LISTA 2 DE EJERCICIOS DE TOPOLOGÍA

1. Sea X la unión de dos subconjuntos U y V 1-conexos tal que $U \cap V$ es no vacío y 0-conexo. Demuestre que X es 1-conexo.
2. Demuestre que S^1 no es un retracto de D^2.
3. De condiciones necesarias y suficientes para que, dado X 0-conexo, $\pi_1(X)$ sea abeliano. Las condiciones deben estar dadas en términos de morfismos de cambio de punto base.
4. Sea X 0-conexo. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.
   (1) X es 1-conexo.
   (2) Todo mapeo $f : S^1 \longrightarrow X$ se extiende a un mapeo $\bar{f} : D^2 \longrightarrow X$.
5. Sea X 0-conexo. Demuestre que si todo mapeo $f : S^1 \longrightarrow X$ es nulhomotópico, pero bajo homotopías que no necesariamente fijan el punto base, entonces $\pi_1(X) = 0$
6. Demuestre que el círculo frontera de la banda de Möbius no es un retracto de la banda de Möbius.
7. Sea X en Top y $A \subseteq X$ 0-conexo con $x_0 \in A$. Demuestre que el mapeo

   $$\pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

   inducido por la inclusión $A \hookrightarrow X$ es suprayectivo si y sólo si cada camino en X cuyos extremos pertenecen a A es homotópico a un camino en A.
8. Demuestre o refute: Todo mapeo inyectivo de espacios 0-conexos induce monomorfismos en grupos fundamentales.
9. Demuestre o refute: Todo mapeo suprayectivo de espacios 0-conexos induce epimorfismos en grupos fundamentales.
10. Dados espacios X y Y definimos el *join* de X y Y como

    $$X * Y = (X \times Y \times I)/\sim,$$

    donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por
    (1) $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ para todos $x \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$.
    (2) $(x_1, y, 0) \sim (x_2, y, 0)$ para todos $x_1, x_2 \in X$ y $y \in Y$.

    Demuestre que para X, Y espacios no vacíos, si X es 0-conexo, entonces $X * Y$ es 1-conexo.