# 1. Przestrzeń wektorowa (liniowa)

$V \neq \emptyset$ - zbiór, $(K, \oplus, \odot)$ - ciało przemienne

**wektor** - element zbioru $V$

**skalar** - element ciała $K$

$+ : V \times V \to V$ - działanie wewnętrzne w $V$ (**dodawanie wektorów**)

$\cdot : K \times V \to V$ - działanie zewnętrzne w $V$ (**mnożenie wektora przez skalar**)

$(V, K, +, \cdot)$ jest **przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem $K$** $\Leftrightarrow$

1. struktura $(V, +)$ jest grupą abelową
2. $\forall u, v \in V : \forall \alpha \in K : \alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$
3. $\forall v \in V : \forall \alpha, \beta \in K : (\alpha \odot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \wedge (\alpha \oplus \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) + (\beta \cdot v)$
4. $\forall v \in V : \mathbf{1} \cdot v = v$, gdzie $\mathbf{1}$ jest elementem neutralnym względem $\odot$

Zamiast $(V, K, +, \cdot)$ czasami pisze się $V$ lub $V(K)$.

**wektor zerowy $\overline{0}$** - element neutralny względem $+$

# 2. Własności działań w przestrzeni wektorowej

$(V, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa

1. $\forall v \in V : \mathbf{0} \cdot v = \overline{0}$
2. $\forall \alpha \in K : \alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}$
3. $\forall \alpha \in K : \forall v \in V : (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$
4. $\forall \alpha \in K : \forall v \in V : \alpha \cdot v = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0} \vee v = \overline{0}$
5. $\forall \alpha \in K \setminus \{\mathbf{0}\} : \forall u, v \in V : \alpha \cdot u = \alpha \cdot v \Rightarrow u = v$
6. $\forall \alpha, \beta \in K : \forall v \in V \setminus \{\overline{0}\} : \alpha \cdot v = \beta \cdot v \Rightarrow \alpha = \beta$

# 3. Podprzestrzeń wektorowa (liniowa)

$(V, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa

$U \subset V, U \neq \emptyset$ to **podprzestrzeń wektorowa przestrzeni $V$** $\Leftrightarrow$

1. $\forall u, v \in U : u + v \in U$
2. $\forall \alpha \in K : \forall u \in U : \alpha \cdot u \in U$

$\Leftrightarrow$

$\forall \alpha, \beta \in K : \forall u, v \in U : \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U$

$\Leftrightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : \forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K : \forall v_1, v_2, ..., v_n \in U :$
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \in U$ (**kombinacja liniowa**)

Wektor zerowy przestrzeni liniowej jest elementem każdej jej podprzestrzeni.

# 4. Liniowa niezależność wektorów

$(V, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$

wektory $v_1, v_2, ..., v_n$ są **liniowo niezależne** $\Leftrightarrow$
$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K : (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \overline{0}) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n = \mathbf{0})$

$(v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) \wedge (v = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n), v \in V \Rightarrow (\alpha_1 = \beta_1 \wedge ... \wedge \alpha_n = \beta_n)$
Zbiór $\{v\}$ jest liniowo niezależny $\Leftrightarrow v \neq \overline{0}$

wektory $v_1, v_2, ..., v_n$ są **liniowo zależne** $\Leftrightarrow$
$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K : (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \overline{0}) \wedge (\alpha_1 \neq \mathbf{0} \vee \alpha_2 \neq \mathbf{0} \vee ... \vee \alpha_n \neq \mathbf{0})$
$\Leftrightarrow$ przynajmniej jeden jest **kombinacją liniową** pozostałych lub $\{v_1, ..., v_n\} = \{\overline{0}\}$
zespół wektorów $v_1, v_2, ..., \overline{0}, ..., v_n$ jest liniowo zależny

# 5. Baza przestrzeni wektorowej

$(V, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa

**Liniowa powłoka** zbioru $A \subset V, A \neq \emptyset$:
$\mathrm{Lin}A := \{v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k : \alpha_1, ..., \alpha_k \in K, v_1, ..., v_k \in A\}$
$\mathrm{Lin}A$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $V$ i nazywamy ją **(pod)przestrzenią generowaną przez zbiór $A$**.

$A$ jest zbiorem wektorów **rozpinających** $V \Leftrightarrow \mathrm{Lin}A = V$

**Baza przestrzeni wektorowej** $V$ - zbiór $B \subset V$ taki, że:
1. $\mathrm{Lin}B = V$
2. $\forall v_1, ..., v_k \in B : \{v_1, ..., v_k\}$ jest zbiorem **liniowo niezależnym**

$B$ jest **maksymalnym** (w sensie inkluzji) zbiorem wektorów **liniowo niezależnych** z $V$
$B$ jest **minimalnym** (w sensie inkluzji) zbiorem wektorów **rozpinających** z $V$

$\forall M \subset V : M$ jest **liniowo niezależny** $\Rightarrow \exists B : M \subset B \wedge B$ jest **bazą** $V$
$\forall N \subset V : N$ jest zbiorem wektorów **rozpinających** $V \Rightarrow \exists B' : B' \subset N \wedge B'$ jest **bazą** $V$

$\mathrm{Lin}A = V \Rightarrow$ każdy **maksymalny** podzbiór wektorów **liniowo niezależnych** z $A$ tworzy **bazę** przestrzeni $V$

# 6. Wymiar przestrzeni wektorowej

$B$ - baza przestrzeni wektorowej $V$

**wymiar przestrzeni** $V : \dim V = |B|$
$|B| < +\infty \Rightarrow V$ jest **skończenie wymiarowa**
$|B| = +\infty \Rightarrow V$ jest **nieskończenie wymiarowa**, $\dim V = +\infty$
$V = \{\overline{0}\} \Rightarrow \dim V = 0$

$\dim V = n \Rightarrow$
1. każdy zespół $\boldsymbol{n+1}$ wektorów jest **liniowo zależny** w $V$
2. każdy zespół $\boldsymbol{n}$ wektorów, które **generują** przestrzeń $V$ jest **liniowo niezależny** (jest **bazą**) i na odwrót

$\dim V < +\infty, U$ - podprzestrzeń $V$
1. $\dim U \leq \dim V$
2. $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

# 7. Współrzędne wektora

**Reper bazowy** (czasem po prostu baza) - dowolna baza z ustaloną kolejnością wektorów

$B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ - reper bazowy $(V, K, +, \cdot)$, $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n \in V$
**Współrzędne wektora** $v$ względem bazy $B$ - skalary $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, $v = [\alpha_1, ..., \alpha_n]_B$

Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ oznaczamy w skrócie $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ lub $\mathbb{R}^n$
**Baza kanoniczna** - $B_k := (e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ...e_n = (0, 0, ..., 1))$
$\dim \mathbb{R}^n = n$

# 8. Suma podprzestrzeni

$V_1, V_2$ - podprzestrzenie przestrzeni wektorowej $V$
**Suma podprzestrzeni** $V_1 + V_2 := \{v \in V \mid \exists v_1 \in V_1 : \exists v_2 \in V_2 : v = v_1 + v_2\} = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

1. $V_1 + V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni $V$
2. $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni $V$
3. $V_1 \cup V_2$ na ogół **nie** jest podprzestrzenią przestrzeni $V$

Suma podprzestrzeni $V_1 + V_2$ jest **sumą prostą** oznaczaną $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow$
$\forall v \in V_1 + V_2 : \exists! v_1 \in V_1 : \exists! v_2 \in V_2 : v = v_1 + v_2 \Leftrightarrow$
$V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\}$

**Przestrzeń uzupełniająca** przestrzeni $V_1$ do $V$ to $V_2$ taka, że $V = V_1 \oplus V_2$
Dla każdej podprzestrzeni dowolnej przestrzeni wektorowej istnieje jej przestrzeń uzupełniająca.

$V_1, V_2$ - skończenie wymiarowe $\Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$
$V = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow \dim V = \dim V_1 + \dim V_2$