

# Álgebra multilinear y Geometría

## Contenidos

<b>1</b>	<b>Álgebra multilinear</b>	<b>1</b>
1.1	Formas Cuadráticas . . . . .	1
	Teorema de Sylvester . . . . .	2
1.2	Espacio dual . . . . .	4
1.3	Tensores . . . . .	5
1.4	Dimensión y bases de $T_p^q(E)$ . . . . .	7
	Teorema (base de $T_p^q(E)$ ) . . . . .	7
	Teorema Método convergencia-pivote . . . . .	8

## 1 Álgebra multilinear

### 1.1 Formas Cuadráticas

#### Definición 1.1.1

Sea  $E$  un  $k$ -ev. Diremos que una aplicación

$$\begin{aligned}\phi: E \times E &\rightarrow k \\ (u, v) &\mapsto \phi(u, v)\end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica si

- $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$
- $\phi(\lambda u, v) = \lambda \phi(u, v)$
- $\phi(u, v) = \phi(v, u)$

$\forall u, v, u_1, u_2 \in E$  y  $\forall \lambda \in k$ .

#### Definición 1.1.2

Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica sobre un  $k$ -ev.  $E$ . Diremos que la aplicación

$$\begin{aligned}q: E &\rightarrow k \\ u &\mapsto q(u) = \phi(u, u)\end{aligned}$$

es la forma cuadrática asociada a  $\phi$ .

**Observación 1.1.1** Se cumple que  $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$

**Lema 1.1.1** Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica sobre un  $k$ -ev.  $E$  con  $\text{car} E \neq 2$  y sea  $q$  la forma cuadrática asociada a  $\phi$ , entonces

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} q(u+v) - q(u) - q(v) &= \phi(u+v, u+v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = \\ &= \phi(u, u) + \phi(u, v) + \phi(v, u) + \phi(v, v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = 2\phi(u, v) \end{aligned}$$

**Definición 1.1.3**

Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica/cuadrática sobre un  $k$ -ev.  $E$  y sea  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  una base. La matriz de  $\phi$  en base  $B$  es

$$M_B(\phi) = (a_{ij}) = (\phi(u_i, u_j))$$

**Observación 1.1.2** La matriz  $M_B(\phi)$  es simétrica

**Definición 1.1.4**

Sea  $E$  un  $k$ -ev. y sea  $\phi: E \times E \rightarrow k$  una forma bilineal simétrica.

- Diremos que  $\phi$  es definida positiva si

$$\phi(x, x) > 0, \quad \forall x \in E \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que  $\phi$  es definida negativa si

$$\phi(x, x) < 0, \quad \forall x \in E \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que  $\phi$  es no definida en cualquier otro caso.

**Observación 1.1.3** Si  $\phi$  es una forma bilineal simétrica y definida positiva entonces define un producto escalar sobre  $E$ .

**Definición 1.1.5**

Dada una matriz cuadrada  $A$  ( $\dim n$ ) definimos

$$A_k = (a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq k \quad \text{y} \quad \delta_k(A) = |A_k|$$

**Teorema de Sylvester**

Sea  $E$  un  $k$ -ev. de dimension  $n$  y sea  $\phi: E \times E \rightarrow k$  una forma bilineal simétrica, entonces

$$\phi \text{ es definida positiva} \iff \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad \forall B \text{ base de } E$$

## Demostración

$\Rightarrow$

Como  $\phi$  es definida positiva, define un producto escalar sobre  $E$ . Si tomamos una base  $B$  cualquiera, mediante Gramm-Schmidt podemos construir una base ortogonal  $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Por tanto

$$i \neq j \implies \phi(v_i, v_j) = 0, \quad \phi(v_i, v_i) > 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Llamamos  $\phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$ . Por tanto

$$M_{B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies |M_{B_2}(\phi)| = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$$

Entonces, como  $M_B(\phi) = S_{B, B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B_2, B}$

$$|M_B(\phi)| = |S_{B_2, B}|^2 |M_{B_2}(\phi)| > 0$$

Por lo tanto, la matriz de un producto escalar tiene determinante positivo independientemente de la base tomada. Observamos que  $\phi$  también define un producto escalar en el subespacio vectorial  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  cuando lo restringimos a este. Por lo que hemos visto antes se tiene que

$$|M_B(\phi)_k| = \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\Leftarrow$

Tenemos que  $\delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$ . Aplicamos la siguiente variación de Gramm-Schmidt. Tomamos la base  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  Y hacemos la siguiente construcción:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{2,1}u_1 + u_2 \\ v_3 = \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1}u_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1}u_{n-1} + u_n \end{cases} \quad \alpha_{i,j} \text{ son tales que } \phi(v_k, u_i) = 0 \quad \begin{matrix} 2 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq k-1 \end{matrix}$$

Propiedades de  $\{v_1, \dots, v_n\}$

- $\forall k, \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$  En particular,  $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $E$ .
- $\phi(v_k, v_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k-1$  porque  $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$  y hemos tomado los  $\alpha$  de manera que  $\phi(v_k, u_i) = 0 \implies B_2$  es base ortogonal
- La matriz  $S_{B_2 B}$

$$S_{B_2 B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |S_{B_2 B}| = 1 \text{ y } \delta_k(S_{B_2 B}) = 1$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}
M_B(\phi) &= S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B,B_2} \\
\left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \phi(v_1, v_1) & \\ \hline & \ddots \\ \hline & \phi(v_k, v_k) \\ \hline & \ddots \\ & \phi(v_n, v_n) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \delta_k(M_B(\phi)) = \delta_k(S_{B,B_2}^t) \delta_k(M_{B_2}(\phi)) \delta_k(S_{B,B_2}) = \delta_k(M_{B_2}(\phi)) = \\
&= \prod_{i=1}^k \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ (por hipótesis)} \Rightarrow \frac{\delta_k(M_B(\phi))}{\delta_{k-1}(M_B(\phi))} = \phi(v_k, v_k) > 0
\end{aligned}$$

Finalmente,  $\forall x \in E$

$$\phi(x, x) = \phi \left( \sum_{i=1}^k x_i v_i, \sum_{i=1}^k x_i v_i \right) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ si } x \neq \vec{0}$$

QED

## 1.2 Espacio dual

### Definición 1.2.1

Sea  $E$  un  $k$ -ev. Definimos el espacio Dual de  $E$  como  $E^* = \{\phi : E \rightarrow k \text{ lineales}\}$  (también es un  $k$ -espacio vectorial)

**Observación 1.2.1** Para definir  $E^*$  tenemos que usar bases de  $E$ .

### Definición 1.2.2

Si  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  es una base de  $E$  ( $k$ -ev.) definimos

$$\begin{aligned}
u_i^* &: E \rightarrow k \\
u_j &\mapsto u_i^*(u_j) = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Y llamaremos base dual de  $B$  a  $B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$  (que efectivamente es una base de  $E^*$ ).

**Observación 1.2.2** En particular si  $w \in E$  y  $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i^*$ , se cumple que:

$$w(u_j) = \sum_{i=1}^n a_i u_i^*(u_j) = a_j \Rightarrow w = \sum_{i=1}^n w(u_i) u_i^*$$

### Proposición 1.2.1 (cambios de base)

Sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $E$  ( $k$ -ev. de  $\dim = n$ ) y sean  $B_1^*$  y  $B_2^*$  las bases duales de  $B_1$  y  $B_2$ . Si  $S_{B_1 B_2}$  es la matriz de cambio de base de  $B_1$  a  $B_2$ , entonces:

$$S_{B_1^* B_2^*} = (S_{B_1 B_2}^{-1})^T = (S_{B_2 B_1})^T$$

**Proposición 1.2.2** (aplicaciones lineales)

Sean  $E$  y  $F$   $k$ -ev. y sea  $\phi: E \rightarrow F$  una aplicación lineal, entonces  $\phi$  induce la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned}\phi^*: F^* &\rightarrow E^* \\ w &\mapsto \phi^*(w) = w \circ \phi\end{aligned}$$

**Observación 1.2.3** Si  $E$  y  $F$  son de dimensión finita,  $\phi$  admite expresión matricial (en coordenadas). En particular  $\left. \begin{array}{l} B_1 \text{ base de } E \\ B_2 \text{ base de } F \end{array} \right\} \implies \phi \text{ viene dada por } M_{B_1, B_2}(\phi) \text{ y}$

$$\left. \begin{array}{l} B_1^* \text{ base de } E^* \\ B_2^* \text{ base de } F^* \end{array} \right\} \implies \phi^* \text{ viene dada por } M_{B_2^*, B_1^*}(\phi^*) = (M_{B_1, B_2}(\phi))^T.$$

**Proposición 1.2.3** (espacio bidual)

Dado  $E$   $k$ -ev. podemos definir  $E^*, E^{**}, \dots$ . En particular tenemos que  $E^{**}$  es canónicamente isomorfo a  $E$  mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned}\phi: E &\rightarrow E^{**} \\ u &\mapsto \phi(u)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\phi(u): E^* &\rightarrow k \\ w &\mapsto (\phi(u))(w) = w(u)\end{aligned}$$

**Observación 1.2.4** Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases),  $E \cong E^{**}$  y no distinguimos entre  $E$  y  $E^{**}$

## 1.3 Tensores

**Definición 1.3.1**

Sean  $E_1, \dots, E_r$   $k$ -ev. Diremos que  $f: E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow k$  es un tensor (o una aplicación multilinear) si  $\forall i = 1, \dots, r$  y  $\forall v_j \in E_j$  ( $i \neq j$ ) se cumple que

$$\begin{aligned}\phi_i: E_i &\rightarrow k \\ v &\mapsto \phi(u) = f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_r)\end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

**Definición 1.3.2**

Sea  $E$  un  $k$ -ev. Llamaremos tensor de tipo  $(p, q)$  (o tensor  $p$  veces covariante y  $q$  veces contravariante) (o tensor  $p$ -covariante y  $q$ -contravariante) a un tensor

$$\begin{aligned}f: \overbrace{E \times \dots \times E}^p \times \overbrace{E^* \times \dots \times E^*}^q &\rightarrow k \\ (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) &\mapsto f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q)\end{aligned}$$

**Observación 1.3.1** Al conjunto de tensores de este tipo se le denota como  $T_p^q(E)$ .

**Observación 1.3.2** Por convenio  $T_0(E) = T^0(E) = T_0^0(E) = k$ .

**Ejemplo 1.3.1**

Sea  $E$  un  $k$ -ev.

- $T_1(E) = T_1^0(E) = E^*$
- $T^1(E) = T_0^1 = E^{**} (\cong E)$
- $T_2(E) = T_2^0(E) = \{\text{formas bilineales de } E \text{ en } k\}$

**Proposición 1.3.1**

$T_p^q(E) = T_q^p(E^*)$  (cambiando el orden)

**Proposición 1.3.2**

$T_p^q(E)$  tiene estructura de  $k$ -espacio vectorial. Si  $f, g \in T_p^q(E)$  y  $\alpha, \beta \in k$

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g: \overbrace{E \times \cdots \times E}^p \times \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^q &\rightarrow k \\ (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) &\mapsto (\alpha f + \beta g)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) \end{aligned}$$

donde  $(\alpha f + \beta g)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) = \alpha f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) + \beta g(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q)$ .

**Definición 1.3.3** (producto tensorial)

Dados  $f \in T_p^q(E)$  y  $g \in T_{p'}^{q'}(E)$ , definimos el producto tensorial de  $f$  y  $g$  como

$$\begin{aligned} f \otimes g: \overbrace{E \times \cdots \times E}^{p+p'} \times \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^{q+q'} &\rightarrow k \\ (v_1, \dots, v_p, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_{p'}}, w_1, \dots, w_q, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_{q'}}) &\mapsto f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) + g(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_{p'}}, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_{q'}}) \end{aligned}$$

**Observación 1.3.3** Si  $f$  y  $g$  son tensores, entonces  $f \otimes g$  también lo es. Además  $f \otimes g \in T_{p+p'}^{q+q'}(E)$ .

**Proposición 1.3.3**

Sean  $f \in T_p^q(E)$ ,  $g \in T_{p'}^{q'}(E)$  y  $h \in T_{p''}^{q''}(E)$ .

- $\otimes$  NO es abeliano. En general  $f \otimes g \neq g \otimes f$ .
- $\otimes$  es asociativo.  $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$ . Denotado por  $f \otimes g \otimes h$
- $\vec{0} \otimes f = f \otimes \vec{0} = \vec{0}$
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$   $((f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h)$
- $\alpha \in k$ .  $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$

**Ejemplo 1.3.2**

Sea  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ . Y consideramos el producto tensorial de los tensores  $e_1^*$  y  $e_2^*$  sobre los vectores  $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ .

$$\left. \begin{aligned} (e_1^* \otimes e_2^*)(v_1, v_2) &= e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) = x_1y_2 \\ (e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2) &= e_2^*(v_1)e_1^*(v_2) = y_1x_2 \end{aligned} \right\} \implies e_1^* \otimes e_2^* \neq e_2^* \otimes e_1^*$$

### Ejemplo 1.3.3

Sea  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{e_1, e_2\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*\}$ , entonces

$$e_1 \otimes e_2 \in T^2(E) \quad \begin{cases} (e_1 \otimes e_2) = (e_1^{**} \otimes e_2^{**})(e_1^*, e_1^*) = e_1(e_1)e_2(e_1) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_1^*, e_2^*) = 1 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_1^*) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_2^*) = 0 \end{cases}$$

**Observación 1.3.4** a Si  $E$  es un  $k$ -ev de dimensión  $n$  y  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$\underbrace{(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^*)}_{I=\{i_1, \dots, i_p\}} \otimes \underbrace{(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})}_{J=\{j_1, \dots, j_q\}} \underbrace{(e_{l_1}, \dots, e_{l_p})}_{L=\{l_1, \dots, l_p\}} \underbrace{(e_{m_1}^*, \dots, e_{m_q}^*)}_{M=\{m_1, \dots, m_q\}} = \begin{cases} 1 & \text{Si } I = L \text{ y } J = M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Observación 1.3.5** Sean  $f, g \in T_p^q(E)$  entonces

$$f = g \iff \begin{matrix} \forall e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \in B \\ \forall e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^* \in B^* \end{matrix} \quad f(e_{i_1}, \dots, e_{j_q}^*) = g(e_{i_1}, \dots, e_{j_q}^*)$$

## 1.4 Dimensión y bases de $T_p^q(E)$

Recordemos que  $T_p^q(E)$  es un  $k$ -ev.

**Teorema** (base de  $T_p^q(E)$ )

Sea  $E$  un  $k$ -ev. de dimensión  $n$  y sea  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ , entonces

i)  $\dim_k T_p^q(E) = n^{p+q}$

ii) Una base de  $T_p^q(E)$  es

$$B_p^q = \left\{ e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \mid \begin{matrix} i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\} \\ j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\} \end{matrix} \right\}$$

iii) Si  $f \in T_p^q(E)$ , las coordenadas de  $f$  en la base  $B_p^q$  son

$$f_{B_p^q} = (f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*))$$

### Demostración

i) Es consecuencia directa de ii

ii) Primero veamos que  $B_p^q$  es li. Sea

$$w = \sum \alpha_{IJ} (e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Sean  $I_0, J_0$  dos conjuntos de índices cualesquiera, entonces

$$0 = w(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) = \alpha_{I_0 J_0}$$

(Por la observación 1.3.4). Veamos ahora que  $B_p^q$  es generadora. Sea  $f \in T_p^q(E)$ , definimos  $g \in T_p^q(E)$  como

$$g = \sum_{\forall I, J} (f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) (e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}))$$

Demostrando ahora que  $f = g$  quedan provados ii y iii. Tenemos ahora que

$$g(e_{i_1^0}, \dots, e_{i_p^0}, e_{j_1^0}^*, \dots, e_{j_q^0}^*) = f(e_{i_1^0}, \dots, e_{i_p^0}, e_{j_1^0}^*, \dots, e_{j_q^0}^*)$$

Por la observación 1.3.4 y queda demostrado el teorema.

### Ejemplo 1.4.1

Sea  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $B^* = \{e_1^* \dots e_n^*\}$

- Sea  $u \in \mathbb{R}^n$

$$u = u(e_1^*) + \dots + u(e_n^*) \quad (B_0^1 = B)$$

- Sea  $w \in T_1^0(E) (= E^*)$

$$w = w(e_1)e_1^* + \dots + w(e_n)e_n^* \quad (B_1^0 = B^*)$$

- Sea  $n = 3$  y sea  $f \in T_2(E)$

$$B_2^0 = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, \dots, e_3^* \otimes e_3^*\}$$

$$f = f(e_1, e_1)e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2)e_1^* \otimes e_2^* + \dots + f(e_3, e_3)e_3^* \otimes e_3^*$$

### Teorema Método convergencia-pivote

Dada una forma bilineal simétrica  $\phi$ , queremos encontrar una base de  $E$ ,  $B_2$ , en la cual  $M_{B_2}(\phi)$  sea una matriz diagonal. Partimos de una base  $B$  i de  $M_B(\phi)$ . El procesos es: operación con filas a las dos matrices y luego la misma operación pero en la columnas de la primera matriz únicamente (véase ejemplo).

$$(M_B(\phi)|Id) \overset{\text{op. filas}}{\sim} (S_1 M_B(\phi)|S_1) \overset{\text{misma op. en columnas}}{\sim} (S_1 M_b(\phi) S_1^T | S_1) \sim \dots \sim$$

$$\sim (S_r \dots S_1 M_B(\phi) S_1^T \dots S_r^T | S_r \dots S_1)$$

Donde la matriz de la izquierda es  $M_{B_2}$  y es diagonal.

### Ejemplo 1.4.2

$$q_\phi(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 2yz; \quad A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[(1)\tilde{+}(2)]{\text{fila}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[(1)\tilde{+}(2)]{\text{columna}} \\
& \xrightarrow[(1)\tilde{+}(2)]{\text{columna}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[(2)\tilde{+}(3)]{\text{fila}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[(2)\tilde{+}(3)]{\text{columna}} \\
& \xrightarrow[(2)\tilde{+}(3)]{\text{columna}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[(3)-\frac{1}{2}(2)]{\text{fila}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[(3)-\frac{1}{2}(2)]{\text{columna}} \\
& \xrightarrow[(3)-\frac{1}{2}(2)]{\text{columna}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Entonces, en base  $B$ , los vectores de  $B_2$  son:

- $v_1 = (1, 0, 0); \quad \phi(v_1, v_1) = 2$
- $v_2 = (1, 1, 1); \quad \phi(v_2, v_2) = -2$
- $v_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}); \quad \phi(v_3, v_3) = \frac{1}{2}$

Y  $\phi(v_i, v_j) = 0, i \neq j$ .