Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva

Definición axiomática del plano proectivo. Planos o desarguinianos

Ernesto Lanchares

Definición 1
Un plano proyectivo axiomático es una pareja (S, L), donde S es un conjunto de elementos (que denominamos puntos) y L un conjunto de subconjuntos de S (que denominamos rectas), cumpliendo los sisguientes axiomas

A1 Para toda pareja de puntos $p, q \in S$, existe una única recta $l \in L$ tal que $p, q \in l$.

A2 Para toda pareja de rectas l_1, l_2, $l_1 \cap l_2$ es un punto de S.

A3 Existen puntos p, q, r, s tal que todo subconjunto de 3 elementos no se encuentran sobre la misma recta.

A4 Cada recta contiene al menos 3 puntos.

Ejercicio 1
Demostrad que la construcción de un plano proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ cumple los axiomas anteriores.

Solución
Primero, definimos $S = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y $L = \left((\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*\right)^*$. Y ahora veremos que estas construcciones cumplen los axiomas.

A1) *Para toda pareja de puntos $p, q \in S$, existe una única recta $l \in L$ tal que $p, q \in l$.*

Sean $p, q \in S(= \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})$, veremos que existe una única recta $l^* = (p \vee q)^* \in (\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$ tal que $p, q \in l$. Suponemos que existen $l, r \in L$ tales que $p, q \in l, r$, entonces, en una referencia $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} p \in l \\ q \in l \\ p \in r \\ q \in r \end{cases} \iff \begin{cases} l \cdot p = 0 \\ l \cdot q = 0 \\ r \cdot p = 0 \\ r \cdot q = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} l_0p_0 + l_1p_1 + l_2p_2 = 0 \\ l_0q_0 + l_1q_1 + l_2q_2 = 0 \\ r_0p_0 + r_1p_1 + r_2p_2 = 0 \\ r_0q_0 + r_1q_1 + r_2q_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} l_0 = \alpha r_0 \\ l_1 = \alpha r_1 \\ l_2 = \alpha r_2 \end{cases}$$

Y por lo tanto, $l = r$.

A2) *Para toda pareja de rectas l_1, l_2, $l_1 \cap l_2$ es un punto de S.*

Consideramos dos rectas $l, r \in L$, veremos que $l \cap r = (l^* \vee r^*)^*$ es un punto de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Observamos que l^* y r^* son puntos de $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$ y, (como $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$ es también un plano proyectivo), cumple A1 y por lo tanto $l^* \vee r^*$ es una recta de $\left(\left((\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*\right)^*\right)^* = (\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$. Ahora, sabemos que $l \cap r = (l^* \vee r^*)^* \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

A3) *Existen puntos p, q, r, s tal que todo subconjunto de 3 elementos no se encuentran sobre la misma recta.*

Consideramos una referencia $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2; \bar{p}\}$ cualquiera, sabemos que estos puntos se encuentran en posición general, es decir, que no hay tres de ellos alineados, por lo tanto, existen $p_0, p_1, p_2, \bar{p}$ como el enunciado del axioma.

A4) *Cada recta contiene al menos 3 puntos.*

En $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, una recta contiene infinitos puntos, en particular, contiene 3.

Ejercicio 2

Suponemos que $|S|$ es finito. Demostrad que todas las rectas de (S, L) tienen el mismo número de puntos, y que cada punto está contenido en el mismo número de rectas. Concluid que el número de puntos (y de rectas) de un plano proyectivo finito es de la forma $n^2 + n + 1$.

Solución

Sean $l, r \in L$ dos rectas distintas de (S, L), con n y m puntos respectivamente, entonces, tenemos que $p_1, p_2, \ldots, p_n \in l$ y $q_1, q_2, \ldots, q_m \in r$. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $p_1 = q_1 = l \cap r$ (que existe por A2). Primero, demostraremos que existe s tal que $s \notin l, r$, para ello, consideramos $\overline{p_2q_2}$ y $\overline{p_3q_3}$ las rectas que unen p_2, q_2 y p_3, q_3 respectivamente. Estas rectas existen ya que $n, m \geq 3$ (por A4) y como consecuencia de A1. Ahora, por A2, tenemos que existe $s = \overline{p_2q_2} \cap \overline{p_3q_3}$ y además $s \notin l$ ya que si $s \in l$, por A1 $l = \overline{sp_2} = \overline{q_2s} \implies q_2 \in l$, lo cual es falso ya que $l \cap r = p_1$. Y, siguiendo un razonamiento análogo, tenemos que $s \notin l, r$.

Consideramos ahora el conjunto $C = \{h \in L | s \in h\}$ y contamos su cardinal de dos formas distintas. Primero, vemos que $|C| = n$, ya que

$$\overline{p_is} \in C \qquad \forall i = 1, \ldots, n \implies |C| \geq n$$

($\overline{p_is}$ existe por A1). Pero, por otro lado

$$h \in C \implies \exists p_i = h \cap l \text{ tal que } \overline{p_is} = h \implies |C| \leq n$$

(p_i existe por A2 y $\overline{p_is}$ existe y es igual a h por A1). Con lo cual, deducimos que $|C| = n$, y siguiendo un razonamiento análogo, concluimos que $n = |C| = m$, es decir, que las rectas tienen el mismo número de puntos. Además, hemos visto que el número de rectas que pasan por un punto, también es n (podemos hacer la construcción anterior para cualquier punto de S). Por lo tanto, tenemos que

$$|L| = \frac{|S|\, n}{n} = |S|$$

Ya que, por cada punto, pasan n rectas y cada recta, la hemos "contado" n veces (ya que cada recta tiene n puntos).

Ahora contaremos el número total de rectas (y de puntos). Para cada punto de l, consideramos

$$C_i = \left\{ h \in L \,\middle|\, \begin{array}{c} h \neq l \\ p_i \in h \end{array} \right\} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Se deduce de forma trivial, que $|C_i| = n - 1$, ya que C_i contiene a todas las rectas que pasan por p_i menos a l. Veremos ahora que los conjuntos C_i son disjuntos.

Suponemos que existe $t \in C_{i_1}, C_{i_2}$ entonces, $p_{i_1}, p_{i_2} \in t \implies t = l$ (por A1), contradicción. Ahora suponemos que $\exists t \in L$ tal que $t \notin C_1 \cup \cdots \cup C_n$ y $t \neq l$. Entonces, $\exists l \cap t \in l \implies t \in C_1 \cup \cdots \cup C_n$, contradicción. Es decir, hemos concluido que

$$C_1, \ldots, C_n \text{ son disjuntos} \qquad \text{y} \qquad S \setminus \{l\} = C_1 \cup \cdots \cup C_n$$

Por lo tanto, $|S| - 1 = |C_1| + \cdots + |C_n| = n(n-1) \implies |S| = n^2 - n + 1 = (n-1)^2 + (n-1) + 1$.

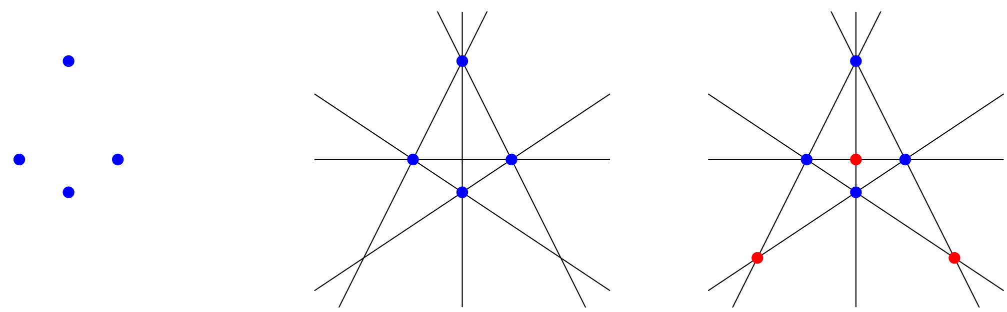
Definición 2 *Plano proyectivo libre*
Sea S_0 el conjunto de cuatro puntos y L_0 el conjunto vacío, definimos los siguientes conjuntos

- S_1 es igual a S_2. L_1 se obtiene añadiendo a L_0, por cada pareja de puntos$p_0, p_1 \in S_0$ que no definen una recta en L_0, una nueva recta.
- S_2 es igual a S_1 añadiendo, por cada pareja de rectas $l_0, l_1 \in L_1$ que no corten en un punto de S_1, un nuevo punto (asociado a la intersección de las rectas). L_2 es igual a L_1.

Y así sucesivamente: en (S_n, L_n), para n par, añadiendo las intersecciones correspondientes a las intersecciones de las rectas en L_{n-1}, y para n impar añadimos las rectas correspondientes a los puntos de S_{n-1}. Finalmente, consideramos $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ y $L = \bigcup_{n \geq 0} L_n$. Resulta entonces, que tanto S como L son infinitos. Diremos que (S, L) es el plano proyectivo generado por (S_0, L_0).

Ejercicio 3
Dibujad las configuraciones obtenidas para $n = 0, 1, 2$. Justificad que (S_n, L_n) no es un plano proyectivo axiomático para ningún valor de n. Demostrad que (S, L) es un plano proyectivo axiomático.

Solución
Primero, dibujamos (S_0, L_0), (S_1, L_1) y (S_2, L_2)



(S_0, L_0) (S_1, L_1) (S_2, L_2)

Ahora, veremos que (S_n, L_n) no es un plano proyectivo axiomático, para ningún n. Para demostrarlo, procedemos por inducción.

- Trivialmente, (S_0, L_0) no es un plano proyectivo axiomático, ya que cualesquiera dos puntos no están unidos por ninguna recta, (contradicción con A1).

- Suponemos, que (S_{n-1}, L_{n-1}) no es un plano proyectivo axiomático y separamos en dos casos
  - n impar.
    * Si no hemos añadido ninguna recta (en el paso de (S_{n-1}, L_{n-1}) a $(S_n l_n)$), entonces $(S_n, L_n) = (S_{n-1}, L_{n-1})$ no es un plano proyectivo axiomático (por hipótesis).
    * Si hemos añadido al menos una recta, por construcción esta (o estas) recta tiene únicamente dos puntos, por lo tanto, (S_n, L_n) no cumple A4. Y (S_n, L_n) no es un plano proyectivo axiomático.
  - n par.
    * Si no hemos añadido nungún punto (en el paso de (S_{n-1}, L_{n-1}) a (S_n, L_n)), entonces $(S_n, L_n) = (S_{n-1}, L_{n-1})$ no es un plano proyectivo axiomático (por hipótesis).
    * Si hemos añadido al menos un punto, por construcción, este (o estos) punto, está contenido en dos únicas rectas. Pero, por el Ejercicio 2 sabemos que, en un plano proyectivo axiomático, el número de rectas que pasan por un punto y el número de puntos que contiene una recta son iguales. Con lo cual, si (S_n, L_n) es un plano proyectivo axiomático y hay un punto por el que solo pasan dos rectas $\Longrightarrow$ las rectas tienen 2 puntos, contradicción con A4. Y (S_n, L_n) no es un plano proyectivo axiomático.

Por último, demostraremos que (S, L) es un plano proyectivo axiomático. Para ello, veremos que cumple los axiomas uno a uno.

A1) *Para toda pareja de puntos $p, q \in S$, existe una única recta $l \in L$ tal que $p, q \in l$.*

Vemos de forma inmediata, que dados p, q existe al menos una recta que los une, ya que, Si $p, q \in S_n$ y $p, q \notin S_{n-1}$, entonces, añadimos una recta que une p y q en L_{n+1}. La recta que une p y q es única ya que, antes de añadir una recta, comprobamos evitar duplicados.

A2) *Para toda pareja de rectas l_1, l_2, $l_1 \cap l_2$ es un punto de S.*

La intersección de dos rectas es como mínimo un punto, ya que si l, r son rectas y $l, r \in L_n$ y $l, r \notin L_{n-1}$, entonces en S_{n+1} añadimos un punto correspondiente a la intersección de l y de r. Y la intersección es solo un punto ya que solo añadimos puntos por las rectas que no se intersequen ya.

A3) *Existen puntos p, q, r, s tal que todo subconjunto de 3 elementos no se encuentran sobre la misma recta.*

Los cuatro puntos iniciales de S_0 cumplen este requisito. Puesto que a partir de (S_2, L_2), no añadimos ninguna recta que pase por dos de ellos a la vez y en (S_2, L_2), no están alineados.

A4) *Cada recta contiene al menos 3 puntos.*

Si tenemos una recta l tal que $l \in L_{2n+1}$, contiene, por construcción, al menos 2 puntos. Como en L_{2n+2} hemos añadido al menos dos puntos, en L_{2n+3} añadiremos al menos una recta r, por lo tanto, en L_{2n+4} añadiremos al menos un punto (la intersección de l y r) a l. Pasando l a tener al menos 3 puntos.

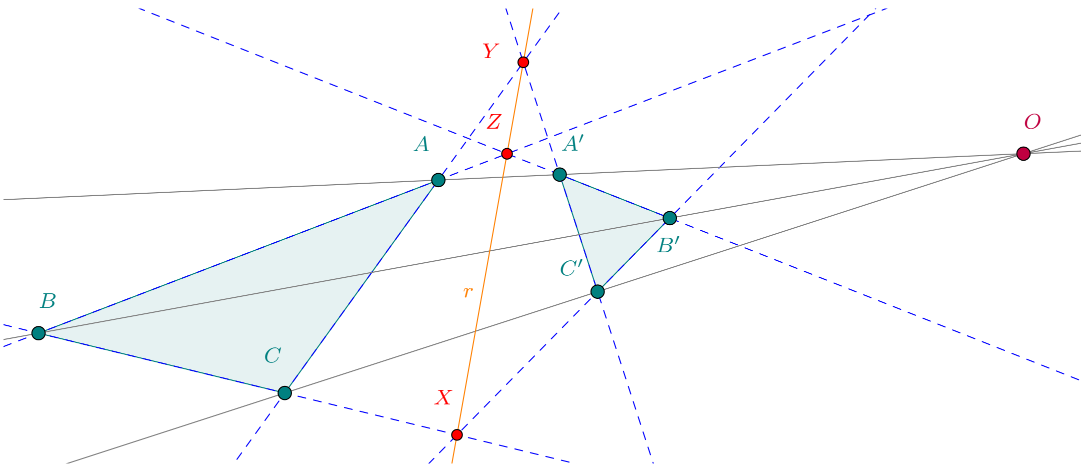
Definición 3 *configuración desarguineana*
Una configuración desarguineana es una pareja de puntos D y un conjunto de rectas R (dentro de un plano proyectivo), tal que cada punto de D está contenido en, como mínimo 3 rectas de R, y cada recta de R, contiene al menos 3 puntos de D. Lo denotaremos como $(D, R)_{\mathcal{D}}$.

Ejercicio 4
Comprobad que el teorema de Desargues da lugar a una configuración desarguineana con 10 puntos y 10 rectas.

Solución
Primero, recordemos el teorema de Desarges:

Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos en $\mathbb{P}^2$ (sin vértices ni lados en común). Entonces,

$$AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset \iff \begin{cases} AB \cap A'B' = Z \\ AC \cap A'C' = Y \\ BC \cap B'C' = X \end{cases} \quad \text{están alineados.}$$



Evidentemente, como se puede observar, en la imagen hay una configuración desarguineana de 10 puntos y 10 rectas.

$$\begin{cases} \text{Por } A \text{ pasan } \overline{AC}, \overline{AB} \text{ y } \overline{AA'}. \\ \text{Por } B \text{ pasan } \overline{BA}, \overline{BC} \text{ y } \overline{BB'}. \\ \text{Por } C \text{ pasan } \overline{CA}, \overline{CB} \text{ y } \overline{CC'}. \\ \text{Por } A' \text{ pasan } \overline{A'B'}, \overline{A'C'} \text{ y } \overline{A'A}. \\ \text{Por } B' \text{ pasan } \overline{B'A'}, \overline{B'C'} \text{ y } \overline{B'B}. \\ \text{Por } C' \text{ pasan } \overline{C'A'}, \overline{C'B'} \text{ y } \overline{C'C}. \\ \text{Por } O \text{ pasan } \overline{AA'}, \overline{BB'} \text{ y } \overline{CC'}. \\ \text{Por } X \text{ pasan } \overline{BC}, \overline{B'C'} \text{ y } \overline{XYZ}. \\ \text{Por } Y \text{ pasan } \overline{AC}, \overline{A'C'} \text{ y } \overline{XYZ}. \\ \text{Por } Z \text{ pasan } \overline{AB}, \overline{A'B'} \text{ y } \overline{XYZ}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{AA'} \text{ contiene a } A, A' \text{ y } O. \\ \overline{BB'} \text{ contiene a } B, B' \text{ y } O. \\ \overline{CC'} \text{ contiene a } C, C' \text{ y } O. \\ \overline{AB} \text{ contiene a } A, B \text{ y } Z. \\ \overline{AC} \text{ contiene a } A, C \text{ y } Y. \\ \overline{BC} \text{ contiene a } B, C \text{ y } X. \\ \overline{A'B'} \text{ contiene a } A', B' \text{ y } Z. \\ \overline{A'C'} \text{ contiene a } A', C' \text{ y } Y. \\ \overline{B'C'} \text{ contiene a } B', C' \text{ y } X. \\ \overline{XYZ} \text{ contiene a } X, Y \text{ y } Z. \end{cases}$$

Lo que finalmente veremeos es que el plano proyectivo libre (S, L) no contiene configuraciones desarguineanas, y por tanto en él no se puede dar el teorema de Desargues.

Ejercicio 5
Demostrad que si una configuración desarguineana finita $(D, R)_{\mathcal{D}}$ está contenida en (S, L), entonces estaba contenida en (S_0, L_0). Concluid que en (S, L) el teorema de Desargues no es cierto. (*Indicación:* para cada $p \in D$, el nivel de p es el valor de n para el cual $p \in S_n$ y $p \notin S_{n-1}$. Definiendo similarmente el nivel de una recta en R. Estudiar cómo se origina el punto, o la recta, con nivel más grande de $(D, R)_{\mathcal{D}}$).

Solución
Suponemos que existe $(D, R)_{\mathcal{D}}$ una configuración desarguineana finita en (S, L). Consideramos ahora, $p \in D$ uno de los puntos con nivel más alto de la configuración (tomando la definición de nivel dada en el enunciado). Si p se añade a S_n (donde n es el nivel de p) como intersección de dos rectas, como la configuración es desarguineana y p es el punto de nivel más alto, se añade una recta $l \in R$ a L_{n+1} que pasa por p (y $l \notin L_n$). Pero, por construcción esta recta solo tiene 2 puntos, luego en un paso posterior se añade un punto $q \in D$ a l (l tiene al menos tres puntos, por ser parte de una configuración desarguineana). Lo cual es una contradicción con que p es uno de los puntos con nivel más alto de $(D, R)_{\mathcal{D}}$. Es decir, o bien $(D, R)_{\mathcal{D}}$ no existe, o p no se añade como intersección de dos rectas.

Si p no se añade como intersección de dos rectas, necesariamente estaba en S_0, y por ser de nivel más alto, $D \subseteq S_0$. Pero si todos los puntos de $(D, R)_{\mathcal{D}}$ estan en S_0, todas las rectas están en L_0, ya que si $l \in L_n$ y $l \notin L_{n-1}$, por construcción l solo contiene 2 puntos de S_{n-1}.

Como (S_0, L_0), no contiene ninguna configuración desarguineana finita, no existe ninguna configuración desarguineana finita en (S, L). Por lo tanto, el teorema de Desargues es falso en (S, L) (el teorema de desargues garantiza una configuración desarguineana finita por el Ejercicio 4).