Zadanie 1

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x), B_1 = (u_1, u_2, u_3), B_2 = (v_1, v_2, v_3)$, gdzie $u_1 = v_1 = (1, 0, 0), u_2 = v_2 = (1, 1, 0), u_3 = v_3 = (1, 1, 1)$ i B - baza standardowa (kanoniczna) w $\mathbb{R}^3$.

1.a)

Wyznacz macierz odwzorowania f w bazach standardowych;

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0,-1) \\ f(0,1,0) &= (-1,1,0) \\ f(0,0,1) &= (0,-1,1) \\ M_f(B,B) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.b)

Wykorzystując tę macierz, znajdź obraz wektora $v = (0, -1, -2)$;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1+0 \\ 0-1+2 \\ 0+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$f(v) = (1, 1, -2)$$

1.c)

Wyznacz $M_f(B_1, B_2)$;

Wyznaczmy obrazy wektorów z B_1 i przedstawmy je przy pomocy bazy B_2.

$$f(u_1) = f(1,0,0) = (1,0,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$$f(u_2) = f(1,1,0) = (0,1,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$$f(u_3) = f(1,1,1) = (0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(1,1,0) + 0(1,1,1)$$

$$M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> **1.d)**
>
> Wyznacz obraz wektora v wykorzystując nową macierz;

Wyznaczmy współrzędne wektora v w bazie B_1.

$$v = (0, -1, -2) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = -1 \\ \gamma = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -2 \end{cases}$$

$$v = (1, 1, -2)_{B_1}$$

$$f(v)_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 + 0 \\ 1 + 2 + 0 \\ -1 - 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Zamieńmy z powrotem na bazę kanoniczną.

$$(0, 3, -2)_{B_2} = 0(1, 0, 0) + 3(1, 1, 0) - 2(1, 1, 1) = (1, 1, -2)$$

> **1.e)**
>
> Wyznacz jeszcze raz $M_f(B_1, B_2)$ wykorzystując macierze przejścia.

Znamy $M_f(B, B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, musimy jeszcze wyznaczyć $P_{B \to B_1}$ i $P_{B_2 \to B}$. Wtedy

$$M_f(B_1, B_2) = P_{B_2 \to B} \cdot M_f(B, B) \cdot P_{B \to B_1}$$

$P_{B \to B_1}$ to wektory z B_1 zapisane w bazie kanonicznej B jako kolumny, czyli po prostu:

$$P_{B \to B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że $B_1 = B_2$, więc $P_{B_2 \to B} = P_{B_1 \to B} = \left(P_{B \to B_1}\right)^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -w_2 \\ -w_3 \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$P_{B_2\to B}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_f(B_1,B_2)=P_{B_2\to B}\cdot M_f(B,B)\cdot P_{B\to B_1}=$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}$$

Zadanie 4

Wiedząc, że macierz endomorfizmu $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ma w bazach $B_1=(e_1,e_2)=((1,0),(1,1))$, $B_2=(l_1,l_2)=((1,1),(0,-1))$, postać $M_f(B_1,B_2)=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-1\end{bmatrix}$, sprawdź, czy f jest odwzorowaniem odwracalnym. Jeżeli tak, to wyznacz wzór na f^{-1}.

Odwzorowanie jest odwracalne jeśli macierz odwzorowania w dowolnych bazach jest odwracalna, czyli jej wyznacznik jest różny od zera.

$$\begin{vmatrix}1&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$$

Żeby wyznaczyć wzór potrzebujemy tego odwzorowania w bazie kanonicznej.

$$M_{f^{-1}}(B,B)=\big(M_f(B,B)\big)^{-1}$$

$$M_f(B,B)=P_{B\to B_2}\cdot M_f(B_1,B_2)\cdot P_{B_1\to B}$$

$$P_{B\to B_2}=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix},P_{B\to B_1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}-w_2\\ \\ \end{matrix}\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right]\Rightarrow P_{B_1\to B}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

$$M_f(B,B)=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&-3&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}-3w_2\\ \cdot(-1)\end{matrix}\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-3\\0&1&0&-1\end{array}\right]$$

$$M_{f^{-1}}(B,B)=\begin{bmatrix}1&-3\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$f^{-1}(x,y)=\begin{bmatrix}1&-3\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-3y\\-y\end{bmatrix}=(x-3y,-y)$$

Zadanie 5

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ i niech $B=(e_1,e_2,e_3)$ będzie jej bazą. Udowodnij, że $B'=(e_1',e_2',e_3')$, gdzie $e_1'=e_1,e_2'=e_1+e_2,e_3'=e_1+e_2+e_3$, jest bazą przestrzeni V, wyznacz $P = P_{B \to B'}$ oraz współrzędne wektora $x = e_1 - 2e_2 + 3e_3$ w bazie B'.

Sprawdźmy, czy $e'_1 = (1,0,0)_B, e'_2 = (1,1,0)_B, e'_3 = (1,1,1)_B$ są liniowo niezależne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Są liniowo niezależne i jest ich tyle samo co w B, więc B' również jest bazą V.

$P_{B \to B'}$ to wektory z B' zapisane w bazie B czyli ta sama macierz $P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Wiemy, że $[x]_B = P_{B \to B'} \cdot [x]_{B'}$. Niech $x = (a,b,c)_{B'}$. Wtedy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 - 3 = -5 \\ a = 1 + 5 - 3 = 3 \end{cases}$$

$$x = (3, -5, 3)_{B'}$$

Zadanie 6

P jest macierzą przejścia od pewnej bazy B_1 do danej bazy $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6.a)

Wyznacz wektory bazy B_1.

Niech $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$.

$$\begin{cases} v_1 = 2u_2 + u_3 \\ v_2 = -u_1 \\ v_3 = -u_2 - u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -v_2 \\ u_2 = v_1 + v_3 \\ u_3 = v_1 - 2(v_1 + v_3) = -v_1 - 2v_3 \end{cases}$$

6.b)

Wektor v ma w bazie B_1 współrzędne $[-2, 4, 2]^T$. Znajdź współczynniki wektora v w bazie B_2 (Wykorzystaj P!).

$$[v]_{B_2} = P_{B_2 \to B_1} \cdot [v]_{B_1} = \left(P_{B_1 \to B_2}\right)^{-1} \cdot [v]_{B_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -2w_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} +w_3 \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$[v]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7

Niech $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ macierzą tego odwzorowania w bazach $B_1 = (u_1, u_2)$ i $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$.

7.a)

Wykorzystując macierze przejścia, znajdź macierz A' odwzorowania f w bazach $B_1' = (3u_1 - 2u_2, -u_1 + u_2)$ i $B_2' = (-v_2, v_1 + v_3, -v_1 - 2v_3)$.

$$A' = M_f(B_1', B_2') = P_{B_2' \to B_2} \cdot A \cdot P_{B_1 \to B_1'}$$

$$P_{B_1 \to B_1'} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{B_2' \to B_2} = \left(P_{B_2 \to B_2'}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ -w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -w_3 \\ \cdot(-1) \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow P_{B_2' \to B_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 13 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

7.b)

Dwoma sposobami (korzystając z macierzy A i A' znajdź $f(w)$ dla wektora $w = 2u_1 - u_2$).

$$w = [2, -1]_{B_1}$$

$$f(w) = A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}_{B_2} = 6v_1 + 3v_2 + 3v_3$$

Żeby obliczyć $f(w)$ przy pomocy A' musimy go najpierw zamienić na współrzędne z B_1'.

$$w = 2u_1 - u_2 = 3u_1 - 2u_2 - u_1 + u_2 = [1, 1]_{B_2}$$

$$f(w) = A'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 13 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}_{B_2} =$$

$$-3(-v_2) + 9(v_1 + v_3) + 3(-v_1 - 2v_3) = 6v_1 + 3v_2 + 3v_3$$

Zadanie 8

Niech $A = M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : U \to V$, a $C = M_g(B_3, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierzą odwzorowania $g : V \to U$.

8.a)

Znajdź $M_{f \circ g}(B_2, B_2)$, jeżeli wiadomo, że $B_1 = (u_1, u_2), B_2 = (v_1, v_2, v_3), B_3 = (w_1, w_2, w_3)$, gdzie $w_1 = 2v_2 + v_3, w_2 = -v_1, w_3 = -v_2 - v_3$.

Dostajemy wektor z V w bazie B_2, tłumaczymy go na B_3, wrzucamy do g i otrzymujemy odwzorowanie z U w bazie B_1, a potem wrzucamy do f i otrzymujemy odwzorowanie z V w bazie B_2.

$$M_{f \circ g}(B_2, B_2) = M_f(B_1, B_2) \cdot M_g(B_3, B_1) \cdot P_{B_3 \to B_2}$$

Wyznaczmy $P_{B_3 \to B_2}$. Są to wektory z B_2 zapisane przy pomocy B_3.

$$\begin{cases} w_1 = 2v_2 + v_3 \\ w_2 = -v_1 \\ w_3 = -v_2 - v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -w_2 \\ v_2 = w_1 + w_3 \\ v_3 = -w_1 - 2w_3 \end{cases}$$

$$P_{B_3 \to B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M_{f \circ g}(B_2, B_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 7 & -10 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.b)

Wyznacz $\mathrm{Ker} g$.

$\mathrm{Ker} g = \left\{v \in V : g(v) = \overline{0}\right\}$. Niech $v = (x, y, z)_{B_3}$. Wtedy:

$$g(v) = \overline{0} \Leftrightarrow M_g(B_3, B_1) \cdot [v]_{B_3} = \overline{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x - y + z \\ 2x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$$

$$v = x(1, -1, -2)_{B_3} = x(2v_2 + v_3 + v_1 + 2v_2 + 2v_3) = x(v_1 + 4v_2 + 3v_3)$$

$$\mathrm{Ker} g = \mathrm{Lin}\{v_1 + 4v_2 + 3v_3\}$$