Zadanie 1

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x), B_1 = (u_1, u_2, u_3), B_2 = (v_1, v_2, v_3)$, gdzie $u_1 = v_1 = (1, 0, 0), u_2 = v_2 = (1, 1, 0), u_3 = v_3 = (1, 1, 1)$ i B - baza standardowa (kanoniczna) w $\mathbb{R}^3$.

1.a)

Wyznacz macierz odwzorowania f w bazach standardowych;

$$f(1,0,0) = (1,0,-1)$$
$$f(0,1,0) = (-1,1,0)$$
$$f(0,0,1) = (0,-1,1)$$
$$M_f(B,B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.b)

Wykorzystując tę macierz, znajdź obraz wektora $v = (0, -1, -2)$;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1+0 \\ 0-1+2 \\ 0+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$f(v) = (1,1,-2)$$

1.c)

Wyznacz $M_f(B_1, B_2)$;

Wyznaczmy obrazy wektorów z B_1 i przedstawmy je przy pomocy bazy B_2.

$$f(u_1) = f(1,0,0) = (1,0,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1)$$
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$
$$f(u_2) = f(1,1,0) = (0,1,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1)$$
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$
$$f(u_3) = f(1,1,1) = (0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(1,1,0) + 0(1,1,1)$$

$$M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> **1.d)**
>
> Wyznacz obraz wektora v wykorzystując nową macierz;

Wyznaczmy współrzędne wektora v w bazie B_1.

$$v = (0, -1, -2) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = -1 \\ \gamma = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -2 \end{cases}$$

$$v = (1, 1, -2)_{B_1}$$

$$f(v)_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 + 0 \\ 1 + 2 + 0 \\ -1 - 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Zamieńmy z powrotem na bazę kanoniczną.

$$(0, 3, -2)_{B_2} = 0(1, 0, 0) + 3(1, 1, 0) - 2(1, 1, 1) = (1, 1, -2)$$

> **1.e)**
>
> Wyznacz jeszcze raz $M_f(B_1, B_2)$ wykorzystując macierze przejścia.