Zadanie 1

Na ile różnych sposobów można rozsadzić n osób wokół okrągłego stołu z $n + w$ miejscami?

Zaczynamy numeracje miejsc od osoby 1. Pozostałe $n - 1$ osób może usiąść na pozostałych $n + w - 1$ miejscach na

$$\binom{n + w - 1}{n - 1} \cdot (n - 1)! = \frac{(n + w - 1)!}{w!}$$

sposobów.

Zadanie 2

Ile jest różnych naszyjników zrobionych z n różnokolorowych korali?

Zakładam, że naszyjniki symetryczne są nierozróżnialne.

Problem jest analogiczny do ludzi przy okrągłym stole. Dla naszyjników z więcej niż dwóch koralików dwa razy liczymy symetryczne sytuacje. Gdy koralików jest dwa lub mniej istnieje tylko 1 możliwy naszyjnik.

$$\begin{cases} \frac{(n-1)!}{2} & \text{gdy} \quad n > 2 \\ 1 & \text{gdy} \quad n \leq 2 \end{cases}$$

Zadanie 3

Ile jest różnych ciągów binarnych o a zerach i b jedynkach?

Z $a + b$ miejsc wybieramy a zer lub b jedynek.

$$\binom{a + b}{a} = \binom{a + b}{b}$$

Zadanie 4

Ile jest różnych liczb n-cyfrowych podzielnych przez 9, w których żadna cyfra nie jest dziewiątką?

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą cyframi liczby. Ponieważ liczba jest podzielna przez 9 to:

$$a_1 + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod 9$$
$$a_n \equiv -a_1 - \ldots - a_{n-1} \pmod 9$$
$$a_n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$$

Ponieważ a_n jest wybierane jednoznacznie to wynik jest równy ilości liczb $n - 1$ cyfrowych. Żadna cyfra nie może być 9, a pierwsza nie może być 0, więc wynik to

$$8 \cdot 9^{n-2}$$

.

Zadanie 5

Na ile różnych sposobów można ustawić w ciąg liczby $0, 1, \ldots, 9$, tak by między 1 i 2 było dokładnie k innych liczb?

1 i 2 można wstawić w każdą permutację pozostałych cyfr w $10 - 2 - k + 1 = 9 - k$ miejsc. Kolejność 1 i 2 może być dowolna.

$$2 \cdot (9 - k) \cdot 8!$$

.

Zadanie 6

Ile jest różnych permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ takich, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednie?

Liczby parzyste i nieparzyste muszą być ustawione naprzemiennie, zaczynając od parzystych lub na odwrót. Parzyste i nieparzyste permutujemy osobno, więc wynik to

$$2(n!)^2$$

Zadanie 7

Ile jest różnych punktów przecięcia n prostych, z których k jest wzajemnie równoległych, jeśli wiadomo, że żadne inne nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w tym samym punkcie.

Narysujmy najpierw k równoległych prostych. Każda kolejna prosta przecina się z wszytkimi już narysowanymi tylko raz. Wynik więc to

$$k + (k + 1) + (k + 2) + \ldots + (n - 1)$$

Zadanie 8

Na ile różnych sposobów można podzielić $2n$ osób na pary?

Ponumerujmy wszystkie osoby na $(2n)!$ sposobów. 1 osoba jest w parze z 2, 3 z 4 itd. Kolejność par oraz kolejność osób w każdej z n par nie mają znaczenia. Wynik więc to

$$\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$$

Zadanie 9

Ile jest różnych permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$, w których każda liczba nieparzysta poprzedza (niekoniecznie bezpośrednio) liczbę o 1 od niej większą?

Z wszystkich permutacji połowa ma dobrze ustawioną parę 1-2. Z tej połowy tylko połowa ma dobrze ustawioną parę 3-4, itd, ponieważ pary te są od siebie niezależne. Wynik więc to

$$\frac{8!}{2^4}$$

Zadanie 10

Na ile różnych sposobów można wybrać z n osób komitet, a z komitetu jego zarząd, jeśli zarówno komitet, jak i zarząd mogą liczyć od 0 do n osób?

Każda osoba ma 3 opcje: może być w komitecie, komitecie i zarządzie, lub w niczym. Wynik więc to

$$3^n$$