

1. Metryki

Metryka w zbiorze X ($X \neq \emptyset$) to dowolna funkcja $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symetria)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (warunek trójkąta)
4. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Przestrzeń metryczna to para (X, d)

Przykłady metryk:

- **euklidesowa:** $d_e((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$
- **taksówkarska/miejska:** $d_t((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$
- **maksimum:** $d_m((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{|y_i - x_i| : i = 1, \dots, n\}$
- **dyskretna:** $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

Kula (otwarta) o środku x_0 i promieniu r to $K(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$

Zbiór ograniczony $A \subset X$: istnieje kula o środku $x_0 \in X$ w której zawiera się A

Zbiór otwarty (nie ma brzegu) $A \subset X$: dla każdego $x_0 \in A$ istnieje kula o środku x_0 która zawiera się w A

Zbiór domknięty (ma brzeg) $A \subset X$: $X \setminus A$ jest otwarty

Własności zbiorów otwartych i domkniętych

1. \emptyset, X są i otwarte i domknięte
2. Złączenie i część wspólna zbiorów otwartych jest otwarta
3. Złączenie i część wspólna zbiorów domkniętych jest domknięta

Topologia τ w zbiorze X to zbiór podzbiorów X , które są otwarte.

Topologia indukowana metryką d to $\tau_d = \{U \in X : U - \text{otwarty w } (X, d)\}$

Wnętrze zbioru $\text{int } A$ - największy zbiór otwarty zawarty w A

Otoczenie punktu x_0 - dowolny zbiór otwarty zawierający x_0