FACULTAD DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA

Calculo en una Variable. Curso 2016-2017

Resolucion del examen final extraordinario del 6 de julio de 2017

Enunciado

1. Teoria
   (a) Enunciad y demostrad el teorema de Bolzano sobre ceros de funciones continuas.
   (b) Dada una funcion continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, consideramos la funcion
   $$G(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$$
   Razonad que la funcion G es derivable y probad que existe $c \in (0,1)$ con $G'(c) = 0$.
   (c) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcion tal que existe un numero ral $r > 1$ con $|f(x) - f(y)| < |x - y|^r$ para cualquier $x, y \in I$. Probad que f es derivable. ¿Que mas se puede decir sobre esta funcion?

2. (a) Sea f una funcion derivable en el punto $a \in \mathbb{R}$. Determinad el limite de la sucesion de termino general
   $$n\left(f\left(a + \frac{2}{n}\right) - 3f\left(a + \frac{1}{n}\right) + 2f(a)\right)$$
   (b) Calculad, usando polinomios de Taylor, el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x} dx$ con un error inferior a 10^{-3},

3. Conderamos las funciones
   $$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, \qquad g(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$$
   (a) Determinad el dominio, los extremos y el recorrido de la funcion f.
   (b) Probad que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ si $x \in (0, \varepsilon)$ y, en cambio, $f(x) < g(x)$ si $x \in (\pi/2 - \varepsilon, \pi/2)$.
   (c) Probad que existe $c \in (0, \pi/2)$ con $f(c) = g(c)$
   (d) Probad que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f = \int_0^{pi/2} g$.
   (e) Probad el resultado del apartado (c) a partir de la igualdad del apartado (d).
   (f) Determinad $f^{(k)}(0)$ para $k = 4$ y para $k = 2017$.

Solucion

1. (a) Mirar teoria.

   (b) Vemos que

$$G(x) = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt = \int_0^{x^2} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$$

   Consideramos ahora $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, que es derivable por el teorema fundamental del Calculo. Y, por lo tanto, $G(x) = F(x^2) - F(x)$ es derivable por ser composicion y suma de funciones derivables. Consideramos ahora $G(0) = 0$ y $G(1) = 0$ (Como se puede observar de la definicion de G). Aplicando el teorema del valor medio, obtenemos que existe $c \in (0,1)$ tal que

$$G'(c) = \frac{G(1) - G(0)}{1 - 0} = 0$$

   (c) Para cualquier $c \in I$, consideramos

$$\left| \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \right| = \lim_{h\to 0} \frac{|f(c+h) - f(c)|}{|h|} \leq \lim_{h\to 0} \frac{|c+h-c|^r}{|h|} = \lim_{h\to 0} |h|^{r-1} = 0$$

   Ya que $r > 1$. Por lo tanto, f es derivable en todo I y ademas $f'(x) = 0 \; \forall x \in I$, es decir, f es constante.

2. (a) Consideramos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(a + \frac{2}{n}\right) - 3f\left(a + \frac{1}{n}\right) + 2f(a)}{1/n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(a + \frac{2}{n}\right) - f(a)}{2/n} - 3 \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{1/n}$$

   Como f es derivable en a, el limite de la sucesion es $2f'(a) - 3f'(a) = -f'(a)$.

   (b) Consideramos la funcion $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Y calculamos su desarrollo en serie de Taylor. Para ello, primero calculamos el desarrollo en serie de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots\right) \qquad f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots$$

   Entonces ahora:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + \cdots$$

   Por lo tanto $F(1/2) = \frac{29203}{57600} + o(x^9)$, y podemos aproximar el valor de la integral por $F(1/2) = \int_0^{1/2} \frac{\sin t}{t} dt \approx \frac{29203}{57600}$

3. (a) **Dominio** Todo $\mathbb{R}$ (Ya que el denominador es siempre distinto de 0)

Extremos Primero calculamos la derivada $f'(x) = \dfrac{-(\sin^2 x + 1)\sin x - 2\sin x\cos^2 x}{(\sin^2 x + 1)^2}$

que se anula si y solo si

$$-\sin^3 x - \sin x - 2\sin x\cos^2 x = 0 \iff \begin{cases} x = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ x = n\pi - \frac{1}{2}cos^{-1}(-5) \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ x = n\pi + \frac{1}{2}cos^{-1}(-5) \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Si $x = n\pi \pm \frac{1}{2}cos^{-1}(-5)$ entonces encontramos puntos de inflexion. Si $x = 2n\pi$, entonces encontramos maximos, cuyo valor es $f(2n\pi) = 1$ y si $x = (2n+1)\pi$ entonces encontramos minimos, cuyo valor es $f((2n+1)\pi) = -1$.

Recorrido $[-1, 1]$. Ya que la funcion es 2π-periodica (ya que tambien lo son sin y cos) y entre $[-\pi, \pi]$ se alcanza el maximo en 0 con $f(0) = 1$ y el minimo en π con $f(\pi) = -1$, como ademas f es continua, recorre todos los valores entre -1 y 1.

(b) Consideramos $f'(0) = 0$ y $g'(0) = -2/\pi$, y por lo tanto, g decrece mas rapido que f, lo cual nos garantiza que existe ε_1 tal que $g(x) < f(x)$ en $(0, \varepsilon_1)$. De la misma manera, $f'(\pi/2) = -1/2$ y $g'(\pi/2) = -2/\pi$, por lo tanto, (siguiendo el razonamiento anterior), existe ε_2 tal que $g(x) > f(x)$ $\forall x \in (\pi/2 - \varepsilon_2, \pi/2)$. Ahora resta tomar $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

(c) Tomando el resultado del apartado anterior, definimos la funcion $h(x) = f(x) - g(x)$. Consideramos $h\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ (el ε calculado en el apartado anterior) que es mayor a 0 por el apartado anterior, y $h\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$ que es menor que 0. Aplicando ahora Bolzano, existe $c \in \left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right) \subset (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = g(c)$.

(d)