Zadanie 1

Sprawdź jakie własności mają w $\mathbb{Z}$ następujące działania:

1.a)

$a \circ b = a - b$

1.b)

$a \circ b = a^2 + b^2$

1.c)

$a \circ b = 2(a + b)$

1.d)

$a \circ b = -a - b$

Zadanie 2

W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie $x \circ y := x + y + xy$. Czy $(\mathbb{R}, \circ)$ jest grupą? Czy jest grupą para $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$?

Zadanie 3

W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie $x \circ y := x + y + 2$. Czy $(\mathbb{Z}, \circ)$ jest grupą?

Zadanie 4

Które z następujących zbiorów liczb są grupami:

4.a)

liczby wymierne ze względu na dodawanie, mnożenie

4.b)

liczby niewymierne ze względu na dodawanie, mnożenie

4.c)

liczby zespolone o module równym 1 ze względu na mnożenie

4.d)

liczby zespolone o module równym 1 ze względu na następujące działanie: $z_1 \circ z_2 = |z_1| z_2$

4.e)

liczby całkowite ze względu na odejmowanie

Zadanie 5

Niech E_n będzie zbiorem wszystkich pierwiastków n-tego stopnia (w $\mathbb{C}$) z jedności. Udowodnij, że $(E_n, \cdot)$ jest grupą.

Zadanie 6

Niech D będzie zbiorem wszystkich całkowitych potęg liczby 2. Sprawdź (i uzasadnij) czy struktura $(D, \circ)$, gdzie $a \circ b := \frac{a \cdot b}{2}$, jest grupą.

Zadanie 7

Niech $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj., dla dowolnych zbiorów A i B, $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sprawdź, czy dla dowolnie ustalonego zbioru $X \neq \emptyset$, para $(2^X, \triangle)$ jest grupą abelową.

Zadanie 8

Niech $(G, *)$ będzie grupą z elementem neutralnym e taką, że: $a * a = e$ dla każdego $a \in G$. Wykaż, że $(G, *)$ jest grupą abelową.

Zadanie 9

Czy następujące zbiory są ciałami ze względu na dodawanie i mnożenie:

9.a)

$\left\{a + b\sqrt[3]{5} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$

9.b)

liczby wymierne, które nie są całkowite

9.c)

zbiór liczb zespolonych postaci $a + ib\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$

Zadanie 10

W zbiorze $\mathbb{Z}/k$ (tj. zbiorze ilorazowym ze względu na relację przystawania modulo k) określamy działania $+$, $\cdot$ następująco:

$$[a] + [b] = [a + b], \; [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

10.a)

Sprawdź, czy $(\mathbb{Z}/12, +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką ale z dzielnikami zera.

10.b)

Wykaż, że $(\mathbb{Z}/7, +, \cdot)$ jest pierścieniem całkowitym.

Zadanie 11

11.a)

Wykaż, że zbiór $A = \left\{x = a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem.

11.b)

Wykaż, że zbiór $B = \left\{x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.

11.c)

Udowodnij, że odwzorowanie $f : x = a + b\sqrt{3} \to \tilde{x} = a - b\sqrt{3}$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.

Zadanie 12

Dla danego zbioru $X \neq \emptyset$, definiujemy strukturę $(2^X, \triangle, \cap)$, gdzie „$\triangle$” oznacza różnicę symetryczną a „$\cap$” - przecięcie zbiorów. Sprawdź czy ta struktura jest:

12.a)

pierścieniem?

12.b)

pierścieniem przemiennym?

12.c)

pierścieniem z jednością?

12.d)

pierścieniem z całkowitym?

12.e)

ciałem?

Zadanie 13

W zbiorze $\mathbb{R}^2$ wprowadzamy działania: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + p y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ struktura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ jest ciałem?

Zadanie 14

14.a)

Wykaż, że zbiór $A = \{x = m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą ze względu na dodawanie.

14.b)

Wykaż, że zbiór $B = \{x = 2^n 3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą ze względu na mnożenie.

14.c)

Udowodnij, że A i B są izomorficzne.