Zadanie 1

Niech $A = \{0, 1\}$.
W zbiorze A określamy działanie $\oplus$ przyjmując: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$, oraz działanie $\odot$ przyjmując: $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$, $1 \odot 1 = 1$.

1.a)

Sprawdź, że $(A, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

To samo co $(\mathbb{Z}/2, +, \cdot)$, które jest ciałem.

1.b)

W zbiorze A^2 określamy działanie dodawania jako: $(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$, oraz mnożenie przez elementy z ciała A następująco: $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b)$.
Sprawdź, czy $(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem A.

1. $A^2 \neq \emptyset$
2. $(A, \oplus, \odot)$ to ciało przemienne, bo $\odot$ jest przemienne
3. $+$ i $\cdot$ prowadzą do A^2, bo $(a \oplus c), (b \oplus d), (\alpha \odot a), (a \odot b) \in A$
4. $(A^2, +)$ jest grupą abelową, bo
   - $+$ jest wewnętrzne
   - $+$ jest łączne i przemienne co wynika z łączności i przemienności $\oplus$
   - istnieje element neutralny $(0, 0) : (a, b) + (0, 0) = (a \oplus 0, b \oplus 0) = (a, b)$
   - każdy element ma element symetryczny: $(a, b) + (a, b) = (a \oplus a, b \oplus b) = (0, 0)$
5. $\alpha \cdot ((a, b) + (c, d)) = \alpha \cdot (a \oplus c, b \oplus d) = (\alpha \odot (a \oplus c), \alpha \odot (b \oplus c)) =$ $(\alpha \odot a \oplus \alpha \odot c, \alpha \odot b \oplus \alpha \odot d) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\alpha \odot c, \alpha \odot d) = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$
6. $(\alpha \odot \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \odot \beta) \odot a, (\alpha \odot \beta) \odot b) = (\alpha \odot (\beta \odot a), \alpha \odot (\beta \odot b)) =$ $\alpha \cdot (\beta \cdot a, \beta \cdot b) = \alpha \cdot (\beta \cdot (a, b))$
7. $(\alpha \oplus \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \oplus \beta) \odot a, (\alpha \oplus \beta) \odot b) = ((\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a), (\alpha \odot b) \oplus (\beta \odot b)) =$ $(\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\beta \odot a, \beta \odot b) = (\alpha \cdot (a, b)) + (\beta \cdot (a, b))$
8. $(a, b) \cdot \mathbf{1} = (a \odot 1, b \odot 1) = (a, b)$

$(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

1.c)

Wykaż, że przestrzeń A^2 posiada dokładnie pięć podprzestrzeni.

$A^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, wektor $(0, 0)$ należy do każdej podprzestrzeni.
$\{(0, 0)\}\checkmark$
$\{(0, 0), (0, 1)\}\checkmark$
$\{(0, 0), (1, 0)\}\checkmark$

$\{(0,0),(1,1)\}$✓
$\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$✗, bo $(0,1)+(1,0)=(1,1)$
$\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$✗, bo $(0,1)+(1,1)=(1,0)$
$\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$✗, bo $(1,0)+(1,1)=(0,1)$
$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$✓

Zadanie 2

Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

2.a)

$A=\{(x,y,z):x+y+z=a,a\in\mathbb{R}\}$

Kontrprzykład: $a=1,(1,0,0)+(0,0,1)=(1,0,1)\notin A$

2.b)

$B=\{(x,y,z):x\geq 0\}$

Kontrprzykład: $(-1)\cdot(1,0,0)=(-1,0,0)\notin B$

2.c)

$C=\{(x,y,1):x,y\in\mathbb{R}\}$

Kontrprzykład: $(0,0,1)+(0,0,1)=(0,0,2)\notin C$

2.d)

$D=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 1\}$

Kontrprzykład: $2\cdot(1,0,0)=(2,0,0)\notin D$

2.e)

$E=\{(x,y,z):x=2y\land z=0\}$

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\forall(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in E:\alpha\cdot(x_1,y_1,z_1)+\beta\cdot(x_2,y_2,z_2)=$
$(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2,\alpha z_1+\beta z_2)$
$\alpha x_1+\beta x_2=\alpha\cdot 2y_1+\beta\cdot 2y_2=2(\alpha y_1+\beta y_2)$
$\alpha z_1+\beta z_2=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$

2.f)

$F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) + \beta \cdot (x_2, y_2, z_2) =$
$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$
$3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) - 8(\alpha z_1 + \beta z_2) =$
$\alpha(3x_1 + 2y_1 - 8z_1) + \beta(3x_2 + 2y_2 - 8z_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

Zadanie 3

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami:

3.a)

$A = \{f : f(2) = f(7)\}$✓

$f, g \in A, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \overset{?}{\in} A, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} A$
$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = f(7) + g(7) = (f + g)(7)$
$(\alpha \cdot f)(2) = \alpha f(2) = \alpha f(7) = (\alpha \cdot f)(7)$

3.b)

$B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\}$✗

$f, g \in B, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \overset{?}{\in} B, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} B$
$(f + g)(7) = f(7) + g(7) = 2 + f(1) + 2 + g(1) = 4 + (f + g)(1)$ sprzeczność

3.c)

$C = \{f : f(x_0) = 3\}$✗

$f, g \in C, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \overset{?}{\in} C, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} C$
$(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 3 + 3 = 6$ sprzeczność

Zadanie 4

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}[x]$ (przestrzeń wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$) są jej podprzestrzeniami:

4.a)

$A = \{w : w(0)w(1) = 0\}$✗

Kontrprzykład: $p(x) = x \in A, q(x) = x - 1 \in A$
$(p + q)(x) = x + x - 1 = 2x - 1$
$(p + q)(0)(p + q)(1) = -1 \cdot 1 = -1$

> **4.b)**
>
> $B = \{w : \text{stopień } w \leq 6\}$✓

$q(x), p(x) \in B, \alpha \in \mathbb{R}$
$\deg(q + p) \leq 6 \wedge \deg(\alpha q) \leq 6$

> **4.c)**
>
> $C = \{w : \text{stopień } w = 6\}$✗

Kontrprzykład: $x^6 + (-x^6) = 0 \notin C$

> **4.d)**
>
> $D = \{w : w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 + 1\}$✓

$D = \{w : w(x) = (x^2 + 1)q(x)\}$
$(x^2 + 1)q(x), (x^2 + 1)p(x) \in D, \alpha \in \mathbb{R}$
$(x^2 + 1)q(x) + (x^2 + 1)p(x) = (x^2 + 1)(q(x) + p(x)) \in A$
$\alpha \cdot (x^2 + 1)q(x) = (x^2 + 1)(\alpha q(x)) \in A$

> **Zadanie 5**
>
> Zbadaj, które z układów wektorów należących do $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:

> **5.a)**
>
> $B_1 : (1, 4, 3), (-1, 2, 1), (0, 6, 4)$✗

$1 \cdot (1, 4, 3) + 1 \cdot (-1, 2, 1) + (-1) \cdot (0, 6, 4) = (1 - 1 - 0, 4 + 2 - 6, 3 + 1 - 4) = (0, 0, 0)$

> **5.b)**
>
> $B_2 : (2, 3, -1), (2, 0, 0), (0, 3, 1)$✓

$x(2, 3, -1) + y(2, 0, 0) + z(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.c)

$B_3 : (2,-7,2),(0,2,4),(2,-1,5)\checkmark$

$x(2,-7,2)+y(0,2,4)+z(2,-1,5)=(0,0,0)$

$$\begin{cases}2x+2z=0\\-7x+2y-z=0\\2x+4y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z\\y=-3z\\-9z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$$

5.d)

Znajdź współrzędne wektora $(1,1,1)$ względem tych B_i, które stanowią bazę w $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases}2x+2y=1\\3x+3z=1\\-x+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{5}{6}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$x=z-1$$
$$3z-3+3z=1$$
$$6z=4$$

$$\begin{cases}2x+2z=1\\-7x+2y-z=1\\2x+4y+5z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=-\frac{3}{4}\\z=1\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}-z$$
$$-\frac{7}{2}+7z+2y-z=1$$
$$y=\frac{9}{4}-3z$$
$$1-2z+9-12z+5z=1$$
$$-9z=-9$$

Zadanie 6

Sprawdź liniową zależność wektorów $\sqrt{2}$ i 2 w przestrzeni $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ oraz w przestrzeni $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

$$p\sqrt{2}+2q=0, p,q\in\mathbb{Q}$$
$$\underbrace{p}_{\in\mathbb{Q}}\underbrace{\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}}=\underbrace{-2q}_{\in\mathbb{Q}}\Rightarrow p=q=0$$

liniowo niezależne

$$x\sqrt{2}+2y=0, x,y\in\mathbb{R}$$
$$x=\frac{-2y}{\sqrt{2}}$$

liniowo zależne

Zadanie 7

Dla jakiej wartości parametru k wektor $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów $u_1 = (1, 1, 1)$ i $u_2 = (1, 2, 3)$?

$x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) = (1, -2, k)$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + 2y &= -2 \\ x + 3y &= k \\ y &= -3 \\ x &= 4 \\ k &= -5 \end{aligned}$$

Zadanie 8

Sprawdź, czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

8.a)

$f = \mathrm{Id}, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} ax + b\sin x + c\cos x = 0 \\ x = 0 \Rightarrow c\cos x = 0 \Rightarrow c = 0 \\ x = \pi \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow a = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

liniowo niezależne

8.b)

$f(x) = 1, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x, p(x) = \sin^2 x, q(x) = \cos^2 x$

$-1 \cdot 1 + 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$

liniowo zależne

Zadanie 9

W $\mathbb{R}^3$ dane są trzy wektory: $u = (0, 1, -1), v = (-1, 0, 1), w = (1, -1, 0)$.

9.a)

Wykaż, że wektory te są parami niezależne.

$x(0,1,-1)+y(-1,0,1)=0$ $x(0,1,-1)+y(1,-1,0)=0$ $x(-1,0,1)+y(1,-1,0)=0$

$$\begin{cases} -y & = 0 \\ x & = 0 \\ -x+y & = 0 \end{cases}$$

$$x=y=0$$

$$\begin{cases} y & = 0 \\ x-y & = 0 \\ -x & = 0 \end{cases}$$

$$x=y=0$$

$$\begin{cases} -x+y & = 0 \\ -y & = 0 \\ x & = 0 \end{cases}$$

$$x=y=0$$

9.b)

Czy układ wektorów u, v, w jest liniowo niezależny?

$(0,1,-1)+(-1,0,1)+(1,-1,0)=(0,0,0) \Rightarrow u, v, w$ są liniowo zależne

9.c)

Podaj wymiar oraz bazę podprzestrzeni generowanej przez te wektory.

Wymiar 2, baza to dowolne dwa z u, v, w.

Zadanie 10

Udowodnij, że zbiór: $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2-3x_3-3x_4=0, x_1-x_2+3x_3+x_4=0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz bazy podprzestrzeni z zadania 2.

$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3-3x_4 &= 0 \\ x_1-x_2+3x_3+x_4 &= 0 \\ 2x_1-2x_4 &= 0 \\ x_1 &= x_4 \\ x_4+x_2-3x_3-3x_4 &= 0 \\ x_2 &= 3x_3+2x_4 \end{aligned}$$

Niech $x_3=a, x_4=b$. Wtedy $A=\{(b,2a+2b,a,b) : a,b\in\mathbb{R}\}$
$(b,2a+2b,a,b)=a(0,2,1,0)+b(1,2,0,1) \Rightarrow \{(0,2,1,0),(1,2,0,1)\}$ to baza A.

Podprzestrzenie z zadania **2**:
$E=\{(x,y,z) : x=2y \land z=0\}, F=\{(x,y,z) : 3x+2y-8z=0\}$

$E=\{(2y,y,0) : y\in\mathbb{R}\}=\{y(2,1,0) : y\in\mathbb{R}\} \Rightarrow \{(2,1,0)\}$ to baza E

$F=\left\{\left(x,y,\frac{3x+2y}{8}\right), x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\left(1,0,\frac{3}{8}\right)+y\left(0,1,\frac{1}{4}\right), x,y\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow$
$\left\{\left(1,0,\frac{3}{8}\right),\left(0,1,\frac{1}{4}\right)\right\}$ to baza F

Zadanie 11

Dane są dwa układy wektorów: $B_1 : (1, i, 1+i), (i, -1, 2-i), (0, 0, 3)$ i $B_2 : (2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1+i, 1-i)$.

11.a)

Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.

Niech $a+bi, c+di, e+fi \in \mathbb{C}$.

$$(a+bi)(1, i, 1+i) + (c+di)(i, -1, 2-i) + (e+fi)(0, 0, 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+bi+ci-d = 0 \Leftrightarrow a-d = b+c = 0 \\ ai-b-c-di = 0 \Leftrightarrow a-d = b+c = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_1 \text{ nie jest bazą}$$

$$(a+bi)(2i, 1, 0) + (c+di)(2, -i, 1) + (e+fi)(0, 1+i, 1-i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ai - 2b + 2c + 2di = 0 \\ a+bi-ci+d+e+fi+ei-f = 0 \\ c+di+e+fi-ei+f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d = 0 \\ b-c = 0 \\ a+d+e-f = 0 \\ b-c+e+f = 0 \\ c+e+f = 0 \\ d+f-e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{wektory w } B_2 \text{ są liniowo niezależne}$$

$\dim \mathbb{C}^3(\mathbb{C}) = 3$, $\dim \mathbb{C}^3(\mathbb{R}) = 6$, co pokażemy w **11.b**. Z tego wynika, że B_2 jest bazą w $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$, ale nie w $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.

11.b)

Jaki wymiar mają przestrzenie $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ i $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$?

Przykładowa baza w $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ to $((1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), (0, 0, ..., 1))$, więc $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{C}) = n$.

Przykładowa baza w $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ to
$((1, 0, ..., 0), (i, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), (0, i, ..., 0), (0, 0, ..., 1), (0, 0, ..., i))$,
więc $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$.

11.c)

Znajdź współrzędne wektora $(1, 0, 1)$ w bazie z podpunktu a).

$$(a+bi)(2i,1,0)+(c+di)(2,-i,1)+(e+fi)(0,1+i,1-i)=(1,0,1)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2ai-2b+2c+2di=1\\ a+bi-ci+d+e+fi+ei-f=0\\ c+di+e+fi-ei+f=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+d=0\\ -b+c=\frac{1}{2}\\ a+d+e-f=0\\ b-c+e+f=0\\ c+e+f=1\\ d+f-e=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=0\\ c=\frac{1}{2}\\ d=0\\ e=\frac{1}{4}\\ f=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$(1,0,1)=\left[0,\frac{1}{2}i,\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right]_{B_2}$

Zadanie 12

Niech będzie dana następująca podprzestrzeń U przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ (tj. przestrzeni $\mathbb{C}^2$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$), gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą:

$$U:=\operatorname{Lin}\{(pi,(p-1)i),(p-2-pi,p),(-1-pi,2p)\}.$$

Zbadaj dla jakich wartości parametru rzeczywistego p, zachodzi:

$$(3-2p,p-1+(1-p)i)\in U.$$

Dla wszystkich takich wartości parametru $p\in\mathbb{R}$, wyznacz $\dim U$.

Niech $a,b,c\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases}api+bp-2b-bpi-c-cpi=3-2p\\ api-ai+bp+2cp=p-1+i-pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ap-bp-cp=0\Leftrightarrow p(a-b-c)=0\\ bp-2b-c-3+2p=0\\ ap-a-1+p=0\Leftrightarrow(a+1)(p-1)=0\\ bp+2cp-p+1=0\end{cases}$$

$$p\neq0\wedge p\neq1\Rightarrow$$

$$a=-1$$

$$c=-1-b$$

$$bp-2b+1+b-3+2p=0$$

$$bp-2p-2bp-p+1=0 \text{ dodajemy stronami}$$

$$\cancel{bp}-2b+1+b-3+\cancel{2p}+\cancel{bp}-\cancel{2p}-\cancel{2bp}-p+1=0$$

$$-b-1=p$$

Zadanie 13

Wyznacz bazę przestrzeni $(P_{2n},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie $P_{2n}:=\{w\in\mathbb{R}[x]_{2n}:w(x)=w(-x)\}$.

$P_{2n}=\{a_0+a_2x^2+a_4x^4+...+a_{2n}x^{2n},a_0,...a_{2n}\in\mathbb{R}\}$

$B = (1, x^2, x^4, ..., x^{2n})$

Zadanie 14

W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$. Wykaż, że układ $B_2 = (1, x-2, (x-2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$. Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz. Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

$a \cdot 1 + b(x-2) + c(x-2)^2 = a + bx + b + cx^2 - 2cx + 4c =$

$cx^2 + (b - 2c)x + a + b + 4c$

Ta kombinacja liniowa musi wygenerowac każdy wielomian postaci $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} c &= \alpha \\ b - 2\alpha &= \beta \\ b &= \beta + 2\alpha \\ a + \beta + 2\alpha + \alpha &= \gamma \\ a &= -3\alpha - \beta + \gamma \end{aligned}$$

$2x^2 + 3 = [3, 0, 2]_{B_1} = [-9, 6, 2]_{B_2}$

$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p'(x) = 2ax + b$

$$\begin{aligned} p(1) &= p'(0) \\ a + b + c &= b \\ c &= -a \end{aligned}$$

$A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(x) = ax^2 + bx - a\}$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, p(x) = ax^2 + bx - a \in A, q(x) = cx^2 + dx - c \in A$
$\alpha p(x) + \beta q(x) = (\alpha a + \beta c)x^2 + (\alpha b + \beta d)x - (\alpha a + \beta c) \in A \Rightarrow$
A jest podprzestrzenią $\mathbb{R}[x]_2$
$ax^2 + bx - a = a(x^2 - 1) + b(x) \Rightarrow (x^2 - 1, x)$ to baza A

Zadanie 15

Wykaż, że zbiór liczb postaci $\left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} + e\sqrt{12} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\right\}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych. Znajdź bazę tej przestrzeni.

Zadanie 16

Wiedząc, że wektory u, v, w stanowią bazę przestrzeni liniowej V (nad ciałem $\mathbb{R}$), zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:

16.a)

$B_1 = (u - 2v + w, 3u + w, u + 4v - w)$

$$au - 2av + aw + 3bu + bw + cu + 4cv - cw = 0$$
$$u(a + 3b + c) + v(-2a + 4c) + w(a + b - c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a & + 3b + c & = 0 \\ -2a & \quad + 4c & = 0 \\ a & + b \quad - c & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= -3b - c \\ 6b + 2c + 4c &= 0 \\ b &= -c \\ 3c - c - c - c &= 0 \\ c &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wektory są liniowo zależne, czyli nie stanowią bazy.

16.b)

$B_2 = (u, 2u + v, 3u - v + 4w)$

$$au + 2bu + bv + 3cu - cv + 4cw = 0$$
$$u(a + 2b + 3c) + v(b - c) + w(4c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ b - c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Wektory w B_2 są liniowo niezależne i $\dim B_2 = 3$ więc B_2 jest bazą V.

16.c)

Wyznacz współrzędne wektora $a = 2u - 3v + 8w$ względem tej bazy.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 2 \\ b - c = -3 \\ 4c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$a = [-2, -1, 2]_{B_2}$

Zadanie 17

Wykaż, że dla dowolnych $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ takich, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, wielomiany $w_0, w_1, ..., w_n$, zdefiniowane jako:

$$w_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{dla } i = 0, 1, ..., n,$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

Wektorów w_i jest tyle samo co $\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$, więc wystarczy pokazać, że wektory te są liniowo niezależne.

Niech $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

$$a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + ... + a_n w_n(x) \stackrel{?}{=} 0$$

Zauważmy, że dla $x = x_i$

$$w_i(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1,$$

a dla $x = x_k$, gdzie $k \in \{0, 1, ..., n\}, k \neq i, w_i(x_k) = 0$, bo występuje takie j, że $j = k$ czyli występuje czynnik $(x_k - x_j) = 0$.

Niech $x := x_0$. Wtedy:

$$a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + ... + a_n w_n(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Analogicznie pokazujemy, podstawiając za x kolejne x_i, że $a_i = 0$ dla każdego $i = 0, 1, ..., n$.

Zadanie 18

Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a V_1, V_2 będą podzbiorami V składającymi się, odp., z odwzorowań nieparzystych oraz parzystych. Wykaż, że V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V oraz, że $V = V_1 \oplus V_2$.

Zadanie 19

Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Oznaczmy przez F_a zbiór odwzorowań zerujących się w punkcie a.

19.a)

Wykaż, że F_a jest podprzestrzenią przestrzeni V

19.b)

Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, to $V = F_a + F_b$, ale suma ta nie jest prosta.

Zadanie 20

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz U i V jej podprzestrzeniami.

20.a)

Wykaż, że $U \cup V$ jest podprzestrzenią X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$.

20.b)

Sprawdź, czy $\mathrm{Lin}(U \cup V) = U + V$.