

## Zadanie 1

Niech  $A = \{0, 1\}$ .

W zbiorze  $A$  określamy działanie  $\oplus$  przyjmując:  $0 \oplus 0 = 0$ ,  $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ ,  $1 \oplus 1 = 0$ , oraz działanie  $\odot$  przyjmując:  $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$ ,  $1 \odot 1 = 1$ .

### 1.a)

Sprawdź, że  $(A, \oplus, \odot)$  jest ciałem.

To samo co  $(\mathbb{Z}/2, +, \cdot)$ , które jest ciałem.

### 1.b)

W zbiorze  $A^2$  określamy działanie dodawania jako:  $(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$ , oraz mnożenie przez elementy z ciała  $A$  następująco:  $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b)$ .

Sprawdź, czy  $(A^2, +, \cdot)$  jest przestrzenią wektorową nad ciałem  $A$ .

1.  $A^2 \neq \emptyset$
2.  $(A, \oplus, \odot)$  to ciało przemienne, bo  $\odot$  jest przemienne
3.  $+$  i  $\cdot$  prowadzą do  $A^2$ , bo  $(a \oplus c, b \oplus d), (\alpha \odot a), (a \odot b) \in A$
4.  $(A^2, +)$  jest grupą abelową, bo
  - $+$  jest wewnętrzne
  - $+$  jest łączne i przemienne co wynika z łączności i przemienności  $\oplus$
  - istnieje element neutralny  $(0, 0)$ :  $(a, b) + (0, 0) = (a \oplus 0, b \oplus 0) = (a, b)$
  - każdy element ma element symetryczny:  $(a, b) + (a, b) = (a \oplus a, b \oplus b) = (0, 0)$
5.  $\alpha \cdot ((a, b) + (c, d)) = \alpha \cdot (a \oplus c, b \oplus d) = (\alpha \odot (a \oplus c), \alpha \odot (b \oplus d)) = (\alpha \odot a \oplus \alpha \odot c, \alpha \odot b \oplus \alpha \odot d) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\alpha \odot c, \alpha \odot d) = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$
6.  $(\alpha \odot \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \odot \beta) \odot a, (\alpha \odot \beta) \odot b) = (\alpha \odot (\beta \odot a), \alpha \odot (\beta \odot b)) = \alpha \cdot (\beta \cdot a, \beta \cdot b) = \alpha \cdot (\beta \cdot (a, b))$
7.  $(\alpha \oplus \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \oplus \beta) \odot a, (\alpha \oplus \beta) \odot b) = ((\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a), (\alpha \odot b) \oplus (\beta \odot b)) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\beta \odot a, \beta \odot b) = (\alpha \cdot (a, b)) + (\beta \cdot (a, b))$
8.  $(a, b) \cdot \mathbf{1} = (a \odot 1, b \odot 1) = (a, b)$

$(A^2, +, \cdot)$  jest przestrzenią wektorową.

### 1.c)

Wykaż, że przestrzeń  $A^2$  posiada dokładnie pięć podprzestrzeni.

$A^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ , wektor  $(0, 0)$  należy do każdej podprzestrzeni.

$\{(0, 0)\}$ ✓

$\{(0, 0), (0, 1)\}$ ✓

$\{(0, 0), (1, 0)\}$ ✓

$\{(0, 0), (1, 1)\} \checkmark$   
 $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\} \times$ , bo  $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$   
 $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \times$ , bo  $(0, 1) + (1, 1) = (1, 0)$   
 $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\} \times$ , bo  $(1, 0) + (1, 1) = (0, 1)$   
 $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \checkmark$

## Zadanie 2

Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ :

### 2.a)

$$A = \{(x, y, z) : x + y + z = a, a \in \mathbb{R}\}$$

Kontrprzykład:  $a = 1, (1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1) \notin A$

### 2.b)

$$B = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$$

Kontrprzykład:  $(-1) \cdot (1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin B$

### 2.c)

$$C = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Kontrprzykład:  $(0, 0, 1) + (0, 0, 1) = (0, 0, 2) \notin C$

### 2.d)

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Kontrprzykład:  $2 \cdot (1, 0, 0) = (2, 0, 0) \notin D$

### 2.e)

$$E = \{(x, y, z) : x = 2y \wedge z = 0\}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) + \beta \cdot (x_2, y_2, z_2) =$   
 $(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$   
 $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \cdot 2y_1 + \beta \cdot 2y_2 = 2(\alpha y_1 + \beta y_2)$   
 $\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

2.f)

$$F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$$

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) + \beta \cdot (x_2, y_2, z_2) = \\ (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) - 8(\alpha z_1 + \beta z_2) = \\ \alpha(3x_1 + 2y_1 - 8z_1) + \beta(3x_2 + 2y_2 - 8z_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

### Zadanie 3

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  są jej podprzestrzeniami:

3.a)

$$A = \{f : f(2) = f(7)\} \checkmark$$

$$\begin{aligned} f, g \in A, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \stackrel{?}{\in} A, \alpha \cdot f \stackrel{?}{\in} A \\ (f + g)(2) = f(2) + g(2) = f(7) + g(7) = (f + g)(7) \\ (\alpha \cdot f)(2) = \alpha f(2) = \alpha f(7) = (\alpha \cdot f)(7) \end{aligned}$$

3.b)

$$B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\} \times$$

$$\begin{aligned} f, g \in B, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \stackrel{?}{\in} B, \alpha \cdot f \stackrel{?}{\in} B \\ (f + g)(7) = f(7) + g(7) = 2 + f(1) + 2 + g(1) = 4 + (f + g)(1) \text{ sprzeczność} \end{aligned}$$

3.c)

$$C = \{f : f(x_0) = 3\} \times$$

$$\begin{aligned} f, g \in C, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \stackrel{?}{\in} C, \alpha \cdot f \stackrel{?}{\in} C \\ (f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 3 + 3 = 6 \text{ sprzeczność} \end{aligned}$$

### Zadanie 4

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej  $\mathbb{R}[x]$  (przestrzeń wielomianów nad ciałem  $\mathbb{R}$ ) są jej podprzestrzeniami:

4.a)

$$A = \{w : w(0)w(1) = 0\} \times$$

Kontrprzykład:  $p(x) = x \in A, q(x) = x - 1 \in A$

$$(p + q)(x) = x + x - 1 = 2x - 1$$

$$(p + q)(0)(p + q)(1) = -1 \cdot 1 = -1$$

4.b)

$$B = \{w : \text{stopień } w \leq 6\} \checkmark$$

$$q(x), p(x) \in B, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\deg(q + p) \leq 6 \wedge \deg(\alpha q) \leq 6$$

4.c)

$$C = \{w : \text{stopień } w = 6\} \times$$

$$\text{Kontrprzykład: } x^6 + (-x^6) = 0 \notin C$$

4.d)

$$D = \{w : w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 + 1\} \checkmark$$

$$D = \{w : w(x) = (x^2 + 1)q(x)\}$$

$$(x^2 + 1)q(x), (x^2 + 1)p(x) \in D, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(x^2 + 1)q(x) + (x^2 + 1)p(x) = (x^2 + 1)(q(x) + p(x)) \in A$$

$$\alpha \cdot (x^2 + 1)q(x) = (x^2 + 1)(\alpha q(x)) \in A$$

## Zadanie 5

Zbadaj, które z układów wektorów należących do  $\mathbb{R}^3$  są liniowo niezależne:

5.a)

$$B_1 : (1, 4, 3), (-1, 2, 1), (0, 6, 4) \times$$

$$1 \cdot (1, 4, 3) + 1 \cdot (-1, 2, 1) + (-1) \cdot (0, 6, 4) = (1 - 1 - 0, 4 + 2 - 6, 3 + 1 - 4) = (0, 0, 0)$$

5.b)

$$B_2 : (2, 3, -1), (2, 0, 0), (0, 3, 1) \checkmark$$

$$x(2, 3, -1) + y(2, 0, 0) + z(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.c)

$$B_3 : (2, -7, 2), (0, 2, 4), (2, -1, 5) \checkmark$$

$$x(2, -7, 2) + y(0, 2, 4) + z(2, -1, 5) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ -7x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -3z \\ -9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.d)

Znajdź współrzędne wektora  $(1, 1, 1)$  względem tych  $B_i$ , które stanowią bazę w  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x + 3z = 1 \\ -x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{6} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= z - 1 \\ 3z - 3 + 3z &= 1 \\ 6z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 1 \\ -7x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y + 5z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{4} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - z \\ -\frac{7}{2} + 7z + 2y - z &= 1 \\ y &= \frac{9}{4} - 3z \\ 1 - 2z + 9 - 12z + 5z &= 1 \\ -9z &= -9 \end{aligned}$$

## Zadanie 6

Sprawdź liniową zależność wektorów  $\sqrt{2}$  i  $2$  w przestrzeni  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  nad ciałem  $\mathbb{Q}$  oraz w przestrzeni  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  nad ciałem  $\mathbb{R}$ .

$$p\sqrt{2} + 2q = 0, p, q \in \mathbb{Q}$$

$$\underbrace{p}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{Q}} = \underbrace{-2q}_{\in \mathbb{Q}} \Rightarrow p = q = 0$$

liniowo niezależne

$$x\sqrt{2} + 2y = 0, x, y \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{-2y}{\sqrt{2}}$$

liniowo zależne

### Zadanie 7

Dla jakiej wartości parametru  $k$  wektor  $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$  jest kombinacją liniową wektorów  $u_1 = (1, 1, 1)$  i  $u_2 = (1, 2, 3)$ ?

$$x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) = (1, -2, k)$$

$$x + y = 1$$

$$x + 2y = -2$$

$$x + 3y = k$$

$$y = -3$$

$$x = 4$$

$$k = -5$$

### Zadanie 8

Sprawdź, czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ :

8.a)

$$f = \text{Id}, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$$

$$ax + b \sin x + c \cos x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow c \cos x = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$x = \pi \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 0$$

liniowo niezależne

8.b)

$$f(x) = 1, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x, p(x) = \sin^2 x, q(x) = \cos^2 x$$

$$-1 \cdot 1 + 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

liniowo zależne

### Zadanie 9

W  $\mathbb{R}^3$  dane są trzy wektory:  $u = (0, 1, -1)$ ,  $v = (-1, 0, 1)$ ,  $w = (1, -1, 0)$ .

9.a)

Wykaż, że wektory te są parami niezależne.

$$x(0, 1, -1) + y(-1, 0, 1) = 0 \quad x(0, 1, -1) + y(1, -1, 0) = 0 \quad x(-1, 0, 1) + y(1, -1, 0) = 0$$

$$\begin{cases} -y = 0 \\ x = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$x = y = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - y = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

$$x = y = 0$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = y = 0$$

### 9.b)

Czy układ wektorów  $u, v, w$  jest liniowo niezależny?

$$(0, 1, -1) + (-1, 0, 1) + (1, -1, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow u, v, w \text{ są liniowo zależne}$$

### 9.c)

Podaj wymiar oraz bazę podprzestrzeni generowanej przez te wektory.

Wymiar 2, baza to dowolne dwa z  $u, v, w$ .

### Zadanie 10

Udowodnij, że zbiór:  $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz bazy podprzestrzeni z zadania 2.

$$x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 = x_4$$

$$x_4 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0$$

$$x_2 = 3x_3 + 2x_4$$

Niech  $x_3 = a, x_4 = b$ . Wtedy  $A = \{(b, 2a + 2b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$(b, 2a + 2b, a, b) = a(0, 2, 1, 0) + b(1, 2, 0, 1) \Rightarrow \{(0, 2, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$  to baza  $A$ .

Podprzestrzenie z zadania 2:

$$E = \{(x, y, z) : x = 2y \wedge z = 0\}, F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$$

$$E = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \{(2, 1, 0)\} \text{ to baza } E$$

$$F = \left\{ \left( x, y, \frac{3x+2y}{8} \right), x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \left( 1, 0, \frac{3}{8} \right) + y \left( 0, 1, \frac{1}{4} \right), x, y \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \left( 1, 0, \frac{3}{8} \right), \left( 0, 1, \frac{1}{4} \right) \right\} \text{ to baza } F$$

### Zadanie 11

Dane są dwa układy wektorów:  $B_1 : (1, i, 1 + i), (i, -1, 2 - i), (0, 0, 3)$  i  $B_2 : (2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1 + i, 1 - i)$ .

#### 11.a)

Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni  $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$  lub  $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$ .

Niech  $a + bi, c + di, e + fi \in \mathbb{C}$ .

$$(a + bi)(1, i, 1 + i) + (c + di)(i, -1, 2 - i) + (e + fi)(0, 0, 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + bi + ci - d = 0 \Leftrightarrow a - d = b + c = 0 \\ ai - b - c - di = 0 \Leftrightarrow a - d = b + c = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow B_1$  nie jest bazą

$$(a + bi)(2i, 1, 0) + (c + di)(2, -i, 1) + (e + fi)(0, 1 + i, 1 - i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ai - 2b + 2c + 2di = 0 \\ a + bi - ci + d + e + fi + ei - f = 0 \\ c + di + e + fi - ei + f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b - c = 0 \\ a + d + e - f = 0 \\ b - c + e + f = 0 \\ c + e + f = 0 \\ d + f - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  wektory w  $B_2$  są liniowo niezależne

$\dim \mathbb{C}^3(\mathbb{C}) = 3, \dim \mathbb{C}^3(\mathbb{R}) = 6$ , co pokażemy w **11.b**. Z tego wynika, że  $B_2$  jest bazą w  $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ , ale nie w  $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$ .

#### 11.b)

Jaki wymiar mają przestrzenie  $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$  i  $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ ?

Przykładowa baza w  $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$  to  $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1))$ , więc  $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{C}) = n$ .

Przykładowa baza w  $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$  to

$((1, 0, \dots, 0), (i, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (0, i, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1), (0, 0, \dots, i))$ ,

więc  $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$ .

#### 11.c)

Znajdź współrzędne wektora  $(1, 0, 1)$  w bazie z podpunktu a).



$$(a + bi)(2i, 1, 0) + (c + di)(2, -i, 1) + (e + fi)(0, 1 + i, 1 - i) = (1, 0, 1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ai - 2b + 2c + 2di = 1 \\ a + bi - ci + d + e + fi + ei - f = 0 \\ c + di + e + fi - ei + f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ -b + c = \frac{1}{2} \\ a + d + e - f = 0 \\ b - c + e + f = 0 \\ c + e + f = 1 \\ d + f - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \\ e = \frac{1}{4} \\ f = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(1, 0, 1) = \left[0, \frac{1}{2}i, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right]_{B_2}$$

### Zadanie 12

Niech będzie dana następująca podprzestrzeń  $U$  przestrzeni wektorowej  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  (tj. przestrzeni  $\mathbb{C}^2$  nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ ), gdzie  $p$  jest pewną liczbą rzeczywistą:

$$U := \text{Lin}\{(pi, (p-1)i), (p-2-pi, p), (-1-pi, 2p)\}.$$

Zbadaj dla jakich wartości parametru rzeczywistego  $p$ , zachodzi:

$$(3-2p, p-1+(1-p)i) \in U.$$

Dla wszystkich takich wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$ , wyznacz  $\dim U$ .

Niech  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} api + bp - 2b - bpi - c - cpi = 3 - 2p \\ api - ai + bp + 2cp = p - 1 + i - pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ap - bp - cp = 0 \Leftrightarrow p(a - b - c) = 0 \\ bp - 2b - c - 3 + 2p = 0 \\ ap - a - 1 + p = 0 \Leftrightarrow (a+1)(p-1) = 0 \\ bp + 2cp - p + 1 = 0 \end{cases}$$

$$p \neq 0 \wedge p \neq 1 \Rightarrow$$

$$a = -1$$

$$c = -1 - b$$

$$bp - 2b + 1 + b - 3 + 2p = 0 \Leftrightarrow -bp - 3p + 1 = 0$$

$$bp - 2p - 2bp - p + 1 = 0 \Leftrightarrow bp + 2p - b - 2 = 0$$

$$-p - b - 1 = 0$$

$$b = -p - 1$$

$$c = -1 + p + 1 = p$$

$$p(-1 + p - 1 + p) = p \cdot 2p = 0 \text{ sprzeczność}$$

$$p = 0 \Rightarrow$$

$$1 = 0 \text{ sprzeczność}$$

$$\begin{aligned}
p = 1 &\Rightarrow \\
a - b - c &= 0 \\
b - 2b - c - 3 + 2 &= 0 \\
-b - c - 1 &= 0 \\
b + 2c - 1 + 1 &= 0 \\
a &= -1 \\
c &= 1 \\
b &= -2
\end{aligned}$$

Dla  $p = 1$ ,  $U = \text{Lin}\{(i, 0), (-1 - i, 1), (-1 - i, 2)\}$ . Niech  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$$a(i, 0) + b(-1 - i, 1) + c(-1 - i, 2) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ai - b - bi - c - ci = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b &= -2c \\
ai + 2c + 2ci - c - ci &= 0 \\
ai + ci + c &= 0 \\
a = c &= 0 \\
b &= 0
\end{aligned}$$

$$\dim U = 3$$

### Zadanie 13

Wyznacz bazę przestrzeni  $(P_{2n}, +, \cdot)$  nad ciałem  $\mathbb{R}$ , gdzie  $P_{2n} := \{w \in \mathbb{R}[x]_{2n} : w(x) = w(-x)\}$ .

$$P_{2n} = \{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2n}x^{2n}, a_0, \dots, a_{2n} \in \mathbb{R}\}$$

$$B = (1, x^2, x^4, \dots, x^{2n})$$

### Zadanie 14

W przestrzeni wielomianów  $\mathbb{R}[x]_2$  dana jest baza  $B_1 = (1, x, x^2)$ . Wykaż, że układ  $B_2 = (1, x - 2, (x - 2)^2)$  stanowi bazę  $\mathbb{R}[x]_2$ . Podaj współrzędne wielomianu  $P(x) = 2x^2 + 3$  względem obu baz. Czy zbiór  $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$  stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

$$\begin{aligned}
a \cdot 1 + b(x - 2) + c(x - 2)^2 &= a + bx + b + cx^2 - 2cx + 4c = \\
cx^2 + (b - 2c)x + a + b + 4c
\end{aligned}$$

Ta kombinacja liniowa musi wygenerować każdy wielomian postaci  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$c = \alpha$$

$$b - 2\alpha = \beta$$

$$b = \beta + 2\alpha$$

$$a + \beta + 2\alpha + \alpha = \gamma$$

$$a = -3\alpha - \beta + \gamma$$

$$2x^2 + 3 = [3, 0, 2]_{B_1} = [-9, 6, 2]_{B_2}$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p'(x) = 2ax + b$$

$$p(1) = p'(0)$$

$$a + b + c = b$$

$$c = -a$$

$$A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(x) = ax^2 + bx - a\}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, p(x) = ax^2 + bx - a \in A, q(x) = cx^2 + dx - c \in A$$

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = (\alpha a + \beta c)x^2 + (\alpha b + \beta d)x - (\alpha a + \beta c) \in A \Rightarrow$$

$$A \text{ jest podprzestrzenią } \mathbb{R}[x]_2$$

$$ax^2 + bx - a = a(x^2 - 1) + b(x) \Rightarrow (x^2 - 1, x) \text{ to baza } A$$

### Zadanie 15

Wykaż, że zbiór liczb postaci  $V = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} + e\sqrt{12} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\}$  tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych. Znajdź bazę tej przestrzeni.

$V \subset \mathbb{R}$ , a  $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$  jest przestrzenią wektorową, więc wystarczy pokazać, że  $V(\mathbb{Q})$  jest podprzestrzenią wektorową  $\mathbb{R}$ .

$$\forall v, w \in V : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \alpha v + \beta w \stackrel{?}{\in} V$$

Niech  $v = a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3} + d_1\sqrt{6} + e_1\sqrt{12}$ ,  $w = a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + d_2\sqrt{6} + e_2\sqrt{12}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \alpha v + \beta w &= (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)\sqrt{2} + (\alpha c_1 + \beta c_2)\sqrt{3} \\ &\quad + (\alpha d_1 + \beta d_2)\sqrt{6} + (\alpha e_1 + \beta e_2)\sqrt{12} \in V \end{aligned}$$

$\text{Lin}\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{12}\} = V$ , co wynika wprost z definicji  $V$ . Wystarczy sprawdzić, czy elementy zbioru są liniowo niezależne.  $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ , więc  $\sqrt{12}$  możemy wyrzucić ze zbioru. Pozostaje  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ . Niech  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} &= 0 \Leftrightarrow \\ a + b\sqrt{2} + \sqrt{3}(c + d\sqrt{2}) &= 0 \\ a + b\sqrt{2} &= -\sqrt{3}(c + d\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Rozważmy dwa przypadki. Pierwszy przypadek, gdy  $c + d\sqrt{2} \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
-\sqrt{3} &= \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} \\
-\sqrt{3} &= \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d} \\
-\sqrt{3} &= \frac{ac - 2bd + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d} \text{ sprzeczność}
\end{aligned}$$

Drugi przypadek, gdy  $c + d\sqrt{2} = 0$ :

$$\begin{aligned}
a + b\sqrt{2} &= -\sqrt{3}(c + d\sqrt{2}) = 0 \\
a &= b = c = d = 0
\end{aligned}$$

Wektory są liniowo niezależne, więc  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$  jest bazą  $V$ .

### Zadanie 16

Wiedząc, że wektory  $u, v, w$  stanowią bazę przestrzeni liniowej  $V$  (nad ciałem  $\mathbb{R}$ ), zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:

#### 16.a)

$$B_1 = (u - 2v + w, 3u + w, u + 4v - w)$$

$$\begin{aligned}
au - 2av + aw + 3bu + bw + cu + 4cv - cw &= 0 \\
u(a + 3b + c) + v(-2a + 4c) + w(a + b - c) &= 0 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ -2a + 4c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$$

$$a = -3b - c$$

$$6b + 2c + 4c = 0$$

$$b = -c$$

$$3c - c - c - c = 0$$

$$c \in \mathbb{R}$$

Wektory są liniowo zależne, czyli nie stanowią bazy.

#### 16.b)

$$B_2 = (u, 2u + v, 3u - v + 4w)$$

$$\begin{aligned}
au + 2bu + bv + 3cu - cv + 4cw &= 0 \\
u(a + 2b + 3c) + v(b - c) + w(4c) &= 0 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ b - c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Wektory w  $B_2$  są liniowo niezależne i  $\dim B_2 = 3$  więc  $B_2$  jest bazą  $V$ .

### 16.c)

Wyznacz współrzędne wektora  $a = 2u - 3v + 8w$  względem tej bazy.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 2 \\ b - c = -3 \\ 4c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$a = [-2, -1, 2]_{B_2}$$

### Zadanie 17

Wykaż, że dla dowolnych  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  takich, że  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ , wielomiany  $w_0, w_1, \dots, w_n$ , zdefiniowane jako:

$$w_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n,$$

stanowią bazę przestrzeni  $\mathbb{R}[x]_n$ .

Wektorów  $w_i$  jest tyle samo co  $\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$ , więc wystarczy pokazać, że wektory te są liniowo niezależne.

Niech  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

$$a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + \dots + a_n w_n(x) \stackrel{?}{=} 0$$

Zauważmy, że dla  $x = x_i$

$$w_i(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1,$$

a dla  $x = x_k$ , gdzie  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $k \neq i$ ,  $w_i(x_k) = 0$ , bo występuje takie  $j$ , że  $j = k$  czyli występuje czynnik  $(x_k - x_j) = 0$ .

Niech  $x := x_0$ . Wtedy:

$$a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + \dots + a_n w_n(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Analogicznie pokazujemy, podstawiając za  $x$  kolejne  $x_i$ , że  $a_i = 0$  dla każdego  $i = 0, 1, \dots, n$ .

### Zadanie 18

Niech  $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , a  $V_1, V_2$  będą podzbiorami  $V$  składającymi się, odp., z odwzorowań nieparzystych oraz parzystych. Wykaż, że  $V_1, V_2$  są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej  $V$  oraz, że  $V = V_1 \oplus V_2$ .

$$V_1 = \{f : f(x) = -f(-x)\}, V_2 = \{f : f(x) = f(-x)\}$$

$$\forall f, g \in V_1 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \stackrel{?}{\in} V_1$$

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha(-f(-x)) + \beta(-g(-x)) = -(\alpha f + \beta g)(-x)$$

$$\forall f, g \in V_2 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \stackrel{?}{\in} V_2$$

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = (\alpha f + \beta g)(-x)$$

$$V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists g \in V_1, h \in V_2 : f = g + h$$

$$f(x) = g(x) + (f - g)(x)$$

$$g(x) = g(-x) \wedge (f - g)(x) = -(f - g)(-x)$$

$$f(x) - g(x) = -f(-x) + g(-x) = -f(-x) + g(x)$$

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$(f - g)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\} = \{f(x) = 0\}$$

$$f \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) = f(-x) \Rightarrow f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

### Zadanie 19

Niech  $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Oznaczmy przez  $F_a$  zbiór odwzorowań zerujących się w punkcie  $a$ .

$$F_a := \{f : f(a) = 0\}$$

#### 19.a)

Wykaż, że  $F_a$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$

$$\forall f, g \in F_a : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \stackrel{?}{\in} F_a$$

$$(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha f(a) + \beta g(a) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g \in F_a$$

#### 19.b)

Udowodnij, że jeżeli  $a \neq b$ , to  $V = F_a + F_b$ , ale suma ta nie jest prosta.

$$\forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists f_a \in F_a : \exists f_b \in F_b : f = f_a + f_b (?)$$

$$\text{Niech } f_a(x) := \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \neq a \\ 0, & \text{gdy } x = a \end{cases}, f_b(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \neq a \\ f(x), & \text{gdy } x = a \end{cases}.$$

$$\text{Wtedy } f_a(x) + f_b(x) = f(x).$$

$$F_a \cap F_b = \{f : f(a) = f(b) = 0\} \neq \{f(x) = 0\}, \text{ ponieważ np.}$$

$$f(x) = 2(x-a)(x-b), g(x) = 3(x-a)(x-b) \in F_a \cap F_b, \text{ więc } F_a + F_b \text{ nie jest sumą prostą.}$$

## Zadanie 20

Niech  $X$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$  oraz  $U$  i  $V$  jej podprzestrzeniami.

### 20.a)

Wykaż, że  $U \cup V$  jest podprzestrzenią  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $U \subset V$  lub  $V \subset U$ .

( $\Leftarrow$ )

$$U \subset V \Rightarrow U \cup V = V, \text{ a } V \text{ jest podprzestrzenią } X$$

$$V \subset U \Rightarrow U \cup V = U, \text{ a } U \text{ jest podprzestrzenią } X$$

( $\Rightarrow$ )

$$\text{Hp: } \exists u \in U \setminus V, v \in V \setminus U : u + v \in U \cup V$$

$$u + v \in U \cup V \Rightarrow u + v \in U \vee u + v \in V$$

$$\text{Pierwszy przypadek: } u + v \in U.$$

$$\text{Ponieważ } U \text{ jest podprzestrzenią a } u \in U, \text{ to } u + v + (-1)u = v \in U \text{ sprzeczność.}$$

$$\text{Drugi przypadek: } u + v \in V.$$

$$\text{Ponieważ } V \text{ jest podprzestrzenią a } v \in V, \text{ to } u + v + (-1)v = u \in V \text{ sprzeczność.}$$

### 20.b)

Sprawdź, czy  $\text{Lin}(U \cup V) = U + V$ .

$$\text{Lin}\{U \cup V\} = \{\alpha w + \beta q : \alpha, \beta \in K, w, q \in U \cup V\}$$

$$u \in U, \alpha \in K \Rightarrow \alpha u \in U, v \in V, \alpha \in K \Rightarrow \alpha v \in V$$

$$\text{Lin}\{U \cup V\} = \{w + q : w, q \in U \cup V\} = \{u + v : u \in U, v \in V\}, \text{ bo w szczególności } u = \bar{0}.$$