## Zadanie 1

Sprawdź, czy:

### 1.a)

wektory $u = [-1, 3, -5], v = [1, -1, 1], w = [4, 2, 0]$ są współpłaszczyznowe;

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 10 - 20 - 2 - 0 = 0$$

Wektory są współpłaszczyznowe.

### 1.b)

punkty $P = (0, 0, 0), Q = (-1, 2, 3), R = (2, 3, -4), S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

Sprawdźmy współpłaszczyznowość wektorów $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 16 - 6 - 18 + 4 - 20 = -71 \neq 0$$

Punkty nie są współpłaszczyznowe.

## Zadanie 2

Trójkąt $ABC$ rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = [1, 5, -3], \overrightarrow{AC} = [-1, 0, 4]$. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka $C$.

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right| = \frac{1}{2}||AB||h_C \Rightarrow h_C = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right|}{||AB||}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [20, -1, 5]$$

$$\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right| = \sqrt{20^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{426}$$

$$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

$$h_C = \sqrt{\frac{426}{35}}$$

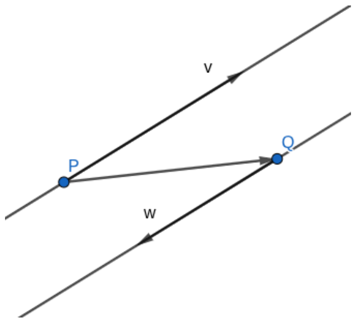
**Zadanie 3**

Proste $l_1$ i $l_2$ dane są równaniami parametrycznymi:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R});$$

Wykaż, że $l_1$ i $l_2$ są równoległe. Oblicz odległość między nimi. Znajdź równanie ogólne ich wspólnej płaszczyzny

$$P = (1,0,2), Q = (6,4,0)$$
$$\vec{v} = [-4,-2,4], \vec{w} = [6,3,-6]$$
$$\overrightarrow{PQ} = [6-1, 4-0, 0-2] = [5,4,-2]$$




Wektory kierunkowe $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są proporcjonalne:

$$\frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$$

więc proste są równoległe.

$$d(l_1, l_2) = d(P, l_2) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}\right|\right|}{||\vec{w}||}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = [-18, 18, -9] = 9 \cdot [-2, 2, -1]$$

$$d = \frac{9\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{9 \cdot 3}{\sqrt{81}} = 3$$

Płaszczyzna wspólna obu prostych to płaszczyzna rozpięta np. przez wektory $\vec{w}$ i $\overrightarrow{PQ}$. Znajdźmy wektor normalny tej płaszczyzny.

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = 9 \cdot [-2, 2, -1]$$

Skalar można pominąć, więc przyjmijmy $\vec{n} = [-2, 2, -1]$.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $Q$ i prostopadłej do wektora $\vec{n}$ ma postać:

$$\pi : -2(x-6) + 2(y-4) - z = 0$$
$$-2x + 2y - z + 4 = 0$$

### Zadanie 4

Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = 1 + 2s \\ z = -3 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Znajdź równanie normalne ich wspólnej płaszczyzny (jeżeli istnieje).

Spróbujmy znaleźć punkt wspólny prostych.

$$\begin{cases} 2 - t = -3 + 2s \\ 3 + 2t = 1 + 2s \\ -3t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s = 5 - t \\ 2s = 2 + 2t \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 2 \end{cases}$$

Proste przecinają się w jednym punkcie $A = (1, 5, -3)$, więc są współpłaszczyznowe.

Wektory kierunkowe to $\vec{v} = [-1, 2, -3]$ i $\vec{w} = [2, 2, 0]$.

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [6, -6, -6] = 6 \cdot [1, -1, -1]$$

$$\pi : (x - 1) - (y - 5) - (z + 3) = 0$$

### Zadanie 5

Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = s \\ z = -s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Jeżeli leżą one na jednej płaszczyźnie, to napisz jej równanie ogólne. Jeżeli nie, to oblicz odległość między tymi prostymi.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 \\ t = s \\ 2 = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = s \\ s = -2 \end{cases}$$

Dochodzimy do sprzeczności, czyli proste nie mają punktów wspólnych. Wektory kierunkowe $\vec{v} = [2, 1, 0]$ i $\vec{w} = [0, 1, -1]$ nie są proporcjonalne, czyli proste nie są równoległe i nie leżą na jednej płaszczyźnie.

$P = (1, 0, 2), Q = (3, 0, 0), \overrightarrow{PQ} = [2, 0, -2]$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [2, 2, 2]$$

$$d(l_1, l_2) = d(P, l_2) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}||}{||\vec{w}||} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

### Zadanie 6

Napisz równanie ogólne płaszczyzny $\pi$ przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2, 4)$, $B = (2, 1, 3)$ i $C = (3, -1, 5)$. Wyznacz odległość punktu $Q = (5, 0, 8)$ od płaszczyzny $\pi$ oraz znajdź punkt symetryczny do punktu $Q$ względem tej płaszczyzny.

Płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez punkt $A$ i jest rozpięta na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [3, -1, -1], \overrightarrow{AC} = [4, -3, 1]$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = [-4, -7, -5] = -[4, 7, 5]$$

$$\begin{aligned} \pi : 4(x + 1) + 7(y - 2) + 5(z - 4) &= 0 \\ 4x + 7y + 5z - 30 &= 0 \end{aligned}$$

Odległość punktu od płaszczyzny można wyliczyć z wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 8 - 30|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 5^2}} = \frac{30}{\sqrt{90}} = \frac{30}{3\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Żeby wyznaczyć odbicie puntku $Q$ znajdźmy prostą $l$ przechodzącą przez $Q$ prostopadłą do płaszczyzny $\pi$. Będzie mieć ona postać $Q + t\vec{n}$, czyli:

$$l : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 7t \\ z = 8 + 5t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Wyznaczmy $\overrightarrow{QP}$, gdzie $P$ to rzut punktu $Q$ na płaszczyznę $\pi$, czyli przecięcie tej płaszczyzny z prostą $l$.

$$4(5 + 4t) + 7(7t) + 5(8 + 5t) - 30 = 0$$

$$90t + 30 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{QP} = -\frac{1}{3}\vec{n}$$

Niech $Q'$ to będzie odbicie symetryczne punktu $Q$ względem płaszczyzny $\pi$. Wtedy

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ'} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = 2\overrightarrow{QP} = -\frac{2}{3}\vec{n} = \left[-\frac{8}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{10}{3}\right]$$

$$Q' = Q + \overrightarrow{QQ'} = \left(5 - \frac{8}{3}, -\frac{14}{3}, 8 - \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

## Zadanie 7

Znajdź rzut prostokątny punktu $P = (6, 4, 0)$ na prostą

$$l: \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

oraz punkt symetryczny do $P$ względem tej prostej.

Zauważmy, że dla $t = 0$ dostajemy $x = 6, y = 4, z = 0$ czyli punkt $P$. Oznacza to, że punkt $P$ leży na tej prostej, więc jest swoim rzutem prostokątnym na tę prostą oraz odbiciem symetrycznym względem niej.

## Zadanie 8

Znajdź rzut prostokątny prostej $k : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{1}$ na płaszczyznę $\pi : x + y - 2z + 4 = 0$.

Prosta $k$ przechodzi przez punkt $P = (2, 2, 5)$ i ma wektor kierunku $\vec{v} = [1, 1, 1]$.

Wektor normalny płaszczyzny $\pi$ to $\vec{n} = [1, 1, -2]$.

$\vec{v} \circ \vec{n} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Rightarrow k \parallel \pi$

Prosta jest równoległa do płaszczyzny więc wystarczy znaleźć rzut prostokątny tylko jednego punktu, np. $P$. Wyznaczmy prostą $l$ przechodzącą przez $P$ i prostopadłą do $\pi$.

$$l: \begin{cases} 2 + t \\ 2 + t \\ 5 - 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Punkt przecięcia $l$ i $\pi$ to rzut prostokątny $P_0$ punktu $P$ na $\pi$.

$$(2 + t) + (2 + t) - 2(5 - 2t) + 4 = 0$$

$$6t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$P_0 = \left(2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, 5 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

Rzut prostej $k$ na płaszczyznę $\pi$ musi mieć ten sam wektor kierunku, ponieważ $k \parallel \pi \Rightarrow k$.

$$k : \frac{x-\frac{7}{3}}{1} = \frac{y-\frac{7}{3}}{1} = \frac{z-\frac{13}{3}}{1}$$
$$x = y = z + 2$$

### Zadanie 9

Znajdź odległość prostej $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ od płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s + 3t \\ y = 2 - 2s - 2t \\ z = -1 + s - t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Płaszczyzna $\pi$ zawiera punkt $P = (1, 2, -1)$ i jest rozpięta na wektorach $\vec{v} = [-1, -2, 1]$ i $\vec{w} = [3, -2, -1]$.

Prosta $l$ zawiera punkt $Q = (2, -3, 2)$ i ma wektor kierunku $\vec{u} = [1, 2, -1] = -\vec{v} \Rightarrow l \parallel \pi$, więc wystarczy znaleźć odległość $Q$ od $\pi$.

Wektor normalny płaszczyzny $\pi$:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [4, 2, 8] = 2 \cdot [2, 1, 4]$$
$$\pi : 2(x-1) + (y-2) + 4(z+1) = 0$$
$$2x + y + 4z = 0$$
$$d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

### Zadanie 10

Dana jest prosta

$$l : \begin{cases} 3x - 2y + \phantom{2}z = 3 \\ \phantom{3}x \phantom{{}-2y} - 2z = 0 \end{cases}$$

oraz płaszczyzna $\pi_1 : x + y + z + 8 = 0$. Znajdź równanie ogólne płaszczyzny $\pi$ zawierającej prostą $l$ i prostopadłej do płaszczyzny $\pi_1$. Zbadaj wzajemne położenie prostej $l$ i krawędzi $k$ przecięcia się płaszczyzn $\pi$ i $\pi_1$.

Z równania prostej $l$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2z \\ 7z - 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{7}{2}z - \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -\frac{3}{2} + 7t \\ z = 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Wynika z tego, że prosta $l$ zawiera punkt $\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$, więc płaszczyzna $\pi$ też musi go zawierać.

Oprócz tego, wektor normalny płaszczyzny $\pi$ musi być prostopadły do prostej $l$ oraz do wektora normalnego płaszczyzny $\pi_1$.

Wektor kierunkowy prostej $l$ to $\vec{v} = [4, 7, 2]$, a wektor normalny płaszczyzny $\pi_1$ to $\overrightarrow{n_1} = [1, 1, 1]$. Niech $\vec{n} = [a, b, c]$ będzie wektorem normalnym płaszczyzny $\pi$. Wtedy:

$$\vec{n} \circ \vec{v} = 0 \land \vec{n} \circ \overrightarrow{n_1} = 0$$

$$4a + 7b + 2c = 0 \land a + b + c = 0$$

$$2a + 5b = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}a$$

$$-3a - 5c = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{5}a$$

Wektor zerowy nie może być wektorem normalnym, więc możemy bez straty ogólności przyjąć $a = 5$. Wtedy $\vec{n} = [5, -2, -3]$.

$$\pi : 5x - 2\left(y + \frac{3}{2}\right) - 3z = 0$$

$$5x - 2y - 3z - 3 = 0$$

Proste $l$ i $k$ obie należą do płaszczyzny $\pi$, więc albo są równoległe i wtedy $l$ nie przecina nigdy płaszczyzny $\pi_1$, albo przecinają się w punkcje przebicia $\pi_1$ przez prostą $l$.

$$4t - \frac{3}{2} + 7t + 2t + 8 = 0$$

$$13t + \frac{13}{2} = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

Czyli proste $k$ i $l$ przecinają się w punkcie $\left(-\frac{4}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (-2, -5, -1)$.