Zadanie 1

Niech $A = \{0, 1\}$.
W zbiorze A określamy działanie $\oplus$ przyjmując: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$, oraz działanie $\odot$ przyjmując: $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$, $1 \odot 1 = 1$.

1.a)

Sprawdź, że $(A, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

$h : A \to \mathbb{Z}/2, h(0) = [0], h(1) = [1]$
$x, y \in A$

$$h(x + y) = \begin{cases} h(0) = [0] = [0] + [0], \text{ gdy } (x, y) = (0, 0) \\ h(1) = [1] = [0] + [1], \text{ gdy } (x, y) = (0, 1) \\ h(1) = [1] = [1] + [0], \text{ gdy } (x, y) = (1, 0) \\ h(0) = [0] = [1] + [1], \text{ gdy } (x, y) = (1, 1) \end{cases} = h(x) + h(y)$$

$$h(x \cdot y) = \begin{cases} h(0) = [0] = [0] \cdot [0], \text{ gdy } (x, y) = (0, 0) \\ h(0) = [0] = [0] \cdot [1], \text{ gdy } (x, y) = (0, 1) \\ h(0) = [0] = [1] \cdot [0], \text{ gdy } (x, y) = (1, 0) \\ h(1) = [1] = [1] \cdot [1], \text{ gdy } (x, y) = (1, 1) \end{cases} = h(x) \cdot h(y)$$

Ponadto h jest bijekcją $\Rightarrow (A, \oplus, \odot)$ jest izomorficzne do $(\mathbb{Z}/2, +, \cdot)$ więc jest ciałem.

1.b)

W zbiorze A^2 określamy działanie dodawania jako: $(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$, oraz mnożenie przez elementy z ciała A następująco: $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b)$.
Sprawdź, czy $(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem A.

1. $A^2 \neq \emptyset$
2. $(A, \oplus, \odot)$ to ciało przemienne, bo $\odot$ jest przemienne
3. $+$ i $\cdot$ prowadzą do A^2, bo $(a \oplus c), (b \oplus d), (\alpha \odot a), (a \odot b) \in A$
4. $(A^2, +)$ jest grupą abelową, bo
   - $+$ jest wewnętrzne
   - $+$ jest łączne i przemienne co wynika z łączności i przemienności $\oplus$
   - istnieje element neutralny $(0, 0) : (a, b) + (0, 0) = (a \oplus 0, b \oplus 0) = (a, b)$
   - każdy element ma element symetryczny: $(a, b) + (a, b) = (a \oplus a, b \oplus b) = (0, 0)$
5. $\alpha \cdot ((a, b) + (c, d)) = \alpha \cdot (a \oplus c, b \oplus d) = (\alpha \odot (a \oplus c), \alpha \odot (b \oplus c)) =$
   $(\alpha \odot a \oplus \alpha \odot c, \alpha \odot b \oplus \alpha \odot d) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\alpha \odot c, \alpha \odot d) = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$
6. $(\alpha \odot \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \odot \beta) \odot a, (\alpha \odot \beta) \odot b) = (\alpha \odot (\beta \odot a), \alpha \odot (\beta \odot b)) =$
   $\alpha \cdot (\beta \cdot a, \beta \cdot b) = \alpha \cdot (\beta \cdot (a, b))$

7. $(\alpha \oplus \beta) \cdot (a, b) = ((\alpha \oplus \beta) \odot a, (\alpha \oplus \beta) \odot b) = ((\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a), (\alpha \odot b) \oplus (\beta \odot b)) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b) + (\beta \odot a, \beta \odot b) = (\alpha \cdot (a, b)) + (\beta \cdot (a, b))$
8. $(a, b) \cdot \mathbf{1} = (a \odot 1, b \odot 1) = (a, b)$

$(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

1.c)

Wykaż, że przestrzeń A^2 posiada dokładnie pięć podprzestrzeni.

$A^2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$, wektor $(0,0)$ należy do każdej podprzestrzeni.
$\{(0,0)\}$✓
$\{(0,0), (0,1)\}$✓
$\{(0,0), (1,0)\}$✓
$\{(0,0), (1,1)\}$✓
$\{(0,0), (0,1), (1,0)\}$✗, bo $(0,1) + (1,0) = (1,1)$
$\{(0,0), (0,1), (1,1)\}$✗, bo $(0,1) + (1,1) = (1,0)$
$\{(0,0), (1,0), (1,1)\}$✗, bo $(1,0) + (1,1) = (0,1)$
$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$✓

Zadanie 2

Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

2.a)

$A = \{(x, y, z) : x + y + z = a, a \in \mathbb{R}\}$

Kontrprzykład: $a = 1, (1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1) \notin A$

2.b)

$B = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$

Kontrprzykład: $(-1) \cdot (1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin B$

2.c)

$C = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Kontrprzykład: $(0, 0, 1) + (0, 0, 1) = (0, 0, 2) \notin C$

2.d)

$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Kontrprzykład: $2 \cdot (1,0,0) = (2,0,0) \notin D$

2.e)

$E = \{(x,y,z) : x = 2y \wedge z = 0\}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1,y_1,z_1) + \beta \cdot (x_2,y_2,z_2) =$

$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \cdot 2y_1 + \beta \cdot 2y_2 = 2(\alpha y_1 + \beta y_2)$
$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

2.f)

$F = \{(x,y,z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in E : \alpha \cdot (x_1,y_1,z_1) + \beta \cdot (x_2,y_2,z_2) =$

$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$
$3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) - 8(\alpha z_1 + \beta z_2) =$

$\alpha(3x_1 + 2y_1 - 8z_1) + \beta(3x_2 + 2y_2 - 8z_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

Zadanie 3

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami:

3.a)

$A = \{f : f(2) = f(7)\}$

$f, g \in A, \alpha \in \mathbb{R}, (f+g) \overset{?}{\in} A, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} A$
$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = f(7) + g(7) = (f+g)(7)$
$(\alpha \cdot f)(2) = \alpha f(2) = \alpha f(7) = (\alpha \cdot f)(7)$

3.b)

$B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\}$

$f, g \in B, \alpha \in \mathbb{R}, (f+g) \overset{?}{\in} B, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} B$
$(f+g)(7) = f(7) + g(7) = 2 + f(1) + 2 + g(1) = 4 + (f+g)(1)$ sprzeczność

3.c)

$C = \{f : f(x_0) = 3\}$

$f, g \in C, \alpha \in \mathbb{R}, (f+g) \overset{?}{\in} C, \alpha \cdot f \overset{?}{\in} C$
$(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 3 + 3 = 6$ sprzeczność

Zadanie 4

Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}[x]$ (przestrzeń wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$) są jej podprzestrzeniami:

4.a)

$A = \{w : w(0)w(1) = 0\}$

$A = \{w : w(x) = x(x-1)q(x)\}$
$x(x-1)q(x), x(x-1)p(x) \in A, \alpha \in \mathbb{R}$
$x(x-1)q(x) + x(x-1)p(x) = x(x-1)(q(x)+p(x)) \in A$
$\alpha \cdot x(x-1)q(x) = x(x-1)(\alpha q(x)) \in A$

4.b)

$B = \{w : \text{stopień } w \leq 6\}$

$q(x), p(x) \in B, \alpha \in \mathbb{R}$
$\deg(q+p) \leq 6 \wedge \deg(\alpha q) \leq 6$

4.c)

$C = \{w : \text{stopień } w = 6\}$

Kontrprzykład: $x^6 + (-x^6) = 0 \notin C$

4.d)

$D = \{w : w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2+1\}$

$D = \{w : w(x) = (x^2+1)q(x)\}$
$(x^2+1)q(x), (x^2+1)p(x) \in D, \alpha \in \mathbb{R}$
$(x^2+1)q(x) + (x^2+1)p(x) = (x^2+1)(q(x)+p(x)) \in A$
$\alpha \cdot (x^2+1)q(x) = (x^2+1)(\alpha q(x)) \in A$

Zadanie 5

Zbadaj, które z układów wektorów należących do $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:

5.a)

$B_1 : (1,4,3), (-1,2,1), (0,6,4)$✗

$1 \cdot (1,4,3) + 1 \cdot (-1,2,1) + (-1) \cdot (0,6,4) = (1-1-0, 4+2-6, 3+1-4) = (0,0,0)$

5.b)

$B_2 : (2, 3, -1), (2, 0, 0), (0, 3, 1)$✓

$x(2, 3, -1) + y(2, 0, 0) + z(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.c)

$B_3 : (2, -7, 2), (0, 2, 4), (2, -1, 5)$✓

$x(2, -7, 2) + y(0, 2, 4) + z(2, -1, 5) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ -7x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -3z \\ -9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.d)

Znajdź współrzędne wektora $(1, 1, 1)$ względem tych B_i, które stanowią bazę w $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x + 3z = 1 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= z - 1 \\ 3z - 3 + 3z &= 1 \\ z &= \frac{2}{3} \\ x &= -\frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{2} - x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 1 \\ -7x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2z - 14x + 4y - 2z &= 3 \\ -12x + 4y &= 3 \\ 2x + 2z - 2x - 4y - 5z &= 0 \\ -3z - 4y &= 0 \\ -14x + 4y - 2z - 2x - 4y - 5z &= 1 \\ -16x - 7z &= 1 \\ -12x - 3z &= 3 \\ -16x - 7z + 16x + 4z &= 1 - 4 \\ -3z &= -3 \\ z &= 1 \\ x &= -\frac{1}{2} \\ y &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Zadanie 6

Sprawdź liniową zależność wektorów $\sqrt{2}$ i 2 w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ oraz w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

$$p\sqrt{2} + 2q = 0, p, q \in \mathbb{Q}$$
$$\underbrace{p}_{\in\mathbb{Q}} \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}} = \underbrace{-2q}_{\in\mathbb{Q}} \Rightarrow p = q = 0$$

liniowo niezależne

$$x\sqrt{2} + 2y = 0, x, y \in \mathbb{R}$$
$$x = \frac{-2y}{\sqrt{2}}$$

liniowo zależne

Zadanie 7

Dla jakiej wartości parametru k wektor $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów $u_1 = (1, 1, 1)$ i $u_2 = (1, 2, 3)$?

$x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) = (1, -2, k)$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + 2y &= -2 \\ x + 3y &= k \\ y &= -3 \\ x &= 4 \\ k &= -5 \end{aligned}$$

Zadanie 8

Sprawdź, czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

8.a)

$f = \mathrm{Id}, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} ax + b\sin x + c\cos x &= 0 \\ x = 0 \Rightarrow c\cos x &= 0 \Rightarrow c = 0 \\ x = \pi \Rightarrow ax &= 0 \Rightarrow a = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

liniowo niezależne

> **8.b)**
>
> $f(x) = 1, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x, p(x) = \sin^2 x, q(x) = \cos^2 x$

$-1 \cdot 1 + 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$

liniowo zależne

> **Zadanie 9**
>
> W $\mathbb{R}^3$ dane są trzy wektory: $u = (0, 1, -1)$, $v = (-1, 0, 1)$, $w = (1, -1, 0)$.

> **9.a)**
>
> Wykaż, że wektory te są parami niezależne.

$x(0, 1, -1) + y(-1, 0, 1) = 0$

$$\begin{cases} -y &= 0 \\ x &= 0 \\ -x + y &= 0 \end{cases}$$

$x = y = 0$

$x(0, 1, -1) + y(1, -1, 0) = 0$

$$\begin{cases} y &= 0 \\ x - y &= 0 \\ -x &= 0 \end{cases}$$

$x = y = 0$

$x(-1, 0, 1) + y(1, -1, 0) = 0$

$$\begin{cases} -x + y &= 0 \\ -y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

$x = y = 0$

> **9.b)**
>
> Czy układ wektorów u, v, w jest liniowo niezależny?

$(0, 1, -1) + (-1, 0, 1) + (1, -1, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow u, v, w$ są liniowo zależne

> **9.c)**
>
> Podaj wymiar oraz bazę podprzestrzeni generowanej przez te wektory.

Wymiar 2, baza to dowolne dwa z u, v, w.

> **Zadanie 10**
>
> Udowodnij, że zbiór: $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz bazy podprzestrzeni z zadania 2.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\
x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\
2x_1 - 2x_4 &= 0 \\
x_1 &= x_4 \\
x_4 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\
x_2 &= 3x_3 + 2x_4
\end{aligned}
$$

Niech $x_3 = a, x_4 = b$. Wtedy $A = \{(b, 2a + 2b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$(b, 2a + 2b, a, b) = a(0, 2, 1, 0) + b(1, 2, 0, 1) \Rightarrow \{(0, 2, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ to baza A.

Podprzestrzenie z zadania **2**:
$E = \{(x, y, z) : x = 2y \land z = 0\}, F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$

$E = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \{(2, 1, 0)\}$ to baza E

$F = \left\{\left(x, y, \frac{3x+2y}{8}\right), x, y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\left(1, 0, \frac{3}{8}\right) + y\left(0, 1, \frac{1}{4}\right), x, y \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow$
$\left\{\left(1, 0, \frac{3}{8}\right), \left(0, 1, \frac{1}{4}\right)\right\}$ to baza F

Zadanie 11

Dane są dwa układy wektorów: $B_1 : (1, i, 1 + i), (i, -1, 2 - i), (0, 0, 3)$ i $B_2 : (2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1 + i, 1 - i)$.

11.a)

Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.

11.b)

Jaki wymiar mają przestrzenie $\mathbb{C}^{n(\mathbb{C})}$ i $\mathbb{C}^{n(\mathbb{R})}$?

11.c)

Znajdź współrzędne wektora $(1, 0, 1)$ w bazie z podpunktu a).

Zadanie 12

Niech będzie dana następująca podprzestrzeń U przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ (tj. przestrzeni $\mathbb{C}^2$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$), gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą:

$$U := \mathrm{Lin}\{(pi, (p - 1)i), (p - 2 - pi, p), (-1 - pi, 2p)\}.$$

Zbadaj dla jakich wartości parametru rzeczywistego p, zachodzi:

$$(3 - 2p, p - 1 + (1 - p)i) \in U.$$

Dla wszystkich takich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, wyznacz $\dim U$.

Zadanie 13

Wyznacz bazę przestrzeni $(P_{2n}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie $P_{2n} := \{w \in \mathbb{R}[x]_{2n} : w(x) = w(-x)\}$.

Zadanie 14

W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$. Wykaż, że układ $B_2 = (1, x-2, (x-2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$. Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz. Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

$a \cdot 1 + b(x-2) + c(x-2)^2 = a + bx + b + cx^2 - 2cx + 4c =$

$cx^2 + (b-2c)x + a + b + 4c$

Ta kombinacja liniowa musi wygenerowac każdy wielomian postaci $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} c &= \alpha \\ b - 2\alpha &= \beta \\ b &= \beta + 2\alpha \\ a + \beta + 2\alpha + \alpha &= \gamma \\ a &= -3\alpha - \beta + \gamma \end{aligned}$$

$2x^2 + 3 = [3, 0, 2]_{B_1} = [-9, 6, 2]_{B_2}$

$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p'(x) = 2ax + b$

$$\begin{aligned} p(1) &= p'(0) \\ a + b + c &= b \\ c &= -a \end{aligned}$$

$A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(x) = ax^2 + bx - a\}$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, p(x) = ax^2 + bx - a \in A, q(x) = cx^2 + dx - c \in A$
$\alpha p(x) + \beta q(x) = (\alpha a + \beta c)x^2 + (\alpha b + \beta d)x - (\alpha a + \beta c) \in A \Rightarrow$
A jest podprzestrzenią $\mathbb{R}[x]_2$
$ax^2 + bx - a = a(x^2 - 1) + b(x) \Rightarrow (x^2 - 1, x)$ to baza A

Zadanie 15

Wykaż, że zbiór liczb postaci $\left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} + e\sqrt{12} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\right\}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych. Znajdź bazę tej przestrzeni.

Zadanie 16

Wiedząc, że wektory u, v, w stanowią bazę przestrzeni liniowej V (nad ciałem $\mathbb{R}$), zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:

16.a)

$B_1 = (u - 2v + w, 3u + w, u + 4v - w)$

$$au - 2av + aw + 3bu + bw + cu + 4cv - cw = 0$$
$$u(a + 3b + c) + v(-2a + 4c) + w(a + b - c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a & + 3b + c & = 0 \\ -2a & \quad + 4c & = 0 \\ a & + b \quad - c & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= -3b - c \\ 6b + 2c + 4c &= 0 \\ b &= -c \\ 3c - c - c - c &= 0 \\ c &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wektory są liniowo zależne, czyli nie stanowią bazy.

16.b)

$B_2 = (u, 2u + v, 3u - v + 4w)$

$$au + 2bu + bv + 3cu - cv + 4cw = 0$$
$$u(a + 2b + 3c) + v(b - c) + w(4c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ b - c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Wektory w B_2 są liniowo niezależne i $\dim B_2 = 3$ więc B_2 jest bazą V.

16.c)

Wyznacz współrzędne wektora $a = 2u - 3v + 8w$ względem tej bazy.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 2 \\ b - c = -3 \\ 4c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$a = [-2, -1, 2]_{B_2}$

Zadanie 17

Wykaż, że dla dowolnych $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ takich, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, wielomiany $w_0, w_1, ..., w_n$, zdefiniowane jako:

$$w_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{dla } i = 0, 1, ..., n,$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

Zadanie 18

Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a V_1, V_2 będą podzbiorami V składającymi się, odp., z odwzorowań nieparzystych oraz parzystych. Wykaż, że V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V oraz, że $V = V_1 \oplus V_2$.

Zadanie 19

Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Oznaczmy przez F_a zbiór odwzorowań zerujących się w punkcie a.

19.a)

Wykaż, że F_a jest podprzestrzenią przestrzeni V

19.b)

Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, to $V = F_a + F_b$, ale suma ta nie jest prosta.

Zadanie 20

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz U i V jej podprzestrzeniami.

20.a)

Wykaż, że $U \cup V$ jest podprzestrzenią X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$.

20.b)

Sprawdź, czy $\operatorname{Lin}(U \cup V) = U + V$.