1. Macierze

Macierz o elementach ze zbioru K o wymiarach $m \times n$:

$$\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \ni (i, j) \to a_{ij} \in K$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Oznaczenia: $A = [a_{ij}] = [a_{ij}]_{m \times n}$

Macierz transponowana do macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ to $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$, gdzie $b_{ij} = a_{ji}$

Macierz zerowa $\mathbf{0}_{m \times n}$: $a_{ij} = \mathbf{0}$

2. Macierz kwadratowa

Macierz kwadratowa: $n = m$, $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$

Przekątna główna: $a_{ii}, i = 1, 2, ..., n$.

Macierz diagonalna to macierz, w której wszystkie elementy poza przekątną główną są 0.

Macierz jednostkowa I_n to macierz diagonalna, w której na przekątnej głównej są tylko 1.

W **macierzy trójkątnej górnej** wszystkie elementy pod przekątną główną to 0.
W **macierzy trójkątnej dolnej** wszystkie elementy nad przekątną główną to 0.

Macierz A jest **symetryczna** $\Leftrightarrow A = A^T$.

3. Działania na macierzach

Równość macierzy:
$[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{l \times p} \Leftrightarrow m = l \land n = p \land \forall i \in \{1, ..., m\} \forall j \in \{1, ..., n\} : a_{ij} = b_{ij}$

Dodawanie macierzy:
$[\mathrm{a}_{ij}]_{m \times n} = [\mathrm{b}_{ij}]_{m \times n} := [\mathrm{c}_{ij}]_{m \times n}, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}$

Mnożenie macierzy przez skalar:
$A = [a_{ij}] \Rightarrow \alpha A = [\alpha a_{ij}]$

Mnożenie dwóch macierzy:
Zał: $A = [a_{i,j}]_{m \times p}, B = [b_{ij}]_{p \times n}$

$$A \cdot B := [\mathrm{c}_{ij}]_{m \times n}, \text{gdzie } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

4. Własności działań na macierzach

$M_{m \times n}(K)$ - **zbiór macierzy $m \times n$**, o elementach z ciała przemiennego $K, |K| \geq 2$

- $(M_{m \times n}(K), K, +, \cdot)$ to **przestrzeń wektorowa**.
- $\exists I' : \forall A \in M_{m \times n}(K) : \boldsymbol{I' \cdot A = A}$ $(I' = I_m)$
- $\exists I'' : \forall A \in M_{m \times n}(K) : \boldsymbol{A \cdot I'' = A}$ $(I'' = I_n)$

O ile działania są wykonalne:
$A, B, C \in M_{m \times n}(K), \alpha \in K$

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

5. Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy 2×2
$A = [a_{i,j}]_{2 \times 2}$

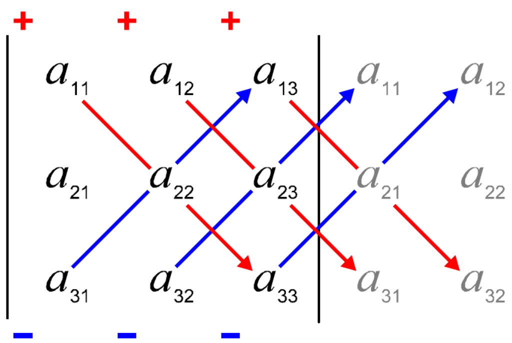
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$|\det A|$ - **pole równoległoboku** rozpiętego przez $(a_{11}, a_{12}) : (a_{21}, a_{2,2})$

Wyznacznik macierzy 3×3 - metoda Sarrusa

$A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



$|\det A|$ - **objętość równoległościanu** rozpiętego przez wektory tworzące wiersze A.

Permutacja zbioru n-elementowego - każde bijektywne odwzorowanie tego zbioru na siebie.
S_n - zbiór wszystkich permutacji zbioru $\mathbb{N}_n := \{1, 2, ..., n\}$

Dwa elementy permutacji σ tworzą **inwersję** $\Leftrightarrow i < j \land \sigma(i) > \sigma(j)$.
Znak permutacji: $\varepsilon(\sigma) := (-1)^{[\sigma]}$, gdzie $[\sigma]$ to liczba inwersji w permutacji.
Permutacji σ jest **parzysta** $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = 1$
Permutacji σ jest **nieparzysta** $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = -1$

Każda **transpozycja** (zamiana miejscami) dwóch różnych elementów permutacji zmienia znak permutacji.

Wyznacznik macierzy kwadratowej

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

6. Własności wyznaczników macierzy

- $\boldsymbol{\det A^T = \det A}$
- $\boldsymbol{\det I = 1}$
- $\det[k_1, \ldots, \boldsymbol{k_i' + k_i''}, \ldots, k_n] = \det[k_1, \ldots, \boldsymbol{k_i'}, \ldots, k_n] \boldsymbol{+} \det[k_1, \ldots, \boldsymbol{k_i''}, \ldots, k_n]$, gdzie k_i to i-ta kolumna (analogicznie dla wierszy)
- $\det[k_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha k_i}, \ldots, k_n] = \boldsymbol{\alpha} \det[k_1, \ldots, \boldsymbol{k_i}, \ldots, k_n]$ (analogicznie dla wierszy)
- Dla $A = [\mathrm{a}_{ij}]_{m \times n}$, $\boldsymbol{\det(\alpha A) = \alpha^n A}$
- **Przestawienie dwóch wierszy** (kolumn) macierzy **zmienia znak** wyznacznika na przeciwny
- Wartość wyznacznika **nie zmieni się** jeśli do jakiegoś wiersza (kolumny) dodamy **kombinację liniową** pozostałych

$\boldsymbol{\det A = 0}$ jeśli ($\Leftarrow$ a nie $\Leftrightarrow$):
- jakiś wiersz lub kolumna jest zerowa
- macierz A ma dwa jednakowe wiersze (kolumny)
- jakiś wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową pozostałych

Twierdzenie Cauchy'ego:
Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n \times m}(K) : \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

7. Minory

Minor stopnia $\boldsymbol{k}$ macierzy $A_{m \times n}$ to **wyznacznik** dowolnej
podmacierzy kwadratowej $\boldsymbol{k \times k}$ powstałej z macierzy A poprzez wykreślenie z niej $n - k$ kolumn i $m - k$ wierszy.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ - macierz kwadratowa
Wyznacznik macierzy powstałej przez wykreślenie z A i-tego wiersza i j-tej kolumny to **$\boldsymbol{M_{ij}}$ - minor odpowiadający elementowi $\boldsymbol{a_{ij}}$** (stopnia $n - 1$).

8. Twierdzenie Laplace'a

Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} macierzy **kwadratowej** $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ to:
$A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$

Twierdzenie Laplace'a
$A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(K)$

$$\forall j \in \{1, ..., n\} : \det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$
$$\forall i \in \{1, ..., n\} : \det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów na przekatnej głównej.

9. Rząd macierzy

$A \in M_{m \times n}(K)$
Rząd macierzy $r(A)$ - maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn (lub wierszy), traktowanych jako wektory z K^m (lub K^n).

- $r(A) \leq \min\{m, n\}$
- $r(A^T) = r(A)$

Rząd dowolnej macierzy jest równy **największemu ze stopni niezerowych minorów** tej macierzy.

10. Postać schodkowa macierzy

Macierz ma postać schodkową, jeżeli
- wszystkie niezerowe wiersze występują kolejno od początku
- pierwsze niezerowe elementy (**schodki**) znajdują się w kolumnach o rosnących numerach
- lub macierz jest zerowa

Rząd macierzy schodkowej jest równy jej liczbie schodków.

Przykład: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Schodki to $1, 5$ i $7 \Rightarrow r(A) = 3$.

11. Operacje elementarne

Operacje elementarne **nie zmieniają rzędu** macierzy:
- **zamiana wierszy (kolumn)** miejscami
- **dodanie kombinacji liniowej** pozostałych wierszy do wiersza (kolumny)
- **pomnożenie przez skalar $\alpha \neq 0$** wiersza (kolumny)

12. Algorytm Gaussa

Każdą macierz można doprowadzić do postaci schodkowej nie zmieniając rzędu.

1. Znajdź pierwszą niezerową kolumnę j i pierwszy niezerowy w element a_{ij}.
2. Zamień wiersz i z wierszem pierwszym.

3. Wyzeruj pozostałe elementy z kolumny j dodając pierwszy wiersz przemnożony przez odpowiedni skalar do każdego wiersza.
4. Powtórz na macierzy od wiersza 2 i kolumny $j + 1$.

13. Macierz odwrotna

Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej A to taka macierz A^{-1} (też kwadratowa), że $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Jeżeli istnieje to A jest **macierzą odwracalną**. Wtedy:
- A^{-1} jest jednoznacznie określona
- **$\det A \neq 0 (\Leftrightarrow)$**
- $A^{-1} = (\det A)^{-1} (A^D)^T$, gdzie A^D to **macierz dopełnień algebraicznych** macierzy A.

$$A^D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz kwadratowa A jest **nieosobliwa (odwracalna)**, jeżeli **$\det A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$**.
Macierz kwadratowa A jest **osobliwa**, jeżeli **$\det A = 0$**.

$A, B \in M_{n \times n}(K)$ - macierze nieosobliwe, $\alpha \in K, \alpha \neq 0$.
- $A^{-1}, A^T, \alpha A, AB, A^n (n \in \mathbb{N}_+)$ też są **nieosobliwe**
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Macierz odwrotną można znaleźć np. przez algorytm Gaussa lub przez rozwiązanie układu równań.