Zadanie 1

Sprawdź jakie własności mają w $\mathbb{Z}$ następujące działania:

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

1.a)

$a \circ b = a - b$

1. ~~łączność~~: $(a-b)-c \neq a-(b-c)$
2. ~~element neutralny~~: $\exists e \in \mathbb{Z} : a-e = a = e-a \Rightarrow -e = 0 = e-2a$ sprzeczność
3. ~~element symetryczny~~: nie ma elementu neutralnego
4. ~~przemienność~~: $a-b = b-a \Rightarrow a = b$

1.b)

$a \circ b = a^2 + b^2$

1. łączność: $\left(a^2+b^2\right)+c^2 = a^2+\left(b^2+c^2\right)$
2. ~~element neutralny~~: $\exists e \in \mathbb{Z} : a^2+e^2 = a = e^2+a^2$ sprzeczność
3. ~~element symetryczny~~: nie ma elementu neutralnego
4. przemienność: $a^2+b^2 = b^2+a^2$

1.c)

$a \circ b = 2(a+b)$

1. ~~łączność~~: $2(2(a+b)+c) = 2(a+2(b+c))$
   $4a+4b+2c = 2a+4b+4c$ sprzeczność
2. ~~element neutralny~~: $\exists e \in \mathbb{Z} : 2(a+e) = a = 2(e+a) \Rightarrow 2e = -a$ sprzeczność
3. ~~element symetryczny~~: nie ma elementu neutralnego
4. przemienność: $2(a+b) = 2(b+a)$

1.d)

$a \circ b = -a - b$

1. ~~łączność~~: $-(-a-b)-c = -a-(-b-c)$ sprzeczność
2. ~~element neutralny~~: $\exists e \in \mathbb{Z} : -a-e = a = -e-a \Rightarrow e = -2a$ sprzeczność
3. ~~element symetryczny~~: nie ma elementu neutralnego
4. przemienność: $-a-b = -b-a$

Zadanie 2

W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie $x \circ y := x + y + xy$. Czy $(\mathbb{R}, \circ)$ jest grupą? Czy jest grupą para $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$?

1. łączność: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$
\begin{aligned}
(x + y + xy) + z + (x + y + xy)z &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\
x + y + xy + z + xz + yz + xyz &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz
\end{aligned}
$$

2. element neutralny: $\exists e \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \circ e = x = e \circ x$

$$
\begin{aligned}
x + e + xe = x &= e + x + ex \\
e + xe &= 0 \\
e(1 + x) &= 0 \\
e = 0 &\vee x = -1
\end{aligned}
$$

W $(\mathbb{R}, \circ)$ nie ma elementu neutralnego, czyli nie jest to grupa, ale w $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ jest element neutralny ($e = 0$).

3. element symetryczny: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : x \circ x' = 0 = x' \circ x$

$$
\begin{aligned}
x + x' + xx' &= 0 \qquad = x' + x + x'x \\
x'(1 + x) &= -x \\
x' &= \frac{-x}{1 + x}
\end{aligned}
$$

$(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ jest grupą.

Zadanie 3

W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie $x \circ y := x + y + 2$. Czy $(\mathbb{Z}, \circ)$ jest grupą?

1. łączność: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$
(x + y + 2) + z + 2 = x + (y + z + 2) + 2
$$

2. element neutralny: $\exists e \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x \circ e = x = e \circ x$

$$
\begin{aligned}
x + e + 2 = x &= e + x + 2 \\
e &= -2
\end{aligned}
$$

3. element symetryczny: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists x' \in \mathbb{Z} : x \circ x' = -2 = x' \circ x$

$$
\begin{aligned}
x + x' + 2 = -2 &= x' + x + 2 \\
x' &= -x - 4
\end{aligned}
$$

$(\mathbb{Z}, \circ)$ jest grupą.

Zadanie 4

Które z następujących zbiorów liczb są grupami:

4.a)

liczby wymierne ze względu na dodawanie, mnożenie

1. łączność:

$$(x + y) + z = x + y + z = x + (y + z)$$
$$(xy)z = xyz = x(yz)$$

2. element neutralny:

$$x + 0 = x = 0 + x$$
$$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$$

3. element symetryczny:

$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$
$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \cdot x, x \neq 0$$

$(\mathbb{Q}, +)$ jest grupą. $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nie jest, ale $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ jest.

4.b)

liczby niewymierne ze względu na dodawanie, mnożenie

1. łączność: analogicznie do **4.a)**
2. element neutralny:

$$x + e = x \Rightarrow e = 0 \notin \mathbb{IQ}$$
$$x \cdot e = x \Rightarrow x = 0 \vee e = 1 \notin \mathbb{IQ}$$

$(\mathbb{Q}, +)$ i $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nie są grupami.

4.c)

liczby zespolone o module równym 1 ze względu na mnożenie

$(X, \cdot)$, gdzie $X = \{e^{i\varphi} : \varphi \in \langle 0, 2\pi)\}$

1. łączność:

$$\left(e^{i\varphi_x} \cdot e^{i\varphi_y}\right) \cdot e^{i\varphi_z} = e^{i\left(\varphi_x + \varphi_y + \varphi_z\right)} = e^{i\varphi_x} \cdot \left(e^{i\varphi_y} \cdot e^{i\varphi_z}\right)$$

2. element neutralny:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\cdot 0} = \cdot e^{i\varphi} = e^{i\cdot 0} \cdot e^{i\varphi}$$

3. element symetryczny:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = e^{i\cdot 0} = e^{-i\varphi} \cdot e^{i\varphi}$$

$(X, \cdot)$ jest grupą.

> **4.d)**
>
> liczby zespolone o module równym 1 ze względu na następujące działanie: $z_1 \circ z_2 = |z_1| z_2$

$z_1 \circ z_2 = |z_1| z_2 = 1 \cdot z_2 = z_2$

1. łączność: $(x \circ y) \circ z = y \circ z = z = x \circ (y \circ z)$
2. element neutralny: $x \circ e = e \neq e \circ x = x$

$(X, \circ)$ nie jest grupą.

> **4.e)**
>
> liczby całkowite ze względu na odejmowanie

1. łączność: $(x - y) - z \neq x - (y - z)$

$(\mathbb{Z}, -)$ nie jest grupą.

> **Zadanie 5**
>
> Niech E_n będzie zbiorem wszystkich pierwiastków n-tego stopnia (w $\mathbb{C}$) z jedności. Udowodnij, że $(E_n, \cdot)$ jest grupą.

$E_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} : k = 0, ..., n - 1 \right\}$

1. łączność: $\forall x, y, z \in E_n : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, bo $x, y, z \in \mathbb{C}$
2. element neutralny: $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot 1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$
3. element symetryczny: $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}} = e^{i\frac{2n\pi}{n}} = e^{i\cdot 2\pi} = e^{i\cdot 0} = 1$

> **Zadanie 6**
>
> Niech D będzie zbiorem wszystkich całkowitych potęg liczby 2. Sprawdź (i uzasadnij) czy struktura $(D, \circ)$, gdzie $a \circ b := \frac{a\cdot b}{2}$, jest grupą.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

1. łączność:

$$\left(2^a \circ 2^b\right) \circ 2^c = \frac{\frac{2^a \cdot 2^b}{2} \cdot 2^c}{2} = 2^{a+b+c-2} = \frac{2^a \cdot \frac{2^b \cdot 2^c}{2}}{2} = 2^a \circ \left(2^b \circ 2^c\right)$$

2. element neutralny:

$$2^a \circ 2^1 = \frac{2^a \cdot 2^1}{2} = 2^a = \frac{2^1 \cdot 2^a}{2} = 2^1 \circ 2^a$$

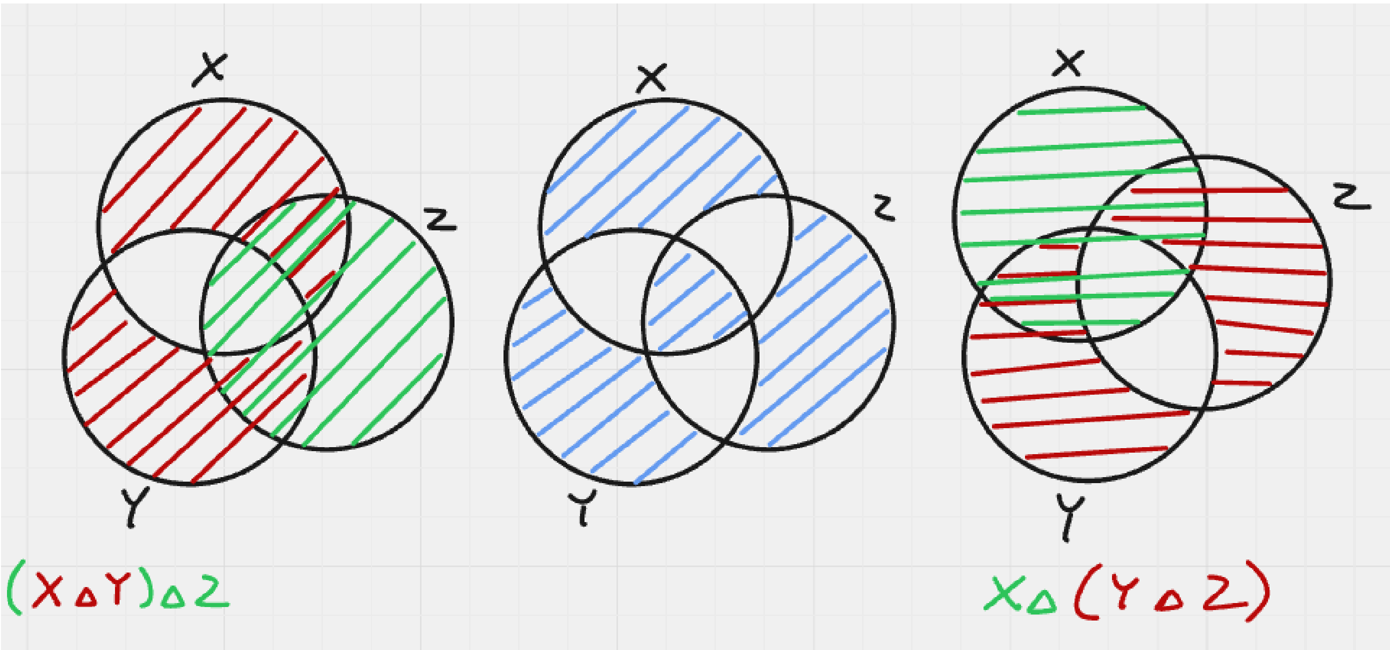
3. element symetryczny:

$$2^a \circ 2^{-a+2} = \frac{2^a \cdot 2^{-a+2}}{2} = \frac{2^2}{2} = 2^1$$

Zadanie 7

Niech $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj., dla dowolnych zbiorów A i B, $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sprawdź, czy dla dowolnie ustalonego zbioru $X \neq \emptyset$, para $(2^X, \triangle)$ jest grupą abelową.

1. łączność:



2. element neutralny: $\{\} \in 2^X$

$$\forall A \in 2^X : A \triangle \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A = \emptyset \triangle A$$

3. element symetryczny do $A \in 2^X$: A

$$A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

4. przemienność:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$$

Zadanie 8

Niech $(G, *)$ będzie grupą z elementem neutralnym e taką, że: $a * a = e$ dla każdego $a \in G$. Wykaż, że $(G, *)$ jest grupą abelową.

Niech $a, b \in G$

$$\begin{aligned}
(a * b) * (a * b)' &= e \\
a' * (a * b) * (a * b)' &= a' * e \\
(a' * a) * b * (a * b)' &= a' \\
e * b * (a * b)' &= a' \\
b * (a * b)' &= a' \\
b' * b * (a * b)' &= b' * a' \\
e * (a * b)' &= b' * a' \\
(a * b)' &= b' * a'
\end{aligned}$$

Ponadto, z faktu, że $a * a = e$ mamy:

$$\begin{aligned}
e = a * a' &= a * a \\
a' * a * a' &= a' * a * a \\
e * a' &= e * a \\
a' &= a
\end{aligned}$$

Czyli: $(a * b)' = a * b = b' * a' = b * a$

Zadanie 9

Czy następujące zbiory są ciałami ze względu na dodawanie i mnożenie:

9.a)

$\left\{a + b\sqrt[3]{5} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$

9.b)

liczby wymierne, które nie są całkowite

9.c)

zbiór liczb zespolonych postaci $a + ib\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}$

Zadanie 10

W zbiorze $\mathbb{Z}/k$ (tj. zbiorze ilorazowym ze względu na relację przystawania modulo k) określamy działania $+, \cdot$ następująco:

$$[a] + [b] = [a + b],\ [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

10.a)

Sprawdź, czy $(\mathbb{Z}/12, +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką ale z dzielnikami zera.

10.b)

Wykaż, że $(\mathbb{Z}/7, +, \cdot)$ jest pierścieniem całkowitym.

Zadanie 11

11.a)

Wykaż, że zbiór $A = \left\{x = a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem.

11.b)

Wykaż, że zbiór $B = \left\{x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.

11.c)

Udowodnij, że odwzorowanie $f : x = a + b\sqrt{3} \to \tilde{x} = a - b\sqrt{3}$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.

Zadanie 12

Dla danego zbioru $X \neq \emptyset$, definiujemy strukturę $(2^X, \triangle, \cap)$, gdzie „$\triangle$” oznacza różnicę symetryczną a „$\cap$” - przecięcie zbiorów. Sprawdź czy ta struktura jest:

12.a)

pierścieniem?

12.b)

pierścieniem przemiennym?

12.c)

pierścieniem z jednością?

12.d)

pierścieniem z całkowitym?

12.e)

ciałem?

Zadanie 13

W zbiorze $\mathbb{R}^2$ wprowadzamy działania: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + p y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ struktura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ jest ciałem?

Zadanie 14

14.a)

Wykaż, że zbiór $A = \{x = m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą ze względu na dodawanie.

14.b)

Wykaż, że zbiór $B = \{x = 2^n 3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą ze względu na mnożenie.

14.c)

Udowodnij, że A i B są izomorficzne.