Examen final matematica discreta 2016

1. Sea G un grafo con $n > 1$ vertices y m aristas:
   (a) Probar que si $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, entonces G es conexo.
   (b) Si $m = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, ¿es G necesariamente conexo?
2. Sea G un grafo con grado minimo $\delta \geq 2$
   (a) Probar que G contiene un camino de longitud al menos δ. [Indicacion: considerad el camino en G de longitud maxima]
   (b) Probar que G contiene un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$
3. (a) Sea G un grafo bipartido planario. Probar que $\delta(G) \leq 3$.
   (b) Sea G un grafo planario con n vertices donde todos los ciclos tienen al menos longitud g, con $g \geq 3$. Probar que el numero de aristas m satisface
   $$m \leq \frac{g}{g-2}n - \frac{2g}{g-2}$$
4. (a) Sea $G = (V, A)$ un grafo aciclico (un bosque) con n vertices y c componentes conexas. Probar que
   $$2c + \sum_{x \in V} (g(x) - 2) = 0$$
   (b) Sea F el arbol infinito con un conjunto de vertices V donde todos los vertices tienen grado exactamente 4. Para cualquier subconjunto finito A de V definimos el borde de A como
   $$\partial A = \{v \in A \mid v \text{ es adyacente a al menos un vertice de } V \setminus A\}$$
   Probar que todo subconjunto finito y no vacio $A \subset V$ cumple
   $$\frac{|\partial A|}{|A|} > \frac{2}{3}$$
   [Indicacion: Pensad A como un grafo aciclico y completad $|A|$ distinguiendo los grados de los vertices]
   (c) Probar que F tiene la siguiente propiedad:
   $$\inf_{\substack{\emptyset \neq A \subset V \\ A \text{ finito}}} \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} \right\} = \frac{2}{3}$$
   [Indicacion: Considerad las "bolas" $B(n) = \{v \in V \mid d(v_0, v) \leq n\}$, donde v_0 es un vertice fijo cualquiera]

Solucion

1. (a) Razonamos por reduccion al absurdo, suponemos que G no es conexo, entonces existe G_1 una componente conexa y $G_2 = G \setminus G_1$ que contienen p y $n-p$ vertices respectivamente. Sean a_1 y a_2 el numero de aristas G_1 y de G_2, entonces se tiene

$$m = a_1 + a_2 \leq \frac{p(p-1)}{2} + \frac{(n-p)(n-p-1)}{2} = \frac{n^2 - 2np - n + 2p^2}{2}$$

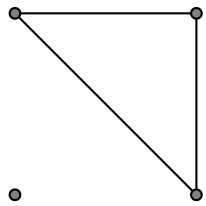
Por otro lado

$$\frac{n^2 - 2np - n + 2p^2}{2} \geq m > \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} \iff$$

$$\iff -2np + 2p^2 > -2n + 2 \iff p^2 > n(p-1) + 1 \iff p > n$$

Lo cual es una contradiccion, ya que G_1 no puede contener mas de n vertices

(b) No, el grafo



tiene 4 vertices y $\frac{(4-1)(4-2)}{2} = 3$ aristas, pero no es conexo.

2. (a) Sea $C = v_1, \cdots, v_p$ el camino de longitud maxima en G. Razonamos ahora por reduccion al absurdo. Suponemos que $p < \delta$, pero $\delta(v_1) \geq \delta$ y por lo tanto, v_1 esta conectado a un vertice u fuera de C y el camino $u, v_1, \cdots, v_p$ es mas largo que C lo cual es una contradiccion. Entonces, nuestra hipotesis es falsa, es decir $p \geq \delta$

(b) De nuevo, sea $C = v_1, \cdots, v_p$ el camino de longitud maxima en G, y, por el apartado a, $p \geq \delta$ y v_1 es adyacente a, al menos, δ vertices de este camino (no puede estar unido a ninguno fuera, ya que entonces existiria un camino mas largo). Aplicando ahora el principio del palomar, sabemos que $\exists q$ tal que $v_1 \sim v_q$ y $\delta \leq q \leq p$, y por lo tanto, el ciclo $v_1, \cdots, v_q, v_1$ tiene longitud $q + 1 \geq \delta + 1$

3. (a) Como G es planario, cumple la relacion de $c + n = m + 2$, donde c es el numero de caras, n el numero de vertices y m el numero de aristas. Ahora, tenemos que

$$4c \leq \sum_{i=1}^{c} f_i \leq 2m$$

Donde f_i son el numero de aristas de la cara i. Esta relacion se tiene debido a que cada cara esta limitada por al menos 4 aristas (ya que no hay ciclos impares y no puede haber una cara de borde 3), y una arista es borde de como mucho 2 caras. Por lo tanto:

$$4c \leq 2m \iff 4(m+2-n) \leq 2m \iff m \leq 2n-4$$

Suponemos ahora que $\delta(G) \geq 4$ y por lo tanto:

$$\sum_{x \in G} g(x) = 2m \geq 4n$$

Pero aplicando el resultado anterior, obtenemos:

$$2n-4 \geq m \geq 2n$$

Como es falso, nuestra hipotesis de partida es falsa, es decir $\delta(G) < 4 \iff \delta(G) \leq 3$

(b) De nuevo, como G es planario, cumple $c+n = m+2$ donde c es el numero de caras n el numero de vertices y m el numero de aristas. Tenemos ahora que:

$$gc \leq \sum_{i=1}^{c} f_i \leq 2m$$

Donde f_i son el numero de aristas de la cara i. Esta relacion se tiene debido a que cada cada cara esta limitada por al menos g aristas (si no existiria un ciclo de longitud menor a g) y cada arista pertenece como mucho a dos caras. Aplicando el resultado anterior, se tiene

$$g(m+2-n) \leq 2m \iff m(g-2) \leq g(n-2) \iff m \leq \frac{g}{g-2}n + \frac{2g}{g-2}$$

4. (a) Llamando $C_1, \cdots, C_c$ a las componentes conexas, podemos reescribir la expresion del enunciado como

$$2c + \sum_{i=0}^{c} \left(\sum_{x \in C_i} g(x) - 2 \right) = 2c + \sum_{i=0}^{c} (2m_i - 2|C_i|)$$

Donde m_i es el numero de aristas de C_i. Pero como C_i es un arbol, tenemos que $m_i = |C_i| - 1$ y sustituyendo:

$$2c + \sum_{i=0}^{c} (2(|C_i|-1) - 2|C_i|) = 2c + \sum_{i=0}^{c} -2 = 2c - 2c = 0$$

(b) Sean $C_1, \cdots, C_n$ las componentes conexas de A, como F es un arbol, C_i tambien es un arbol, y por lo tanto el numero de aristas que tiene es $|C_i| - 1$, pero cada vertice tiene grado 4, por lo tanto:

$$4|C_i| = g(C_i) + 2(|C_i| - 1)$$

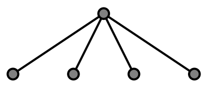
Donde $g(C_i)$ es el numero de aristtas que unen un vertice de C_i con uno del exterior. Entonces $g(C_i) = 2|C_i| + 2$, pero, como cada vertice de C_i tiene como mucho 3 aristas que le conectan con el exterior (el caso $|C_i| = 1$ lo contemplaremos mas adelante), entonces:

$$|\partial C_i| \geq \frac{2}{3}|C_i| + \frac{2}{3} \iff |\partial C_i| > \frac{2}{3}|C_i|$$

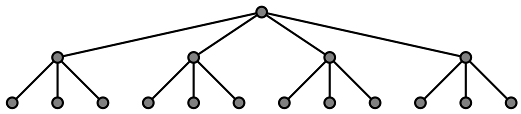
En el caso $|C_i| = 1$, tenemos $|\partial C_i| =$ y por lo tanto: $|\partial C_i| = 1 > \frac{2}{3}|C_i| = \frac{2}{3}$. Ahora tenemos que:

$$\frac{|\partial A|}{|A|} = \frac{|\partial C_1| + \cdots + |\partial C_n|}{|C_1| + \cdots + |C_n|} > \frac{\frac{2}{3}|C_1| + \cdots + \frac{2}{3}|C_n|}{|C_1| + \cdots + |C_n|} = \frac{\frac{2}{3}\left(|C_1| + \cdots + |C_n|\right)}{|C_1| + \cdots + |C_n|} = \frac{2}{3}$$

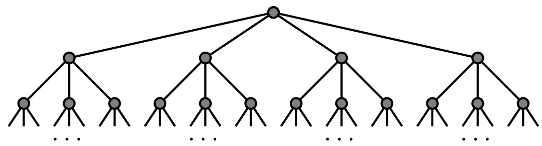
(c) Consideramos las bolas $B(n)$, ya definidas (tomando como centro un vertice aleatorio). Primero, consideramos $B(1)$:



Como se puede observar, $|B(1)| = 5$ y $|\partial B(1)| = 4$. Consideramos $B(2)$:



Donde $|B(2)| = 17$ y $|\partial B(2)| = 12$. Mas en general, en $B(n)$:



Se tiene que $|B(n)| = 1 + 4(3^0 + \cdots + 3^{n-1})$ y $|\partial B(n)| = 4 \times 3^{n-1}$, ya que a cada nivel se añaden tres veces los vertices del nivel anterior. Ahora hacemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial B(n)|}{|B(n)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \times 3^{n-1}}{1 + 4(3^0 + \cdots + 3^{n+1}}$$

Pero $(3^0 + 3^1 + \cdots + 3^{n-1}) = \frac{3^n - 1}{2}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4 \times 3^{n-1}}{1 + 4\frac{3^n - 1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \times 3^{n-1}}{2 \times 3^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3 - \frac{1}{3^{n-1}}} = \frac{2}{3}$$

Y por lo tanto

$$\inf_{\substack{\emptyset \neq A \subset V \\ A \text{ finito}}} \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} \right\} \leq \frac{2}{3}$$

Pero, por el resultado del apartado b, tenemos que:

$$\inf_{\substack{\emptyset \neq A \subset V \\ A \text{ finito}}} \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} \right\} \geq \frac{2}{3}$$

De donde deducimos que

$$\inf_{\substack{\emptyset \neq A \subset V \\ A \text{ finito}}} \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} \right\} = \frac{2}{3}$$