Zadanie 1

Sprawdź jakie własności mają w $\mathbb{Z}$ następujące działania:

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

1.a)

$a \circ b = a - b$

1. ~~łączność~~: $(a - b) - c \neq a - (b - c)$
2. ~~element neutralny~~: $\exists e \in \mathbb{Z} : a - e = a = e - a \Rightarrow -e = 0 = e - 2a$ sprzeczność
3. ~~element symetryczny~~: nie ma elementu neutralnego
4. ~~przemienność~~: $a - b = b - a \Rightarrow a = b$

1.b)

$a \circ b = a^2 + b^2$

1. łączność: $(a^2 + b^2) + c^2 = a^2 + (b^2 + c^2)$
2. ~~element neutralny~~: $\exists e \in \mathbb{Z} : a^2 + e^2 = a = e^2 + a^2$ sprzeczność
3. ~~element symetryczny~~: nie ma elementu neutralnego
4. przemienność: $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$

1.c)

$a \circ b = 2(a + b)$

1. ~~łączność~~: $2(2(a + b) + c) = 2(a + 2(b + c))$
   $4a + 4b + 2c = 2a + 4b + 4c$ sprzeczność
2. ~~element neutralny~~: $\exists e \in \mathbb{Z} : 2(a + e) = a = 2(e + a) \Rightarrow 2e = -a$ sprzeczność
3. ~~element symetryczny~~: nie ma elementu neutralnego
4. przemienność: $2(a + b) = 2(b + a)$

1.d)

$a \circ b = -a - b$

1. ~~łączność~~: $-(-a - b) - c = -a - (-b - c)$ sprzeczność
2. ~~element neutralny~~: $\exists e \in \mathbb{Z} : -a - e = a = -e - a \Rightarrow e = -2a$ sprzeczność
3. ~~element symetryczny~~: nie ma elementu neutralnego
4. przemienność: $-a - b = -b - a$

Zadanie 2

W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie $x \circ y := x + y + xy$. Czy $(\mathbb{R}, \circ)$ jest grupą? Czy jest grupą para $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$?

1. łączność: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$\begin{aligned}(x + y + xy) + z + (x + y + xy)z &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\ x + y + xy + z + xz + yz + xyz &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz\end{aligned}$$

2. element neutralny: $\exists e \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \circ e = x = e \circ x$

$$\begin{aligned}x + e + xe = x &= e + x + ex \\ e + xe &= 0 \\ e(1 + x) &= 0 \\ e = 0 &\vee x = -1\end{aligned}$$

   W $(\mathbb{R}, \circ)$ nie ma elementu neutralnego, czyli nie jest to grupa, ale w $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ jest element neutralny ($e = 0$).

3. element symetryczny: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : x \circ x' = 0 = x' \circ x$

$$\begin{aligned}x + x' + xx' &= 0 \qquad = x' + x + x'x \\ x'(1 + x) &= -x \\ x' &= \frac{-x}{1 + x}\end{aligned}$$

$(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ jest grupą.

Zadanie 3

W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie $x \circ y := x + y + 2$. Czy $(\mathbb{Z}, \circ)$ jest grupą?

1. łączność: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$(x + y + 2) + z + 2 = x + (y + z + 2) + 2$$

2. element neutralny: $\exists e \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x \circ e = x = e \circ x$

$$\begin{aligned}x + e + 2 = x &= e + x + 2 \\ e &= -2\end{aligned}$$

3. element symetryczny: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists x' \in \mathbb{Z} : x \circ x' = -2 = x' \circ x$

$$\begin{aligned}x + x' + 2 = -2 &= x' + x + 2 \\ x' &= -x - 4\end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}, \circ)$ jest grupą.

Zadanie 4

Które z następujących zbiorów liczb są grupami:

4.a)

liczby wymierne ze względu na dodawanie, mnożenie

4.b)

liczby niewymierne ze względu na dodawanie, mnożenie

4.c)

liczby zespolone o module równym 1 ze względu na mnożenie

4.d)

liczby zespolone o module równym 1 ze względu na następujące działanie: $z_1 \circ z_2 = |z_1| z_2$

4.e)

liczby całkowite ze względu na odejmowanie

Zadanie 5

Niech E_n będzie zbiorem wszystkich pierwiastków n-tego stopnia (w $\mathbb{C}$) z jedności. Udowodnij, że $(E_n, \cdot)$ jest grupą.

Zadanie 6

Niech D będzie zbiorem wszystkich całkowitych potęg liczby 2. Sprawdź (i uzasadnij) czy struktura $(D, \circ)$, gdzie $a \circ b := \frac{a \cdot b}{2}$, jest grupą.

Zadanie 7

Niech $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj., dla dowolnych zbiorów A i B,
$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sprawdź, czy dla dowolnie ustalonego zbioru $X \neq \emptyset$, para $(2^X, \triangle)$ jest grupą abelową.

Zadanie 8

Niech $(G, *)$ będzie grupą z elementem neutralnym e taką, że: $a * a = e$ dla każdego $a \in G$. Wykaż, że $(G, *)$ jest grupą abelową.

Zadanie 9

Czy następujące zbiory są ciałami ze względu na dodawanie i mnożenie:

9.a)

$\left\{a + b\sqrt[3]{5} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$

9.b)

liczby wymierne, które nie są całkowite

9.c)

zbiór liczb zespolonych postaci $a + ib\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}$

Zadanie 10

W zbiorze $\mathbb{Z}/k$ (tj. zbiorze ilorazowym ze względu na relację przystawania modulo k) określamy działania $+, \cdot$ następująco:

$$[a] + [b] = [a + b], \; [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

10.a)

Sprawdź, czy $(\mathbb{Z}/12, +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką ale z dzielnikami zera.

10.b)

Wykaż, że $(\mathbb{Z}/7, +, \cdot)$ jest pierścieniem całkowitym.

Zadanie 11

11.a)

Wykaż, że zbiór $A = \left\{x = a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem.

11.b)

Wykaż, że zbiór $B = \left\{x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.

11.c)

Udowodnij, że odwzorowanie $f : x = a + b\sqrt{3} \to \tilde{x} = a - b\sqrt{3}$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.

Zadanie 12

Dla danego zbioru $X \neq \emptyset$, definiujemy strukturę $(2^X, \triangle, \cap)$, gdzie „$\triangle$" oznacza różnicę symetryczną a „$\cap$" - przecięcie zbiorów. Sprawdź czy ta struktura jest:

12.a)

pierścieniem?

12.b)

pierścieniem przemiennym?

12.c)

pierścieniem z jednością?

12.d)

pierścieniem z całkowitym?

12.e)

ciałem?

Zadanie 13

W zbiorze $\mathbb{R}^2$ wprowadzamy działania: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 + py_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ struktura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ jest ciałem?

Zadanie 14

14.a)

Wykaż, że zbiór $A = \{x = m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą ze względu na dodawanie.

14.b)

Wykaż, że zbiór $B = \{x = 2^n 3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą ze względu na mnożenie.

14.c)

Udowodnij, że A i B są izomorficzne.