Zadanie 1

Sprawdź, które z podanych odwzorowań są liniowe:

1.a)

$L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], (Lp)(x) = xp'(x) + p(1);$ ✓

Niech $p, q \in \mathbb{R}[x], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha p + \beta q) = x(\alpha p + \beta q)' + (\alpha p + \beta q)(1) = x(\alpha p' + \beta q') + \alpha p(1) + \beta q(1) = \\ \alpha(xp' + p(1)) + \beta(xq' + q(1)) = \alpha L(p) + \beta L(q)$$

1.b)

$L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], (Lp)(x) = p(x)p'(x);$ ✗

Niech $p \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha p) = (\alpha p)(\alpha p)' = \alpha^2 pp' \neq \alpha pp'$$

1.c)

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, L(x, y) = (3x + 2y - 1, 2x - 3y);$ ✗

Nie ma zachowania zera:

$$L(0, 0) = (-1, 0) \neq (0, 0)$$

1.d)

$L : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), (Lf)(x) = \sin f(x);$ ✗

Kontrprzykład: $f(x) = \frac{\pi}{2}, \alpha = 2$

$$L(\alpha f) = L\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0 \neq 2 \sin \frac{\pi}{2}$$

1.e)

$L : C([0, 1]) \to C([0, 1]), (Lf)(x) = 2f(\frac{x}{2}).$ ✓

Niech $f, g \in C([0, 1]), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(L(\alpha f + \beta g))(x) = 2(\alpha f + \beta g)\left(\frac{x}{2}\right) = 2\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + 2\beta g\left(\frac{x}{2}\right) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

Zadanie 2

Dane są następujące odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:
$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z), g(x, y) = (y, x, x + y)$.

2.a)

Sprawdź, że są to odwzorowania liniowe i podaj $f(1, 2, -1)$, $g(-1, 3)$;

Niech $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) =$$
$$(-\alpha x_1 - \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2, \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2,) =$$
$$\alpha(-x_1 + y_1 + z_1, x_1 - y_1 + z_1) + \beta(-x_2 + y_2 + z_2, x_2 - y_2 + z_2) =$$
$$\alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2)$$

$f(1, 2, -1) = (-1 + 2 - 1, 1 - 2 - 1) = (0, -2)$

Niech $x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$g(\alpha(x_1, y_1) + \beta\left(x_2, y_)\right) = g(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) =$$
$$(\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2) =$$
$$\alpha(y_1, x_1, x_1 + y_1) + \beta(y_2, x_2, x_2 + y_2) = \alpha g(x_1, y_1) + \beta g(x_2, y_2)$$

$g(-1, 3) = (3, -1, 2)$

2.b)

Znajdź $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Ker} g$, $\mathrm{Im} g$ i podaj ich wymiary;

1) $\mathrm{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\}$

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$
$$z = 0$$
$$x = y$$

$\mathrm{Ker} f = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3\}$, $\dim \mathrm{Ker} f = 1$

2) $\mathrm{Im} f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (a, b)$

Niech $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z) = (a, b) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x+y+z=a \\ x-y+z=b \end{cases} \Rightarrow z = \frac{a+b}{2}$$

$$x - y + \frac{a+b}{2} = b \Rightarrow x - y = \frac{b-a}{2}$$

$$f\left(\frac{b-a}{2}, 0, \frac{a+b}{2}\right) = (a,b)$$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2, \dim \mathrm{Im} f = 2$

3) $\mathrm{Ker} g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = (0,0,0)\}$

$$g(x,y) = (y, x, x+y) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

$\mathrm{Ker} g = \{(0,0)\}, \dim \mathrm{Ker} g = 0$

4) $\mathrm{Im} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : g(a,b) = (x,y,z)$

Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$g(a,b) = (b, a, a+b) = (x,y,z) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = y \\ b = x \\ z = x + y \end{cases}$$

$\mathrm{Im} f = \{(x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3\}, \dim \mathrm{Im} f = 2$

> **2.c)**
>
> Sprecyzuj $g \circ f$ i $f \circ g$.

$$g \circ f = f(g(x,y)) = f(y, x, x+y) = (-y + x + x + y, y - x + x + y) = (2x, 2y)$$
$$f \circ g = g(f(x,y,z)) = g(-x+y+z, x-y+z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z)$$

> ## Zadanie 3
>
> Podaj wymiary jąder i obrazów następujących przekształceń liniowych:

> **3.a)**
>
> $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, L(x,y,z) = (x+y, y+z);$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Ker} L = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} L = 1$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} L + \dim \mathrm{Im} L \Rightarrow \dim \mathrm{Im} L = 3 - 1 = 2$$

3.b)

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, L(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - z, -x + 3y - 2z, 8x + y + z);$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 8x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{3}{5} z$$

$$x = -2y + z = -\frac{7}{5} z$$

$$\mathrm{Ker} L = \{(-7t, 3t, 5t), t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} L = 1$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} L + \dim \mathrm{Im} L \Rightarrow \dim \mathrm{Im} L = 3 - 1 = 2$$

3.c)

$L : R[x]_2 \to R[x]_2, (Lp)(x) = (x^2 + x)p(2) + (3x^2 - x)p(1).$

Niech $p = ax^2 + bx + c$. Wtedy

$$(Lp)(x) = (x^2 + x)(4a + 2b + c) + (3x^2 - x)(a + b + c) = (7a + 3b + 2c)x^2 + (3a + b)x$$

$$\begin{cases} 7a + 3b + 2c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = a \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker} L = \{(ax^2 - 3ax + a), a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} L = 1$$

$$\dim R[x]_2 = \dim \mathrm{Ker} L + \dim \mathrm{Im} L \Rightarrow \dim \mathrm{Im} L = 3 - 1 = 2$$

Zadanie 4

Odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ przeprowadza wektor $x = (2, 1, 1)$ na wektor $u = (4, 5)$ oraz wektor $y = (1, -3, 2)$ na wektor $v = (-6, 1)$. Znajdź obraz wektora $z = (5, 6, 1)$ względem tego odwzorowania. Czy przy tych danych można jednoznacznie określić $L(4, 1, 5)$?

Znajdźmy kombinację liniową x i y, która daje z.

$$\alpha x + \beta y = z$$

$$\alpha(2, 1, 1) + \beta(1, -3, 2) = (5, 6, 1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$-3\beta = 3 \Rightarrow \beta = -1$$
$$\alpha = 1 - 2\beta = 3$$

W takim razie obraz wektora z też będzie taką kombinacją:

$$w = \alpha u + \beta v = 3(4,5) - (-6,1) = (18,14)$$

Analogicznie znajdźmy kobinację dla wektora L.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$
$$-3\beta = -6 \Rightarrow \beta = 2$$
$$-5\beta = -4 \Rightarrow \beta = \frac{4}{5}$$

Dochodzimy do sprzeczności, czyli x, y i L są liniowo niezależne, więc nie możemy znaleźć obrazu L.

Zadanie 5

Wyznacz odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $f(1,1,0) = (1,1), f(0,2,-1) = (-1,0), f(1,2,-1) = (0,2)$.

$$f(x,y,z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz)$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \Rightarrow a = 1 - b \\ d + e = 1 \Rightarrow d = 1 - e \\ 2b - c = -1 \Rightarrow c = 2b + 1 \\ 2e - f = 0 \Rightarrow f = 2e \\ a + 2b - c = 0 \Rightarrow 1 - b + 2b - 2b - 1 = 0 \Rightarrow b = 0, \quad a = 1, \quad c = 1 \\ d + 2e - f = 2 \Rightarrow 1 - e + 2e - 2e = 2 \Rightarrow e = -1, \; d = 2, \; f = -2 \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = (x + z, 2x - y - 2z)$$
$$f(1,1,0) = (1,1)$$
$$f(0,2,-1) = (-1,0)$$
$$f(1,2,-1) = (0,2)$$

Zadanie 6

Skonstruuj następujące endomorfizmy:

6.a)

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ taki, że $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Lin}\{u_1, u_2\}$ i $\mathrm{Im}f = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$, gdzie $u_1 = (1, 1, -1, 0), u_2 = (1, 1, 0, 1), v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1, 0)$;

Wiemy, że $\mathrm{Im}f = \mathrm{Lin}f(B)$, gdzie B to baza $\mathbb{R}^4$. Musimy dobrać taką bazę, żeby $\mathrm{Lin}f(B) = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$. Niech naszą bazą będzie u_1, u_2 (ponieważ $f(u_1) = f(u_2) = \overline{0}$) oraz dwa inne wektory, w_1 i w_2 tak, że $f(w_1) := v_1, f(w_2) := v_2$.

Musimy znaleźć w_1 i w_2 niezależne od u_1 i u_2. $\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, -\alpha, \beta)$, więc możemy wziać $w_1 = (1, 0, 0, 0)$ oraz $w_2 = (0, 1, 0, 0)$.

Możemy zapisać dowolny wektor z $\mathbb{R}^4$ jako kombinacja liniowa wektorów z tej bazy.

$$(x, y, z, w) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w_1 + \delta w_2 = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta + \delta, -\alpha, \beta)$$

$$\begin{cases} \alpha = -z \\ \beta = w \\ \gamma = x + z - w \\ \delta = y + z - w \end{cases}$$

Teraz możemy skonstruować takie f, że $f(u_1) = f(u_2) = \overline{0}, f(w_1) = v_1, f(w_2) = v_2$.

$$\begin{gathered} f(x, y, z, w) = f(-zu_1 + wu_2 + (x + z - w)w_1 + (y + z - w)w_2) = \\ -zf(u_1) + wf(u_2) + (x + z - w)f(w_1) + (y + z - w)f(w_2) = \\ (0, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 0) + (x + z - w)v_1 + (y + z - w)v_2 = \\ (x + y + 2z - 2x, x + z - w, x + y + 2z - 2x, x + z - w) \end{gathered}$$

6.b)

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taki, że $\mathrm{Im}f = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$, gdzie $v_1 = (1, 3, 2), v_2 = (3, -1, 1)$;

Skoro $\dim \mathrm{Im}f = 2$, a $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ to $\dim \mathrm{Ker}f = 1$.

Możemy wybrać bazę $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)(0, 0, 1)\}$ oraz zdefiniować f tak, że $f(1, 0, 0) = v_1, f(0, 1, 0) = v_2, f(0, 0, 1) = \overline{0}$.

$$\begin{gathered} f(x, y, z) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = \\ x(1, 3, 2) + y(3, -1, 1) + z(0, 0, 0) = \\ (x + 3y, 3x - y, 2x + y) \end{gathered}$$

6.c)

$L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ taki, że $\mathrm{Ker}L = \mathrm{Lin}\{1 - x\}$ i $\mathrm{Im}L = \mathrm{Lin}\{1 + x, 1 + x^2\}$.

Wybierzmy bazę $B = \{x^2, 1-x, 1\}$ oraz zdefiniujmy f tak, że $f(x^2) = 1 + x^2, f(1-x) = 0, f(1) = 1 + x$.

$$f(ax^2 + bx + c) = f(ax^2 - b(1-x) + b + c) =$$
$$af(x^2) - bf(1-x) + (b+c)f(1) = a(1+x^2) + (b+c)(1+x) =$$
$$ax^2 + (b+c)x + a + b + c$$

Zadanie 7

Niech $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2)$ będą bazami przestrzeni wektorowych, odpowiednio, U, V (nad ciałem $\mathbb{R}$). Wiedząc, że $f(u_1) = 2v_1, f(u_2) = -v_2, f(u_1 + u_3) = v_1 + v_2$ i $f(u_1 - u_3) = 3v_1 - v_2$, wyznacz $\mathrm{Ker} f$.

$$2f(u_1 + u_3) - f(u_1) + 2f(u_2) = 2v_1 + 2v_2 - 2v_1 - 2v_2 = 0$$
$$f(2u_1 + 2u_3 - u_1 + 2u_2) = f(u_1 + 2u_2 + 2u_3) = 0$$

Więc na pewno $\mathrm{Lin}\{u_1 + 2u_2 + 2u_3\} \subset \mathrm{Ker} f$. Pozostaje pytanie czy to już całe jądro.

Zauważmy, że każdy wektor z V da się otrzymać przekształceniem:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \frac{\alpha}{2} f(u_1) - \beta f(u_2) = f\left(\frac{\alpha}{2} u_1 - \beta u_2\right)$$

czyli $\mathrm{Im} f = V$. Z tego wynika, że $\dim \mathrm{Im} f = \dim V = 2$, a $\dim U = 3$, więc $\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$, czyli rzeczywiście $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Lin}\{u_1 + 2u_2 + 2u_3\}$.

Zadanie 8

Niech $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, a B bazą w U. Udowodnij, że: f jest injekcją $\Leftrightarrow f(B)$ jest układem liniowo niezależnym.

f różnowartościowa $\Rightarrow r(f) = \dim \mathrm{Im} f = \dim U$

Ale $\mathrm{Im} f = \mathrm{Lin} f(B)$, a $U = \mathrm{Lin} B$, więc $\dim \mathrm{Lin} f(B) = \dim \mathrm{Lin} B$.

Skoro wektory w B są niezależne, a wektorów w $f(B)$ jest tyle samo i ich powłoka ma taki sam wymar to też muszą być niezależne.

Zadanie 9 (1)

Niech $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ będzie odwzorowaniem takim, że $(f(P))(x) = -\frac{(x+1)^2}{2} P''(x) + (x+1)P'(x)$, gdzie $P \in \mathbb{R}[x]_2$.

$$f(ax^2 + bx + c) = -\frac{(x+1)^2}{2} \cdot 2a + (x+1)(2ax + b) =$$
$$-ax^2 - 2ax - a + 2ax^2 + bx + 2ax + b = ax^2 + bx - a + b$$

9.a)

Sprawdź, że f jest endomorfizmem w $\mathbb{R}[x]_2$ i że $f \circ f = f$;

Niech $P(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, Q(x) = a_2x^2 + b_2 + c_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(f(\alpha P + \beta Q))(x) = f(\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x - \alpha a_1 + \alpha b_1 + \beta a_2x^2 + \beta b_2x - \beta a_2 + \beta b_2) =$$
$$f((\alpha a_1 + \beta a_2)x^2 + (\alpha b_1 + \beta b_2)x - \alpha a_1 + \alpha b_1 - \beta b_2 + \beta a_2) =$$
$$(\alpha a_1 + \beta a_2)x^2 + (\alpha b_1 + \beta b_2)x - (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2) =$$
$$\alpha(a_1x^2 + b_1x - a_1 + b_1) + \beta(a_2x^2 + b_2x - a_2 + b_2) =$$
$$\alpha(f(P))(x) + \beta(f(Q)(x))$$

Stąd odwzorowanie f jest liniowe, a ponadto $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ więc jest to endomorfizm.

$(f \circ f)(ax^2 + bx + c) = f(ax^2 + bx - a + b) = ax^2 + bx - a + b = f(ax^2 + bx + c)$

9.b)

Znajdź $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ oraz ich bazy;

$f(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx - a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0, c \in \mathbb{R}$,
więc $\mathrm{Ker} f = \{P(x) = c : c \in \mathbb{R}\}$. Baza $\mathrm{Ker} f$ to $\{1\}$.

$\mathrm{Im} f = \{P(x) = ax^2 + bx - a + b : a, b \in \mathbb{R}\}$. Baza $\mathrm{Im} f$ to $\{x^2 - 1, x + 1\}$.

9.c)

Wykaż, że $\mathbb{R}[x]_2 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$;

Niech $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]_2$.

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - a + b + a - b + c$$
$$ax^2 + bx - a + b \in \mathrm{Im} f, a - b + c \in \mathrm{Ker} f$$

Więc $\mathbb{R}[x]_2 = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$. Ale $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{P(x) = 0\}$ więc $\mathbb{R}[x]_2 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Zadanie 9 (2)

Niech $g : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem takim, że $g(P) = (P(1), P'(1), P''(1))$. Wykaż, że g jest izomorfizmem i znajdź g^{-1}.

Wyznaczmy $M_g(B_1, B_2)$, gdzie $B_1 = (1, x, x^2)$, $B_2 = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$.

$$g(ax^2 + bx + c) = (a + b + c, 2a + b, 2a)$$
$$g(1) = (1,0,0), g(x) = (1,1,0), g(x^2) = (1,2,2)$$

$$M_g(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wiemy, że $r(g) = r(M_g)$. Żeby g było izomorfizmem (bijekcją) to $r(g) = \dim \mathbb{R}[x]_2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, czyli $\det M_g \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Wyznaczmy teraz g^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -w_2 \\ -w_3 \\ :2 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} +w_3 \\ \\ \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Dla dowolnego $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$g^{-1}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b + \frac{1}{2}c \\ b - c \\ \frac{1}{2}c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}cx^2 + (b - c)x + a - b + \frac{1}{2}c$$

Zadanie 10

Niech V, W, U będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K, niech $f : V \to W, g : V \to W, h : W \to U$ będą odwzorowaniami liniowymi, i niech $\alpha \in K$. Udowodnij, że αf, $f + g$ oraz $h \circ f$ też są odwzorowaniami liniowymi.

1) αf

Niech $v \in V, w \in W, \beta, \gamma \in K$.

$$\alpha f(\beta v + \gamma w) = \alpha(\beta f(v) + \gamma f(w)) = \beta\alpha f(v) + \gamma\alpha f(w)$$

2) $f + g$

Niech $v \in W, w \in W, \alpha, \beta \in K$.

$$(f + g)(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v + \beta w) + g(\alpha v + \beta w) =$$
$$\alpha f(v) + \beta f(w) + \alpha g(v) + \beta g(w) = \alpha(f + g)(v) + \beta(f + g)(w)$$

3) $h \circ f$

Niech $v \in V, u \in U, \alpha, \beta \in K$.

$$(h \circ f)(\alpha v + \beta w) = h(f(\alpha v + \beta w)) = h(\alpha f(v) + \beta f(w)) =$$
$$\alpha h(f(v)) + \beta h(f(w)) = \alpha(h \circ f)(v) + \beta(h \circ f)(w)$$