Zadanie 1

Niech $A = \{0, 1\}$.
W zbiorze A określamy działanie $\oplus$ przyjmując: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$, oraz działanie $\odot$ przyjmując: $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$, $1 \odot 1 = 1$.

1.a)

Sprawdź, że $(A, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

To samo co $(\mathbb{Z}/2, +, \cdot)$, które jest ciałem.

1.b)

W zbiorze A^2 określamy działanie dodawania jako: $(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$, oraz mnożenie przez elementy z ciała A następująco: $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b)$.
Sprawdź, czy $(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem A.

1. $A^2 \neq \emptyset$
2. $(A, \oplus, \odot)$ to ciało przemienne, bo $\odot$ jest przemienne
3. $+$ i $\cdot$ prowadzą do A^2, bo $(a \oplus c), (b \oplus d), (\alpha \odot a), (a \odot b) \in A$
4. $(A^2, +)$ jest grupą abelową, bo
   - $+$ jest wewnętrzne
   - $+$ jest łączne i przemienne co wynika z łączności i przemienności $\oplus$
   - istnieje element neutralny $(0, 0) : (a, b) + (0, 0) = (a \oplus 0, b \oplus 0) = (a, b)$
   - każdy element ma element symetryczny: $(a, b) + (a, b) = (a \oplus a, b \oplus b) = (0, 0)$
5. $\alpha \cdot ((a, b) + (c, d)) = \alpha \cdot (a \oplus c, b \oplus d) = (\alpha \odot (a \oplus c), \alpha \odot (b \oplus c)) =$
   $(\alpha \odot a \oplus \alpha \odot c, \alpha \odot b \oplus \alpha \odot d) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\alpha \odot c, \alpha \odot d) = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$
6. $(\alpha \odot \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \odot \beta) \odot a, (\alpha \odot \beta) \odot b) = (\alpha \odot (\beta \odot a), \alpha \odot (\beta \odot b)) =$
   $\alpha \cdot (\beta \cdot a, \beta \cdot b) = \alpha \cdot (\beta \cdot (a, b))$
7. $(\alpha \oplus \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \oplus \beta) \odot a, (\alpha \oplus \beta) \odot b) = ((\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a), (\alpha \odot b) \oplus (\beta \odot b)) =$
   $(\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\beta \odot a, \beta \odot b) = (\alpha \cdot (a, b)) + (\beta \cdot (a, b))$
8. $(a, b) \cdot \mathbf{1} = (a \odot 1, b \odot 1) = (a, b)$

$(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

1.c)

Wykaż, że przestrzeń A^2 posiada dokładnie pięć podprzestrzeni.

$A^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, wektor $(0, 0)$ należy do każdej podprzestrzeni.
$\{(0, 0)\}$✓
$\{(0, 0), (0, 1)\}$✓
$\{(0, 0), (1, 0)\}$✓

$\{(0,0),(1,1)\}$✓
$\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$✗, bo $(0,1)+(1,0)=(1,1)$
$\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$✗, bo $(0,1)+(1,1)=(1,0)$
$\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$✗, bo $(1,0)+(1,1)=(0,1)$
$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$✓

Zadanie 2

Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

2.a)

$A = \{(x,y,z) : x+y+z = a, a \in \mathbb{R}\}$

Kontrprzykład: $a = 1, (1,0,0) + (0,0,1) = (1,0,1) \notin A$

2.b)

$B = \{(x,y,z) : x \geq 0\}$

Kontrprzykład: $(-1) \cdot (1,0,0) = (-1,0,0) \notin B$

2.c)

$C = \{(x,y,1) : x,y \in \mathbb{R}\}$

Kontrprzykład: $(0,0,1) + (0,0,1) = (0,0,2) \notin C$

2.d)

$D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Kontrprzykład: $2 \cdot (1,0,0) = (2,0,0) \notin D$

2.e)

$E = \{(x,y,z) : x = 2y \wedge z = 0\}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1,y_1,z_1) + \beta \cdot (x_2,y_2,z_2) =$
$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$
$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \cdot 2y_1 + \beta \cdot 2y_2 = 2(\alpha y_1 + \beta y_2)$
$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

2.f)

$F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) + \beta \cdot (x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$
$3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) - 8(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha(3x_1 + 2y_1 - 8z_1) + \beta(3x_2 + 2y_2 - 8z_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

Zadanie 3

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami:

3.a)

$A = \{f : f(2) = f(7)\}$✓

$f, g \in A, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \overset{?}{\in} A, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} A$
$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = f(7) + g(7) = (f + g)(7)$
$(\alpha \cdot f)(2) = \alpha f(2) = \alpha f(7) = (\alpha \cdot f)(7)$

3.b)

$B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\}$✗

$f, g \in B, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \overset{?}{\in} B, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} B$
$(f + g)(7) = f(7) + g(7) = 2 + f(1) + 2 + g(1) = 4 + (f + g)(1)$ sprzeczność

3.c)

$C = \{f : f(x_0) = 3\}$✗

$f, g \in C, \alpha \in \mathbb{R}, (f + g) \overset{?}{\in} C, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} C$
$(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 3 + 3 = 6$ sprzeczność

Zadanie 4

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}[x]$ (przestrzeń wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$) są jej podprzestrzeniami:

4.a)

$A = \{w : w(0)w(1) = 0\}$✗

Kontrprzykład: $p(x) = x \in A, q(x) = x - 1 \in A$
$(p+q)(x) = x + x - 1 = 2x - 1$
$(p+q)(0)(p+q)(1) = -1 \cdot 1 = -1$

4.b)

$B = \{w : \text{stopień } w \leq 6\}$✓

$q(x), p(x) \in B, \alpha \in \mathbb{R}$
$\deg(q+p) \leq 6 \wedge \deg(\alpha q) \leq 6$

4.c)

$C = \{w : \text{stopień } w = 6\}$✗

Kontrprzykład: $x^6 + (-x^6) = 0 \notin C$

4.d)

$D = \{w : w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 + 1\}$✓

$D = \{w : w(x) = (x^2+1)q(x)\}$
$(x^2+1)q(x), (x^2+1)p(x) \in D, \alpha \in \mathbb{R}$
$(x^2+1)q(x) + (x^2+1)p(x) = (x^2+1)(q(x)+p(x)) \in A$
$\alpha \cdot (x^2+1)q(x) = (x^2+1)(\alpha q(x)) \in A$

Zadanie 5

Zbadaj, które z układów wektorów należących do $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:

5.a)

$B_1 : (1,4,3), (-1,2,1), (0,6,4)$✗

$1 \cdot (1,4,3) + 1 \cdot (-1,2,1) + (-1) \cdot (0,6,4) = (1-1-0, 4+2-6, 3+1-4) = (0,0,0)$

5.b)

$B_2 : (2,3,-1), (2,0,0), (0,3,1)$✓

$x(2,3,-1) + y(2,0,0) + z(0,3,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.c)

$B_3 : (2,-7,2),(0,2,4),(2,-1,5)\checkmark$

$x(2,-7,2)+y(0,2,4)+z(2,-1,5)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} 2x+2z=0 \\ -7x+2y-z=0 \\ 2x+4y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-3z \\ -9z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

5.d)

Znajdź współrzędne wektora $(1,1,1)$ względem tych B_i, które stanowią bazę w $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} 2x+2y=1 \\ 3x+3z=1 \\ -x+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{5}{6} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x&=z-1 \\ 3z-3+3z&=1 \\ 6z&=4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x+2z=1 \\ -7x+2y-z=1 \\ 2x+4y+5z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{4} \\ z=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}-z \\ -\frac{7}{2}+7z+2y-z&=1 \\ y&=\frac{9}{4}-3z \\ 1-2z+9-12z+5z&=1 \\ -9z&=-9 \end{aligned}$$

Zadanie 6

Sprawdź liniową zależność wektorów $\sqrt{2}$ i 2 w przestrzeni $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ oraz w przestrzeni $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

$$p\sqrt{2}+2q=0, p,q\in\mathbb{Q}$$

$$\underbrace{p}_{\in\mathbb{Q}}\underbrace{\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}}=\underbrace{-2q}_{\in\mathbb{Q}}\Rightarrow p=q=0$$

liniowo niezależne

$$x\sqrt{2}+2y=0, x,y\in\mathbb{R}$$

$$x=\frac{-2y}{\sqrt{2}}$$

liniowo zależne

Zadanie 7

Dla jakiej wartości parametru k wektor $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów $u_1 = (1, 1, 1)$ i $u_2 = (1, 2, 3)$?

$x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) = (1, -2, k)$

$$
\begin{aligned}
x + y &= 1 \\
x + 2y &= -2 \\
x + 3y &= k \\
y &= -3 \\
x &= 4 \\
k &= -5
\end{aligned}
$$

Zadanie 8

Sprawdź, czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

8.a)

$f = \mathrm{Id}, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$

$$
\begin{aligned}
ax + b \sin x + c \cos x = 0 \\
x = 0 \Rightarrow c \cos x = 0 \Rightarrow c = 0 \\
x = \pi \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow a = 0 \\
x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 0
\end{aligned}
$$

liniowo niezależne

8.b)

$f(x) = 1, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x, p(x) = \sin^2 x, q(x) = \cos^2 x$

$-1 \cdot 1 + 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$

liniowo zależne

Zadanie 9

W $\mathbb{R}^3$ dane są trzy wektory: $u = (0, 1, -1), v = (-1, 0, 1), w = (1, -1, 0)$.

9.a)

Wykaż, że wektory te są parami niezależne.

$x(0,1,-1)+y(-1,0,1)=0$ $\quad$ $x(0,1,-1)+y(1,-1,0)=0$ $\quad$ $x(-1,0,1)+y(1,-1,0)=0$

$$\begin{cases} -y &= 0 \\ x &= 0 \\ -x+y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y &= 0 \\ x-y &= 0 \\ -x &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+y &= 0 \\ -y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

$$x=y=0 \qquad x=y=0 \qquad x=y=0$$

9.b)

Czy układ wektorów u, v, w jest liniowo niezależny?

$(0,1,-1)+(-1,0,1)+(1,-1,0)=(0,0,0) \Rightarrow u, v, w$ są liniowo zależne

9.c)

Podaj wymiar oraz bazę podprzestrzeni generowanej przez te wektory.

Wymiar 2, baza to dowolne dwa z u, v, w.

Zadanie 10

Udowodnij, że zbiór: $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2-3x_3-3x_4=0, x_1-x_2+3x_3+x_4=0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz bazy podprzestrzeni z zadania 2.

$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3-3x_4 &= 0 \\ x_1-x_2+3x_3+x_4 &= 0 \\ 2x_1-2x_4 &= 0 \\ x_1 &= x_4 \\ x_4+x_2-3x_3-3x_4 &= 0 \\ x_2 &= 3x_3+2x_4 \end{aligned}$$

Niech $x_3=a, x_4=b$. Wtedy $A=\{(b,2a+2b,a,b) : a,b\in\mathbb{R}\}$
$(b,2a+2b,a,b)=a(0,2,1,0)+b(1,2,0,1) \Rightarrow \{(0,2,1,0),(1,2,0,1)\}$ to baza A.

Podprzestrzenie z zadania **2**:
$E=\{(x,y,z) : x=2y \wedge z=0\}, F=\{(x,y,z) : 3x+2y-8z=0\}$

$E=\{(2y,y,0) : y\in\mathbb{R}\}=\{y(2,1,0) : y\in\mathbb{R}\} \Rightarrow \{(2,1,0)\}$ to baza E

$F=\left\{\left(x,y,\frac{3x+2y}{8}\right), x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\left(1,0,\frac{3}{8}\right)+y\left(0,1,\frac{1}{4}\right), x,y\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow$
$\left\{\left(1,0,\frac{3}{8}\right),\left(0,1,\frac{1}{4}\right)\right\}$ to baza F

Zadanie 11

Dane są dwa układy wektorów: $B_1 : (1, i, 1+i), (i, -1, 2-i), (0, 0, 3)$ i $B_2 : (2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1+i, 1-i)$.

11.a)

Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.

Niech $a + bi, c + di, e + fi \in \mathbb{C}$.

$$(a+bi)(1, i, 1+i) + (c+di)(i, -1, 2-i) + (e+fi)(0, 0, 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + bi + ci - d = 0 \Leftrightarrow a - d = b + c = 0 \\ ai - b - c - di = 0 \Leftrightarrow a - d = b + c = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_1 \text{ nie jest bazą}$$

$$(a+bi)(2i, 1, 0) + (c+di)(2, -i, 1) + (e+fi)(0, 1+i, 1-i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ai - 2b + 2c + 2di = 0 \\ a + bi - ci + d + e + fi + ei - f = 0 \\ c + di + e + fi - ei + f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b - c = 0 \\ a + d + e - f = 0 \\ b - c + e + f = 0 \\ c + e + f = 0 \\ d + f - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{wektory w } B_2 \text{ są liniowo niezależne}$$

$\dim \mathbb{C}^3(\mathbb{C}) = 3, \dim \mathbb{C}^3(\mathbb{R}) = 6$, co pokażemy w **11.b**. Z tego wynika, że B_2 jest bazą w $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$, ale nie w $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.

11.b)

Jaki wymiar mają przestrzenie $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ i $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$?

Przykładowa baza w $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ to $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1))$, więc $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{C}) = n$.

Przykładowa baza w $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ to
$((1, 0, \dots, 0), (i, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (0, i, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1), (0, 0, \dots, i))$,
więc $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$.

11.c)

Znajdź współrzędne wektora $(1, 0, 1)$ w bazie z podpunktu a).

$$(a+bi)(2i,1,0)+(c+di)(2,-i,1)+(e+fi)(0,1+i,1-i)=(1,0,1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ai-2b+2c+2di=1 \\ a+bi-ci+d+e+fi+ei-f=0 \\ c+di+e+fi-ei+f=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ -b+c=\frac{1}{2} \\ a+d+e-f=0 \\ b-c+e+f=0 \\ c+e+f=1 \\ d+f-e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=\frac{1}{2} \\ d=0 \\ e=\frac{1}{4} \\ f=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(1,0,1)=\left[0,\tfrac{1}{2}i,\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i\right]_{B_2}$$

Zadanie 12

Niech będzie dana następująca podprzestrzeń U przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ (tj. przestrzeni $\mathbb{C}^2$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$), gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą:

$$U := \operatorname{Lin}\{(pi,(p-1)i),(p-2-pi,p),(-1-pi,2p)\}.$$

Zbadaj dla jakich wartości parametru rzeczywistego p, zachodzi:

$$(3-2p,p-1+(1-p)i) \in U.$$

Dla wszystkich takich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, wyznacz $\dim U$.

Niech $a,b,c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} api+bp-2b-bpi-c-cpi=3-2p \\ api-ai+bp+2cp=p-1+i-pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ap-bp-cp=0 \Leftrightarrow p(a-b-c)=0 \\ bp-2b-c-3+2p=0 \\ ap-a-1+p=0 \Leftrightarrow (a+1)(p-1)=0 \\ bp+2cp-p+1=0 \end{cases}$$

$$p \neq 0 \wedge p \neq 1 \Rightarrow$$

$$a=-1$$

$$c=-1-b$$

$$bp-2b+1+b-3+2p=0 \Leftrightarrow -bp-3p+1=0$$

$$bp-2p-2bp-p+1=0 \Leftrightarrow bp+2p-b-2=0$$

$$-p-b-1=0$$

$$b=-p-1$$

$$c=-1+p+1=p$$

$$p(-1+p-1+p)=p\cdot 2p=0 \text{ sprzeczność}$$

$$p=0 \Rightarrow$$

$$1=0 \text{ sprzeczność}$$

$$
\begin{aligned}
p = 1 &\Rightarrow \\
a - b - c &= 0 \\
b - 2b - c - 3 + 2 &= 0 \\
-b - c - 1 &= 0 \\
b + 2c - 1 + 1 &= 0 \\
a &= -1 \\
c &= 1 \\
b &= -2
\end{aligned}
$$

Dla $p = 1$, $U = \operatorname{Lin}\{(i, 0), (-1 - i, 1), (-1 - i, 2)\}$. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a(i, 0) + b(-1 - i, 1) + c(-1 - i, 2) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ai - b - bi - c - ci = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
b &= -2c \\
ai + 2c + 2ci - c - ci &= 0 \\
ai + ci + c &= 0 \\
a = c &= 0 \\
b &= 0
\end{aligned}
$$

$\dim U = 3$

Zadanie 13

Wyznacz bazę przestrzeni $(P_{2n}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie $P_{2n} := \{w \in \mathbb{R}[x]_{2n} : w(x) = w(-x)\}$.

$P_{2n} = \{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_{2n}x^{2n}, a_0, \ldots a_{2n} \in \mathbb{R}\}$

$B = (1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n})$

Zadanie 14

W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$. Wykaż, że układ $B_2 = (1, x - 2, (x - 2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$. Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz. Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

$a \cdot 1 + b(x - 2) + c(x - 2)^2 = a + bx + b + cx^2 - 2cx + 4c =$

$cx^2 + (b - 2c)x + a + b + 4c$

Ta kombinacja liniowa musi wygenerowac każdy wielomian postaci $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
c &= \alpha \\
b - 2\alpha &= \beta \\
b &= \beta + 2\alpha \\
a + \beta + 2\alpha + \alpha &= \gamma \\
a &= -3\alpha - \beta + \gamma
\end{aligned}
$$

$2x^2 + 3 = [3, 0, 2]_{B_1} = [-9, 6, 2]_{B_2}$

$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p'(x) = 2ax + b$

$$
\begin{aligned}
p(1) &= p'(0) \\
a + b + c &= b \\
c &= -a
\end{aligned}
$$

$A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(x) = ax^2 + bx - a\}$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, p(x) = ax^2 + bx - a \in A, q(x) = cx^2 + dx - c \in A$
$\alpha p(x) + \beta q(x) = (\alpha a + \beta c)x^2 + (\alpha b + \beta d)x - (\alpha a + \beta c) \in A \Rightarrow$
A jest podprzestrzenią $\mathbb{R}[x]_2$
$ax^2 + bx - a = a(x^2 - 1) + b(x) \Rightarrow (x^2 - 1, x)$ to baza A

> **Zadanie 15**
>
> Wykaż, że zbiór liczb postaci $V = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} + e\sqrt{12} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\right\}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych. Znajdź bazę tej przestrzeni.

$V \subset \mathbb{R}$, a $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ jest przestrzenią wektorową, więc wystarczy pokazać, że $V(\mathbb{Q})$ jest podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}$.

$\forall v, w \in V : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \alpha v + \beta w \overset{?}{\in} V$

Niech $v = a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3} + d_1\sqrt{6} + e_1\sqrt{12}, w = a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + d_2\sqrt{6} + e_2\sqrt{12}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

$$
\begin{gathered}
\alpha v + \beta w = (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)\sqrt{2} + (\alpha c_1 + \beta c_2)\sqrt{3} \\
+(\alpha d_1 + \beta d_2)\sqrt{6} + (\alpha e_1 + \beta e_2)\sqrt{12} \in V
\end{gathered}
$$

$\operatorname{Lin}\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{12}\right\} = V$, co wynika wprost z definicji V. Wystarczy sprawdzić, czy elementy zbioru są liniowo niezależne. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, więc $\sqrt{12}$ możemy wyrzucić ze zbioru. Pozostaje $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right\}$. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} &= 0 \Leftrightarrow \\
a + b\sqrt{2} + \sqrt{3}\left(c + d\sqrt{2}\right) &= 0 \\
a + b\sqrt{2} &= -\sqrt{3}\left(c + d\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

Rozważmy dwa przypadki. Pierwszy przypadek, gdy $c + d\sqrt{2} \neq 0$:

$$-\sqrt{3} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}$$
$$-\sqrt{3} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)}{c^2 - 2d}$$
$$-\sqrt{3} = \frac{ac - 2bd + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d} \text{ sprzeczność}$$

Drugi przypadek, gdy $c + d\sqrt{2} = 0$:

$$a + b\sqrt{2} = -\sqrt{3}\left(c + d\sqrt{2}\right) = 0$$
$$a = b = c = d = 0$$

Wektory są liniowo niezależne, więc $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right\}$ jest bazą V.

Zadanie 16

Wiedząc, że wektory u, v, w stanowią bazę przestrzeni liniowej V (nad ciałem $\mathbb{R}$), zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:

16.a)

$B_1 = (u - 2v + w, 3u + w, u + 4v - w)$

$$au - 2av + aw + 3bu + bw + cu + 4cv - cw = 0$$
$$u(a + 3b + c) + v(-2a + 4c) + w(a + b - c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ -2a + 4c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$$

$$a = -3b - c$$
$$6b + 2c + 4c = 0$$
$$b = -c$$
$$3c - c - c - c = 0$$
$$c \in \mathbb{R}$$

Wektory są liniowo zależne, czyli nie stanowią bazy.

16.b)

$B_2 = (u, 2u + v, 3u - v + 4w)$

$$au + 2bu + bv + 3cu - cv + 4cw = 0$$
$$u(a + 2b + 3c) + v(b - c) + w(4c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ b-c=0 \\ 4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Wektory w B_2 są liniowo niezależne i $\dim B_2 = 3$ więc B_2 jest bazą V.

16.c)

Wyznacz współrzędne wektora $a = 2u - 3v + 8w$ względem tej bazy.

$$\begin{cases} a+2b+3c=2 \\ b-c=-3 \\ 4c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

$a = [-2, -1, 2]_{B_2}$

Zadanie 17

Wykaż, że dla dowolnych $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ takich, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, wielomiany $w_0, w_1, ..., w_n$, zdefiniowane jako:

$$w_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{dla } i = 0, 1, ..., n,$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

Wektorów w_i jest tyle samo co $\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$, więc wystarczy pokazać, że wektory te są liniowo niezależne.

Niech $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

$$a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + ... + a_n w_n(x) \stackrel{?}{=} 0$$

Zauważmy, że dla $x = x_i$

$$w_i(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1,$$

a dla $x = x_k$, gdzie $k \in \{0, 1, ..., n\}, k \neq i, w_i(x_k) = 0$, bo występuje takie j, że $j = k$ czyli występuje czynnik $(x_k - x_j) = 0$.

Niech $x := x_0$. Wtedy:

$$a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + ... + a_n w_n(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Analogicznie pokazujemy, podstawiając za x kolejne x_i, że $a_i = 0$ dla każdego $i = 0, 1, ..., n$.

Zadanie 18

Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a V_1, V_2 będą podzbiorami V składającymi się, odp., z odwzorowań nieparzystych oraz parzystych. Wykaż, że V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V oraz, że $V = V_1 \oplus V_2$.

$V_1 = \{f : f(x) = -f(-x)\}$, $V_2 = \{f : f(x) = f(-x)\}$

$$\forall f, g \in V_1 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \overset{?}{\in} V_1$$
$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha(-f(-x)) + \beta(-g(-x)) = -(\alpha f + \beta g)(-x)$$
$$\forall f, g \in V_2 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \overset{?}{\in} V_2$$
$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = (\alpha f + \beta g)(-x)$$

$V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\} = \{f(x) = 0\}$

$$f \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) = f(-x) \Rightarrow f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Zadanie 19

Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Oznaczmy przez F_a zbiór odwzorowań zerujących się w punkcie a.

$F_a := \{f : f(a) = 0\}$

19.a)

Wykaż, że F_a jest podprzestrzenią przestrzeni V

$$\forall f, g \in F_a : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \overset{?}{\in} F_a$$
$$(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha f(a) + \beta g(a) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g \in F_a$$

19.b)

Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, to $V = F_a + F_b$, ale suma ta nie jest prosta.

$\forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists f_a \in F_a : \exists f_b \in F_b : f = f_a + f_b$ (?)

Niech $f_a(x) := \begin{cases} f(x), \text{ gdy } x \neq a \\ 0 \quad\ , \text{ gdy } x = a \end{cases}$, $f_b(x) = \begin{cases} 0 \quad\ , \text{ gdy } x \neq a \\ f(x), \text{ gdy } x = a \end{cases}$.

Wtedy $f_a(x) + f_b(x) = f(x)$.

$F_a \cap F_b = \{f : f(a) = f(b) = 0\} \neq \{f(x) = 0\}$, ponieważ np.
$f(x) = 2(x-a)(x-b), g(x) = 3(x-a)(x-b) \in F_a \cap F_b$, więc $F_a + F_b$ nie jest sumą prostą.

Zadanie 20

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz U i V jej podprzestrzeniami.

20.a)

Wykaż, że $U \cup V$ jest podprzestrzenią X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$.

($\Leftarrow$)

$U \subset V \Rightarrow U \cup V = V$, a V jest podprzestrzenią X
$V \subset U \Rightarrow U \cup V = U$, a U jest podprzestrzenią X

($\Rightarrow$)

Hp: $\exists u \in U \setminus V, v \in V \setminus U : u + v \in U \cup V$

$u + v \in U \cup V \Rightarrow u + v \in U \vee u + v \in V$

Pierwszy przypadek: $u + v \in U$.
Ponieważ U jest podprzestrzenią a $u \in U$, to $u + v + (-1)u = v \in U$ sprzeczność.

Drugi przypadek: $u + v \in V$.
Ponieważ V jest podprzestrzenią a $v \in V$, to $u + v + (-1)v = u \in V$ sprzeczność.

20.b)

Sprawdź, czy $\mathrm{Lin}(U \cup V) = U + V$.

$\mathrm{Lin}\{U \cup V\} = \{\alpha w + \beta q : \alpha, \beta \in K, w, q \in U \cup V\}$

$u \in U, \alpha \in K \Rightarrow \alpha u \in U, v \in V, \alpha \in K \Rightarrow \alpha v \in V$

$\mathrm{Lin}\{U \cup V\} = \{w + q : w, q \in U \cup V\} = \{u + v : u \in U, v \in V\}$, bo w szczególności $u = \overline{0}$.