1.f

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2| \Leftrightarrow -|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

$$|z_1| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2 + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$$

Co zostało udowodnione w **1.e**. Analogicznie:

$$|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

$$-|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2|$$

3.e

$z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$

Założenia: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$|z| = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + 1 - \cos^2\alpha} =$$

$$\sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha+1-\cos\alpha)} =$$

$$\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = \sqrt{2\left(1 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$$

$\cos\frac{\alpha}{2}$ jest zawsze dodatni co wynika z założeń.

Niech $\varphi = \arg(z)$. Wtedy:

$$\cos\varphi = \frac{1+\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

Więc:

$$z = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

12

$\sqrt[n]{1}$ to zbiór z takich, że $z^n = 1$ czyli zbiór rozwiązań wielomianu $z^n - 1 = 0$.

Z wzorów Viete'a wiemy że dla wielomianu postaci $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ suma pierwiastków $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ wynosi $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$.

Dla wielomianu $z^n - 1$ $a_{n-1} = 0$ i $a_n = 1$, więc suma pierwiastków wynosi $\frac{-0}{1} = 0$.

13

$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \ldots$

$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots$

Dowód:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$
$$\binom{n}{0} \cos^n \varphi i^0 \sin^0 \varphi + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi i \sin\varphi + \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi i^2 \sin^2 \varphi +$$
$$\binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi i^3 \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi i^4 \sin^4 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi i^5 \sin^5 \varphi + \ldots$$

Kolejne potęgi i przyjmują wartości $1, i, -1, -i$ w kółko, więc:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$
$$\binom{n}{0} \cos^n \varphi \sin^0 \varphi + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi i \sin\varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi -$$
$$\binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi i \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi i \sin^5 \varphi - \ldots$$

Możemy wyciągnąć i przed nawias:

$$\left(\binom{n}{0} \cos^n \varphi \sin^0 \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \ldots\right)$$
$$+i\left(\binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin\varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \ldots\right)$$

Ale $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ wynosi też, ze wzoru de Moivre'a $\cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Dwie liczby zespolone są równe, gdy ich części urojne i rzeczywiste są równe, więc:

$\cos n\varphi = \binom{n}{0} \cos^n \varphi \sin^0 \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \ldots$

$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin\varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \ldots$

.

Obliczmy $\cos\frac{\pi}{5}$ wykorzystując powyższą własność.

$$\sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{5}\right) = \sin\pi = 0 = \binom{5}{1} \cos^4 \frac{\pi}{5} \sin\frac{\pi}{5} - \binom{5}{3} \cos^2 \frac{\pi}{5} \sin^3 \frac{\pi}{5} + \binom{5}{5} \sin^5 \frac{\pi}{5}$$

Podzielmy obustronnie przez $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$, aby otrzymać parzyste potęgi przy sinusie.

$$0 = \binom{5}{1} \cos^4 \frac{\pi}{5} - \binom{5}{3} \cos^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5} + \binom{5}{5} \sin^4 \frac{\pi}{5}$$

Niech $t = \cos\frac{\pi}{5}$. Wtedy $\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - t^2$. Otrzymujemy:

$$0 = 5t^4 - 10t^2\left(1 - t^2\right) + \left(1 - t^2\right)^2$$

$$0 = 5t^4 - 10t^2 + 10t^4 + 1 - 2t^2 + t^4$$

$$0 = 16t^4 - 12t^2 + 1$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 144 - 64 = 80 = \left(4\sqrt{5}\right)^2$$

$$t^2 = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8} > 0$$

$$t = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6 \pm 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5} + 1}}{4} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5} \pm 1\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}$$

W przedziale $(0, \pi)$ $\cos x$ jest funkcją malejącą, dlatego $\cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, więc pasującą wartością jest tylko $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$