Examen extraordinario Calculo I 2013

1. (3 puntos)
   (a) Definid continuidad uniforme. Enunciad y demostrad el teorema de Heine.
   (b) Probad que la funcion $f(x) = \sin(x/4)$ no es uniformemente continua en $(0, 1]$.
2. (3 puntos)
   (a) Probad que la funcion $h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 2x + 1 - 2\sqrt{x(x+1)}$es decreciente, estrictamente positiva y tiende a 0 cuando $x \to \infty$.
   (b) Fijado un valor $x > 0$, se considera la ecuacion en z:
   $$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+z}}.$$
      i. A partor del teorema de Bolzano, probad que hay un $z \in [0, 1]$ que es solucion de la ecuacion anterior
      ii. Lo mismo, pero aplicando ahora el teorema del Valor Medio
      iii. Probad tambien que esta solucion es unica
3. (4 puntos)
   Seaan $g_1, g_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Sea tambien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcion continua tal que $\forall x, 0 < f(x) \leq k < 1$ donde k es una constante. Se define la socesion $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como:
   $$a_n = \int_0^1 (f(x))^n \, dx.$$
   (a) Probad que si $g_1(x) > g_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b g_1(x)dx > \int_a^b g_2(x)dx$.
   (b) Si, ademas, $g_2(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, probad que existe $c \in [a, b]$, tal que:
   $$\int_a^b g_1(x)g_2(x)dx = g_1(x) \int_a^b g_2(x)dx$$
   (c) Probad que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$.
   (d) Probad que (a_n) es decreciente, esta acotada inferiormente y tiene limite
   (e) Probad que el limite vale 0

Solucion

1. (a) Mirar teoria.

   (b) Sea $\varepsilon = 0.5$, entonces, $\forall\delta$, existen $x = 1/n, y = 2/(n+1) \in (0,1]$, donde n es el menor numero par tal que $3/\delta < (n+1)$. Entonces:

$$|x-y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1}\right| = \left|\frac{3n+1}{n(n+1)}\right| < \left|\frac{3n}{n(n+1)}\right| = \left|\frac{3}{n+1}\right| < \delta.$$

   Pero, por otro lado,

$$\left|\sin\frac{\pi}{x} - \sin\frac{\pi}{y}\right| = \left|\sin n\pi - \sin\frac{(n+1)\pi}{2}\right| = \left|0 - \sin\frac{\pi}{2}\right| = 1 > 0.5 = \varepsilon.$$

2. (a) h es decreciente si y solo si $\forall x, \varepsilon \in (0,\infty)$, $h(x) - h(x+\varepsilon) \geq 0$,veamos ahora que se cumple:

$$h(x) - h(x+\varepsilon) = 2\varepsilon - 2\sqrt{x(x+1)} + 2\sqrt{(x+\varepsilon)(x+\varepsilon+1)} =$$

$$= 2\varepsilon - 2\sqrt{x^2+x} + 2\sqrt{x^2+x+2x\varepsilon+\varepsilon^2+\epsilon} \geq 2\varepsilon \geq 0.$$

   Veamos ahora que h es estrictamente positiva:

$$h(x) = 2x+1-2\sqrt{x(x+1)} = 2\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} - 2\sqrt{x^2+x} > 0.$$

   Y que $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} - 2\sqrt{x^2+x} = 0$$

   (b) i. Tomamos la funcion $g(z) = 2\sqrt{x^2+x+z(x+1)} - 2\sqrt{x^2+xz} - 1$. Vemos que g es continua y que

$$g(0) = 2\sqrt{x^2+x} - 2x - 1 = -h(x) < 0$$

   (como hemos visto en el apartado a), ademas:

$$g(1) = 2\sqrt{x^2+2x+1} - 2\sqrt{x^2+x} - 1 = 2(x+1) - 1 - 2\sqrt{x^2+x} = h(x) > 0.$$

   Por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe $z_0 \in [0,1]$, tal que $g(z_0) = 0$, es decir, z_0 es solucion de la ecuacion.

ii. Primero construimos la funcion $f(z) = \sqrt{x+z}$, que es derivable en $[0,1]$. Ahora, por el teorema del valor medio, existe $z_0 \in [0,1]$ tal que $f'(z_0) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$, es decir, existe z_0 tal que:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\sqrt{x+z_0}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = f(1) - f(0).$$

Y por lo tanto, z_0 es solucion de la ecuacion.

iii. Recuperamos la funcion $g(z) = 2\sqrt{x^2+x+z(x+1)} - 2\sqrt{x^2+xz} - 1$ (definida en el apartado i), que es derivable en $[0,1]$. Consideramos ahora

$$g'(z) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+z(x+1)}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+xz}}.$$

Y resolvemos la ecuacion $g'(z) = 0$:

$$g'(z) = 0 \iff \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+z(x+1)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+xz}} \iff$$

$$\iff (x+1)\sqrt{x^2+xz} = x\sqrt{x^2+x+z(x+1)} \iff$$

$$\iff x^4+zx^3+2x^3+2zx^2+x^2+xz = x^4+zx^3+x^3+zx^2 \iff x^3+zx^2+x^2+xz = 0$$

Que no tiene solucion ya que $x, z > 0$. Por lo tanto la ecuacion $g'(z) = 0$ no tiene ninguna solcuion en el intervalo $[0,1]$ y por consiguiente, $g(z)$ tiene como mucho una raiz (en ese intervalo), la ya encontrada z_0.