12

$\sqrt[n]{1}$ to zbiór z takich, że $z^n = 1$ czyli zbiór rozwiązań wielomianu $z^n - 1 = 0$.

Z wzorów Viete'a wiemy że dla wielomianu postaci $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ suma pierwiastków $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ wynosi $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$.

Dla wielomianu $z^n - 1$ $a_{n-1} = 0$ i $a_n = 1$, więc suma pierwiastków wynosi $\frac{-0}{1} = 0$.

13

$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \dots$

$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \dots, n = 1, 2, 3, \dots$

Dowód:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$
$$\binom{n}{0}\cos^n\varphi i^0\sin^0\varphi + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi i\sin\varphi + \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi i^2\sin^2\varphi +$$
$$\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi i^3\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi i^4\sin^4\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi i^5\sin^5\varphi + \dots$$

Kolejne potęgi i przyjmują wartości $1, i, -1, -i$ w kółko, więc:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$
$$\binom{n}{0}\cos^n\varphi\sin^0\varphi + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi i\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi -$$
$$\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi i\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi i\sin^5\varphi - \dots$$

Możemy wyciągnąć i przed nawias:

$$\left(\binom{n}{0}\cos^n\varphi\sin^0\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \dots\right)$$
$$+i\left(\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \dots\right)$$

Ale $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ wynosi też, ze wzoru de Moivre'a $\cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Dwie liczby zespolone są równe, gdy ich części urojne i rzeczywiste są równe, więc:

$\cos n\varphi = \binom{n}{0}\cos^n\varphi\sin^0\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \dots$

$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \dots$

.

Obliczmy $\cos\frac{\pi}{5}$ wykorzystując powyższą własność.

$$\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{5}\right) = \sin\pi = 0 = \binom{5}{1}\cos^4\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} - \binom{5}{3}\cos^2\frac{\pi}{5}\sin^3\frac{\pi}{5} + \binom{5}{5}\sin^5\frac{\pi}{5}$$

Podzielmy obustronnie przez $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$, aby otrzymać parzyste potęgi przy sinusie.

$$0 = \binom{5}{1}\cos^4\frac{\pi}{5} - \binom{5}{3}\cos^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{5} + \binom{5}{5}\sin^4\frac{\pi}{5}$$

Niech $t = \cos\frac{\pi}{5}$. Wtedy $\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - t^2$. Otrzymujemy:

$$0 = 5t^4 - 10t^2\left(1 - t^2\right) + \left(1 - t^2\right)^2$$

$$0 = 5t^4 - 10t^2 + 10t^4 + 1 - 2t^2 + t^4$$

$$0 = 16t^4 - 12t^2 + 1$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 144 - 64 = 80 = \left(4\sqrt{5}\right)^2$$

$$t^2 = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8} > 0$$

$$t = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6 \pm 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5} + 1}}{4} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5} \pm 1\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}$$

przedziale $(0, \pi)$ $\cos x$ jest funkcją malejącą, dlatego $\cos \frac{\pi}{5} > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, więc pasującą wartością jest tylko $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$