

## Zadanie 1

Sprawdź, czy:

### 1.a)

wektory  $u = [-1, 3, -5]$ ,  $v = [1, -1, 1]$ ,  $w = [4, 2, 0]$  są współpłaszczyznowe;

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 10 - 20 - 2 - 0 = 0$$

Wektory są współpłaszczyznowe.

### 1.b)

punkty  $P = (0, 0, 0)$ ,  $Q = (-1, 2, 3)$ ,  $R = (2, 3, -4)$ ,  $S = (2, -1, 5)$  są współpłaszczyznowe.

Sprawdźmy współpłaszczyznowość wektorów  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{PR}$ ,  $\overrightarrow{PS}$ .

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 16 - 6 - 18 + 4 - 20 = -71 \neq 0$$

Punkty nie są współpłaszczyznowe.

## Zadanie 2

Trójkąt  $ABC$  rozpięty jest na wektorach  $\overrightarrow{AB} = [1, 5, -3]$ ,  $\overrightarrow{AC} = [-1, 0, 4]$ . Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka  $C$ .

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|AB\| h_C \Rightarrow h_C = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|AB\|}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [20, -1, 5]$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{20^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{426}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

$$h_C = \sqrt{\frac{426}{35}}$$

### Zadanie 3

Proste  $l_1$  i  $l_2$  dane są równaniami parametrycznymi:

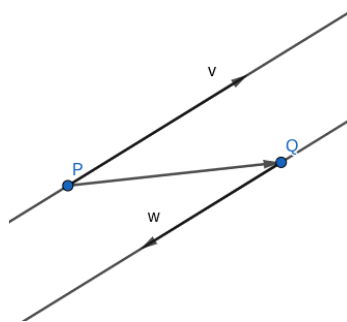
$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \quad l_2 : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R});$$

Wykaż, że  $l_1$  i  $l_2$  są równoległe. Oblicz odległość między nimi. Znajdź równanie ogólne ich wspólnej płaszczyzny

$$P = (1, 0, 2), Q = (6, 4, 0)$$

$$\vec{v} = [-4, -2, 4], \vec{w} = [6, 3, -6]$$

$$\overrightarrow{PQ} = [6 - 1, 4 - 0, 0 - 2] = [5, 4, -2]$$



Wektory kierunkowe  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  są proporcjonalne:

$$\frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$$

więc proste są równoległe.

$$d(l_1, l_2) = d(P, l_2) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}||}{||\vec{w}||}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = [-18, 18, -9] = 9 \cdot [-2, 2, -1]$$

$$d = \frac{9\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{9 \cdot 3}{\sqrt{81}} = 3$$

Płaszczyzna wspólna obu prostych to płaszczyzna rozpięta np. przez wektory  $\vec{w}$  i  $\overrightarrow{PQ}$ . Znajdźmy wektor normalny tej płaszczyzny.

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{w} = 9 \cdot [-2, 2, -1]$$

Skalar można pominąć, więc przyjmijmy  $\vec{n} = [-2, 2, -1]$ .

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $Q$  i prostopadłej do wektora  $\vec{n}$  ma postać:

$$\begin{aligned} \pi : -2(x - 6) + 2(y - 4) - z &= 0 \\ -2x + 2y - z + 4 &= 0 \end{aligned}$$

#### Zadanie 4

Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = 1 + 2s \\ z = -3 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Znajdź równanie normalne ich wspólnej płaszczyzny (jeżeli istnieje).

Spróbujmy znaleźć punkt wspólny prostych.

$$\begin{cases} 2 - t = -3 + 2s \\ 3 + 2t = 1 + 2s \\ -3t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s = 5 - t \\ 2s = 2 + 2t \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 2 \end{cases}$$

Proste przecinają się w jednym punkcie  $A = (1, 5, -3)$ , więc są współpłaszczyznowe.

Wektory kierunkowe to  $\vec{v} = [-1, 2, -3]$  i  $\vec{w} = [2, 2, 0]$ .

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [6, -6, -6] = 6 \cdot [1, -1, -1]$$

$$\pi : (x - 1) - (y - 5) - (z + 3) = 0$$

#### Zadanie 5

Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = s \\ z = -s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Jeżeli leżą one na jednej płaszczyźnie, to napisz jej równanie ogólne. Jeżeli nie, to oblicz odległość między tymi prostymi.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 \\ t = s \\ 2 = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = s \\ s = -2 \end{cases}$$

Dochodzimy do sprzeczności, czyli proste nie mają punktów wspólnych. Wektory kierunkowe  $\vec{v} = [2, 1, 0]$  i  $\vec{w} = [0, 1, -1]$  nie są proporcjonalne, czyli proste nie są równoległe, więc są skośne.

Odległość między prostymi skośnymi obliczamy ze wzoru:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$$

$$P = (1, 0, 2), Q = (3, 0, 0), \overrightarrow{PQ} = [2, 0, -2]$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [-1, 2, 2]$$

$$d = \frac{|2(-1) + 0 \cdot 2 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

### Zadanie 6

Napisz równanie ogólne płaszczyzny  $\pi$  przechodzącej przez punkty  $A = (-1, 2, 4)$ ,  $B = (2, 1, 3)$  i  $C = (3, -1, 5)$ . Wyznacz odległość punktu  $Q = (5, 0, 8)$  od płaszczyzny  $\pi$  oraz znajdź punkt symetryczny do punktu  $Q$  względem tej płaszczyzny.

Płaszczyzna  $\pi$  przechodzi przez punkt  $A$  i jest rozpięta na wektorach  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\overrightarrow{AB} = [3, -1, -1], \overrightarrow{AC} = [4, -3, 1]$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = [-4, -7, -5] = -[4, 7, 5]$$

$$\begin{aligned} \pi : 4(x + 1) + 7(y - 2) + 5(z - 4) &= 0 \\ 4x + 7y + 5z - 30 &= 0 \end{aligned}$$

Odległość punktu od płaszczyzny można wyliczyć z wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 8 - 30|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 5^2}} = \frac{30}{\sqrt{90}} = \frac{30}{3\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Żeby wyznaczyć odbicie punktu  $Q$  znajdziemy prostą  $l$  przechodzącą przez  $Q$  prostopadłą do płaszczyzny  $\pi$ . Będzie mieć ona postać  $Q + t\vec{n}$ , czyli:

$$l : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 7t \\ z = 8 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Wyznamy  $\overrightarrow{QP}$ , gdzie  $P$  to rzut punktu  $Q$  na płaszczyznę  $\pi$ , czyli przecięcie tej płaszczyzny z prostą  $l$ .

$$4(5 + 4t) + 7(7t) + 5(8 + 5t) - 30 = 0$$

$$90t + 30 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{QP} = -\frac{1}{3}\vec{n}$$

Niech  $Q'$  to będzie odbicie symetryczne punktu  $Q$  względem płaszczyzny  $\pi$ . Wtedy

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ'} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = 2\overrightarrow{QP} = -\frac{2}{3}\vec{n} = \left[-\frac{8}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{10}{3}\right]$$

$$Q' = Q + \overrightarrow{QQ'} = \left(5 - \frac{8}{3}, -\frac{14}{3}, 8 - \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

### Zadanie 7

Znajdź rzut prostokątny punktu  $P = (1, 3, 8)$  na prostą

$$l : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

oraz punkt symetryczny do  $P$  względem tej prostej.

Znajdźmy płaszczyznę  $\pi$  prostopadłą do  $l$  i zawierającą  $P$ . Jej wektor normalny to wektor kierunkowy prostej  $l$  czyli  $[6, 3, -6]$ , a po uproszczeniu  $[2, 1, -2]$ .

$$\pi : 2(x - 1) + (y - 3) - 2(z - 8) = 0$$

Przecięcie tej płaszczyzny z prostą  $l$  to rzut  $P_0$  punktu  $P$  na tą płaszczyznę.

$$2(6 + 6t - 1) + (4 + 3t - 3) - 2(-6t - 8) = 0$$

$$27t + 27 = 0$$

$$t = -1$$

$$P_0 = (0, 1, 6)$$

$$\overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{P_0P'} = [-1, -2, -2]$$

$$P' = P_0 + \overrightarrow{P_0P'} = (-1, -1, 4)$$

### Zadanie 8

Znajdź rzut prostokątny prostej  $k : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{1}$  na płaszczyznę

$$\pi : x + y - 2z + 4 = 0.$$

Prosta  $k$  przechodzi przez punkt  $P = (2, 2, 5)$  i ma wektor kierunku  $\vec{v} = [1, 1, 1]$ .

Wektor normalny płaszczyzny  $\pi$  to  $\vec{n} = [1, 1, -2]$ .

$$\vec{v} \circ \vec{n} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Rightarrow k \parallel \pi$$

Prosta jest równoległa do płaszczyzny więc wystarczy znaleźć rzut prostokątny tylko jednego punktu, np.  $P$ . Wyznamy prostą  $l$  przechodzącą przez  $P$  i prostopadłą do  $\pi$ .

$$l : \begin{cases} 2+t \\ 2+t \\ 5-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Punkt przecięcia  $l$  i  $\pi$  to rzut prostokątny  $P_0$  punktu  $P$  na  $\pi$ .

$$(2+t) + (2+t) - 2(5-2t) + 4 = 0$$

$$6t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$P_0 = \left(2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, 5 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

Rzut prostej  $k$  na płaszczyznę  $\pi$  musi mieć ten sam wektor kierunku, ponieważ  $k \parallel \pi \Rightarrow k$ .

$$k : \frac{x - \frac{7}{3}}{1} = \frac{y - \frac{7}{3}}{1} = \frac{z - \frac{13}{3}}{1}$$

$$x = y = z + 2$$

## Zadanie 9

Znajdź odległość prostej  $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$  od płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s + 3t \\ y = 2 - 2s - 2t \\ z = -1 + s - t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Płaszczyzna  $\pi$  zawiera punkt  $P = (1, 2, -1)$  i jest rozpięta na wektorach  $\vec{v} = [-1, -2, 1]$  i  $\vec{w} = [3, -2, -1]$ .

Prosta  $l$  zawiera punkt  $Q = (2, -3, 2)$  i ma wektor kierunku  $\vec{u} = [1, 2, -1] = -\vec{v} \Rightarrow l \parallel \pi$ , więc wystarczy znaleźć odległość  $Q$  od  $\pi$ .

Wektor normalny płaszczyzny  $\pi$ :

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [4, 2, 8] = 2 \cdot [2, 1, 4]$$

$$\pi : 2(x-1) + (y-2) + 4(z+1) = 0$$

$$2x + y + 4z = 0$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

## Zadanie 10

Dana jest prosta

$$l : \begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

oraz płaszczyzna  $\pi_1 : x + y + z + 8 = 0$ . Znajdź równanie ogólne płaszczyzny  $\pi$  zawierającej prostą  $l$  i prostopadłej do płaszczyzny  $\pi_1$ . Zbadaj wzajemne położenie prostej  $l$  i krawędzi  $k$  przecięcia się płaszczyzn  $\pi$  i  $\pi_1$ .

Z równania prostej  $l$ :

$$\left. \begin{array}{l} x = 2z \\ 7z - 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{7}{2}z - \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -\frac{3}{2} + 7t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Wynika z tego, że prosta  $l$  zawiera punkt  $(0, -\frac{3}{2}, 0)$ , więc płaszczyzna  $\pi$  też musi go zawierać.

Oprócz tego, wektor normalny płaszczyzny  $\pi$  musi być prostopadły do prostej  $l$  oraz do wektora normalnego płaszczyzny  $\pi_1$ .

Wektor kierunkowy prostej  $l$  to  $\vec{v} = [4, 7, 2]$ , a wektor normalny płaszczyzny  $\pi_1$  to  $\vec{n}_1 = [1, 1, 1]$ . Niech  $\vec{n} = [a, b, c]$  będzie wektorem normalnym płaszczyzny  $\pi$ . Wtedy:

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \vec{v} &= 0 \wedge \vec{n} \circ \vec{n}_1 = 0 \\ 4a + 7b + 2c &= 0 \wedge a + b + c = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + 5b &= 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}a \\ -3a - 5c &= 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{5}a \end{aligned}$$

Wektor zerowy nie może być wektorem normalnym, więc możemy bez straty ogólności przyjąć  $a = 5$ . Wtedy  $\vec{n} = [5, -2, -3]$ .

$$\begin{aligned} \pi : 5x - 2\left(y + \frac{3}{2}\right) - 3z &= 0 \\ 5x - 2y - 3z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Proste  $l$  i  $k$  obie należą do płaszczyzny  $\pi$ , więc albo są równoległe i wtedy  $l$  nie przecina nigdy płaszczyzny  $\pi_1$ , albo przecinają się w punkcie przecięcia  $\pi_1$  przez prostą  $l$ .

$$4t - \frac{3}{2} + 7t + 2t + 8 = 0$$

$$13t + \frac{13}{2} = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

Czyli proste  $k$  i  $l$  przecinają się w punkcie  $(-\frac{4}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}, -\frac{2}{2}) = (-2, -5, -1)$ .

### Zadanie 11

Znajdź punkt symetryczny do punktu  $P = (2, 3, -1)$  względem prostej

$$l : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

oraz płaszczyznę  $\pi$  zawierającą prostą  $l$  i punkt  $P$ .

Z równania prostej  $l$ :

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow l : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Wyznamy płaszczyznę  $\pi_0$  która przechodzi przez punkt  $P$  oraz jest prostopadła do prostej  $l$ . Wektorem normalnym tej płaszczyzny będzie wektor kierunku prostej  $l$ , czyli  $[1, -1, 1]$ .

$$\pi_0 : (x - 2) - (y - 3) + (z + 1) = 0$$

Punkt  $P_0$  przebiecia tej płaszczyzny przez prostą  $l$  to będzie rzut prostokątny punktu  $P$  na tą prostą.

$$(t - 2) - (-t - 3) + (t + 1) = 0$$

$$3t + 2 = 0$$

$$t = -\frac{2}{3}$$

$$P_0 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Odbicie  $P'$  punktu  $P$  leży po drugiej stronie  $P_0$ .

$$\overrightarrow{PP_0} = \left[-\frac{2}{3} - 2, \frac{2}{3} - 3, -\frac{2}{3} + 1\right] = \left[-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\overrightarrow{P_0P'} = \overrightarrow{PP_0} \Rightarrow$$

$$P' = \left(-\frac{2}{3} - \frac{8}{3}, \frac{2}{3} - \frac{7}{3}, -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$



Płaszczyzna zawierająca punkt  $P$  ma równanie postaci  $a(x - 2) + b(y - 3) + c(z + 1) = 0$ , gdzie  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Równanie musi zachodzić dla współrzędnych z prostej  $l$ , dlatego:

$$\begin{aligned} a(t - 2) + b(-t - 3) + c(t + 1) &= 0 \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R} \\ t(a - b + c) - 2a - 3b + c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -2a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}a \\ -5a - 2c &= 0 \Rightarrow c = -\frac{5}{2}a \end{aligned}$$

$a \neq 0$  więc możemy bez straty ogólności przyjąć  $a = 2$ . Wtedy płaszczyzna  $\pi$  ma postać:

$$\begin{aligned} \pi : 2(x - 2) - 3(y - 3) - 5(z + 1) &= 0 \\ 2x - 3y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

### Zadanie 12

Zbadaj wzajemne położenie prostej  $l$  prostopadłej do płaszczyzny  $\pi : y = 2 + z$  i przechodzącej przez punkt  $A = (1, 2, 0)$  oraz prostej  $k$  przechodzącej przez punkt  $B = (0, 3, -1)$  i równoległej do prostej

$$k' : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

Wyznacz odległość prostych  $l$  i  $k$ . Wyznacz objętość równoległościanu rozpinanego przez wektory prostych  $l$  i  $k$  oraz wektor  $\overrightarrow{AB}$ .

Prosta  $l$  ma wektor kierunku równy wektorowi normalnemu płaszczyzny  $\pi : y - z - 2 = 0$ , czyli  $\vec{v} = [0, 1, -1]$  więc jej równanie to:

$$l : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Wektor kierunkowy  $\vec{w}$  prostej  $k$  jest taki sam jak prostej  $k'$ . Musi być on prostopadły do wektorów normalnych dwóch płaszczyzn których prosta  $k'$  jest przecięciem.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [-3, 0, -3] = -3 \cdot [1, 0, 1]$$

Więc prosta  $k$  ma równanie

$$k : \begin{cases} x = s \\ y = 3 \\ z = -1 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Sprawdźmy, czy proste  $l$  i  $k$  mają punkty wspólne.

$$\begin{cases} 1 = s \\ 2 + t = 3 \\ -t = -1 + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Nie mają punktów wspólnych a ich wektory kierunkowe nie są proporcjonalne, dlatego nie są współpłaszczyznowe, czyli są skośne.

Odległość dwóch prostych skośnych możemy obliczyć ze wzoru:

$$d(l, k) = \frac{|(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{|(\vec{v} \times \vec{w}) \circ \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

$$\overrightarrow{AB} = [-1, 1, -1]$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [1, -1, -1]$$

$$d = \frac{|1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Wersory to wektory jednostkowe, więc:

$$\vec{u}_l = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\vec{u}_k = \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Objętość równoległościanu to moduł z iloczynu mieszanego:

$$V = |(\vec{u}_l, \vec{u}_k, \overrightarrow{AB})| = \left| \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

### Zadanie 13

Dana jest płaszczyzna  $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$  oraz prosta  $l : x = y = z$ . Wyznacz punkt  $A$  przecięcia się prostej  $l$  i płaszczyzny  $\pi$  oraz rzut prostokątny  $k$  prostej  $l$  na płaszczyznę  $\pi$ . Wyznacz pole trójkąta  $ABB'$ , gdzie  $B = (0, 0, 0)$  jest punktem należącym do prostej  $l$ , a  $B'$  jest rzutem prostokątnym punktu  $B$  na prostą  $k$ .

$$x + 2x + 3x - 6 = 0$$

$$6x = 6$$

$$x = y = z = 1$$

$$A = (1, 1, 1)$$

Punkt  $A$  leży na płaszczyźnie więc jest swoim własnym rzutem na nią. Aby znaleźć rzut prostej  $l$  potrzebujemy jeszcze rzut drugiego punktu, np.  $B$ .

Prosta przechodząca przez  $B$  prostopadła do płaszczyzny  $\pi$  ma równanie:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Rzut  $B$  na  $\pi$  to przecięcie tej prostej z płaszczyzną:

$$t + 2(2t) + 3(3t) - 6 = 0$$

$$14t = 6$$

$$t = \frac{3}{7}$$

Więc  $B' = (\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7})$ . Jest to też rzut  $B$  na prostą  $k$ . Ma ona wektor kierunkowy  $\overrightarrow{AB'} = [-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}]$ . Możemy to uprościć do  $\vec{v} = [-4, -1, 2]$ , czyli dostajemy równanie:

$$k : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Pole trójkąta  $ABB'$ ; to połowa pola równoległoboku wyznaczonego przez wektory  $\overrightarrow{BA}$  i  $\overrightarrow{BB'}$ .

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BB'}\|$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BB'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{9}{7} \end{vmatrix} = \left[ \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7} \right] = \frac{3}{7} \cdot [1, -2, 1]$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{6}}{14}$$

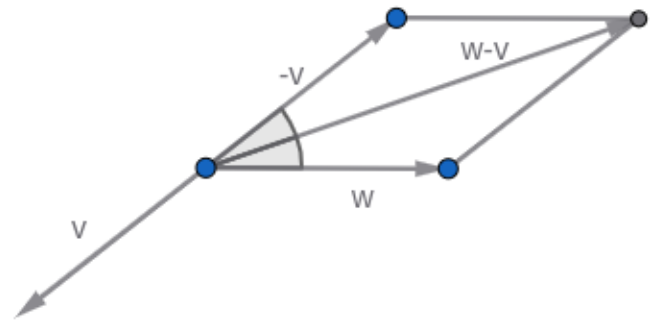
## Zadanie 14

Napisz równanie parametryczne i kierunkowe prostej  $l$  będącej dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste:

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}, l_2 : \frac{x+6}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+29}{-12}$$

Jeżeli weźmiemy wektory kierunkowe o tej samej długości to ich suma (albo różnica, jeśli

tworzą kąt rozwarty) będzie przekątną rombu, a więc dwusieczną, której szukamy.



Wektor kierunkowy  $l_1$  to  $\vec{v}_0 = [2, -1, 2]$ , a  $l_2$  to  $\vec{w}_0 = [4, -3, -12]$ .

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{\|\vec{v}_0\|} = \frac{\vec{v}_0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\vec{v}_0}{\sqrt{9}} = \frac{\vec{v}_0}{3} = \left[ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$$

$$\vec{w} = \frac{\vec{w}_0}{\|\vec{w}_0\|} = \frac{\vec{w}_0}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-12)^2}} = \frac{\vec{w}_0}{\sqrt{169}} = \frac{\vec{w}_0}{13} = \left[ \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, -\frac{12}{13} \right]$$

Sprawdźmy kąt między  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ .

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{13} + \left( -\frac{1}{3} \right) \left( -\frac{3}{13} \right) + \frac{2}{3} \left( -\frac{12}{13} \right) = \frac{8 + 3 - 24}{39} = -\frac{13}{39} < 0$$

Iloczyn skalarny jest ujemny, więc kąt jest rozwarty. Dwusieczna będzie mieć wektor kierunkowy równy:

$$\vec{w} - \vec{v} = \left[ \frac{4}{13} - \frac{2}{3}, -\frac{3}{13} + \frac{1}{3}, -\frac{12}{13} - \frac{2}{3} \right] = \left[ -\frac{14}{39}, \frac{4}{39}, -\frac{62}{39} \right] = -\frac{2}{39} \cdot [7, -2, 31]$$

Musimy jeszcze znaleźć punkt  $P$  przecięcia  $l_1$  i  $l_2$ .

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : \begin{cases} x = -6 + 4s \\ y = 1 - 3s \\ z = -29 - 12s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} 1 + 2t = -6 + 4s \\ -1 - t = 1 - 3s \\ 2 + 2t = -29 - 12s \end{cases}$$

$$2t = -7 + 4s = -31 - 12s$$

$$16s = -24$$

$$s = -\frac{3}{2}$$

$$t = \frac{1}{2}(-7 - 6) = -\frac{13}{2}$$

$$x = -6 - 6 = -12$$

$$y = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

$$z = -29 + 18 = -11$$

Mamy punkt  $P = (-12, \frac{11}{2}, -11)$ , więc dwusieczna  $l$  ma postać

$$l : \begin{cases} x = -12 + 7t \\ y = \frac{11}{2} - 2t \\ z = -11 + 31t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

### Zadanie 15

Oblicz miarę kąta między:

#### 15.a)

prostą  $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-3}$  i płaszczyzną  $\pi : x - z = 0$ ;

$$\vec{v} = [2, 0, -3]$$

$$\vec{n} = [1, 0, -1]$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 + 0 + 3|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$$

#### 15.b)

płaszczyznami  $\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0, \pi_2 : 2x + y - z + 3 = 0$ ;

$$\vec{n}_1 = [1, -2, 3]$$

$$\vec{n}_2 = [2, 1, -1]$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 - 2 - 3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)$$

15.c)

prostymi:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad l_2 : \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 4 - s \\ z = 1 + 3s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$\vec{v}_1 = [-1, 1, 3]$$

$$\vec{v}_2 = [-2, -1, 3]$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{|2 - 1 + 9|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{154}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5\sqrt{154}}{77}\right)$$