1. Metryki

Metryka w zbiorze X ($X \neq \emptyset$) - dowolna funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ taka, że:
1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symetria)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (warunek trójkąta)
4. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Przestrzeń metryczna - para (X, d)

Przykłady metryk:
- **euklidesowa**: $d_e((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$
- **taksówkarska/miejska**: $d_t((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$
- **maksimum**: $d_m((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{|y_i - x_i| : i = 1, ..., n\}$
- **dyskretna**: $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

Kula (otwarta) o środku x_0 i promieniu r - $K(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$

Zbiór ograniczony $A \subset X$ - istnieje kula o środku $x_0 \in X$ w której zawiera się A

Zbiór otwarty (nie ma brzegu)$A \subset X$ - dla każdego $x_0 \in A$ istnieje kula o środku x_0 która zawiera się w A

Zbiór domknięty (ma brzeg) $A \subset X$ - $X \setminus A$ jest otwarty

Własności zbiorów otwartych i domkniętych
1. $\emptyset, X$ są i otwarte i domknięte
2. Złączenie i część wspólna zbiorów otwartych jest otwarta
3. Złączenie i część wspólna zbiorów domkniętych jest domknięta

Topologia τ w zbiorze X - zbiór podzbiorów X, które są otwarte. Każdy element τ musi spełniać powyższe warunki.
Topologia indukowana metryką d - $\tau_d = \{U \in X : U$ - otwarty w $(X, d)\}$

Wnętrze zbioru $\mathrm{int}A$ - największy zbiór otwarty zawarty w A

Domknięcie zbioru $\overline{A}$ - najmniejszy zbiór domknięty zawierający A.

Otoczenie punktu x_0 - dowolny zbiór otwarty zawierający x_0. $\mathrm{ot}(x_0)$ - zbiór wszystkich otoczeń.

Punkt brzegowy x_0 zbioru $A \subset X$ - każda kula $K(x_0, r)$ ma część wspólną i z A i z $X \setminus A$.

Brzeg ∂A zbioru A - zbiór wszystkich punktów brzegowych

Punkt skupienia $x_0 \in X$ zbioru $A \subset X$ - dowolnie blisko niego znajdują się inne punkty z A. Zbiór jest domknięty kiedy zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. (np. $(0, 1\rangle$ nie jest domknięty, bo 0 jest jego punktem skupienia.)
x_0 jest punktem skupienia A gdy istnieje ciąg $(x_n) \subset A \setminus \{x_0\}$ który zmierza do x_0.

Definicja granicy ciągu - $\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n, g) = 0$

Równoważność metryk d_1 i d_2 na X - dowolny ciąg $(x_n) \subset X$ jest zbieżny w (X, d_1) wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny w (X, d_2).

Jednostajna równoważność metryk - $\exists m, M > 0 : \frac{1}{m} d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq M d_2(x, y)$
Metryki euklidesowa, taksówkowa i maksimum są jednostajnie równoważne (i równoważne) na $\mathbb{R}^n$.

Ciąg Cauchy'ego - od pewnego momentu w ciągu elementy są dowolnie blisko siebie:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : d(a_n, a_m) < \varepsilon$
Każdy ciąg zbieżny w (X, d) jest ciągiem Cauchy'ego w (X, d).

Przestrzeń zupełna - każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do granicy należącej do tej przestrzeni. (np. $\mathbb{Q}$ nie jest zupełny, bo ciąg $3, 3.1, 3.14, \ldots$ zmierza do $\pi \notin \mathbb{Q}$)

Zbiór zwarty - z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny do granicy należącej do tego zbioru. Zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy kiedy jest zbiórem domkniętym i ograniczonym.