## Zadanie 1

Dane są relacje $R = (\mathbb{N}, \text{gr}R, \mathbb{N})$, $S = (\mathbb{N}, \text{gr}S, \mathbb{N})$, gdzie:

$\text{gr}R = \{(1,1), (1,2), (3,2), (3,4), (3,7), (2,9), (5,3)\}$,
$\text{gr}S = \{(1,2), (1,7), (2,5), (2,4), (7,9), (4,10)\}$.

### 1.a)

Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny tych relacji.

$D_R = \{1,3,2,5\}, \text{Ɑ}_R = \{1,2,4,7,9,3\}$

$D_S = \{1,2,7,4\}, \text{Ɑ}_S = \{2,7,5,4,9,10\}$

### 1.b)

Utwórz relacje $R \circ S, S \circ R, S^{-1}, R^{-1}, S^{-1} \circ R^{-1}, (S \circ R)^{-1}, S^{-}1 \circ R$.

$\text{gr}(R \circ S) = \{(1,9), (2,3)\}$

$\text{gr}(S \circ R) = \{(1,2), (1,7), (1,5), (1,4), (3,5), (3,4), (3,10), (3,9)\}$

$\text{gr}S^{-1} = \{(2,1), (7,1), (5,2), (4,2), (9,7), (10,4)\}$

$\text{gr}R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3), (7,3), (9,2), (3,5)\}$

$\text{gr}(S^{-1} \circ R^{-1}) = \{(3,2), (9,1)\}$

$\text{gr}(S \circ R)^{-1} = \{(2,1), (7,1), (5,1), (4,1), (5,3), (10,3), (9,3)\}$

$\text{gr}(S^{-1} \circ R) = \{(1,1), (3,1), (3,2), (3,1), (2,7)\}$

### 1.c)

Sprawdź, że $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}$.

$\text{gr}(S^{-1} \circ R^{-1}) = \{(3,2), (9,1)\}$

$\text{gr}(R \circ S)^{-1} = \{(9,1), (3,2)\}$

### Zadanie 2

Udowodnij, że dla dowolnej relacji $R$ zachodzi implikacja:

$\mathrm{gr}R^{-1} \subset \mathrm{gr}R \Rightarrow \mathrm{gr}R^{-1} = \mathrm{gr}R$

$(x, y) \in \mathrm{gr}R \Rightarrow (y, x) \in \mathrm{gr}R^{-1} \Rightarrow (y, x) \in \mathrm{gr}R \Rightarrow (x, y) \in \mathrm{gr}R^{-1}$

Pierwsza i trzecia implikacja wynikają z definicji relacji odwrotnej,
a druga z tego, że $\mathrm{gr}R^{-1} \subset \mathrm{gr}R$.

Skoro $(x, y) \in \mathrm{gr}R \Rightarrow (x, y) \in \mathrm{gr}R^{-1}$ to $\mathrm{gr}R \subset \mathrm{gr}R^{-1}$.

$\mathrm{gr}R \subset \mathrm{gr}R^{-1} \land \mathrm{gr}R^{-1} \subset \mathrm{gr}R \Rightarrow \mathrm{gr}R^{-1} = \mathrm{gr}R$

### Zadanie 3

Wykaż, że dla relacji zwrotnej $R$, równość $R \circ R = R$ jest równoważna „przechodności" relacji $R$.

$R = (X, \mathrm{gr}R, X)$

$R$ jest zwrotna $\Rightarrow \forall x \in X : xRx$

Do czego wykorzystujemy zwrotność $R$?

$R \circ R = (X, \mathrm{gr}(R \circ R), X), \mathrm{gr}(R \circ R) = \{(x, z) \in X^2 : \exists y \in X : xRy \land yRz\}$

$xRy \land yRz \Rightarrow (x, z) \in \mathrm{gr}(R \circ R)$

Ale $\mathrm{gr}(R \circ R) = \mathrm{gr}R$, więc $(xRy \land yRz \Rightarrow xRz) \Leftrightarrow R$ jest przechodnia.

### Zadanie 4

Wykaż, że dla zbioru $X$ z relacją $R$:

$R$ jest relacją równoważności $\Leftrightarrow R^{-1}$ jest relacją równoważności.

1. zwrotność:

   $\forall x \in X : xRx \Leftrightarrow xR^{-1}x$

2. symetryczność:

   $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$

   $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x, yRx \Rightarrow xR^{-1}y$

   $\forall x, y \in X : yR^{-1}x \Rightarrow xR^{-1}y$

3. przechodność:

   $\forall x, y, z \in X : xRy \land yRz \Rightarrow xRz$

$xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$, $yRz \Rightarrow zR^{-1}y$, $xRz \Leftrightarrow zR^{-1}x$

$\forall x, y, z \in X : zR^{-1}y \wedge yR^{-1}x \Rightarrow zR^{-1}x$

## Zadanie 5

Wykaż, że jeżeli relacja $R$ określona w zbiorze $X$ jest zwrotna i przechodnia, to $R \cap R^{-1}$ określa relację równoważności.

$R \cap R^{-1} = (X, \mathrm{gr}(R \cap R^{-1}), X), \mathrm{gr}(R \cap R^{-1}) = \{(x, y) \in X^2 : xRy \wedge xR^{-1}y\}$

1. zwrotność:

   $R$ jest zwrotna $\Rightarrow \forall x \in X : xRx \Rightarrow xR^{-1}x$

   $(xRx \wedge xR^{-1}x) \Rightarrow (x, x) \in \mathrm{gr}(R \cap R^{-1})$

2. symetryczność:

   $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x \wedge xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$
   $\forall x, y \in X : (xRy \wedge xR^{-1}y) \Rightarrow (yR^{-1}x \wedge yRx)$
   $\Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{gr}(R \cap R^{-1}) \Rightarrow (y, x) \in \mathrm{gr}(R \cap R^{-1})$

3. przechodność:

   $x, y, z \in X$

   $R$ jest przechodnie $\Rightarrow xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

   $R^{-1}$ jest przechodnie (**Zadanie 4**) $\Rightarrow xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z \Rightarrow xR^{-1}z$

   $(xRy \wedge xR^{-1}y) \wedge (yRz \wedge yR^{-1}z) \Rightarrow (xRz \wedge yR^{-1}z)$

## Zadanie 6

W zbiorze $\mathbb{N}^2$ dana jest relacja $R = (\mathbb{N}^2, \mathrm{gr}R, \mathbb{N}^2)$ taka, że $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Wykaż, że $R$ jest relacją równoważności i znajdź zbiór ilorazowy.

$(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N}^2$

$a + b = b + a \Rightarrow (a, b)R(a, b) \Rightarrow R$ jest zwrotna

$(a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a) \Rightarrow ((a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)) \Rightarrow R$ jest symetryczna

$$\begin{aligned} a + d &= b + c \\ c + f &= d + e \\ a + d + c + f &= b + c + d + e \\ a + f &= b + e \end{aligned}$$

$((a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \Rightarrow (a, b)R(e, f)) \Rightarrow R$ jest przejściowa

$R$ jest zwrotna, symetryczna i przejściowa $\Rightarrow R$ jest relacją równoważności.

Zbiór ilorazowy $X/R = \{[(a,b)] : (a,b) \in \mathbb{N}^2\}$

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow a - b = c - d$

$[(r,0)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : a - b = r\}, r \in \mathbb{N}$

$[(0,r)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : a - b = -r\}, r \in \mathbb{N}$

$X/R = \{[(r,0)] : r \in \mathbb{N}\} \cup \{[(0,r)] : r \in \mathbb{N}\}$

$X/R = \{\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : |a - b| = r\} : r \in \mathbb{N}\}$

### Zadanie 7

Niech $k \in \mathbb{N}_+$. W zbiorze $\mathbb{Z}$ wprowadzamy relację $m \equiv n (\operatorname{mod} k) \Leftrightarrow k | (m - n)$. Wykaż, że relacja ta jest równoważnością. Zbiór ilorazowy tej relacji będziey oznaczać przez $\mathbb{Z}/k$.

1. zwrotność: $\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv x (\operatorname{mod} k)$

   $k | (x - x) \Leftrightarrow k | 0$

2. symetryczność: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y (\operatorname{mod} k) \Rightarrow y \equiv x (\operatorname{mod} k)$

   $k | (x - y) \Rightarrow k | -1 \cdot (x - y) \Rightarrow k | (y - x)$

3. przechodność: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x \equiv y (\operatorname{mod} k) \land y \equiv z (\operatorname{mod} k)) \Rightarrow x \equiv z (\operatorname{mod} k)$

   $k | (x - y) \land k | (y - z) \Rightarrow k | ((x - y) + (y - z)) \Rightarrow k | (x - z)$

#### 7.a)

Przyjmując $k = 7$ podaj: $[2], [5], [-5]$;

$[x] = \{y \in \mathbb{Z} : x \equiv y (\operatorname{mod} 7)\}$

$[2] = \{7n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$

$[5] = \{7n + 5, n \in \mathbb{Z}\}$

$[-5] = \{7n - 5, n \in \mathbb{Z}\} = [2]$

#### 7.b)

Podaj $\mathbb{Z}/7$.

$\mathbb{Z}/7 = \{\{7n + m, n \in \mathbb{N}\}, m = 0, 1, ..., 6\}$

### Zadanie 8

Niech $p$ będzie elementem zbioru $X$. W zbiorze $2^X$ podzbiorów zbioru $X$ określamy relację $R = (2^X, \operatorname{gr} R, 2^X)$:

$$\mathrm{gr}R := \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : (A = B) \vee (p \notin A \cup B)\}$$

Czy $R$ jest relacją równoważności?

1. zwrotność:

   $\forall A \in 2^X : A = A \Rightarrow ARA$

2. symetryczność:

   $\forall A, B \in 2^X : (A = B) \vee (p \notin A \cup B) \Rightarrow (B = A) \vee (p \notin B \cup A)$

3. przechodność:

   $A, B, C \in 2^X$

   $((A = B) \vee (p \notin A \cup B)) \wedge ((B = C) \vee (p \notin B \cup C))$

$$\begin{aligned}
(A = B) \vee (B = C) &\Rightarrow (A = C) &&\Rightarrow ARC \\
(A = B) \vee (p \notin B \cup C) &\Rightarrow (p \notin A \cup C) &&\Rightarrow ARC \\
(p \notin A \cup B) \vee (B = C) &\Rightarrow (p \notin A \cup C) &&\Rightarrow ARC \\
(p \notin A \cup B) \vee (p \notin B \cup C) &\Rightarrow (p \notin A \cup C) &&\Rightarrow ARC
\end{aligned}$$

$R$ jest relacją równoważności.

## Zadanie 9

Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Niech $S = (\mathbb{R}, \mathrm{gr}S, \mathbb{R})$ będzie relacją taką, że $\mathrm{gr}S = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$.

### 9.a)

Wykaż, że $S$ jest relacją równoważności.

1. zwrotność:

   $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x)$

2. symetryczność:

   $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$

3. przechodność:

   $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z)$

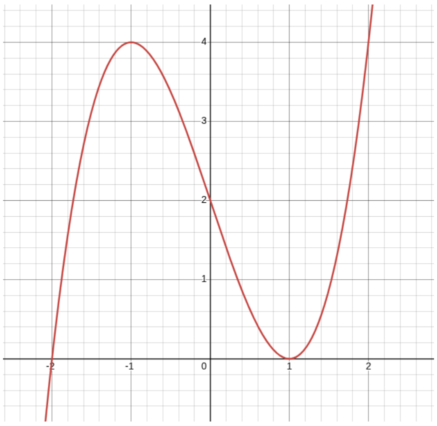
### 9.b)

Niech $a \in \mathbb{R}$. Określ w zależności od $a$ liczebność klasy równoważności $[a]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$



### Zadanie 10

Wykaż, że jeżeli $R$ jest relacją porządkującą na zbiorze $X$, to relacja $R^{-1}$ jest również relacją porządkującą na zbiorze $X$.

1. zwrotność:

   $\forall x \in X : xRx \Rightarrow xR^{-1}x$

2. antysymetryczność:

   $\forall x, y \in X : (xR^{-1}y \wedge yR^{-1}x) \Rightarrow (yRx \wedge xRy) \Rightarrow x = y$

3. przechodność:

   $\forall x, y, z \in X : (xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z) \Rightarrow (yRx \wedge zRy) \Rightarrow (zRy \wedge yRx) \Rightarrow zRx \Rightarrow xR^{-1}z$

### Zadanie 11

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem uporządkowanym, $A \subset X$. Udowodnij, że jeżeli zbiór $A$ ma element najmniejszy (największy), to ten element jest również kresem dolnym (odp. górnym) zbioru $A$.

$\overline{m} \in A$ jest elementem najmniejszym $A \Leftrightarrow \forall x \in A : \overline{m} \preceq x$
$\inf A$ to największa minoranta $m \in X$ taka, że $\forall x \in A : m \preceq x$

*Dowód:*

Niech $m$ będzie dowolną minorantą zbioru $A$.
$\overline{m} \in A \Rightarrow m \preceq \overline{m}$
Ale $\overline{m}$ też jest minorantą, więc jest największą minorantą czyli $\inf A$.

## Zadanie 12

Niech $R = (\mathbb{R}^2, \mathrm{gr}R, \mathbb{R}^2)$, gdzie: $(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \wedge y \leq y'$.

### 12.a)

Wykaż, że $R$ jest relacją porządku. Czy ten porządek jest liniowy?

1. zwrotność:

   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq x \wedge y \leq y \Rightarrow (x,y)R(x,y)$

2. antysymetryczność:

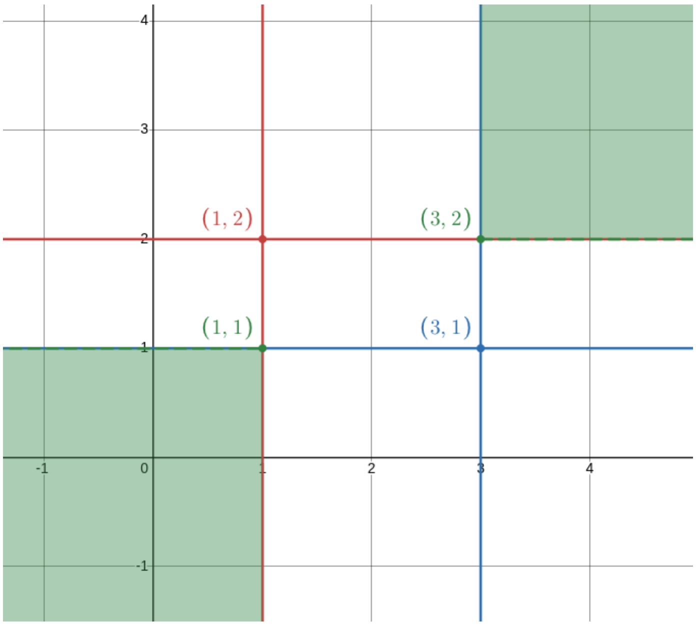
   $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)R(x',y') \wedge (x',y')R(x,y) \Rightarrow$
   $(x \leq x' \wedge y \leq y') \wedge (x' \leq x \wedge y' \leq y) \Rightarrow (x = x' \wedge y = y') \Rightarrow (x,y) = (x',y')$

3. przechodność:

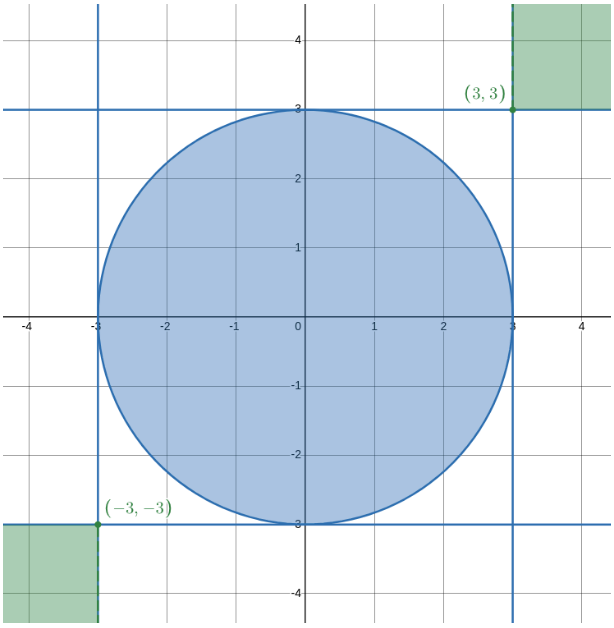
   $\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)R(x',y') \wedge (x',y')R(x'',y'') \Rightarrow$
   $(x \leq x' \leq x'' \wedge y \leq y' \leq y'') \Rightarrow (x \leq x'') \wedge (y \leq y'') \Rightarrow (x,y)R(x'',y'')$

### 12.b)

Znajdź zbiory minorant i majorant oraz kresy zbiorów
$A = \{(1,2),(3,1)\}$, $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.




Zbiór majorant $A = \langle 3, +\infty) \times \langle 2, +\infty)$
Zbiór minorant $A = (-\infty, 1\rangle \times (-\infty, 1\rangle$
$\sup A = (3,2)$
$\inf A = (1,1)$




Zbiór majorant $B = \langle 3, +\infty) \times \langle 3, +\infty)$
Zbiór minorant $B = (-\infty, -3\rangle \times (-\infty, -3\rangle$
$\sup B = (3,3)$
$\inf B = (-3,-3)$

**12.c)**

Czy zbiory $A$ i $B$ mają elementy największe i najmniejsze oraz minimalne i maksymalne?

Zbiory $A$ i $B$ nie mają elementów największych i najmniejszych.
Oba elementy zbioru $A$ są minimalne i maksymalne.
Elementy minimalne zbioru $B$ to łuk okręgu od $(-3, 0)$ do $(0, -3)$ a maksymalne to łuk od $(3, 0)$ do $(0, 3)$.

**Zadanie 13**

Niech $S = (\mathbb{R}^2, \mathrm{gr}S, \mathbb{R}^2)$, gdzie: $(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \Leftrightarrow \ln(1 + x_1^2 + y_1^2) = \ln(1 + x_2^2 + y_2^2)$.

Czy tak określona relacja $S$ jest porządkiem w $\mathbb{R}^2$?
Czy jest to relacja równoważności?

Łatwo zauważyć, że $S$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, czyli jest to relacja równoważności.

**Zadanie 14**

W zbiorze punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ określamy relację $\preceq$:

$$[(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)] \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)).$$

Wykaż, że $\preceq$ porządkuje zbiór $\mathbb{R}^2$. Czy jest to porządek totalny w $\mathbb{R}^2$?

1. zwrotność

   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = x \wedge y \leq y) \Rightarrow x \preceq x$

2. antysymetryczność

   $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 :$

   $(x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)) \wedge (x_2 < x_1 \vee (x_2 = x_1 \wedge y_2 \leq y_1) \Rightarrow$

   $x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \wedge y_2 \leq y_1 \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

3. przechodność

   $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 :$

   $(x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)) \wedge (x_2 < x_3 \vee (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3) \Rightarrow$

   $(x_1 \leq x_2 < x_3) \vee (x_1 < x_2 \leq x_3) \vee (x_1 = x_2 = x_3 \wedge y_1 \leq y_2 \leq y_3) \Rightarrow$

   $x_1 < x_3 \vee (x_1 = x_3 \wedge y_1 \leq y_3) \Rightarrow (x_1, y_1) \preceq (x_3, y_3)$

$\preceq$ jest porządkiem totalnym w $\mathbb{R}^2$, ponieważ dla każdych dwóch
$(x_1, y_1), (x_2, y_2) :$
$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \vee (x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1) \vee (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

### Zadanie 15

Dany jest uporządkowany zbiór $(\mathbb{Q}, \leq)$ oraz podzbiór $A = \left\{x : x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}_+\right\}$. Znajdź kresy zbioru $A$ oraz element największy i element najmniejszy (o ile istnieją). Czy zbiór $A$ stanowi łańcuch?

$0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2$

$\sup A = 2$, jest to też element największy

$\inf A = 0$, elementu najmniejszego nie ma

$A$ jest łańcuchem, ponieważ $\forall x, y \in A : x \leq y \vee y \leq x \vee x = y$

### Zadanie 16

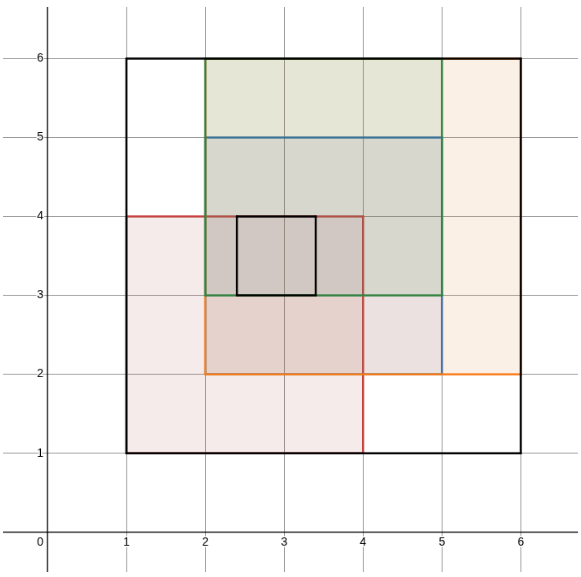
Niech $X = \{1, ..., n\}(n > 2)$. Rozważmy rodzinę $Y$ tych podzbiorów zbioru $X$, które są niepuste i mają co najwyżej $n - 1$ elementów. Wyznacz elementy minimalne i maksymalne zbioru $Y$ względem relacji inkluzji. Czy $Y$ ma element największy lub element najmniejszy?

Elementy minimalne to podzbiory jednoelementowe, a elementy maksymalne to podzbiory $n - 1$ elementowe. Nie ma elementu najmniejszego i największego.

### Zadanie 17

Niech będzie dany zbiór uporządkowany $(X, \subset)$, gdzie
$X = \{[x, x + a] \times [y, y + a] : x, y, a \in \mathbb{R}, a \geq 0\}$ oraz zbiór
$A = \{[1, 4] \times [1, 4]; [2, 5] \times [2, 5]; [2, 5] \times [3, 6]; [2, 6] \times [2, 6]\} \subset X$.

Wyznacz (o ile istnieją) elementy najmniejsze, największe, minimalne, maksymalne, zbiory minorant, majorant oraz kres dolny i górny zbioru $A$ względem zadanego porząku w $X$.




Elementy maksymalne to $[1, 4] \times [1, 4]$ i $[2, 6] \times [2, 6]$. Kres górny to $[1, 6] \times [1, 6]$, a zbiór majorant to wszystkie kwadraty, w których się on zawiera. Element najmniejszy nie istnieje.

Elementy minimalne to $[1, 4] \times [1, 4]$, $[2, 5] \times [2, 5]$ i $[2, 5] \times [3, 6]$. Zbiór minorant to wszystkie kwadraty, które zawierają się w $[2, 4] \times [3, 4]$. Element najmniejszy i kres dolny nie istnieją.