Examen final geometria 2017

1. Tomamos la referencia $\mathcal{R} = \left\{D, \overrightarrow{DP}, \overrightarrow{PC}\right\}$, entonces

   - $D = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$
   - $P = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$
   - $A = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$
   - $C = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$

   Ahora $\overrightarrow{DB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DP} \implies B = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}$. Tambien $\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BY} \iff \overrightarrow{BY} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{8} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$. Por lo tanto $Y = \begin{pmatrix}\frac{9}{8} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

   Ahora $\overrightarrow{PX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

   Y $\frac{9}{8}\overrightarrow{DX} = \frac{9}{8}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{8} & \frac{3}{4}\end{pmatrix} = \overrightarrow{DY}$ por lo tanto D, X, Y estan alineados.

2. Primero calculamos la familia de puntos fijos:

   $$L := \begin{cases} 4x + 9y - 3 = x \\ -x - 2y + 1 = y \end{cases} \implies x + 3y = 1 \iff \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = t \end{cases}$$

   Que es una recta. Tomamos un centro de nuestra referencia un $P \in L$, por ejemplo $P = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$. Calculamos ahora $Q_f(t)$:

   $$Q_f(t) = \det\begin{pmatrix}4-t & 9 \\ -1 & -2-t\end{pmatrix} = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

   Como $\ker(f - Id) \neq \mathbb{R}^2$, f no diagonaliza. Calculamos ahora u_1. Elegimos un punto $Q \notin L$(recta de puntos fijos), tal que $f(Q) - Q = (f - Id)Q = u_1$ y u_1 sea *vep* de *vap* 1:

   $$\begin{pmatrix}3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y \\ 1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-3 \\ 1\end{pmatrix}$$

   Ya que si u_1 es *vep* de *vap* 1, entonces es un multiplo del vector director de L. Podemos tomar, por ejemplo, $Q = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \implies u_1 = \begin{pmatrix}9 & -3\end{pmatrix}$ y $u_2 = Q - P = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \implies \mathcal{R} = \{P, u_1, u_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ y:

   $$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

f es por tanto, una homologia general de eje L.

3. Primero calculamos $P_p(Q)$. $q \in P_p(Q) \iff \phi(p,q) = 0$:

$$\phi(p,q) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Llamamos ahora $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, dado un punto q, tenemos que:

$$area(\overset{\triangle}{ABq}) = \frac{1}{2}\sqrt{G\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Aq}\right)} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{Aq}'\|\sqrt{G\left(\overrightarrow{AB}\right)} = \frac{\|\overrightarrow{Aq}'\|\|\overrightarrow{AB}\|}{2}$$

Donde $\overrightarrow{Aq}'$ es la proyecion de $\overrightarrow{Aq}$ sobre $\left[\overrightarrow{AB}\right]^{\perp}$. Tenemos que $\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$ y que $\left[\overrightarrow{AB}\right]^{\perp} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{\perp}$, por lo tanto:

$$\overrightarrow{Aq} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff b = \frac{3\lambda - 1}{2}$$

Entonces $\overrightarrow{Aq}' = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ahora queremos que $area(\triangle ABq) = 1$, lo cual implica que $\|\overrightarrow{Aq}'\| = \sqrt{2}$

$$\|\overrightarrow{Aq}'\| = \sqrt{2\left(b^2\right)} = \sqrt{2} \iff \frac{3\lambda - 1}{2} = \pm 1$$

De donde deducimos que los puntos son:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \\ q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(A) Primero, vemos que $f = S_v \circ S_u$ es una rotacion. S_v y S_u son ambos movimientos directos, por lo tanto, f es tambien un movimiento directo, es decir, f es una traslacion, una rotacion o un movimiento helicoidal. Vemos ahora que $f(P) = P$ (ya que es punto fijo tanto por S_v como por S_u) es un punto fijo, lo cual implica que f es una rotacion. Vemos ahora que $P + [w]$ es una recta de puntos fijos. Vemos que $\forall x \in P + [w] \quad S_u(x) = x - 2\overrightarrow{Px}$ y $S_v(x) = x - 2\overrightarrow{Px}$. Por lo tanto $(S_v \circ S_u)(x) = x$. Para calcular el angulo, miramos un punto $q \in P + [u]$, entonces $f(q) = S_v(q)$, y vemos que el angulo α de la rotacion es dos veces el angulo entre u y v.

(B) i) Si deja invariante la recta r, entonces r es el eje de la simetria, y tenemos:

$$r = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \implies q \in \mathbb{E}^2 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \implies b = \frac{x-y-\frac{1}{2}}{2}$$

(Ya que $\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$). Ahora tenemos que $S(q) = S(x,y) = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} - 2b\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$ (donde S es la simetria, e.d, $f = \tau \circ S$, con τ una traslacion):

$$S(x,y) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - 2\left(\frac{x-y-\frac{1}{2}}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+\frac{1}{2} & x-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Calculamos ahora $S\left(1, -\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ Y por lo tanto el vector de traslacion es $\begin{pmatrix}\frac{9}{8} & \frac{9}{8}\end{pmatrix}$, con lo cual $f(x,y) = \begin{pmatrix}y+\frac{1}{2} & x-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{9}{8} & \frac{9}{8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+\frac{13}{8} & x+\frac{5}{8}\end{pmatrix}$. Entonces $M_e(f)$:

$$M_e(f) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 13/8\\1 & 0 & 5/8\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ii) Primero encontramos $M_e(Q)$:

$$M_e(Q) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Miramos ahora si tiene centros. p es centro sii $Ap + L = 0$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Que no tiene solucion, por lo tanto Q no tiene centros. Como $\det \tilde{A} \neq 0$, Q es una parabola. Sacamos ahora los *veps* de A:

$$Q_A(t) = \begin{pmatrix}1-t & -1\\-1 & 1-t\end{pmatrix} = (1-t)^2 - 1 = t(t-2)$$

Tomamos entonces $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ *vep* de *vap* 0 y $\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$ *vep* de *vap* 2. Normalizamos ahora los *veps*, quedando $v_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Queremos ahora $p = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ tal que $\phi(p,p) = 0$ y $\phi(v_2, p) = 0$, entonces:

$$\phi(v_2, p) = 0 \iff \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff x = y + \frac{1}{2}$$

Luego p es de la forma $\begin{pmatrix}y+\frac{1}{2} & y\end{pmatrix}$, queremos ahora que:

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - 2y\left(y+\frac{1}{2}\right) + y^2 + 2y + 2 = 0 \iff y = -\frac{9}{8}$$

Con lo cual el centro es $p = \begin{pmatrix}-\frac{5}{8} & -\frac{9}{8}\end{pmatrix}$. Tomamos ahora $\mathcal{R} = \{p, v_1, v_2\}$ entonces:

$$M_{\mathcal{R}}(Q) = \begin{pmatrix}0 & 0 & b\\0 & 2 & 0\\b & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donde $b = \phi(p, v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

iii) Calculamos la imagen del vertice, $f(-\frac{5}{8}, -\frac{9}{8}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos ahora la imagen de $p + [v_1]$, que es $f(p) + [v_1]$ (ya que $p + [v_1]$ es paralelo al eje de simetria). Ahora calculamos $p + [v_2]$, que es invariante porque v_2 es perpendicular al eje de simetria. Por lo tanto, la imagen de Q por f, sera una parabola de vertice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ y eje $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$.