LISTA 1 DE EJERCICIOS DE TOPOLOGÍA

1. Sean D^n y S^n el disco y la esfera unitaria usuales, y sea $\sim$ la relación de equivalencia definida por $x \sim y$ si y sólo si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$.
   1.1. Demuestre que $S^n \approx D^n/\partial D^n$
   1.2. Definimos $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := R^{n+1} - \{0\}/\sim$ (este espacio es llamado el espacio proyectivo real de dimensión n). Demuestre que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx S^n/\sim$.
   1.3. Sea $\sim_1$ la restricción de $\sim$ a ∂D^n. Demuestre que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx D^n/\sim_1$.
   1.4. Sea $T^2 := S^1 \times S^1$. Sea $\sim_2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $(x_1, x_2) \sim_2 (y_1, y_2)$ si y sólo si $x_1 - y_1$ y $x_2 - y_2$ son enteros. Demuestre que $T^2 \approx \mathbb{R}^2/\sim_2$.
2. Sean (X, x_0), (Y, y_0) espacios en $\mathbf{Top}_*$. Definimos el *wedge* de (X, x_0) y (Y, y_0), denotado por $X \vee Y$, como $X \coprod Y/\{x_0\} \sim \{y_0\}$. Demuestre que $X \vee Y \approx X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$.
3. Considere las esferas unitarias (S^2, e_1), (S^1, e_1) en $\mathbf{Top}_*$, donde e_1 denota el primer elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $S^2 \vee S^1$ es del tipo de homotopía del espacio obtenido al considerar la unión de S^2 y un segmento que une el polo norte y el polo sur.
4. Sea X en $\mathbf{Top}$. Sean $f, g : X \longrightarrow S^n$ dos mapeos tales que $f(x) \neq -g(x)$ $\forall x \in X$. Demuestre que $f \simeq g$.
5. Sea Y en $\mathbf{Top}$. Sea $f : S^n \longrightarrow Y$ un mapeo. Entonces f es nulhomotópico si y sólo si existe un mapeo $\bar{f} : D^{n+1} \longrightarrow Y$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\
D^{n+1} \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

6. Sea A un subespacio de X, y sea $I = [0, 1]$. Considere las siguientes definiciones:
   6.1. Decimos que A es un retracto de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A = 1_A$. Llamamos a r una retracción de X a A. Demuestre que el espacio peine visto en clase, C, no es un retracto de $I \times I$.
   6.2. Decimos que A es un retracto débil de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A \simeq 1_A$. Llamamos a r una retracción débil de X a A. Demuestre que C es un retracto débil de $I \times I$.

6.3. Decimos que A es un retracto por deformación fuerte de X si existe una retración $r : X \longrightarrow A$ tal que $ir \simeq 1_X$ rel A, donde $i : A \longrightarrow X$ es la inclusión. Llamamos a r una retracción por deformación fuerte de X a A. Demuestre que S^n es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

6.4. Decimos que A es un retracto por deformación de X si existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $ir \simeq 1_X$, donde $i : A \longrightarrow X$ es la inclusión. Llamamos a r una retracción por deformación de X a A. Demuestre que un retracto por deformación no necesariamente es un retracto por deformación fuerte.

6.5. Decimos que A es un retracto por deformación débil de X si la inclusión $i : A \longrightarrow X$ es una equivalencia homotópica. Demuestre que un retracto por deformación débil no necesariamente es un retracto por deformación.

7. Demuestre que S^n es un retracto de D^{n+1} si y sólo si S^n es contraíble.

8. Demuestre que un retracto de un espacio contraíble es contraíble.

9. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo. Definimos el cilindro de f como

$$\mathrm{Cyl}(f) = \frac{(X \times I) \coprod Y}{\sim},$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia inducida por $(x, 1) \sim y$ si y sólo si $f(x) = y$.

9.1. Sea X en **Top**. Definimos el cilindro de X como $\mathrm{Cyl}(X) = \mathrm{Cyl}(1_X)$. Demuestre que $\mathrm{Cyl}(X) \approx X \times I$.

9.2. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo. Definimos el cono de f como

$$\mathrm{Cone}(f) = \frac{\mathrm{Cyl}(f)}{X \times \{0\}} = \frac{(X \times I) \coprod Y}{\sim_1},$$

donde $\sim_1$ es la relación de equivalencia inducida por $(x, 1) \sim_1 y$ si y sólo si $f(x) = y$ y colapsar $X \times \{0\}$ a un punto.

9.3. Sea X en **Top**. Definimos el cono de X como $\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cone}(1_X)$. Demuestre que $\mathrm{Cone}(X) \simeq *$.

9.4. Determine el cono y el cilindro de S^n.

9.5. Sea $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $z \longmapsto z^2$. Demuestre que $\mathrm{Cyl}(f)$ es homeomorfo a la banda de Möbius y que $\mathrm{Cone}(f)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.