Topologia

Ernesto Lanchares

A. El teorema de contracción de Banach

Una *contracció* de constant $0 \leq c < 1$ és una aplicació $f\colon X \to X$ tal que

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq c \cdot d(x, y), \qquad \forall x, y \in X.$$

a) Proveu que tota contracció es contínua.

Vamos a demostrarlo por la definición ε-δ de continuidad. Dado un ε, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{c}$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies d\left(f(x), f(y)\right) \leq cd(x, y) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

.

b) Proveu que, per a qualsevol $z \in X$, la succesió $\{f^n(z)\}$ és de Cauchy.

Se tiene que

$$\begin{aligned} d\left(f^n(z), f^{n+m}(z)\right) &\leq cd\left(f^{n-1}(z), f^{n+m-1}(z)\right) \\ &\vdots \\ &\leq c^n d\left(z, f^m(z)\right) \end{aligned}$$

Ahora, nos resta acotar $d\left(z, f^m(z)\right)$. Para ello, tomamos

$$\begin{aligned} d\left(z, f^{m+1}(z)\right) &\leq d\left(z, f^m(z)\right) + d\left(f^m(z), f^{m+1}(z)\right) \\ &\leq d\left(z, f^m(z)\right) + c^m d\left(z, f(z)\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente desigualdad

$$d\left(z, f^m(z)\right) \leq \left(\sum_{i=0}^{m} c^i\right) d\left(z, f(z)\right) \leq \frac{1}{1-c} d\left(z, f(z)\right)$$

Con lo cual, dado un $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que

$$n > N \implies c^n \leq \frac{1-c}{d\left(z, f(z)\right)}\varepsilon$$

Y, por lo tanto,

$$d\left(f^n(z), f^{n+m}(z)\right) \leq c^n d\left(z, f^m(z)\right) \leq c^n \frac{d\left(z, f(z)\right)}{1-c} \leq \varepsilon$$

Es decir, que $\{f^n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

c) *Teorema de contracció de Banach*: proveu que tota contracció de X té un únic punt fix. És a dir, existeix un únic $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Como X es un espacio métrico completo, que una sucesión sea de Cauchy implica que es convergente, por lo tanto $\exists p = \lim_{n\to\infty} f^n(z)$. Y se tiene que

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(z)\right) \overset{(f \text{ continua})}{=} \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(z) = p$$

Veremos ahora que es único. Suponemos que x e y son dos puntos fijos por f tales que $x \neq y$, por lo tanto, $d(x,y) > 0$, entonces

$$d(x,y) < cd\left(f(x), f(y)\right) = cd(x,y) \implies 1 < c$$

Lo cual nos lleva a una contradicción, y por lo tanto $x = y$.

B. L'hiperespai de Hausdorff dels subespais compactes.

Definim

$$\mathscr{H}(X) = \{A \subset X | A \text{ compacto}\}$$

d) Observeu que la definició ordinària de distàcia $d(A,B)$ entre dos conjunts $A, B \in \mathscr{H}(X)$ no és una distància a $\mathscr{H}(X)$. Definim

$$d_1(A,B) = \max_{a\in A}\{d(a,B)\}, \quad d_2(A,B) = \max_{b\in B}\{d(A,b)\}$$

Calculeu d_1, d_2 en l'exemple següent: $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{S}^1 | y \geq 0\}$ i $B = [-2,2]\times\{2\}$. Deduïu que d_1, d_2 no són distàncies.

Primero, calculamos $d_1(A,B)$. Para ello, tomamos un punto arbitrario $a \in A$ y maximizamos $d(a,B)$. Para calcular $d(a,B)$, tomamos un punto arbitrario de B y minimizamos $d(a,b)$. Primero tomamos $(\cos\theta, \sin\theta) \in A$ y $(t,2) \in B$ (con $\pi \leq \theta \leq 0$ y $-2 \leq t \leq 2$). y tenemos

$$d^2(a,b) = (\cos\theta - t)^2 + (\sin\theta - 2)^2 \qquad \frac{\partial d^2(a,b)}{\partial t} = 2t - 2\cos\theta$$

Por lo tanto, el mínimo se alcanza cuando $t = \cos\theta$, y en ese punto, el valor de d es

$$d^2(a,B) = \cancelto{0}{(\cos\theta - \cos\theta)^2} + (\sin\theta - 2)^2$$

Lo que quiere decir que

$$d_1(A,B) = \max_{\theta\in[0,\pi]} |\sin\theta - 2|$$

Por lo tanto, $d_1(A,B) = 2$.

Pasamos ahora a calcular $d_2(A,B)$.

$$d^2(a,b) = (\cos\theta - t)^2 + (\sin\theta - 2)^2$$
$$\frac{\partial d^2(a,b)}{\partial\theta} = \cancel{-2\sin\theta\cos\theta} + 2t\sin\theta - \cancel{2\cos\theta\sin\theta} - 4\cos\theta$$

Por lo tanto, el mínimo se alcanza cuando $t\sin\theta = 2\cos\theta \implies \theta = \arctan\frac{2}{t}$. Substituyendo, obtenemos

$$d^2(A,b) = \left(\cos\left(\arctan\frac{2}{t}\right) - t\right)^2 + \left(\sin\left(\arctan\frac{2}{t}\right) - 2\right)^2 = \left(t\sqrt{\frac{t^2+4}{t^2}} - 1\right)^2$$

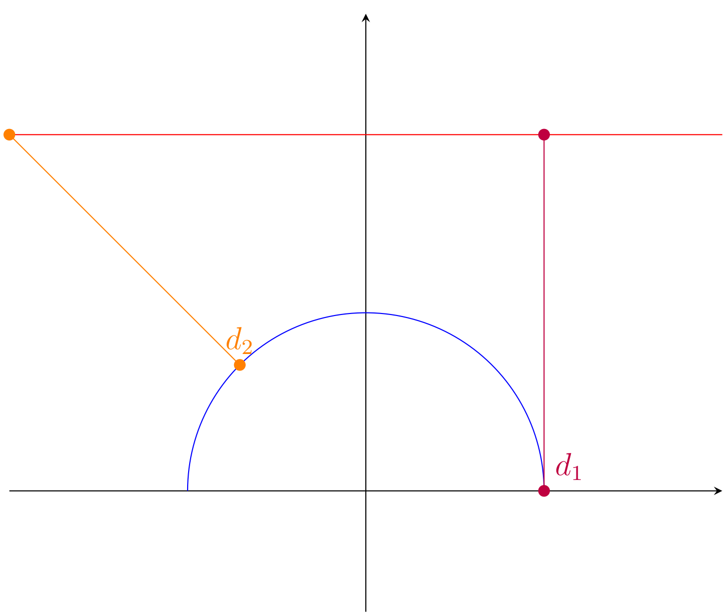
Ahora, derivamos para buscar el maximo, obteniendo

$$\frac{\mathrm{d}d^2(A,b)}{\mathrm{d}t} = 2t - \frac{2|t|}{\sqrt{t^2+4}}$$

Que no se anula en ningún punto. Con lo cual, el máximo se haya en un extremo con $t = 2$ (o $t = -2$) y se obtiene:

$$d_2(A,B) = \left(\cos\frac{\pi}{4} - 2\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{4} - 2\right)^2 \approx 3.343$$

Que coincide con la intuición geométrica que pudieramos tener:



Ya que $d_1(A,B) = d_2(B,A)$ (y viceversa), observamos que ni d_1 ni d_2 no cumplen la propiedad simétrica, y por lo tanto no son distancias.

e) Definim $h(A,B) = \max\{d_1(A,B), d_2(A,B)\}$. Proveu que $(\mathscr{H}(X), h)$ és un espai mètric. Asumirem que $\mathscr{H}(X)$ és un espai mètric *complet*.

Tenemos que demostrar que

i) $h(A,B) \geq 0$ y $h(A,B) = 0 \iff A = B$.
Que $h \geq 0$ es trivial por la definición de d_1 y de d_2.
Ahora, supondremos que $h(A,B) \neq 0$, entonces o bien $d_1(A,B) > 0$ o bien $d_2(A,B) > 0$, suponemos que es d_1 (el caso de d_2 es análogo). Entonces, existe $a \in A$ tal que $d_1(a,B) > 0 \implies a \notin B \implies A \neq B$.
Ahora, supondremos que $A = B$, entonces $d(a,B) = d(b,A) = 0$, $\forall a \in A, b \in B$, y por lo tanto, $h(A,B) = d_1(A,B) = d_2(A,B) = 0$.

ii) $h(A,B) = h(B,A)$.
Tenemos que

$$h(A,B) = max\{d_1(A,B), d_2(A,B)\} = \{d_2(B,A), d_1(B,A)\} = h(B,A).$$

iii) $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$.
Ahora, veremos que $d_1(A,B) \leq d_1(A,C) + d_1(C,B)$, y análogamente $d_2(A,B) \leq d_2(A,C) + d_2(C,B)$.
Para todo $a \in A$ se cumple que

$$d(a,B) \leq d(a,c) + d(c,B)$$

Donde c es tal que $d(a,c) = \min_{c \in C}\{d(a,c)\}$ (que existe por ser C compacto). Ya que si fuera falso, es decir $\exists b_1 \in B$ (por ser B compacto) tal que

$$d(a,B) = d(a,b_1) > d(a,c) + d(c,B)$$

Entonces, existe $b_2 \in B$ tal que $d(c,b_2) = d(c,B)$ (de nuevo, por ser B compacto). Y por lo tanto,

$$d(a,B) = d(a,b_1) > d(a,c) + d(c,b_2) \overset{(*)}{>} d(a,c) + d(c,b_1)$$

(*Por definición de distancia a un conjunto), Contradicción con la desigualdad triangular, por lo tanto, el resultado inicial es cierto. Y ahora, como se cumple $\forall a \in A$, se cumple para el máximo:

$$\begin{aligned} d_1(A,B) &\leq d(a,c) + d(c,B) \\ &\leq d(a,C) + d(c,B) \\ &\leq d_1(A,C) + d(c,B) \\ &\leq d_1(A,C) + d_1(C,B) \end{aligned}$$

Una vez visto esto, se tiene que

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \max\{d_1(A,B), d_2(A,B)\} \\ &\leq \max\{d_1(A,C) + d_1(C,B), d_2(A,C) + d_2(C,B)\} \\ &\leq \max\{d_1(A,C), d_2(A,C)\} + \max\{d_1(C,B), d_2(C,B)\} \\ &= h(A,C) + h(C,B) \end{aligned}$$

f) Proveu que tota contracció $f\colon X \to X$ s'estén a una contracció $f\colon \mathscr{H}(X) \to \mathscr{H}(X)$.

Primero, tenemos que asegurar que f está bien definida, lo cual es inmediato por el apartado **??** que nos asegura que f es continua, y por lo tanto $f(A)$ (A compacto) es compacto.

Tomamos un punto cualquiera $a \in A$, y sea b tal que $d(a,b) = d(a,B)$ (que existe por B compacto), entonces

$$d_1\left(f(a), f(B)\right) \leq \left(f(a), f(b)\right) \leq c \cdot d(a,b) = c \cdot d(a,B) \leq c \cdot d_1(A,B)$$

Y cómo se cumple para todo $f(a)$, se cumple para el máximo, y se tiene

$$d_1\left(f(A), f(B)\right) \leq c \cdot d_1(A,B)$$

Ahora, se tiene

$$\begin{aligned} c \cdot h(A,B) &= \max\left\{c \cdot d_1(A,B), c \cdot d_2(A,B)\right\} \\ &\leq \max\left\{d_1\left(f(A), f(B)\right), d_2\left(f(A), f(B)\right)\right\} \\ &= h\left(f(A), f(B)\right) \end{aligned}$$

g) Proveu que per a qualsevol $A, B, C, D \in \mathscr{H}(X)$ se satisfà

$$h\left(A \cup B, C \cup D\right) \leq \max\left\{h(A,C), h(B,D)\right\}.$$

Apliqueu aquesta desigualtat per a deduir el teorema de contracció de $\mathscr{H}(X)$: Si $G_i\colon \mathscr{H}(X) \to \mathscr{H}(X)$, $1 \leq i \leq n$, són contraccions de constants c_i, aleshores $\Gamma\colon \mathscr{H}(X) \to \mathscr{H}(X)$ definida per

$$\Gamma(A) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} G_i(A)$$

és una contracció de constant $c = \max\left\{c_1, \ldots, c_n\right\}$.

Primero, demostraremos que

$$d_1(A \cup B, C \cup D) \leq \max\left\{d_1(A,C), d_1(B,D)\right\}$$

(y análogamente para d_2).

$$\begin{aligned} d_1(A \cup B, C \cup D) &\leq \max\left\{d_1(A, C \cup D), d_1(B, D \cup D)\right\} \\ &\leq \max\left\{\min\left\{d_1(A,C), d_1(A,D)\right\}, \min\left\{d_1(B,C), d_1(B,D)\right\}\right\} \\ &\leq \max\left\{d_1(A,C), d_1(B,D)\right\} \end{aligned}$$

Y análogamente para d_2. Ahora

$$\begin{aligned} h(A \cup B, C \cup D) &= \max\left\{d_1(A \cup B, C \cup D), d_2(A \cup B, C \cup D)\right\} \\ &\leq \max\left\{\max\left\{d_1(A,C), d_1(B,D)\right\}, \max\left\{d_2(A,C), d_2(B,D)\right\}\right\} \\ &= \max\left\{d_1(A,C), d_2(A,C), d_1(B,D), d_2(B,D)\right\} \\ &= \max\left\{\max\left\{d_1(A,C), d_2(A,C)\right\}, \max\left\{d_1(B,D), d_2(B,D)\right\}\right\} \\ &= \max\left\{h(A,C), h(B,D)\right\} \end{aligned}$$

Ahora, generalizamos el resultado por inducción. Acabmos de demostrar el paso base, suponemos ahora que se cumple para n, es decir,

$$h(A_1 \cup \cdots \cup A_n, C_1 \cup \cdots C_n) \leq \max\left\{h\left(A_1, C_1\right), \ldots, h\left(A_n, C_n\right)\right\}$$

Ahora

$$\begin{aligned} h\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup B, C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup D\right) &\leq \max\left\{h\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n, C_1 \cup \cdots \cup C_n\right), h(B, D)\right\} \\ &\leq \max\left\{h\left(A_1, C_1\right), \ldots, h\left(A_n, C_n\right), h(B, D)\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se cumple para $n+1$ y el queda probado.

Ahora, consideramos la Γ del enunciado, entonces

$$\begin{aligned} h\left(\Gamma(A), \Gamma(B)\right) = h\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} G_i(A), \bigcup_{1 \leq i \leq n} G_i(B)\right) &\leq \max_{1 \leq i \leq n}\left\{h\left(G_i(A), G_i(B)\right)\right\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n}\left\{c_i h(A, B)\right\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n}\left\{c_i\right\} h(A, B) \end{aligned}$$

Por lo tanto, Γ es una contracción de constante $c = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{c_i\}$.

h) Prenem $X = I$. Considerem les aplicacions $g_1, g_2 \colon I \to I$ definides per

$$g_1(x) = x/3, \qquad g_2(x) = x/3 + 2/3.$$

Determineu el compacte de I que és el punt fix de la contracció $\Gamma(A) = g_1(A) \cup g_2(A)$.

Demostraremos que el compacto que es punto fijo de la contracción es el conjunto de Cantor (C), que se define de la siguiente forma:

$$C = \left\{ \sum_{1 \leq i}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i} \,\middle|\, a_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

Ahora, veremos que $\Gamma(C) = C$, y por lo tanto, C será el único punto fijo de la contracción. Para ello, nos será útil trabajar en ternario, ya que el conjunto C consta de los números entre 0 y 1 que se pueden escribir con ceros y doses en base 3 (inmediato por la definición).

Vamos a ver que $\Gamma(C) \subseteq C$. Tomamos $x \in C$, entonces

$$\Gamma(x) = g_1(x) \cup g_2(x)$$

Si $x = 0.d_1 d_2 d_3 \cdots$, se tiene que

$$g_1(x) = 0.0 d_1 d_2 d_3 \cdots \qquad g_2(x) = 0.2 d_1 d_2 d_3 \cdots$$

(en base 3). Tanto $g_1(x)$ como $g_2(x)$ son números entre 0 y 1 que se pueden escribir con ceros y doses, por lo tanto $x \in C$.

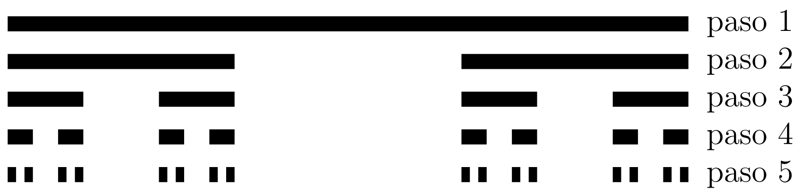
Ahora comprobaremos que $C \subseteq \Gamma(C)$. Tomamos $x = (0.d_1d_2d_3\cdots) \in C$, entonces

$$x \in \Gamma(0.d_2d_3\cdots)$$

Si $d_1 = 0$, efectivamente $x = g_1(0.d_2d_3\cdots)$. Y si $d_1 = 2$, entonces $x = g_2(0.d_2d_3\cdots)$. Y efectivamente, $(0.d_2d_3\cdots) \in C$.

Ahora, resta ver que C es compacto. Para ello, nos resultará útil otra caracterización constructiva de conjunto de cantor de forma geométrica. Esta caracterización es de carácter recursivo y en cada paso elimina el segmento abierto correspondiente al tercio central de cada intervalo.

Geométricamente obtenemos la siguiente figura:



Es fácil ver que en el paso 1, tenemos los números en ternario entre 0 y 1. En el paso 2, aquellos cuyo primer dígito es un 0 o un 2. En el paso 3, aquellos cuyos primeros 2 dígitos son ceros o doses, y, en general, en el paso n, tendremos aqeullos números en ternario cuyos $n-1$ primeros dígitos son o ceros o doses.

Por lo tanto, al llevar esta construcción al infinito, obtenemos el conjunto de Cantor. Ahora, es fácil ver que este conjunto es compacto. Ya que es claramente acotado, y cerrado (por ser complementario de la unión de todos los abiertos que vamos retirando) y por lo tanto, en la topología de I, es un compacto.