Zadanie 1

Dane są relacje $R = (\mathbb{N}, \mathrm{gr} R, \mathbb{N})$, $S = (\mathbb{N}, \mathrm{gr} S, \mathbb{N})$, gdzie:

$\mathrm{gr} R = \{(1,1),(1,2),(3,2),(3,4),(3,7),(2,9),(5,3)\}$,
$\mathrm{gr} S = \{(1,2),(1,7),(2,5),(2,4),(7,9),(4,10)\}$.

1.a)

Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny tych relacji.

$D_R = \{1,3,2,5\}, \text{Cl}_R = \{1,2,4,7,9,3\}$

$D_S = \{1,2,7,4\}, \text{Cl}_S = \{2,7,5,4,9,10\}$

1.b)

Utwórz relacje $R \circ S, S \circ R, S^{-1}, R^{-1}, S^{-1} \circ R^{-1}, (S \circ R)^{-1}, S^{-}1 \circ R$.

$\mathrm{gr}(R \circ S) = \{(1,9),(2,3)\}$

$\mathrm{gr}(S \circ R) = \{(1,2),(1,7),(1,5),(1,4),(3,5),(3,4),(3,10),(3,9)\}$

$\mathrm{gr} S^{-1} = \{(2,1),(7,1),(5,2),(4,2),(9,7),(10,4)\}$

$\mathrm{gr} R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3),(7,3),(9,2),(3,5)\}$

$\mathrm{gr}(S^{-1} \circ R^{-1}) = \{(3,2),(9,1)\}$

$\mathrm{gr}(S \circ R)^{-1} = \{(2,1),(7,1),(5,1),(4,1),(5,3),(10,3),(9,3)\}$

$\mathrm{gr}(S^{-1} \circ R) = \{(1,1),(3,1),(3,2),(3,1),(2,7)\}$

1.c)

Sprawdź, że $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}$.

$\mathrm{gr}(S^{-1} \circ R^{-1}) = \{(3,2),(9,1)\}$

$\mathrm{gr}(R \circ S)^{-1} = \{(9,1),(3,2)\}$

Zadanie 2

Udowodnij, że dla dowolnej relacji R zachodzi implikacja:

$\mathrm{gr}R^{-1} \subset \mathrm{gr}R \Rightarrow \mathrm{gr}R^{-1} = \mathrm{gr}R$

$(x, y) \in \mathrm{gr}R \Rightarrow (y, x) \in \mathrm{gr}R^{-1} \Rightarrow (y, x) \in \mathrm{gr}R \Rightarrow (x, y) \in \mathrm{gr}R^{-1}$

Pierwsza i trzecia implikacja wynikają z definicji relacji odwrotnej,
a druga z tego, że $\mathrm{gr}R^{-1} \subset \mathrm{gr}R$.

Skoro $(x, y) \in \mathrm{gr}R \Rightarrow (x, y) \in \mathrm{gr}R^{-1}$ to $\mathrm{gr}R \subset \mathrm{gr}R^{-1}$.

$\mathrm{gr}R \subset \mathrm{gr}R^{-1} \wedge \mathrm{gr}R^{-1} \subset \mathrm{gr}R \Rightarrow \mathrm{gr}R^{-1} = \mathrm{gr}R$

Zadanie 3

Wykaż, że dla relacji zwrotnej R, równość $R \circ R = R$ jest równoważna „przechodności” relacji R.

$R = (X, \mathrm{gr}R, X)$

R jest zwrotna $\Rightarrow \forall x \in X : xRx$

Do czego wykorzystujemy zwrotność R?

$R \circ R = (X, \mathrm{gr}(R \circ R), X), \mathrm{gr}(R \circ R) = \{(x, z) \in X^2 : \exists y \in X : xRy \wedge yRz\}$

$xRy \wedge yRz \Rightarrow (x, z) \in \mathrm{gr}(R \circ R)$

Ale $\mathrm{gr}(R \circ R) = \mathrm{gr}R$, więc $(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \Leftrightarrow R$ jest przechodnia.

Zadanie 4

Wykaż, że dla zbioru X z relacją R:

R jest relacją równoważności $\Leftrightarrow R^{-1}$ jest relacją równoważności.

1. zwrotność:

   $\forall x \in X : xRx \Leftrightarrow xR^{-1}x$

2. symetryczność:

   $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$

   $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x, yRx \Rightarrow xR^{-1}y$

   $\forall x, y \in X : yR^{-1}x \Rightarrow xR^{-1}y$

3. przechodność:

   $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$, $yRz \Rightarrow zR^{-1}y$, $xRz \Leftrightarrow zR^{-1}x$

$\forall x, y, z \in X : zR^{-1}y \wedge yR^{-1}x \Rightarrow zR^{-1}x$

> **Zadanie 5**
>
> Wykaż, że jeżeli relacja R określona w zbiorze X jest zwrotna i przechodnia, to $R \cap R^{-1}$ określa relację równoważności.

$R \cap R^{-1} = (X, \mathrm{gr}(R \cap R^{-1}), X)$, $\mathrm{gr}(R \cap R^{-1}) = \{(x, y) \in X^2 : xRy \wedge xR^{-1}y\}$

1. zwrotność:

   R jest zwrotna $\Rightarrow \forall x \in X : xRx \Rightarrow xR^{-1}x$

   $(xRx \wedge xR^{-1}x) \Rightarrow (x, x) \in \mathrm{gr}(R \cap R^{-1})$

2. symetryczność:

   $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x \wedge xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$
   $\forall x, y \in X : (xRy \wedge xR^{-1}y) \Rightarrow (yR^{-1}x \wedge yRx)$
   $\Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{gr}(R \cap R^{-1}) \Rightarrow (y, x) \in \mathrm{gr}(R \cap R^{-1})$

3. przechodność:

   $x, y, z \in X$

   R jest przechodnie $\Rightarrow xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

   R^{-1} jest przechodnie (**Zadanie 4**) $\Rightarrow xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z \Rightarrow xR^{-1}z$

   $(xRy \wedge xR^{-1}y) \wedge (yRz \wedge yR^{-1}z) \Rightarrow (xRz \wedge yR^{-1}z)$

> **Zadanie 6**
>
> W zbiorze $\mathbb{N}^2$ dana jest relacja $R = (\mathbb{N}^2, \mathrm{gr}R, \mathbb{N}^2)$ taka, że $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Wykaż, że R jest relacją równoważności i znajdź zbiór ilorazowy.

$(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N}^2$

$a + b = b + a \Rightarrow (a, b)R(a, b) \Rightarrow R$ jest zwrotna

$(a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a) \Rightarrow ((a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)) \Rightarrow R$ jest symetryczna

$$\begin{aligned} a + d &= b + c \\ c + f &= d + e \\ a + d + c + f &= b + c + d + e \\ a + f &= b + e \end{aligned}$$

$((a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \Rightarrow (a, b)R(e, f)) \Rightarrow R$ jest przejściowa

R jest zwrotna, symetryczna i przejściowa $\Rightarrow R$ jest relacją równoważności.

Zbiór ilorazowy $X/R = \{[(a,b)] : (a,b) \in \mathbb{N}^2\}$

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow a - b = c - d$

$[(r,0)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : a - b = r\}, r \in \mathbb{N}$

$[(0,r)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : a - b = -r\}, r \in \mathbb{N}$

$X/R = \{[(r,0)] : r \in \mathbb{N}\} \cup \{[(0,r)] : r \in \mathbb{N}\}$

Zadanie 7

Niech $k \in \mathbb{N}_+$. W zbiorze $\mathbb{Z}$ wprowadzamy relację $m \equiv n (\operatorname{mod} k) \Leftrightarrow k|(m - n)$. Wykaż, że relacja ta jest równoważnością. Zbiór ilorazowy tej relacji będziey oznaczać przez $\mathbb{Z}/k$.

7.a)

Przyjmując $k = 7$ podaj: $[2], [5], [-5]$;

7.b)

Przyjmując $k = 7$ podaj: $\mathbb{Z}/7$