

W zbiorze \mathbb{R}^2 wprowadzamy działania: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
 $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + p y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ struktura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ jest ciałem?

Łatwo zauważyć, że $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ jest zerem, czyli elementem neutralnym względem $+$,
a $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ jedynką, czyli elementem neutralnym względem \cdot , ponieważ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(x, y) + (0, 0) &= (x + 0, y + 0) = (x, y) \\ (0, 0) + (x, y) &= (0 + x, 0 + y) = (x, y) \\ (x, y) \cdot (1, 0) &= (x \cdot 1 + p \cdot y \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x, y) \\ (1, 0) \cdot (x, y) &= (1 \cdot x + p \cdot 0 \cdot y, 1 \cdot y + x \cdot 0) = (x, y)\end{aligned}$$

Żeby struktura była ciałem, to każdy element oprócz zera musi mieć swój element odwrotny.
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (x', y') = (1, 0) \Leftrightarrow$

$$xx' + pyy' = 1 \wedge xy' + x'y = 0$$

$$y' = -\frac{x'y}{x}, \text{ bo } x \neq 0$$

$$xx' + py \cdot \left(-\frac{x'y}{x}\right) = 1$$

$$x' \left(x - \frac{py^2}{x}\right) = 1$$

Jeżeli $x - \frac{py^2}{x} = 0$, to dochodzimy do sprzeczności, czyli element odwrotny nie istnieje.

Równanie $x - \frac{py^2}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = py^2$ ma rozwiązania tylko dla $p \geq 0$. Wtedy $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ na pewno nie jest ciałem. Pozostaje rozważyć $p < 0$.

Rozważmy $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że $h((x, y)) = x + \sqrt{-p}yi$. Wtedy $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}h((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= h((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2) + \sqrt{-p}(y_1 + y_2)i = \\ &= x_1 + \sqrt{-p}y_1i + x_2 + \sqrt{-p}y_2i = h((x_1, y_1)) + h((x_2, y_2))\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}h((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) &= h((x_1 x_2 + p y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)) = \\ &= (x_1 x_2 + p y_1 y_2) + \sqrt{-p}(x_1 y_2 + x_2 y_1)i = \\ &= x_1 x_2 + i^2 \sqrt{-p}^2 y_1 y_2 + \sqrt{-p}x_1 y_2 i + \sqrt{-p}x_2 y_1 i = \\ &= (x_1 + \sqrt{-p}y_1 i)(x_2 + \sqrt{-p}y_2 i) = h((x_1, y_1)) \cdot h((x_2, y_2))\end{aligned}$$

Ponadto h jest bijekcją, ponieważ jest różnowartościowa:

$$\begin{aligned} \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : h((x_1, y_1)) = h((x_2, y_2)) &\Rightarrow x_1 + \sqrt{-p}y_1i = x_2 + \sqrt{-p}y_2i \Rightarrow \\ \underbrace{x_1 - x_2}_{\in \mathbb{R}} &= \underbrace{(y_2 - y_1)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\sqrt{-p}i}_{\in \mathbb{C}} \Rightarrow x_1 - x_2 = y_2 - y_1 = 0 \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \end{aligned}$$

oraz jest suriekcją:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : h((x, y)) = z$$

Niech $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Wtedy:

$$(x, y) = \left(a, \frac{b}{\sqrt{-p}} \right) \Rightarrow h((x, y)) = a + \sqrt{-p} \cdot \frac{b}{\sqrt{-p}} \cdot i = a + bi = z$$

Z tego wynika, że dla $p < 0$ struktura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ jest ciałem, ponieważ jest izomorficzna do $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, która też jest ciałem.