13

W zbiorze $\mathbb{R}^2$ wprowadzamy działania: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + p y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ struktura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ jest ciałem?

Łatwo zauważyć, że $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ jest zerem, czyli elementem neutralnym względem $+$, a $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ jedynką, czyli elementem neutralnym względem $\cdot$, ponieważ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$

$$\begin{aligned} (x, y) + (0, 0) &= (x + 0, y + 0) = (x, y) \\ (0, 0) + (x, y) &= (0 + x, 0 + y) = (x, y) \\ (x, y) \cdot (1, 0) &= (x \cdot 1 + p \cdot y \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x, y) \\ (1, 0) \cdot (x, y) &= (1 \cdot x + p \cdot 0 \cdot y, 1 \cdot y + x \cdot 0) = (x, y) \end{aligned}$$

Żeby struktura była ciałem, to każdy element oprócz zera musi mieć swój element odwrotny. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (x', y') = (1, 0) \Leftrightarrow$

$$xx' + pyy' = 1 \land xy' + x'y = 0$$

Rozważymy osobno przypadki gdy $x = 0$ i $x \neq 0$.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = -\frac{x'y}{x}$$

$$xx' + py \cdot \left(-\frac{x'y}{x}\right) = 1$$

$$x' \left(x - \frac{py^2}{x}\right) = 1$$

Jeżeli $x - \frac{py^2}{x} = 0$, to dochodzimy do sprzeczności, czyli element odwrotny nie istnieje.

Równanie $x - \frac{py^2}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = py^2, x \neq 0$ ma rozwiązania tylko dla $p \geq 0$. Wtedy $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ na pewno nie jest ciałem, ponieważ element odwrotny musi istnieć dla **każdego** (x, y) oprócz zera.

Pozostaje rozważyć $p < 0$.

Rozważmy $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ takie, że $h((x, y)) = x + \sqrt{-p} y i$.

Wtedy $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 :$

$$\begin{aligned} h((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = h((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2) + \sqrt{-p}(y_1 + y_2) i = \\ = x_1 + \sqrt{-p} y_1 i + x_2 + \sqrt{-p} y_2 i = h((x_1, y_1)) + h((x_2, y_2)) \end{aligned}$$

oraz

$$
\begin{aligned}
h((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)) = h((x_1x_2+py_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)) = \\
= (x_1x_2+py_1y_2)+\sqrt{-p}(x_1y_2+x_2y_1)i = \\
= x_1x_2+i^2\sqrt{-p}^2y_1y_2+\sqrt{-p}x_1y_2i+\sqrt{-p}x_2y_1i = \\
= (x_1+\sqrt{-p}y_1i)(x_2+\sqrt{-p}y_2i) = h((x_1,y_1))\cdot h((x_2,y_2))
\end{aligned}
$$

Ponadto h jest bijekcją, ponieważ jest różnowartościowa:

$$
\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2 : h((x_1,y_1)) = h((x_2,y_2)) \Rightarrow x_1+\sqrt{-p}y_1i = x_2+\sqrt{-p}y_2i \Rightarrow
$$
$$
\underbrace{x_1-x_2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(y_2-y_1)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{\sqrt{-p}i}_{\in\mathbb{C}} \Rightarrow x_1-x_2 = y_2-y_1 = 0 \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)
$$

oraz jest suriekcją:

$$
\forall z\in\mathbb{C} : \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2 : h((x,y)) = z
$$

Niech $z = a+bi, a, b\in\mathbb{R}$. Wtedy:

$$
(x,y) = \left(a, \frac{b}{\sqrt{-p}}\right) \Rightarrow h((x,y)) = a+\sqrt{-p}\cdot\frac{b}{\sqrt{-p}}\cdot i = a+bi = z
$$

Z tego wynika, że dla $p<0$ struktura $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ jest ciałem, ponieważ jest izomorficzna do $(\mathbb{C},+,\cdot)$, która też jest ciałem.