Zadanie 1

Rozwiąż układy równań:

1.a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & -1 & -9 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -w_1 \\ -2w_1 \\ -w_1 \\ +w_1 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ :3 \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +w_2 \\ +5w_2 \\ -2w_2 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -5w_3 \\ +2w_2 \end{array} \to$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ :(-2) \\ :2 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 2 \\ x_4 - 2 = -1 \Rightarrow x_4 &= 1 \\ x_3 - 1 = 1 \Rightarrow x_3 &= 2 \\ x_2 + 2 = 4 \Rightarrow x_2 &= 2 \\ x_1 + 2 + 2 + 1 + 2 = 8 \Rightarrow x_1 &= 1 \end{aligned}$$

1.b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & -1 & -9 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -w_1 \\ -2w_1 \\ -w_1 \\ +w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ :3 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +w_2 \\ +5w_2 \\ -2w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -5w_3 \\ +2w_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ :(-2) \\ \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_5 &= t \in \mathbb{R} \\ x_4 - t = -1 \Rightarrow x_4 &= t - 1 \\ x_3 - t + 1 = 1 \Rightarrow x_3 &= t \\ x_2 + t = 4 \Rightarrow x_2 &= 4 - t \\ x_1 + 4 - t + t + t - 1 + t = 8 \Rightarrow x_1 &= 5 - 2t \end{aligned}$$

1.c)

$$\begin{cases} -3x + 6y - 3z = 2 \\ x \quad - 2y + z \quad = -1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & +6 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} +3w_2 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow 0 = 1 \text{ sprzeczność}$$

Zadanie 2

Znajdź bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozwiązań następującego układu:

$$\begin{cases} x \quad + 2y - z \quad = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z \quad = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2w_1 \\ +w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :3 \\ -\frac{5}{3}w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 = t \in \mathbb{R}$$
$$x_2 = 0$$
$$x_1 + 2 \cdot 0 - t = 0 \Rightarrow x_1 = t$$

Rozwiązania są postaci $(t, 0, t) = t(1, 0, 1)$, więc podprzestrzeń to $V = \mathrm{Lin}\{(1, 0, 1)\}$. Wektor $(1, 0, 1)$ jest liniowo niezależny, więc baza to $B = \{(1, 0, 1)\}$.

Zadanie 3

Zbadaj w zależności od parametru k ilość rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

W przypadku, gdy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, znajdź je stosując:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$\det A = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2 = (k-1)(k^2 + 3k - 2) = (k-1)^2(k+2)$$

Z twierdzenia Cramera, gdy $k \notin \{1, -2\}$, $\det A \neq 0 \Rightarrow$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dla $k = 1$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$, co sprowadza się do równania $x + y + z = 1$, więc jest nieskończenie wiele rozwiązań.

Dla $k = -2$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$. Po dodaniu w_2 i w_3 do w_1 dostajemy $0 = 3$, więc układ jest sprzeczny i nie ma rozwiązań.

3.a)

metodę Gaussa;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -w_1 \\ -kw_1 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-k^2 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k^3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :(k-1) \\ :(1-k) \end{array} \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & -1 & -k \\ 0 & 1 & 1+k & 1+k+k^2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -w_2 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 2+k & 1+2k+k^2 \end{array}\right]$$

$$(2+k)x_3 = 1+2k+k^2 \Rightarrow x_3 = \frac{(k+1)^2}{k+2}$$

$$x_2 - \frac{(k+1)^2}{k+2} = -k \Rightarrow x_2 = \frac{-k^2-2k+k^2+2k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

$$x_1 + \frac{1}{k+2} + \frac{k(k+1)^2}{k+2} = k^2 \Rightarrow x_1 = \frac{k^3+2k^2-1-k^3-2k^2-k}{k+2} = \frac{-k-1}{k+2}$$

3.b)

wzory Cramera;

$$x_1 = (\det A)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix} = \frac{k^2+k+k^2-k^3-1-k^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{-k^3+k^2+k-1}{(k-1)^2(k+2)} =$$

$$= \frac{(k-1)(-k^2+1)}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{-(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{-k-1}{k+2}$$

$$x_2 = (\det A)^{-1} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{vmatrix} = \frac{k^3+k^2+1-k-k^3-k}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{k^2-2k+1}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}$$

$$x_3 = (\det A)^{-1} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = \frac{k^4+1+k-k-k^2-k^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{k^4-2k^2+1}{(k-1)^2(k+2)} =$$

$$\frac{\left(k^2-1\right)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k+2}$$

3.c)

metodę macierzy odwrotnej.

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$A^D = \begin{bmatrix} +(k^2-1) & -(k-1) & +(1-k) \\ -(k-1) & +(k^2-1) & -(k-1) \\ +(1-k) & -(k-1) & +(k^2-1) \end{bmatrix} = (k-1) \begin{bmatrix} k+1 & -1 & -1 \\ -1 & k+1 & -1 \\ -1 & -1 & k+1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^D\right)^T = \frac{k-1}{(k-1)^2(k+2)} \begin{bmatrix} k+1 & -1 & -1 \\ -1 & k+1 & -1 \\ -1 & -1 & k+1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\frac{1}{(k-1)(k+2)}\begin{bmatrix} k+1 & -1 & -1 \\ -1 & k+1 & -1 \\ -1 & -1 & k+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(k-1)(k+2)}\begin{bmatrix} k+1-k-k^2 \\ -1+k^2+k-k^2 \\ -1-k+k^3+k^2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(k-1)(k+2)}\begin{bmatrix} 1-k^2 \\ k-1 \\ (k-1)(k+1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k-1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \\ \frac{(k+1)^2}{k+2} \end{bmatrix}$$

Zadanie 4

Zbadaj rząd macierzy uzupełnionej następującego (rzeczywistego) układu równań w zależności od parametru rzeczywistego p oraz rozwiąż ten układ dla każdej wartości parametru $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (p+1)x - y - pz = 2p \\ x + py + 2pz = 1 \\ x + pz = 1 \\ px + y = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} p+1 & -1 & -p & 2p \\ 1 & p & 2p & 1 \\ 1 & 0 & p & 1 \\ p & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 1 & p & 2p & 1 \\ p+1 & -1 & -p & 2p \\ p & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -w_1 \\ -(p+1)w_1 \\ -pw_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 0 & p & p & 0 \\ 0 & -1 & -p^2-2p & p-1 \\ 0 & 1 & -p^2 & 1-p \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & -p^2 & 1-p \\ 0 & -1 & -p^2-2p & p-1 \\ 0 & p & p & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +w_2 \\ -pw_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & -p^2 & 1-p \\ 0 & 0 & -2p^2-2p & 0 \\ 0 & 0 & p^3+p & p^2-p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & -p^2 & 1-p \\ 0 & 0 & -2p(p+1) & 0 \\ 0 & 0 & p(p^2+1) & p(p-1) \end{array}\right]$$

Jeśli $p \notin \{0, -1, 1\}$ to dwa ostatnie wiersze są sprzeczne, bo

$$-2p(p+1)w_3 = 0 \Rightarrow w_3 = 0$$

$$p(p^2+1)w_3 = p(p-1) \Rightarrow w_3 = \frac{p(p-1)}{p(p^2+1)} \neq 0$$

czyli układ nie ma rozwiązań.

Dla $p = 0$ mamy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dla $p = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{2}{-2} = -1 \\ x_2 = 2 + (-1) = 1 \\ x_1 = 1 + (-1) = 0 \end{cases}$$

Dla $p = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 5

Wyznacz wszystkie wartości parametru zespolonego p ($p \in \mathbb{C}$), dla którego poniższa macierz zespolona U jest osobliwa. Rozwiąż poniższy układ równań $(*)$ w ciele liczb zespolonych w zależności od parametru zespolonego p ($p \in \mathbb{C}$):

$$U = \begin{bmatrix} p^2 & 1 & p^2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & p+1 & 1 \\ -p^2 & -1 & -p^2 & p+1 \end{bmatrix}, \quad (*) \begin{cases} p^2x + y + p^2z = -1 \\ -x + y - z = -1 \\ x - y + (p+1)z = 1 \\ -p^2x - y - p^2z = p+1 \end{cases}$$

Zadanie 6

W zależności od parametrów a i b rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = b \\ ax + 5y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

Zadanie 7

Rozważmy następujący układ równań z parametrami $k, a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(*) \begin{cases} kx + y + z = a \\ x + ky + z = b \\ x + y + kz = c \end{cases}$$

7.a)

Znajdź zbiór K tych k, dla których układ $(*)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i rozwiąż ten układ dla tych k;

7.b)

Dla każdego $k\{\notin K$ podaj warunek konieczny i wystarczający, który muszą spełniać a, b, c, aby układ $(*)$ miał co najmniej jedno rozwiązanie;

7.c)

Rozwiąż układ $(*)$ dla $k = 1, a = b = c = 3$, oraz dla $k = -2, a = b = 1, c = -2$.

Zadanie 8

8.a)

Znajdź w zależności od parametrów $k, l \in \mathbb{R}$ rząd macierzy:

$$M(k,l) = \begin{bmatrix} k & l & 1 \\ 1 & kl & 1 \\ 1 & l & k \end{bmatrix}$$

8.b)

Przedyskutuj ze względu na parametry liczbę rozwiązań układu:

$$\begin{cases} kx + ly + z = a \\ x + kly + z = b \\ x + ly + kz = c \end{cases}$$