Zadanie 1

Sprawdź, czy:

1.a)

wektory $u = [-1, 3, -5], v = [1, -1, 1], w = [4, 2, 0]$ są współpłaszczyznowe;

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 10 - 20 - 2 - 0 = 0$$

Wektory są współpłaszczyznowe.

1.b)

punkty $P = (0, 0, 0), Q = (-1, 2, 3), R = (2, 3, -4), S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

Sprawdźmy współpłaszczyznowość wektorów $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 16 - 6 - 18 + 4 - 20 = -71 \neq 0$$

Punkty nie są współpłaszczyznowe.

Zadanie 2

Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = [1, 5, -3], \overrightarrow{AC} = [-1, 0, 4]$. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right| = \frac{1}{2}||AB||h_C \Rightarrow h_C = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right|}{||AB||}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [20, -1, 5]$$

$$\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right| = \sqrt{20^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{426}$$

$$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

$$h_C = \sqrt{\frac{426}{35}}$$

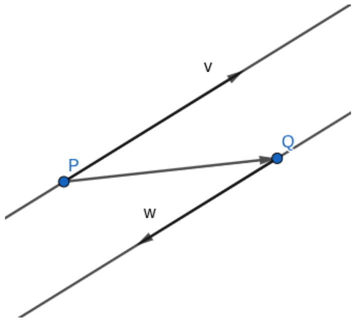
Zadanie 3

Proste l_1 i l_2 dane są równaniami parametrycznymi:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R});$$

Wykaż, że l_1 i l_2 są równoległe. Oblicz odległość między nimi. Znajdź równanie ogólne ich wspólnej płaszczyzny

$$P = (1, 0, 2), Q = (6, 4, 0)$$
$$\vec{v} = [-4, -2, 4], \vec{w} = [6, 3, -6]$$
$$\overrightarrow{PQ} = [6 - 1, 4 - 0, 0 - 2] = [5, 4, -2]$$



Wektory kierunkowe $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są proporcjonalne:

$$\frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$$

więc proste są równoległe.

$$d(l_1, l_2) = d(P, l_2) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}||}{||\vec{w}||}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = [-18, 18, -9] = 9 \cdot [-2, 2, -1]$$

$$d = \frac{9\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{9 \cdot 3}{\sqrt{81}} = 3$$

Płaszczyzna wspólna obu prostych to płaszczyzna rozpięta np. przez wektory $\vec{w}$ i $\overrightarrow{PQ}$. Znajdźmy wektor normalny tej płaszczyzny.

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = 9 \cdot [-2, 2, -1]$$

Skalar można pominąć, więc przyjmijmy $\vec{n} = [-2, 2, -1]$.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt Q i prostopadłej do wektora $\vec{n}$ ma postać:

$$\begin{aligned} \pi : -2(x - 6) + 2(y - 4) - z &= 0 \\ -2x + 2y - z + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Zadanie 4

Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = 1 + 2s \\ z = -3 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Znajdź równanie normalne ich wspólnej płaszczyzny (jeżeli istnieje).

Spróbujmy znaleźć punkt wspólny prostych.

$$\begin{cases} 2 - t = -3 + 2s \\ 3 + 2t = 1 + 2s \\ -3t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s = 5 - t \\ 2s = 2 + 2t \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 2 \end{cases}$$

Proste przecinają się w jednym punkcie $A = (1, 5, -3)$, więc są współpłaszczyznowe.

Wektory kierunkowe to $\vec{v} = [-1, 2, -3]$ i $\vec{w} = [2, 2, 0]$.

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [6, -6, -6] = 6 \cdot [1, -1, -1]$$

$$\pi : (x - 1) - (y - 5) - (z + 3) = 0$$

Zadanie 5

Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = s \\ z = -s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Jeżeli leżą one na jednej płaszczyźnie, to napisz jej równanie ogólne. Jeżeli nie, to oblicz odległość między tymi prostymi.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 \\ t = s \\ 2 = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = s \\ s = -2 \end{cases}$$

Dochodzimy do sprzeczności, czyli proste nie mają punktów wspólnych. Wektory kierunkowe $\vec{v} = [2, 1, 0]$ i $\vec{w} = [0, 1, -1]$ nie są proporcjonalne, czyli proste nie są równoległe i nie leżą na jednej płaszczyźnie.

$P = (1, 0, 2), Q = (3, 0, 0), \overrightarrow{PQ} = [2, 0, -2]$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [2, 2, 2]$$

$$d(l_1, l_2) = d(P, l_2) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}||}{||\vec{w}||} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

Zadanie 6

Napisz równanie ogólne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2, 4)$, $B = (2, 1, 3)$ i $C = (3, -1, 5)$. Wyznacz odległość punktu $Q = (5, 0, 8)$ od płaszczyzny π oraz znajdź punkt symetryczny do punktu Q względem tej płaszczyzny.

Płaszczyzna π przechodzi przez punkt A i jest rozpięta na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [3, -1, -1], \overrightarrow{AC} = [4, -3, 1]$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = [-4, -7, -5] = -[4, 7, 5]$$

$$\begin{aligned} \pi : 4(x+1) + 7(y-2) + 5(z-4) &= 0 \\ 4x + 7y + 5z - 30 &= 0 \end{aligned}$$

Odległość punktu od płaszczyzny można wyliczyć z wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 8 - 30|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 5^2}} = \frac{30}{\sqrt{90}} = \frac{30}{3\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Żeby wyznaczyć odbicie puntku Q znajdźmy prostą l przechodzącą przez Q prostopadłą do płaszczyzny π. Będzie mieć ona postać $Q + t\vec{n}$, czyli:

$$l : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 7t \\ z = 8 + 5t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Wyznaczmy $\overrightarrow{QP}$, gdzie P to rzut punktu Q na płaszczyznę π, czyli przecięcie tej płaszczyzny z prostą l.

$$4(5 + 4t) + 7(7t) + 5(8 + 5t) - 30 = 0$$

$$90t + 30 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{QP} = -\frac{1}{3}\vec{n}$$

Niech Q' to będzie odbicie symetryczne punktu Q względem płaszczyzny π. Wtedy

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ'} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = 2\overrightarrow{QP} = -\frac{2}{3}\vec{n} = \left[-\frac{8}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{10}{3}\right]$$

$$Q' = Q + \overrightarrow{QQ'} = \left(5 - \frac{8}{3}, -\frac{14}{3}, 8 - \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

Zadanie 7

Znajdź rzut prostokątny punktu $P = (6, 4, 0)$ na prostą

$$l : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

oraz punkt symetryczny do P względem tej prostej.

Zauważmy, że dla $t = 0$ dostajemy $x = 6, y = 4, z = 0$ czyli punkt P. Oznacza to, że punkt P leży na tej prostej, więc jest swoim rzutem prostokątnym na tę prostą oraz odbiciem symetrycznym względem niej.

Zadanie 8

Znajdź rzut prostokątny prostej $k : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{1}$ na płaszczyznę $\pi : x + y - 2z + 4 = 0$.

Prosta k przechodzi przez punkt $P = (2, 2, 5)$ i ma wektor kierunku $\vec{v} = [1, 1, 1]$.

Wektor normalny płaszczyzny π to $\vec{n} = [1, 1, -2]$.

$\vec{v} \circ \vec{n} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Rightarrow k \parallel \pi$

Prosta jest równoległa do płaszczyzny więc wystarczy znaleźć rzut prostokątny tylko jednego punktu, np. P. Wyznaczmy prostą l przechodzącą przez P i prostopadłą do π.

$$l : \begin{cases} 2 + t \\ 2 + t \\ 5 - 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Punkt przecięcia l i π to rzut prostokątny P_0 punktu P na π.

$$(2 + t) + (2 + t) - 2(5 - 2t) + 4 = 0$$

$$6t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$P_0 = \left(2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, 5 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

Rzut prostej k na płaszczyznę π musi mieć ten sam wektor kierunku, ponieważ $k \parallel \pi \Rightarrow k$.

$$k : \frac{x - \frac{7}{3}}{1} = \frac{y - \frac{7}{3}}{1} = \frac{z - \frac{13}{3}}{1}$$
$$x = y = z + 2$$

Zadanie 9

Znajdź odległość prostej $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ od płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s + 3t \\ y = 2 - 2s - 2t \\ z = -1 + s - t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Płaszczyzna π zawiera punkt $P = (1, 2, -1)$ i jest rozpięta na wektorach $\vec{v} = [-1, -2, 1]$ i $\vec{w} = [3, -2, -1]$.

Prosta l zawiera punkt $Q = (2, -3, 2)$ i ma wektor kierunku $\vec{u} = [1, 2, -1] = -\vec{v} \Rightarrow l \parallel \pi$, więc wystarczy znaleźć odległość Q od π.

Wektor normalny płaszczyzny π:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [4, 2, 8] = 2 \cdot [2, 1, 4]$$
$$\pi : 2(x - 1) + (y - 2) + 4(z + 1) = 0$$
$$2x + y + 4z = 0$$
$$d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

Zadanie 10

Dana jest prosta

$$l : \begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ x \phantom{{}-2y} - 2z = 0 \end{cases}$$

oraz płaszczyzna $\pi_1 : x + y + z + 8 = 0$. Znajdź równanie ogólne płaszczyzny π zawierającej prostą l i prostopadłej do płaszczyzny π_1. Zbadaj wzajemne położenie prostej l i krawędzi k przecięcia się płaszczyzn π i π_1.

Z równania prostej l:

$$\left.\begin{aligned} &x = 2z \\ &7z - 2y = 3 \Rightarrow y = \tfrac{7}{2}z - \tfrac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -\frac{3}{2} + 7t \\ z = 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Wynika z tego, że prosta l zawiera punkt $\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$, więc płaszczyzna π też musi go zawierać.

Oprócz tego, wektor normalny płaszczyzny π musi być prostopadły do prostej l oraz do wektora normalnego płaszczyzny π_1.

Wektor kierunkowy prostej l to $\vec{v} = [4, 7, 2]$, a wektor normalny płaszczyzny π_1 to $\overrightarrow{n_1} = [1, 1, 1]$. Niech $\vec{n} = [a, b, c]$ będzie wektorem normalnym płaszczyzny π. Wtedy:

$$\vec{n} \circ \vec{v} = 0 \wedge \vec{n} \circ \overrightarrow{n_1} = 0$$

$$4a + 7b + 2c = 0 \wedge a + b + c = 0$$

$$2a + 5b = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}a$$

$$-3a - 5c = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{5}a$$

Wektor zerowy nie może być wektorem normalnym, więc możemy bez straty ogólności przyjąć $a = 5$. Wtedy $\vec{n} = [5, -2, -3]$.

$$\pi : 5x - 2\left(y + \frac{3}{2}\right) - 3z = 0$$

$$5x - 2y - 3z - 3 = 0$$

Proste l i k obie należą do płaszczyzny π, więc albo są równoległe i wtedy l nie przecina nigdy płaszczyzny π_1, albo przecinają się w punkcje przebicia π_1 przez prostą l.

$$4t - \frac{3}{2} + 7t + 2t + 8 = 0$$

$$13t + \frac{13}{2} = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

Czyli proste k i l przecinają się w punkcie $\left(-\frac{4}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (-2, -5, -1)$.

Zadanie 11

Znajdź punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem prostej

$$l : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

oraz płaszczyznę π zawierającą prostą l i punkt P.

Z równania prostej l:

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \quad l : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Wyznaczmy płaszczyznę π_0 która przechodzi przez punkt P oraz jest prostopadła do prostej l. Wektorem normalnym tej płaszczyzny będzie wektor kierunku prostej l, czyli $[1,-1,1]$.

$$\pi_0 : (x-2)-(y-3)+(z+1)=0$$

Punkt P_0 przebicia tej płaszczyzny przez prostą l to będzie rzut prostokątny punktu P na tą prostą.

$$\begin{aligned}(t-2)-(-t-3)+(t+1)&=0\\ 3t+2&=0\\ t&=-\frac{2}{3}\\ P_0&=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

Odbicie P' punktu P leży po drugiej stronie P_0.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP_0}&=\left[-\frac{2}{3}-2,\frac{2}{3}-3,-\frac{2}{3}+1\right]=\left[-\frac{8}{3},-\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right]\\ \overrightarrow{P_0P'}&=\overrightarrow{PP_0}\Rightarrow\\ P'&=\left(-\frac{2}{3}-\frac{8}{3},\frac{2}{3}-\frac{7}{3},-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{10}{3},-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

Płaszczyzna zawierająca punkt P ma równanie postaci $a(x-2)+b(y-3)+c(z+1)=0$, gdzie $a,b,c\in\mathbb{R}$. Równanie musi zachodzić dla współrzędnych z prostej l, dlatego:

$$\begin{aligned}a(t-2)+b(-t-3)+c(t+1)=0 &\text{ dla każdego } t\in\mathbb{R}\\ t(a-b+c)-2a-3b+c=0&\end{aligned}$$

$$\begin{cases}a-b+c=0\\ -2a-3b+c=0\end{cases}$$

$$3a+2b=0\Rightarrow b=-\frac{3}{2}a$$

$$-5a-2c=0\Rightarrow c=-\frac{5}{2}a$$

$a\neq 0$ więc możemy bez straty ogólności przyjąć $a=2$. Wtedy płaszczyzna π ma postać:

$$\begin{aligned}\pi : 2(x-2)-3(y-3)-5(z+1)&=0\\ 2x-3y-5z&=0\end{aligned}$$

Zadanie 12

Zbadaj wzajemne położenie prostej l prostopadłej do płaszczyzny $\pi : y = 2 + z$ i przechodzącej przez punkt $A = (1, 2, 0)$ oraz prostej k przechodzącej przez punkt $B = (0, 3, -1)$ i równoległej do prostej

$$k' : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

Wyznacz odległość prostych l i k. Wyznacz objętość równoległościanu rozpinanego przez wersory prostych l i k oraz wektor $\overrightarrow{AB}$.

Prosta l ma wektor kierunku równy wektorowi normalnemu płaszczyzny $\pi : y - z - 2 = 0$, czyli $\vec{v} = [0, 1, -1]$ więc jej równanie to:

$$l : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Wektor kierunkowy $\vec{w}$ prostej k jest taki sam jak prostej k'. Musi być on prostopadły do wektorów normalnych dwóch płaszczyzn których prosta k' jest przecięciem.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [-3, 0, -3] = -3 \cdot [1, 0, 1]$$

Więc prosta k ma równanie

$$k : \begin{cases} x = s \\ y = 3 \\ z = -1 + s \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Sprawdźmy, czy proste l i k mają punkty wspólne.

$$\begin{cases} 1 = s \\ 2 + t = 3 \quad \Rightarrow t = 1 \\ -t = -1 + s \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

Nie mają punktów wspólnych a ich wektory kierunkowe nie są proporcjonalne, dlatego nie są współpłaszczyznowe, czyli są skośne.

Odległość dwóch prostych skośnych możemy obliczyć ze wzoru:

$$d(l, k) = \frac{\left|\left(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}\right)\right|}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{\left|(\vec{v} \times \vec{w}) \circ \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

$$\overrightarrow{AB} = [-1, 1, -1]$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [1, -1, -1]$$

$$d = \frac{|1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Wersory to wektory jednostkowe, więc:

$$\vec{u}_l = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\vec{u}_k = \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Objętość równoległościanu to moduł z iloczynu mieszanego:

$$V = \left|\left(\vec{u}_l, \vec{u}_k, \overrightarrow{AB}\right)\right| = \left|\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Zadanie 13

Dana jest płaszczyzna $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$ oraz prosta $l : x = y = z$. Wyznacz punkt A przecięcia się prostej l i płaszczyzny π oraz rzut prostokątny k prostej l na płaszczyznę π. Wyznacz pole trójkąta ABB' , gdzie $B = (0, 0, 0)$ jest punktem należącym do prostej l, a B' jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą k.

$$\begin{aligned} x + 2x + 3x - 6 &= 0 \\ 6x &= 6 \\ x = y = z &= 1 \\ A &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Punkt A leży na płaszczyźnie więc jest swoim własnym rzutem na nią. Aby znaleźć rzut prostej l potrzebujemy jeszcze rzut drugiego punktu, np. B.

Prosta przechodząca przez B prostopadła do płaszczyzny π ma równanie:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ y = 3t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Rzut B na π to przecięcie tej prostej z płaszczyzną:

$$t + 2(2t) + 3(3t) - 6 = 0$$
$$14t = 6$$
$$t = \frac{3}{7}$$

Więc $B' = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$. Jest to też rzut B na prostą k. Ma ona wektor kierunkowy $\overrightarrow{AB'} = \left[-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right]$. Możemy to uprościć do $\vec{v} = [-4, -1, 2]$, czyli dostajemy równanie:

$$k : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Pole trójkąta ABB; to połowa pola równoległoboku wyznaczonego przez wektory $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BB'}$.

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BB'}\right|\right|$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BB'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{9}{7} \end{vmatrix} = \left[\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right] = \frac{3}{7} \cdot [1, -2, 1]$$

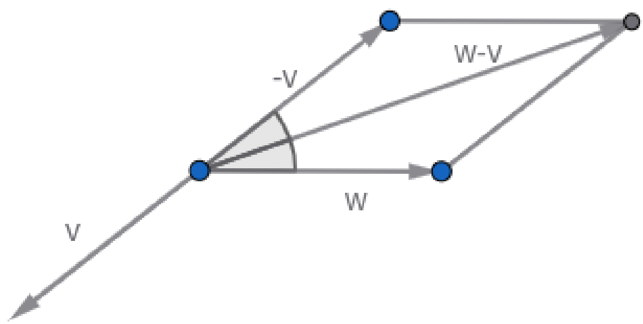
$$P_\triangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{6}}{14}$$

Zadanie 14

Napisz równanie parametryczne i kierunkowe prostej l będącej dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste:

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}, l_2 : \frac{x+6}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+29}{-12}$$

Jeżeli weźmiemy wektory kierunkowe o tej samej długości to ich suma (albo różnica, jeśli tworzą kąt rozwarty) będzie przekątną rombu, a więc dwusieczną, której szukamy.



Wektor kierunkowy l_1 to $\vec{v_0} = [2, -1, 2]$, a l_2 to $\overrightarrow{w_0} = [4, -3, -12]$.

$$\vec{v} = \frac{\vec{v_0}}{||\vec{v_0}||} = \frac{\vec{v_0}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\vec{v_0}}{\sqrt{9}} = \frac{\vec{v_0}}{3} = \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\vec{w} = \frac{\overrightarrow{w_0}}{||\overrightarrow{w_0}||} = \frac{\overrightarrow{w_0}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-12)^2}} = \frac{\overrightarrow{w_0}}{\sqrt{169}} = \frac{\overrightarrow{w_0}}{13} = \left[\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, -\frac{12}{13}\right]$$

Sprawdźmy kąt między $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{13} + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{13}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{12}{12}\right) = \frac{8+3-24}{39} = -\frac{13}{39} < 0$$

Iloczyn skalarny jest ujemny, więc kąt jest rozwarty. Dwusieczna będzie mieć wektor kierunkowy równy:

$$\vec{w}-\vec{v} = \left[\frac{4}{13}-\frac{2}{3}, -\frac{3}{13}+\frac{1}{3}, -\frac{12}{13}-\frac{2}{3}\right] = \left[-\frac{14}{39}, \frac{4}{39}, -\frac{62}{39}\right] = -\frac{2}{39}\cdot[7,-2,31]$$

Musimy jeszcze znaleźć punt P przecięcia l_1 i l_2.

$$l_1 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1-t \\ z = 2+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R}), \qquad l_2 : \begin{cases} x = -6+4s \\ y = 1-3s \\ z = -29-12s \end{cases} (s\in\mathbb{R})$$

$$\begin{cases} 1+2t = -6+4s \\ -1-t = 1-3s \\ 2+2t = -29-12s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2t = -7+4s &= -31-12s \\ 16s &= -24 \\ s &= -\frac{3}{2} \\ t &= \frac{1}{2}(-7-6) = -\frac{13}{2} \\ x &= -6-6 = -12 \\ y &= 1+\frac{9}{2} = \frac{11}{2} \\ z &= -29+18 = -11 \end{aligned}$$

Mamy punkt $P = \left(-12, \frac{11}{2}, -11\right)$, więc dwusieczna l ma postać

$$l : \begin{cases} x = -12+7t \\ y = \frac{11}{2}-2t \\ z = -11+31t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

Zadanie 15

Oblicz miarę kąta między:

15.a)

prostą $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-3}$ i płaszczyzną $\pi = x - z = 0$;

$$\vec{v} = [2, 0, -3]$$
$$\vec{n} = [1, 0, -1]$$
$$\sin\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 + 0 + 3|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$$

15.b)

płaszczyznami $\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0, \pi_2 : 2x + y - z + 3 = 0;$

$$\vec{n}_1 = [1, -2, 3]$$
$$\vec{n}_2 = [2, 1, -1]$$
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 - 2 - 3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)$$

15.c)

prostymi:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 4 - s \\ z = 1 + 3s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$\vec{v}_1 = [-1, 1, 3]$$
$$\vec{v}_2 = [-2, -1, 3]$$
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{|2 - 1 + 9|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{154}}$$
$$\alpha = \arccos\left(\frac{5\sqrt{154}}{77}\right)$$