1. Działania

działanie wewnętrzne

$h : A \times A \to A$

(A, h) lub $(A, \circ)$ - zbiór z określonym działaniem

$h(a, b) = a \circ b$ - wynik działania

działanie zewnętrzne

$g : F \times X \to X$, gdzie $F, X \neq \emptyset$

$g(\alpha, x) = \alpha * x$, gdzie $\alpha \in F, x \in X$ - wynik działania

2. Grupy

$(A, \circ), A \neq \emptyset$

Struktura $(A, \circ)$ to **grupa (przemienna/abelowa)** gdy spełnione są warunki:

1. **działanie wewnętrzne**: $\forall x, y \in A : x \circ y \in A$
2. **łączność**: $\forall x, y, z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
3. **element neutralny**: $\exists e \in A : x \circ e = x = e \circ x$ (jest jeden)
4. **element symetryczny**: $\forall x \in A : \exists x' \in A : x \circ x' = e = x' \circ x$ (dla każdego x jest jeden)
5. **przemienność** : $\forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$

3. Pierścienie

$P \neq \emptyset, \circ, *$ - **działania wewnętrzne** w zbiorze P

Struktura $(P, \circ, *)$ to **pierścień (przemienny)** gdy spełnione są warunki:

1. struktura $(P, \circ)$ jest **grupą abelową**
2. **łączność $*$**: $\forall x, y, z \in P : (x * y) * z = x * (y * z)$
3. **prawostronna rozdzielność $*$ względem $\circ$**: $\forall x, y, z \in P : (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z)$
4. **lewostronna rozdzielność $*$ względem $\circ$**: $\forall x, y, z \in P : x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$
5. **przemienność $*$**: $\forall x, y \in P : x * y = y * x$

działanie addytywne: $\circ$ lub $+$.

Elementem neutralnym jest **zero** ($\mathbf{0}$). $x, y \in P$ to **dzielniki 0** $\Leftrightarrow x, y \neq \mathbf{0} \wedge x \cdot y = \mathbf{0}$

Element symetryczny do x względem $+$ to element **przeciwny** $(-x)$.

działanie multiplikatywne: $*$ lub $\cdot$.

pierścień z jednością to pierścień, w którym istnieje element neutralny ze względu na $\cdot$ czyli **jedynka** ($\mathbf{1}$).

pierścień całkowity to pierścień **przemienny** ($\forall x, y \in P : x \cdot y = y \cdot x$),
z **jednością** i **bez dzielników 0**.

4. Ciała

Pierścień $(K, +, \cdot)$ to **ciało (przemienne)** gdy spełnione są warunki:

1. jest to **pierścień z jednością**: istnieje element neutralny względem $\cdot$ ($\mathbf{1}$)

2. istnieje **element odwrotny do x względem $\cdot$** :
   $\forall x \in K \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in K : x \cdot x^{-1} = \mathbf{1} = x^{-1} \cdot x$
3. **przemienność $\cdot$** : $\forall x, y, \in K : x \cdot y = y \cdot x$

Struktura $(K, +, \cdot)$ to **ciało (przemienne)** gdy spełnione są warunki:
1. struktura $(K, +)$ jest **grupą abelową**
2. struktura $(K \setminus \{\mathbf{0}\}, \cdot)$ jest **grupą (przemienną)**
3. **prawostronna rozdzielność $\cdot$ względem $+$** : $\forall x, y, z \in K : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$
4. **lewostronna rozdzielność $\cdot$ względem $+$** : $\forall x, y, z \in K : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

W ciele nie ma dzielników $\mathbf{0}$.

5. Homomorfizmy

Odwzorowanie $h : A_1 \to A_2$ to **homomorfizm grupy** $(A_1, +)$ w grupę $(A_2, \oplus) \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in A_1 : h(x + y) = h(x) \oplus h(y)$

e_1 jest elementem neutralnym w $A_1 \Rightarrow h(e_1)$ jest elementem neutralnym w A_2

$\forall x \in A_1 : h(x') = (h(x))'$

Odwzorowanie $h : P_1 \to P_2$ nazywamy **homomorfizmem pierścienia/ciała** $(P_1, +, \cdot)$ w pierścień/ciało $(P_2, \oplus, \odot) \Leftrightarrow$
1. $\forall x, y \in P_1 : h(x + y) = h(x) \oplus h(y)$
2. $\forall x, y \in P_1 : h(x \cdot y) = h(x) \odot h(y)$

Dwie struktury są **izomorficzne**, jeżeli istnieje **izomorfizm**, czyli **homomorfizm bijektywny**, jednej struktury na drugą.

Automorfizm to izomorfizm struktury na samą siebie.