1. Układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B$$

A - macierz współczynników (główna)
B - macierz (kolumna) wyrazów wolnych
X - macierz (kolumna) niewiadomych
$[A|B]$ - **macierz uzupełniona układu**

Układ jednorodny: $B = \overline{0} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.
(zawsze ma przynajmniej jedno rozwiązanie: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$)
Układ niejednorodny: przynajmniej jednej wyraz wolny $b_i \neq 0$.

Układ jest:
- **oznaczony** gdy ma jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczony** gdy ma więcej niż jedno rozwiązanie,
- **sprzeczny** gdy nie ma rozwiązań.

Układ jest **kwadratowy** jeśli liczba niewiadomych jest równa liczbie równań ($n = m$).

2. Twierdzenie Cramera

Jeżeli układ jest kwadratowy i $\det A \neq 0$ to układ jest **układem Cramera** i ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$x_j = (\det A)^{-1} \cdot D_{x_j}$$

D_{x_j} - wyznacznik macierzy A z macierzą B zamiast j-tej kolumny

Jeżeli układ kwadratowy ma $\det = 0$, to:
- $D_{x_1} = \ldots D_{x_n} = 0 \Rightarrow$ układ jest nieoznaczony lub sprzeczny
- $D_{x_i} \neq 0$ dla jakiegoś $i \Rightarrow$ układ jest sprzeczny

3. Twierdzenie Kroneckera-Cappellego

Układ $AX = B$:
- ma conajmniej jedno rozwiązanie $\Leftrightarrow r(A) = r([A|B])$
- ma dokładnie jedno rozwiązanie $\Leftrightarrow r(A) = r([A|B]) = n$
- jest sprzeczny $\Leftrightarrow r(A) \neq R([A|B]) \Leftrightarrow r(A) = r([A|B]) - 1$

Jeśli $r(A) = r([A|B]) = r < n$ to układ jest nieoznaczony i ma rozwiązania zależne od $n - r$ parametrów.