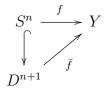
## LISTA 1 DE EJERCICIOS DE TOPOLOGÍA

- 1. Sean  $D^n$  y  $S^n$  el disco y la esfera unitaria usuales, y sea  $\sim$  la relación de equivalencia definida por  $x \sim y$  si y sólo si  $x = \lambda y$  para algún  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ .
  - 1.1. Demuestre que  $S^n \approx D^n/\partial D^n$
  - 1.2. Definimos  $\mathbb{R}P^n := R^{n+1} \{0\}/\sim$  (este espacio es llamado el espacio proyectivo real de dimensión n). Demuestre que  $\mathbb{R}P^n \approx S^n/\sim$ .
  - 1.3. Sea  $\sim_1$  la restricción de  $\sim$  a  $\partial D^n$ . Demuestre que  $\mathbb{R}P^n \approx D^n/\sim_1$ .
  - 1.4. Sea  $T^2 := S^1 \times S^1$ . Sea  $\sim_2$  en  $\mathbb{R}^2$  dada por  $(x_1, x_2) \sim_2 (y_1, y_2)$  si y sólo si  $x_1 y_1$  y  $x_2 y_2$  son enteros. Demuestre que  $T^2 \approx \mathbb{R}^2 / \sim_2$ .
- 2. Sean  $(X, x_0)$ ,  $(Y, y_0)$  espacios en  $\mathbf{Top}_*$ . Definimos el wedge de  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$ , denotado por  $X \vee Y$ , como  $X \coprod Y/\{x_0\} \sim \{y_0\}$ . Demuestre que  $X \vee Y \approx X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ .
- 3. Considere las esferas unitarias  $(S^2, e_1)$ ,  $(S^1, e_1)$  en  $\mathbf{Top}_*$ , donde  $e_1$  denota el primer elemento de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que  $S^2 \vee S^1$  es del tipo de homotopía del espacio obtenido al considerar la unión de  $S^2$  y un segmento que une el polo norte y el polo sur.
- 4. Sea X en **Top**. Sean  $f, g: X \longrightarrow S^n$  dos mapeos tales que  $f(x) \neq -g(x) \ \forall x \in X$ . Demuestre que  $f \simeq g$ .
- 5. Sea Y en **Top**. Sea  $f: S^n \longrightarrow Y$  un mapeo. Entonces f es nulhomotópico si y sólo si existe un mapeo  $\bar{f}: D^{n+1} \longrightarrow Y$  que hace el siguiente diagrama conmutativo:



- 6. Sea A un subespacio de X, y sea I = [0, 1]. Considere las siguientes definiciones:
  - 6.1. Decimos que A es un retracto de X si existe  $r: X \longrightarrow A$  tal que  $r|_A = 1_A$ . Llamamos a r una retracción de X a A. Demuestre que el espacio peine visto en clase, C, no es un retracto de  $I \times I$ .
  - 6.2. Decimos que A es un retracto débil de X si existe  $r: X \longrightarrow A$  tal que  $r|_A \simeq 1_A$ . Llamamos a r una retracción débil de X a A. Demuestre que C es un retracto débil de  $I \times I$ .

- 6.3. Decimos que A es un retracto por deformación fuerte de X si existe una retracción  $r: X \longrightarrow A$  tal que  $ir \simeq 1_X$  rel A, donde  $i: A \longrightarrow X$  es la inclusión. Llamamos a r una retracción por deformación fuerte de X a A. Demuestre que  $S^n$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{R}^{n+1} \{0\}$ .
- 6.4. Decimos que A es un retracto por deformación de X si existe una retracción  $r: X \longrightarrow A$  tal que  $ir \simeq 1_X$ , donde  $i: A \longrightarrow X$  es la inclusión. Llamamos a r una retracción por deformación de X a A. Demuestre que un retracto por deformación no necesariamente es un retracto por deformación fuerte.
- 6.5. Decimos que A es un retracto por deformación débil de X si la inclusión  $i:A\longrightarrow X$  es una equivalencia homotópica. Demuestre que un retracto por deformación débil no necesariamente es un retracto por deformación.
- 7. Demuestre que  $S^n$  es un retracto de  $D^{n+1}$  si y sólo si  $S^n$  es contraíble.
- 8. Demuestre que un retracto de un espacio contraíble es contraíble.
- 9. Sea  $f: X \longrightarrow Y$  un mapeo. Definimos el cilindro de f como

$$\operatorname{Cyl}(f) = \frac{(X \times I) \coprod Y}{\sim},$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia inducida por  $(x,1) \sim y$  si y sólo si f(x) = y.

- 9.1. Sea X en **Top**. Definimos el cilindro de X como  $\mathrm{Cyl}(X)=\mathrm{Cyl}(1_X)$ . Demuestre que  $\mathrm{Cyl}(X)\approx X\times I$ .
- 9.2. Sea  $f: X \longrightarrow Y$  un mapeo. Definimos el cono de f como

$$\operatorname{Cone}(f) = \frac{\operatorname{Cyl}(f)}{X \times \{0\}} = \frac{(X \times I) \coprod Y}{\sim_1},$$

donde  $\sim_1$  es la relación de equivalencia inducida por  $(x,1)\sim_1 y$  si y sólo si f(x)=y y colapsar  $X\times\{0\}$  a un punto.

- 9.3. Sea X en **Top**. Definimos el cono de X como  $\operatorname{Cone}(X) = \operatorname{Cone}(1_X)$ . Demuestre que  $\operatorname{Cone}(X) \simeq *$ .
- 9.4. Determine el cono y el cilindro de  $S^n$ .
- 9.5. Sea  $f: S^1 \longrightarrow S^1$  dada por  $z \longmapsto z^2$ . Demuestre que  $\mathrm{Cyl}(f)$  es homeomorfo a la banda de Möbius y que  $\mathrm{Cone}(f)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ .