LISTA 3 DE EJERCICIOS DE TOPOLOGÍA

1. Sea $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ un retracto tal que de $i_*(\pi_1(A))$ es normal en $\pi_1(X)$. Demuestre que $\pi_1(X) \cong \pi_1(A) \times (\pi_1(X)/i_*\pi_1(A))$.
2. Un grupo topológico G es un grupo con una topología tal que la operación de producto y la función que envía un elemento a su inverso son funciones continuas. Demuestre que si G es un grupo topológico 1-conexo y H es un subgrupo normal discreto, entonces
$$\pi_1(G/H, e) \cong H,$$
donde e es la identidad de G/H.
3. Sea X la unión de círculos de radio n en $\mathbb{R}^2$ con centro $(n, 0)$ con la topología de subespacio. Demuestre que $X \simeq \bigvee_{n=1}^{\infty} S^1$ y determine si son espacios homeomorfos o no.
4. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$ la unión de n rectas que pasan por el origen. Determine $\pi_1(\mathbb{R}^3 - X)$.
5. Sea $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \subseteq$ en $\mathbb{R}^m$ con X_i convexo para $i = 1, \ldots, n$. Demuestre que si las intersecciones de cualesquiera tres conjuntos X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3} son no vacías, entonces X es 1-conexo. Determine si el resultado es válido si se pide solamente que las intersecciones a pares sean no vacías.
6. Sea G un grupo. Demuestre que existe al menos un espacio X tal que $\pi_1(X) \cong G$.
7. Demuestre que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos si $n \neq 2$.
8. Demuestre que cualquier autohomeomorfismo del disco D^2 envía S^1 a S^1.
9. Determine el grupo fundamental de la botella de Klein.
10. Determine el grupo fundamental de $\mathbb{RP}^2$.
11. Demuestre que S^n es 1-conexo para $n > 1$.