1. Odwzorowania liniowe

V, W - przestrzenie wektorowe nad ciałem K
$f : V \to W$ to **odwzorowanie liniowe** $\Leftrightarrow$
- $\forall u, v \in V, \alpha \in K : f(u+v) = f(u) + f(v) \land f(\alpha v) = \alpha f(v)$
- $\forall v_1, ..., v_n \in V, \alpha_1, ..., \alpha_n \in K : f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_n f(v_n)$

Jeżeli $f : V \to W$ jest odwzorowaniem liniowym to:
- $f(\overline{0}_V) = \overline{0}_W$ (**zahowanie zera**)
- $\forall v \in V : f(-v) = -f(v)$
- jest jednoznacznie określone przez **wartości f na wektorach bazowych** V

2. Obrazy i jądra

$f : V \to W$ - odwzorowanie liniowe

Jądro odwzorowania f: $\mathrm{Ker} f := \{v \in V : f(v) = \overline{0}_W\}$
$\mathrm{Ker} f$ jest **podprzestrzenią V**

Obraz odwzorowania f (zbiór wartości): $\mathrm{Im} f := \{w \in W : \exists v \in V : w = f(v)\}$
$\mathrm{Im} f$ jest **podprzestrzenią W**
$\mathrm{Im} f =$ **$\mathrm{Lin} f(B)$**, gdzie B to baza V

Rząd odwzorowania $r(f) = \dim \mathrm{Im} f$

Jeżeli $\dim V < \infty$ to **$\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$**

3. Morfizmy

$f : V \to W$ - odwzorowanie liniowe

- **monomorfizm**: f to iniekcja $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{\overline{0}\} \Leftrightarrow r(f) = \dim V$
- **epimorfizm**: f to surjekcja ($\mathrm{Im} f = W$) $\Leftrightarrow r(f) = \dim W$
- **izomorfizm**: f to bijekcja - **endomorfizm**: $V = W$
- **automorfizm**: f to bijekcja i $V = W$
- **forma liniowa**: $W = K$

przestrzenie izomorficzne: $V \sim W$ jeżeli istnieje izomorfizm z V na $W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

$\mathcal{L}(V, W)$ - **zbiór odwzorowań** liniowych $f : V \to W$

Struktura $(\mathcal{L}(V, W), K, +, \cdot)$ jest **przestrzenią wektorową**