

## Zadanie 1

Sprawdź, które z podanych odwzorowań są liniowe:

### 1.a)

$$L : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], (Lp)(x) = xp'(x) + p(1); \checkmark$$

Niech  $p, q \in \mathbb{R}[x], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(\alpha p + \beta q) &= x(\alpha p + \beta q)' + (\alpha p + \beta q)(1) = x(\alpha p' + \beta q') + \alpha p(1) + \beta q(1) = \\ &= \alpha(xp' + p(1)) + \beta(xq' + q(1)) = \alpha L(p) + \beta L(q) \end{aligned}$$

### 1.b)

$$L : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], (Lp)(x) = p(x)p'(x); \times$$

Niech  $p \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha p) = (\alpha p)(\alpha p)' = \alpha^2 pp' \neq \alpha pp'$$

### 1.c)

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y) = (3x + 2y - 1, 2x - 3y); \times$$

Nie ma zachowania zera:

$$L(0, 0) = (-1, 0) \neq (0, 0)$$

### 1.d)

$$L : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}), (Lf)(x) = \sin f(x); \times$$

Kontrprzykład:  $f(x) = \frac{\pi}{2}, \alpha = 2$

$$L(\alpha f) = L\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0 \neq 2 \sin \frac{\pi}{2}$$

### 1.e)

$$L : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), (Lf)(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right). \checkmark$$

Niech  $f, g \in C([0, 1]), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(L(\alpha f + \beta g))(x) = 2(\alpha f + \beta g)\left(\frac{x}{2}\right) = 2\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + 2\beta g\left(\frac{x}{2}\right) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

## Zadanie 2

Dane są następujące odwzorowania  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  i  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z), g(x, y) = (y, x, x + y).$$

### 2.a)

Sprawdź, że są to odwzorowania liniowe i podaj  $f(1, 2, -1)$ ,  $g(-1, 3)$ ;

Niech  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) = \\ &(-\alpha x_1 - \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2, \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2) = \\ &\alpha(-x_1 + y_1 + z_1, x_1 - y_1 + z_1) + \beta(-x_2 + y_2 + z_2, x_2 - y_2 + z_2) = \\ &\alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

$$f(1, 2, -1) = (-1 + 2 - 1, 1 - 2 - 1) = (0, -2)$$

Niech  $x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) &= g(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) = \\ &(\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2) = \\ &\alpha(y_1, x_1, x_1 + y_1) + \beta(y_2, x_2, x_2 + y_2) = \alpha g(x_1, y_1) + \beta g(x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$g(-1, 3) = (3, -1, 2)$$

### 2.b)

Znajdź  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$ ,  $\text{Ker } g$ ,  $\text{Im } g$  i podaj ich wymiary;

$$1) \text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$z = 0$$

$$x = y$$

$$\text{Ker } f = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3\}, \dim \text{Ker } f = 1$$

$$2) \text{Im } f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (a, b)\}$$

Niech  $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z) = (a, b) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + y + z = a \\ x - y + z = b \end{cases} &\Rightarrow z = \frac{a+b}{2} \\ x - y + \frac{a+b}{2} = b &\Rightarrow x - y = \frac{b-a}{2} \\ f\left(\frac{b-a}{2}, 0, \frac{a+b}{2}\right) &= (a, b) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2, \dim \operatorname{Im} f = 2$$

$$3) \operatorname{Ker} g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = (0, 0, 0)\}$$

$$g(x, y) = (y, x, x + y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$\operatorname{Ker} g = \{(0, 0)\}, \dim \operatorname{Ker} g = 0$$

$$4) \operatorname{Im} g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : g(a, b) = (x, y, z)\}$$

Niech  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(a, b) = (b, a, a + b) = (x, y, z) &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} a = y \\ b = x \\ z = x + y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3\}, \dim \operatorname{Im} f = 2$$

### 2.c)

Sprecyzuj  $g \circ f$  i  $f \circ g$ .

$$\begin{aligned} g \circ f &= f(g(x, y)) = f(y, x, x + y) = (-y + x + x + y, y - x + x + y) = (2x, 2y) \\ f \circ g &= g(f(x, y, z)) = g(-x + y + z, x - y + z) = (x - y + z, -x + y + z, 2z) \end{aligned}$$

### Zadanie 3

Podaj wymiary jąder i obrazów następujących przekształceń liniowych:

### 3.a)

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y, z) = (x + y, y + z);$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} L = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L = 1$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L \Rightarrow \dim \operatorname{Im} L = 3 - 1 = 2$$

### 3.b)

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, L(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - z, -x + 3y - 2z, 8x + y + z);$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 8x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{3}{5}z$$

$$x = -2y + z = -\frac{7}{5}z$$

$$\text{Ker} L = \{(-7t, 3t, 5t), t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \text{Ker} L = 1$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L \Rightarrow \dim \text{Im} L = 3 - 1 = 2$$

### 3.c)

$$L : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2, (Lp)(x) = (x^2 + x)p(2) + (3x^2 - x)p(1).$$

Niech  $p = ax^2 + bx + c$ . Wtedy

$$(Lp)(x) = (x^2 + x)(4a + 2b + c) + (3x^2 - x)(a + b + c) = (7a + 3b + 2c)x^2 + (3a + b)x$$

$$\begin{cases} 7a + 3b + 2c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = a \end{cases}$$

$$\text{Ker} L = \{(ax^2 - 3ax + a), a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \text{Ker} L = 1$$

$$\dim R[x]_2 = \dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L \Rightarrow \dim \text{Im} L = 3 - 1 = 2$$

### Zadanie 4

Odwzorowanie liniowe  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  przeprowadza wektor  $x = (2, 1, 1)$  na wektor  $u = (4, 5)$  oraz wektor  $y = (1, -3, 2)$  na wektor  $v = (-6, 1)$ . Znajdź obraz wektora  $z = (5, 6, 1)$  względem tego odwzorowania. Czy przy tych danych można jednoznacznie określić  $L(4, 1, 5)$ ?

Znajdźmy kombinację liniową  $x$  i  $y$ , która daje  $z$ .

$$\alpha x + \beta y = z$$

$$\alpha(2, 1, 1) + \beta(1, -3, 2) = (5, 6, 1)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$-3\beta = 3 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\alpha = 1 - 2\beta = 3$$

W takim razie obraz wektora  $z$  też będzie taką kombinacją:

$$w = \alpha u + \beta v = 3(4, 5) - (-6, 1) = (18, 14)$$

Analogicznie znajdziemy kombinację dla wektora  $L$ .

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

$$-3\beta = -6 \Rightarrow \beta = 2$$

$$-5\beta = -4 \Rightarrow \beta = \frac{4}{5}$$

Dochodzimy do sprzeczności, czyli  $x$ ,  $y$  i  $L$  są liniowo niezależne, więc nie możemy znaleźć obrazu  $L$ .

### Zadanie 5

Wyznacz odwzorowanie liniowe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  takie, że  $f(1, 1, 0) = (1, 1)$ ,  $f(0, 2, -1) = (-1, 0)$ ,  $f(1, 2, -1) = (0, 2)$ .

$$f(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz)$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \Rightarrow a = 1 - b \\ d + e = 1 \Rightarrow d = 1 - e \\ 2b - c = -1 \Rightarrow c = 2b + 1 \\ 2e - f = 0 \Rightarrow f = 2e \\ a + 2b - c = 0 \Rightarrow 1 - b + 2b - 2b - 1 = 0 \Rightarrow b = 0, \quad a = 1, \quad c = 1 \\ d + 2e - f = 2 \Rightarrow 1 - e + 2e - 2e = 2 \Rightarrow e = -1, \quad d = 2, \quad f = -2 \end{cases}$$

$$f(x, y, z) = (x + z, 2x - y - 2z)$$

$$f(1, 1, 0) = (1, 1)$$

$$f(0, 2, -1) = (-1, 0)$$

$$f(1, 2, -1) = (0, 2)$$

### Zadanie 6

Skonstruuj następujące endomorfizmy:

### 6.a)

$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  taki, że  $\text{Ker} f = \text{Lin}\{u_1, u_2\}$  i  $\text{Im} f = \text{Lin}\{v_1, v_2\}$ , gdzie  $u_1 = (1, 1, -1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ ;

Wiemy, że  $\text{Im} f = \text{Lin} f(B)$ , gdzie  $B$  to baza  $\mathbb{R}^4$ . Musimy dobrać taką bazę, żeby  $\text{Lin} f(B) = \text{Lin}\{v_1, v_2\}$ . Niech naszą bazą będzie  $u_1, u_2$  (ponieważ  $f(u_1) = f(u_2) = \bar{0}$ ) oraz dwa inne wektory,  $w_1$  i  $w_2$  tak, że  $f(w_1) := v_1$ ,  $f(w_2) := v_2$ .

Musimy znaleźć  $w_1$  i  $w_2$  niezależne od  $u_1$  i  $u_2$ .  $\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, -\alpha, \beta)$ , więc możemy wziąć  $w_1 = (1, 0, 0, 0)$  oraz  $w_2 = (0, 1, 0, 0)$ .

Możemy zapisać dowolny wektor z  $\mathbb{R}^4$  jako kombinacja liniowa wektorów z tej bazy.

$$(x, y, z, w) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w_1 + \delta w_2 = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta + \delta, -\alpha, \beta)$$

$$\begin{cases} \alpha = -z \\ \beta = w \\ \gamma = x + z - w \\ \delta = y + z - w \end{cases}$$

Teraz możemy skonstruować takie  $f$ , że  $f(u_1) = f(u_2) = \bar{0}$ ,  $f(w_1) = v_1$ ,  $f(w_2) = v_2$ .

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= f(-zu_1 + wu_2 + (x + z - w)w_1 + (y + z - w)w_2) = \\ &= -zf(u_1) + wf(u_2) + (x + z - w)f(w_1) + (y + z - w)f(w_2) = \\ &= (0, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 0) + (x + z - w)v_1 + (y + z - w)v_2 = \\ &= (x + y + 2z - 2x, x + z - w, x + y + 2z - 2x, x + z - w) \end{aligned}$$

### 6.b)

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  taki, że  $\text{Im} f = \text{Lin}\{v_1, v_2\}$ , gdzie  $v_1 = (1, 3, 2)$ ,  $v_2 = (3, -1, 1)$ ;

Skoro  $\dim \text{Im} f = 2$ , a  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  to  $\dim \text{Ker} f = 1$ .

Możemy wybrać bazę  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  oraz zdefiniować  $f$  tak, że  $f(1, 0, 0) = v_1$ ,  $f(0, 1, 0) = v_2$ ,  $f(0, 0, 1) = \bar{0}$ .

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = \\ &= x(1, 3, 2) + y(3, -1, 1) + z(0, 0, 0) = \\ &= (x + 3y, 3x - y, 2x + y) \end{aligned}$$

### 6.c)

$L : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$  taki, że  $\text{Ker} L = \text{Lin}\{1 - x\}$  i  $\text{Im} L = \text{Lin}\{1 + x, 1 + x^2\}$ .

Wybierzmy bazę  $B = \{x^2, 1 - x, 1\}$  oraz zdefiniujmy  $f$  tak, że  $f(x^2) = 1 + x^2$ ,  $f(1 - x) = 0$ ,  $f(1) = 1 + x$ .

$$\begin{aligned} f(ax^2 + bx + c) &= f(ax^2 - b(1 - x) + b + c) = \\ af(x^2) - bf(1 - x) + (b + c)f(1) &= a(1 + x^2) + (b + c)(1 + x) = \\ ax^2 + (b + c)x + a + b + c \end{aligned}$$

### Zadanie 7

Niech  $f : U \rightarrow V$  będzie odwzorowaniem liniowym, a  $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2)$  będą bazami przestrzeni wektorowych, odpowiednio,  $U, V$  (nad ciałem  $\mathbb{R}$ ). Wiedząc, że  $f(u_1) = 2v_1$ ,  $f(u_2) = -v_2$ ,  $f(u_1 + u_3) = v_1 + v_2$  i  $f(u_1 - u_3) = 3v_1 - v_2$ , wyznacz  $\text{Ker } f$ .

$$\begin{aligned} 2f(u_1 + u_3) - f(u_1) + 2f(u_2) &= 2v_1 + 2v_2 - 2v_1 - 2v_2 = 0 \\ f(2u_1 + 2u_3 - u_1 + 2u_2) &= f(u_1 + 2u_2 + 2u_3) = 0 \end{aligned}$$

Więc na pewno  $\text{Lin}\{u_1 + 2u_2 + 2u_3\} \subset \text{Ker } f$ . Pozostaje pytanie czy to już całe jądro.

Zauważmy, że każdy wektor z  $V$  da się otrzymać przekształceniem:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \frac{\alpha}{2}f(u_1) - \beta f(u_2) = f\left(\frac{\alpha}{2}u_1 - \beta u_2\right)$$

czyli  $\text{Im } f = V$ . Z tego wynika, że  $\dim \text{Im } f = \dim V = 2$ , a  $\dim U = 3$ , więc  $\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$ , czyli rzeczywiście  $\text{Ker } f = \text{Lin}\{u_1 + 2u_2 + 2u_3\}$ .

### Zadanie 8

Niech  $f : U \rightarrow V$  będzie odwzorowaniem liniowym, a  $B$  bazą w  $U$ . Udowodnij, że:  $f$  jest injekcją  $\Leftrightarrow f(B)$  jest układem liniowo niezależnym.

$f$  różnowartościowa  $\Rightarrow r(f) = \dim \text{Im } f = \dim U$

Ale  $\text{Im } f = \text{Lin } f(B)$ , a  $U = \text{Lin } B$ , więc  $\dim \text{Lin } f(B) = \dim \text{Lin } B$ .

Skoro wektory w  $B$  są niezależne, a wektorów w  $f(B)$  jest tyle samo i ich powłoka ma taki sam wymiar to też muszą być niezależne.

### Zadanie 9 (1)

Niech  $f : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$  będzie odwzorowaniem takim, że  $(f(P))(x) = -\frac{(x+1)^2}{2}P''(x) + (x+1)P'(x)$ , gdzie  $P \in \mathbb{R}[x]_2$ .

$$\begin{aligned} f(ax^2 + bx + c) &= -\frac{(x+1)^2}{2} \cdot 2a + (x+1)(2ax + b) = \\ -ax^2 - 2ax - a + 2ax^2 + bx + 2ax + b &= ax^2 + bx - a + b \end{aligned}$$

### 9.a)

Sprawdź, że  $f$  jest endomorfizmem w  $\mathbb{R}[x]_2$  i że  $f \circ f = f$ ;

Niech  $P(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, Q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} (f(\alpha P + \beta Q))(x) &= f(\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x - \alpha a_1 + \alpha b_1 + \beta a_2x^2 + \beta b_2x - \beta a_2 + \beta b_2) = \\ &= f((\alpha a_1 + \beta a_2)x^2 + (\alpha b_1 + \beta b_2)x - \alpha a_1 + \alpha b_1 - \beta a_2 + \beta b_2) = \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_2)x^2 + (\alpha b_1 + \beta b_2)x - (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2) = \\ &= \alpha(a_1x^2 + b_1x - a_1 + b_1) + \beta(a_2x^2 + b_2x - a_2 + b_2) = \\ &= \alpha(f(P))(x) + \beta(f(Q))(x) \end{aligned}$$

Stąd odwzorowanie  $f$  jest liniowe, a ponadto  $f : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$  więc jest to endomorfizm.

$$(f \circ f)(ax^2 + bx + c) = f(ax^2 + bx - a + b) = ax^2 + bx - a + b = f(ax^2 + bx + c)$$

### 9.b)

Znajdź  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$  oraz ich bazy;

$$f(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx - a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0, c \in \mathbb{R},$$

więc  $\text{Ker } f = \{P(x) = c : c \in \mathbb{R}\}$ . Baza  $\text{Ker } f$  to  $\{1\}$ .

$$\text{Im } f = \{P(x) = ax^2 + bx - a + b : a, b \in \mathbb{R}\}. \text{ Baza } \text{Im } f \text{ to } \{x^2 - 1, x + 1\}.$$

### 9.c)

Wykaż, że  $\mathbb{R}[x]_2 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ ;

Niech  $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]_2$ .

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - a + b + a - b + c$$

$$ax^2 + bx - a + b \in \text{Im } f, a - b + c \in \text{Ker } f$$

Więc  $\mathbb{R}[x]_2 = \text{Im } f + \text{Ker } f$ . Ale  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{P(x) = 0\}$  więc  $\mathbb{R}[x]_2 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ .

### Zadanie 9 (2)

Niech  $g : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie odwzorowaniem takim, że  $g(P) = (P(1), P'(1), P''(1))$ . Wykaż, że  $g$  jest izomorfizmem i znajdź  $g^{-1}$ .

Wyznaczmy  $M_g(B_1, B_2)$ , gdzie  $B_1 = (1, x, x^2), B_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

$$g(ax^2 + bx + c) = (a + b + c, 2a + b, 2a)$$

$$g(1) = (1, 0, 0), g(x) = (1, 1, 0), g(x^2) = (1, 2, 2)$$



$$M_g(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wiemy, że  $r(g) = r(M_g)$ . Żeby  $g$  było izomorfizmem (bijekcją) to  $r(g) = \dim \mathbb{R}[x]_2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ , czyli  $\det M_g \neq 0$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Wyznaczmy teraz  $g^{-1}$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-w_2 \\ -w_3 \\ :2}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{+w_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Dla dowolnego  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ :

$$g^{-1}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b + \frac{1}{2}c \\ b - c \\ \frac{1}{2}c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}cx^2 + (b - c)x + a - b + \frac{1}{2}c$$

### Zadanie 10

Niech  $V, W, U$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $K$ , niech  $f : V \rightarrow W, g : V \rightarrow W, h : W \rightarrow U$  będą odwzorowaniami liniowymi, i niech  $\alpha \in K$ . Udowodnij, że  $\alpha f, f + g$  oraz  $h \circ f$  też są odwzorowaniami liniowymi.

#### 1) $\alpha f$

Niech  $v \in V, w \in W, \beta, \gamma \in K$ .

$$\alpha f(\beta v + \gamma w) = \alpha(\beta f(v) + \gamma f(w)) = \beta \alpha f(v) + \gamma \alpha f(w)$$

#### 2) $f + g$

Niech  $v \in V, w \in W, \alpha, \beta \in K$ .

$$\begin{aligned} (f + g)(\alpha v + \beta w) &= f(\alpha v + \beta w) + g(\alpha v + \beta w) = \\ &= \alpha f(v) + \beta f(w) + \alpha g(v) + \beta g(w) = \alpha(f + g)(v) + \beta(f + g)(w) \end{aligned}$$

#### 3) $h \circ f$

Niech  $v \in V, u \in U, \alpha, \beta \in K$ .

$$\begin{aligned} (h \circ f)(\alpha v + \beta w) &= h(f(\alpha v + \beta w)) = h(\alpha f(v) + \beta f(w)) = \\ &= \alpha h(f(v)) + \beta h(f(w)) = \alpha(h \circ f)(v) + \beta(h \circ f)(w) \end{aligned}$$