

Zadanie 1

Sprawdź, czy:

1.a)

wektory $u = [-1, 3, -5]$, $v = [1, -1, 1]$, $w = [4, 2, 0]$ są współpłaszczyznowe;

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 10 - 20 - 2 - 0 = 0$$

Wektory są współpłaszczyznowe.

1.b)

punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

Sprawdźmy współpłaszczyznowość wektorów \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} , \overrightarrow{PS} .

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 16 - 6 - 18 + 4 - 20 = -71 \neq 0$$

Punkty nie są współpłaszczyznowe.

Zadanie 2

Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = [1, 5, -3]$, $\overrightarrow{AC} = [-1, 0, 4]$. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C .

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|AB\| h_C \Rightarrow h_C = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|AB\|}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [20, -1, 5]$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{20^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{426}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

$$h_C = \sqrt{\frac{426}{35}}$$

Zadanie 3

Proste l_1 i l_2 dane są równaniami parametrycznymi:

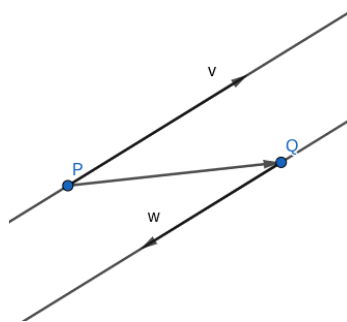
$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \quad l_2 : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R});$$

Wykaż, że l_1 i l_2 są równoległe. Oblicz odległość między nimi. Znajdź równanie ogólne ich wspólnej płaszczyzny

$$P = (1, 0, 2), Q = (6, 4, 0)$$

$$\vec{v} = [-4, -2, 4], \vec{w} = [6, 3, -6]$$

$$\overrightarrow{PQ} = [6 - 1, 4 - 0, 0 - 2] = [5, 4, -2]$$



Wektory kierunkowe \vec{v} i \vec{w} są proporcjonalne:

$$\frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$$

więc proste są równoległe.

$$d(l_1, l_2) = d(P, l_2) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}||}{||\vec{w}||}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = [-18, 18, -9] = 9 \cdot [-2, 2, -1]$$

$$d = \frac{9\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{9 \cdot 3}{\sqrt{81}} = 3$$

Płaszczyzna wspólna obu prostych to płaszczyzna rozpięta np. przez wektory \vec{w} i \overrightarrow{PQ} . Znajdźmy wektor normalny tej płaszczyzny.

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = 9 \cdot [-2, 2, -1]$$

Skalar można pominąć, więc przyjmijmy $\vec{n} = [-2, 2, -1]$.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt Q i prostopadłej do wektora \vec{n} ma postać:

$$\begin{aligned} \pi : -2(x - 6) + 2(y - 4) - z &= 0 \\ -2x + 2y - z + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Zadanie 4

Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = 1 + 2s \\ z = -3 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Znajdź równanie normalne ich wspólnej płaszczyzny (jeżeli istnieje).

Spróbujmy znaleźć punkt wspólny prostych.

$$\begin{cases} 2 - t = -3 + 2s \\ 3 + 2t = 1 + 2s \\ -3t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s = 5 - t \\ 2s = 2 + 2t \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 2 \end{cases}$$

Proste przecinają się w jednym punkcie $A = (1, 5, -3)$, więc są współpłaszczyznowe.

Wektory kierunkowe to $\vec{v} = [-1, 2, -3]$ i $\vec{w} = [2, 2, 0]$.

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [6, -6, -6] = 6 \cdot [1, -1, -1]$$

$$\pi : (x - 1) - (y - 5) - (z + 3) = 0$$

Zadanie 5

Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = s \\ z = -s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Jeżeli leżą one na jednej płaszczyźnie, to napisz jej równanie ogólne. Jeżeli nie, to oblicz odległość między tymi prostymi.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 \\ t = s \\ 2 = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = s \\ s = -2 \end{cases}$$

Dochodzimy do sprzeczności, czyli proste nie mają punktów wspólnych. Wektory kierunkowe $\vec{v} = [2, 1, 0]$ i $\vec{w} = [0, 1, -1]$ nie są proporcjonalne, czyli proste nie są równoległe i nie leżą na jednej płaszczyźnie.

$$P = (1, 0, 2), Q = (3, 0, 0), \overrightarrow{PQ} = [2, 0, -2]$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [2, 2, 2]$$

$$d(l_1, l_2) = d(P, l_2) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}\|}{\|\vec{w}\|} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

Zadanie 6

Napisz równanie ogólne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2, 4)$, $B = (2, 1, 3)$ i $C = (3, -1, 5)$. Wyznacz odległość punktu $Q = (5, 0, 8)$ od płaszczyzny π oraz znajdź punkt symetryczny do punktu Q względem tej płaszczyzny.

Płaszczyzna π przechodzi przez punkt A i jest rozpięta na wektorach \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} = [3, -1, -1], \overrightarrow{AC} = [4, -3, 1]$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = [-4, -7, -5] = -[4, 7, 5]$$

$$\pi : 4(x + 1) + 7(y - 2) + 5(z - 4) = 0$$

$$4x + 7y + 5z - 30 = 0$$

Odległość punktu od płaszczyzny można wyliczyć z wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 8 - 30|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 5^2}} = \frac{30}{\sqrt{90}} = \frac{30}{3\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Żeby wyznaczyć odbicie punktu Q znajdziemy prostą l przechodzącą przez Q prostopadłą do płaszczyzny π . Będzie mieć ona postać $Q + t\vec{n}$, czyli:

$$l : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 7t \\ z = 8 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Wyznamy \overrightarrow{QP} , gdzie P to rzut punktu Q na płaszczyznę π , czyli przecięcie tej płaszczyzny z prostą l .

$$4(5 + 4t) + 7(7t) + 5(8 + 5t) - 30 = 0$$

$$90t + 30 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{QP} = -\frac{1}{3}\vec{n}$$

Niech Q' to będzie odbicie symetryczne punktu Q względem płaszczyzny π . Wtedy

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ'} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = 2\overrightarrow{QP} = -\frac{2}{3}\vec{n} = \left[-\frac{8}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{10}{3}\right]$$

$$Q' = Q + \overrightarrow{QQ'} = \left(5 - \frac{8}{3}, -\frac{14}{3}, 8 - \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

Zadanie 7

Znajdź rzut prostokątny punktu $P = (6, 4, 0)$ na prostą

$$l : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

oraz punkt symetryczny do P względem tej prostej.

Zauważmy, że dla $t = 0$ dostajemy $x = 6, y = 4, z = 0$ czyli punkt P . Oznacza to, że punkt P leży na tej prostej, więc jest swoim rzutem prostokątnym na tę prostą oraz odbiciem symetrycznym względem niej.

Zadanie 8

Znajdź rzut prostokątny prostej $k : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{1}$ na płaszczyznę $\pi : x + y - 2z + 4 = 0$.

Prosta k przechodzi przez punkt $P = (2, 2, 5)$ i ma wektor kierunku $\vec{v} = [1, 1, 1]$.

Wektor normalny płaszczyzny π to $\vec{n} = [1, 1, -2]$.

$$\vec{v} \circ \vec{n} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Rightarrow k \parallel \pi$$

Prosta jest równoległa do płaszczyzny więc wystarczy znaleźć rzut prostokątny tylko jednego punktu, np. P . Wyznamy prostą l przechodzącą przez P i prostopadłą do π .

$$l : \begin{cases} 2 + t \\ 2 + t \\ 5 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Punkt przecięcia l i π to rzut prostokątny P_0 punktu P na π .

$$(2 + t) + (2 + t) - 2(5 - 2t) + 4 = 0$$

$$6t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$P_0 = \left(2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, 5 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

Rzut prostej k na płaszczyznę π musi mieć ten sam wektor kierunku, ponieważ $k \parallel \pi \Rightarrow k$.

$$k : \frac{x - \frac{7}{3}}{1} = \frac{y - \frac{7}{3}}{1} = \frac{z - \frac{13}{3}}{1}$$

$$x = y = z + 2$$

Zadanie 9

Znajdź odległość prostej $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ od płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s + 3t \\ y = 2 - 2s - 2t \\ z = -1 + s - t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Płaszczyzna π zawiera punkt $P = (1, 2, -1)$ i jest rozpięta na wektorach $\vec{v} = [-1, -2, 1]$ i $\vec{w} = [3, -2, -1]$.

Prosta l zawiera punkt $Q = (2, -3, 2)$ i ma wektor kierunku $\vec{u} = [1, 2, -1] = -\vec{v} \Rightarrow l \parallel \pi$, więc wystarczy znaleźć odległość Q od π .

Wektor normalny płaszczyzny π :

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [4, 2, 8] = 2 \cdot [2, 1, 4]$$

$$\pi : 2(x - 1) + (y - 2) + 4(z + 1) = 0$$

$$2x + y + 4z = 0$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

Zadanie 10

Dana jest prosta

$$l : \begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

oraz płaszczyzna $\pi_1 : x + y + z + 8 = 0$. Znajdź równanie ogólne płaszczyzny π zawierającej prostą l i prostopadłej do płaszczyzny π_1 . Zbadaj wzajemne położenie prostej l i krawędzi k przecięcia się płaszczyzn π i π_1 .

Z równania prostej l :

$$\left. \begin{matrix} x = 2z \\ 7z - 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{7}{2}z - \frac{3}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -\frac{3}{2} + 7t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Wynika z tego, że prosta l zawiera punkt $(0, -\frac{3}{2}, 0)$, więc płaszczyzna π też musi go zawierać.

Oprócz tego, wektor normalny płaszczyzny π musi być prostopadły do prostej l oraz do wektora normalnego płaszczyzny π_1 .

Wektor kierunkowy prostej l to $\vec{v} = [4, 7, 2]$, a wektor normalny płaszczyzny π_1 to $\vec{n}_1 = [1, 1, 1]$. Niech $\vec{n} = [a, b, c]$ będzie wektorem normalnym płaszczyzny π . Wtedy:

$$\begin{aligned}\vec{n} \circ \vec{v} &= 0 \wedge \vec{n} \circ \vec{n}_1 = 0 \\ 4a + 7b + 2c &= 0 \wedge a + b + c = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a + 5b &= 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}a \\ -3a - 5c &= 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{5}a\end{aligned}$$

Wektor zerowy nie może być wektorem normalnym, więc możemy bez straty ogólności przyjąć $a = 5$. Wtedy $\vec{n} = [5, -2, -3]$.

$$\begin{aligned}\pi : 5x - 2\left(y + \frac{3}{2}\right) - 3z &= 0 \\ 5x - 2y - 3z - 3 &= 0\end{aligned}$$

Proste l i k obie należą do płaszczyzny π , więc albo są równoległe i wtedy l nie przecina nigdy płaszczyzny π_1 , albo przecinają się w punkcie przecięcia π_1 przez prostą l .

$$\begin{aligned}4t - \frac{3}{2} + 7t + 2t + 8 &= 0 \\ 13t + \frac{13}{2} &= 0 \\ t &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Czyli proste k i l przecinają się w punkcie $\left(-\frac{4}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (-2, -5, -1)$.

Zadanie 11

Znajdź punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem prostej

$$l : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

oraz płaszczyznę π zawierającą prostą l i punkt P .

Z równania prostej l :

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow l : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Wyznaczmy płaszczyznę π_0 która przechodzi przez punkt P oraz jest prostopadła do prostej l . Wektorem normalnym tej płaszczyzny będzie wektor kierunku prostej l , czyli $[1, -1, 1]$.

$$\pi_0 : (x - 2) - (y - 3) + (z + 1) = 0$$

Punkt P_0 przebicia tej płaszczyzny przez prostą l to będzie rzut prostokątny punktu P na tę prostą.

$$(t - 2) - (-t - 3) + (t + 1) = 0$$

$$3t + 2 = 0$$

$$t = -\frac{2}{3}$$

$$P_0 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Odbicie P' punktu P leży po drugiej stronie P_0 .

$$\overrightarrow{PP_0} = \left[-\frac{2}{3} - 2, \frac{2}{3} - 3, -\frac{2}{3} + 1\right] = \left[-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\overrightarrow{P_0P'} = \overrightarrow{PP_0} \Rightarrow$$

$$P' = \left(-\frac{2}{3} - \frac{8}{3}, \frac{2}{3} - \frac{7}{3}, -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Płaszczyzna zawierająca punkt P ma równanie postaci $a(x - 2) + b(y - 3) + c(z + 1) = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Równanie musi zachodzić dla współrzędnych z prostej l , dlatego:

$$a(t - 2) + b(-t - 3) + c(t + 1) = 0 \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}$$

$$t(a - b + c) - 2a - 3b + c = 0$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -2a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$3a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}a$$

$$-5a - 2c = 0 \Rightarrow c = -\frac{5}{2}a$$

$a \neq 0$ więc możemy bez straty ogólności przyjąć $a = 2$. Wtedy płaszczyzna π ma postać:

$$\pi : 2(x - 2) - 3(y - 3) - 5(z + 1) = 0$$

$$2x - 3y - 5z = 0$$

Zadanie 12

Zbadaj wzajemne położenie prostej l prostopadłej do płaszczyzny $\pi : y = 2 + z$ i przechodzącej przez punkt $A = (1, 2, 0)$ oraz prostej k przechodzącej przez punkt $B = (0, 3, -1)$ i równoległej do prostej

$$k' : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

Wyznacz odległość prostych l i k . Wyznacz objętość równoległościanu rozpinanego przez wektory prostych l i k oraz wektor \overrightarrow{AB} .

Prosta l ma wektor kierunku równy wektorowi normalnemu płaszczyzny $\pi : y - z - 2 = 0$, czyli $\vec{v} = [0, 1, -1]$ więc jej równanie to:

$$l : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Wektor kierunkowy \vec{w} prostej k jest taki sam jak prostej k' . Musi być on prostopadły do wektorów normalnych dwóch płaszczyzn których prosta k' jest przecięciem.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [-3, 0, -3] = -3 \cdot [1, 0, 1]$$

Więc prosta k ma równanie

$$k : \begin{cases} x = s \\ y = 3 \\ z = -1 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Sprawdźmy, czy proste l i k mają punkty wspólne.

$$\begin{cases} 1 = s \\ 2 + t = 3 \\ -t = -1 + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Nie mają punktów wspólnych a ich wektory kierunkowe nie są proporcjonalne, dlatego nie są współpłaszczyznowe, czyli są skośne.

Odległość dwóch prostych skośnych możemy obliczyć ze wzoru:

$$d(l, k) = \frac{|(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{|(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

$$\overrightarrow{AB} = [-1, 1, -1]$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [1, -1, -1]$$

$$d = \frac{|1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Wersory to wektory jednostkowe, więc:

$$\vec{u}_l = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\vec{u}_k = \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Objętość równoległościanu to moduł z iloczynu mieszanego:

$$V = |(\vec{u}_l, \vec{u}_k, \overrightarrow{AB})| = |(\vec{u}_l \times \vec{u}_k) \circ \overrightarrow{AB}|$$

$$\vec{u}_l \times \vec{u}_k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$

$$V = \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$