Zadanie 1

Zbadaj rzędy następujących macierzy:

1.a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_1 \\ \\ -3w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$

1.b)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +w_1 \\ \\ -w_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -w_2 \\ -w_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -w_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(B) = 4$

1.c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -2w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -2w_2 \\ +w_2 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ +2w_3 \\ -3w_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$r(C) = 4$

1.d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -3w_1 \\ -2w_1 \\ -4w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_3 \\ \\ -3w_3 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(D) = 2$

Zadanie 2

Wyznacz rzędy następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p:

2.a)

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ p & -p & 0 & -p \\ p & 0 & -p & 0 \end{bmatrix}$$

Szukamy niezerowego minora o największym wymiarze.

$$W = \begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ p & -p & 0 \\ p & 0 & -p \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{z tw. Laplace'a}}{=}$$

$$p^2 \left((1-p)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$p^2((1-p) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1) = p^2(4-p)$$

Jeżeli $p \notin \{0, 4\}$ to $W \neq 0$, czyli znaleźliśmy niezerowego minora, więc $r(A) = 3$.
Jeżeli $p = 0 \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

Jeżeli $p = 4 \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ +3w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2w_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3$

Ostatecznie $r(A) = \begin{cases} 3, \text{ gdy } p \neq 0 \\ 1, \text{ gdy } p = 0 \end{cases}$

2.b)

$$B = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} p-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & 1 \end{vmatrix} = 3(p-1) - 1 - (p-1)^3 - 1$$

Niech $t = p - 1$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} 3t - 1 - t^3 - 1 &= 0 \\ t^3 - 3t + 2 &= 0 \\ (t-1)(t^2 + t - 2) &= 0 \\ (t-1)^2(t+2) &= 0 \\ t = 1 &\vee t = -2 \\ p = 2 &\vee p = -1 \end{aligned}$$

$$p = 2 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$$

$$p = -1 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +2w_1 \\ -w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -w_2 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 3$$

Ostatecznie $r(B) = \begin{cases} 3, \text{ gdy } p \neq 2 \\ 2, \text{ gdy } p = 2 \end{cases}$

Zadanie 3

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, rząd macierzy jest najmniejszy, a dla jakich największy?

3.a)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = (-1-a)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (a+a^2)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix} =$$

$$(1+a)(a-(-a)(-1)) - (a+a^2)(-2(-a)-a) =$$

$$(1+a)\cdot 0 - (a+a^2)\cdot a = -a^2(a+1)$$

$a \notin \{-1, 0\} \Rightarrow$ wyznacznik jest niezerowy, więc rząd to 3.

$$a = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rząd to } 2$$

$$a = -1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rząd to } 2$$

Ostatecznie $r(A) = \begin{cases} 3, \text{ gdy } a \notin \{-1,0\} \\ 2, \text{ gdy } a \in \{-1,0\} \end{cases}$

3.b)

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} +w_2+w_3+w_4 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^3$$

Jeżeli $a \neq 1$ to całe B jest minorem niezerowym stopnia 4 czyli rząd B to 4.

$$a = 1 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 1$$

Ostatecznie $r(B) = \begin{cases} 4, \text{ gdy } a \neq 1 \\ 1, \text{ gdy } a = 1 \end{cases}$

Zadanie 4

Oblicz wyznacznik macierzy i jeśli jest ona nieosobliwa, znajdź macierz do niej odwrotną:

4.a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 1 + 0 + 1 - 0 - 2 - 0 = 0$$

4.b)

$$B = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(1+i) - 0 = 2 + 2i \neq 0$$

Macierz nie jest osobliwa, więc możemy znaleźć jej macierz odwrotną.

$$\left[\begin{matrix} 1+i & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \cdot \frac{1}{1+i} \\ \cdot \frac{1}{2} \end{matrix} = \left[\begin{matrix} 1 & \frac{-1}{1+i} \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1}{1+i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}\right] + \frac{1}{1+i} w_2 = \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1}{1+i} & \frac{1}{2+2i} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}\right]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+i} & \frac{1}{2+2i} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{2-2i}{4+4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4.c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det C = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right. = 0 + 1 + 0 - 0 + 1 + 1 = 3$$

Metoda Gaussa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -2w_2 \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ +w_3 \\ \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{matrix} -w_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Metoda dopełnień algebraicznych:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - (-1)) = 1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 - 1) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 0) = -1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 - 0) = 1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 0) = -1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 - 1) = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 - 0) = -1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - 1) = -1$$

$$C^{-1} = (\det C)^{-1}(C^D)^T = 3^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Metoda układem równań:

$$C = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 0 = y_1 \\ x_1 + 0 + x_3 = y_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$3x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$$

$$x_2 = y_1 - x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$$

$$x_3 = y_2 - x_1 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

4.d)

$$D = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{bmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix} = 0$$

bo są dwa takie same wiersze

4.e)

$$E = \begin{bmatrix}4 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\det E = 1 \cdot (-1)^{1+3} M_{13} + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} M_{33} + 0$$

$$M_{13} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right. = 0 - 6 + 12 - 0 - 6 + 9 = 9$$

$$M_{33} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right. = -12 + 8 + 2 + 2 - 16 - 6 = -22$$

$$\det E = 9 - 22 = -13$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} w_1 \leftrightarrow w_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ -4w_1 \\ -3w_1 \\ -2w_1 \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -7 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ \\ -w_3 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -7 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ w_2 \leftrightarrow w_4 \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -7 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ -3w_2 \\ -6w_2 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 0 & -6 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & 1 & -10 & 6 & -6 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ 2w_3 - w_4 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & 1 & -10 & 6 & -6 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ \\ -7w_3 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -26 & 8 & 4 & -8 & -6 \end{array}\right]\begin{matrix} 13w_1 \\ 13w_2 \\ 13w_2 \\ \frac{1}{2}w_4 \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 13 & -13 & 0 & 26 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -13 & 26 & 0 & 13 & -13 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 13 & -13 & -26 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 4 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right]\begin{matrix} +2w_4 \\ +2w_4 \\ +w_4 \\ \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 13 & -13 & 0 & 0 & 8 & 17 & -8 & -6 \\ 0 & 13 & -13 & 0 & 8 & 17 & -21 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -9 & -24 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 4 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ +w_3 \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 13 & -13 & 0 & 0 & 8 & 17 & -8 & -6 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -9 & -24 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 4 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right]\begin{matrix} +w_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 13 & 0 & 0 & 0 & 7 & 10 & -7 & -2 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -9 & -24 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 4 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right]\begin{matrix} \frac{1}{13}w_1 \\ \frac{1}{13}w_2 \\ \frac{1}{13}w_3 \\ \frac{-1}{13}w_4 \end{matrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 7 & 10 & -7 & 2 \\ -1 & -7 & 1 & 4 \\ -9 & -24 & 22 & -3 \\ -4 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

4.f)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -w_5 \\ -w_5 \\ -w_5 \\ -w_5 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ +w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -w_5 \\ -w_5 \\ -w_5 \\ -w_5 \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ +w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{array}\right] \begin{matrix} -w_5 \\ -w_5 \\ -w_5 \\ -w_5 \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow F^{-1} = F$$

4.g)

$$G_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\det G_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -w_n \\ -w_n \\ \vdots \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{+w_1 + \dots + w_{n-1}} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -w_n \\ -w_n \\ \vdots \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]_{+w_1 + \dots + w_{n-1}} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot (1-n) \\ \cdot (1-n) \\ \vdots \\ \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} n-1 & 0 & \dots & 1-n & 1-n & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & n-1 & \dots & 1-n & 0 & 1-n & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{array}\right] \begin{matrix} +w_n \\ +w_n \\ \vdots \\ \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} n-1 & 0 & \dots & 0 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot \frac{1}{n-1} \\ \cdot \frac{1}{n-1} \\ \vdots \\ \cdot \frac{1}{n-1} \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{2-n}{n-1} \end{array}\right]$$

Zadanie 5

Niech A będzie macierzą kwadratową. Udowodnij, że:

5.a)

jeżeli $A^2 - A + I = 0$, to A jest nieosobliwa i $A^{-1} = I - A$;

$$\begin{aligned} A^2 - A + I &= 0 \\ I &= A - A^2 \\ I &= A \cdot I - A \cdot A = I \cdot A - A \cdot A \\ I &= A \cdot (I - A) \quad = (I - A) \cdot A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \text{ jest odwracalna i } I - A = A^{-1}$$

> **5.b)**
>
> jeżeli $A^k = 0$, to $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^{k-1}$ (dla $k \geq 1$).

Niech $B = I + A + A^2 + ... + A^{k-1}$.

$$(I - A)^{-1} = B \Leftrightarrow (I - A) \cdot B = B \cdot (I - A) = I$$

$$(I - A) \cdot B = (I - A) \cdot \left(I + A + A^2 + ... + A^{k-1}\right) =$$

$$I^I + I \cdot A + I \cdot A^2 + ... + I \cdot A^{k-1} - A \cdot I - A \cdot A - A \cdot A^2 - ... - A \cdot A^{k-1} = I - A^k = I$$

$$B \cdot (I - A) = \left(I + A + A^2 + ... + A^{k-1}\right) \cdot (I - A) =$$

$$I^I + A \cdot I + A^2 \cdot I + ... + A^{k-1} \cdot I - A \cdot I - A \cdot A - A^2 \cdot A - ... - A^{k-1} \cdot A = I - A^k = I$$

> **Zadanie 6**
>
> Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:

> **6.a)**
>
> $A^2 = A^T$

$$\begin{aligned} \det A^2 &= \det A^T \\ (\det A)^2 &= \det A \\ \det A(\det A - 1) &= 0 \\ \det A &= 0 \vee \det A = 1 \end{aligned}$$

Sprawdźmy czy te wyznaczniki są osiągalne.

$$A = [0] \Rightarrow A^2 = [0] = A^T \wedge \det A = 0$$

$$A = [1] \Rightarrow A^2 = [1] = A^T \wedge \det A = 1$$

> **6.b)**
>
> $A^T - A^{-1} = 0$

A jest odwracalna, więc $\det A \neq 0$.

$$\begin{aligned} A^T &= A^{-1} \\ \det A^T &= \det A^{-1} \\ \det A &= (\det A)^{-1} \mid \cdot \det A \\ (\det A)^2 &= 1 \\ \det A = 1 &\lor \det A = -1 \end{aligned}$$

Sprawdźmy czy te wyznaczniki są osiągalne.

$$A = [1] \Rightarrow A^T = [1] = A^{-1} \land \det A = 1$$
$$A = [-1] \Rightarrow A^T = [-1] = A^{-1} \land \det A = -1$$

6.c)

$A^2 + A^{-1} = 0$

$$\begin{aligned} A^2 + A^{-1} &= 0 \\ A^2 &= -A^{-1} \\ \det A^2 &= \det -A^{-1} \\ (\det A)^2 &= -(\det A)^{-1} \mid \cdot \det A \\ (\det A)^3 &= -1 \\ \det A &= -1 \\ A = [-1] \Rightarrow A^2 + A^{-1} &= [1] + [-1] = [0] \end{aligned}$$

Zadanie 7

Sprawdź dla jakich wartości parametru rzeczywistego p macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & p & p \\ p & 1 & p & p \\ p & p & 1 & p \\ p & p & p & 1 \end{bmatrix} \text{ jest nieosobliwa.}$$

Wyznacz wymiar przestrzeni

$$\mathrm{Lin}\{(1,p,p,p);(p,1,p,p);(p,p,1,p);(p,p,p,1)\}$$

w zależności od parametru p.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & p & p & p \\ p & 1 & p & p \\ p & p & 1 & p \\ p & p & p & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & p & p \\ p-1 & 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 1-p & 0 \\ p-1 & 0 & 0 & 1-p \end{vmatrix} = (p-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & p & p & p \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(p-1)^3 \begin{vmatrix} 1+3p & p & p & p \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(p-1)^3(1+3p)$$

$$\text{A jest nieosobliwa} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 1 \wedge p \neq -\frac{1}{3}$$

Rząd macierzy A to liczba niezależnych wierszy A, więc jest to również wymiar przestrzeni rozpiętej nad tymi wierszami.

Jeżeli $p \neq 1 \wedge p \neq -\frac{1}{3}$ to $\det A \neq 0$, czyli wymiar to $r(A) = 4$.

Dla $p = 1$ mamy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wszystkie wiersze są takie same, więc wymiar podprzestrzeni to $r(A) = 1$.

Dla $p = -\frac{1}{3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0$, więc $r(A) \neq 4$. Sprawdźmy wyznacznik podmacierzy 3×3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix} = 1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{16}{27} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

Więc wymar podprzestrzeni to $\begin{cases} 1\text{,gdy } p{=}1 \\ 3\text{, gdy } p{=}-\frac{1}{3} \\ 4 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

Zadanie 8

Niech będzie dany następujący podzbiór N zbioru $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$:

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Sprawdź, czy para $(N, \cdot)$, gdzie „$\cdot$" oznacza mnożenie macierzy, jest grupą abelową.

Niech $A = \left[\begin{smallmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{smallmatrix}\right], B = \left[\begin{smallmatrix} y & iy \\ -iy & y \end{smallmatrix}\right], C = \left[\begin{smallmatrix} z & iz \\ -iz & z \end{smallmatrix}\right] x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{bmatrix} y & & iy \\ -iy & & y \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy - i^2xy & ixy + ixy \\ -ixy - ixy & -i^2xy + xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & 2ixy \\ -2ixy & 2xy \end{bmatrix} \in N$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2xy & 2ixy \\ -2ixy & 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4xyz & 4ixyz \\ -4ixyz & 4xyz \end{bmatrix} = (A \cdot B) \cdot C$$

Działanie $\cdot$ jest wewnętrzne i łączne. Widać też, że jest przemienne.

$\exists E \in N : \forall A \in N : E \cdot A = A$ (?)

Niech $A = \left[\begin{smallmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{smallmatrix}\right], E = \left[\begin{smallmatrix} e & ie \\ -ie & e \end{smallmatrix}\right], x, e \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$A \cdot E = \begin{bmatrix} 2xe & 2ixe \\ -2ixe & 2xe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

Istnieje element neutralny.

$\forall A \in N : \exists A' \in N : A \cdot A' = E$ (?)

Niech $A = \left[\begin{smallmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{smallmatrix}\right], A' = \left[\begin{smallmatrix} x' & ix' \\ -ix' & x' \end{smallmatrix}\right], x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$A \cdot A' = \begin{bmatrix} 2xx' & 2ixx' \\ -2ixx' & 2xx' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow x' = \frac{1}{4x} \neq 0$$

Każdy element N ma swój element odwrotny, więc $(N, \cdot)$ to grupa abelowa.

Zadanie 9

Zadana jest macierz ortogonalna $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (tj. $A^T A = AA^T = I$). Rozwiąż równanie, gdzie X jest niewiadomą macierzą, a I jest macierzą jednostkową:

$$\begin{aligned} AX\left(A^T\right)^2 &= -I^3 \mid \cdot A \\ AXA^TA^TA &= -IA \\ AXA^TI &= -A \mid \cdot A \\ AXA^TA &= -A \cdot A \\ AXI &= -A^2 \mid A^T \cdot \end{aligned}$$

$$A^TAXI = A^T \cdot (-A^2)$$
$$IX = -A^TA \cdot A$$
$$X = -A$$

Zadanie 10

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sprawdź, czy $A^TA = I \Rightarrow AA^T = I$.

Jeżeli A jest odwracalna, to:

$$A^TA = I \mid \cdot A^{-1}$$
$$A^TAA^{-1} = IA^{-1}$$
$$A^TI = A^{-1}$$
$$A^T = A^{-1} \Rightarrow AA^T = AA^{-1} = I$$

Jeżeli A jest nieodwracalna to $\det A = 0$, więc:

$$\det(A^TA) = \det I$$
$$\det A^T \cdot \det A = 1$$
$$0 = 1$$
$$\text{sprzeczność}$$

Zadanie 11

Wykaż, że n-ta potęga macierzy diagonalnej, $n \geq 1$, jest macierzą diagonalną.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Indukcyjnie dowodzimy tezę dla kolejnych potęg.

Zadanie 12

Uzasadnij, że wyznacznik macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n > 1)$ o wyrazach nieparzystych jest liczbą parzystą.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, więc nie wpływa na parzystość. Każde a_{ij} jest nieparzyste, więc sumujemy iloczyny n liczb nieparzystych, które też będą nieparzyste. Sumujemy po wszystkich permutacjach, których jest $n!$. Dla $n > 1$, $n!$ jest parzyste, więc cała suma też będzie parzysta.