Zadanie 1

Dany jest endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taki, że
$f(x, y, z) = (-x + y - z, -x + y + z, -2x + 2y)$.

1.a)

Znajdź wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ endomorfizmu f i opowiadające im podprzestrzenie własne;

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) - 2 + 2 - 2(1-\lambda) - 2(-1-\lambda) + \lambda = \lambda(2-\lambda)(2+\lambda)$$

Wartości własne: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$

Dla $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow E_0 = \operatorname{lin}\{(1, 1, 0)\}$$

Dla $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -2x + 2y - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow E_2 = \operatorname{lin}\{(0, 1, 1)\}$$

Dla $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow E_{-2} = \operatorname{lin}\{(1, 0, 1)\}$$

1.b)

Ustal dowolne wektory własne u_1, u_2, u_3 odpowiadające wartościom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i uzasadnij, że (u_1, u_2, u_3) jest bazą w $\mathbb{R}^3$. Napisz macierz A odwzorowania f względem tej bazy;

Wektory bazowe: $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 0, 1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{baza w } \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1.c)

c) Wyznacz macierz A z definicji.

$$f(1,1,0) = (0,0,0), f(0,1,1) = (0,2,0), f(1,0,1) = (0,0,-2)$$

Zadanie 2

W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ dany jest endomorfizm f taki, że

$$\forall w \in \mathbb{R}[x]_3 : (f(w))(x) = \frac{d}{dx}((x+1)w(x)).$$

2.a)

Znajdź macierz endomorfizmu f w bazie $(1, x, x^2, x^3)$.

$$\begin{aligned} f(1) &= (x+1)' = 1 \\ f(x) &= ((x+1)x)' = 2x+1 \\ f(x^2) &= \left((x+1)x^2\right)' = 3x^2 + 2x \\ f(x^3) &= \left((x+1)x^3\right)' = 4x^3 + 3x^2 \end{aligned} \qquad M_{f(B_k)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.b)

Znajdź podprzestrzenie własne oraz ich bazy.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$$

Dla $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1 = \operatorname{lin}\{1\}$$

Dla $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_2 = \operatorname{lin}\{1 + x\}$$

Dla $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_3 = \operatorname{lin}\{1 + 2x + x^2\}$$

Dla $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_4 = \operatorname{lin}\{1 + 3x + 3x^2 + x^3\}$$

Zadanie 3

Niech

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą endomorfizmu f względem bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^3$.

3.a)

Znajdź wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu f.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$

Dla $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y = z \Rightarrow E_1 = \operatorname{lin}\{(1, 1, 1)\}$$

Dla $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow E_{-2} = \text{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

3.b)

Ustal bazę w $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych i podaj macierz C odwzorowania f względem tej bazy.

$B = ((1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, -1))$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

—

Zadanie 4

Sprawdź, czy następujące macierze są diagonalizowalne:

4.a)

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

Dla $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} -4 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} r = 2 \Rightarrow \dim V_1 = 3 - 2 = 1 < 2 \Rightarrow$ nie diagonalizowalna

4.b)

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3$$

Dla $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} r = 1 \Rightarrow \dim V_1 = 3 - 1 = 2 < 3 \Rightarrow$ nie diagonalizowalna

4.c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$C^T = C$ (symetryczna), więc jest diagonalizowalna.

Zadanie 5

Niech $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ będzie bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^4$ i f endomorfizmem takim, że $f(e_i) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ dla $i = 1, 2, 3, 4$.

5.a)

Podaj macierz endomorfizmu f względem bazy B;

$$A = M_f(B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.b)

Znajdź $\mathrm{Im} f$, $\dim \mathrm{Im} f$, $\mathrm{Ker} f$ i jego bazę;

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Lin}\{(1,1,1,1)\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + y + z + w = 0 \Rightarrow w = -x - y - z$$

$$f(x, y, z, -x - y - z) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Lin}\{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\}$$

5.c)

Znajdź wartości własne i podprzestrzenie własne. Czy f jest endomorfizmem diagonalizowalnym?

Jądro nie jest puste więc jedną z wartości własnych jest 0. Dla $\lambda = 0$:

$$\dim V_0 = \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \dim \mathrm{Ker} A = 3$$

Ślad czyli suma na przekątnej nie zmienia się przy zmianie bazy, więc jest taka sama dla macierzy już zdiagonalizowanej co dla $M_f(B)$.

Suma na przekątnej A wynosi 4 więc musi istniec niezerowa λ, a ponieważ $k_0 \geq \dim V_0 = 3$ to $k_0 = 3$ i druga wartość własna to 4 z $k_4 = 1$ (bo $k_0 + k_4 \leq 4$).

$V_0 = \mathrm{Ker}0 = \mathrm{Lin}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$

Dla $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ -4z + 4w = 0 \\ -4w + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = w$$

$$V_4 = \mathrm{Lin}\{(1,1,1,1)\}$$

f jest diagonalizowalne, bo $\dim V_0 + \dim V_4 = 4$.

Zadanie 7)

Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

1. Dla jakich wartości parametru a macierz A jest diagonalizowalna? W tym przypadku znajdź macierz nieosobliwą P tak, aby $D = P^{-1}AP$ była diagonalna.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ a & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Dla $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} az = 0 \\ y = 2x + z \end{cases}$$

$a \neq 0 \Rightarrow V_3 = \mathrm{Lin}\{(1,2,0)\} \Rightarrow$ macierz nie jest diagonalizowalna, bo $\dim V_3 < k_3$.

$a = 0 \Rightarrow V_3 = \mathrm{Lin}\{(1,2,0),(0,1,1)\} \Rightarrow \dim V_3 = 2 = k_3$.

Dla $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \mathrm{Lin}\{(0,1,0)\} \Rightarrow \dim V_1 = 1 = k_1$$

Dla $a = 0$ macierz A jest diagonalizowalna.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1 - w_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8)

Wyznacz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne odwzorowania: $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2 : f(ax^2 + bx + c) = (-a - 2b - 2c)x^2 + 2bx + (c + 2b)$.

Jeżeli f jest endomorfizmem diagonalizowalnym, podaj bazę B_0 , w której macierz D endomorfizmu $\left(D = M_f(B_0)\right)$ ma postać diagonalną, podaj macierz D oraz macierz przejścia od bazy kanonicznej B do bazy B_0 . Wyznacz $f^{10}(2 - x^2)$.

Przyjmujemy $B = (x^2, x, 1)$.

$f(x^2) = -x^2, f(x) = -2x^2 + 2x + 2, f(1) = -2x^2 + 1$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

Dla $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c = 0$$

$$V_{-1} = \text{Lin}\{(1,0,0)_B\} = \text{Lin}\{x^2\}$$

Dla $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = 0, c = -a$$

$$V_1 = \mathrm{Lin}\{(1,0,-1)_B\} = \mathrm{Lin}\{x^2 - 1\}$$

Dla $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c = 2b, 3a = -2b - 2c \Rightarrow a = -2b$$

$$V_2 = \mathrm{Lin}\{(-2,1,2)_B\} = \mathrm{Lin}\{-2x^2 + x + 2\}$$

f jest diagonalizowalne bo są różne wartości własne.

$B_0 = \{x^2, x^2 - 1, -2x^2 + x + 2\}$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_{B \to B_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2 - x^2 = x^2 - 2(x^2 - 1) = [1, -2, 0]_{B_0}$$

$$f^{10}(2 - x^2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 - x^2$$