

Zadanie 1

Niech $A = \{0, 1\}$.

W zbiorze A określamy działanie \oplus przyjmując: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$, oraz działanie \odot przyjmując: $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$, $1 \odot 1 = 1$.

1.a)

Sprawdź, że (A, \oplus, \odot) jest ciałem.

To samo co $(\mathbb{Z}/2, +, \cdot)$, które jest ciałem.

1.b)

W zbiorze A^2 określamy działanie dodawania jako: $(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$, oraz mnożenie przez elementy z ciała A następująco: $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b)$.

Sprawdź, czy $(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem A .

1. $A^2 \neq \emptyset$
2. (A, \oplus, \odot) to ciało przemienne, bo \odot jest przemienne
3. $+ i \cdot$ prowadzą do A^2 , bo $(a \oplus c), (b \oplus d), (\alpha \odot a), (\alpha \odot b) \in A$
4. $(A^2, +)$ jest grupą abelową, bo
 - $+$ jest wewnętrzne
 - $+$ jest łączne i przemienne co wynika z łączności i przemienności \oplus
 - istnieje element neutralny $(0, 0)$: $(a, b) + (0, 0) = (a \oplus 0, b \oplus 0) = (a, b)$
 - każdy element ma element symetryczny: $(a, b) + (a, b) = (a \oplus a, b \oplus b) = (0, 0)$
5. $\alpha \cdot ((a, b) + (c, d)) = \alpha \cdot (a \oplus c, b \oplus d) = (\alpha \odot (a \oplus c), \alpha \odot (b \oplus d)) = (\alpha \odot a \oplus \alpha \odot c, \alpha \odot b \oplus \alpha \odot d) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\alpha \odot c, \alpha \odot d) = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$
6. $(\alpha \odot \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \odot \beta) \odot a, (\alpha \odot \beta) \odot b) = (\alpha \odot (\beta \odot a), \alpha \odot (\beta \odot b)) = \alpha \cdot (\beta \cdot a, \beta \cdot b) = \alpha \cdot (\beta \cdot (a, b))$
7. $(\alpha \oplus \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \oplus \beta) \odot a, (\alpha \oplus \beta) \odot b) = ((\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a), (\alpha \odot b) \oplus (\beta \odot b)) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\beta \odot a, \beta \odot b) = (\alpha \cdot (a, b)) + (\beta \cdot (a, b))$
8. $(a, b) \cdot \mathbf{1} = (a \odot 1, b \odot 1) = (a, b)$

$(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

1.c)

Wykaż, że przestrzeń A^2 posiada dokładnie pięć podprzestrzeni.

$A^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, wektor $(0, 0)$ należy do każdej podprzestrzeni.

$\{(0, 0)\} \checkmark$

$\{(0, 0), (0, 1)\} \checkmark$

$\{(0, 0), (1, 0)\} \checkmark$

$\{(0,0),(1,1)\} \checkmark$

$\{(0,0),(0,1),(1,0)\} \times$, bo $(0,1) + (1,0) = (1,1)$

$\{(0,0),(0,1),(1,1)\} \times$, bo $(0,1) + (1,1) = (1,0)$

$\{(0,0),(1,0),(1,1)\} \times$, bo $(1,0) + (1,1) = (0,1)$

$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \checkmark$

Zadanie 2

Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni \mathbb{R}^3 :

2.a)

$$A = \{(x,y,z) : x + y + z = a, a \in \mathbb{R}\}$$

Kontrprzykład: $a = 1, (1,0,0) + (0,0,1) = (1,0,1) \notin A$

2.b)

$$B = \{(x,y,z) : x \geq 0\}$$

Kontrprzykład: $(-1) \cdot (1,0,0) = (-1,0,0) \notin B$

2.c)

$$C = \{(x,y,1) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Kontrprzykład: $(0,0,1) + (0,0,1) = (0,0,2) \notin C$

2.d)

$$D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Kontrprzykład: $2 \cdot (1,0,0) = (2,0,0) \notin D$

2.e)

$$E = \{(x,y,z) : x = 2y \wedge z = 0\}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) + \beta \cdot (x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \cdot 2y_1 + \beta \cdot 2y_2 = 2(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

2.f)

$$F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$$

$$\begin{aligned}\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) + \beta \cdot (x_2, y_2, z_2) = \\ (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) - 8(\alpha z_1 + \beta z_2) = \\ \alpha(3x_1 + 2y_1 - 8z_1) + \beta(3x_2 + 2y_2 - 8z_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Zadanie 3

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami:

3.a)

$$A = \{f : f(2) = f(7)\} \checkmark$$

$$\begin{aligned}f, g \in A, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \stackrel{?}{\in} A, \alpha \cdot f \stackrel{?}{\in} A \\ (f + g)(2) = f(2) + g(2) = f(7) + g(7) = (f + g)(7) \\ (\alpha \cdot f)(2) = \alpha f(2) = \alpha f(7) = (\alpha \cdot f)(7)\end{aligned}$$

3.b)

$$B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\} \times$$

$$\begin{aligned}f, g \in B, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \stackrel{?}{\in} B, \alpha \cdot f \stackrel{?}{\in} B \\ (f + g)(7) = f(7) + g(7) = 2 + f(1) + 2 + g(1) = 4 + (f + g)(1) \text{ sprzeczność}\end{aligned}$$

3.c)

$$C = \{f : f(x_0) = 3\} \times$$

$$\begin{aligned}f, g \in C, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \stackrel{?}{\in} C, \alpha \cdot f \stackrel{?}{\in} C \\ (f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 3 + 3 = 6 \text{ sprzeczność}\end{aligned}$$

Zadanie 4

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}[x]$ (przestrzeń wielomianów nad ciałem \mathbb{R}) są jej podprzestrzeniami:

4.a)

$$A = \{w : w(0)w(1) = 0\} \times$$

Kontrprzykład: $p(x) = x \in A, q(x) = x - 1 \in A$

$$(p + q)(x) = x + x - 1 = 2x - 1$$

$$(p + q)(0)(p + q)(1) = -1 \cdot 1 = -1$$

4.b)

$$B = \{w : \text{stopień } w \leq 6\} \checkmark$$

$q(x), p(x) \in B, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\deg(q + p) \leq 6 \wedge \deg(\alpha q) \leq 6$$

4.c)

$$C = \{w : \text{stopień } w = 6\} \times$$

Kontrprzykład: $x^6 + (-x^6) = 0 \notin C$

4.d)

$$D = \{w : w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 + 1\} \checkmark$$

$$D = \{w : w(x) = (x^2 + 1)q(x)\}$$

$$(x^2 + 1)q(x), (x^2 + 1)p(x) \in D, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(x^2 + 1)q(x) + (x^2 + 1)p(x) = (x^2 + 1)(q(x) + p(x)) \in A$$

$$\alpha \cdot (x^2 + 1)q(x) = (x^2 + 1)(\alpha q(x)) \in A$$

Zadanie 5

Zbadaj, które z układów wektorów należących do \mathbb{R}^3 są liniowo niezależne:

5.a)

$$B_1 : (1, 4, 3), (-1, 2, 1), (0, 6, 4) \times$$

$$1 \cdot (1, 4, 3) + 1 \cdot (-1, 2, 1) + (-1) \cdot (0, 6, 4) = (1 - 1 - 0, 4 + 2 - 6, 3 + 1 - 4) = (0, 0, 0)$$

5.b)

$$B_2 : (2, 3, -1), (2, 0, 0), (0, 3, 1) \checkmark$$

$$x(2, 3, -1) + y(2, 0, 0) + z(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.c)

$$B_3 : (2, -7, 2), (0, 2, 4), (2, -1, 5) \checkmark$$

$$x(2, -7, 2) + y(0, 2, 4) + z(2, -1, 5) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ -7x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -3z \\ -9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.d)

Znajdź współrzędne wektora $(1, 1, 1)$ względem tych B_i , które stanowią bazę w \mathbb{R}^3 .

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x + 3z = 1 \\ -x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{6} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= z - 1 \\ 3z - 3 + 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$6z = 4$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 1 \\ -7x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y + 5z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{4} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} - z$$

$$-\frac{7}{2} + 7z + 2y - z = 1$$

$$y = \frac{9}{4} - 3z$$

$$\begin{aligned} 1 - 2z + 9 - 12z + 5z &= 1 \\ -9z &= -9 \end{aligned}$$

Zadanie 6

Sprawdź liniową zależność wektorów $\sqrt{2}$ i 2 w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem \mathbb{Q} oraz w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem \mathbb{R} .

$$p\sqrt{2} + 2q = 0, p, q \in \mathbb{Q}$$

$$\underbrace{p}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{Q}} = \underbrace{-2q}_{\in \mathbb{Q}} \Rightarrow p = q = 0$$

liniowo niezależne

$$x\sqrt{2} + 2y = 0, x, y \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{-2y}{\sqrt{2}}$$

liniowo zależne

Zadanie 7

Dla jakiej wartości parametru k wektor $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów $u_1 = (1, 1, 1)$ i $u_2 = (1, 2, 3)$?

$$x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) = (1, -2, k)$$

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x + 2y &= -2 \\x + 3y &= k \\y &= -3 \\x &= 4 \\k &= -5\end{aligned}$$

Zadanie 8

Sprawdź, czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

8.a)

$$f = \text{Id}, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned}ax + b \sin x + c \cos x &= 0 \\x = 0 \Rightarrow c \cos x &= 0 \Rightarrow c = 0 \\x = \pi \Rightarrow ax &= 0 \Rightarrow a = 0 \\x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b &= 0\end{aligned}$$

liniowo niezależne

8.b)

$$f(x) = 1, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x, p(x) = \sin^2 x, q(x) = \cos^2 x$$

$$-1 \cdot 1 + 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

liniowo zależne

Zadanie 9

W \mathbb{R}^3 dane są trzy wektory: $u = (0, 1, -1)$, $v = (-1, 0, 1)$, $w = (1, -1, 0)$.

9.a)

Wykaż, że wektory te są parami niezależne.

$$x(0,1,-1) + y(-1,0,1) = 0 \quad x(0,1,-1) + y(1,-1,0) = 0 \quad x(-1,0,1) + y(1,-1,0) = 0$$

$\begin{cases} -y = 0 \\ x = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ x - y = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
$x = y = 0$	$x = y = 0$	$x = y = 0$

9.b)

Czy układ wektorów u, v, w jest liniowo niezależny?

$$(0,1,-1) + (-1,0,1) + (1,-1,0) = (0,0,0) \Rightarrow u, v, w \text{ są liniowo zależne}$$

9.c)

Podaj wymiar oraz bazę podprzestrzeni generowanej przez te wektory.

Wymiar 2, baza to dowolne dwa z u, v, w .

Zadanie 10

Udowodnij, że zbiór: $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{R}^4 . Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz bazy podprzestrzeni z zadania 2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 &= x_4 \\ x_4 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_2 &= 3x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

Niech $x_3 = a, x_4 = b$. Wtedy $A = \{(b, 2a+2b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$(b, 2a+2b, a, b) = a(0, 2, 1, 0) + b(1, 2, 0, 1) \Rightarrow \{(0, 2, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ to baza A .

Podprzestrzenie z zadania 2:

$$E = \{(x, y, z) : x = 2y \wedge z = 0\}, F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$$

$$E = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \{(2, 1, 0)\} \text{ to baza } E$$

$$F = \left\{ \left(x, y, \frac{3x+2y}{8} \right), x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\left(1, 0, \frac{3}{8}\right) + y\left(0, 1, \frac{1}{4}\right), x, y \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \left(1, 0, \frac{3}{8}\right), \left(0, 1, \frac{1}{4}\right) \right\} \text{ to baza } F$$

Zadanie 11

Dane są dwa układy wektorów: $B_1 : (1, i, 1+i), (i, -1, 2-i), (0, 0, 3)$ i $B_2 : (2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1+i, 1-i)$.

11.a)

Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.

Niech $a + bi, c + di, e + fi \in \mathbb{C}$.

$$(a + bi)(1, i, 1+i) + (c + di)(i, -1, 2-i) + (e + fi)(0, 0, 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + bi + ci - d = 0 \Leftrightarrow a - d = b + c = 0 \\ ai - b - c - di = 0 \Leftrightarrow a - d = b + c = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow B_1$ nie jest bazą

$$(a + bi)(2i, 1, 0) + (c + di)(2, -i, 1) + (e + fi)(0, 1+i, 1-i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ai - 2b + 2c + 2di = 0 \\ a + bi - ci + d + e + fi + ei - f = 0 \\ c + di + e + fi - ei + f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b - c = 0 \\ a + d + e - f = 0 \\ b - c + e + f = 0 \\ c + e + f = 0 \\ d + f - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow wektory w B_2 są liniowo niezależne

$\dim \mathbb{C}^3(\mathbb{C}) = 3, \dim \mathbb{C}^3(\mathbb{R}) = 6$, co pokażemy w 11.b. Z tego wynika, że B_2 jest bazą w $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$, ale nie w $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.

11.b)

Jaki wymiar mają przestrzenie $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ i $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$?

Przykładowa baza w $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ to $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1))$, więc $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{C}) = n$.

Przykładowa baza w $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ to

$((1, 0, \dots, 0), (i, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (0, i, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1), (0, 0, \dots, i))$,
więc $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$.

11.c)

Znajdź współrzędne wektora $(1, 0, 1)$ w bazie z podpunktu a).

$$(a+bi)(2i, 1, 0) + (c+di)(2, -i, 1) + (e+fi)(0, 1+i, 1-i) = (1, 0, 1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ai - 2b + 2c + 2di = 1 \\ a + bi - ci + d + e + fi + ei - f = 0 \\ c + di + e + fi - ei + f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ -b + c = \frac{1}{2} \\ a + d + e - f = 0 \\ b - c + e + f = 0 \\ c + e + f = 1 \\ d + f - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \\ e = \frac{1}{4} \\ f = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(1, 0, 1) = [0, \frac{1}{2}i, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i]_{B_2}$$

Zadanie 12

Niech będzie dana następująca podprzestrzeń U przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ (tj. przestrzeni \mathbb{C}^2 nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R}), gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą:

$$U := \text{Lin}\{(pi, (p-1)i), (p-2-pi, p), (-1-pi, 2p)\}.$$

Zbadaj dla jakich wartości parametru rzeczywistego p , zachodzi:

$$(3-2p, p-1+(1-p)i) \in U.$$

Dla wszystkich takich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, wyznacz $\dim U$.

Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} api + bp - 2b - bpi - c - cpi = 3 - 2p \\ api - ai + bp + 2cp = p - 1 + i - pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ap - bp - cp = 0 \Leftrightarrow p(a - b - c) = 0 \\ bp - 2b - c - 3 + 2p = 0 \\ ap - a - 1 + p = 0 \Leftrightarrow (a+1)(p-1) = 0 \\ bp + 2cp - p + 1 = 0 \end{cases}$$

$$p \neq 0 \wedge p \neq 1 \Rightarrow$$

$$a = -1$$

$$c = -1 - b$$

$$bp - 2b + 1 + b - 3 + 2p = 0 \Leftrightarrow -bp - 3p + 1 = 0$$

$$bp - 2p - 2bp - p + 1 = 0 \Leftrightarrow bp + 2p - b - 2 = 0$$

$$-p - b - 1 = 0$$

$$b = -p - 1$$

$$c = -1 + p + 1 = p$$

$$p(-1 + p - 1 + p) = p \cdot 2p = 0 \text{ sprzeczność}$$

$$p = 0 \Rightarrow$$

$$1 = 0 \text{ sprzeczność}$$

$$\begin{aligned}
p &= 1 \Rightarrow \\
a - b - c &= 0 \\
b - 2b - c - 3 + 2 &= 0 \\
&\quad -b - c - 1 = 0 \\
b + 2c - 1 + 1 &= 0 \\
&\quad a = -1 \\
&\quad c = 1 \\
&\quad b = -2
\end{aligned}$$

Dla $p = 1$, $U = \text{Lin}\{(i, 0), (-1 - i, 1), (-1 - i, 2)\}$. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a(i, 0) + b(-1 - i, 1) + c(-1 - i, 2) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ai - b - bi - c - ci = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b &= -2c \\
ai + 2c + 2ci - c - ci &= 0 \\
ai + ci + c &= 0 \\
a &= c = 0 \\
b &= 0
\end{aligned}$$

$$\dim U = 3$$

Zadanie 13

Wyznacz bazę przestrzeni $(P_{2n}, +, \cdot)$ nad ciałem \mathbb{R} , gdzie $P_{2n} := \{w \in \mathbb{R}[x]_{2n} : w(x) = w(-x)\}$.

$$P_{2n} = \{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n} x^{2n}, a_0, \dots, a_{2n} \in \mathbb{R}\}$$

$$B = (1, x^2, x^4, \dots, x^{2n})$$

Zadanie 14

W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$. Wykaż, że układ $B_2 = (1, x - 2, (x - 2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$. Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz. Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

$$\begin{aligned}
a \cdot 1 + b(x - 2) + c(x - 2)^2 &= a + bx + b + cx^2 - 2cx + 4c = \\
&cx^2 + (b - 2c)x + a + b + 4c
\end{aligned}$$

Ta kombinacja liniowa musi wygenerować każdy wielomian postaci $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
c &= \alpha \\
b - 2\alpha &= \beta \\
b &= \beta + 2\alpha \\
a + \beta + 2\alpha + \alpha &= \gamma \\
a &= -3\alpha - \beta + \gamma
\end{aligned}$$

$$2x^2 + 3 = [3, 0, 2]_{B_1} = [-9, 6, 2]_{B_2}$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{aligned}
p(1) &= p'(0) \\
a + b + c &= b \\
c &= -a
\end{aligned}$$

$$A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(x) = ax^2 + bx - a\}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, p(x) = ax^2 + bx - a \in A, q(x) = cx^2 + dx - c \in A$$

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = (\alpha a + \beta c)x^2 + (\alpha b + \beta d)x - (\alpha a + \beta c) \in A \Rightarrow$$

A jest podprzestrzenią $\mathbb{R}[x]_2$

$ax^2 + bx - a = a(x^2 - 1) + b(x)$ to baza A

Zadanie 15

Wykaż, że zbiór liczb postaci $V = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} + e\sqrt{12} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych. Znajdź bazę tej przestrzeni.

$V \subset \mathbb{R}$, a $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ jest przestrzenią wektorową, więc wystarczy pokazać, że $V(\mathbb{Q})$ jest podprzestrzenią wektorową \mathbb{R} .

$$\forall v, w \in V : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \alpha v + \beta w \stackrel{?}{\in} V$$

Niech $v = a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3} + d_1\sqrt{6} + e_1\sqrt{12}$, $w = a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + d_2\sqrt{6} + e_2\sqrt{12}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
\alpha v + \beta w &= (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)\sqrt{2} + (\alpha c_1 + \beta c_2)\sqrt{3} \\
&\quad + (\alpha d_1 + \beta d_2)\sqrt{6} + (\alpha e_1 + \beta e_2)\sqrt{12} \in V
\end{aligned}$$

$\text{Lin}\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{12}\} = V$, co wynika wprost z definicji V . Wystarczy sprawdzić, czy elementy zbioru są liniowo niezależne. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, więc $\sqrt{12}$ możemy wyrzucić ze zbioru. Pozostaje $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} &= 0 \Leftrightarrow \\
a + b\sqrt{2} + \sqrt{3}(c + d\sqrt{2}) &= 0 \\
a + b\sqrt{2} &= -\sqrt{3}(c + d\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Rozważmy dwa przypadki. Pierwszy przypadek, gdy $c + d\sqrt{2} \neq 0$:

$$\begin{aligned}-\sqrt{3} &= \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \\ -\sqrt{3} &= \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d} \\ -\sqrt{3} &= \frac{ac-2bd+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d} \text{ sprzeczność}\end{aligned}$$

Drugi przypadek, gdy $c + d\sqrt{2} = 0$:

$$a + b\sqrt{2} = -\sqrt{3}(c + d\sqrt{2}) = 0$$

$$a = b = c = d = 0$$

Wektory są liniowo niezależne, więc $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ jest bazą V .

Zadanie 16

Wiedząc, że wektory u, v, w stanowią bazę przestrzeni liniowej V (nad ciałem \mathbb{R}), zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:

16.a)

$$B_1 = (u - 2v + w, 3u + w, u + 4v - w)$$

$$\begin{aligned}au - 2av + aw + 3bu + bw + cu + 4cv - cw &= 0 \\ u(a + 3b + c) + v(-2a + 4c) + w(a + b - c) &= 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ -2a + 4c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}a &= -3b - c \\ 6b + 2c + 4c &= 0 \\ b &= -c \\ 3c - c - c - c &= 0 \\ c &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Wektory są liniowo zależne, czyli nie stanowią bazy.

16.b)

$$B_2 = (u, 2u + v, 3u - v + 4w)$$

$$\begin{aligned}au + 2bu + bv + 3cu - cv + 4cw &= 0 \\ u(a + 2b + 3c) + v(b - c) + w(4c) &= 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ b - c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Wektory w B_2 są liniowo niezależne i $\dim B_2 = 3$ więc B_2 jest bazą V .

16.c)

Wyznacz współrzędne wektora $a = 2u - 3v + 8w$ względem tej bazy.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 2 \\ b - c = -3 \\ 4c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$a = [-2, -1, 2]_{B_2}$$

Zadanie 17

Wykaż, że dla dowolnych $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ takich, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, wielomiany w_0, w_1, \dots, w_n , zdefiniowane jako:

$$w_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n,$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

Wektorów w_i jest tyle samo co $\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$, więc wystarczy pokazać, że wektory te są liniowo niezależne.

Niech $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + \dots + a_n w_n(x) \stackrel{?}{=} 0$$

Zauważmy, że dla $x = x_i$

$$w_i(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1,$$

a dla $x = x_k$, gdzie $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k \neq i$, $w_i(x_k) = 0$, bo występuje takie j , że $j = k$ czyli występuje czynnik $(x_k - x_j) = 0$.

Niech $x := x_0$. Wtedy:

$$a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + \dots + a_n w_n(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Analogicznie pokazujemy, podstawiając za x kolejne x_i , że $a_i = 0$ dla każdego $i = 0, 1, \dots, n$.

Zadanie 18

Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a V_1, V_2 będą podzbiorami V składającymi się, odp., z odwzorowań nieparzystych oraz parzystych. Wykaż, że V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V oraz, że $V = V_1 \oplus V_2$.

$$V_1 = \{f : f(x) = -f(-x)\}, V_2 = \{f : f(x) = f(-x)\}$$

$$\forall f, g \in V_1 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \stackrel{?}{\in} V_1$$

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha(-f(-x)) + \beta(-g(-x)) = -(\alpha f + \beta g)(-x)$$

$$\forall f, g \in V_2 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \stackrel{?}{\in} V_2$$

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = (\alpha f + \beta g)(-x)$$

$$V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists g \in V_1, h \in V_2 : f = g + h$$

$$f(x) = g(x) + (f - g)(x)$$

$$g(x) = g(-x) \wedge (f - g)(x) = -(f - g)(-x)$$

$$f(x) - g(x) = -f(-x) + g(-x) = -f(-x) + g(x)$$

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$(f - g)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\} = \{f(x) = 0\}$$

$$f \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) = f(-x) \Rightarrow f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Zadanie 19

Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Oznaczmy przez F_a zbiór odwzorowań zerujących się w punkcie a .

$$F_a := \{f : f(a) = 0\}$$

19.a)

Wykaż, że F_a jest podprzestrzenią przestrzeni V

$$\forall f, g \in F_a : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \stackrel{?}{\in} F_a$$

$$(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha f(a) + \beta g(a) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g \in F_a$$

19.b)

Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, to $V = F_a + F_b$, ale suma ta nie jest prosta.

$\forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists f_a \in F_a : \exists f_b \in F_b : f = f_a + f_b$ (?)

Niech $f_a(x) := \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \neq a \\ 0, & \text{gdy } x = a \end{cases}$, $f_b(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \neq a \\ f(x), & \text{gdy } x = a \end{cases}$.

Wtedy $f_a(x) + f_b(x) = f(x)$.

$F_a \cap F_b = \{f : f(a) = f(b) = 0\} \neq \{f(x) = 0\}$, ponieważ np.

$f(x) = 2(x - a)(x - b), g(x) = 3(x - a)(x - b) \in F_a \cap F_b$, więc $F_a + F_b$ nie jest sumą prostą.

Zadanie 20

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz U i V jej podprzestrzeniami.

20.a)

Wykaż, że $U \cup V$ jest podprzestrzenią X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$.

(\Leftarrow)

$U \subset V \Rightarrow U \cup V = V$, a V jest podprzestrzenią X

$V \subset U \Rightarrow U \cup V = U$, a U jest podprzestrzenią X

(\Rightarrow)

Hp: $\exists u \in U \setminus V, v \in V \setminus U : u + v \in U \cup V$

$u + v \in U \cup V \Rightarrow u + v \in U \vee u + v \in V$

Pierwszy przypadek: $u + v \in U$.

Ponieważ U jest podprzestrzenią a $u \in U$, to $u + v + (-1)u = v \in U$ sprzeczność.

Drugi przypadek: $u + v \in V$.

Ponieważ V jest podprzestrzenią a $v \in V$, to $u + v + (-1)v = u \in V$ sprzeczność.

20.b)

Sprawdź, czy $\text{Lin}(U \cup V) = U + V$.

$\text{Lin}\{U \cup V\} = \{\alpha w + \beta q : \alpha, \beta \in K, w, q \in U \cup V\}$

$u \in U, \alpha \in K \Rightarrow \alpha u \in U, v \in V, \alpha \in K \Rightarrow \alpha v \in V$

$\text{Lin}\{U \cup V\} = \{w + q : w, q \in U \cup V\} = \{u + v : u \in U, v \in V\}$, bo w szczególności $u = \bar{0}$.