد تبلیغ از هر نوع، به شرکت کمک کنید تا به بیشترین تعداد مشتری ممکن برسد اگر:

الف) بدون شرط اضافه

ب) مجموع آگهی‌ها بیشتر از 30 نباشد و همچنین اگر بدانیم طبق توافق صورت گرفته با صدا و سیما اگر تعداد آگهی‌های تلویزیونی از 12 بیشتر شود، استفاده از هر آگهی اضافه در تلویزیون، 20٪ کمتر برای شرکت هزینه دارد.

مدلسازی و توضیحات

- متغیر تصمیم‌گیری

X_i = تعداد تبلیغ در روزنامه در بازه i ام

Y_j = تعداد تبلیغ در تلویزیون در بازه j ام

$i, j = 1, 2, 3$

- حالت الف)

- تابع هدف

$$\text{Max } Z = 900X_1 + 600X_2 + 300X_3 + 10000Y_1 + 5000Y_2 + 2000Y_3$$

- محدودیت‌ها

$$Y_j \leq 5$$

$$X_i \leq 10$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

• محدودیت بودجه:

$$1000(X_1 + X_2 + X_3) + 10000(Y_1 + Y_2 + Y_3) \leq 150000$$

• محدودیت بازه‌ها: (با توجه به تعریف متغیرهای تصمیم ابتدا کوچکترین X_i یعنی X_1 باید مقدار بگیرد و سپس در صورت به حداکثر رسیدن X_2 و سپس X_3 مقدار می‌گیرند).

برای تبلیغ روزنامه :

$$10Z_1 \leq X_1 \leq 10$$

$$10Z_2 \leq X_2 \leq 10Z_1$$

$$0 \leq X_3 \leq 10Z_2$$

برای تبلیغ تلویزیون:

$$5Z_3 \leq Y_1 \leq 5$$

$$5Z_4 \leq Y_2 \leq 5Z_3$$

$$0 \leq Y_3 \leq 5Z_4$$

• محدودیت تعداد تبلیغ‌ها: (حداکثر 30 تبلیغ در روزنامه و 15 تبلیغ در تلویزیون)

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3) \leq 15$$

$$(X_1 + X_2 + X_3) \leq 30$$

• محدودیت علامت :

$$X_i, Y_j \geq 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad int$$

$$Z_k = 0 \text{ یا } 1, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

• حالت ب) علاوه بر محدودیت‌های بالا محدودیت‌های زیر نیز به حالت ب اضافه می‌شوند. همچنین تابع هدف نیز براساس شرط اضافه شده تغییر می‌کند.

• محدودیت‌ها

• محدودیت تعداد تبلیغ‌های کلی در حالت ب:

$$(X_1 + X_2 + X_3) + (Y_1 + Y_2 + Y_3) \leq 30$$

• محدودیت جدید بودجه:

$$1000(X_1 + X_2 + X_3) + 10000Y_4 + 8000Y_5 \leq 150000$$

• رابطه بین Y_i ها:

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3) = Y_4 + Y_5$$

• محدودیت بازه‌ها:

$$12Z_5 \leq Y_4 \leq 12$$

$$0 \leq Y_5 \leq 3Z_5$$

• محدودیت علامت :

$$Z_5 = 0 \text{ یا } 1$$

$$0 \leq Y_4, Y_5, \text{ int}$$

جواب بهینه کد GAMS

در این سوال مقادیر متغیرهای کمکی (صفر یا یک)، در فایل PDF به دلیل اهمیت نداشتن و زیاد بودن تعدادشان آورده نشده است. البته این مقادیر در فایل Gams قابل دسترسی هستند.

(الف)

مقدار تابع هدف یعنی تعداد مشتریان اضافه شده در این قسمت 97000 می باشد.

$$U^*=97000$$

روزنامه		تلویزیون	
	مقدار		مقدار
X1	10	Y1	5
X2	10	Y2	5
X3	10	Y3	2
تعداد تبلیغ در روزنامه	30	تعداد تبلیغ در تلویزیون	12

(ب)

مقدار تابع هدف یعنی تعداد مشتریان اضافه شده در این قسمت 94200 می باشد.

$$U^*=94200$$

روزنامه		تلویزیون	
	مقدار		مقدار
X1	10	Y1	5
X2	7	Y2	5
X3	0	Y3	3
تعداد تبلیغ در روزنامه	17	Y4	12
		Y5	1
		تعداد تبلیغ در تلویزیون	13

کد CPLEX

(الف)

کد فایل .mod

نوجه شود در فایل .dat این مسئله هیچ چیزی نوشته نشده است.

```

/*****
* OPL 12.9.0.0 Model
* Author: Elahe
* Creation Date: Dec 19, 2019 at 10:21:18 PM
*****/
//Newspaper Interval Index
range i = 1..3;
//TV Interval Index
range j = 1..3;
//Binary Variable Index
range k = 1..4;

//Variables
//Number of News Ad in ith interval
dvar int+ X[i];
//Number of TV Ad in jth interval
dvar int+ Y[j];
//binary variables
dvar boolean Z[k];
//Goal: Maximizing Customers
maximize 900*X[1]+600*X[2]+300*X[3]+10000*Y[1]+5000*Y[2]+2000*Y[3];

subject to {

    //Interval Constraint
    forall (j in j) Y[j] <= 5;
    forall (i in i) X[i] <= 10;

    //Budget Constraint
    1000*(sum (i in i) X[i])+ 10000*(sum (j in j)Y[j]) <= 150000;

    //Constraint Subject to News Intervals
    X[1]<=10;

```

```
X[1]>=10*Z[1];  
X[2]<=10*Z[1];  
X[2]>=10*Z[2];  
X[3]<=10*Z[2];  
X[3]>=0;
```

```
//Constraint Subject to TV Intervals
```

```
Y[1]<=5;  
Y[1]>=5*Z[3];  
Y[2]<=5*Z[3];  
Y[2]>=5*Z[4];  
Y[3]<=5*Z[4];  
Y[3]>=0;
```

```
//Constraint Subject to Number Of Ad
```

```
sum (i in i ) X[i] <=30;  
sum (j in j ) Y[j] <=15;
```

```
}
```


(ب)

کد فایل .mod

نوجه شود در فایل .dat این مسئله هیچ چیزی نوشته نشده است.

```
/******  
* OPL 12.9.0.0 Model  
* Author: Elahe  
* Creation Date: Dec 19, 2019 at 10:28:40 PM  
*****/  
  
//Newspaper Interval Index  
range i = 1..3;  
//TV Interval Index  
range j = 1..5;  
//Binary Variable Index  
range k = 1..5;  
  
//Variables  
//Number of News Ad in ith interval  
dvar int+ X[i];  
//Number of TV Ad in jth interval  
dvar int+ Y[j];  
//binary variables  
dvar boolean Z[k];  
  
//Goal: Maximizing Customers  
maximize 900*X[1]+600*X[2]+300*X[3]+10000*Y[1]+5000*Y[2]+2000*Y[3];  
  
subject to {  
  
    //Interval Constraint  
    forall (j in j : j<=3) Y[j] <= 5;  
    Y[4]<=12;  
    Y[5]<=3;  
    forall (i in i) X[i] <= 10;  
  
    //Budget Constraint  
    1000*(sum (i in i) X[i])+ 10000*Y[4]+8000*Y[5]<= 150000;  
  
    //Constraint Subject to News Intervals  
    X[1]>=10*Z[1];  
    X[2]<=10*Z[1];  
    X[2]>=10*Z[2];
```

```
X[3]<=10*Z[2];

//Constraint Subject to TV Intervals
Y[1]>=5*Z[3];
Y[2]<=5*Z[3];
Y[2]>=5*Z[4];
Y[3]<=5*Z[4];

//New Cons.
Y[4]>=12*Z[5];
Y[5]<=3*Z[5];

//Constraint Subject to Number Of Ad
sum (i in i ) X[i] <=30;
sum (j in j : j<=3) Y[j] <=15;

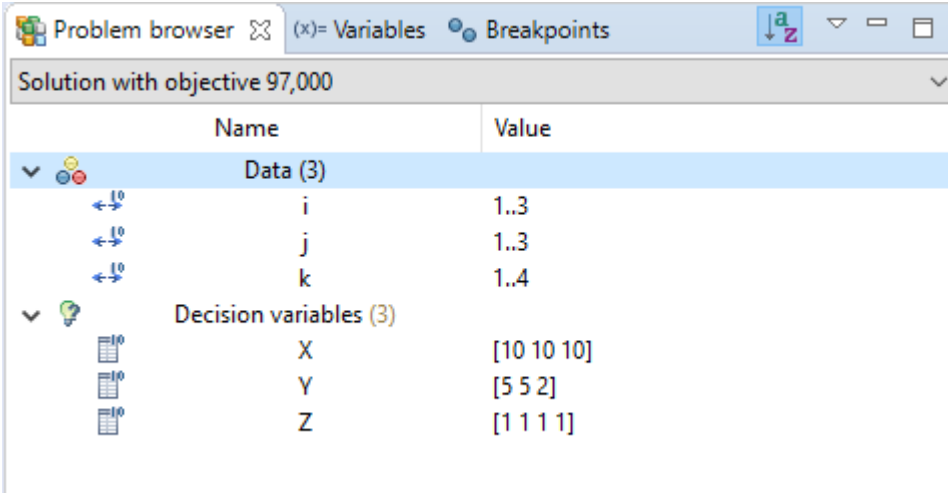
//Total Ad Number
sum (i in i ) X[i] + Y[1] + Y[2]+Y[3] <=30;

//Relation between TV Ads
Y[1]+Y[2]+Y[3]==Y[4]+Y[5];
}
```

جواب بهینه کد CPLEX و تحلیل آن

(الف)

همانطور که می بینیم در این قسمت مقدار تابع هدف یعنی تعداد مشتریان اضافه شده در این قسمت 97000 می باشد که برابر مقدار به دست آمده از کد Gams است.



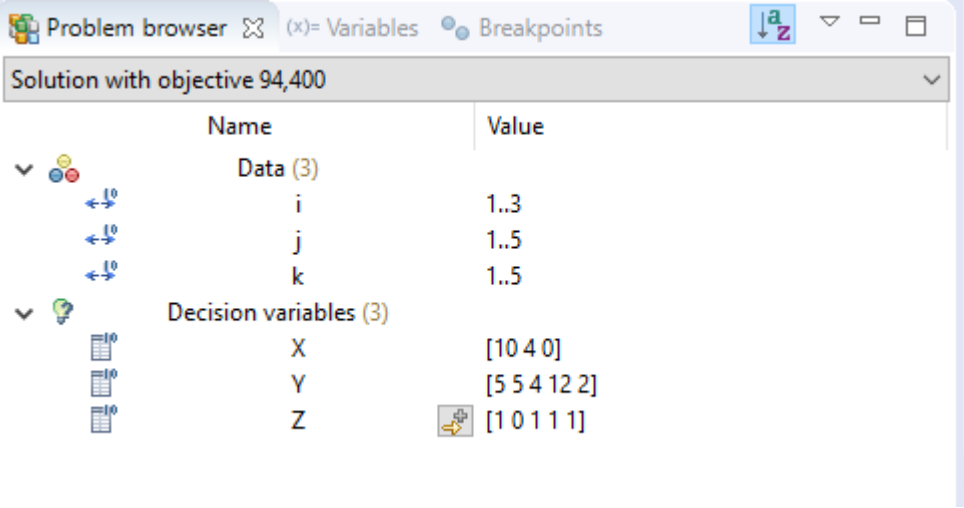
Name		Value
Data (3)		
i	1..3	
j	1..3	
k	1..4	
Decision variables (3)		
X	[10 10 10]	
Y	[5 5 2]	
Z	[1 1 1 1]	

در این قسمت، از کل ظرفیت تبلیغات روزنامه‌ای و از تبلیغات تلویزیونی نیز تا بازه دوم یعنی 10 تا تماما استفاده کرده ایم. حال چون در بازه سوم هر دو نوع تبلیغ، میانگین هزینه برای جذب هر نفر در تبلیغات روزنامه‌ای برابر $1000/300$ یعنی 3.33 تومان اما در تبلیغات تلویزیونی در بازه سوم برابر $10000/2000$ یعنی 5 تومان است، پس منطقی است که از همه ظرفیت روزنامه استفاده کنیم و باقیمانده را به بازه سوم تلویزیون اختصاص دهیم.

با اینکه تاثیر هر آگهی تلویزیونی در اضافه کردن مشتریان نسبت به هر آگهی روزنامه‌ای بیشتر است اما با توجه به اینکه در این بخش محدودیتی روی تعداد تبلیغ‌ها نبوده است، این تاثیر بی اهمیت شده و ترجیح داده ایم از ظرفیت کامل تبلیغ روزنامه یعنی 30 تا استفاده کنیم.

در نهایت، می‌بینیم که جواب بدست آمده از Gams و جواب CPLEX دقیقاً یکی هستند یعنی تمامی متغیرهای تصمیم و مقدار تابع هدف عیناً برابرند و جواب نهایی تابع هدف نیز همان مقدار **97000** مشتری اضافه شده است.

(ب)



Name	Value
Data (3)	
i	1..3
j	1..5
k	1..5
Decision variables (3)	
X	[10 4 0]
Y	[5 5 4 12 2]
Z	[1 0 1 1 1]

مقدار تابع هدف در این بخش یعنی تعداد مشتریان اضافه شده به طور تعجب‌آوری 94400 می‌باشد! چرا که این مقدار با مقدار خروجی نرم‌افزار Gams متفاوت است. نه تنها تابع هدف بلکه متغیرهای تصمیم نیز تغییر پیدا کرده‌اند.

در فاز اول نرم‌افزار Gams جواب را 17 تبلیغ روزنامه‌ای و 13 تبلیغ تلویزیونی داده بود که در نهایت تعداد 94200 را به ما اضافه می‌کرد. اینجا اما CPLEX به ما می‌گوید که 14 تبلیغ روزنامه و 14 تبلیغ تلویزیونی انجام بدهیم تا در کل 94400 تا مشتری به ما اضافه شود. مشخص است که CPLEX مسئله را بهتر از Gams حل کرده است، تابع هدف ما افزایش یافته و همچنین از کل بودجه استفاده کرده‌ایم. این تفاوت می‌تواند ناشی از تفاوت در Solver های دو نرم‌افزار باشد که متفاوت از یکدیگر عمل می‌کنند. هرچند کمی عجیب است که Gams نتوانسته است به جواب بهینه واقعی چنین مسئله‌ای دست پیدا کند.

در کل، علاوه بر تحلیل‌های فاز قبلی راجع به جواب که در زیر آمده است، تحلیل‌های بالا نیز صادق هستند.

در این بخش به دلیل وجود محدودیت تعداد تبلیغ‌ها، این مورد که تاثیر هر آگهی تلویزیونی در اضافه کردن مشتریان نسبت به هر آگهی روزنامه‌ای بیشتر است ، مهم می‌شود و باعث می‌شود بر خلاف قسمت قبل از کل تبلیغات روزنامه‌ای استفاده نکنیم و در واقع تبلیغات تلویزیونی را با ارزش‌تر از روزنامه‌ای بدانیم. که این موضوع خود را در جواب بهینه نشان می‌دهد. در جواب بهینه با توجه به دلیلی که بالاتر ذکر شد و همچنین به خاطر تخفیفی که از تلویزیون می‌توانیم بگیریم نسبت به حالت قبل دو تبلیغ بیشتر در تلویزیون داده‌ایم.

در کل به جواب بهتری از Gams رسیده‌ایم که با 14 تبلیغ روزنامه و 14 تبلیغ تلویزیون، 94400 مشتری جذب خواهیم کرد.