1. Metryki

Metryka w zbiorze X ($X \neq \emptyset$) - dowolna funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ taka, że:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (symetria)
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (warunek trójkąta)
4. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Przestrzeń metryczna - para (X,d)

Przykłady metryk:

- **euklidesowa**: $d_e((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$
- **taksówkarska/miejska**: $d_t((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$
- **maksimum**: $d_m((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = \max\{|y_i - x_i| : i = 1,...,n\}$
- **dyskretna**: $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x\neq y \end{cases}$

Kula (otwarta) o środku x_0 i promieniu r - $K(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) < r\}$

Zbiór ograniczony $A \subset X$ - istnieje kula o środku $x_0 \in X$ w której zawiera się A

Zbiór otwarty (nie ma brzegu)$A \subset X$ - dla każdego $x_0 \in A$ istnieje kula o środku x_0 która zawiera się w A

Zbiór domknięty (ma brzeg) $A \subset X$ - $X \setminus A$ jest otwarty

Własności zbiorów otwartych i domkniętych

1. $\emptyset, X$ są i otwarte i domknięte
2. Złączenie i część wspólna zbiorów otwartych jest otwarta
3. Złączenie i część wspólna zbiorów domkniętych jest domknięta

Topologia τ w zbiorze X - zbiór podzbiorów X, które są otwarte. Każdy element τ musi spełniać powyższe warunki.
Topologia indukowana metryką d - $\tau_d = \{U \in X : U \text{ - otwarty w } (X,d)\}$

Wnętrze zbioru $\text{int}A$ - największy zbiór otwarty zawarty w A

Domknięcie zbioru $\overline{A}$ - najmniejszy zbiór domknięty zawierający A.

Otoczenie punktu x_0 - dowolny zbiór otwarty zawierający x_0. $\text{ot}(x_0)$ - zbiór wszystkich otoczeń.

Punkt brzegowy x_0 zbioru $A \subset X$ - każda kula $K(x_0,r)$ ma część wspólną i z A i z $X \setminus A$.

Brzeg ∂A zbioru A - zbiór wszystkich punktów brzegowych

Punkt skupienia $x_0 \in X$ zbioru $A \subset X$ - dowolnie blisko niego znajdują się inne punkty z A. Zbiór jest domknięty kiedy zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. (np. $(0,1\rangle$ nie jest domknięty, bo 0 jest jego punktem skupienia.)
x_0 jest punktem skupienia A gdy istnieje ciąg $(x_n) \subset A \setminus \{x_0\}$ który zmierza do x_0.

Przestrzeń niespójna - możemy podzielić x na otwarte zbiory A_1, A_2 takie, że:

1. $A_1 \cup A_2 = X$
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $A_1, A_2 \neq \emptyset$ emptyset

Przestrzeń spójna - nie jest niespójna

Definicja granicy ciągu - $\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n, g) = 0$

Równoważność metryk d_1 i d_2 na X - dowolny ciąg $(x_n) \subset X$ jest zbieżny w (X, d_1) wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny w (X, d_2).

Jednostajna równoważność metryk - $\exists m, M > 0 : \frac{1}{m} d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq M d_2(x, y)$
Metryki euklidesowa, taksówkowa i maksimum są jednostajnie równoważne (i równoważne) na $\mathbb{R}^n$.

Ciąg Cauchy'ego - od pewnego momentu w ciągu elementy są dowolnie blisko siebie:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq n_0 : d(a_n, a_m) < \varepsilon$
Każdy ciąg zbieżny w (X, d) jest ciągiem Cauchy'ego w (X, d).

Przestrzeń zupełna - każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do granicy należącej do tej przestrzeni. (np. $\mathbb{Q}$ nie jest zupełny, bo ciąg $3, 3.1, 3.14, \ldots$ zmierza do $\pi \notin \mathbb{Q}$)

Zbiór zwarty - z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny do granicy należącej do tego zbioru. Dla metryk euklidesowej, taksówkarskiej i maksimum zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy kiedy jest zbiórem domkniętym i ograniczonym.

2. Odwzorowania ciągłe

Obraz zbioru $A \subset X$ poprzez odwzorowanie $f : X \to Y$ - $f[A] = \{f(x) \in Y : x \in A\}$

Przeciwobraz zbioru $B \subset Y$ - $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$

Definicje granicy funkcji $f : X \to Y, (X, d), (Y, \rho)$ - przestrzenie metryczne
$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow$

- **definicja topologiczna (Cauchy'ego)** $\forall V \in \text{ot}(g) \, \exists U \in \text{ot } (x_0) : f[U \setminus \{x_0\}] \subset V$
  Wartości f z otoczenia x_0 mogą się zawierać w dowolnie małym otoczeniu g.
- **definicja Cauchy'ego w przestrzeniach metrycznych**
  $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), g) < \varepsilon$
  $\forall K(g, \varepsilon) \, \exists K(x_0, \delta) : f[K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}] \subset K(g, \varepsilon)$
- **definicja Heinego w przestrzeniach metrycznych**
  $\forall (x_n) \subset X \setminus \{x_0\} : \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), g) = 0$
  Wartości każdego ciągu zmierzającego do x_0 zmierzają do g

Definicje funkcji ciągłej

- ***f* ciągła w zbiorze *X*** $\Leftrightarrow \forall V \in \tau_Y : f^{-1}[V] \in \tau_X$
  przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym
- ***f* ciągła w punkcie x_0** $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- ***f* ciągła w zbiorze $A \subset X$** $\Leftrightarrow f$ ciągła w każdym punkcie $x_0 \in A$

Odwzorowanie ograniczone - obraz $f[X]$ jest zbiorem ograniczonym

Tw. o zwartości obrazu funkcji ciągłej na zbiorze zwartym
Z: $f : X \to Y$, (X, d), (Y, ρ)-przestrzenie metryczne, f ciągła
T: X jest zbiorem zwartym $\Rightarrow$ $f[X]$ jest zbiorem zwartym

Tw. Weierstrassa o osiąganiu kresów
Z: $f : X \to \mathbb{R}$, (X, d), $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - p. metryczne, X zwarty
T: $\exists x_1, x_2 \in X : f(x_1) = \sup f[X] \wedge f(x_2) = \inf f[X]$

Tw. o przyjmowaniu wartości pośrednich
Z: (X, d)-przestrzeń metryczna spójna, $f : X \to \mathbb{R}$ ciągła, $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) < f(x_2)$
T: $\forall c \in (f(x_1), f(x_2))\ \exists x_0 \in X : f(x_0) = c$

Tw. o własności Darboux
Z: $f : A \to \mathbb{R}$ ciągła, A-przedział $\subset \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) < f(x_2)$
T: $\forall c \in (f(x_1), f(x_2))\ \exists x_0 \in (x_1, x_2) : f(x_0) = c$

Tw. o spójności obrazu zbioru spójnego
Z: $f : X \to Y$, (X, d), (Y, ρ)-przestrzenie metryczne, X-spójna, f ciągła
T: $f[X]$ spójny

3. Przestrzenie unormowane i unitarne

Norma - funkcja $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ w przestrzeni wektorowej $(X, K, +, \cdot)$ taka, że:
1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

Przestrzeń unormowana - para $(X, \|\cdot\|)$
Każda przestrzeń unormowana jest metryczna $d(x, y) = \|x - y\|$ (metryka indukowana normą)

Przestrzeń Banacha - przestrzeń unormowana i zupełna

Iloczyn skalarny - funkcja $\circ : X \times X \to K$ taka, że:
1. $x \circ x \geq 0$
2. $x \circ y = \overline{y \circ x}$ (ma znaczenie jeśli $K = \mathbb{C}$)
3. $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$
4. $x \circ x = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

Przestrzeń unitarna - para $(X, \circ)$
Każda przestrzeń unitarna jest unormowana $\|x\| = \sqrt{x \circ x}$

Przestrzeń Hilberta - przestrzeń unitarna i zupełna