L2 info. - Bases de données

TD 2 : les requêtes conjonctives

7 Savoir écrire des démonstrations (2)

Dans ce qui suit, I est une instance de base de données et q une requête conjonctive.

1. Montrer que les requêtes conjonctives sont monotones et satisfiables.

Exemple Soit q la requête conjonctive $ans(x) \leftarrow r(x,b),s(x,a)$ et deux instances I et J, $I = \{r(a,b),s(a,a)\}$, $J = \{r(a,b),s(a,a),r(b,b),s(b,a)\}$. On a $I \subseteq J$, $q(I) = \{(a)\}$ et $q(J) = \{(a),(b)\}$. On voit que $q(I) \subseteq q(J)$, ce qui montre bien que la requête q est monotone. Plus précisément, pour obtenir $q(I)$, on se sert d'une valuation v telle que $v(x) = a$. Pour obtenir $q(J)$, on se sert de 2 valuations, la précédente : v telle que $v(x) = a$, et une nouvelle valuation $v'(x) = b$. Pour obtenir $q(J)$, on se sert de v car on trouve dans J les tuples qui sont dans I. On voit sur cet exemple que le principe est que si $I \subseteq J$ alors on peut reprendre pour $q(J)$ les valuations utilisées pour $q(I)$.

Montrons cela pour n'importe quelle requête conjonctive.

Démonstration de la monotonie N'importe quelle requête conjonctive q s'écrit sous la forme générale $ans(u) \leftarrow R_1(u_1),\ldots,R_n(u_n)$. On veut montrer que si $I \subseteq J$ alors $q(I) \subseteq q(J)$.

Supposons que $I \subseteq J$. Il faut montrer que $q(I) \subseteq q(J)$, c'est à dire que l'ensemble $q(I)$ est inclus dans l'ensemble $q(J)$. Rappelons les définitions de ces 2 ensembles :

- $q(I) = \{v(u) | v$ est une valuation sur $var(q)$ et $v(u_i) \in I(R_i)\ \forall i \in [1,n]\ \}$
- $q(J) = \{v(u) | v$ est une valuation sur $var(q)$ et $v(u_i) \in J(R_i)\ \forall i \in [1,n]\ \}$

Soit n'importe quel tuple t appartenant à $q(I)$. Il faut montrer que t appartient aussi à $q(J)$. Si $t \in q(I)$ alors, par définition de $q(I)$, il existe une valuation v sur $var(q)$ telle que $t = v(u)$ et $v(u_i) \in I(R_i)\ \forall i \in [1,n]$.

Or $I \subseteq J$. Donc v est telle que $v(u_i) \in J(R_i)\ \forall i \in [1,n]$. Et si v est une valuation telle que $v(u_i) \in J(R_i)\ \forall i \in [1,n]$, cela veut dire, par définition de $q(J)$ que $t = v(u) \in q(J)$. Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple Soit q la requête conjonctive $ans(x) \leftarrow r(b,y),s(x,a)$. Comment construire une instance I pour que $q(I)$ ne soit pas vide (c'est à dire que q soit satisfiable) ? Il suffit de prendre une valuation qui à x et à y associe une même constante, par exemple a. Notre instance serait donc $I = \{r(b,a),s(a,a)\}$, et $q(I) = \{(a)\}$. On voit que pour construire une instance sur laquelle la réponse n'est pas vide, il suffit de prendre les atomes du corps de la règle, remplacer toutes les variables par une même constante, et respecter les constantes qui s'y trouvent déjà.

Montrons cela pour n'importe quelle requête conjonctive.

Démonstration de la satisfiabilité N'importe quelle requête conjonctive q s'écrit sous la forme générale $ans(u) \leftarrow R_1(u_1), \ldots ,R_n(u_n)$. On veut montrer qu'il existe une instance I telle que pour cette instance, il existe une valuation telle que $q(I) \neq \emptyset$.

Construisons la valuation v telle que chaque variable de $var(q)$ est remplacée par une constante a, et valuons chaque tuples libres $R_i(u_i)$ du corps de q avec v. Définissons $I = \{v(u_i),\forall i \in [1,n]\}$.

Ainsi, v est une valuation de $var(q)$ telle que $v(u_i) \in I(R_i)$ $\forall i \in [1,n]$, et $v(u)$ fait donc partie de $q(I)$. Ce qu'il fallait démontrer.