

## Zadanie 1

Rozwiąż układy równań:

1.a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & -1 & -9 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -w_1 \\ -2w_1 \\ -w_1 \\ +w_1 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} :(-2) \\ :3 \end{array}} \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} +w_2 \\ +5w_2 \\ -2w_2 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -5w_3 \\ +2w_2 \end{array}} \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} :(-2) \\ :2 \end{array}} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$x_5 = 2$$

$$x_4 - 2 = -1 \Rightarrow x_4 = 1$$

$$x_3 - 1 = 1 \Rightarrow x_3 = 2$$

$$x_2 + 2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_1 + 2 + 2 + 1 + 2 = 8 \Rightarrow x_1 = 1$$

1.b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & -1 & -9 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-w_1} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{:(-2)} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{:3} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-5w_3} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{+w_2} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{+5w_2} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-2w_2}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{:(-2)} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x_5 &= t \in \mathbb{R} \\ x_4 - t &= -1 \Rightarrow x_4 = t - 1 \\ x_3 - t + 1 &= 1 \Rightarrow x_3 = t \\ x_2 + t &= 4 \Rightarrow x_2 = 4 - t \\ x_1 + 4 - t + t + t - 1 + t &= 8 \Rightarrow x_1 = 5 - 2t \end{aligned}$$

1.c)

$$\begin{cases} -3x + 6y - 3z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -3 & +6 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{+3w_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow 0 = 1 \text{ sprzeczność}$$

## Zadanie 2

Znajdź bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  rozwiązań następującego układu:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-2w_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{:3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{5}{3}w_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x_3 = t \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 + 2 \cdot 0 - t = 0 \Rightarrow x_1 = t$$

Rozwiązania są postaci  $(t, 0, t) = t(1, 0, 1)$ , więc podprzestrzeń to  $V = \text{Lin}\{(1, 0, 1)\}$ . Wektor  $(1, 0, 1)$  jest liniowo niezależny, więc baza to  $B = \{(1, 0, 1)\}$ .

### Zadanie 3

Zbadaj w zależności od parametru  $k$  ilość rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

W przypadku, gdy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, znajdź je stosując:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$\det A = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2 = (k-1)(k^2 + 3k - 2) = (k-1)^2(k+2)$$

Z twierdzenia Cramera, gdy  $k \notin \{1, -2\}$ ,  $\det A \neq 0 \Rightarrow$  układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dla  $k = 1$ ,  $[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$ , co sprowadza się do równania  $x + y + z = 1$ , więc jest nieskończenie wiele rozwiązań.

Dla  $k = -2$ ,  $[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$ . Po dodaniu  $w_2$  i  $w_3$  do  $w_1$  dostajemy  $0 = 3$ , więc układ jest sprzeczny i nie ma rozwiązań.

#### 3.a)

metodę Gaussa;

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] -w_1 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-k^2 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k^3 \end{array} \right] : (k-1) \rightarrow \\ &\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & -1 & -k \\ 0 & 1 & 1+k & 1+k+k^2 \end{array} \right] -w_2 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 2+k & 1+2k+k^2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$(2+k)x_3 = 1 + 2k + k^2 \Rightarrow x_3 = \frac{(k+1)^2}{k+2}$$

$$x_2 - \frac{(k+1)^2}{k+2} = -k \Rightarrow x_2 = \frac{-k^2 - 2k + k^2 + 2k + 1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

$$x_1 + \frac{1}{k+2} + \frac{k(k+1)^2}{k+2} = k^2 \Rightarrow x_1 = \frac{k^3 + 2k^2 - 1 - k^3 - 2k^2 - k}{k+2} = \frac{-k-1}{k+2}$$

### 3.b)

wzory Cramera;

$$x_1 = (\det A)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix} = \frac{k^2 + k + k^2 - k^3 - 1 - k^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{-k^3 + k^2 + k - 1}{(k-1)^2(k+2)} =$$

$$= \frac{(k-1)(-k^2 + 1)}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{-(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{-k-1}{k+2}$$

$$x_2 = (\det A)^{-1} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{vmatrix} = \frac{k^3 + k^2 + 1 - k - k^3 - k}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{k^2 - 2k + 1}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}$$

$$x_3 = (\det A)^{-1} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = \frac{k^4 + 1 + k - k - k^2 - k^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{k^4 - 2k^2 + 1}{(k-1)^2(k+2)} =$$

$$\frac{(k^2 - 1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k+2}$$

### 3.c)

metodę macierzy odwrotnej.

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$A^D = \begin{bmatrix} +(k^2 - 1) & -(k-1) & +(1-k) \\ -(k-1) & +(k^2 - 1) & -(k-1) \\ +(1-k) & -(k-1) & +(k^2 - 1) \end{bmatrix} = (k-1) \begin{bmatrix} k+1 & -1 & -1 \\ -1 & k+1 & -1 \\ -1 & -1 & k+1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^D)^T = \frac{k-1}{(k-1)^2(k+2)} \begin{bmatrix} k+1 & -1 & -1 \\ -1 & k+1 & -1 \\ -1 & -1 & k+1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\frac{1}{(k-1)(k+2)} \begin{bmatrix} k+1 & -1 & -1 \\ -1 & k+1 & -1 \\ -1 & -1 & k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(k-1)(k+2)} \begin{bmatrix} k+1-k-k^2 \\ -1+k^2+k-k^2 \\ -1-k+k^3+k^2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(k-1)(k+2)} \begin{bmatrix} 1-k^2 \\ k-1 \\ (k-1)(k+1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k-1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \\ \frac{(k+1)^2}{k+2} \end{bmatrix}$$

#### Zadanie 4

Zbadaj rząd macierzy uzupełnionej następującego (rzeczywistego) układu równań w zależności od parametru rzeczywistego  $p$  oraz rozwiąż ten układ dla każdej wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} (p+1)x - y - pz = 2p \\ x + py + 2pz = 1 \\ x + pz = 1 \\ px + y = 1 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} p+1 & -1 & -p & 2p \\ 1 & p & 2p & 1 \\ 1 & 0 & p & 1 \\ p & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 1 & p & 2p & 1 \\ p+1 & -1 & -p & 2p \\ p & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-(p+1)w_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 1 & p & 2p & 1 \\ 0 & -1-p & -p & 2p \\ p & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-pw_1}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 0 & p & p & 0 \\ 0 & -1 & -p^2-2p & p-1 \\ 0 & 1 & -p^2 & 1-p \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_4} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & -p^2 & 1-p \\ 0 & -1 & -p^2-2p & p-1 \\ 0 & p & p & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+w_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & -p^2 & 1-p \\ 0 & 0 & -2p(p+1) & 0 \\ 0 & 0 & p(p^2+1) & p(p-1) \end{array} \right]$$

Jeśli  $p \notin \{0, -1, 1\}$  to dwa ostatnie wiersze są sprzeczne, bo

$$-2p(p+1)x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$p(p^2+1)x_3 = p(p-1) \Rightarrow x_3 = \frac{p(p-1)}{p(p^2+1)} \neq 0$$

czyli układ nie ma rozwiązań.

Dla  $p = 0$  mamy:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dla  $p = -1$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{2}{-2} = -1 \\ x_2 = 2 + (-1) = 1 \\ x_1 = 1 + (-1) = 0 \end{cases}$$

Dla  $p = 1$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

### Zadanie 5

Wyznacz wszystkie wartości parametru zespolonego  $p$  ( $p \in \mathbb{C}$ ), dla którego poniższa macierz zespolona  $U$  jest osobliwa. Rozwiąż poniższy układ równań (\*) w ciele liczb zespolonych w zależności od parametru zespolonego  $p$  ( $p \in \mathbb{C}$ ):

$$U = \begin{bmatrix} p^2 & 1 & p^2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & p+1 & 1 \\ -p^2 & -1 & -p^2 & p+1 \end{bmatrix}, \quad (*) \begin{cases} p^2x + y + p^2z = -1 \\ -x + y - z = -1 \\ x - y + (p+1)z = 1 \\ -p^2x - y - p^2z = p+1 \end{cases}$$

$$\det U = \begin{vmatrix} p^2 & 1 & p^2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & p+1 & 1 \\ -p^2 & -1 & -p^2 & p+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-w_1} \begin{vmatrix} p^2 & 1 & p^2 & -1 \\ -1-p^2 & 0 & -1-p^2 & 0 \\ 1+p^2 & 0 & p^2+p+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} \xrightarrow{+w_1} \begin{vmatrix} -1-p^2 & -1-p^2 & 0 \\ 1+p^2 & p^2+p+1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}$$

Stosujemy rozwinięcie Laplace'a dla drugiej kolumny:

$$\begin{aligned} \det U &= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1-p^2 & -1-p^2 & 0 \\ 1+p^2 & p^2+p+1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = \\ &= -((-1-p^2)(p^2+p+1)p - p(-1-p^2)(1+p^2)) = p(p^2+1)(p^2+p+1-1-p^2) = \\ &= p^2(p^2+1) = p^2(p-i)(p+i) \end{aligned}$$

Macierz jest osobliwa dla  $p \in \{0, i, -i\}$ .

Stosując takie same przejście otrzymujemy macierz dopełnioną układu równań:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} p^2 & 1 & p^2 & -1 \\ -1-p^2 & 0 & -1-p^2 & 0 \\ 1+p^2 & 0 & p^2+p+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{array} \right]$$

Z czwartego wiersza mamy  $0 = p$ , czyli dla  $p \neq 0$  układ jest sprzeczny. Dla  $p = 0$  mamy:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + w_2 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -1 \text{ dla } t \in \mathbb{C} \\ x_3 = -t \end{cases}$$