

# 1. Działania

## działanie wewnętrzne

$$h : A \times A \rightarrow A$$

$(A, h)$  lub  $(A, \circ)$  - zbiór z określonym działaniem

$h(a, b) = a \circ b$  - wynik działania

## działanie zewnętrzne

$$g : F \times X \rightarrow X, \text{ gdzie } F, X \neq \emptyset$$

$g(\alpha, x) = \alpha * x$ , gdzie  $\alpha \in F, x \in X$  - wynik działania

# 2. Grupy

$$(A, \circ), A \neq \emptyset$$

Struktura  $(A, \circ)$  to **grupa (przemienna/abelowa)** gdy spełnione są warunki:

1. **łączność**:  $\forall x, y, z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
2. **element neutralny**:  $\exists e \in A : x \circ e = x = e \circ x$  (jest jeden)
3. **element symetryczny**:  $\forall x \in A : \exists x' \in A : x \circ x' = e = x' \circ x$  (dla każdego  $x$  jest jeden)
4. **przemiennność**:  $\forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$

# 3. Pierścienie

$P \neq \emptyset, \circ, *$  - działania wewnętrzne w zbiorze  $P$

Struktura  $(P, \circ, *)$  to **pierścień (przemienny)** gdy spełnione są warunki:

1. struktura  $(P, \circ)$  jest **grupą abelową**
2. **łączność \***:  $\forall x, y, z \in P : (x * y) * z = x * (y * z)$
3. **prawostronna rozdzielnosc \* względem  $\circ$** :  $\forall x, y, z \in P : (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z)$
4. **lewostronna rozdzielnosc \* względem  $\circ$** :  $\forall x, y, z \in P : x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$
5. **przemiennosc \***:  $\forall x, y \in P : x * y = y * x$

**działanie addytywne**:  $\circ$  lub  $+$ .

Elementem neutralnym jest **zero** (0).  $x, y \in P$  to **dzielniki 0**  $\Leftrightarrow x, y \neq 0 \wedge x \cdot y = 0$

Element symetryczny do  $x$  względem  $+$  to element **przeciwny**  $(-x)$ .

**działanie multiplikatywne**:  $*$  lub  $\cdot$ .

**pierścień z jednością** to pierścień, w którym istnieje element neutralny ze względu na  $\cdot$  czyli **jedynka** (1).

**pierścień całkowity** to pierścień **przemienny** ( $\forall x, y \in P : x \cdot y = y \cdot x$ ),  
z **jednością** i **bez dzielników 0**.

# 4. Ciała

Pierścień  $(K, +, \cdot)$  to **ciało (przemiennie)** gdy spełnione są warunki:

1. jest to **pierścień z jednością**: istnieje element neutralny względem  $\cdot$  (1)

2. istnieje **element odwrotny do  $x$  względem  $\cdot$**  :

$$\forall x \in K \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in K : x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$$

3. **przemienność** :  $\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$

Struktura  $(K, +, \cdot)$  to **ciało (przemienne)** gdy spełnione są warunki:

1. struktura  $(K, +)$  jest **grupą abelową**

2. struktura  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  jest **grupą (przemienną)**

3. **prawostronna rozdzielnosć względem  $+$**  :  $\forall x, y, z \in K : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

4. **lewostronna rozdzielnosć względem  $+$**  :  $\forall x, y, z \in K : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

W ciele nie ma dzielników 0.

## 5. Homomorfizmy

Odwzorowanie  $h : A_1 \rightarrow A_2$  to **homomorfizm grupy**  $(A_1, +)$  w grupę  $(A_2, \oplus) \Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in A_1 : h(x + y) = h(x) \oplus h(y)$$

$e_1$  jest elementem neutralnym w  $A_1 \Rightarrow h(e_1)$  jest elementem neutralnym w  $A_2$

$$\forall x \in A_1 : h(x') = (h(x))'$$

Odwzorowanie  $h : P_1 \rightarrow P_2$  nazywamy **homomorfizmem pierścienia/ciała**  $(P_1, +, \cdot)$  w pierścień/ciało  $(P_2, \oplus, \odot) \Leftrightarrow$

$$1. \forall x, y \in P_1 : h(x + y) = h(x) \oplus h(y)$$

$$2. \forall x, y \in P_1 : h(x \cdot y) = h(x) \odot h(y)$$

Dwie struktury są **izomorficzne**, jeżeli istnieje **izomorfizm**, czyli **homomorfizm bijektywny**, jednej struktury na drugą.

**Automorfizm** to izomorfizm struktury na samą siebie.