Examen final matematica discreta 2016

1. Sean m y n enteros pares con $1 \leq m \leq n$. Consideramos la rejilla formada por los puntos (i, j) con $0 \leq i \leq 2n$ y $0 \leq j \leq 2m$. Consideramos caminos en la rejilla formados por pasos hacia la derecha $(1, 0)$ y hacia arriba $(0, 1)$,

   (a) Dad una formula para el numero de caminos que van de $(0, 0)$ a $(2n, 2m)$ y que pasan por el punto (m, m).

   (b) Dad una formulla para el numero de caminos que van de $(0, 0)$ a $(2n, 2m)$ y que no pasan por el punto $A = (n/2, m/2)$ ni por el punto $B = (n, m)$

2. Resolved la recurrencia:
$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n, \quad a_0 = \lambda,$$
   con α, β, λ numeros reales.

3. Sea T un arbol con n vertices sin vertices de grado 2. Provad que mas de la mitad de los vertices son hojas.

4. Sea G un grafo con n vertices y m aristas que no contiene triangulos (ciclos de longitud 3)

   (a) Si xy es una arista de G, provad que $g(x) + g(y) \leq n$.

   (b) Deducid que $\sum_{x \in V} g(x)^2 \leq mn$.

   (c) Utilizad la desigualdad de Cauchy-Schwarz para concluir que $m \leq n^2/4$.
   $[(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), a_i, b_i \in \mathbb{R}.]$

Solucion

1.

2. Primero resolvemos la recurrencia general:

$$x - \alpha = 0 \implies x = \alpha.$$

Si $\alpha \neq \beta$, tenemos:

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

con $a_0 = \lambda$ y $a_1 = 1 + \alpha\lambda$. Y por lo tanto

$$\begin{cases} \lambda = A + B \\ 1 + \alpha\lambda = A\alpha + B\beta \end{cases} \implies \begin{cases} A = \lambda - \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{\lambda\beta-\lambda\alpha-1}{\beta-\alpha} \\ B = \frac{1}{\beta-\alpha} \end{cases}.$$

Si $\alpha = \beta$, entonces:

$$a_n = A\alpha^n + Bn\alpha^n,$$

con $a_0 = \lambda$ y $a_1 = 1 + \alpha\lambda$. Por lo tanto:

$$\begin{cases} \lambda = A \\ 1 + \alpha\lambda = A\alpha + B\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} A = \lambda \\ B = \frac{1}{\alpha} \end{cases}.$$

3. Sean $\{x_1, \cdots, x_n\}$ los vertices de T, entonces se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = 2n - 2$$

(por ser T un arbol). Sabemos que todo vertice tiene grado al menos 1 (ya que T es conexo) y suponemos que al menos $n/2$ vertices tienen grado distinto de 1 (que no son hojas), es decir, grado mayor o igual que 3 (ya que no hay vertices de grado 2). Distinguimos ahora dos casos:

Si n es par, entonces suponemos SPG (Sin Perdida de Generalidad) que los vertices $x_1, \cdots, x_{n/2}$ son los que tienen grado mayor o igual que 3. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n/2} g(x_i) + \sum_{i=n/2+1}^{n} g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = 2n - 2.$$

Pero por otro lado:

$$2n-2=\sum_{i=1}^{n/2} g(x_i)+\sum_{i=(n+2)/2}^{n} g(x_i)\geq 3\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-1=2n-1.$$

Lo cual es una contradiccion.

Si n es impar, suponemos SPG que los vertices $x_1,\cdots,x_{(n+1)/2}$ son los que tienen grado mayor o igual que 3. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{(n+1)/2} g(x_i)+\sum_{i=(n+3)/2}^{n} g(x_i)=\sum_{i=1}^{n} g(x_i)=2n-2.$$

Pero por otro lado:

$$2n-2=\sum_{i=1}^{(n+1)/2} g(x_i)+\sum_{i=(n+3)/2}^{n} g(x_i)\geq 3\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}=2n+1$$

Lo cual es una contradiccion.

4. (a) Llamamos S_x alconjunto de los vertices adyacentes a x y S_y al conjunto de los vertices adyacentes a y. Entonces, $g(x)+g(y)=|S_x|+|S_y|$, ademas, $|S_x+S_y|\leq n$. Observamos ahora que S_x y S_y son dijuntos, ya que, si existiera $z\in S_x$ y $z\in S_y$, entonces el ciclo xyz seria un triangulo. Por lo tanto S_x y S_y son dijuntos y $g(x)+g(y)=|S_x|+|S_y|=|S_x+S_y|\leq n$

   (b) Sea x un vertice de G, sea g su grado y sean $y_1,\cdots,y_g$ los vertices adyacentes a x_0, entonces:

   $$(g(y_1)+g)+\cdots+(g(y_g)+g)\leq gn$$

   (por el apartado a), o, reescribiendo:

   $$g^2\leq gn-g(y_1)-\cdots-g(y_g),$$

   Llamando g_x a $g(x_1)+\cdots+g(y_g)$, $g(y_0)^2\leq g(x)n-g_x$. Entonces (siendo $z_1,\cdots,z_n$ los vertices de G):

   $$\sum_{i=1}^{n} g(z_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}(g(z_i)n-g_{z_i})=2mn-\sum_{i=1}^{n} g_{z_i}.$$

   Observamos ahora que $\sum_{i=1}^{n} g_{z_i}=\sum_{i=1}^{n} g(z_i)^2$, ya que $\forall z_i\in G$, $g(z_i)$ aparece en la parte izquierda exactamente $g(z_i)$ veces, y por lo tanto son iguales, sustiyendo en la desigualdad anterior:

   $$\sum_{i=1}^{n} g(z_i)^2\leq 2mn-\sum_{i=1}^{n} g(z_i)^2 \implies \sum_{i=1}^{n} g(z_i)^2\leq mn$$

   (c) Sean $z_1,\cdots,z_n$ los vertices de G, entonces sea $a_i=g(z_i)$ y $b_i=1$ $(i=1,\cdots,n)$, y se tiene que:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} g(z_i) = 2m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} g(z_i)^2 \leq mn \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \end{cases} .$$

Por lo tanto, aplicanco Cauchy-Schwarz:

$$4m^2 \leq (mn)(n) = mn^2 \implies m \leq n^2/4$$