

## Zadanie 1

Zbadaj rzędy następujących macierzy:

**1.a)**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} - 2w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \end{bmatrix} - 3w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

**1.b)**

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} + w_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} - w_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} - w_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} - w_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(B) = 4$$

**1.c)**

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - 2w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + w_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} + 2w_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} - 3w_3$$

$$r(C) = 4$$

1.d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 3w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{bmatrix} - 2w_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(D) = 2$$

## Zadanie 2

Wyznacz rzędy następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego  $p$ :

2.a)

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} - w_1 = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ p & -p & 0 & -p \\ p & 0 & -p & 0 \end{bmatrix} - w_1$$

Szukamy niezerowego minora o największym wymiarze.

$$W = \begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ p & -p & 0 \\ p & 0 & -p \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{z tw. Laplace'a}} =$$

$$p^2 \left( (1-p)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$p^2((1-p) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1) = p^2(4-p)$$

Jeżeli  $p \notin \{0, 4\}$  to  $W \neq 0$ , czyli znaleźliśmy niezerowego minora, więc  $r(A) = 3$ .

Jeżeli  $p = 0 \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

Jeżeli  $p = 4 \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} - w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & -8 & 16 \end{bmatrix} + 3w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + 2w_2$$

$$r(A) = 3$$

Ostatecznie  $r(A) = \begin{cases} 3, \text{ gdy } p \neq 0 \\ 1, \text{ gdy } p = 0 \end{cases}$

### 2.b)

$$B = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} p-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & 1 \end{vmatrix} = 3(p-1) - 1 - (p-1)^3 - 1$$

Niech  $t = p - 1$ . Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} 3t - 1 - t^3 - 1 &= 0 \\ t^3 - 3t + 2 &= 0 \\ (t-1)(t^2+t-2) &= 0 \\ (t-1)^2(t+2) &= 0 \\ t = 1 \vee t &= -2 \\ p = 2 \vee p &= -1 \end{aligned}$$

$$p = 2 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$$

$$\begin{aligned} p = -1 \Rightarrow B &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 2w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} - w_1 = \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 3 \end{aligned}$$

Ostatecznie  $r(B) = \begin{cases} 3, \text{ gdy } p \neq 2 \\ 2, \text{ gdy } p = 2 \end{cases}$

### Zadanie 3

Dla jakich wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ ,rząd macierzy jest najmniejszy, a dla jakich największy?

3.a)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= (-1-a)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (a+a^2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix} = \\ &= (1+a)(a-(-a)(-1)) - (a+a^2)(-2(-a)-a) = \\ &= (1+a) \cdot 0 - (a+a^2) \cdot a = -a^2(a+1) \end{aligned}$$

$a \notin \{-1, 0\} \Rightarrow$  wyznacznik jest niezerowy, więc rząd to 3.

$$a = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rząd to 2}$$

$$a = -1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rząd to 2}$$

Ostatecznie  $r(A) = \begin{cases} 3, \text{ gdy } a \notin \{-1, 0\} \\ 2, \text{ gdy } a \in \{-1, 0\} \end{cases}$

3.b)

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} + w_2 + w_3 + w_4 = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} - w_1 = \\ &\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^3 \end{aligned}$$

Jeżeli  $a \neq 1$  to całe  $B$  jest minorem niezerowym stopnia 4 czyli rząd  $B$  to 4.

$$a = 1 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 1$$

Ostatecznie  $r(B) = \begin{cases} 4, \text{ gdy } a \neq 1 \\ 1, \text{ gdy } a=1 \end{cases}$

#### Zadanie 4

Oblicz wyznacznik macierzy i jeśli jest ona nieosobliwa, znajdź macierz do niej odwrotną:

##### 4.a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| = 1 + 0 + 1 - 0 - 2 - 0 = 0$$

##### 4.b)

$$B = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(1+i) - 0 = 2 + 2i \neq 0$$

Macierz nie jest osobliwa, więc możemy znaleźć jej macierz odwrotną.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1+i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{2} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-1}{1+i} & \frac{1}{1+i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] + \frac{1}{1+i} w_2 = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{1+i} & \frac{1}{2+2i} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+i} & \frac{1}{2+2i} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{2-2i}{4+4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

##### 4.c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 + 1 + 1 = 3$$

Metoda Gaussa:

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] -w_1 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] -2w_2 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \cdot (-1) = \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right] +w_3 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right] -w_2 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right] \end{array}$$

Metoda dopełnień algebraicznych:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - (-1)) = 1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 - 1) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 0) = -1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 - 0) = 1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 0) = -1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 - 1) = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 - 0) = -1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - 1) = -1$$

$$C^{-1} = (\det C)^{-1} (C^D)^T = 3^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Metoda układem równań:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 0 = y_1 \\ x_1 + 0 + x_3 = y_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$3x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$$

$$x_2 = y_1 - x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$$

$$x_3 = y_2 - x_1 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**4.d)**

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -w_1 \\ -w_2 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

bo są dwa takie same wiersze

**4.e)**

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det E = 1 \cdot (-1)^{1+3} M_{13} + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} M_{33} + 0$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 12 - 0 - 6 + 9 = 9$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 8 + 2 + 2 - 16 - 6 = -22$$

$$\det E = 9 - 22 = -13$$

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] w_1 \leftrightarrow w_2 \\ = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] -4w_1 \\ -3w_1 \\ -2w_1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -7 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] -w_3 \\ = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -7 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] w_2 \leftrightarrow w_4 \\ = \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -7 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right] -3w_2 \\ = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 0 & -6 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & 1 & -10 & 6 & -6 \end{array} \right] 2w_3 - w_4 \\ = \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & 1 & -10 & 6 & -6 \end{array} \right] -7w_3 \\ = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -26 & 8 & 4 & -8 & -6 \end{array} \right] 13w_1 \\ 13w_2 \\ 13w_2 \\ \frac{1}{2}w_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 13 & -13 & 0 & 26 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -13 & 26 & 0 & 13 & -13 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 13 & -13 & -26 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 4 & 2 & -4 & -3 \end{array} \right] +2w_4 \\ = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 13 & -13 & 0 & 0 & 8 & 17 & -8 & -6 \\ 0 & 13 & -13 & 0 & 8 & 17 & -21 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -9 & -24 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 4 & 2 & -4 & -3 \end{array} \right] +w_3 \\ = \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 13 & -13 & 0 & 0 & 8 & 17 & -8 & -6 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -9 & -24 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 4 & 2 & -4 & -3 \end{array} \right] +w_2 \\ = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 13 & 0 & 0 & 0 & 7 & 10 & -7 & -2 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -9 & -24 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 4 & 2 & -4 & -3 \end{array} \right] \frac{1}{13}w_1 \\ \frac{1}{13}w_2 \\ \frac{1}{13}w_3 \\ \frac{-1}{13}w_4 \end{array} \end{array}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 7 & 10 & -7 & 2 \\ -1 & -7 & 1 & 4 \\ -9 & -24 & 22 & -3 \\ -4 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

4.f)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 & -w_5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 & -w_5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 & -w_5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 & -w_5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} + w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix} \cdot (-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow F^{-1} = F$$

4.g)

$$G_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\det G_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -w_n \\ -w_n \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} + w_1 + \dots + w_{n-1} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \begin{matrix} -w_n \\ -w_n \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} + w_1 + \dots + w_{n-1} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{matrix} \cdot (1-n) =$$

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 & \dots & 1-n \\ 0 & n-1 & \dots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-n & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 1-n & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{matrix} + w_n =$$

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{matrix} \cdot \frac{1}{n-1} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{2-n}{n-1} \end{matrix}$$

## Zadanie 5

Niech  $A$  będzie macierzą kwadratową. Udowodnij, że:

### 5.a)

jeżeli  $A^2 - A + I = 0$ , to  $A$  jest nieosobliwa i  $A^{-1} = I - A$ ;

$$\begin{aligned}
 A^2 - A + I &= 0 \\
 I &= A - A^2 \\
 I &= A \cdot I - A \cdot A = I \cdot A - A \cdot A \\
 I &= A \cdot (I - A) = (I - A) \cdot A
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$  jest odwracalna i  $I - A = A^{-1}$

### 5.b)

jeżeli  $A^k = 0$ , to  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$  (dla  $k \geq 1$ ).

$$\begin{aligned}
 (I - A) \cdot (I - A)^{-1} &= (I - A) \cdot (I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \\
 I &= (I - A)^k \\
 I^k &= (I - A)^k \\
 I &= I - A \\
 A &= 0 \\
 A^k &= 0
 \end{aligned}$$

### Zadanie 6

Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej  $A$  stopnia  $n$ , jeżeli:

### 6.a)

$$A^2 = A^T$$

$$\begin{aligned}
 \det A^2 &= \det A^T \\
 (\det A)^2 &= \det A \\
 \det A(\det A - 1) &= 0 \\
 \det A = 0 \vee \det A &= 1
 \end{aligned}$$

Sprawdźmy czy te wyznaczniki są osiągalne.

$$A = [0] \Rightarrow A^2 = [0] = A^T \wedge \det A = 0$$

$$A = [1] \Rightarrow A^2 = [1] = A^T \wedge \det A = 1$$

### 6.b)

$$A^T - A^{-1} = 0$$

$A$  jest odwracalna, więc  $\det A \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
A^T &= A^{-1} \\
\det A^T &= \det A^{-1} \\
\det A &= (\det A)^{-1} \mid \cdot \det A \\
(\det A)^2 &= 1 \\
\det A = 1 \vee \det A &= -1
\end{aligned}$$

Sprawdźmy czy te wyznaczniki są osiągalne.

$$\begin{aligned}
A = [1] \Rightarrow A^T &= [1] = A^{-1} \wedge \det A = 1 \\
A = [-1] \Rightarrow A^T &= [-1] = A^{-1} \wedge \det A = -1
\end{aligned}$$

### 6.c)

$$A^2 + A^{-1} = 0$$

$$\begin{aligned}
A^2 + A^{-1} &= 0 \\
A^2 &= -A^{-1} \\
\det A^2 &= \det -A^{-1} \\
(\det A)^2 &= -(\det A)^{-1} \mid \cdot \det A \\
(\det A)^3 &= -1 \\
\det A &= -1 \\
A = [-1] \Rightarrow A^2 + A^{-1} &= [1] + [-1] = [0]
\end{aligned}$$

### Zadanie 7

Sprawdź dla jakich wartości parametru rzeczywistego  $p$  macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & p & p \\ p & 1 & p & p \\ p & p & 1 & p \\ p & p & p & 1 \end{bmatrix} \text{ jest nieosobliwa.}$$

Wyznacz wymiar przestrzeni

$$\text{Lin}\{(1, p, p, p); (p, 1, p, p); (p, p, 1, p); (p, p, p, 1)\}$$

w zależności od parametru  $p$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & p & p & p \\ p & 1 & p & p \\ p & p & 1 & p \\ p & p & p & 1 \end{vmatrix} - w_1 = \begin{vmatrix} 1 & p & p & p \\ p-1 & 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 1-p & 0 \\ p-1 & 0 & 0 & 1-p \end{vmatrix} = (p-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & p & p & p \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(p-1)^3 \begin{vmatrix} 1+3p & p & p & p \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(p-1)^3(1+3p)$$

$$A \text{ jest nieosobliwa} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 1 \wedge p \neq -\frac{1}{3}$$

Rząd macierzy  $A$  to liczba niezależnych wierszy  $A$ , więc jest to również wymiar przestrzeni rozpiętej nad tymi wierszami.

Jeżeli  $p \neq 1 \wedge p \neq -\frac{1}{3}$  to  $\det A \neq 0$ , czyli wymiar to  $r(A) = 4$ .

Dla  $p = 1$  mamy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wszystkie wiersze są takie same, więc wymiar podprzestrzeni to  $r(A) = 1$ .

Dla  $p = -\frac{1}{3}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0$ , więc  $r(A) \neq 4$ . Sprawdźmy wyznacznik podmacierzy  $3 \times 3$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{16}{27} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

Więc wymiar podprzestrzeni to  $\begin{cases} 1, \text{ gdy } p=1 \\ 3, \text{ gdy } p=-\frac{1}{3} \\ 4 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

## Zadanie 8

Niech będzie dany następujący podzbiór  $N$  zbioru  $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ :

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Sprawdź, czy para  $(N, \cdot)$ , gdzie „ $\cdot$ ” oznacza mnożenie macierzy, jest grupą abelową.

$$\text{Niech } A = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} y & iy \\ -iy & y \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} z & iz \\ -iz & z \end{bmatrix} x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} y & iy \\ -iy & y \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy - i^2xy & ixy + ixy \\ -ixy - ixy & -i^2xy + xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & 2ixy \\ -2ixy & 2xy \end{bmatrix} \in N$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2xy & 2ixy \\ -2ixy & 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4xyz & 4ixyz \\ -4ixyz & 4xyz \end{bmatrix} = (A \cdot B) \cdot C$$

Działanie  $\cdot$  jest wewnętrzne i łączne. Widać też, że jest przemienne.

$$\exists E \in N : \forall A \in N : E \cdot A = A (?)$$

$$\text{Niech } A = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e & ie \\ -ie & e \end{bmatrix}, x, e \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$A \cdot E = \begin{bmatrix} 2xe & 2ixe \\ -2ixe & 2xe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

Istnieje element neutralny.

$$\forall A \in N : \exists A' \in N : A \cdot A' = E (?)$$

$$\text{Niech } A = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} x' & ix' \\ -ix' & x' \end{bmatrix}, x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$A \cdot A' = \begin{bmatrix} 2xx' & 2ixx' \\ -2ixx' & 2xx' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow x' = \frac{1}{4x} \neq 0$$

Każdy element  $N$  ma swój element odwrotny, więc  $(N, \cdot)$  to grupa abelowa.