

Zadanie 1

Sprawdź, które z podanych odwzorowań są liniowe:

1.a)

$$L : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], (Lp)(x) = xp'(x) + p(1); \checkmark$$

Niech $p, q \in \mathbb{R}[x], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(\alpha p + \beta q) &= x(\alpha p + \beta q)' + (\alpha p + \beta q)(1) = x(\alpha p' + \beta q') + \alpha p(1) + \beta q(1) = \\ &= \alpha(xp' + p(1)) + \beta(xq' + q(1)) = \alpha L(p) + \beta L(q) \end{aligned}$$

1.b)

$$L : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], (Lp)(x) = p(x)p'(x); \times$$

Niech $p \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha p) = (\alpha p)(\alpha p)' = \alpha^2 pp' \neq \alpha pp'$$

1.c)

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y) = (3x + 2y - 1, 2x - 3y); \times$$

Nie ma zachowania zera:

$$L(0, 0) = (-1, 0) \neq (0, 0)$$

1.d)

$$L : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}), (Lf)(x) = \sin f(x); \times$$

Kontrprzykład: $f(x) = \frac{\pi}{2}, \alpha = 2$

$$L(\alpha f) = L\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0 \neq 2 \sin \frac{\pi}{2}$$

1.e)

$$L : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), (Lf)(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right). \checkmark$$

Niech $f, g \in C([0, 1]), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(L(\alpha f + \beta g))(x) = 2(\alpha f + \beta g)\left(\frac{x}{2}\right) = 2\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + 2\beta g\left(\frac{x}{2}\right) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

Zadanie 2

Dane są następujące odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z), g(x, y) = (y, x, x + y).$$

2.a)

Sprawdź, że są to odwzorowania liniowe i podaj $f(1, 2, -1)$, $g(-1, 3)$;

Niech $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) = \\ &(-\alpha x_1 - \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2, \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2) = \\ &\alpha(-x_1 + y_1 + z_1, x_1 - y_1 + z_1) + \beta(-x_2 + y_2 + z_2, x_2 - y_2 + z_2) = \\ &\alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

$$f(1, 2, -1) = (-1 + 2 - 1, 1 - 2 - 1) = (0, -2)$$

Niech $x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) &= g(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) = \\ &(\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2) = \\ &\alpha(y_1, x_1, x_1 + y_1) + \beta(y_2, x_2, x_2 + y_2) = \alpha g(x_1, y_1) + \beta g(x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$g(-1, 3) = (3, -1, 2)$$

2.b)

Znajdź $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, $\text{Ker } g$, $\text{Im } g$ i podaj ich wymiary;

$$1) \text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$z = 0$$

$$x = y$$

$$\text{Ker } f = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3\}, \dim \text{Ker } f = 1$$

$$2) \text{Im } f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (a, b)\}$$

Niech $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z) = (a, b) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + z = a \\ x - y + z = b \end{cases} \Rightarrow z = \frac{a+b}{2}$$

$$x - y + \frac{a+b}{2} = b \Rightarrow x - y = \frac{b-a}{2}$$

$$f\left(\frac{b-a}{2}, 0, \frac{a+b}{2}\right) = (a, b)$$

$$\text{Im} f = \mathbb{R}^2, \dim \text{Im} f = 2$$

$$3) \text{Ker} g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = (0, 0, 0)\}$$

$$g(x, y) = (y, x, x + y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$\text{Ker} g = \{(0, 0)\}, \dim \text{Ker} g = 0$$

$$4) \text{Im} g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : g(a, b) = (x, y, z)\}$$

Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$g(a, b) = (b, a, a + b) = (x, y, z) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = y \\ b = x \\ z = x + y \end{cases}$$

$$\text{Im} f = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3\}, \dim \text{Im} f = 2$$

2.c)

Sprecyzuj $g \circ f$ i $f \circ g$.

$$g \circ f = f(g(x, y)) = f(y, x, x + y) = (-y + x + x + y, y - x + x + y) = (2x, 2y)$$

$$f \circ g = g(f(x, y, z)) = g(-x + y + z, x - y + z) = (x - y + z, -x + y + z, 2z)$$

Zadanie 3

Podaj wymiary jąder i obrazów następujących przekształceń liniowych:

3.a)

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y, z) = (x + y, y + z);$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \text{Ker} L = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \text{Ker} L = 1$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L \Rightarrow \dim \text{Im} L = 3 - 1 = 2$$

3.b)

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, L(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - z, -x + 3y - 2z, 8x + y + z);$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 8x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$
$$y = \frac{3}{5}z$$

$$x = -2y + z = -\frac{7}{5}z$$

$$\text{Ker} L = \{(-7t, 3t, 5t), t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \text{Ker} L = 1$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L \Rightarrow \dim \text{Im} L = 3 - 1 = 2$$

3.c)

$$L : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2, (Lp)(x) = (x^2 + x)p(2) + (3x^2 - x)p(1).$$

Niech $p = ax^2 + bx + c$. Wtedy

$$(Lp)(x) = (x^2 + x)(4a + 2b + c) + (3x^2 - x)(a + b + c) = (7a + 3b + 2c)x^2 + (3a + b)x$$

$$\begin{cases} 7a + 3b + 2c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = a \end{cases}$$

$$\text{Ker} L = \{(ax^2 - 3ax + a), a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \text{Ker} L = 1$$

$$\dim R[x]_2 = \dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L \Rightarrow \dim \text{Im} L = 3 - 1 = 2$$

Zadanie 4

Odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ przeprowadza wektor $x = (2, 1, 1)$ na wektor $u = (4, 5)$ oraz wektor $y = (1, -3, 2)$ na wektor $v = (-6, 1)$. Znajdź obraz wektora $z = (5, 6, 1)$ względem tego odwzorowania. Czy przy tych danych można jednoznacznie określić $L(4, 1, 5)$?

Znajdźmy kombinację liniową x i y , która daje z .

$$\alpha x + \beta y = z$$

$$\alpha(2, 1, 1) + \beta(1, -3, 2) = (5, 6, 1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$-3\beta = 3 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\alpha = 1 - 2\beta = 3$$

W takim razie obraz wektora z też będzie taką kombinacją:

$$w = \alpha u + \beta v = 3(4, 5) - (-6, 1) = (18, 14)$$

Analogicznie znajdziemy kombinację dla wektora L .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

$$-3\beta = -6 \Rightarrow \beta = 2$$

$$-5\beta = -4 \Rightarrow \beta = \frac{4}{5}$$

Dochodzimy do sprzeczności, czyli x , y i L są liniowo niezależne, więc nie możemy znaleźć obrazu L .

Zadanie 5

Wyznacz odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że $f(1, 1, 0) = (1, 1)$, $f(0, 2, -1) = (-1, 0)$, $f(1, 2, -1) = (0, 2)$.

$$f(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz)$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \Rightarrow a = 1 - b \\ d + e = 1 \Rightarrow d = 1 - e \\ 2b - c = -1 \Rightarrow c = 2b + 1 \\ 2e - f = 0 \Rightarrow f = 2e \\ a + 2b - c = 0 \Rightarrow 1 - b + 2b - 2b - 1 = 0 \Rightarrow b = 0, \quad a = 1, \quad c = 1 \\ d + 2e - f = 2 \Rightarrow 1 - e + 2e - 2e = 2 \Rightarrow e = -1, \quad d = 2, \quad f = -2 \end{cases}$$

$$f(x, y, z) = (x + z, 2x - y - 2z)$$

$$f(1, 1, 0) = (1, 1)$$

$$f(0, 2, -1) = (-1, 0)$$

$$f(1, 2, -1) = (0, 2)$$

Zadanie 6

Skonstruuj następujące endomorfizmy:

6.a)

$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ taki, że $\text{Ker} f = \text{Lin}\{u_1, u_2\}$ i $\text{Im} f = \text{Lin}\{v_1, v_2\}$, gdzie $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 1)$, $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$;

Wiemy, że $\text{Im} f = \text{Lin} f(B)$, gdzie B to baza \mathbb{R}^4 . Musimy dobrać taką bazę, żeby $\text{Lin} f(B) = \text{Lin}\{v_1, v_2\}$. Niech naszą bazą będzie u_1, u_2 (ponieważ $f(u_1) = f(u_2) = \bar{0}$) oraz dwa inne wektory, w_1 i w_2 tak, że $f(w_1) := v_1$, $f(w_2) := v_2$.

Musimy znaleźć w_1 i w_2 niezależne od u_1 i u_2 . $\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, -\alpha, \beta)$, więc możemy wziąć $w_1 = (1, 0, 0, 0)$ oraz $w_2 = (0, 1, 0, 0)$.

Możemy zapisać dowolny wektor z \mathbb{R}^4 jako kombinacja liniowa wektorów z tej bazy.

$$(x, y, z, w) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w_1 + \delta w_2 = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta + \delta, -\alpha, \beta)$$

$$\begin{cases} \alpha = -z \\ \beta = w \\ \gamma = x + z - w \\ \delta = y + z - w \end{cases}$$

Teraz możemy skonstruować takie f , że $f(u_1) = f(u_2) = \bar{0}$, $f(w_1) = v_1$, $f(w_2) = v_2$.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= f(-zu_1 + wu_2 + (x + z - w)w_1 + (y + z - w)w_2) = \\ &= -zf(u_1) + wf(u_2) + (x + z - w)f(w_1) + (y + z - w)f(w_2) = \\ &= (0, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 0) + (x + z - w)v_1 + (y + z - w)v_2 = \\ &= (x + y + 2z - 2x, x + z - w, x + y + 2z - 2x, x + z - w) \end{aligned}$$

6.b)

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ taki, że $\text{Im} f = \text{Lin}\{v_1, v_2\}$, gdzie $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (3, -1, 1)$;

Skoro $\dim \text{Im} f = 2$, a $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ to $\dim \text{Ker} f = 1$.

Możemy wybrać bazę $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ oraz zdefiniować f tak, że $f(1, 0, 0) = v_1$, $f(0, 1, 0) = v_2$, $f(0, 0, 1) = \bar{0}$.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = \\ &= x(1, 3, 2) + y(3, -1, 1) + z(0, 0, 0) = \\ &= (x + 3y, 3x - y, 2x + y) \end{aligned}$$

6.c)

$L : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ taki, że $\text{Ker} L = \text{Lin}\{1 - x\}$ i $\text{Im} L = \text{Lin}\{1 + x, 1 + x^2\}$.

Wybierzmy bazę $B = \{x^2, 1 - x, 1\}$ oraz zdefiniujmy f tak, że $f(x^2) = 1 + x^2$, $f(1 - x) = 0$, $f(1) = 1 + x$.

$$\begin{aligned} f(ax^2 + bx + c) &= f(ax^2 - b(1 - x) + b + c) = \\ af(x^2) - bf(1 - x) + (b + c)f(1) &= a(1 + x^2) + (b + c)(1 + x) = \\ ax^2 + (b + c)x + a + b + c \end{aligned}$$

Zadanie 7

Niech $f : U \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2)$ będą bazami przestrzeni wektorowych, odpowiednio, U, V (nad ciałem \mathbb{R}). Wiedząc, że $f(u_1) = 2v_1$, $f(u_2) = -v_2$, $f(u_1 + u_3) = v_1 + v_2$ i $f(u_1 - u_3) = 3v_1 - v_2$, wyznacz $\text{Ker } f$.

$$\begin{aligned} 2f(u_1 + u_3) - f(u_1) + 2f(u_2) &= 2v_1 + 2v_2 - 2v_1 - 2v_2 = 0 \\ f(2u_1 + 2u_3 - u_1 + 2u_2) &= f(u_1 + 2u_2 + 2u_3) = 0 \end{aligned}$$

Więc na pewno $\text{Lin}\{u_1 + 2u_2 + 2u_3\} \subset \text{Ker } f$. Pozostaje pytanie czy to już całe jądro.

Zauważmy, że każdy wektor z V da się otrzymać przekształceniem:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \frac{\alpha}{2} f(u_1) - \beta f(u_2) = f\left(\frac{\alpha}{2} u_1 - \beta u_2\right)$$

czyli $\text{Im } f = V$. Z tego wynika, że $\dim \text{Im } f = \dim V = 2$, a $\dim U = 3$, więc $\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$, czyli rzeczywiście $\text{Ker } f = \text{Lin}\{u_1 + 2u_2 + 2u_3\}$.