Zadanie 1

Zbadaj rzędy następujących macierzy:

1.a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_1 \\ \\ -3w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$

1.b)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +w_1 \\ \\ -w_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -w_2 \\ -w_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -w_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(B) = 4$

1.c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -2w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -2w_2 \\ +w_2 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ +2w_3 \\ -3w_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$r(C) = 4$

1.d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -3w_1 \\ -2w_1 \\ -4w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_3 \\ \\ -3w_3 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(D) = 2$

Zadanie 2

Wyznacz rzędy następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p:

2.a)

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ p & -p & 0 & -p \\ p & 0 & -p & 0 \end{bmatrix}$$

Szukamy niezerowego minora o największym wymiarze.

$$W = \begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ p & -p & 0 \\ p & 0 & -p \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{z tw. Laplace'a}}{=}$$

$$p^2 \left((1-p)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$p^2((1-p) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1) = p^2(4-p)$$

Jeżeli $p \notin \{0, 4\}$ to $W \neq 0$, czyli znaleźliśmy niezerowego minora, więc $r(A) = 3$.
Jeżeli $p = 0 \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

Jeżeli $p = 4 \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ +3w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2w_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3$

Ostatecznie $r(A) = \begin{cases} 3, \text{ gdy } p \neq 0 \\ 1, \text{ gdy } p = 0 \end{cases}$

2.b)

$$B = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} p-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & 1 \end{vmatrix} = 3(p-1) - 1 - (p-1)^3 - 1$$

Niech $t = p - 1$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} 3t - 1 - t^3 - 1 &= 0 \\ t^3 - 3t + 2 &= 0 \\ (t-1)(t^2 + t - 2) &= 0 \\ (t-1)^2(t+2) &= 0 \\ t = 1 &\lor t = -2 \\ p = 2 &\lor p = -1 \end{aligned}$$

$$p = 2 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$$

$$p = -1 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +2w_1 \\ -w_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -w_2 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 3$$

Ostatecznie $r(B) = \begin{cases} 3, \text{ gdy } p \neq 2 \\ 2, \text{ gdy } p = 2 \end{cases}$