1. Funckja ciągła

Definicja 1.1

Funckja ciągła to funckja, w której mała zmiana argumentu powoduje małą zmianę wartości funkcji.

Definicja Heinego

f jest ciągła w $x_0 \in D_f \Leftrightarrow \forall_{(x_n) \subset D_f} \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

Definicja 1.2 (Definicja Cauchy'ego (epsilonowo-deltowa))

f jest ciągła w $x_0 \in D_f \Leftrightarrow$
$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D_f} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Twierdzenie 1.3

Twierdzenie często błędnie podawane jako definicja.

Z: $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset D_f, \alpha > 0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ jest ciągła w x_0

Dowód.

Dowód zostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika □

Lemat 1.4

To jest przykładowy lemat

Wniosek 1.4.1

To jest wniosek

Zadanie 1.1

zadanie 1

Zadanie 1.2

zadanie 2

1.1. Przykłady funkcji ciągłych (ciągłych w każdym punkcie dziedziny)

funkcje:

- wielomianowe
- trygonometryczne
- wykładnicze
- logarytmiczne
- wymierne

1.2. Zadania

Zadanie 1.2.1

Udowodnij, że jeżeli f i g są ciągłe w x_0 to $f + g$ jest ciągła w x_0.

Rozwiązanie. Z założenia wiemy, że:

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} \exists_{\delta_1 > 0} \forall_{x \in D_f} |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1$$
$$\forall_{\varepsilon_2 > 0} \exists_{\delta_2 > 0} \forall_{x \in D_f} |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_2$$

Teza:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D_f} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| < \varepsilon$$

Z nierówności trójkąta wiemy, że:

$$|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| =$$
$$|f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

1.3. Własność Darboux

Własność 1.3.1

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux $\Leftrightarrow$
$\forall_{y \in [f(a), f(b)]} \exists_{x_0 \in [a,b]} : f(x_0) = y$
Każda wartość pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ została przyjęta przynajmniej raz.

Dowód. Załóżmy, że:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$f(a) < 0 < f(b)$$

Można to osiągnąć przez przesunięcie f.

Chemy udowodnić, że

$$\exists_{x_0 \in [a,b]} : f(x_0) = 0.$$

□