



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ANILLOS DE SECCIONES SOBRE ALGUNAS CURVAS Y  
SUPERFICIES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

DANIEL REYES CLEMENTE

TUTOR:

DR. QUENTIN GENDRON

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2025



*Te lo dedico a ti, buen hombre inocente*

# Agradecimientos

Agradecimientos al Dr. Quentin Gendron por ayudarme a terminar esta tesis, por sus observaciones que me ayudaron a entender este trabajo y por el tiempo valioso que me ha ofrecido. Aprecio mucho que me haya ayudado a ordenar más mi pensamiento matemático.

Agradecimientos especiales al Dr. Juan Salvador Garza Ledesma, quien me propuso este tema interesante de tesis y quien inicialmente asesoró todos los capítulos de este trabajo. Gran parte del trabajo matemático del Dr. Juan Salvador Garza Ledesma inspiró y ayudó a la redacción de esta tesis. Muchas gracias por enseñarme el fantástico mundo de la geometría birracional.

# Introducción

El propósito de esta tesis es comprender en profundidad las técnicas de anillos de secciones utilizadas en el trabajo de Bauer, Catanese y Pignatelli, titulado *The Moduli Space of Surfaces with  $K^2 = 6$  and  $p_g = 4$*  [BCP], donde se estudia una deformación de estratos dentro del espacio moduli de superficies canónicas de tipo general con los invariantes mencionados.

Para alcanzar este objetivo, en los primeros tres capítulos se desarrolla la teoría y las construcciones de anillos de secciones sobre algunas curvas de género menor o igual a tres. En el último capítulo, en virtud del *principio de secciones hiperplanares*, se estudian las técnicas de anillos de secciones sobre las secciones hiperplanares (curvas) de dos tipos de superficies canónicas de tipo general, con el fin de mostrar rigurosamente la existencia de la deformación mencionada.

La importancia de dominar estos métodos radica en que permiten obtener una clasificación más precisa de estos objetos geométricos, más allá del célebre teorema de Enriques–Kodaira. En particular, la monografía del Dr. Garza [Garza] plantea una conjetura sobre la conexidad del espacio moduli de interés, basada en estas técnicas. Un posible problema abierto a futuro es demostrar dicha conjetura.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1 Formalismos básicos</b>	<b>1</b>
§1.1 Notación, definiciones y fórmulas . . . . .	1
§1.1.1 El truco del haz libre de Castelnuovo . . . . .	10
§1.2 Anillos graduados . . . . .	12
§1.2.1 Teoremas estructurales para anillos de Gorenstein . . . . .	13
§1.3 Pergaminos racionales . . . . .	17
§1.3.1 El conjunto subyacente . . . . .	17
§1.3.2 Polinomios bihomogéneos . . . . .	18
§1.3.3 Grupo de Picard y Teoría de Intersección . . . . .	20
§1.3.4 Ejemplos . . . . .	24
<b>2 Curvas elípticas</b>	<b>29</b>
§2.1 Primer modelo . . . . .	29
§2.2 Segunda truncación . . . . .	34
§2.2.1 Geometría . . . . .	35
§2.3 Tercera truncación . . . . .	38
§2.3.1 Geometría . . . . .	39
§2.4 Cuarta truncación . . . . .	42
§2.4.1 Geometría . . . . .	44
§2.5 Quinta truncación . . . . .	46

§2.5.1 Geometría . . . . .	49
<b>3 Curvas de género 2 y 3</b>	<b>54</b>
§3.1 ¿Cómo son las funciones racionales de un sistema lineal hiperelíptico? . .	54
§3.2 Anillo canónico para una curva de género 2 . . . . .	56
§3.2.1 Construcción geométrica . . . . .	60
§3.3 Anillo canónico para una curva de género 3 . . . . .	61
§3.3.1 Caso no hiperelíptico . . . . .	62
§3.3.2 Caso hiperelíptico . . . . .	65
§3.4 Otro modelo de curva de género 3 . . . . .	68
<b>4 Superficies de tipo general</b>	<b>77</b>
§4.1 Clasificación clásica de superficies . . . . .	77
§4.2 Problemas móduli en superficies de tipo general . . . . .	81
§4.3 Los métodos de los anillos graduados . . . . .	82
§4.4 Superficies de tipo general con $K^2 = 6$ y $p_g = 4$ . . . . .	84
§4.4.1 La degeneración $II \rightarrow III_b$ . . . . .	85
§4.4.2 ¿Qué falta por estudiar en el espacio moduli $\mathcal{M}_{6,4}$ ? . . . . .	93

# Capítulo 1

## Formalismos básicos

En este capítulo se presentarán las definiciones y los resultados básicos que utilizaremos en el resto de la tesis.

### 1.1. Notación, definiciones y fórmulas

En esta sección presentaremos la notación y los resultados elementales en teoría de curvas y superficies. **Los capítulos III, IV y V de [Hartshorne AG] y [Beauville] cubren estos requerimientos.** Nuestro campo base siempre será  $k = \mathbb{C}$ .

#### ■ Curvas y superficies

En esta tesis,  $X$  es una variedad irreducible, proyectiva y normal de dimensión  $n$ , salvo que se especifique lo contrario. Si  $n = 1$ ,  $X$  se llama *curva*, y se denota por  $C$ . Si  $n = 2$ ,  $X$  se llama *superficie*. Por nuestra suposición de normalidad, en curvas, estas resultan ser *no singulares*.

#### ■ Espacios ambiente

Sea  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ . Entonces, la notación

$$\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n),$$

es llamada *el espacio proyectivo torcido*, que está dado por el Proj del anillo  $k[x_0, \dots, x_n]$ ,

donde la graduación está inducida por la  $k^\times$ -acción en  $k^{n+1} \setminus \{0\}$ , dada por

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) \mapsto (\lambda^{a_0} x_0, \dots, \lambda^{a_i} x_i, \dots, \lambda^{a_n} x_n).$$

A la clase de un punto en  $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ , se le denotará como  $(x_0 : \dots : x_n)$ . Por ejemplo, en  $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ , tenemos

$$(2 : 0 : 3) = 3(2 : 0 : 3) = (6 : 0 : 27).$$

Al número  $a_i$  lo llamaremos *peso* de la variable  $x_i$ , denotado  $\text{wt}(x_i) = a_i$ . Cuando  $(a_0, \dots, a_n) = (1, \dots, 1)$ , recuperamos al espacio proyectivo  $n$ -dimensional usual, que simplemente se denotará por  $\mathbb{P}^n$ .

## ■ Divisores

Un *divisor de Weil* (o simplemente, *divisor*) en  $X$  (que en curvas, por nuestra suposición de normalidad, corresponde unívocamente con un *divisor de Cartier*, una gavilla invertible, etc.) es, simplemente, una suma formal de la forma

$$D = a_1 D_1 + a_2 D_2 + \dots + a_n D_n, \tag{1.1}$$

donde  $D_i \subset X$  son subvariedades de codimensión 1 y  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

Un divisor se llama *divisor efectivo*, si todos sus coeficientes  $a_i \in \mathbb{Z}$  son no negativos. Por practicidad, cuando esto ocurre, escribimos simplemente

$$D \geq 0.$$

El conjunto de subvariedades  $D_i$ , que aparecen en (1.1), se llama *soporte del divisor*  $D$ .

Más generalmente,  $D = \sum_i a_i D_i$  se llama  $\mathbb{Q}$ -*divisor* si  $a_i \in \mathbb{Q}$ . Su *redondeo* es el

divisor

$$\lfloor D \rfloor = \sum_i \lfloor a_i \rfloor D_i,$$

donde  $\lfloor \quad \rfloor$  es la función piso sobre  $\mathbb{Q}$ .

- **El grado de un divisor** es la suma de sus coeficientes:

$$\deg(D) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

- **Divisores principales**

Denotemos con  $k(X)$  al conjunto de todas las funciones racionales definidas sobre  $X$ . En el lenguaje de cohomología de gavillas tenemos

$$k(X) = H^0(C, \mathcal{O}_X).$$

El *divisor* de una función racional  $f \in k(X)$  es

$$\text{div}(f) = \sum_i a_i Z_i - \left( \sum_j b_j P_j \right),$$

donde los  $Z_i$  son los ceros de  $f$ , cada uno de multiplicidad  $a_i$  a lo largo de  $D_i$ , y los  $P_j$  son los polos de  $f$ , cada uno de multiplicidad  $b_j$  a lo largo de  $D_j$ . Dos hechos bien conocidos en curvas al respecto son:

- $\deg(\text{div}(f)) = 0$  (una función racional tiene, contando multiplicidades, el mismo número de ceros que de polos).
- Una función  $f \in k(C)$  es constante si, y sólo si, no tiene polos.

Un divisor se llama *divisor principal*, si es igual al divisor de una función racional.

- **Equivalencia lineal**

Dos divisores  $D_1, D_2$  en  $X$  son *linealmente equivalentes*, si  $D_1 - D_2$  es un divisor principal. Este hecho suele denotarse como  $D_1 \sim D_2$ . Es claro que esto define una

relación de equivalencia entre divisores.

Denotaremos como  $|D|$  a la clase de equivalencia lineal de  $D$ , a la cual llamaremos *sistema lineal*. Notemos que el conjunto de todos los divisores en  $X$ , denotado por  $\text{Div}(X)$ , es un grupo abeliano. Por ello, el grupo abeliano de clases divisoriales en  $C$ , se denota como

$$\text{Cl}(X) = \text{Div}(X)/\sim.$$

Cuando  $X$  es no singular,  $\text{Cl}(X)$  se puede intercambiar por  $\text{Pic}(X)$  y recibe el nombre de *grupo de Picard*.

### ■ La clase canónica

Sea  $X$  una variedad de dimensión  $n$  no singular. Sean  $z_1, \dots, z_n$  coordenadas algebraicas locales. Llamaremos *elemento local de volumen* a la forma diferencial  $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ . Sean  $f_1, f_2, \dots, f_n \in k(X)$  funciones racionales tales que  $k(f_1, \dots, f_n) \subset k(X)$  es una extensión algebraica finita.

Una  $n$ -forma racional sobre  $X$  es un elemento de la forma  $s = gdf_1 \wedge \cdots \wedge df_n$ , donde  $g \in k(X) \setminus \{0\}$ , y  $\Omega_{k(X)/k}^n$  es el módulo libre de rango 1 sobre  $k(X)$  de todas las  $n$ -formas racionales. Localmente, podemos comparar a  $s$  con el elemento local de volumen mediante un determinante jacobiano

$$s = gdf_1 \wedge \cdots \wedge df_n = J \cdot gdz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n, \quad \text{donde } J = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right).$$

Por el teorema de la función implícita, una elección distinta de coordenadas  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , induce una multiplicación de  $J$  por una constante no nula. Luego, los ceros y polos de  $J$  están bien definidos.

De aquí, tiene sentido definir el divisor de una  $n$ -forma racional como el divisor de  $J \cdot g$ . Dado que dos  $n$ -formas  $s, s'$  están relacionadas mediante  $s = hs'$ , con  $0 \neq h \in k(X)$  ( $s$  y  $s'$  son linealmente dependientes porque  $\Omega_{k(X)/k}^n$  es un  $k(X)$ -espacio vectorial de dimensión 1 ya que  $X$  es no singular), todos los divisores de dichas  $n$ -formas son linealmente equivalentes.

A la clase de equivalencia lineal del divisor de una  $n$ -forma diferencial no nula se le llama *clase canónica de  $X$* . A un divisor de esta clase  $\text{div}(s)$ , donde  $s$  es una  $n$ -forma diferencial, lo llamamos *divisor canónico*, y solemos denotarlo como  $K_X$ .

- **El espacio de Riemann-Roch de un divisor**

Sean  $C$  una curva y  $D$  un divisor definido en ella. *El espacio de Riemann-Roch* de  $C$  respecto a  $D$ , que en notación de cohomología de gavillas, se define como

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \{f \in k(C) \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Obsérvese que, si incluimos coeficientes negativos en  $D$ , estamos obligando a las  $f \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$  a tener ceros con la multiplicidad especificada en el punto elegido. Esto lleva a complicaciones obvias a la hora de querer definir un mapeo de la forma (1.1). Es por esta razón que, en adelante, *nos restringiremos a considerar divisores efectivos*.

Dado pues, un divisor efectivo  $D$ , estamos exigiendo que las funciones de  $H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$  tengan polos, a lo mucho, en los puntos y con las multiplicidades que prescriba  $D$ .

Resulta que  $H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$  es un  $k$ -espacio vectorial. Escribiremos  $H^i(D) = H^i(C, \mathcal{O}_C(D))$  y  $h^i(D) = \dim_k(H^i(D))$  para toda  $i \geq 0$ .

Más aún, cuando  $D$  es un  $\mathbb{Q}$ -divisor en  $C$ , el espacio de Riemann-Roch asociado a  $D$  es

$$H^0(\lfloor D \rfloor) = \{f \in k(C) \mid \text{div}(f) + \lfloor D \rfloor \geq 0\} \cup \{0\},$$

y mantenemos la teoría clásica de divisores de Weil.

- **Encajes de curvas**

Dada una curva  $C$  definida en forma abstracta, nos interesa tener funciones racio-

nales  $f_i : C \rightarrow k$  para eventualmente definir un mapeo

$$\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad P \xrightarrow{\varphi} (f_0(P) : f_1(P) : \cdots : f_n(P)),$$

y construir un modelo proyectivo concreto para  $C$ . Por la propiedad de que una función racional sin polos es constante, debemos admitir al menos un polo si deseamos encontrar dichos modelos.

De aquí en adelante, a menos que se especifique lo contrario, consideraremos divisores  $D$ , con  $h^0(D) \geq 2$ , que inducen un morfismo

$$\varphi_D : C \rightarrow \mathbb{P}^{h^0(D)-1}, \quad P \xrightarrow{\varphi_D} (x_1(P) : \cdots : x_{h^0(D)}(P)),$$

donde  $\{x_1, \dots, x_{h^0(D)}\}$  es una base de  $H^0(D)$ .

Se están excluyendo los casos en los que existan  $P_0 \in C$  tales que  $x_i(P_0) = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, h^0(D)$ , pues la clase del vector cero no está definido.

En este caso,  $|D|$  se dice que es *libre de puntos base*. Entonces, un divisor  $D$  se llama

- **Muy amplio**, si  $\varphi_D$  es un encaje.
- **Amplio**, si  $rD$  es muy amplio para algún  $r \in \mathbb{N}$ .
- **Curvas hiperelípticas**

Una curva  $C$  de género  $g \geq 2$  se llama *hiperelíptica*, si existe un morfismo  $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  inducido por un sistema lineal de grado 2 y dimensión 1, denominado por  $g_2^1$ . Una curva hiperelíptica viene dada en coordenadas afines por

$$y^2 = f(x).$$

Una *involución hiperelíptica*  $\iota : C \rightarrow C$  es un automorfismo que deja fijo a  $x$  y envía  $y \mapsto -y$ .

Un punto de *Weierstrass* es un punto de ramificación de  $\pi$ . Dado un divisor  $H$  de

la clase  $g_2^1$  (un divisor hiperelíptico), si  $P$  es de Weierstrass, entonces

$$H \sim 2P.$$

#### ■ Dualidad de Serre

Sea  $C$  una curva y  $D$  un divisor en  $C$ . Entonces, existe una función bilineal

$$\varphi : H^1(D) \times H^0(K_C - D) \rightarrow k,$$

que es *perfecta*: para toda  $v \in H^1(D)$ , existe  $w \in H^0(K_C - D)$  tal que  $\varphi(v, w) \neq 0$  y recíprocamente.

Por álgebra lineal, resulta que, esta función bilineal, induce el isomorfismo:

$$H^1(D) \cong H^0(K_C - D)^*.$$

En particular,

$$h^1(D) = h^0(K_C - D).$$

#### ■ El teorema de Riemann-Roch

La primera parte del *teorema de Riemann-Roch*, establece que:

- $h^0(D) \leq 1 + \deg(D)$ .
- $h^0(D) \geq 1 - g + \deg(D)$ .

La última expresión es igualdad cuando  $\deg(D) \geq 2g - 1$ . En este caso,  $g$  es una constante que depende de la curva  $C$ . Es decir, es el número  $g = h^0(K_C)$  llamado *género* (geométrico o proyectivo) de  $C$ .

La versión completa del teorema de Riemann-Roch, precisa que ocurre esta misma expresión para divisores de grado *pequeño*:

Sean  $C$  una curva no singular y  $D$  un divisor efectivo. Entonces, la dimensión de

$H^0(D)$  está caracterizada por

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_C(D)) &= \chi(\mathcal{O}_C) + \deg(D) \\ h^0(D) - h^1(D) &= 1 - g + \deg(D).\end{aligned}$$

Por dualidad de Serre, finalmente tenemos

$$h^0(D) = 1 - g + \deg(D) + h^0(K_C - D). \quad (1.2)$$

Para una breve discusión histórica sobre la importancia de este resultado (que, de aquí en adelante, nos referiremos a él simplemente como RR), sugerimos leer [Reid, Capítulo B].

Como corolario de RR, tenemos

$$\deg(K_C) = 2g - 2. \quad (1.3)$$

Cuando  $D$  es un  $\mathbb{Q}$ -divisor en  $C$ , aplicamos RR a  $H^0(\lfloor D \rfloor)$ .

#### ■ Encajes proyectivos

Sea  $C$  una curva y  $D$  un divisor de  $C$ . Entonces,  $D$  es un divisor *muy amplio* si, y sólo si:

- Para todo  $P \in C$ ,

$$h^0(D - P) = h^0(D) - 1.$$

Esto equivale a que  $|D|$  sea *libre de puntos base*.

- Para cada  $P, Q \in C$ ,

$$h^0(D - P - Q) = h^0(D) - 2.$$

En este caso, se dice que  $|D|$  es libre y *separa puntos*.

- Para toda  $P \in C$ ,

$$h^0(D - 2P) = h^0(D) - 2.$$

En este caso, se dice que  $|D|$  separa direcciones tangentes.

#### ■ Teoría de intersección

Sean  $C \neq D$  dos divisores irreducibles en una superficie no singular  $X$ . Entonces:

- La multiplicidad de intersección es

$$m_P(C \cap D) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,P}/(f, g)),$$

donde  $P \in C \cap D$  y  $f, g$  son las ecuaciones locales de  $C, D$  en  $\mathcal{O}_{X,P}$ , respectivamente.

- Existe una función

$$(\_, \_) : \text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z},$$

tal que:

- $CD := (C, D) = \deg(\mathcal{O}_C(D))$ .
- Es bilineal y simétrica.
- Si  $C \sim C'$ , entonces  $CD = C'D$ .
- Si  $C, D \geq 0$  y no tienen componentes en común, entonces

$$CD = \sum_{P \in C \cap D} m_P(C \cap D).$$

- Si  $C$  es irreducible, entonces  $C^2 = \deg(\mathcal{O}_X(C))$ .

**Observación 1.1.1.** Dados  $C, D \in \text{Div}(X)$ , con  $X$  una superficie, restringir el divisor  $D$  a  $C$ , significa que tomaremos la gavilla invertible  $\mathcal{O}_C(D) = \mathcal{O}_X(D)|_C$ .

Esto significa que las secciones de  $X$  polarizadas por  $D$  vean su comportamiento a través de  $C$ . A veces lo denotaremos por  $D|_C$ .

- **Fórmula de adjunción**

Sea  $X$  una superficie no singular y  $C$  una curva de  $X$ . Entonces,

$$K_C = (K_X + C)|_C.$$

- **Fórmula de Riemann-Hurwitz**

Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo finito separable de curvas. Entonces,

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + R,$$

donde  $R = \sum_{P \in X} (z_P - 1)$  se llama *divisor de ramificación*, y  $z_P$  es un parámetro local de  $P$ .

- **Formas homogéneas**

El símbolo  $S^d(x_1, \dots, x_n)$  denota a los polinomios homogéneos de grado  $d$  en las variables  $x_i$ .

### 1.1.1. El truco del haz libre de Castelnuovo

En el resto de la tesis, utilizaremos continuamente una definición y un resultado que, si bien son contenido estándar en teoría de curvas, lo incluimos por considerarlo conveniente para los lectores no enfocados en esta área.

**Definición 1.1.1.** Sea  $C$  una curva y  $D$  un divisor en  $C$ . La clase lineal  $|D|$  se denomina *haz libre* si  $h^0(D) = 2$  y, para cualquier base  $\{s_1, s_2\} \subset H^0(C, D)$ , los divisores efectivos  $D_1 = \text{div}(s_1) + D$  y  $D_2 = \text{div}(s_2) + D$  tienen soportes ajenos.

**Lema 1.1.1. (*Truco del haz libre de Castelnuovo*)** *Sea  $C$  una curva y  $D \in \text{Div}(C)$  un haz libre. Si  $A \in \text{Div}(C)$  y  $s_1, s_2 \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$  forman una base con divisores*

$D_1 = \text{div}(s_1)$  y  $D_2 = \text{div}(s_2)$  tales que  $D = D_1 + D_2$  y soportes disjuntos, entonces

$$s_1 \cdot H^0(C, A) \cap s_2 \cdot H^0(C, A) = \left\{ s_1 f = s_2 g \mid f = s_2 c, g = s_1 c, c \in H^0(C, A - D) \right\}.$$

*Demuestra*ción. Como  $D$  es un haz libre,  $s_1$  y  $s_2$  generan  $H^0(C, D)$  y sus divisores  $D_1, D_2$  tienen soportes disjuntos. Supongamos que  $s_1 f = s_2 g$  en  $H^0(C, A + D)$ , con  $f, g \in H^0(C, A)$ . La función racional

$$c = \frac{f}{s_2} = \frac{g}{s_1}$$

está bien definida porque  $D_1$  y  $D_2$  no se intersecan. Al calcular los divisores:

$$\text{div}(c) + A = \text{div}(f) + A - \text{div}(s_2) \geq A - D_2,$$

$$\text{div}(c) + A = \text{div}(g) + A - \text{div}(s_1) \geq A - D_1.$$

Como  $D_1 + D_2 = D$  y los soportes son disjuntos, ambas desigualdades implican  $\text{div}(c) + A \geq A - D$ . Por lo tanto,  $c \in H^0(C, A - D)$ , y así  $f = s_2 c$ ,  $g = s_1 c$ .  $\square$

**Corolario 1.1.1.** *Bajo las hipótesis del Lema 1.1.1, el núcleo del mapeo de multiplicación:*

$$\mu : H^0(C, D) \otimes_k H^0(C, A) \rightarrow H^0(C, A + D),$$

dado por  $s \otimes f \mapsto sf$ , satisface

$$\text{Ker}(\mu) \cong H^0(C, A - D).$$

*Demuestra*ción. Un elemento  $\sum_{i,j} a_{ij} s_i \otimes f_j$  está en  $\text{Ker}(\mu)$  si, y sólo si,  $\sum_{i,j} a_{ij} s_i f_j = 0$ . Por el Lema 1.1.1, esto ocurre cuando cada término  $s_i f_j - s_j f_i$  se anula, lo cual equivale a  $f_j = s_j c$  y  $f_i = s_i c$  para algún  $c \in H^0(C, A - D)$ . Así, el núcleo está generado por elementos de la forma  $s_1 \otimes s_2 c - s_2 \otimes s_1 c$ , correspondientes biyectivamente a  $c \in H^0(C, A - D)$ .  $\square$

## 1.2. Anillos graduados

En esta sección, introduciremos la terminología estándar de los anillos graduados. Los lectores interesados en profundizar en este sentido, pueden consultar [ABR]. En general, dada una variedad proyectiva irreducible  $X$  y un divisor amplio  $D$ , definimos el anillo graduado  $R(X, D)$  como sigue

$$\begin{aligned} R(X, D) &= \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nD). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Como  $D$  es amplio,  $R(X, D)$  es finitamente generado. Entonces, tenemos un encaje natural

$$X \hookrightarrow \text{Proj}R(X, D).$$

En este caso, decimos que  $X$  está polarizada por el divisor  $D$ .

Si  $X \subset \mathbb{P}^d$  y  $D$  es el divisor inducido por una sección hiperplanar, entonces  $R(X, D)$  es el anillo de coordenadas homogéneas de  $X \subset \mathbb{P}^d$ .

Sea  $R = R(X, D)$ , denotemos como  $R_n$  a la pieza graduada  $n$ -ésima de  $R$ . El anillo graduado  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$  tiene *serie de Hilbert*

$$P_R(t) := \sum_{n \geq 0} (\dim R_n) t^n.$$

Obsérvese que  $\dim R_n = h^0(nD)$ . Como veremos más adelante, la serie de Hilbert permite conjeturar rápidamente la cantidad de generadores, relaciones, sizigias, etc., de  $R$ .

El símbolo  $R(X, D)_{[d]}$  denota al subanillo  $R(X, D)_{[d]} \subset R(X, D)$  definido como sigue:

$$R(X, D)_{[d]} = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, dnD).$$

Este anillo es llamado *d-ésima truncación de Veronese de  $R(X, D)$* . Utilizaremos el símbolo  $P_{R_{[d]}}(t)$  para denotar a la serie de Hilbert correspondiente.

Para un anillo graduado como en la igualdad (1.4),

$$\text{Proj}(R(X, D)_{[d]}) \cong \text{Proj}(R(X, D))$$

para toda  $d > 1$ .

Este hecho se debe a que, un elemento homogéneo  $f \in R(X, nD)$  tiene potencia  $f^d \in R(X, D)_{[d]}$ . En este caso, el anillo de fracciones  $R(X, D)_{[d]}[\frac{1}{f^d}]$  es isomorfo a  $R(X, D)[\frac{1}{f}]$ , pues

$$\frac{h_i}{f^i} = \frac{f^{d-i}h_i}{f^d}$$

para toda potencia  $f^i \in R(X, D)_{[i]}$ .

Finalmente,  $\text{Proj}(R(X, D))$  y  $\text{Proj}(R(X, D)_d)$  son construidos tomando los elementos de grado cero de los anillos de fracciones previos y después tomando la construcción Spec.

### 1.2.1. Teoremas estructurales para anillos de Gorenstein

Gran parte de los problemas sobre la existencia y clasificación de variedades algebraicas se estudian mediante encajes en espacios proyectivos, preferiblemente con encajes definidos por un divisor amplio determinado de forma intrínseca. Entonces, el *programa de anillos graduados*, estudia anillos de la forma

$$R(X, L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nL),$$

donde  $X$  es una variedad proyectiva propuesta de antemano, y  $L$  es un divisor amplio sobre ella.

Bajo condiciones permisivas (sobre el tipo de singularidades de  $X$  y las relaciones entre  $L$  y  $K_X$ ), el anillo  $R(X, L)$  resulta ser de *Gorenstein*, lo cual hace posible utilizar poderosas herramientas teóricas y computacionales de álgebra comutativa para estudiar la geometría birracional de  $X$ .

Es por ello que, en esta subsección, se harán algunas convenciones sobre los anillos que se trabajarán en esta tesis:

**Definición 1.2.1. (Anillos de Cohen–Macaulay)** (ver [Bruns, Capítulo 2, p. 57]) Sea  $(R, \mathfrak{m})$  un anillo local noetheriano. Se dice que  $R$  es *Cohen–Macaulay* si

$$\operatorname{depth}(R) = \dim(R).$$

Para un anillo  $R$  no necesariamente local, se dice que es Cohen–Macaulay si, para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $R$ , la localización  $R_{\mathfrak{m}}$  es un anillo Cohen–Macaulay.

**Definición 1.2.2. (Anillos de Gorenstein)** (ver [Bruns, Capítulo 3, p. 95]) Sea  $(R, \mathfrak{m})$  un anillo local noetheriano de dimensión  $n$  con campo residual  $k$ . Se dice que  $R$  es *Gorenstein* si, y sólo si,

1.  $R$  es Cohen–Macaulay, y

2. Se verifica que

$$\operatorname{Ext}_R^i(k, R) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n, \\ k & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Esta caracterización homológica equivale a que el módulo canónico de  $R$  sea isomorfo a  $R$ .

En el contexto de esta tesis,  $R$  siempre será de la forma  $R(X, L)$ , donde  $L$  es un divisor amplio de Cartier y  $X$  una variedad proyectiva. Más aún, todos los anillos presentados en los capítulos posteriores, resultarán ser de Gorenstein. Por ello, el siguiente resultado nos da una caracterización sencilla y geométrica de ser Cohen–Macaulay y de Gorenstein, que podemos tomar como una definición alternativa:

**Proposición 1.2.1.** *En un anillo graduado  $R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nL)$ , donde  $X$  es una variedad proyectiva y  $L$  es un divisor amplio de Cartier en  $X$ , se cumplen:*

1)  $R$  es Cohen–Macaulay si, y sólo si:

- i)  $h^i(X, nL) = 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y cada  $0 < i < \dim X$ .
- ii)  $h^0(X, nL) = 0$  para toda  $n < 0$ .

iii)  $h^{\dim X}(X, nL) = 0$  para  $n \gg 0$ .

2)  $R$  es de Gorenstein si, y sólo si, es de Cohen-Macaulay y  $K_X = \alpha L$ , para algún  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Véase [Hartshorne DT, Capítulo 3, p. 63]. □

Existen teoremas generales estructurales sobre anillos de Gorenstein de codimensión 2 y 3 que se mencionarán brevemente:

■ **Teorema de Serre** (ver [Serre] y [Eisenbud, Capítulo 18, p. 462])

Si  $R$  es un anillo local regular e  $I \subset R$  un ideal tal que  $R/I$  es de Gorenstein de codimensión 2, entonces  $R/I$  es una intersección completa

■ Sea  $M = (m_{ij})$  una matriz antisimétrica de  $2n \times 2n$  con entradas complejas. El *pfaffiano* de  $M$ , denotado  $\text{Pf}(M)$ , es un polinomio en las entradas  $m_{ij}$  de  $M$ , definido como

$$\text{Pf}(M) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n m_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)},$$

donde  $S_{2n}$  es el grupo simétrico de  $2n$  elementos y la suma se realiza solo sobre las permutaciones que satisfacen

$$\sigma(2k-1) < \sigma(2k) \quad \text{y} \quad \sigma(1) < \sigma(3) \cdots \sigma(2n-1).$$

Entonces, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema de Buchsbaum y Eisenbud** (ver [DB])

Sea  $R$  un anillo local regular e  $I$  un ideal de altura 3. Entonces, un ideal  $I$  es de Gorenstein si, y sólo si, existe una matriz antisimétrica  $M$  de tamaño  $(2n+1) \times (2n+1)$  con entradas en  $R$ , tal que  $I$  es generado por los pfaffianos de las submatrices de  $M$  de tamaño  $2n \times 2n$ .

Para cada  $k \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ , el  $k$ -ésimo pfaffiano  $\text{Pf}_k(M)$  se obtiene eliminando la  $k$ -ésima fila y columna de  $M$ , resultando en una submatriz  $M_k$  de tamaño  $2n \times 2n$ .

El pfaffiano  $\text{Pf}(M_k)$  genera un elemento de  $I$ . El conjunto de todos estos pfaffianos

$$I = (\text{Pf}_1(M), \text{Pf}_2(M), \dots, \text{Pf}_{2n+1}(M)),$$

forma un sistema de generadores de  $I$ . Estos pfaffianos satisfacen relaciones de dependencia generadas por las columnas de  $M$ , y garantizan que  $R/I$  es un anillo Gorenstein de codimensión 3.

El caso más sencillo, es cuando  $M$  es una matriz antisimétrica de  $5 \times 5$ , por lo que será conveniente introducir notación para los pfaffianos de sus submatrices de  $4 \times 4$ :

- Siempre se omitirá la diagonal de ceros y el bloque triangular inferior de una matriz antisimétrica. Así, por ejemplo, una matriz antisimétrica de  $5 \times 5$  se escribe como

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \\ a_{45} \end{pmatrix}.$$

- Se escribirá  $\text{Pf}_k$  para denotar al pfaffiano de la submatriz de  $4 \times 4$  obtenida luego de eliminar el  $k$ -ésimo renglón y columna de  $M$ . Entonces, el teorema de Buchsbaum y Eisenbud establece que, para el caso  $n = 2$ , los generadores del ideal  $I$  (módulo los signos  $\pm$ ) son los siguientes pfaffianos:

$$\begin{aligned} \text{Pf}_1 &= a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34} \\ \text{Pf}_2 &= a_{13}a_{45} - a_{14}a_{35} + a_{15}a_{34} \\ \text{Pf}_3 &= a_{12}a_{45} - a_{14}a_{25} + a_{15}a_{24} \\ \text{Pf}_4 &= a_{12}a_{35} - a_{13}a_{25} + a_{15}a_{23} \\ \text{Pf}_5 &= a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

### 1.3. Pergaminos racionales

Un *pergamo normal racional de dimensión 2* es un tipo de variedad que aparece en prácticamente todas las áreas de estudio en geometría algebraica, y que permite experimentar e ilustrar geométricamente muchos conceptos interesantes. Es por ello que dedicaremos una breve sección a discutirlos en términos elementales, pues nos ayudarán a ilustrar la geometría de algunas curvas hiperelípticas.

#### 1.3.1. El conjunto subyacente

Sean  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ . Denotamos por  $\mathbb{G}_m$  al grupo multiplicativo sobre un campo  $k$ . El *pergamo racional*  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_n)$  se define como el cociente de  $(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{A}^n \setminus \{0\})$  bajo la acción de  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ , dada por

$$(\lambda, \mu) \cdot (t_1, t_2; x_1, \dots, x_n) = (\lambda t_1, \lambda t_2; \mu \lambda^{-a_1} x_1, \dots, \mu \lambda^{-a_n} x_n),$$

donde  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ .

Un punto en  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_n)$  se denota por  $(t_1 : t_2; x_1 : \dots : x_n)$ , representando la órbita del punto bajo la acción. Por ejemplo, en  $\mathbb{F}(0, 2)$ , las equivalencias

$$(1 : 2; 3 : 4) = (2 : 4; 3 : 1) \quad (\text{escala } \lambda = 2, \mu = 1),$$

$$(1 : 2; 3 : 4) = (1 : 2; -9 : -12) \quad (\text{escala } \lambda = 1, \mu = -3),$$

ilustran cómo actúan  $\lambda$  y  $\mu$ :  $\lambda$  escala  $t_i$  y ajusta  $x_i$  con pesos  $\lambda^{-a_i}$ , mientras  $\mu$  escala globalmente todas las  $x_i$ .

La proyección  $\pi : \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathbb{P}^1$ , dada por  $(t_1 : t_2; x_1 : \dots : x_n) \mapsto (t_1 : t_2)$ , está bien definida porque la acción no altera la razón  $(t_1 : t_2)$ . La *fibra* sobre un punto fijo  $(t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^1$  es el conjunto de puntos

$$\pi^{-1}(t_1 : t_2) = \{(t_1 : t_2; x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \in k\} / \sim,$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia inducida por la acción de  $\mu \in \mathbb{G}_m$

$$(t_1 : t_2; x_1 : \dots : x_n) \sim (t_1 : t_2; \mu x_1 : \dots : \mu x_n).$$

Esto define un espacio proyectivo  $\mathbb{P}^{n-1}$  (cociente de  $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$  por escalamiento de  $\mu$ ).

### 1.3.2. Polinomios bihomogéneos

Un polinomio  $P(t_1, t_2; x_1, \dots, x_n)$  se llama *bihomogéneo de bigrado*  $(d, e)$  si satisface

$$P(\lambda t_1, \lambda t_2; \mu \lambda^{-a_1} x_1, \dots, \mu \lambda^{-a_n} x_n) = \lambda^d \mu^e P(t_1, t_2; x_1, \dots, x_n)$$

y los grados de  $P$  en las variables  $t_i$  y  $x_j$  están vinculados por los pesos  $a_i$ .

Un monomio genérico en  $t_1, t_2$  y  $x_1, \dots, x_n$  tiene la forma

$$t_1^{e_1} t_2^{e_2} x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n},$$

y es bihomogéneo de bigrado  $(d, e)$  si satisface

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n d_i = e & (\text{grado total en } x_j), \\ e_1 + e_2 = \sum_{i=1}^n a_i d_i + d & (\text{relación de pesos por la acción de } \lambda). \end{cases}$$

Bajo la acción  $(\lambda, \mu)$ , el monomio se escala como

$$\lambda^{e_1+e_2} \cdot (\mu \lambda^{-a_1})^{d_1} \cdots (\mu \lambda^{-a_n})^{d_n} = \lambda^{e_1+e_2 - \sum a_i d_i} \mu^{\sum d_i}.$$

Para que sea semi-invariante de peso  $(\lambda^d \mu^e)$ , se igualan exponentes

$$e_1 + e_2 - \sum a_i d_i = d, \quad \sum d_i = e.$$

Las funciones racionales en  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_n)$  son cocientes de polinomios bihomogéneos del mismo bigrado. Por ejemplo, el espacio vectorial de polinomios de grado 1 en  $t_1, t_2$  y

grado 0 en  $x_1, \dots, x_n$ , es bidimensional, con base  $\{t_1, t_2\}$ , y el cociente  $(t_1 : t_2)$ , define el morfismo de proyección  $\pi : \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathbb{P}^1$  ya que es invariante bajo la acción.

**Observación 1.3.1.** Si  $a_1, \dots, a_n > 0$ , el encaje  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_n) \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  se construye usando polinomios bihomogéneos de bigrado  $(a_i, 1)$  para cada  $x_i$ . Estos polinomios tienen la forma

$$S_{a_1}(t_1, t_2)x_1, \dots, S_{a_n}(t_1, t_2)x_n,$$

donde  $S_{a_i}(t_1, t_2) = \{t_1^{a_1}, t_1^{a_i-1}t_2, \dots, t_2^{a_i}\}$  es el espacio de polinomios homogéneos de grado  $a_i$  en  $t_1, t_2$ . Si  $a_1 = 2$ , las coordenadas asociadas a  $x_1$  son  $t_1^2x_1, t_1t_2x_1, t_2^2x_1$ .

La dimensión  $N$  del espacio proyectivo es

$$N = \sum_{i=1}^n (a_i + 1) - 1,$$

ya que cada  $S_{a_i}(t_1, t_2)$  aporta  $a_i + 1$  monomios. Por ejemplo, si  $a_1 = 0, a_2 = 2$ , las coordenadas son

$$t_1^0x_1 : t_1^0x_1 : t_1^2x_2 : t_1t_2x_2 : t_2^2x_2 \quad \Rightarrow \quad N = (0+1) + (2+1) - 1 = 4.$$

Así,  $\mathbb{F}(0, 2) \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ . El encaje  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_n) \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  es cerrado (definido por ecuaciones homogéneas) y preserva la estructura algebraica. Esto implica que los pergaminos son subvariedades proyectivas de  $\mathbb{P}^N$ , y por tanto, variedades algebraicas proyectivas [Reid, Capítulo 2, p. 17].

En virtud de la sección 1.3.1, la proyección  $\pi : \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathbb{P}^1$ , tiene fibras isomorfas a  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Fijando  $(t_1 : t_2)$ , o al restringirnos a una fibra  $\mathbb{P}^{n-1}$ , los términos  $t_1^{a_i-k}t_2^k$  se convierten en escalares fijos (no nulos). Por ejemplo, si  $t_1 = 1, t_2 = 0$ , las coordenadas se reducen a  $x_1, 0, \dots, 0$ . Las coordenadas del encaje para la fibra son combinaciones lineales de  $x_1, \dots, x_n$ . Esto define un *hiperplano lineal* en  $\mathbb{P}^N$ , ya que cada  $x_i$  está multiplicado por un escalar fijo (no todos cero). Por ejemplo, si  $a_1 = 0, a_2 = 2$ , el encaje es

$$(t_1 : t_2; x_1 : x_2) \mapsto [x_1 : t_1^2x_2 : t_1t_2x_2 : t_2^2x_2].$$

Fijando  $(t_1 : t_2) = (1 : 1)$ , la fibra se mapea a

$$[x_1 : x_2 : x_2 : x_2] \in \mathbb{P}^3,$$

que es un  $\mathbb{P}^1$  (hiperplano lineal) definido por las ecuaciones  $y_1 = y_2 = y_3$ .

### 1.3.3. Grupo de Picard y Teoría de Intersección

De aquí en adelante, nos ocuparemos del pergamo  $\mathbb{F}(0, a) := \mathbb{F}_a$ . Las pruebas subsecuentes, en general, son análogas a las discutidas en esta subsección.

Notemos que, cualesquiera dos fibras de la proyección  $\pi : \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$ , son linealmente equivalentes como divisores en  $\mathbb{F}_a$ . En efecto, dados dos fibras  $L_1, L_2 \cong \mathbb{P}^1$ , son el conjunto de ceros en  $\mathbb{F}_a$  de un par de formas lineales  $\ell_1, \ell_2 \in S^1(t_1, t_2)$ . Como es usual, denotaremos esto escribiendo  $L_i : (\ell_i = 0)$ .

Por construcción,  $\frac{\ell_1}{\ell_2}$  es una función con un cero y un polo simples en  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente, lo cual prueba nuestra afirmación:  $L_1 \sim L_2$ . Denotaremos con  $L \in \text{Pic}(\mathbb{F}_a)$  a la clase de las fibras de  $\pi$ .

Ahora, consideremos  $B : (x_1 = 0)$ . Llamaremos a  $B$  la *sección negativa* de  $\mathbb{F}_a$  y, abusando de la notación, usaremos el mismo símbolo para referirnos a su clase en  $\text{Pic}(\mathbb{F}_a)$ .

**Proposición 1.3.1.** *Con la notación previa, tenemos:*

$$\text{Pic}(\mathbb{F}_a) \cong \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}B.$$

*Demostración.* Notemos primero que  $L$  y  $B$  son linealmente independientes:

Supongamos que existen enteros  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tales que  $\alpha L + \beta B \sim 0$ . Esto implica que existe una función racional  $f \in k(\mathbb{F}_a)$  con  $\text{div}(f) = \alpha L + \beta B$ . Un polinomio bihomogéneo que define  $\alpha L$  tiene bigrado  $(\alpha, 0)$  (grado  $\alpha$  en  $t_1, t_2$  y 0 en  $x_1, x_2$ ). Un polinomio que define  $\beta B$  tiene bigrado  $(-\alpha\beta, \beta)$ , ya que  $B : (x_1 = 0)$  transforma como  $\mu\lambda^{-\alpha}x_1$ .

Para que  $\alpha L + \beta B$  sea principal, los bigrados deben cancelarse

$$(\alpha, 0) + (-\alpha\beta, \beta) = (0, 0) \implies \alpha - \alpha\beta = 0 \quad y \quad \beta = 0.$$

Esto fuerza  $\alpha = \beta = 0$ .

Sea  $X \subset \mathbb{F}_a$  un divisor irreducible de codimensión 1. Por la estructura de  $\mathbb{F}_a$ ,  $X$  es el divisor de ceros de un polinomio bihomogéneo  $f_{d,e}$  de bigrado  $(d, e)$ . La acción de  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$  implica que  $f_{d,e}$  se escala con un factor  $\lambda^d \mu^e$ .

Consideremos la función racional  $\frac{f_{d,e}}{t_1^{d+ae} x_2^e}$ . El monomio  $t_1^{d+ae} x_2^e$  tiene bigrado  $(d + ae, e)$ , por lo tanto, la acción de  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$  implica que  $t_1^{d+ae} \mapsto \lambda^{d+ae} t_1^{d+ae}$  y  $x_2^e \mapsto \mu^e \lambda^{-ae} x_2^e$ .

La función  $\frac{f_{d,e}}{t_1^{d+ae} x_2^e}$  tiene bigrado  $(0, 0)$ , ya que su escalamiento es  $\frac{\lambda^d \mu^e}{\lambda^d \mu^e} = 1$ , por lo que su divisor es

$$\text{div} \left( \frac{f_{d,e}}{t_1^{d+ae} x_2^e} \right) = X - ((d + ae)L + eB).$$

Esto muestra que  $X \sim (d + ae)L + eB$ , probando que  $\text{Pic}(\mathbb{F}_a)$  está generado por  $L$  y  $B$ .  $\square$

Por la observación anterior, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 1.3.2.** *Las fibras y la sección negativa de  $\mathbb{F}_a$  satisfacen las intersecciones  $L^2 = 0$ ,  $LB = 1$  y  $B^2 = -a$ .*

*Demostración.* Consideremos la clase de una fibra  $L$  y la sección negativa  $B$  de  $\mathbb{F}_a$ .

### 1) Autointersección $L^2 = 0$

Las fibras de  $\pi : \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$  son linealmente equivalentes y pueden desplazarse para ser disjuntas. En particular, si  $L_1$  y  $L_2$  son dos fibras distintas sobre puntos diferentes de  $\mathbb{P}^1$ , entonces

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset.$$

Como  $L_1 \sim L_2$ , la autointersección es  $L^2 = L_1 \cdot L_2 = 0$ .

### 2) Intersección $L \cdot B = 1$

La sección  $B$  corta cada fibra  $L$  en exactamente un punto. Fijando una fibra  $L_0 = \pi^{-1}((t_1 : t_2))$ , la intersección es

$$L_0 \cap B = \{(t_1 : t_2; 1 : 0)\} = \{P_0\}.$$

Esta intersección es transversal (multiplicidad 1), por lo que

$$L \cdot B = 1.$$

3) **Autointersección**  $B^2 = -a$

Consideremos la curva  $C = (x_1 = 0) \subset \mathbb{F}_a$ . Por construcción,  $C$  es un divisor en la clase  $aL + B$ , ya que:  $-x_1 = 0$  se anula cuando  $x_1$  se escala como  $\mu x_1$ , lo que introduce un término  $\mu^1 \lambda^{-a \cdot 0} = \mu$ , correspondiente al bigrado  $(0, 1)$ . - Para igualar el bigrado,  $C$  debe compensar la acción de  $\lambda$  en  $t_i$ , resultando en  $C \sim aL + B$ .

Como  $(x_1 = 0)$  y  $(x_2 = 0) = B$  no se intersectan (porque  $x_1$  y  $x_2$  no pueden anularse simultáneamente en  $\mathbb{F}_a$ ), tenemos

$$B \cdot C = 0.$$

Sustituyendo  $C \sim aL + B$ ,

$$B(aL + B) = 0$$

$$aLB + B^2 = 0$$

$$a + B^2 = 0$$

$$B^2 = -a.$$

□

**Proposición 1.3.3.** *Con la notación anterior, tenemos que el divisor canónico de un pergamo  $\mathbb{F}_a$  es*

$$K_{\mathbb{F}_a} \sim (-2 - a)L - 2B.$$

*Demostración.* Supongamos que el divisor canónico  $K_{\mathbb{F}_a}$  se escribe como

$$K_{\mathbb{F}_a} \sim \alpha L + \beta B,$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ . La fórmula de adjunción para una curva  $D \subset X$  en una superficie  $X$

afirma que

$$K_X D + D^2 = 2g(D) - 2,$$

donde  $g(D)$  es el género de  $D$ .

Supongamos que  $D = B$ . Entonces,

- $B \cong \mathbb{P}^1$ , por lo que  $g(B) = 0$ .
- $B^2 = -a$  (autointersección de la sección negativa).
- $K_{\mathbb{F}_a} \cdot B = \alpha(L \cdot B) + \beta(B \cdot B) = \alpha(1) + \beta(-a) = \alpha - a\beta$ .

Sustituyendo en la fórmula de adjunción,

$$\begin{aligned} (\alpha - a\beta) + (-a) &= 2(0) - 2 \\ \alpha - a\beta &= -2 + a. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Supongamos que  $D = L$ . Entonces,

- $L \cong \mathbb{P}^1$ , por lo que  $g(L) = 0$ .
- $L^2 = 0$  (las fibras no se autointersecan).
- $K_{\mathbb{F}_a} \cdot L = \alpha(L \cdot L) + \beta(B \cdot L) = \alpha(0) + \beta(1) = \beta$ .

Sustituyendo en la fórmula de adjunción,

$$\begin{aligned} \beta + 0 &= 2(0) - 2 \\ \beta &= -2. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\beta = -2$  en la igualdad (1.6),

$$\begin{aligned} \alpha - a(-2) &= -2 + a \\ \alpha + 2a &= -2 + a \\ \alpha &= -2 - a. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$K_{\mathbb{F}_a} \sim (-2 - a)L - 2B.$$

□

### 1.3.4. Ejemplos

1) **Teorema de Contracción de Castelnuovo:**

Sea  $Y$  una superficie no singular. Si  $C \subset Y$  es una curva tal que

- $C \cong \mathbb{P}^1$  (es una curva racional).
- $C^2 = -1$  (su autointersección es  $-1$ ).

Entonces, existe una superficie no singular  $X$  y un morfismo birracional  $\varphi : Y \rightarrow X$ , llamado *contracción*, que satisface

- $\varphi$  contrae  $C$  a un punto no singular  $p \in X$ .
- $\varphi|_{Y \setminus C} : Y \setminus C \rightarrow X \setminus \{p\}$  es un isomorfismo.

Equivalentemente,  $Y$  es el blow-up de  $X$  en el punto  $p$ , y  $C$  es la curva excepcional de la explosión.

Sea  $\mathbb{F}(1, 0)$ . El espacio de polinomios bihomogéneos de bigrado  $(0, 1)$  es

$$S^0(t_1, t_2)x_1 \oplus S^1(t_1, t_2)x_2 = \{x_1, t_1x_2, t_2x_2\}.$$

Estos generan un sistema lineal que define el morfismo

$$f : \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad (t_1 : t_2; x_1 : x_2) \mapsto (x_1 : t_1x_2 : t_2x_2).$$

Observemos que

$$B = f^{-1}(1 : 0 : 0) = \{(t_1 : t_2; 1 : 0) \mid (t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^1\} \cong \mathbb{P}^1 \quad \text{y} \quad B^2 = -1.$$

Por lo tanto, la curva  $B \subset \mathbb{F}_1$  está en las hipótesis del teorema de Contracción de Castelnuovo, lo cual implica que  $f$  es la contracción. Geométricamente, esto significa que  $\mathbb{F}_1$  se obtiene al explotar  $\mathbb{P}^2$  en un punto  $p = (1 : 0 : 0)$ , reemplazando  $p$  por una curva excepcional  $B \cong \mathbb{P}^1$ . La contracción  $f$  revierte este proceso, colapsando  $B$  de vuelta al punto  $p$  y recuperando  $\mathbb{P}^2$ .

- 2) Sea  $\mathbb{F}_a = \mathbb{F}(0, a)$ . El sistema lineal  $|aL + B|$  corresponde a polinomios bihomogéneos de bigrado  $(0, 1)$  en  $\mathbb{F}_a$ . Una base para este espacio es

$$S^a(t_1, t_2)x_2 \oplus S^0(t_1, t_2)x_1 = \{t_1^a x_2, t_1^{a-1} t_2 x_2, \dots, t_2^a x_2, x_1\}.$$

El sistema lineal  $|aL + B|$  define un morfismo

$$\varphi_{aL+B} : \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^{a+1}, \quad (t_1 : t_2; x_1 : x_2) \xmapsto{\varphi_{aL+B}} (t_1^a x_2 : t_1^{a-1} t_2 x_2 : \dots : t_2^a x_2 : x_1).$$

Las coordenadas  $t_1^a x_2, t_1^{a-1} t_2 x_2, \dots, t_2^a x_2$  proyectivizan una curva racional normal de grado  $a$  en  $\mathbb{P}^a$ . En el caso de  $\mathbb{F}_a$ , el cono proyectivo

$$\overline{\mathbb{F}_a} = \left\{ \lambda \cdot (t_1^a x_2 : \dots : t_2^a x_2) + \mu \cdot (0 : \dots : 0 : x_1) \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \right\}$$

es la imagen del morfismo  $\varphi_{aL+B}$  sobre una curva racional normal de grado  $a$  en  $\mathbb{P}^{a+1}$ . La coordenada  $x_1$  añade un punto  $Q = (0 : \dots : 0 : 1)$ , que es el vértice de este cono. Más precisamente, para cada  $a > 1$ ,

$$\overline{\mathbb{F}_a} \cong \text{Proj}(k[y_0, \dots, y_{a+1}] / (y_i y_{j+1} - y_{i+1} y_j)_{0 \leq i < j \leq a-1})$$

Por construcción, la sección  $B = (x_1 = 0)$  se contrae al vértice del cono

$$\varphi_{aL+B}(B) = (0 : \dots : 0 : 1) =: Q \in \overline{\mathbb{F}_a},$$

y  $\varphi_{aL+B}$  induce un isomorfismo

$$\mathbb{F}_a \setminus B \cong \overline{\mathbb{F}_a} \setminus \{Q\}.$$

La curva  $B \subset \mathbb{F}_a$  cumple

$$B \cong \mathbb{P}^1 \quad \text{y} \quad B^2 = -a.$$

Si  $a = 1$ , por el teorema de Contracción de Castelnuovo, el morfismo  $\varphi_{aL+B}$  es una contracción que colapsa  $B$  a un punto no singular. Para  $a = 2$ ,  $\overline{\mathbb{F}_2}$  tiene una singularidad de *Du Val* [Reid, Capítulo 4, p. 81] de tipo  $A_1$  en  $Q$ , resuelta por la curva  $B^2 = -2$ . Cuando  $a \geq 3$ , la singularidad no pertenece a la clasificación ADE, pues se trata de un cono sobre una curva racional de grado  $a$ , cuya resolución requiere una curva excepcional  $B$  con autointersección  $B^2 = -a$ . En general,  $\mathbb{F}_a$  es la *resolución minimal* [Reid, Capítulo A, p. 27] del cono  $\overline{\mathbb{F}_a}$ , lo que significa que  $B \subset \mathbb{F}_a$  no puede contraerse más sin introducir nuevas singularidades. En la siguiente figura, la curva morada juega el papel de  $B$ , y esta representa la resolución del cono  $\mathbb{F}_a$ .

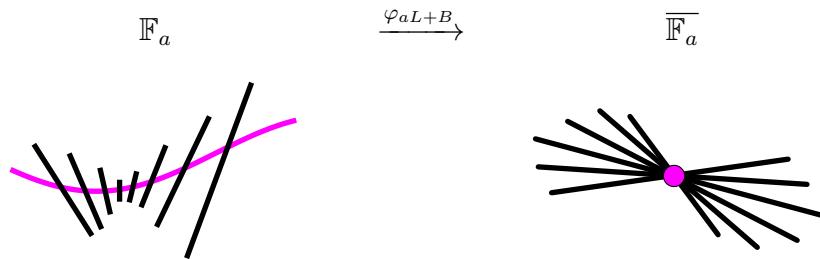


Tabla 1.1: Resolución del cono  $\overline{\mathbb{F}_a}$

Finalmente, mostraremos el siguiente resultado:

**Teorema 1.3.1.** *Sea  $\mathbb{F}_a$  un pergamino y  $C$  una curva hiperelíptica de género  $g$ . Entonces,*

la clase divisorial de  $C$  en  $\mathbb{F}_a$  es

$$C \sim (g + 1 + a)L + 2B,$$

donde  $L$  es la clase de una fibra de  $\pi : \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$ , y  $B : (x_1 = 0)$  es la sección negativa. En particular, el divisor canónico de  $C$  en  $\mathbb{F}_a$  resulta ser

$$K_C \sim (g - 1)L|_C.$$

*Demostración.* Sea  $C \subset \mathbb{F}_a$  una curva hiperelíptica. Por la proposición 1.3.1,

$$C \sim dL + eB$$

para algunos  $d, e \in \mathbb{Z}$ .

Como  $C \subset \mathbb{F}_a$  es hiperelíptica, la proyección  $\pi|_C : \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$  debe ser un morfismo de grado 2. Por lo tanto,

$$2 = \deg(\pi|_C) = \deg(\mathcal{O}_C(L)) = CL.$$

Entonces, por la proposición 1.3.2, tenemos

$$\begin{aligned} 2 &= CL = (dL + eB)L \\ &= (dL^2 + eBL) \\ &= e. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$K_C = (K_{\mathbb{F}_a} + C)|_C$$

por la fórmula de adjunción. Como  $K_{\mathbb{F}_a} \sim (-2 - a)L - 2B$ , entonces

$$K_C \sim ((d - a - 2)L + (e - 2)B)|_C.$$

Por ende,

$$C \sim dL + 2B \quad (1.7)$$

$$K_C \sim (d - a - 2)L|_C. \quad (1.8)$$

Tomando el grado de divisores en (1.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \deg(K_C) &= \deg((d - a - 2)L|_C) \\ 2g - 2 &= (d - a - 2)\deg(L|_C) \\ 2(g - 1) &= (d - a - 2)CL \\ &= (d - a - 2)(dL + 2B)L \\ &= 2(d - a - 2) \\ d &= g + 1 + a. \end{aligned}$$

En consecuencia, (1.7) satisface

$$C \sim (g + 1 + a)L + 2B.$$

En particular,

$$K_C \sim ((d - a - 2)L + (e - 2)B)|_C = (g - 1)L|_C.$$

□

# Capítulo 2

## Curvas elípticas

Una *curva elíptica* es una curva de género 1 con un punto  $P \in \mathbb{C}$  llamado *punto base* y se denotará por  $(E, P)$ .

Estudiaremos el anillo  $R(E, P)$  y sus truncaciones de Veronese  $R_{[r]}(E, P)$  para  $2 \leq r \leq 5$ , obteniendo varias de las más conocidas realizaciones geométricas de este tipo de curvas.

### 2.1. Primer modelo

**Lema 2.1.1.** *Sea  $(E, P)$  una curva elíptica,  $K_E$  su divisor canónico. Entonces:*

- 1)  $K_E \sim 0$  (el divisor cero corresponde a la gavilla invertible trivial  $\mathcal{O}_E$ ).
- 2) Para toda  $n \geq 1$ , se cumple que  $h^0(nP) = n$ .

*Demostración.*

- 1) Por definición,  $h^0(K_E) = g = 1$ . Por lo tanto, existe un único divisor (recordar que, todos los divisores de la clase canónica, son linealmente equivalentes) efectivo  $D$  tal que  $K_E \sim D$  y  $\deg(K_E) = 0$  por 1.3. Por lo tanto, necesariamente  $D \sim 0$ .

2) Sea  $P \in E$ . Por RR se satisface, para  $n \geq 1$ ,

$$h^0(nP) = 1 - g + \deg(nP) + h^0(K_E - nP).$$

Notemos que  $h^0(K_E - nP) = 0$ , pues  $\deg(K_E - nP) = -n < 0$ . Por lo tanto,

$$h^0(nP) = n.$$

□

Por el resultado anterior, la serie de Hilbert de  $R(E, P)$  es

$$\begin{aligned} P_{R(E,P)}(t) &= \sum_{m \geq 0} h^0(mP)t^m \\ &= 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + 6t^6 + 7t^7 + \dots \\ &= \frac{1 - t^6}{(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)}. \end{aligned}$$

Esta función racional da pistas del álgebra del anillo  $R(E, P)$ . El grado del numerador dice el grado del polinomio que define a  $R(E, P)$  como  $k$ -álgebra, mientras que el grado del denominador, dice los pesos de los generadores del anillo (para consultar una prueba de este hecho, ver [Bruns, Capítulo 4, p. 166] ). Por lo tanto, es esperado que

$$R(E, P) \cong k[x, y, z]/(f_6),$$

donde  $x, y, z$  tienen grados 1, 2 y 3, respectivamente, y  $f_6$  es un polinomio de grado 6. Más precisamente, tenemos:

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $(E, P)$  una curva elíptica. Entonces,*

$$R(E, P) \cong k[x, y, z]/(bx^6 + ax^4y + y^3 - z^2),$$

donde  $x, y, z$  son elementos con  $\deg(x) = 1$ ,  $\deg(y) = 2$ ,  $\deg(z) = 3$  y  $a, b \in k$ .

*Demostración.* Por el lema 2.1.1,  $h^0(0) = h^0(P) = 1$ . Por lo tanto, la curva  $(E, P)$  no admite funciones racionales con un polo simple. Sea  $\{x\}$  una base de  $H^0(P)$ . Por lo tanto,  $x$  debe ser una constante.

Sea  $\{x^2\} \subset H^0(2P)$ . Como  $h^0(2P) = 2$ , entonces debe existir alguna función racional  $y \in H^0(2P)$ , tal que  $\{x^2, y\}$  es una base de  $H^0(2P)$ . En particular, la función racional  $y$  tiene un polo doble en  $P$ , mientras que  $x^2$  no tiene polos por tratarse  $x$  de una constante.

Consideremos  $H^0(3P)$ . Tenemos  $\{x^3, xy\} \subset H^0(3P)$ . Por construcción,  $x^3$  y  $xy$  tienen, respectivamente, ningún polo y un polo doble en  $P$ . Como  $h^0(3P) = 3$ , el elemento que extiende a  $\{x^3, xy\}$  a una base de  $H^0(3P)$ , al cual llamaremos  $z \in H^0(3P) \setminus H^0(2P)$ .

Para grado 4, tenemos  $\{x^4, x^2y, xz, y^2\} \subset H^0(4P)$ . Supongamos que existen  $a_1, \dots, a_4$  constantes, no todas nulas, tales que

$$a_1x^4 + a_2x^2y + a_3xz + a_4y^2 = 0. \quad (2.1)$$

Notemos que  $x^4$  no tiene polos en  $P$ ,  $x^2y$  tiene un polo doble en  $P$ ,  $xz$  tiene un polo triple en  $P$  y  $y^2$  un polo de orden 4 en  $P$ . Por tanto, si la relación (2.1) se satisface, existirán funciones racionales con distintas multiplicidades en  $P$ . Un absurdo. Entonces,  $a_i = 0$  para toda  $1 \leq i \leq 4$ . Como  $h^0(4P) = 4$ , resulta que  $\{x^4, x^2y, xz, y^2\}$  es una base de  $H^0(4P)$ .

Por razones análogas,  $\{x^5, x^3y, x^2z, xy^2, yz\}$  es una base de  $H^0(5P)$ .

En grado 6, tenemos  $\{x^6, x^4y, x^3z, x^2y^2, xyz, y^3, z^2\} \subset H^0(6P)$  y  $h^0(6P) = 6$ . Por tanto, este conjunto es linealmente dependiente. Es decir, existen constantes  $c_1, \dots, c_7 \in k$

$$c_1x^6 + c_2x^4y + c_3x^2y^2 + c_4x^3z + c_5xyz + c_6y^3 + c_7z^2 = 0, \quad (2.2)$$

con al menos un  $c_i \neq 0$ . Debido a que  $y^3$  y  $z^2$  son las únicas funciones con un polo de orden 6 en  $P$ , se tiene  $c_6, c_7 \neq 0$ , por lo que mediante cambios de coordenadas de la forma

$z \mapsto \alpha z$ ,  $y \mapsto \beta y$ , podemos suponer que (2.2) es de la forma

$$c_1x^6 + c_2x^4y + c_3x^2y^2 + y^3 = z^2 - z(c_4x^3 + c_5xy). \quad (2.3)$$

Podemos ahora completar el cuadrado y hacer el cambio de coordenadas:

$$z \mapsto z + \frac{1}{2}(c_4x^3 + c_5xy).$$

Sustituyendo en (2.3), se tiene que

$$c_1x^6 + c_2x^4y + c_3x^2y^2 + y^3 - (z + \frac{1}{2}(c_4x^3 + c_5xy))^2 + (z + \frac{1}{2}(c_4x^3 + c_5xy))(c_4x^3 + c_5xy) = 0.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} c_1x^6 + c_2x^4y + c_3x^2y^2 + \frac{1}{4}c_4^2x^6 + \frac{1}{2}c_4c_5x^4y + \frac{1}{4}c_5^2x^2y^2 + y^3 - z^2 &= 0 \\ (c_1 + \frac{1}{4}c_4^2)x^6 + (c_2 + \frac{1}{2}c_4c_5)x^4y + (c_3 + \frac{1}{4}c_5)x^2y^2 + y^3 - z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, podemos reescribir a (2.3) como

$$z^2 = \alpha_1x^6 + \alpha_2x^4y + \alpha_3x^2y^2 + y^3, \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= c_1 + \frac{1}{4}c_4^2 \\ \alpha_2 &= c_2 + \frac{1}{2}c_4c_5 \\ \alpha_3 &= c_3 + \frac{1}{4}c_5. \end{aligned}$$

Similarmente, podemos hacer otro cambio de coordenadas

$$y \mapsto y - \frac{\alpha_3}{3}x^2,$$

para sustituir, finalmente, en (2.4) y obtener una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} z^2 &= \alpha_1 x^6 + \alpha_2 x^4 \left( y - \frac{\alpha_3}{3} x^2 \right) + \alpha_3 x^2 \left( y - \frac{\alpha_3}{3} x^2 \right)^2 + \left( y - \frac{\alpha_3}{3} x^2 \right)^3 \\ &= \alpha_1 x^6 - \frac{1}{3} \alpha_2 \alpha_3 x^6 + \alpha_2 x^4 y + \frac{2\alpha_3^3}{27} x^6 - \frac{1}{3} \alpha_3^2 x^4 y + y^3 \\ &= (\alpha_1 - \frac{1}{3} \alpha_2 \alpha_3 + \frac{2\alpha_3^3}{27}) x^6 + (\alpha_2 - \frac{1}{3} \alpha_3^2) x^4 y + y^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos una ecuación de la forma

$$bx^6 + ax^4 y + y^3 - z^2 = 0, \quad (2.5)$$

donde

$$\begin{aligned} b &= \alpha_1 - \frac{1}{3} \alpha_2 \alpha_3 + \frac{2\alpha_3^3}{27}, \\ a &= \alpha_2 - \frac{1}{3} \alpha_3^2. \end{aligned}$$

Para finalizar, veamos que no se necesitan más secciones y relaciones para generar a  $R(E, P)$ . Consideremos el mapeo producto

$$\varphi_n : H^0(2P) \otimes_k H^0(nP) \rightarrow H^0((n+2)P),$$

para toda  $n > 6$ . Sean  $D = 2P$  y  $A = nP$ . Entonces, por el corolario 1.1.1,

$$\ker(\varphi_n) \cong H^0(A - D) = H^0((n-2)P).$$

Luego, por el teorema rango-nulidad,

$$\begin{aligned} \text{rank}(\varphi_n) &= \dim_k(H^0(2P) \otimes_k H^0(nP)) - h^0((n-2)P) \\ &= 2n - (n-2) = h^0((n+2)P). \end{aligned}$$

Entonces,  $\varphi_n$  resulta ser suprayectiva, lo cual implica que no requerimos más secciones y

relaciones para generar el anillo  $R(E, P)$  como álgebra,  $\square$

Geométricamente,  $E \cong \text{Proj}(k[x, y, z]/(bx^6 + ax^4y + y^3 + z^2))$  es una séxtica no singular en el plano proyectivo torcido  $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ .

## 2.2. Segunda truncación

A partir de esta subsección, calcularemos los subanillos  $R(E, jP) = R(E, P)_{[j]}$  para  $2 \leq j \leq 5$ . Cada uno de ellos tienen aspectos algebro-geométricos interesantes que se irán destacando y todos pueden calcularse con relativa facilidad a partir de  $R(E, P)$ . Por la sección 1.2, tenemos que

$$\text{Proj}(R(E, P)_{[j]}) \cong \text{Proj}(R(E, P)).$$

Esto significa que hallaremos distintas presentaciones para la misma curva elíptica  $(E, P)$ .

La serie de Hilbert de la segunda truncación es

$$\begin{aligned} P_{R(E, P)_{[2]}} &= \sum_{m \geq 0} h^0(2mP)t^m \\ &= 1 + 2t + 4t^2 + 6t^3 + 8t^4 + 10t^5 + 12t^6 + \dots \\ &= \frac{1 - t^4}{(1 - t)^2(1 - t^2)}. \end{aligned}$$

En este caso, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.1.** *Sean  $(E, P)$  una curva elíptica. Entonces,*

$$R(E, 2P) \cong k[u_1, u_2, t]/(u_1(bu_1^3 + au_1^2u_2 + u_2^3) - t^2),$$

donde  $a, b \in k$  son las mismas constantes de la prueba del Teorema 2.1.1 y  $u_1, u_2, t$  son elementos de grados 1, 1 y 2, respectivamente.

*Demostración.* Con la notación de la prueba del teorema 2.1.1, sean  $u_1 = x^2$ ,  $u_2 = y$  y

$t = xz$ . Por construcción, tenemos las siguientes bases:

$$\begin{aligned} H^0(E, 2P) &= \langle u_1, u_2 \rangle \\ H^0(E, 4P) &= \langle u_1^2, u_1 u_2, u_2^2, t \rangle \\ H^0(E, 6P) &= \langle u_1^3, u_1^2 u_2, u_1 u_2^2, u_2^3, u_1 t, u_2 t \rangle. \end{aligned}$$

En grado 4 (respecto a la graduación de  $R(E, P)_{[2]}$ ), tenemos los siguientes subespacios de  $H^0(E, 8P)$ :

$$\langle S^4(u_1, u_2) \rangle, \quad \langle S^2(u_1, u_2) \otimes_k t \rangle, \quad \langle t^2 \rangle;$$

de dimensiones 5, 3 y 1, respectivamente.

Por (2.1.1), tenemos que  $h^0(8P) = 8$ . La discrepancia en dimensión viene de la ecuación

$$bx^6 + ax^4y + y^3 - z^2 = 0.$$

Multipliquemos ambos lados por  $x^2$  para reescribir dicha ecuación en la forma

$$(xz)^2 = b(x^2)^4 + a(x^2)^3y + x^2y^3; \quad \text{es decir,} \quad u_1(bu_1^3 + au_1^2u_2 + u_2^3) - t^2 = 0.$$

Este proceso, muy común en el programa de anillos graduados, es llamado *rendering*. Se sugiere el nombre de *visualización*.

Para finalizar, basta mostrar que no se necesitan más secciones y relaciones para generar a  $R(E, P)_{[2]}$ . El argumento es análogo al utilizado en el teorema 2.1.1.  $\square$

### 2.2.1. Geometría

Por construcción,  $H^0(2P) = \langle u_1, u_2 \rangle$ , con el que podemos definir

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (u_1 : u_2 : t) \xrightarrow{\varphi} (u_1 : u_2).$$

La curva  $E$  está definida por

$$u_1(bu_1^3 + au_1^2u_2 + u_2^3) = t^2. \quad (2.6)$$

Para un punto genérico  $(u_1 : u_2) \in \mathbb{P}^1$ , esta ecuación tiene dos soluciones para  $t$  (una raíz cuadrada). Por ejemplo, si  $u_1 \neq 0$ ,

$$t = \pm \sqrt{u_1(bu_1^3 + au_1^2u_2 + u_2^3)}.$$

Esto implica que cada fibra  $\varphi^{-1}(u_1 : u_2)$  contiene dos puntos, salvo en los puntos de ramificación. Por lo tanto,  $\varphi$  es finito de grado 2.

Por otro lado, como  $k = \mathbb{C}$ , todo elemento algebraico es separable y, por tanto, cualquier extensión de campos es separable. Por lo tanto, el polinomio mínimo de cualquier función de  $\mathbb{C}(E)$  sobre  $\mathbb{C}(t)$  no tiene raíces múltiples. Por lo tanto,  $\varphi$  es separable.

Entonces, aplicando la fórmula de Riemann - Hurwitz para una curva elíptica y un morfismo de grado 2, concluimos que  $E$  es hiperelíptica:

$$\begin{aligned} 2g(E) - 2 &= \deg(\varphi)(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + R \\ 2(1) - 2 &= 2(2(0) - 2) + R \\ R &= 4. \end{aligned}$$

Un análisis más detallado de esta situación geométrica, que incluye una visualización del espacio ambiente

$$\mathbb{P}(1, 1, 2) = \text{Proj}(k[u_1, u_2, t])$$

como una superficie singular encajada en  $\mathbb{P}^3$ , se llevará a cabo utilizando algunas propiedades de los pergaminos racionales  $\mathbb{F}_a$  (ver subsección 1.3.3 y 1.3.1).

Para ello, consideremos el morfismo

$$\varphi_{2L+B} : \mathbb{F}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{F}_2}, \quad (t_1 : t_2; x_1 : x_2) \xrightarrow{\varphi_{2L+B}} (t_1^2 x_2 : t_1 t_2 x_2 : t_2^2 x_2 : x_1),$$

definido por el sistema lineal  $|2L + B|$ , y recordemos que  $\varphi_{2L+B}$  es la resolución de la singularidad del cono  $\overline{\mathbb{F}_2} \subset \mathbb{P}_3$  con vértice en  $(0 : 0 : 0 : 1)$ .

De aquí, los morfismos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(1, 1, 2) &\rightarrow \overline{\mathbb{F}_2} \\ (u_1 : u_2 : t) &\xmapsto{f} (u_1^2 : u_1 u_2 : u_2^2 : t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : \overline{\mathbb{F}_2} &\rightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2) \\ (y_0 : y_1 : y_2 : y_3) &\xmapsto{f^{-1}} \begin{cases} f^{-1}(1 : y_1 : y_2 : y_3) = (1 : y_1 : y_3) & \text{si } y_0 \neq 0 \\ f^{-1}(y_0 : 1 : y_2 : y_3) = (y_0 : 1 : y_3) & \text{si } y_1 \neq 0 \\ f^{-1}(y_0 : y_1 : 1 : y_3) = (y_0 : y_1 : y_3) & \text{si } y_2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

hacan que  $\overline{\mathbb{F}_2}$  y  $\mathbb{P}(1, 1, 2)$  en  $\mathbb{P}^3$  sean isomorfos.

La curva  $E$  corta al cono  $\overline{\mathbb{F}_2} \cong \text{Proj}(k[y_0, y_1, y_2, y_3]/(y_1^2 - y_0 y_2))$  en la ecuación

$$y_3^2 = b y_0^2 + a y_0 y_1 + y_1 y_2$$

(sustituyendo  $u_1^2 = y_0$ ,  $u_1 u_2 = y_1$ ,  $u_2^2 = y_2$ ,  $y_3 = t$ ). De aquí, la ecuación de  $E$  en las coordenadas de  $\mathbb{F}_2$  es

$$x_1^2 = b t_1^4 x_2^2 + a t_1^3 t_2 x_2^2 + t_1 t_2^3 x_2^2$$

(sustituyendo  $y_0 = t_1^2 x_2$ ,  $y_1 = t_1 t_2 x_2$ ,  $y_2 = t_2^2 x_2$ ,  $y_3 = x_1$ ) y tiene bigrado  $(4, 2)$ . Por lo tanto,  $E$  es un divisor de  $\mathbb{F}_2$ .

Por el teorema 1.3.1,

$$E \sim (g + 1 + a)L + 2b = 4L + 2B.$$

En particular,

$$K_E \sim (g - 1)|_E = (0)|_E.$$

Por la teoría de intersección de  $\mathbb{F}_a$ ,

$$EL = (4L + 2B)L = 4L^2 + 2BL = 4(0) + 2(1) = 2$$

y

$$EB = (4L + 2B)B = 4LB + 2B^2 = 4 + 2(-2) = 0.$$

El número  $EL = 2$  corresponde al grado del morfismo  $\varphi$ , es decir, cada fibra  $L \subset \mathbb{F}_2$  (que se proyecta a un punto en  $\mathbb{P}^1$ ) corta a  $E$  en 2 puntos. El número  $EB = 0$  implica que la curva  $E$  y la sección  $B$  no se intersectan. En conclusión,  $\varphi(E) \subset \overline{\mathbb{F}_2}$  no contiene a  $(0 : 0 : 0 : 1)$ .

## 2.3. Tercera truncación

La serie de Hilbert, en este caso, es

$$\begin{aligned} P_{R(E,P)[3]}(t) &= \sum_{m \geq 0} h^0(3mP)t^m \\ &= 1 + 3t + 6t^2 + 9t^3 + 12t^4 + 15t^5 + 18t^6 + \dots \\ &= \frac{1 - t^3}{(1 - t)(1 - t)(1 - t)}. \end{aligned}$$

Y en efecto, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.1.** *Sean  $(E, P)$  una curva elíptica. Entonces,*

$$R(E, 3P) \cong k[v_1, v_2, v_3]/(bv_1^3 + av_1^2v_2 + v_2^3 - v_1v_3^2),$$

donde  $a, b \in k$  son las mismas constantes del Teorema 2.1.1 y  $v_1, v_2, v_3$  son elementos de grado 1.

*Demostración.* Con la notación de la prueba del teorema 2.1.1, sean  $v_1 = x^3$ ,  $v_2 = xy$  y

$v_3 = z$ . Por construcción, tenemos que

$$\begin{aligned} H^0(E, 3P) &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \\ H^0(E, 6P) &= \langle v_1^2, v_1v_2, v_3^2, v_1v_3, v_2^2, v_2v_3 \rangle \end{aligned}$$

son bases.

En grado 3 (respecto a la graduación de  $R(E, P)_{[3]}$ ), tenemos el siguiente subespacio de  $H^0(E, 9P)$ :

$$\langle S^3(v_1, v_2, v_3) \rangle,$$

que tiene dimensión 10.

Tenemos  $h^0(9P) = 9$  por (2.1.1). Entonces, este subconjunto es linealmente dependiente.

La discrepancia en la dimensión viene de la ecuación

$$bx^6 + ax^4y + y^3 - z^2 = 0.$$

Multipliquemos ambos lados por  $x^3$  para reescribir dicha ecuación como

$$x^3z^2 = ax^9 + bx^7y + (xy)^3; \quad \text{es decir,} \quad v_1v_3^2 = bv_1^3 + av_1^2v_2 + v_2^3. \quad (2.7)$$

Para finalizar, un argumento análogo al utilizado en el teorema 2.1.1, muestra que no existen más secciones y relaciones que generen a  $R(E, P)_{[3]}$ .  $\square$

### 2.3.1. Geometría

Haciendo un cambio de notación, la proyectividad

$$\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad (v_1 : v_2 : v_3) \xrightarrow{\varphi} (X : Y : Z) = (v_2 : v_3 : v_1),$$

hace que la ecuación (2.7) sea equivalente a

$$Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3.$$

Esta ecuación suele llamarse *modelo de Weierstrass* de una curva elíptica.

### Puntos de inflexión

Sea  $E$  una curva elíptica dada por una ecuación de Weierstrass. Así,  $E \subset \mathbb{P}^2$  consiste en los puntos  $P = (x, y)$  que satisfacen la ecuación de Weierstrass, junto con el punto  $O = [0 : 1 : 0]$  en el infinito. Sea  $L \subset \mathbb{P}^2$  una recta. Dado que la ecuación es de grado tres, la recta  $L$  intersecta a  $E$  en exactamente tres puntos, digamos  $P, Q, R$ . Por supuesto, si  $L$  es tangente a  $E$ , entonces  $P, Q, R$  no tienen por qué ser distintos. El hecho de que  $L \cap E$ , contado con multiplicidades, consista en exactamente tres puntos es un caso particular del *Teorema de Bézout* [Kirwan, Capítulo 3, p. 52]. Sin embargo, como daremos fórmulas explícitas más adelante en esta subsección, no es necesario emplear un teorema tan general.

Definimos una ley de composición  $\oplus$  en  $E$  mediante la siguiente regla:

**Ley de composición:** Sea  $P, Q \in E$ . Sea  $L$  la recta que pasa por  $P$  y  $Q$  (si  $P = Q$ , sea  $L$  la recta tangente a  $E$  en  $P$ ), y sea  $R$  el tercer punto de intersección de  $L$  con  $E$ . Sea  $L'$  la recta que pasa por  $R$  y  $O$ . Entonces,  $L'$  intersecta a  $E$  en  $R$ , en  $O$  y en un tercer punto, al que denotamos por  $P \oplus Q$ .

La operación que acabamos de describir, define un grupo abeliano  $(E, O)$  con neutro  $O$  (la prueba puede consultarse en [Silverman, Capítulo III, p. 51]). Más aún, esta misma estructura de grupo, es heredada a cualquier cónica plana no singular.

Las cónicas planas  $C$  no singulares tienen una relación con sus puntos de *inflexión*. Recordemos que dichos puntos son aquellos  $P \in C \subset \mathbb{P}^2$  de una curva no singular tales que

$$m_P(C \cap T_P C) \geq 3, \tag{2.8}$$

donde  $T_P C$  es el espacio tangente a  $C$  que pasa por  $P$ .

Los siguientes resultados describen la geometría de las curvas planas con sus puntos de inflexión:

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $C \subset \mathbb{P}^2$  una cónica irreducible no singular. Entonces,  $Q \in C$  es un punto de inflexión de  $C$  si, y sólo si,  $Q \oplus Q \oplus Q = O$ .*

*Demostración.* Ver [Robert, Capítulo II, p. 104]. □

Finalmente, el siguiente resultado establece que toda cónica plana tiene nueve puntos de inflexión:

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $C \subset \mathbb{P}^2$  una cónica irreducible no singular. Entonces, el conjunto de los puntos de inflexión de  $C$ , definen un subgrupo que es isomorfo a  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ . En particular,  $C$  tiene nueve puntos de inflexión.*

*Demostración.* Ver [Robert, Capítulo II, p. 104]. □

Como la curva construida en esta tercera truncación 2.3.1 es cónica, no singular e irreducible, por los resultados mencionados anteriormente, podemos concluir que este modelo posee nueve puntos de inflexión.

### Modelo afín de Weierstrass

Tomando el parche afín  $\mathbb{P}^2 \setminus \{v_1 = 0\}$ , podemos tomar las coordenadas  $x_1 = \frac{v_2}{v_1}$  y  $y_1 = \frac{v_3}{v_1}$ , y la ecuación (2.7) es

$$y^2 = x^3 + ax + b. \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) suele llamarse *modelo afín de Weierstrass* de una curva elíptica. Los lectores familiarizados con la teoría de funciones elípticas, recordarán que la función

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} ((z - \omega)^{-2} - \omega^{-2}),$$

junto con su derivada

$$\wp'(z) = \sum_{\omega \in \Lambda} -2(z - \omega)^{-2},$$

donde  $\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2 \text{ son linealmente independientes sobre } \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ , satisfacen una ecuación diferencial de la forma

$$(\wp')^2 = 4(\wp)^3 - g_2\wp - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C},$$

que está parametrizada por una función de la forma

$$t \mapsto (\wp(t) : \wp(t)' : 1) \tag{2.10}$$

Esta parametrización es local, pero puede extenderse a una parametrización global si consideramos como dominio de definición de  $\wp$  y  $\wp'$  a la superficie de Riemann  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

Por tanto, la ecuación (2.9) nos dice que toda curva elíptica admite una parametrización del tipo (2.10). Para más detalles, puede consultarse [Kirwan, Capítulo 5].

## 2.4. Cuarta truncación

Para la cuarta truncación, la serie de Hilbert es

$$\begin{aligned} P_{R(E,P)[4]}(t) &= \sum_{m \geq 0} h^0(4mP)t^m \\ &= 1 + 4t + 8t^2 + 12t^3 + 16t^4 + 20t^5 + 24t^6 + \dots \\ &= \frac{(1-t^2)^2}{(1-t)(1-t)(1-t)(1-t)}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.1.** *Sean  $(E, P)$  una curva elíptica. Entonces,*

$$R(E, 4P) \cong k[w_0, w_1, w_2, w_3]/(w_2^2 - w_0w_1, bw_0^2 + aw_0w_2 + w_2w_1 - w_3^2),$$

donde  $a, b \in k$  son las mismas constantes del Teorema 2.1.1 y  $w_0, w_1, w_2, w_3$  son elementos de grado 1.

*Demostración.* Con la notación de la prueba del teorema 2.1.1, sean  $w_0 = x^4$ ,  $w_1 = y^2$ ,  $w_2 = x^2y$  y  $w_3 = xz$ . De aquí, notar que hay una relación tautológica en estos generadores; es decir,

$$w_2^2 = w_0 w_1. \quad (2.11)$$

Por otro lado, por construcción,

$$H^0(E, 4P) = \langle w_0, w_1, w_2, w_3 \rangle$$

es una base.

En grado 2 (respecto a la graduación de  $R(E, P)_{[4]}$ ), tenemos el siguiente subespacio de  $H^0(E, 8P)$ :

$$\langle S^2(w_0, w_1, w_2, w_3) \rangle,$$

que tiene dimensión 10.

Por (2.1.1), sabemos que  $h^0(8P) = 8$ . Por lo tanto, este subconjunto debe ser linealmente dependiente. La discrepancia en la dimensión viene de la ecuación

$$bx^6 + ax^4y + y^3 - z^2 = 0.$$

Multipliquemos ambos lados por  $x^2$  para reescribir dicha ecuación en la forma

$$(xz)^2 = b(x^4)^2 + a(x^4)(x^2y) + (x^2y)(y^2); \quad \text{es decir,} \quad w_3^2 = bw_0^2 + aw_0w_2 + w_2w_1.$$

Finalmente, el mismo argumento utilizado en el teorema 2.1.1, muestra que la construcción del anillo  $R(E, P)_{[4]}$  termina aquí.  $\square$

### 2.4.1. Geometría

En esta subsección mostraremos que  $R(E, 4P)$  es una intersección completa en  $\mathbb{P}^3$  usando la proposición (1.2.1) y los teoremas estructurales para anillos graduados:

1)  $R(E, 4P)$  es de Cohen-Macaulay:

- i) Como  $H^i(E, 4nP) = \{0\}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 < i < \dim(C) = 1$ , entonces  $h^i(E, 4nP) = 0$ .
  - ii)  $h^0(E, 4nP) = 0$  para toda  $n < 0$ , pues  $\text{gr}(4nP) < 0$ .
  - iii) Por dualidad de Serre,  $h^1(E, 4nP) = h^0(E, K_E - 4nP) = 0$  para toda  $n > 0$ , pues  $\text{gr}(K_E - 4nP) < 0$ .
- 2)  $R(E, 4P)$  es de Gorenstein, pues el divisor amplio  $(4P)$ , es un submúltiplo del divisor canónico  $K_E = 0$ .

Análogamente,  $R(E, P)$  resulta ser de Gorenstein.

Por otro lado,  $R(E, 4P) \subset R(E, P)$  como anillos graduados. Entonces,  $R(E, P)$  es un  $R(E, 4P)$ -módulo finitamente generado, ya que

$$R(E, P) = R(E, 4P) \langle H^0(E, P), H^0(E, 2P), H^0(E, 3P) \rangle$$

Es decir, para cada sección  $s \in H^0(E, nP)$  (con  $n$  arbitrario), hay un entero  $q$  y un residuo  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$  tal que

$$n = 4q + r,$$

y entonces

$$s = t \cdot u, \quad t \in H^0(E, 4qP) \subset R(E, 4P), \quad u \in H^0(E, rP).$$

Se sigue que  $R(E, P)$  es integral sobre  $R(E, 4P)$  (ver [Atiyah, Capítulo 5, p. 59]). De aquí,

la dimensión de Krull de ambos anillos es la misma (ver [Atiyah, Capítulo 5, p. 62]):

$$\begin{aligned}\dim(R(E, 4P)) &= \dim(R(E, P)) \\ &= \dim(k[x, y, z]/J),\end{aligned}\tag{2.12}$$

donde  $J = (bx^6 + ax^4y + y^3 - z^2)$ .

Un anillo de Cohen-Maculay  $R$  satisface la igualdad (ver [Matsumura, Capítulo 6, p. 105])

$$\dim(R) = \dim(R/P) + \text{ht}(P),\tag{2.13}$$

donde  $P$  es cualquier ideal primo de  $R$ . En particular, el anillo  $R(E, P)$  satisface (2.13):

$$\begin{aligned}\text{ht}(J) &= \dim(k[x, y, z]) - \dim(k[x, y, z]/J) \\ &= 2 = \dim(k[x, y, z]/J),\end{aligned}$$

donde  $J$  es un ideal principal en un DFU, lo cual implica que tiene altura 1 (ver [Atiyah, Capítulo 11, p. 122]).

Entonces, la igualdad (2.12) satisface

$$\dim(R(E, 4P)) = 2.$$

Como  $R(E, 5P)$  satisface (2.13), concluimos que

$$\text{ht}(I) = \dim(k[w_0, w_1, w_2, w_3]) - \dim(k[w_0, w_1, w_2, w_3]/I) = 2,$$

donde  $I$  es el ideal generado por las relaciones (2.11) y (2.4.1). En particular,

$$\text{codim}(R(E, 4P)) = 2.$$

## 2.5. Quinta truncación

En este último caso, la siguiente serie de Hilbert es

$$\begin{aligned} P_{R(E,P)[5]}(t) &= \sum_{m \geq 0} h^0(5mP)t^m \\ &= 1 + 5t + 10t^2 + 15t^3 + 20t^4 + 25t^6 + \dots \\ &= \frac{(1-t^2)^5}{(1-t)(1-t)(1-t)(1-t)(1-t)}. \end{aligned}$$

El resultado a mostrar es:

**Teorema 2.5.1.** *Sean  $(E, P)$  una curva elíptica. Entonces,*

$$R(E, 5P) \cong k[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]/(\mathbf{Pf}_4 M),$$

donde  $\mathbf{Pf}_4 M$  denota los pfaffianos de la matriz antisimétrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_4 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_5 & \\ -\xi_4 & -\xi_3 - b\xi_1 & \\ & a\xi_1 & \end{pmatrix},$$

y  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$  son elementos de grado 1.

*Demuestração.* Con la notación de la prueba del Teorema 2.1.1, sean  $\xi_1 := x^5$ ,  $\xi_2 = x^3y$ ,  $\xi_3 = xy^2$ ,  $\xi_4 = x^2z$  y  $\xi_5 = yz$ . De aquí, notemos que

$$\xi_4\xi_3 = \xi_2\xi_5, \quad \xi_1\xi_5 = \xi_2\xi_4, \quad \xi_2^2 = \xi_1\xi_3. \quad (2.14)$$

Es decir, son las relaciones tautológicas del anillo  $R(E, 5P)$ .

Por otro lado, por construcción

$$H^0(E, 5P) = \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5 \rangle.$$

En grado 2 (respecto a la graduación de  $R(E, P)_{[5]}$ ), el subespacio

$$\langle S^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) \rangle$$

tiene dimensión 15 y  $h^0(10P) = 10$  por (2.1.1). La discrepancia de la dimensión viene, nuevamente, de la ecuación

$$bx^6 + ax^4y + y^3 - z^2 = 0.$$

Si multiplicamos ambos lados por  $x^2y$ , y a parte por  $x^4$ , obtenemos

$$\xi_4\xi_5 = \xi_3^2 + a\xi_2^2 + b\xi_1\xi_2 \quad (2.15)$$

$$\xi_4^2 = \xi_2\xi_3 + a\xi_1\xi_2 + b\xi_1^2, \quad (2.16)$$

respectivamente.

Para mostrar que no hay más secciones y relaciones en el anillo  $R(E, 5P)$ , basta utilizar un razonamiento análogo al usado en el teorema 2.1.1.

Por consiguiente,

$$R(E, 5P) \cong k[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]/I,$$

donde  $I$  es el ideal generado por las relaciones (2.14), (2.15), (2.16).

Ahora identifiquemos estas relaciones con los pfaffianos de una matriz antisimétrica de  $5 \times 5$ . Por un razonamiento análogo al realizado en la cuarta truncación, resulta que  $R(E, 5P)$  es un anillo de Gorenstein y de dimensión

$$\begin{aligned} \dim(R(E, 5P)) &= \dim(R(E, P)) \\ &= \dim(k[x, y, z]/(bx^6 + ax^4y + y^3 - z^2)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por ende, el anillo  $R(E, 5P)$  también satisface la igualdad (2.13):

$$\text{ht}(I) = \dim(k[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]) - \dim(k[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]/I) = 3.$$

En particular,

$$\text{codim}((E, 5P)) = 3.$$

Por consiguiente, el anillo  $R(E, 5P)$  está en las condiciones del teorema de Buchsbaum y Eisenbud, lo que implica que las relaciones del anillo, estarán contenidas en la siguiente matriz antisimétrica de  $5 \times 5$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & & \xi_4 \\ \xi_2 & \xi_3 & & \xi_5 & \\ & -\xi_4 & -\xi_3 - a\xi_1 & & \\ & & b\xi_1 & & \end{pmatrix},$$

cuyos pfaffianos de submatrices de  $4 \times 4$  nos dan explicitamente las ecuaciones que definen a la variedad:

$$\text{Pf}_1 = \xi_2 b \xi_1 - \xi_3 (-\xi_3 - a \xi_1) + \xi_5 (-\xi_4)$$

$$= b \xi_1 \xi_2 + \xi_3^2 + a \xi_1 \xi_3 - \xi_4 \xi_5$$

$$= b \xi_1 \xi_2 + \xi_3^2 + a \xi_2^2 - \xi_4 \xi_5$$

$$\text{Pf}_2 = \xi_1 b \xi_1 - \xi_2 (-\xi_3 - a \xi_1) + \xi_4 (-\xi_4)$$

$$= b \xi_1^2 + \xi_2 \xi_3 + a \xi_1 \xi_2 - \xi_4^2$$

$$\text{Pf}_3 = 0(b \xi_1) - \xi_2 \xi_5 + \xi_4 \xi_3$$

$$= -\xi_2 \xi_5 + \xi_4 \xi_3$$

$$\text{Pf}_4 = 0(-\xi_3 - a \xi_1) - \xi_1 \xi_5 + \xi_4 \xi_2$$

$$= -\xi_1 \xi_5 + \xi_4 \xi_2$$

$$\text{Pf}_5 = 0(-\xi_4) - \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_2$$

$$= -\xi_1 \xi_3 + \xi_2^2.$$

Observemos que, el pfaffiano  $\text{Pf}_1$ , corresponde a la ecuación (2.15); el pfaffiano  $\text{Pf}_2$ , corresponde a la ecuación (2.16); y los pfaffianos  $\text{Pf}_3$ ,  $\text{Pf}_4$  y  $\text{Pf}_5$ , corresponden a las tres relaciones tautológicas (2.14) del anillo  $R(E, 5P)$ . En conclusión, el teorema de Buchsbaum y Eisenbud, nos permite dar una presentación del anillo  $R(E, 5P)$  como

$$R(E, 5P) \cong k[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]/(\mathbf{Pf}_4 M),$$

donde  $\mathbf{Pf}_4 M$  denota los pfaffianos de la matriz antisimétrica de  $5 \times 5$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_4 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_5 \\ -\xi_4 & -\xi_3 - a\xi_1 \\ b\xi_1 \end{pmatrix}.$$

□

### 2.5.1. Geometría

El objetivo de esta subsección es describir la relación que tienen los pfaffianos  $\mathbf{Pf}_4$  con las *relaciones de Plücker* de una *grassmaniana*. Para ello, reescribiremos algunas generalidades sobre estos objetos:

**Definición 2.5.1.** Sea  $V$  un  $k$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $d \in \mathbb{N}$ .

- 1) Una *grassmaniana*, denotada por  $G(d, n)$ , es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de  $V$  de dimensión  $d$ .
- 2) Dado un subespacio  $W \in G(d, n)$ , sea  $\{v_1, \dots, v_d\}$  una base de  $W$ . Entonces, el *encaje de Plücker*, es la aplicación definida como

$$p : G(d, n) \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}, \quad W \xrightarrow{p} (v_1 \wedge \cdots \wedge v_d). \quad (2.17)$$

- 3) Sea  $W = \langle v_1, \dots, v_d \rangle \in G(d, n)$ ,  $p(W) = (v_1 \wedge \cdots \wedge v_d)$  y  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$  la base canónica

de  $V$ . Entonces, el representante  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$  se reescribe como

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n} a_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}.$$

El punto  $[\cdots : a_{i_1 \dots i_n} : \cdots] \in \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}$  se llama *coordenada de Plücker*.

- 4) Un elemento  $v \in \bigwedge^d V$  es *totalmente descomponible*, si  $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ , donde  $\{v_1, \dots, v_d\} \subset V$  es linealmente independiente.

Como el nombre de la aplicación 2.17 lo indica, debe demostrarse que esta asignación está bien definida, que es inyectiva y cerrada. Los dos primeros hechos, pueden ser consultados en [Weng]. Para la cerradura, los siguientes resultados han de enunciarse son necesarios para demostrar este hecho. En particular, esta prueba proporciona un algoritmo para escribir las relaciones de Plücker, que son las ecuaciones que definen a  $G(d, n)$  como variedad proyectiva.

**Proposición 2.5.1.** *Sea  $w \in \bigwedge^d V$  no nulo y sea la función lineal definida como*

$$\varphi_w : V \rightarrow \bigwedge^{d+1} V, \quad v \xrightarrow{\varphi_w} v \wedge w.$$

*Entonces,  $\dim_k(\ker(\varphi_w)) \leq d$ . Si  $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ , entonces  $\ker(\varphi_w) = \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \rangle$ .*

*Demostración.* Véase [Weng]

□

**Proposición 2.5.2.** *Un elemento  $(w) \in \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}$  está en la imagen de  $G(d, n)$  por la aplicación de Plücker si, y sólo si,  $w$  es totalmente descomponible.*

*Demostración.* Véase [Weng]

□

Con la notación de las proposiciones previas, tenemos:

**Proposición 2.5.3.** *El encaje de Plücker es cerrado. En particular,  $G(d, n)$  es una variedad proyectiva.*

*Demostración.* La proposición 2.5.2 implica que el conjunto  $p(G(d, n))$  tiene a todas las clases  $(w) \in \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}$  con representantes  $w$  totalmente descomponibles.

Por la proposición 2.5.1 y el teorema de rango-nulidad,  $\varphi_w$  tiene rango  $\text{rank}(\varphi_w) = n - d$ . Por lo tanto, todos los menores de  $n - d + 1 \times n - d + 1$  de la matriz  $M_{\varphi_w}$  asociada a  $\varphi_w$ , se anulan.

Por consiguiente,  $p(G(d, n))$  es el conjunto de ceros de polinomios homogéneos de grado  $n - d + 1$  en coordenadas de Plücker.  $\square$

**Ejemplo 2.5.1.** Con los pasos realizados en la demostración anterior, calculemos las relaciones de Plücker de la grassmaniana  $G(2, 4)$ .

Sean

$$\begin{aligned} k^4 &= \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle \\ \bigwedge^2 k^4 &= \langle e_{i_1} \wedge e_{i_2} \mid 1 \leq i_1 < i_2 \leq 4 \rangle \\ \bigwedge^3 k^4 &= \langle e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4 \rangle \end{aligned}$$

las bases ordenadas de los respectivos espacios.

Se puede escribir a  $x \in \bigwedge^2 k^4$  como combinación lineal de elementos de la base, es decir,

$$x = \sum_{i=2}^4 a_{1i}(e_1 \wedge e_i) + \sum_{i=3}^4 a_{2i}(e_2 \wedge e_i) + a_{34}(e_3 \wedge e_4),$$

donde  $a_{ij} \in k$ .

Evaluemos la base canónica de  $k^4$  en la función lineal  $\varphi_x$  definida en la proposición 2.5.1:

$$\begin{aligned} \varphi_x(e_1) &= a_{23}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) + a_{24}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) + a_{34}(e_1 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ \varphi_x(e_2) &= -a_{13}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) - a_{14}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) + a_{34}(e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ \varphi_x(e_3) &= a_{12}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) - a_{14}(e_1 \wedge e_3 \wedge e_4) - a_{24}(e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ \varphi_x(e_4) &= a_{12}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) + a_{13}(e_1 \wedge e_3 \wedge e_4) + a_{24}(e_2 \wedge e_3 \wedge e_4). \end{aligned}$$

Resulta que, en las bases ordenadas 2.5.1 de los espacios  $k$  y  $\bigwedge^3 k^4$ , la función lineal  $\varphi_x$  tiene la matriz asociada

$$M_{\varphi_x} = \begin{pmatrix} a_{23} & -a_{13} & a_{12} & 0 \\ a_{24} & -a_{14} & 0 & a_{12} \\ a_{34} & 0 & -a_{14} & a_{13} \\ 0 & a_{34} & -a_{24} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

El rango de esta matriz es  $\text{rank}(M_{\varphi_x}) = 2$ . Por lo tanto,  $p(G(2, 4))$  es el cero común de los menores de  $3 \times 3$  de  $M_{\varphi_x}$ .

Realizando el cálculo de los menores de  $3 \times 3$  de la matriz  $M_{\varphi_x}$ , puede notarse que 4 de ellos son nulos, mientras que los restantes son múltiplos de la relación

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0.$$

Esta es la relación de Plücker de la grassmaniana  $G(2, 4)$ . La conclusión es que  $G(2, 4)$  está encajada en  $\mathbb{P}^5$  con el ideal de cúbicas  $(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})$ .

El cálculo realizado en el ejemplo anterior, puede extenderse a los casos  $G(d, n)$ . Sea  $I$  una  $d$ -tuple formado por los elementos de  $\{1, \dots, n\}$ . El símbolo  $I(i_\alpha \rightarrow j)$  denota que se obtendrá una nueva  $d$ -tuple de cambiar la coordenada  $i_\alpha$  de  $I$  por la coordenada  $j$ . Así pues, tenemos el siguiente resultado que resume lo mencionado al inicio de este parrafo:

**Proposición 2.5.4.** *Las relaciones de Plücker de la grassmaniana  $G(d, n)$  en coordenadas de Plücker están dadas por*

$$a_I a_J = \sum_{j \in J} a_{I(i_\alpha \rightarrow j)} p_{J(j \rightarrow i_\alpha)},$$

donde  $I$  y  $J$  son  $d$ -tuplas de elementos de  $\{1, \dots, n\}$ .

*Demostración.* Veáse [Weng]. □

En particular, la grassmaniana  $G(2, n)$  tiene las relaciones de Plücker

$$a_{ij}a_{kl} - a_{ik}a_{jl} + a_{jk}a_{il} = 0,$$

donde  $1 \leq i < j < k < l \leq n$ .

En este caso, la grassmaniana  $G(2, 5)$  tiene las relaciones de Plücker

$$\begin{aligned} a_{23}a_{45} + a_{34}a_{25} - a_{24}a_{35} &= 0 \\ a_{13}a_{45} + a_{34}a_{15} - a_{14}a_{35} &= 0 \\ a_{12}a_{45} + a_{24}a_{15} - a_{14}a_{25} &= 0 \\ a_{12}a_{35} + a_{23}a_{15} - a_{13}a_{25} &= 0 \\ a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} &= 0. \end{aligned}$$

Notemos que, estas relaciones de Plücker, son exactamente los pfafianos de la matriz antisimétrica de  $5 \times 5$  descrita en 1.5. Este modelo describe la quinta truncación de una curva elíptica por el teorema 2.5.1.

En conclusión,  $R(E, 5P)$  resulta ser una curva de grado 2 en  $\mathbb{P}^4$  obtenida como una  $\mathbb{P}^4$  sección de la grassmanniana  $G(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ .

# Capítulo 3

## Curvas de género 2 y 3

En este capítulo mostraremos algunas construcciones de anillos graduados sobre curvas de género 2 y 3. Las últimos anillos serán de gran importancia para estudiar superficies de tipo general.

### 3.1. ¿Cómo son las funciones racionales de un sistema lineal hiperelíptico?

Esta pregunta será respondida con el siguiente lema, que será de gran utilidad para los cálculos posteriores:

**Lema 3.1.1.** *Sea  $C$  una curva hiperelíptica de género  $g \geq 2$ ,  $D$  un divisor en  $C$  tal que  $\text{gr}(D) = 2$  y  $\langle f_1, f_2 \rangle = H^0(D)$  es una base. Entonces:*

- 1) *Para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^n(f_1, f_2)$  es un conjunto linealmente independiente con  $n + 1$  elementos en  $H^0(nD)$ .*
- 2)  *$\langle S^n(f_1, f_2) \rangle = H^0(nD)$ . Más aun,  $S^n(f_1, f_2)$  es una base para toda  $n = 1, \dots, g$ .*
- 3) *Para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H^0(n(g - 1)D) \cong H^0(nK_C)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $h^0(D) = \text{gr}(D) = 2$  para algún divisor  $D$  en  $C$ .

- 1) Consideremos una base  $\langle f_1, f_2 \rangle = H^0(D)$ . Tomemos a  $x = \frac{f_1}{f_2}$  como un parámetro afín de  $\mathbb{P}^1$ .

Sea

$$a_1 f_1^n + a_2 f_1^{n-1} f_2 + \cdots + a_n f_1 f_2^{n-1} + a_{n+1} f_2^n = 0$$

una combinación lineal con coeficientes en  $k$ .

Entonces, multiplicando por  $\frac{1}{f_2^n}$  ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_2^n} (a_1 f_1^n + a_2 f_1^{n-1} f_2 + \cdots + a_n f_1 f_2^{n-1} + a_{n+1} f_2^n) &= 0 \\ a_1 \frac{f_1^n}{f_2^n} + a_2 \frac{f_1^{n-1}}{f_2^n} f_2 + \cdots + a_n \frac{f_1}{f_2^n} f_2^{n-1} + a_{n+1} \frac{f_2^n}{f_2^n} &= 0 \\ a_1 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^n + a_2 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{n-1} + \cdots + a_n \frac{f_1}{f_2} + a_{n+1} &= 0 \\ a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Pero, como  $k = \mathbb{C}$  es infinito, esta combinación es linealmente independiente. Por lo tanto, todos los coeficientes  $a_i$  son nulos, lo cual implica que los elementos de  $S^n(f_1, f_2)$  son linealmente independientes sobre  $k$ .

En particular, podemos concluir que,  $S^n(f_1, f_2)$ , es base de un subespacio vectorial de  $H^0(nD)$  de dimensión  $n + 1$ .

- 2) Por RR, el divisor  $(g - 1)D$  tiene

$$\begin{aligned} h^0((g - 1)D) - h^0(K_C - (g - 1)D) &= 1 - g + \deg((g - 1)D) \\ &= g - 1. \end{aligned}$$

Además, por la primera versión del teorema de RR

$$h^0(K_C - (g - 1)D) \leq 1 + \deg(K_C - (g - 1)D) = 1.$$

Supongamos que  $h^0((g-1)D) = 0$ . Entonces,

$$h^0((g-1)D) = g-1.$$

Por (1),  $S^{g-1}(f_1, f_2)$  es un conjunto linealmente independiente con  $g$  elementos en  $H^0((g-1)D)$ . Por lo tanto,  $\langle S^{g-1}(f_1, f_2) \rangle$  es un subespacio vectorial de  $H^0((g-1)D)$  de dimensión  $g$ . Esto no es posible, pues  $H^0((g-1)D)$  tiene dimensión estrictamente menor.

Por ende,  $h^0(K_C - (g-1)D) = 1$ . Como  $K_C - (g-1)D$  es un divisor de grado cero, entonces es un divisor *principal*. Por lo tanto,  $K_C \sim (g-1)D$ .

Consecuentemente,  $H^0((g-1)D) \cong H^0(K_C)$  y, en particular,  $h^0((g-1)D) = h^0(K_C) = g$ . Así, podemos concluir que,  $S^n(f_1, f_2)$ , es una base de  $H^0(nD)$  para toda  $n = 1, \dots, g-1$ .

Para el caso  $n = g$ : como  $K_C \sim (g-1)D$ , entonces  $gD \sim K_C + D$ , con grado  $2g$ . De aquí, la primera versión del teorema de RR, implica que  $h^0(gD) = 1 - g + \text{gr}(gD) = 1 - g + 2g = 1 + g$ . Por lo tanto,  $S^g(f_1, f_2)$  es una base de  $H^0(gD)$ .

3) Por (2),  $K_C \sim (g-1)D$ . Entonces,  $n(g-1)D \sim nK_C$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . De aquí,  $H^0(n(g-1)D) \cong H^0(nK_C)$ . En particular,  $h^0(n(g-1)D) = h^0(nK_C)$ . □

### 3.2. Anillo canónico para una curva de género 2

Sea  $C$  una curva proyectiva no singular de género  $g(C) = 2$ , con divisor canónico  $K_C$ .

Una de las consecuencias del RR es que (ver [Hartshorne AG, Capítulo IV]), toda curva de género 2, es hiperelíptica. En particular, su divisor canónico  $K_C$  es tal que

$$h^0(K_C) = 2 = \deg(K_C),$$

cuyo sistema lineal  $|K_C|$  define una cubierta doble

$$\varphi_{K_C} : C \rightarrow \mathbb{P}^1$$

con seis puntos de ramificación por la fórmula de Riemann-Hurwitz (necesariamente distintos, pues  $C$  es no singular).

Sin embargo, el modelo algebraico de dicha curva, no es muy clara en este contexto. Entonces, el objetivo de esta sección, es demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.1.** *Sean  $C$  una curva de género 2 y  $K_C$  su divisor canónico. Entonces,*

$$R(C, K_C) \cong k[x_1, x_2, u]/(u^2 - f_6(x_1, x_2, u)),$$

donde  $x_1, x_2$  y  $u$  son elementos de grados 1 y 3, respectivamente, y  $f_6$  es un polinomio homogéneo de grado 6.

*Demostración.* Consideraremos el divisor canónico  $K_C$  de  $C$ . Por RR, para toda  $n \geq 0$ :

$$h^0(nK_C) = 1 - g + \deg(nK_C) + h^0(K_C - nK_C).$$

Tenemos  $\deg(nK_C) = 2n$ . Por lo tanto,

$$h^0(nK_C) = 1 - g + 2n + h^0(K_C - nK_C) = -1 + 2n + h^0(K_C - nK_C),$$

para toda  $n \geq 0$ . Entonces,

- 0) Si  $n = 0$ ,  $h^0(0) = -1 + h^0(K_C) = -1 + g = 1$ .
- 1) Si  $n = 1$ , entonces  $h^0(K_C) = -1 + 2 + h^0(0) = 2$ .
- 2) Para cada  $n \geq 2$ ,  $h^0(K_C - nK_C) = 0$ , pues  $\deg(K_C - nK_C) < 0$ .

Se resume lo anterior en la siguiente igualdad

$$h^0(nK_C) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n = 1 \\ 2n - 1 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Consideremos a  $H^0(K_C)$ . Tenemos  $h^0(K_C) = 2$ . Entonces, sea  $\{x_1, x_2\}$  una base de  $H^0(K_C)$ .

En grado 2, como  $x_1, x_2 \in H^0(K_C)$  y  $h^0(2K_C) = 3$ , entonces  $H^=(2K_C) = \langle S^2(x_1, x_2) \rangle$  es una base por el lema 3.1.1.

Para el grado 3,  $S^3(x_1, x_2) \subset H^0(3K_C)$  es linealmente independiente por el lema 3.1.1.

Como  $h^0(3K_C) = 5$ , existe una sección  $u \in H^0(3K_C)$  tal que,

$$H^0(3K_C) = \langle S^3(x_1, x_2) \cup \{u\} \rangle,$$

es una base.

En grado 4, por el lema 3.1.1,

$$\begin{aligned} S^4(x_1, x_2) &\subset H^0(4K_C) \\ S^1(x_1, x_2) \otimes_k \{u\} &\subset H^0(4K_C) \end{aligned}$$

son subconjuntos linealmente independientes.

Por construcción,  $H^0(4K_C)$  es suma directa de los subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} \langle S^4(x_1, x_2) \rangle \\ \langle S^1(x_1, x_2) \otimes_k \{u\} \rangle. \end{aligned}$$

Como las bases de estos sumandos directos son linealmente independientes, entonces  $S^4(x_1, x_2) \cup S^1(x_1, x_2) \otimes_k \{u\}$  es linealmente independiente en  $H^0(4K_C)$ . En este grado, se cumple  $h^0(4K_C) = 7$ . Por ende,

$$H^0(4K_C) = \langle S^4(x_1, x_2) \cup S^1(x_1, x_2) \otimes_k \{u\} \rangle$$

es una base.

Por razones totalmente análogas,

$$H^0(5K_C) = \langle S^5(x_1, x_2) \cup S^2(x_1, x_2) \otimes_k \{u\} \rangle$$

$$H^0(6K_C) = \langle S^6(x_1, x_2) \cup S^3(x_1, x_2) \otimes_k \{u\} \rangle$$

son bases.

Más aún,  $u^2 \in H^0(6K_C)$ . Por lo tanto,

$$S^6(x_1, x_2) \cup S^3(x_1, x_2) \otimes_k \{u\} \cup \{u^2\}$$

es un conjunto linealmente dependiente en  $H^0(6K_C)$ . De aquí, existen  $a_i, b_i, a \in k$ , no todos cero, tales que

$$\sum_{i=0}^6 a_i x_1^{6-i} x_2^i + \left( \sum_{i=0}^3 b_i x_1^{3-i} x_2^i \right) u + au^2 = 0. \quad (3.1)$$

En esta relación de dependencia lineal, el coeficiente  $a$  no puede ser cero, pues el conjunto  $S^6(x_1, x_2) \cup S^3(x_1, x_2) \otimes_k \{u\}$  es linealmente independiente por ser una base de  $H^0(6K_C)$ .

Entonces, mediante un cambio de coordenadas de la forma  $u \mapsto (\frac{-1}{a})u$ , podemos eliminar el coeficiente  $a$  de (3.1) para obtener

$$u^2 - f_6(x_1, x_2, u) = 0,$$

donde  $f_6$  es un polinomio de grado 6 definido por todos los monomios homogéneos de grado 6 de la relación (3.1) (excepto  $u^2$ ).

Finalmente, verifiquemos que no hay más generadores y relaciones en  $R(C, K_C)$ . Para ello, hay que utilizar el corolario 1.1.1 con  $H^0(C, D) = \langle S^1(y_1, y_2) \rangle$  y  $A = nK_C$  para toda  $n > 6$ .  $\square$

El anillo que acabamos de computar nos dice que, el sistema lineal  $|K_C|$ , encaja a  $C$  en el espacio torcido  $\mathbb{P}(1, 1, 3)$  de forma natural.

### 3.2.1. Construcción geométrica

Anteriormente, se mostró que, el sistema lineal canónico  $|K_C|$  de una curva de género 2, encaja a  $C$  en el espacio proyectivo torcido  $\mathbb{P}(1, 1, 3)$ . Así pues, veamos la geometría de  $C$  utilizando los pergaminos racionales.

Consideremos el morfismo

$$\varphi_{3L+B} : \mathbb{F}_3 \rightarrow \overline{\mathbb{F}_3}, \quad (t_1 : t_2; x_1 : x_2) \xrightarrow{\varphi_{3L+B}} (t_1^3 x_2 : t_1^2 t_2 x_2 : t_1 t_2^2 x_2 : t_2^3 x_2 : x_1).$$

definido por el sistema lineal  $|3L + B|$ .

Del mismo modo que en el caso elíptico,  $\overline{\mathbb{F}_3}$  es isomorfo al encaje del plano proyectivo torcido  $\mathbb{P}(1, 1, 3)$  en  $\mathbb{P}^4$ .

Por el teorema 1.3.1, podemos pensar en nuestra curva  $C$  como un divisor en  $\mathbb{F}_3$  de manera que, el sistema lineal  $|L|$  de  $\mathbb{F}_3$ , se restrinja al sistema lineal  $|K_C|$  que hace de  $C$  una curva hiperelíptica.

Por lo tanto, el teorema 1.3.1 implica que

$$C \sim (g + 1 + a)L + 2B = 6L + 2B.$$

En particular,

$$K_C \sim (g - 1)L|_C = L|_C.$$

Por construcción,

$$CL = (6L + 2B)L = 6L^2 + 2BL = 6(0) + 2(1) = 2$$

y

$$CB = (6L + 2B)B = 6LB + 2B^2 = 6 + 2(-3) = 0.$$

Entonces, geométricamente,  $\varphi_{K_C}(C)$  está encajada en el cono  $\overline{\mathbb{F}_3} \cong \mathbb{P}(1, 1, 3)$ , que es singular en  $(0 : 0 : 0 : 1)$ , y cuya explosión, está dada por el morfismo  $\varphi_{|3L+B|}$ , tal que sus

fibras hacen de  $C$  una curva hiperelíptica en  $\mathbb{F}_3$ .

En este caso, como  $C$  tiene intersección disjunta con  $B$ , entonces la curva  $\varphi_{K_C}(C) \subset \overline{\mathbb{F}_3}$  no contiene la singularidad .

### 3.3. Anillo canónico para una curva de género 3

Sea  $C$  una curva proyectiva no singular de género  $g(C) = 3$ , con divisor canónico  $K_C$ .

Una de las consecuencias geométricas del RR es:

**Teorema 3.3.1.** *Sean  $C$  una curva no singular de género  $g \geq 3$  y  $\varphi_{K_C} : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  el morfismo asociado al sistema lineal canónico  $|K_C|$ . Entonces, se cumple solo uno de los dos casos:*

- i)  $|K_C|$  es muy amplio.
- ii)  $C$  es una curva hiperelíptica. En este caso,  $\varphi_{K_C}$  es la composición de una cubierta doble  $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ , seguido de un encaje de  $\mathbb{P}^1$  a  $\mathbb{P}^{g-1}$  como una curva racional normal de grado  $g - 1$ .

*Demostración.* Ver [Hartshorne AG, Capítulo IV, p. 342]) □

Entonces, el objetivo de esta sección, es conocer los anillos canónicos  $R(C, K_C)$  para ambos casos en género  $g = 3$ . Para ello, necesitaremos del siguiente resultado:

**Lema 3.3.1.** *Sean  $C$  una curva de género 3 y  $K_C$  su divisor canónico. Entonces, para cada  $n \geq 0$ ,*

$$h^0(nK_C) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 3 & \text{si } n = 1 \\ 4n - 2 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

*Demostración.* La prueba es análoga a la prueba de la primera parte de 3.2.1. □

### 3.3.1. Caso no hiperelíptico

En esta subsección, se demostrará:

**Teorema 3.3.2.** *Sean  $C$  una curva de género 3 no hiperelíptica y  $K_C$  su divisor canónico.*

*Entonces,*

$$R(C, K_C) \cong k[y_1, y_2, y_3]/(f_4(y_1, y_2, y_3)),$$

donde  $y_1, y_2, y_3$  son elementos de grados 1, y  $f_4$  es un polinomio homogéneo de grado 4.

*Demostración.* Sea  $P \in C$ . Como  $C$  no es hiperelíptica, entonces

$$\varphi_{K_C} : C \rightarrow \mathbb{P}^2$$

es un encaje por el teorema 3.3.1. Por lo tanto,

$$h^0(K_C - P) = h^0(K_C) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$h^0(K_C - 2P) = h^0(K_C) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Como  $h^0(K_C) = 3$ , entonces

$$H^0(K_C - 2P) \subset H^0(K_C - P) \subset H^0(K_C).$$

Sea  $\{y_1, y_2, y_3\}$  una base de  $H^0(K_C)$  tal que

$$\text{ord}_P(y_1) \geq 2$$

$$\text{ord}_P(y_2) = 1$$

$$\text{ord}_P(y_3) = 0.$$

En grado 2, consideremos el mapeo producto

$$\varphi : H^0(K_C - P) \otimes_k H^0(K_C) \rightarrow H^0(2K_C - P).$$

Entonces, por el corolario 1.1.1,

$$\ker(\varphi) \cong H^0(K_C - (K_C - P)) = H^0(P).$$

Notemos que, por RR,

$$h^0(P) = 1$$

$$h^0(2K_C - P) = 5.$$

Por ende, el teorema de rango-nulidad implica que

$$\begin{aligned} \text{rank}(\varphi) &= \dim_k(H^0(K_C - P) \otimes_k H^0(K_C)) - h^0(P) \\ &= 6 - 1 \\ &= h^0(2K_C - P). \end{aligned}$$

Esto implica que, el mapeo producto  $\varphi$ , es suprayectivo, por lo que podemos concluir que  $H^0(2K_C - P) = \langle y_1^2, y_1y_2, y_2^2, y_1y_3, y_2y_3 \rangle$  es una base.

Tenemos

$$\begin{aligned} h^0(2K_C) &= 6 \\ y_3^2 &\in H^0(2K_C) \setminus H^0(2K_C - P). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H^0(2K_C) = \langle S^2(y_1, y_2, y_3) \rangle$$

es una base.

Para el grado 3, consideremos el mapeo producto

$$\varphi : H^0(K_C - P) \otimes_k H^0(2K_C) \rightarrow H^0(3K_C - P).$$

Por un razonamiento análogo al hecho en grado 2, se puede verificar que,  $\varphi$ , es suprayectiva. Por ende,  $H^0(3K_C - P) = \langle y_1^3, y_1^2y_2, y_1^2y_3, y_1y_2^2, y_1y_2y_3, y_1y_3^2, y_2^3, y_2^2y_3, y_2y_3^2 \rangle$  es una base.

En este grado tenemos

$$\begin{aligned} h^0(3K_C) &= 10 \\ y_3^3 &\in H^0(3K_C) \setminus H^0(3K_C - P). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H^0(3K_C) = \langle S^3(y_1, y_2, y_3) \rangle$$

es una base.

En grado 4,  $h^0(4K_C) = 14$ . Sin embargo, en este caso, tenemos 15 secciones

$$S^4(y_1, y_2, y_3)$$

en  $H^0(4K_C)$ .

Por lo tanto, este conjunto debe ser linealmente dependiente sobre  $k$  en  $H^0(4K_C)$ ; es decir, existen  $a_i, b_i, c_i, a, b, c \in k$ , no todos cero, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 a_i y_1^{4-i} y_2^i + \sum_{i=1}^4 b_i y_1^{4-i} y_3^i + \sum_{i=1}^3 c_i y_2^{4-i} y_3^i + a y_1^2 y_2 y_3 + b y_1 y_2^2 y_3 + c y_1 y_2 y_3^2 &= 0 \\ f_4(y_1, y_2, y_3) &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que no hay más generadores y relaciones en el anillo  $R(C, K_C)$ . Para ello, hay que utilizar el corolario 1.1.1 con  $H^0(C, D) = \langle S^1(y_1, y_2) \rangle$  y  $A = nK_C$  para toda  $n > 4$ .  $\square$

Geométricamente,  $C \cong \text{Proj}(k[y_1, y_2, y_3]/(f_4(y_1, y_2, y_3)))$  es una cuártica no singular en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^2$  con género 3. Esto es constante con la *fórmula de Gauss* [Hartshorne AG,

Capítulo V, p. 361]), ya que

$$\begin{aligned} g &= \frac{(4-1)(4-2)}{2} \\ &= 3. \end{aligned}$$

### 3.3.2. Caso hiperelíptico

En esta última subsección, se dará un modelo de anillo para el caso hiperelíptico:

**Teorema 3.3.3.** *Sean  $C$  una curva de género 3 hiperelíptica y  $K_C$  su divisor canónico. Entonces,*

$$R(C, K_C) \cong k[y_1, y_2, y_3, u]/(y_1 y_3 - y_2^2, u^2 - F_4(y_1, y_2, y_3, u)),$$

donde  $y_1, y_2, y_3$  y  $u$  son elementos de grados 1 y 2, respectivamente, y  $F_4$  es un polinomio homogéneo de grado 4.

*Demostración.* Dado que  $C$  es hiperelíptica, por el lema 3.1.1,  $H^0((g-1)D) \cong H^0(K_C)$  para algún divisor  $D$  de grado 2 tal que  $H^0(2D) = \langle t_1^2, t_1 t_2, t_2^2 \rangle$  es una base.

Sean  $t_1^2 = y_1$ ,  $t_1 t_2 = y_2$ ,  $t_2^2 = y_3$ . Por consiguiente,  $H^0(K_C) = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$  es una base. Esto lo confirma la igualdad  $h^0(K_C) = 3$ .

En grado 2,  $H^0(2(g-1)D) \cong H^0(2K_C)$  y  $S^4(t_1, t_2) \subset H^0(4D)$  es linealmente independiente por el lema 3.1.1. Como  $h^0(4D) = h^0(2K_C) = 6$ , existe una  $u \in H^0(2D)$  tal que

$$H^0(4D) = \langle t_1^4, t_1^3 t_2, t_1^2 t_2^2, t_1 t_2^3, t_2^4, u \rangle$$

es una base. En particular,

$$H^0(2K_C) = \langle y_1^2, y_1 y_2, y_1 y_3, y_2 y_3, y_3^2, u \rangle$$

es una base.

Por otro lado, por el teorema 3.3.1, como  $C$  es hiperelíptica,  $\varphi_{K_C}$  es la composición de una cubierta doble  $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ , seguido de un encaje de  $\mathbb{P}^1$  a  $\mathbb{P}^2$  como una curva racional

de grado 2. Por ende, como  $y_2^2 \in H^0(2K_C)$ , resulta que  $S^2(y_1, y_2, y_3)$  es un conjunto linealmente dependiente, pues todos sus monomios en una combinación lineal, deben satisfacer una ecuación cuadrática debido a que  $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  tiene como imagen una cuadrática.

Por tanto, existen  $b_1, \dots, b_6$ , no todos cero, tales que

$$b_1y_1^2 + b_2y_1y_2 + b_3y_2^2 + b_4y_1y_3 + b_5y_2y_3 + b_6y_3^2 = 0. \quad (3.2)$$

Consideremos la proyectividad  $P : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ , dada por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

con  $A = \begin{pmatrix} b_1 & \frac{1}{2}b_2 & \frac{1}{2}b_4 \\ \frac{1}{2}b_2 & b_3 & \frac{1}{2}b_5 \\ \frac{1}{2}b_4 & \frac{1}{2}b_5 & b_6 \end{pmatrix}$  una matriz invertible. Entonces, la cuadrática (3.2) es equivalente a la cónica

$$y_1y_3 = y_2^2.$$

Para grado 3,  $H^0(3(g-1)D) \cong H^0(3K_C)$  y

$$\begin{aligned} S^6(t_1, t_2) &\subset H^0(6D) \\ S^2(t_1, t_2) \otimes_k \{u\} &\subset H^0(6D) \end{aligned}$$

son linealmente independientes por el lema 3.1.1.

Aquí,  $H^0(6D)$  es sumando directo de los subespacios

$$\begin{aligned} \langle S^6(t_1, t_2) \rangle \\ \langle S^2(t_1, t_2) \otimes_k \{u\} \rangle. \end{aligned}$$

Como las bases de estos subespacios son linealmente independientes, entonces el conjunto  $S^6(t_1, t_2) \cup S^2(t_1, t_2) \otimes_k \{u\}$  es linealmente independiente en  $H^0(6D)$ . Como  $h^0(6D) = h^0(3K_C) = 10$ , concluimos que

$$H^0(6D) = \langle S^6(t_1, t_2) \cup S^2(t_1, t_2) \otimes_k \{u\} \rangle$$

es una base. En particular,

$$H^0(3K_C) = \langle y_1^3, y_1^2 y_2, y_1^2 y_3, y_1 y_2 y_3, y_1 y_3^2, y_2 y_3^2, y_3^3, y_1^2 u, y_1 y_2 u, y_2^2 u \rangle$$

es una base.

Por razones análogas,  $H^0(8D) = \langle S^8(t_1, t_2) \cup S^4(t_1, t_2) \otimes_k \{u\} \rangle$  es una base. En particular,

$$H^0(4K_C) = \langle y_1^4, y_1^3 y_2, y_1^3 y_3, y_1^2 y_2 y_3, y_1^2 y_3^2, y_1 y_2 y_3^2, y_1 y_3^3, y_2 y_3^3, y_3^4, y_1^2 u, y_1 y_2 u, y_1 y_3 u, y_2 y_3 u, y_3^4 u \rangle$$

es una base.

Observemos que

$$y_1^2 y_2^2, y_1 y_2^3, y_2^4, y_2^3 y_3, y_2^2 y_3^2, u^2 \in H^0(4K_C).$$

Por lo tanto, debe existir una nueva relación de dependencia lineal entre estas secciones. En este caso, el coeficiente de  $u^2$ , debe ser no nulo. De no ser así, podemos escribir una ecuación de la forma

$$P(y_1, y_2, y_3) = d_1 y_1^2 u + d_2 y_1 y_2 u + d_3 y_1 y_3 u + d_4 y_2 y_3 u + d_5 y_3^2 u, \quad (3.3)$$

donde

$$P(y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=0}^4 a_i y_1^{4-i} y_2^i + \sum_{i=1}^4 b_i y_1^{4-i} y_3^i + \sum_{i=1}^3 c_i y_2^{4-i} y_3^i + a y_1^2 y_2 y_3 + b y_1 y_2^2 y_3 + c y_1 y_2 y_3^2,$$

con  $a_i, b_i, c_i, d_i, a, b, c \in k$  no todos cero.

Dado que  $C$  es hiperelíptica,  $K_C$  no es muy amplio por el teorema 3.3.1. Pero, en este caso,

$D$  sí es muy amplio (recordemos que  $\phi(C)$  es una cónica no singular). Por lo tanto, las secciones de  $H^0(K_C)$  (y, en particular,  $u$ ) no separan puntos, mientras que las secciones de  $H^0(D)$  (y, por lo tanto, las de  $S^d(t_1, t_2)$ , para  $d \geq 2$ ), sí separan puntos. Esto contradice a la relación (3.3), pues del lado derecho las secciones no separan puntos, pero del lado izquierdo sí.

Por lo tanto, tenemos una ecuación de la forma

$$P(y_1, y_2, y_3) + u(d_1y_1^2 + d_2y_1y_2 + d_3y_1y_3 + d_4y_2y_3 + d_5y_3^2) + eu^2 = 0, \quad (3.4)$$

donde  $e \neq 0$ .

Con un cambio de coordenadas de la forma  $u \mapsto \frac{-1}{e}u$ , podemos eliminar el coeficiente  $e$  de (3.4) para obtener

$$u^2 - F_4(y_1, y_2, y_3, u) = 0,$$

donde  $F_4$  es un polinomio de grado 4 definido por todos los monomios homogéneos de grado 4 de la ecuación (3.4) (excepto  $u^2$ ).

Para finalizar, hay que verificar que no hay más generadores y relaciones en el anillo  $R(C, K_C)$ . El razonamiento es análogo al utilizado en el caso no hiperelíptico.  $\square$

Este resultado nos dice que, el sistema lineal  $|K_C|$ , encaja de manera natural a  $C$  en el espacio torcido  $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ .

### 3.4. Otro modelo de curva de género 3

El siguiente resultado presenta un anillo polarizado con un divisor  $\mathbb{Q}$ -Cartier que será de gran utilidad en el siguiente capítulo:

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $C$  una curva de género 3 hiperelíptica,  $D = \frac{3}{2}P$  un divisor con  $P$*

un punto de Weierstrass de  $C$ . Entonces,

$$R(C, \frac{3}{2}P) \cong k[x, y, z, t, u, v]/(\bigwedge^2 \mathcal{M}, r_{10}, r_{11}, r_{12}),$$

donde

$$\bigwedge^2 \mathcal{M}$$

son los menores de la matriz

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} x & y & z & u \\ y & z & t & v \end{pmatrix}$$

$y$

$$r_{10}, \quad r_{11}, \quad r_{12}$$

son formas homogéneas de grados 10, 11 y 12, respectivamente.

*Demostración.* Por RR, para toda  $n \geq 5$ ,

$$h^0(nP) = n - 2.$$

Sea  $H$  la clase hiperelíptica de  $C$ . Por el lema 3.1.1,  $H^0(2H) \cong H^0(K_C)$ . Como  $P$  es un punto de Weierstrass de  $C$ , entonces  $H \sim 2P$ . Por lo tanto,

$$H^0(4P) \cong H^0(K_C). \tag{3.5}$$

En un punto de Weierstrass  $P \in C$  de una curva hiperelíptica de género 3, el *Teorema de los huecos de Weierstrass* (ver [Paul]) implica que los únicos órdenes no hueco (es decir, los órdenes permitidos para polos de secciones) son los enteros pares hasta 4; es decir, 0, 2 y 4. En este sentido, el orden 1 y 3 son huecos, lo que implica que no existe ninguna sección racional regular fuera y con un polo en  $P$  de orden 1 o 3. Este hecho y 3.5 implican:

$n = 1$ :  $h^0(K_C - P) = h^0(3P) = 2$  ya que las secciones con polos de orden a lo sumo 3 en

$P$ , son las constantes y las secciones no constantes con polos de orden 2 en  $P$ .

$n = 2$ :  $h^0(K_C - 2P) = h^0(2P) = 2$  ya que, nuevamente, solo están las secciones constantes y las secciones no constantes con polos de orden 2 en  $P$ .

$n = 3$ :  $h^0(K_C - 3P) = h^0(P) = 1$  pues las secciones constantes tienen un polo de orden cero en  $P$ .

$n = 4$ :  $h^0(K_C - 4P) = h^0(0) = 1$  por definición.

Finalmente, por RR,

$$h^0(nP) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1 \\ 2 & \text{si } n = 2, 3 \\ 3 & \text{si } n = 4 \\ n - 2 & \text{si } n \geq 5. \end{cases} \quad (3.6)$$

Por definición de anillo graduado,

$$R(C, \frac{1}{2}P) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0\left(n \cdot \frac{1}{2}P\right).$$

De las igualdades (3.6), obtenemos que los espacios relevantes son

$$s_a \in R_4 = H^0(2P), \quad s_b \in R_8 = H^0(4P), \quad s_c \in R_{14} = H^0(7P). \quad (3.7)$$

Para evitar ambigüedades, conviene distinguir dos nociones de “componentes de grado 28”:

- $S_{28}^{\text{alg}}$  será la componente homogénea de grado 28 en el álgebra formal  $k[a, b, c]$  cuando se asignan los *pesos algebraicos*  $\deg_{\text{alg}}(a, b, c) = (1, 4, 14)$ . Es decir,

$$S_{28}^{\text{alg}} = \langle a^i b^j c^k \mid i + 4j + 14k = 28 \rangle \subset k[a, b, c].$$

Una lista explícita de los monomios algebraicos de grado 28 es

$$\begin{aligned} & a^{28}, \quad a^{24}b, \quad a^{20}b^2, \quad a^{16}b^3, \quad a^{14}c, \\ & a^{12}b^4, \quad a^{10}bc, \quad a^8b^5, \quad a^6b^2c, \quad a^4b^6, \quad a^2b^3c, \quad b^7, \quad c^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\dim_k S_{28}^{\text{alg}} = 13.$$

- $S_{28}^{\text{geom}}$  será el subespacio de  $R(C, \frac{1}{2}P)$  generado por monomios en las secciones 3.7 que tienen *grado geométrico* 28, es decir

$$S_{28}^{\text{geom}} = \langle s_a^i s_b^j s_c^k \mid 4i + 8j + 14k = 28 \rangle.$$

Por lo tanto,

$$S_{28}^{\text{geom}} = \langle s_a^7, \quad s_a^5 s_b, \quad s_a^3 s_b^2, \quad s_a s_b^3, \quad s_c^2 \rangle \quad (\text{dimensión } 5).$$

Obsérvese que los cinco monomios anteriores son exactamente aquellos que *individualmente* representan secciones en  $H^0(14P)$ .

Fijemos las secciones 3.7 que tomamos como representantes de  $a, b, c$ . Consideremos la evaluación

$$\text{ev} : S_{28}^{\text{alg}} \longrightarrow R(C, \frac{1}{2}P), \quad \text{dada por} \quad a^i b^j c^k \longmapsto s_a^i s_b^j s_c^k.$$

Esta evaluación envía  $S_{28}^{\text{alg}}$  a una suma directa de piezas homogéneas geométricas de  $R(C, \frac{1}{2}P)$ . Definimos entonces

$$\varphi_{28} : S_{28}^{\text{alg}} \xrightarrow{\text{ev}} R(C, \frac{1}{2}P) \xrightarrow{\pi_{14}} H^0(14P),$$

donde  $\pi_{14}$  es la proyección sobre la pieza homogénea geométrica del divisor  $14P$ . Es decir,

$$\varphi_{28}(a^i b^j c^k) := \pi_{14}(s_a^i s_b^j s_c^k).$$

Si un monomio evaluado vive en una pieza geométrica diferente a  $H^0(14P)$ , su proyección  $\pi_{14}$  es cero.

Veamos que  $\varphi_{28}$  es suprayectiva. Sea  $t \in H^0(14P)$ . Por el corolario 1.1.1, el producto

$$\mu : H^0(2P) \otimes H^0(12P) \longrightarrow H^0(14P)$$

es suprayectivo; por lo tanto, existen  $r_\ell \in H^0(2P)$ ,  $u_\ell \in H^0(12P)$  y  $\alpha_\ell$  una constante tales que

$$t = \sum_\ell \alpha_\ell r_\ell u_\ell. \quad (3.8)$$

Cada  $v_\ell$  puede escribirse como evaluación de un polinomio homogéneo  $U_\ell(a, b, c) \in k[a, b, c]$  de grado algebraico 12. Es decir,

$$u_\ell = \text{ev}(U_\ell) = \text{ev}\left(\sum_{i+4j+14k=12} \alpha_{ijk} a^i b^j c^k\right) = \sum_{i+4j+14k=12} \alpha_{ijk} s_a^i s_b^j s_c^k.$$

De igual forma, cada  $r_\ell$  corresponde a un polinomio  $R_\ell \in k[a]$  de grado algebraico 0 o 1 (pues  $r_\ell$  es combinación de 1 y  $s_a$ ),

Por tanto,

$$t = \sum_\ell \alpha_\ell r_\ell u_\ell = \sum_\ell \alpha_\ell \text{ev}(R_\ell) \text{ev}(U_\ell) = \sum_\ell \alpha_\ell \text{ev}(R_\ell U_\ell).$$

Definamos

$$W(a, b, c) = \sum_\ell \alpha_\ell R_\ell(a, b, c) U_\ell(a, b, c) \in k[a, b, c].$$

Entonces,

$$t = \pi_{14}(\text{ev}(W)),$$

Sea  $W_{28}$  a componente homogénea de grado algebraico 28 de  $W$ . Como solo esta parte sobrevive bajo la proyección a  $H^0(14P)$ , obtenemos

$$t = \pi_{14}(\text{ev}(W)) = \varphi_{28}(W_{28}).$$

Por lo tanto,  $\varphi_{28}$  es suprayectiva.

Por (3.6),  $h^0(14P) = 12$ . Como  $\dim_k S_{28}^{\text{alg}} = 13$  y  $\varphi_{28}$  es suprayectiva, por el teorema rango-nulidad,

$$\dim_k \ker(\varphi_{28}) = 13 - 12 = 1.$$

Por lo tanto, existe una relación de grado 28 que aparecerá en la presentación del anillo:

$$\sum_{4i+8j+14k=28} \lambda_{ijk} s_a^i s_b^j s_c^k = 0. \quad (3.9)$$

Consideremos la involución hiperelíptica  $\iota$  que actúa por  $\iota(s_a) = s_a$ ,  $\iota(s_b) = s_b$ ,  $\iota(s_c) = -s_c$ . Aplicar  $\iota$  a (3.9) cambia  $c^k$  a  $(-1)^k c^k$ . Para que la ecuación global no cambie, todos los monomios con  $k$  impar deben tener coeficiente cero. Es decir, los monomios con  $k$  impar están prohibidos por la simetría bajo la involución hiperelíptica. La ecuación resultante contiene únicamente los términos con  $k$  par, dando precisamente

$$s_c^2 - \sum_{j=0}^7 \lambda_j s_a^{28-4j} s_b^j = 0,$$

o, volviendo a las variables formales,

$$c^2 - \sum_{j=0}^7 \lambda_j a^{28-4j} b^j = 0.$$

Esta es la única relación de dependencia lineal y no se necesitan más secciones para generar  $R(C, \frac{1}{2}P)$ . Para probarlo, necesitamos aplicar el corolario 1.1.1 como en los casos canónicos pero con  $D = 2P$  y  $A = (n-2)P$  para toda  $n > 14$ .

En conclusión, tenemos un anillo

$$R(C, \frac{1}{2}P) \cong k[a, b, c]/(c^2 - f_7(a^4, b)).$$

Por otra parte, utilizando un razonamiento análogo a la prueba de (3.6) con  $D = \frac{3}{2}P$ , se

concluye que

$$h^0(nD) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n = 0, \dots, 5 \\ n+2 & \text{si } n \geq 6. \end{cases} \quad (3.10)$$

En particular, hasta  $n = 5$ , las dimensiones son 1, 2, 3, 4, 5, 6. Esto ya nos dice que no pueden existir menos de 6 generadores: cada vez que la dimensión de la pieza  $R'_n$  aumenta, hace falta al menos un generador “nuevo” en grado  $n$ . Dado que los saltos se producen exactamente en  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , necesitamos 6 generadores en total (uno para cada dimensión hasta 6).

Por lo tanto, tomando la tercera truncación de Veronese de  $R(C, \frac{3}{2}P)$ , el anillo  $R(C, D)$  requiere 6 generadores

$$x = a^3, \quad y = a^2b, \quad z = ab^2, \quad t = b^3, \quad u = ac, \quad v = bc \quad (3.11)$$

de grados 1,2,3,4,5,6, respectivamente. Con estas nuevas definiciones, tenemos 6 relaciones tautológicas que son los menores

$$\bigwedge^2 \mathcal{M} \quad (3.12)$$

de la matriz

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} x & y & z & u \\ y & z & t & v \end{pmatrix}.$$

Además, tres relaciones se deducen a partir de  $c^2 = f_7(a^4, b)$ , las cuales son:

$$u^2 = a^2 f_7(a^4, b), \quad uv = ab f_f(a^4, b), \quad v^2 = b^2 f_7(a^4, b). \quad (3.13)$$

Notemos que los monomios de  $f_7$  podemos agruparlos como:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^7 \lambda_j a^{28-4j} b^j &= a(\lambda_0 a^{27} + \lambda_1 a^{23}b + \lambda_2 a^{19}b^2 + \lambda_3 a^{15}b^3 + \lambda_4 a^{11}b^4 + \lambda_5 a^7b^5 + \lambda_6 a^3b^6) + b(\lambda_7 b^6) \\ &= a(\lambda_0 x^9 + \lambda_1 x^7y + \lambda_2 x^6z + \lambda_3 x^5t + \lambda_4 x^3yt + \lambda_5 x^2zt + \lambda_6 xt^2) + b(\lambda_7 t^2) \\ &= aA + bB. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las relaciones (3.13) se reescriben como

$$r_{10} := -u^2 + xA + z^2B = 0, \quad r_{11} := -uv + yA + ztB = 0, \quad r_{12} := -v^2 + zA + t^2B = 0. \quad (3.14)$$

Aplicando el corolario 1.1.1 con  $D = 2P$  y  $A = nP$ ,  $n \geq 6$ , resulta que el anillo  $R(C, \frac{3}{2}P)$  no necesita más generadores y relaciones para ser generada. Por lo tanto,

$$R(C, \frac{3}{2}P) \cong k[x, y, z, t, u, v] / (\bigwedge^2 \mathcal{M}, r_{10}, r_{11}, r_{12}).$$

Esta presentación del anillo  $R(C, \frac{3}{2}P)$  se conoce como *presentación en factores rodantes*.

Por otro lado, utilizando un argumento análogo al expuesto en la prueba de 2.4.1, el anillo  $R(C, \frac{3}{2}P)$  resulta ser de Gorenstein. Recordemos que (consultar [Hartshorne AG, Capítulo II])

$$\dim(S) = \dim(\text{Proj}(S)) + 1,$$

donde  $S$  es un anillo graduado. En particular, como  $C$  es una variedad de dimensión 1, tenemos

$$\dim(R(C, \frac{3}{2}P)) = 1 + 1 = 2.$$

Por la igualdad (2.13),

$$\text{ht}(I) = \dim k[x, y, z, t, u, v] - \dim(R(C, \frac{3}{2}P)) = 4.$$

De aquí,  $R(C, \frac{3}{2}P)$  es de codimensión 4. □

**Corolario 3.4.1.** *Bajo las hipótesis del teorema 3.4.1,*

$$R(C, \frac{3}{2}P) \cong k[x, y, z, t, u, v]/(\mathbf{Pf}_4 M),$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & x & y & u \\ t & y & z & v \\ u & v & A & \\ 0 & Bz \\ Bt \end{pmatrix}, \text{ con pesos } wt(M) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \\ 4 & 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* La matriz  $M$  antisimétrica de  $6 \times 6$  tiene los siguientes pfaffianos de  $4 \times 4$ :

$$\begin{array}{ll} \text{Pf}_{1,2,3,4} = xt - zy & \text{Pf}_{1,2,5,6} = uz - yv = \text{Pf}_{2,3,4,5} \\ \text{Pf}_{1,2,3,5} = yt - z^2 & \text{Pf}_{1,2,4,6} = uy - xv = \text{Pf}_{1,3,4,5} \\ \text{Pf}_{1,2,3,6} = ut - zv & \text{Pf}_{1,3,5,6} = Btz - Ay + uv = \text{Pf}_{2,4,5,6} \\ \text{Pf}_{1,2,4,5} = y^2 - xz & \text{Pf}_{1,4,5,6} = Btx - Bzy = B\text{Pf}_{1,2,3,4} \\ \text{Pf}_{1,3,4,6} = Bz^2 - Ax + u^2 & \text{Pf}_{2,4,5,6} = Bty - Bz^2 = B\text{Pf}_{1,2,3,5} \\ \text{Pf}_{2,3,5,6} = Bt^2 - Az + v^2 & \text{Pf}_{3,4,5,6} = Btu - Bzv = B\text{Pf}_{1,2,3,6}. \end{array}$$

La segunda columna de pfaffianos son, en realidad, redundancias algebraicas que, por definición de ideal generado por las relaciones (3.12), (3.14), siguen perteneciendo al ideal que genera el anillo  $R(C, \frac{3}{2}P)$ . Por lo tanto, el ideal generado por los 15 pfaffianos  $\mathbf{Pf}_4 M$  en realidad es generado solo por 9 de ellos, que son las 9 relaciones que aparecen en la presentación de factores rodantes 3.4.1.  $\square$

# Capítulo 4

## Superficies de tipo general

En este último capítulo, basado en el artículo [Garza], se dará una breve descripción panorámica sobre la utilidad del programa de anillos graduados en la clasificación de superficies de tipo general; en particular, el objetivo de este capítulo es construir algunos anillos de secciones de una superficie de tipo general con  $K^2 = 6$  y  $p_g = 4$ .

### 4.1. Clasificación clásica de superficies

Daremos los ingredientes para la clasificación de superficies (las pruebas de los resultados de esta sección, pueden ser hallados en [Beauville]). Sea  $X$  una superficie proyectiva no singular sobre  $k$ . Entonces:

- El *género proyectivo* de  $X$  es el entero

$$p_g := h^0(K_X).$$

- La *irregularidad* de  $X$  es el entero

$$q := h^1(K_X).$$

- El *volumen canónico* de  $X$  es la autointersección de su clase canónica:

$$K_X^2.$$

- El  $m$ -ésimo *plurigénero* de  $X$  se define como el entero

$$P_m(X) := h^0(mK_X).$$

Los plurigéneros permiten definir un invariante birracional importante de  $X$ : la *dimensión de Kodaira de  $X$* , definida por

$$\kappa(X) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{P_m(X)}{m^n}\right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ está acotada}\}.$$

Cuando los plurigéneros son cero, se define

$$\kappa(X) = -\infty.$$

- $X$  se llama *minimal* (también nombrado *modelo minimal*), si no contiene curvas  $E \subset X$  tal que:  $E \cong \mathbb{P}^1$  y  $E^2 = -1$ .

Este tipo de curvas, en la literatura, son conocidas como *curvas excepcionales de primera clase*, o  $(-1)$ -curvas.

Algunos hechos sobre superficies minimales son:

- El teorema de contracción de Castelnuovo (página 24), establece que toda superficie no singular  $X'$  que contiene una curva excepcional de primera clase, es el blowup de una superficie no singular  $X$  en un punto  $P \in X$ .
- Toda superficie  $X$  puede obtenerse a partir de una superficie minimal  $S$ , después de una cantidad finita de blowups de puntos no singulares.
- Toda superficie no singular es biracional a una superficie minimal.

- Cuando la superficie es minimal, el volumen canónico resulta ser un invariante biracional.
- Estos invariantes, determinan otros invariantes clásicos, como por ejemplo, *la característica de Euler de la gavilla estructural*

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q + p_g;$$

o bien, la *característica topológica de Euler*  $e(X)$ :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(e(X) + K_X^2).$$

Así, estamos en condiciones de enunciar el primer teorema que establece una clasificación de superficies minimales:

**Teorema 4.1.1 (La clasificación de Enriques-Kodaira).** *Sea  $X$  una superficie minimal con dimensión de Kodaira  $\kappa$  e irregularidad  $q$ . Entonces  $X$  es alguna de las siguientes superficies:*

- $\kappa = -\infty$ 
  - $\mathbb{P}^2$ .
  - Una superficie reglada. Es decir, existe una fibración  $X \rightarrow A$ , con  $A$  una curva no singular, en la que todas sus fibras son isomorfas a  $\mathbb{P}^1$ .
- $\kappa = 0$ 
  - Una superficie K3. Es decir, es simplemente conexa, regular ( $q = 0$ ) y tal que  $\mathcal{O}_X \cong K_X$ .
  - Una superficie de Enriques. Es decir, es regular,  $\mathcal{O}_X \not\cong K_X$  pero  $\mathcal{O}_X \cong 2K_X$ .
  - Una superficie abeliana. Esto es, es un cociente de  $\mathbb{C}^2$  por una latiz de rango 4, con  $\mathcal{O}_X \cong K_X$  y  $q = 2$ .

- $\kappa = 1$

*Una superficie minimal elíptica. Esto es, existe una fibración  $X \rightarrow A$  sobre una curva no singular  $A$ , cuya fibra general es una curva elíptica. Este tipo de superficies tienen  $K_X^2 = 0$ .*

- $\kappa = 2$

*Una superficie de tipo general.*

#### Observación 4.1.1.

- 1) En general, una variedad  $X$  proyectiva y no singular de dimensión  $n$  es de *tipo general* si  $\kappa(X) = n$ . Por ejemplo, cualquier curva  $C$  no singular de género  $g \geq 2$ , es de tipo general, pues  $\kappa(C) = 1$ .
- 2) La única superficie reglada que no es minimal, es el pergamino  $\mathbb{F}_1$ . Cualquier otra superficie reglada, es una superficie minimal.
- 3) No todas las superficies elípticas tienen dimensión de Kodaira 1. Las hay también con  $\kappa = -\infty, 0$ . Por ejemplo, toda superficie de Enriques, es elíptica.

Mientras que las superficies minimales con dimensión de Kodaira  $\kappa = -\infty, 1, 0$  son relativamente bien entendidas, existen varios problemas abiertos sobre superficies de tipo general, incluso desde los tiempos de Enriques.

Los métodos del programa de anillos graduados, son efectivos atacando problemas en que las superficies son *regulares* (es decir,  $q = 0$ ). En este sentido, conviene tener presente el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.2 (Desigualdad de Debarre).** *Si  $X$  es una superficie minimal irregular (es decir,  $q \geq 1$ ), entonces*

$$K_X^2 \geq 2p_g.$$

*Demostración.* Ver [Debarre], théorème 6.1. □

Así pues, por ejemplo, si deseamos estudiar a la superficie de tipo general con  $p_g = 4$  y  $K_X^2 = 6$ , entonces ésta resulta ser regular y, por lo tanto, los métodos de anillos graduados van a funcionar. En general, cualquier superficie general con pareja  $(K_X, p_g)$  que no satisfaga la desigualdad de Debarre, será regular.

## 4.2. Problemas móduli en superficies de tipo general

Bombieri demostró en [Bombieri] que toda superficie minimal de tipo general  $S$  con invariantes  $K_S, p_g, q$  fijos, es birracional a una superficie normal  $Y \subset \mathbb{P}^{p_g-1}$ . La superficie  $X$  está determinada unívocamente y es llamada el *modelo canónico* de  $S$ .

Geométricamente,  $X$  se obtiene contrayendo todas las  $(-2)$ -curvas (esto es, todas las curvas  $E \subset S$  tales que  $E \cong \mathbb{P}^1$  y  $E^2 = -2$ ) de  $S$  a puntos.

Algebraicamente,  $X$  se construye tomando el Proj del anillo canónico  $R(X, K_X)$ , obteniendo una superficie birracional a una superficie minimal, que a lo sumo, puede tener puntos dobles ordinarios como singularidades (estas son llamadas *singularidades de Du Val*).

En el contexto de modelos canónicos, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.1.** *Existe un esquema móduli casi proyectivo y grueso para modelos canónicos de superficies de tipo general con volumen canónico y característica topológica de Euler fijos.*

*Demostración.* Ver [Gieseker]. □

En particular, existe un subesquema (que suele denominarse como  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$ ) que parametriza a las superficies minimales de tipo general con los invariantes numéricos mencionados.

Por el teorema enunciado anteriormente, podemos concluir que  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$  es un esquema casi proyectivo. En particular, tiene una cantidad finita de componentes irreducibles. Más

aún, resulta que su dimensión está acotada por debajo de

$$10\chi(\mathcal{O}_S) - 2K_S^2$$

(para ver una prueba de este resultado, consultar [Kuranishi]).

En conclusión, el objetivo final de la teoría moderna de clasificación de superficies de tipo general, es describir completamente las componentes irreducibles de  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$ .

### 4.3. Los métodos de los anillos graduados

Parte central del programa de anillos graduados, es el principio de que las propiedades algebro geométricas de un anillo/variedad, están fuertemente relacionadas con la de sus secciones hiperplanares. El ingrediente central, formalizando esta idea, está contenido en el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.1.** (*El principio de secciones hiperplanares*) *Sea  $R$  un anillo graduado. Sean  $R_d$  sus componentes de grado  $d \geq 1$  y  $x_0 \in R_d$  un elemento que no sea divisor de cero. Entonces, existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow R(-d) \xrightarrow{x_0} R \xrightarrow{\pi} \overline{R} \longrightarrow 0;$$

donde  $\overline{R} = R/(x_0)$ , y la sucesión es tal que:

- 1) Si  $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n} \in \overline{R}$  generan a  $\overline{R}$  y  $x_1, \dots, x_n \in R$  son tales que, para toda  $1 \leq i \leq n$ ,  $\pi(x_i) = \overline{x_i}$ , entonces  $x_0, x_1, \dots, x_n$  generan a  $R$ .
- 2) Sea

$$\overline{R} \cong k[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}]/(f_1, \dots, f_m).$$

Entonces, existen relaciones  $F_1, \dots, F_m$  entre los generadores  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tales que, para toda  $1 \leq i \leq m$ ,  $\pi(F_i) = f_i$ , y cada  $F_i$  genera al ideal  $\ker(ev)$ , donde

$$ev : k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow R$$

es el morfismo evaluación.

3) Si tenemos una sizigia  $\sum_{j=1}^m l_j f_j = 0$  en el anillo  $k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ , entonces existen polinomios  $L_j \in k[x_0, \dots, x_n]$  tales que:

$$\sum_{i=1}^m L_i F_i = 0$$

es una sizigia en el anillo  $k[x_0, \dots, x_n]$ , donde cada  $L_j$  se reduce a  $l_j$  módulo  $x_0$ .

*Demostración.* Veáse [Graded rings]. □

Sean  $X$  el modelo canónico de una superficie minimal de tipo general regular  $S$ ,  $C \in |K_X|$  una sección hiperplanar dada por los ceros de una sección  $x_0 \in H^0(X, K_X)$  y  $D = K_X|_C$

Si escribimos

$$R(X, K_X) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nK_X)$$

y

$$R(C, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, nD),$$

entonces, por el principio de secciones hiperplanares, tenemos

$$R(C, D) \cong R(X, K_X)/(x_0).$$

En particular, resulta que  $R(C, D)$  y  $R(X, K_X)$ , tendrán el mismo número de generadores (salvo  $x_0$ ); tendrán el mismo número de sizigias; y tendrán el mismo número de relaciones.

Debido a que geométricamente las curvas  $C$  son relativamente mejor entendidas, resultará más fácil calcular el anillo  $R(C, D)$ . Es en este punto cuando los métodos mostrados en los capítulos II y III de esta tesis, resultarán muy útiles. Pero todo esto está sujeto a cómo es el sistema lineal  $|K_S|$ , que a su vez depende del par numérico  $(K_S^2, p_g)$ .

## 4.4. Superficies de tipo general con $K^2 = 6$ y $p_g = 4$

Sea  $S$  una superficie minimal con  $K_S^2 = 6$  y  $p_g = 4$ . Nuestro objetivo es construir  $R(S, K_S)$ . Para ello, tengamos presente que Horikawa en su artículo [Horikawa III], probó que la estratificación del espacio moduli  $\mathcal{M}_{6,4}$  está dividido en 11 estratos.

En este trabajo, solo se hará mención de los estratos de nuestro interés. Para más detalles, consultar [Horikawa III].

*I<sub>a</sub>*: Está formado por superficies cuyo sistema canónico no tiene puntos base y cuyo mapeo canónico  $\varphi_{K_S}$  tiene grado 1.

*II*: Mismas hipótesis que en el primer estrato pero con  $\varphi_{K_S}$  de grado 3.

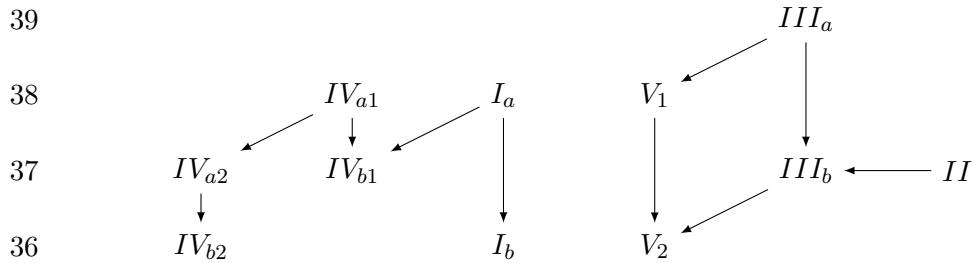
*III<sub>b</sub>*: Está formado por superficies  $S$  que tienen un mapeo canónico de grado 2, no admiten un haz de género 2 (esto es, no existen morfismos suprayectivos  $f : S \rightarrow \Delta$ , donde  $\Delta \subset k$  es un disco alrededor de 0, con fibras conexas cuya fibra genérica  $f^{-1}(p)$ ,  $p \neq 0$ , es una curva no singular de género 2) y  $|K_S|$  tiene un solo punto base singular con  $\varphi_{K_S}(S) \subset \mathbb{P}^3$  un cono cuadrático.

*V<sub>1</sub>*: Está formado por superficies  $S$  que admiten un haz de género 2, su imagen canónica es un cono cuadrático y  $|K_S|$  tiene dos puntos base no singulares.

Sean  $A$  y  $B$  dos estratos localmente cerrados e irreducibles de un espacio móduli  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$ .

Una flecha  $A \rightarrow B$  significa que existe un morfismo plano  $f : \mathcal{X} \rightarrow \Delta$  tal que  $f^{-1}(p_0)$  es una variedad de tipo  $B$  y  $f^{-1}(p)$  es una variedad de tipo  $A$  para  $p \neq p_0$ . Casi siempre  $\Delta \subset k$  es un disco alrededor de 0 y  $p_0 = 0$ . En otras palabras, la flecha  $A \rightarrow B$  significa que la cerradura del estrato  $A$  intersecta al estrato  $B$ . También se dice que las variedades de tipo  $B$  son una degeneración de las de tipo  $A$ , o bien, que las variedades de tipo  $A$  son pequeñas deformaciones de las de tipo  $B$ .

Con la notación anterior,  $\mathcal{M}_{6,4}$  tiene 4 componentes irreducibles uniracionales cuyas dimensiones (junto con la información conocida hasta la fecha sobre las posibles deformaciones) se muestra en el siguiente diagrama:

Figura 4.1: Estratos de  $\mathcal{M}_{6,4}$  y sus degeneraciones

#### 4.4.1. La degeneración $II \rightarrow III_b$

Utilizaremos las técnicas del programa de anillos graduados para describir la degeneración  $II \rightarrow III_b$  como se propone en [BCP]. Para más detalles, sugerimos consultar [Garza].

Comencemos por describir explícitamente qué significan los estratos  $II$  y  $III_b$  en términos de sus secciones hiperplanares:

$II$ : El sistema lineal  $|K_S|$  es libre de puntos base y define un morfismo 3 a 1  $\varphi_{K_S} : S \rightarrow \varphi_{K_S}(S) = \bar{S} \subset \mathbb{P}^3$ , donde  $\bar{S}$  es el cono cuadrático (una superficie reglada) dado por una ecuación de la forma  $x_1x_3 = x_2^2$ . En este caso,  $A = \varphi_{K_S}^*(\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)))$  genera un haz  $|A|$  en  $S$  con  $2A = K_S$ , donde  $\pi : \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$  es la proyección. En general,  $S$  tiene un punto de orbidad de tipo  $\frac{1}{2}(1, 1)$  sobre el vértice de  $\bar{S}$ . Para una curva general  $C \in |A|$ , resulta  $A|_C = \frac{1}{2}P + Q := D$  tal que  $2D = P + 2Q$  es un  $g_1^3$  (en notación italiana, esto indica que  $C$  es trigonal). Aquí  $P = \varphi_{K_S}^{-1}(V)$ , donde  $V = (1 : 0 : 0 : 0)$  es el vértice del cono  $\bar{S}$  y  $Q$  es un punto de Weierstrass de  $C$  (un punto de ramificación del morfismo 3 a 1 de  $C$  a  $\mathbb{P}^1$ ).

$III_b$ : El sistema lineal  $|K_S|$  tiene un punto base singular y  $\varphi_{K_S}$  es una cubierta doble, con  $\bar{S}$  un cono cuadrático. Nuevamente  $K_S = 2A$ , donde  $A$  es el pullback del haz de líneas de  $\bar{S}$ . Tenemos  $A^2 = \frac{3}{2}$ . La curva general  $C \in |A|$  es hiperelíptica y no singular de género 3, y el divisor  $A|_C = \frac{3}{2}P := D$ , donde  $P$  es un punto de Weierstrass (un punto de ramificación del morfismo 2 a 1 de  $C$  a  $\mathbb{P}^1$ ). Se sigue que  $|2D| = P + g_2^1$ , es decir,  $2D$  es un  $g_3^1$ .

En el artículo [BCP], la estrategia utilizada para hallar los anillos  $R(S, K_S)$  de estos estratos es construir las secciones hiperplanares  $R(C, D)$ .

### El anillo del estrato $II$

Sea  $C$  una curva de género 3 cuyo sistema lineal es  $D = \frac{1}{2}P + Q$ . Por la fórmula de adjunción, tenemos

$$\begin{aligned} K_C &= (K_S + C)|_C \\ &= (2A + C)|_C \\ &= 2A|_C + C|_C, \end{aligned}$$

y esto último es por la linealidad del pullback. Como estamos en el estrato  $II$ ,

$$2A|_C = 2D = P + 2Q.$$

Por otro lado, recordemos que  $\text{Bs}(|A|) = \bigcap_{C \in |A|} C$  y  $A^2 = \text{length}(\text{Bs}(|A|))$ . Como  $\varphi_{K_S}$  es regular, entonces  $H^0(\overline{S}, \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))) \subseteq H^0(S, A)$ . Puesto que el pull-back de secciones es inyectivo para morfismos finitos sin puntos fijos, obtenemos  $h^0(S, A) \geq h^0(\overline{S}, \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 2$  (por la fórmula de proyección para fibrados proyectivos). Por lo tanto, el *lema 2.1* de [BCP] implica que  $A^2 = 1$ ; es decir,  $\text{Bs}(|A|) = \{Q\}$ . En consecuencia,  $C|_C = Q$ . Finalmente,

$$K_C = P + 3Q. \tag{4.1}$$

Aplicando RR a 4.1 y  $D$ , con el supuesto que es  $\mathbb{Q}$ -Cartier y  $2D$  un  $g_3^1$ , tenemos

$$h^0(nD) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 & \text{si } n = 3 \\ \frac{3n}{2} - 2 & \text{si } n \geq 4 \text{ par} \\ \frac{3n-1}{2} - 2 & \text{si } n \geq 4 \text{ impar.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Utilizando 4.2, podemos construir las bases de cada  $H^0(nD)$ :

Sea  $\{x\}$  una base de  $H^0(D)$ . Como  $H^0(D) = H^0(Q)$ ,  $x$  resulta ser una función racional no constante regular en  $P$  pero con un polo simple en  $Q$ . Este sencillo análisis (análogo al utilizado en la prueba del caso elíptico 2.1.1) funciona para construir las bases de cada  $H^0(nD)$  que enlistaremos a continuación:

Espacio	Dimensión	Generadores	Relaciones
$H^0(D)$	1	$x$	Ninguna
$H^0(2D)$	2	$x^2, y$	Ninguna
$H^0(3D)$	3	$x^3, xy, z$	Ninguna
$H^0(4D)$	4	$x^4, x^2y, xz, y^2$	Ninguna
$H^0(5D)$	5	$x^5, x^3y, x^2z, xy^2, yz$	Ninguna
$H^0(6D)$	7	$x^6, x^4y, x^3z, x^2y^2, xyz, y^3, z^2$	Ninguna
$H^0(7D)$	8	$x^7, x^5y, x^4z, x^3y^2, x^2yz, y^2z, y^3x, z^2x$	Ninguna
$H^0(8D)$	10	$x^8, x^6y, x^5z, x^4y^2, x^3yz, yz^2, y^2xz, y^3x^2, y^4, z^2x^2$	Ninguna
$H^0(9D)$	11	$x^9, x^7y, x^5y^2, x^3y^3, xy^4, x^6z, x^4yz, x^2y^2z, y^3z, x^3z^2, xyz^2, z^3$	$f_9(x, y, z)$

Por lo tanto, existen  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 12$  coeficientes complejos, no todos ceros, tales que

$$a_1x^9 + a_2x^7y + a_3x^5y^2 + a_4x^3y^3 + a_5xy^4 + a_6x^6z + a_7x^4yz + a_8x^2y^2z + a_9y^3z + a_{10}x^3z^2 + a_{11}xyz^2 + a_{12}z^3 = 0$$

El anillo  $R(C, D)$  no necesita más secciones y relaciones para ser generado. Para verificarlo, es necesario aplicar el corolario 1.1.1 con  $D' = 2D$   $A = nD$  y para  $n \geq 9$  (par o impar, según 1.2).

En conclusión, tenemos un anillo

$$R(C, D) \cong k[x, y, z]/(f_9(x, y, z)). \quad (4.3)$$

Geométricamente,  $C$  es una curva de grado nueve encajada en el espacio proyectivo torcido  $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ .

### El anillo del estrato $II$

Utilizando los supuestos del estrato  $II$ , el anillo es el dictado por el corolario 3.4.1:

$$R(C, \frac{3}{2}P) \cong k[x, y, z, t, u, v]/(\mathbf{Pf}_4 M),$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & x & y & u \\ & t & y & z & v \\ & & u & v & A \\ & & 0 & Bz \\ & & & Bt \end{pmatrix}.$$

La primera entrada de  $M$  es de grado cero. No siempre ocurre, pero esto permite escribir la siguiente familia de anillos:

$$R_\lambda = k[x, y, z, t, u, v]/(\mathbf{Pf}_4 M_\lambda),$$

donde

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & z & x & y & u \\ & t & y & z & v \\ & & u & v & A \\ & & & B\lambda & Bz \\ & & & & Bt \end{pmatrix}$$

y  $\lambda \in \Delta \subset \mathbb{C}$  con  $\Delta$  un disco pequeño alrededor de 0. Nuevamente,  $M_\lambda$  es una matriz antisimétrica de  $6 \times 6$ , por lo que es posible calcular los pfaffianos de sus matrices de  $4 \times 4$ :

$$\mathcal{A} : \begin{cases} \text{Pf}_{1234} = \lambda u - zy + tx \\ \text{Pf}_{1235} = \lambda v - z^2 + ty \\ \text{Pf}_{1245} = \lambda^2 B - xz + y^2 \\ \text{Pf}_{1236} = \lambda A - zv + tu \end{cases} \quad \mathcal{B} : \begin{cases} \text{Pf}_{1345} = \lambda Bz - yv + zu = \text{Pf}_{1246} \\ \text{Pf}_{1456} = xBt - yBz + B\lambda u = B \cdot \text{Pf}_{1234} \\ \text{Pf}_{2345} = tB\lambda - yv + uz = \text{Pf}_{1256} \\ \text{Pf}_{2346} = tBz - yA + uv = \text{Pf}_{1356} \\ \text{Pf}_{2456} = yBt - Bz^2 + B\lambda v = B \cdot \text{Pf}_{1235} \\ \text{Pf}_{3456} = uBt - vBz + B\lambda A = B \cdot \text{Pf}_{1246} \end{cases}$$
  

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \text{Pf}_{1246} = \lambda Bz - xv + yu \\ \text{Pf}_{1256} = \lambda Bt - yv + zu \\ \text{Pf}_{1346} = Bz^2 - xA + u^2 \\ \text{Pf}_{1356} = Btz - yA + uv \\ \text{Pf}_{2356} = Bt^2 - zA + v^2. \end{cases}$$

**Fibra singular ( $\lambda = 0$ ) y fibra general ( $\lambda \neq 0$ )**

Cuando  $\lambda = 0$ , este caso corresponde a la sección hiperplanar 3.4.1 del estrato  $III_b$ .

Para mostrar que la fibra general es de tipo  $II$ , primero veamos que los ideales  $(\mathcal{B})$  y  $(\mathcal{C})$  satisfacen  $(\mathcal{B}) \subset (\mathcal{A})$  y  $(\mathcal{C}) \subset (\mathcal{A})$ . Supongamos que  $\lambda \neq 0$ . De los pfaffianos  $\text{Pf}_{1234}$ ,  $\text{Pf}_{1235}$ ,  $\text{Pf}_{1245}$  de  $(\mathcal{A})$ , podemos extraer las ecuaciones

$$\begin{cases} u = \frac{zy - tx}{\lambda} \\ v = \frac{z^2 - ty}{\lambda} \\ B = \frac{xz - y^2}{\lambda^2}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Veamos el pfaffiano  $\text{Pf}_{1246}$  de  $(\mathcal{C})$ . Si sustituimos las ecuaciones (4.4) en  $\text{Pf}_{1246}$ , obtenemos

$$\lambda\left(\frac{xz - y^2}{\lambda^2}\right)z - x\left(\frac{z^2 - ty}{\lambda}\right) + y\left(\frac{zy - tx}{\lambda}\right) = 0.$$

Si multiplicamos todo por  $\lambda$  y reagrupamos, obtenemos la identidad

$$(zy - tx)y - (z^2 - ty)x + (xz - y^2)z = 0,$$

que es exactamente

$$y\text{Pf}_{1234} - x\text{Pf}_{1235} + z\text{Pf}_{1245} = 0.$$

Por lo tanto,  $\text{Pf}_{1246} \in (\mathcal{A})$ . Análogamente se verifica que cada uno de los restantes pfaffianos de  $\mathcal{C}$  se expresa como combinación lineal de  $\text{Pf}_{1234}, \text{Pf}_{1235}, \text{Pf}_{1245}$ . Por lo tanto,  $(\mathcal{C}) \subset (\mathcal{A})$ .

Por otro lado, todos los pfaffianos de  $(\mathcal{B})$  son de la forma

$$B\text{Pf}_{1ijk}, \quad \text{Pf}_{1246}, \quad \text{Pf}_{1256}, \quad \text{Pf}_{1356},$$

y dado que cada pfaffiano anterior está en  $(\mathcal{A})$  y  $B \in (\mathcal{A})$ , resulta que  $(\mathcal{B}) \subset (\mathcal{A})$ . En consecuencia, todos los pfaffianos son redundantes salvo

$$\text{Pf}_{1236} = \lambda A - zv + tu.$$

### El pfaffiano $\text{Pf}_{1236}$ es equivalente a una ecuación de grado 9

El objetivo de esta subsección es verificar que el único pfaffiano no redundante  $\text{Pf}_{1236}$  es una ecuación de grado 9 en términos de  $x, y, z$  con los pesos  $(1, 2, 3)$ , que es equivalente a la relación  $f_9$  de la sección hiperplanar 4.3 del estrato  $II$ .

Recordemos que  $B = \frac{xz - y^2}{\lambda^2}$ . Como  $B = \lambda_7 t^2$ , de la tercera igualdad de (4.4), obtenemos

$$t^2 = \frac{xz - y^2}{\lambda_7 \lambda^2}. \tag{4.5}$$

Sustituimos  $u, v$  en  $\text{Pf}_{1236}$  para obtener

$$\begin{aligned}\lambda A - zv + tu &= \lambda A - z\left(\frac{z^2 - ty}{\lambda}\right) + t\left(\frac{zy - tx}{\lambda}\right) \\ &= \lambda A + \frac{-z^3 + zty + tzy - t^2x}{\lambda} \\ &= \lambda A + \frac{-z^3 + 2zty - xt^2}{\lambda},\end{aligned}$$

y luego multiplicamos por  $\lambda$ :

$$\lambda^2 A - z^3 + 2zty - xt^2 = 0.$$

Recordemos que

$$A(x, y, z, t) = \lambda_0 x^9 + \lambda_1 x^7 y + \lambda_2 x^6 z + \lambda_3 x^5 t + \lambda_4 x^3 y t + \lambda_5 x^2 z t + \lambda_6 x t^2.$$

Entonces,

$$\lambda^2 A = \lambda^2 \lambda_0 x^9 + \lambda^2 \lambda_1 x^7 y + \lambda^2 \lambda_2 x^6 z + \lambda^2 \lambda_3 x^5 t + \lambda^2 \lambda_4 x^3 y t + \lambda^2 \lambda_5 x^2 z t + \lambda^2 \lambda_6 x t^2.$$

Por lo tanto,

$$\lambda^2 \lambda_0 x^9 + \lambda^2 \lambda_1 x^7 y + \lambda^2 \lambda_2 x^6 z + \lambda^2 \lambda_3 x^5 t + \lambda^2 \lambda_4 x^3 y t + \lambda^2 \lambda_5 x^2 z t + \lambda^2 \lambda_6 x t^2 - z^3 + 2zty - xt^2 = 0.$$

Esta última igualdad se reescribe como

$$\begin{aligned}(\lambda^2 \lambda_6 x - x)t^2 + (\lambda^2 \lambda_3 x^5 + \lambda^2 \lambda_4 x^3 y + \lambda^2 \lambda_5 x^2 z + 2zy)t + \lambda^2 \lambda_0 x^9 + \lambda^2 \lambda_1 x^7 y + \lambda^2 \lambda_2 x^6 z - z^3 &= 0 \\ C_0(x, y, z)t^2 + C_1(x, y, z)t + C_0(x, y, z) &= 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Supongamos que  $C_1(x, y, z) \neq 0$  para algún punto  $(x, y, z)$ . Entonces, al sustituir  $t = +\Delta = +\sqrt{\frac{xz-y^2}{\lambda^2 \lambda_7}} > 0$ , la ecuación (4.6) se convierte en

$$C_2(x, y, z)\Delta^2 + C_1(x, y, z)\Delta + C_0(x, y, z) = 0.$$

Pero si cambiamos a la otra raíz  $t = -\Delta$ , el mismo polinomio (4.6) queda

$$C_2(x, y, z)\Delta^2 - C_1(x, y, z)\Delta + C_0(x, y, z) = 0.$$

Si restamos ambas ecuaciones, obtenemos

$$2C_1(x, y, z)\Delta = 0.$$

Pero  $\Delta \neq 0$ , pues  $xz - y^2 > 0$ . Por lo tanto,  $C_1(x, y, z) = 0$ , lo que es una contradicción.

Por lo tanto, necesariamente

$$C_1(x, y, z) = 0.$$

Entonces, (4.6) se reduce a

$$(\lambda^2\lambda_6 x - x)t^2 + \lambda^2\lambda_0 x^9 + \lambda^2\lambda_1 x^7y + \lambda^2\lambda_2 x^6z - z^3 = 0$$

Sustituyendo 4.5 en la ecuación anterior y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} & (\lambda^2\lambda_6 x - x) \left( \frac{xz - y^2}{\lambda_7 \lambda^2} \right) + \lambda^2\lambda_0 x^9 + \lambda^2\lambda_1 x^7y + \lambda^2\lambda_2 x^6z - z^3 = 0 \\ & (\lambda^2\lambda_6 x - x)(xz - y^2) + (\lambda_7 \lambda^2) (\lambda^2\lambda_0 x^9 + \lambda^2\lambda_1 x^7y + \lambda^2\lambda_2 x^6z - z^3) = 0 \\ & \lambda^3\lambda_0 x^9 + \lambda^3\lambda_1 x^7y + \lambda^3\lambda_2 x^6z + (\lambda^2\lambda_6 - 1)x^5y^2 + (\lambda^2\lambda_6 - 1)x^3y^3 \\ & + (\lambda^2\lambda_6 - 1)xy^4 + (\lambda^2\lambda_6 - 1)x^4yz - 2(\lambda^2\lambda_6 - 1)x^2y^2z \\ & + (\lambda^2\lambda_6 - 1)y^3z + (\lambda^2\lambda_6 - 1)x^3z^2 - \lambda z^3 = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, renombrando los coeficientes de la última ecuación por  $\alpha_i$  obtenemos

$$\alpha_1x^9 + \alpha_2x^7y + \alpha_3x^6z + \alpha_4x^5y^2 + \alpha_5x^3y^3 + \alpha_6xy^4 + \alpha_7x^4yz + \alpha_8x^2y^2z + \alpha_9y^3z + \alpha_{10}x^3z^2 + \alpha_{11}z^3 = 0. \quad (4.7)$$

Esta ecuación, bajo una proyectividad, es equivalente a la ecuación de grado 9 definida en 4.3.

En conclusión, cuando  $\lambda \neq 0$ , el anillo  $R_\lambda$  define un anillo de codimensión 1 definido por la ecuación (4.7) que, en la graduación inducida por  $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ , es homogénea de grado 9. Es decir, el  $\text{Proj}(R_\lambda)$  es una curva de grado 9 en el espacio torcido  $\mathbb{P}(1, 2, 3)$  que corresponde con una sección hiperplanar del estrato  $II$  (4.3). Esto prueba que existe una degeneración de estratos  $II \rightarrow II_b$  en el espacio moduli  $\mathcal{M}_{6,4}$ .

En resumen, utilizamos una familia de matrices, que en la literatura se le conoce como *formato extrasimétrico*, que deforma una curva de codimensión 4 (sección hiperplanar del estrato  $III_b$ ) a una curva de codimensión 1 en la fibra general (sección hiperplanar del estrato  $II$ ).

#### 4.4.2. ¿Qué falta por estudiar en el espacio moduli $\mathcal{M}_{6,4}$ ?

En el diagrama (4.1) no se sabe si existen más flechas de deformación. Tampoco se conocen los anillos canónicos para las superficies en cada uno de los estratos (salvo los presentados en este trabajo). Finalmente, no se sabe si el espacio moduli  $\mathcal{M}_{6,4}$  tiene una o dos componentes irreducibles. En la monografía [Garza] se conjectura que existe la deformación  $I_a \rightarrow V_1$ . De poder probarse esta conjectura, además se estaría probando que  $\mathcal{M}_{6,4}$  es irreducible.

Una posible estrategia para atacar este problema, es hallar una *variedad molde* cuyo anillo sea de codimensión 6 (resulta que la parametrización del estrato  $V_1$  es de esta codimensión), tales que sus ecuaciones estén contenidas en una matriz (o formato) como sus pfaffianos, y que éstas permitan degenerar esta variedad en una de codimensión más pequeña (en nuestro caso de interés,  $I_a$  es de codimensión 4), justo como en la filosofía del ejemplo  $II \rightarrow II_b$ .

Se conocen un par de superficies con este comportamiento.

El trabajo a futuro inmediato que se propone es intentar encontrar dicha variedad molde a partir de estas superficies, con los métodos presentados en esta tesis, que nos permita resolver esta conjectura.

# Bibliografía

- [ABR] Altinok, S., Brown, G., Reid, M. (2002). *Fano 3-folds, K3 surfaces and graded rings*, pp. 25-53 en: *Topology and geometry: commemorating SISTAG, Contemp. Math.* **314**, Providence (RI): American Mathematical Society.
- [Atiyah] Atiyah, M. F., & Macdonald, I. G. (2018). *Introduction to commutative algebra*. CRC Press.
- [BCP] Bauer, I. C., Catanese, F. M., & Pignatelli, R. (2004). *The moduli space of surfaces with  $K^2 = 6, p_g = 4$* . arXiv preprint math/0408062.
- [Beauville] Beauville, A. (1996). *Complex algebraic surfaces* (No. 34). Cambridge University Press.
- [Bruns] Bruns, W., Herzog, H. J. (1998). *Cohen-Macaulay Rings*. UK: Cambridge University Press.
- [Bombieri] Bombieri, E. (1973). *Canonical models of surfaces of general type*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 42, 171-219.
- [DB] Buchsbaum, D. A., & Eisenbud, D. (1977). *Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3*. American Journal of Mathematics, 99(3), 447-485.
- [Debarre] Debarre, O. (1982). *Inégalités numériques pour les surfaces de type général*. Appendice: «L'inégalité  $p_g \geq 2q - 4$  pour les surfaces de type général» par A. Beauville. Bulletin de la Société mathématique de France, 110, 319-346.

- [Eisenbud] Eisenbud, D. (2013). *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry* (Vol. 150). Springer Science & Business Media.
- [Garza] Garza Ledesma, J. (2025) *Sobre un problema abierto en superficies con  $K^2 = 6$  y  $p_g = 4$* . Manuscript available from <https://sites.google.com/view/juan-garza>
- [Gieseker] Gieseker, D. (1977). *Global moduli for surfaces of general type*. Inventiones mathematicae, 43(3), 233-282.
- [Hartshorne AG] Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*. Graduate texts in mathematics. Springer New York.
- [Hartshorne DT] Hartshorne, R. (2010). *Deformation theory* (Vol. 257). New York: Springer.
- [Horikawa III] Horikawa, E. (1978). *Algebraic surfaces of general type with small c<sub>12</sub>*. III. Inventiones mathematicae, 47, 209-248.
- [Kirwan] Kirwan, F. C. (1992). *Complex algebraic curves (No. 23)*. Cambridge University Press.
- [Kuranishi] Kuranishi, M. (1971). *Deformations of compact complex manifolds*. Presses de l'Univ..
- [Matsumura] Matsumura, H. (1970). *Commutative algebra* (Vol. 120). New York: WA Benjamin.
- [Paul] Paule, P., & Radu, C. S. (2019). *A proof of the Weierstrass gap theorem not using the Riemann–Roch formula*. Annals of Combinatorics, 23(3-4), 963-1007.
- [Reid] Reid, M. (1997). *Chapters on algebraic surfaces*, pp. 3-159 en: *Complex algebraic geometry*. Park City, UT, (1993), IAS/Park City Math. Ser. 3, Providence (RI): American Mathematical Society.
- [Graded rings] Reid, M. (2002). *Graded rings and varieties in weighted projective space*. Manuscript available from [www.maths.warwick.ac.uk/~miles/](http://www.maths.warwick.ac.uk/~miles/)

- [Robert] Robert, A. (1973). *Elliptic curves: notes from postgraduate lectures given in Lausanne 1971/72* (Vol. 326). Springer Science & Business Media.
- [Serre] Serre, J. P. (1960). Sur les modules projectifs. *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, 14(1), 1-16.
- [Silverman] Silverman, J. H. (2009). *The arithmetic of elliptic curves* (Vol. 106, pp. xx+-513). New York: Springer.
- [Weng] Weng, D. (2013). *Plücker embedding of Grassmannian and a toy example of cluster algebra*.