LISTA 1 DE EJERCICIOS DE TOPOLOGÍA

1. Sean D^n y S^n el disco y la esfera unitaria usuales, y sea $\sim$ la relación de equivalencia definida por $x \sim y$ si y sólo si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$.
   1.1. Demuestre que $S^n \approx D^n/\partial D^n$
   1.2. Definimos $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := R^{n+1} - \{0\}/\sim$ (este espacio es llamado el espacio proyectivo real de dimensión n). Demuestre que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx S^n/\sim$.
   1.3. Sea $\sim_1$ la restricción de $\sim$ a ∂D^n. Demuestre que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx D^n/\sim_1$.
   1.4. Sea $T^2 := S^1 \times S^1$. Sea $\sim_2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $(x_1, x_2) \sim_2 (y_1, y_2)$ si y sólo si $x_1 - y_1$ y $x_2 - y_2$ son enteros. Demuestre que $T^2 \approx \mathbb{R}^2/\sim_2$.
2. Sean (X, x_0), (Y, y_0) espacios en $\mathbf{Top}_*$. Definimos el *wedge* de (X, x_0) y (Y, y_0), denotado por $X \vee Y$, como $X \coprod Y/\{x_0\} \sim \{y_0\}$. Demuestre que $X \vee Y \approx X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$.
3. Considere las esferas unitarias (S^2, e_1), (S^1, e_1) en $\mathbf{Top}_*$, donde e_1 denota el primer elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $S^2 \vee S^1$ es del tipo de homotopía del espacio obtenido al considerar la unión de S^2 y un segmento que une el polo norte y el polo sur.
4. Sea X en $\mathbf{Top}$. Sean $f, g : X \longrightarrow S^n$ dos mapeos tales que $f(x) \neq -g(x)$ $\forall x \in X$. Demuestre que $f \simeq g$.
5. Sea Y en $\mathbf{Top}$. Sea $f : S^n \longrightarrow Y$ un mapeo. Entonces f es nulhomotópico si y sólo si existe un mapeo $\bar{f} : D^{n+1} \longrightarrow Y$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ D^{n+1} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

6. Sea A un subespacio de X, y sea $I = [0, 1]$. Considere las siguientes definiciones:
   6.1. Decimos que A es un retracto de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A = 1_A$. Llamamos a r una retracción de X a A. Demuestre que el espacio peine visto en clase, C, no es un retracto de $I \times I$.
   6.2. Decimos que A es un retracto débil de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A \simeq 1_A$. Llamamos a r una retracción débil de X a A. Demuestre que C es un retracto débil de $I \times I$.

6.3. Decimos que A es un retracto por deformación fuerte de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $ir \simeq 1_X$ rel A, donde $i : A \longrightarrow X$ es la inclusión. Llamamos a r una retracción por deformación fuerte de X a A.

6.4. Decimos que A es un retracto por deformación de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $ir \simeq 1_X$, donde $i : A \longrightarrow X$ es la inclusión. Llamamos a r una retracción por deformación de X a A.

6.5. Decimos que A es un retracto por deformación débil de X si la inclusión $i : A \longrightarrow X$ es una equivalencia homotópica.

7. Demuestre que un retracto por deformación débil no necesariamente es un retracto por deformación.

8. Demuestre que un retracto por deformación no necesariamente es un retracto por deformación fuerte.

9. Demuestre que S^n es un retracto de D^{n+1} si y sólo si S^n es contraíble.

10. Demuestre que un retracto de un espacio contraíble es contraíble.

11. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo. Definimos el cilindro de f como

$$\mathrm{Cyl}(f) = \frac{(X \times I) \coprod Y}{\sim},$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia inducida por $(x, 1) \sim y$ si y sólo si $f(x) = y$.

11.1. Sea X en **Top**. Definimos el cilindro de X como $\mathrm{Cyl}(X) = \mathrm{Cyl}(1_X)$. Demuestre que $\mathrm{Cyl}(X) \approx X \times I$.

11.2. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo. Definimos el cono de f como

$$\mathrm{Cone}(f) = \frac{\mathrm{Cyl}(f)}{X \times \{0\}} = \frac{(X \times I) \coprod Y}{\sim_1},$$

donde $\sim_1$ es la relación de equivalencia inducida por $(x, 1) \sim_1 y$ si y sólo si $f(x) = y$ y colapsar $X \times \{0\}$ a un punto.

11.3. Sea X en **Top**. Definimos el cono de X como $\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cone}(1_X)$. Demuestre que $\mathrm{Cone}(X) \simeq *$.

11.4. Determine el cono y el cilindro de S^n.

11.5. Sea $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $z \longmapsto z^2$. Demuestre que $\mathrm{Cyl}(f)$ es homeomorfo a la banda de Möbius y que $\mathrm{Cone}(f)$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^2$.