

Programación lineal entera

Calendario de la National Football League

Marc Esquerrà

Ernesto Lanchares

April 30, 2018

Contents

1 Formulación matemática

Primero, vamos a definir nuestras variables. Tendremos una variable por cada posible partido por cada jornada, es decir, nuestro conjunto de variables son

$$\text{VAR} = \left\{ x_{ijk} \left| \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i < j \\ 1 \leq k \leq r(n/2-1) + sn/2 \end{array} \right. \right\}$$

Donde cada x_{ijk} es una variable binaria, que vale 1 si, en la jornada k el equipo i se enfrenta al equipo j y 0 en otro caso.

De aquí, podemos deducir nuestro vector de costos, asignando un c_{ijk} a cada x_{ijk} creando así nuestra función objetivo.

$$c_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \text{ es un partido inter-divisional.} \\ 0 & \text{si } (i, j) \text{ es un partido intra-dimensional y } k = 1 \\ 2^{k-2} & \text{si } (i, j) \text{ es un partido intra-dimensional y } k \geq 2 \end{cases}$$

(Los valores de c_{ijk} coinciden con los del enunciado debido a la forma en la que hemos definido nuestro conjunto de variables).

Por tanto, tan solo nos queda definir nuestras restricciones. Primero, impondremos que cada equipo juegue un partido cada semana, para ello, necesitamos que

$$\sum_{j=i+1}^n x_{ijk} + \sum_{j=1}^{i-1} x_{jik} = 1 \quad \begin{array}{l} \forall k=1, \dots, r(n/2-1) + sn/2 \\ \forall i=1, \dots, n \end{array}$$

Asegurándonos que cada equipo juega exactamente un partido por jornada. Ahora, hemos de asegurar que cada equipo i juega exactamente los partidos que le tocan contra cada equipo, así pues, tenemos

$$\sum_{k=1}^{r(n/2-1) + sn/2} x_{ijk} = \begin{cases} r & \text{si } i \text{ y } j \text{ están en la misma división} \\ s & \text{si } i \text{ y } j \text{ están en divisiones distintas} \end{cases}$$

Impondremos esta restricción para cada parejas de equipos, es decir, $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, (i-1)$.

De forma que, el problema final queda así

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{k=1}^{jor} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n c_{ijk} x_{ijk} \\ \text{s.a.} \\ \sum_{j=i+1}^n x_{ijk} + \sum_{j=1}^{i-1} x_{jik} = 1 \quad \begin{array}{l} \forall k=1, \dots, jor \\ \forall i=1, \dots, n \end{array} \\ \sum_{k=1}^{jor} x_{ijk} = r \quad \begin{array}{l} \forall i=1, \dots, n/2 \\ \forall j=i+1, \dots, n/2 \end{array} \\ \sum_{k=1}^{jor} x_{ijk} = r \quad \begin{array}{l} \forall i=(n/2)+1, \dots, n \\ \forall j=i+1, \dots, n \end{array} \\ \sum_{k=1}^{jor} x_{ijk} = s \quad \begin{array}{l} \forall i=1, \dots, n/2 \\ \forall j=(n/2)+1, \dots, n \end{array} \end{array} \right.$$

Identificando $jor = r(n/2 - 1) + sn/2$.

2 Modelo en AMPL

```

1 param n;
2 param r;
3 param s;
4 param jornada:= r*(n/2 -1) + n*s/2;
5
6 set Div1:=1..n/2;
7 set Div2:=(n/2+1)..n;
8 set jornadas:=1..jornada;
9 set equipo = 1..n;
10 set partidoIntra1:= {i in Div1, j in Div1: i < j};
11 set partidoIntra2:= {i in Div2, j in Div2: i < j};
12 set partidoInter := {i in Div1, j in Div2};
13 set partidos := partidoIntra1 union partidoIntra2 union partidoInter;
14
15 var x {(i,j) in partidos, k in jornadas}>=0,<=1,integer;
16
17 maximize total:
18     sum{k in 2..jornada}(sum{(i,j) in partidoIntra1} (2^(k-2))*x[i,j,k] +
19     sum{(i,j) in partidoIntra1} (2^(k-2))*x[i,j,k]));
20
21 subject to res_jornadas{k in jornadas, a in equipo}:
22     (sum{(a,j) in partidos} x[a,j,k]) + (sum{(i,a) in partidos} x[i,a,k]) =
23     1;
24
25 subject to res_equipos1{(i,j) in partidoIntra1}:
26     (sum{k in jornadas} x[i,j,k])=r;
27
28 subject to res_equipos2{(i,j) in partidoIntra2}:
29     (sum{k in jornadas} x[i,j,k])=r;
30
31 subject to res_equipos{(i,j) in partidoInter}:
32     (sum{k in jornadas} x[i,j,k])=s;

```

3 Ejemplos

3.1 $n = 6, r = 2, s = 3$

El resultado de la función objetivo en este caso es 8064, quedando las jornadas de esta manera:

Jornada 1	Jornada 2	Jornada 3	Jornada 4
1 - 5	1 - 4	1 - 6	1 - 4
2 - 6	2 - 5	2 - 5	2 - 6
3 - 4	3 - 6	3 - 4	3 - 5
Jornada 5	Jornada 6	Jornada 7	Jornada 8
1 - 4	1 - 6	1 - 6	1 - 3
2 - 6	2 - 5	2 - 4	2 - 4
3 - 5	3 - 4	3 - 5	5 - 6
Jornada 9	Jornada 10	Jornada 11	Jornada 12
1 - 3	1 - 2	1 - 2	1 - 5
2 - 4	3 - 6	3 - 6	2 - 3
5 - 6	4 - 5	4 - 5	4 - 6