12

$\sqrt[n]{1}$ to zbiór z takich, że $z^n = 1$ czyli zbiór rozwiązań wielomianu $z^n - 1 = 0$.

Z wzorów Viete'a wiemy że dla wielomianu postaci $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ suma pierwiastków $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ wynosi $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$.

Dla wielomianu $z^n - 1$ $a_{n-1} = 0$ i $a_n = 1$, więc suma pierwiastków wynosi $\frac{-0}{1} = 0$.

13

$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \ldots$

$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots$

Dowód:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n =$$

$$\binom{n}{0} \cos^n \varphi i^0 \sin^0 \varphi + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi i \sin \varphi + \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi i^2 \sin^2 \varphi +$$

$$\binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi i^3 \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi i^4 \sin^4 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi i^5 \sin^5 \varphi + \ldots$$

Kolejne potęgi i przyjmują wartości $1, i, -1, -i$ w kółko, więc:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n =$$

$$\binom{n}{0} \cos^n \varphi \sin^0 \varphi + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi i \sin \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi -$$

$$\binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi i \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi i \sin^5 \varphi - \ldots$$

Możemy wyciągnąć i przed nawias:

$$\left(\binom{n}{0} \cos^n \varphi \sin^0 \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \ldots\right)$$

$$+i\left(\binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \ldots\right)$$

Ale $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ wynosi też, ze wzoru de Moivre'a $\cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

Dwie liczby zespolone są równe, gdy ich części urojne i rzeczywiste są równe, więc:

$\cos n\varphi = \binom{n}{0} \cos^n \varphi \sin^0 \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \ldots$

$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \ldots$

Obliczmy $\cos\frac{\pi}{5}$ wykorzystując powyższą własność.

$$\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{5}\right)=\sin\pi=0=\binom{5}{1}\cos^4\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}-\binom{5}{3}\cos^2\frac{\pi}{5}\sin^3\frac{\pi}{5}+\binom{5}{5}\sin^5\frac{\pi}{5}$$

Podzielmy obustronnie przez $\sin\frac{\pi}{5}\neq 0$, aby otrzymać parzyste potęgi przy sinusie.

$$0=\binom{5}{1}\cos^4\frac{\pi}{5}-\binom{5}{3}\cos^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{5}+\binom{5}{5}\sin^4\frac{\pi}{5}$$

Niech $t=\cos\frac{\pi}{5}$. Wtedy $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-t^2$. Otrzymujemy:

$$0=5t^4-10t^2(1-t^2)+(1-t^2)^2$$

$$0=5t^4-10t^2+10t^4+1-2t^2+t^4$$

$$0=16t^4-12t^2+1$$

$$\Delta=12^2-4\cdot16\cdot1=144-64=80=\left(4\sqrt{5}\right)^2$$

$$t^2=\frac{12\pm4\sqrt{5}}{32}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}>0$$

$$t=\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{3\pm\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6\pm2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{5\pm2\sqrt{5}+1}}{4}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\pm1\right)^2}}{4}=\frac{\sqrt{5}\pm1}{4}$$

przedziale $(0,\pi)$ $\cos x$ jest funkcją malejącą, dlatego $\cos\frac{\pi}{5}>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, więc pasującą wartością jest tylko $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$