

1. Odwzorowania liniowe

V, W - przestrzeń wektorowa nad ciałem K

$f : V \rightarrow W$ to **odwzorowanie liniowe** \Leftrightarrow

- $\forall u, v \in V, \alpha \in K : f(u + v) = f(u) + f(v) \wedge f(\alpha v) = \alpha f(v)$
- $\forall v_1, \dots, v_n \in V, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$

Jeżeli $f : V \rightarrow W$ jest odwzorowaniem liniowym to:

- $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$ (**zahowanie zera**)
- $\forall v \in V : f(-v) = -f(v)$
- jest jednoznacznie określone przez **wartości f na wektorach bazowych V**

2. Obrazy i jądra

$f : V \rightarrow W$ - odwzorowanie liniowe

Jądro odwzorowania f : $\text{Ker } f := \{v \in V : f(v) = \bar{0}_W\}$

$\text{Ker } f$ jest **podprzestrzenią V**

Obraz odwzorowania f (zbiór wartości): $\text{Im } f := \{w \in W : \exists v \in V : w = f(v)\}$

$\text{Im } f$ jest **podprzestrzenią W**

$\text{Im } f = \text{Lin } f(B)$, gdzie B to baza V

Rząd odwzorowania $r(f) = \dim \text{Im } f$

Jeżeli $\dim V < \infty$ to **$\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$**

3. Morfizmy

$f : V \rightarrow W$ - odwzorowanie liniowe

- **monomorfizm**: f to iniekcja $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow r(f) = \dim V$
- **epimorfizm**: f to surjekcja ($\text{Im } f = W$) $\Leftrightarrow r(f) = \dim W$
- **izomorfizm**: f to bijekcja (**przestrzenie izomorficzne**: $V \sim W$) $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$
- **endomorfizm**: $V = W$
- **automorfizm**: f to bijekcja i $V = W$
- **forma liniowa**: $W = K$

$\mathcal{L}(V, W)$ - **zbiór odwzorowań liniowych** $f : V \rightarrow W$

Struktura $(\mathcal{L}(V, W), K, +, \cdot)$ jest **przestrzenią wektorową**