Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva

Ernesto Lanchares

Ejercicio 1
Si tenemos una descomposición minimal (*), demostrad que los vectores $\{u1, \ldots, um\}$ son l.i. y los vectores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ también. Deducid que $rang(f) \leq n = dimE$.

Demostración
Suponemos que $\{u_1, \ldots, u_m\}$ son l.d. entonces, se tiene que $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ con $\lambda_r \neq 0$ (para al menos una r) tales que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0 \iff u_r = \frac{-\lambda_1}{\lambda_r} u_1 + \cdots + \frac{-\lambda_{r-1}}{\lambda_r} u_{r-1} + \frac{-\lambda_{r+1}}{\lambda_r} u_{r+1} + \cdots + \frac{-\lambda_m}{\lambda_r} u_m$$

Ahora, podemos escribir f como

$$f = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_r \otimes v_r + \cdots + u_m \otimes v_m$$

Y ustituyendo u_r, obtenemos

$$f = u_1 \otimes v_1 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_r} u_1 + \cdots + \frac{-\lambda_m}{\lambda_r} u_m \right) \otimes v_r + \cdots + u_m \otimes v_m$$

Agrupando ahora los términos, obtenemos

$$f = u_1 \otimes \left(v_1 + \frac{-\lambda_1}{\lambda_r} v_r \right) + \cdots + u_m \otimes \left(v_m + \frac{-\lambda_m}{\lambda_r} v_r \right)$$

Y por lo tanto, hemos encontrado una descomposición de f como (*), con menos términos que la original, lo cual es imposible ya que la descomposición era minimal. Lo que implica que nuestra hipótesis de partida es falsa, es decir, $\{u_1, \ldots, u_m\}$ son l.i.

Podemos demostrar que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son l.i. siguendo un razonamiento análogo.

Por el resultado anterior, $rang(f) = m \implies \exists \{u_1, \ldots, u_m\}$ l.i. como no pueden existir más de n vectores l.i., $rang(f) \leq n$.

Ejercicio 2
Con $n = 3$, considerad $u_{B^*} = (1, 2, 3)^t$ y $v_{B^*} = (2, 1, 5)^t$. Calculad $A = M_B(u \otimes v)$.

Demostración
Sabemos que

$$M_B(u\otimes v)=\begin{pmatrix}(u\otimes v)(e_1,e_1) & (u\otimes v)(e_1,e_2) & (u\otimes v)(e_1,e_3)\\(u\otimes v)(e_2,e_1) & (u\otimes v)(e_2,e_2) & (u\otimes v)(e_2,e_3)\\(u\otimes v)(e_3,e_1) & (u\otimes v)(e_3,e_2) & (u\otimes v)(e_3,e_3)\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, basta calcular estos valores, obteniendo

$$M_B(u\otimes v)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\4 & 2 & 10\\3 & 3 & 15\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3
Sea $A=M_B(f)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\2 & 6 & 14\\4 & 12 & 28\end{pmatrix}$. Demostrad que f se puede escribir como $f=u'\otimes v'$ encontrando la descomposición explícitamente.

Demostración
En efecto, podemos escribir f como

$$f=u'\otimes v'=(1,2,4)^t_{B^*}\otimes(1,3,7)^t_{B^*}$$

Y, en efecto

$$M_B(u'\otimes v')=\begin{pmatrix}(u'\otimes v')(e_1,e_1) & (u'\otimes v')(e_1,e_2) & (u'\otimes v')(e_1,e_3)\\(u'\otimes v')(e_2,e_1) & (u'\otimes v')(e_2,e_2) & (u'\otimes v')(e_2,e_3)\\(u'\otimes v')(e_3,e_1) & (u'\otimes v')(e_3,e_2) & (u'\otimes v')(e_3,e_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\2 & 6 & 14\\4 & 12 & 28\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4
Demostrad que para cualquier forma bilineal f se tiene que $rang(f)=rang(A)$. Dad un método explícito para encontrar una descomposición minimal de f en tensores de $rang$ 1 a partir de la matriz. Dad un ejemplo no trivial con $n=3$.

Demostración
Suponemos que $rang(f)=m$ y

$$f=u_1\otimes v_1+\cdots u_m\otimes v_m$$

es una descomposición minimal de f. Consideramos ahora $M_B(f)$

$$A=M_B(f)=M_B(u_1\otimes v_1+\cdots+u_m\otimes v_m)=M_B(u_1\otimes v_1)+\cdots+M_B(u_m\otimes v_m)$$

(Ya que la matriz de la suma es la suma de matrices). Vamos a ver ahora que $rang(M_B(u\otimes v))=1$ $(u,v\in E^*)$

$$M_B(u\otimes v)=\begin{pmatrix}(u\otimes v)(e_1,e_1) & \cdots & (u\otimes v)(e_1,e_1n)\\\vdots & \ddots & \vdots\\(u\otimes v)(e_n,e_1) & \cdots & (u\otimes v)(e_n,e_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u(e_1)v(e_1) & \cdots & u(e_1)v(e_n)\\\vdots & \ddots & \vdots\\u(e_n)v(e_1) & \cdots & u(e_n)v(e_n)\end{pmatrix}$$

Y por lo tanto

$$M_B(u \otimes v)_j = \frac{v(e_j)}{v(e_1)} M_B(u \otimes v)_1$$

y $rang(M_B(u \otimes v)) = 1$. También sabemos que si $C, D \in M_{n,n}(\mathbf{k})$, $rang(C+D) \leq rang(C) + rang(D)$ y por lo tanto

$$rang(A) \leq rang(M_B(u_1 \otimes v_1)) + \cdots + rang(M_B(u_m \otimes v_m)) = m$$

Con lo cual, $rang(A) \leq rang(f)$.

Suponemos ahora que $rang(A) = m$, es decir, $\exists i_1, \ldots, i_m$ tales que $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}\}$ son l.i. y, si $r \neq i_1, \ldots, i_m$,

$$A_r = \lambda_{r1} A_{i_1} + \cdots + \lambda_{rm} A_{i_m}$$

Definimos ahora $u_j = A_{i_j}$ $\forall j = 1, \ldots, m$ y v_j la definimos componente a componente

$$(v_j)_k = \begin{cases} 1 \quad \text{si } k = i_j \\ 0 \quad \text{si } k = i_h \quad \text{con } h \neq j \\ \lambda_{rj} \quad \text{si } k = r \neq i_h \quad \forall h = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Vamos a comprobar que

$$f = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_m \otimes v_m$$

Para ello, comprobamos que sus matrices sean iguales. Denotamos $M_B(u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_m \otimes v_m)$ como C y distinguimos dos casos

- si $h \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ y $h = i_r$

$$C_h = \begin{pmatrix} (u_1 \otimes v_1)(e_1, e_h) + \cdots + (u_m \otimes v_m)(e_1, e_h) \\ \vdots \\ (u_1 \otimes v_1)(e_n, e_h) + \cdots + (u_m \otimes v_m)(e_n, e_h) \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} u_r(e_1) \\ \vdots \\ u_r(e_n) \end{pmatrix} = A_h$$

  La cancelación en (1) ocurre ya que, por definición $v_j(e_h) = 0$ si $j \neq r$ y $v_r(e_h) = 1$

- si $h \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$

$$C_h = \begin{pmatrix} (u_1 \otimes v_1)(e_1, e_h) + \cdots + (u_m \otimes v_m)(e_1, e_h) \\ \vdots \\ (u_1 \otimes v_1)(e_n, e_h) + \cdots + (u_m \otimes v_m)(e_n, e_h) \end{pmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{h1} u_1(e_1) + \cdots + \lambda_{hm} u_m(e_1) \\ \vdots \\ \lambda_{h1} u_1(e_n) + \cdots + \lambda_{hm} u_m(e_n) \end{pmatrix} = \lambda_{h1} A_{i_1} + \cdots + \lambda_{hm} A_{i_m} = A_h$$

  La cancelación en (2) ocurre ya que, por definición $v_j(e_h) = \lambda_{hj}$

Por lo tanto $C = A$ y $rang(f) \leq rang(A)$. Pero habiamos visto que $rang(A) \leq rang(f)$, por lo tanto, $rang(A) = rang(f)$ y las $\{u_1, \ldots, u_m\}$ y las $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son las de la demostración.

Vamos con el ejemplo con $n = 3$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $rang(A) = 2$, $f = u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2$. Tomamos 2 columnas l.i. de A, en este caso, la 1 y la 3, entonces

$$u_1 = (1, 2, 3)^t \qquad u_2 = (1, 2, 2)^t$$

Ahora encontramos v_1 y v_2

$$v_1 = (1, 1, 0)^t \qquad v_2 = (0, 1, 1)^t$$

Ejercicio 5
Suponemos $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ i dotamos al espacio vectorial E de un producto escalar $<, >$. Suponemos que B es una b.o. Dad un métode para encontrar una descomposición minimal de f en tensores de *rang* 1 tales que $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ sean vectores ortogonales y $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ también sean ortogonales (Indicación: utilizad la SVD de la matriz A). Aplicadlo al mismo ejemplo del apartado anterior.

Demostración
Sea $rang(A) = m$ y sea

$$A = U\Sigma V^T$$

La descomposición SVD de A, es decir U y V son ortogonales y Σ es diagonal. Además,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_m & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y definimos nuestros $\{u_1, \ldots, u_m\}$ como

$$U\Sigma = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m & 0 & \cdots & 0 \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$

Definimos ahora $\{v_1, \ldots, v_m\}$ como

$$V = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m & v_{m+1} & & v_n \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$

y

$$v_r = \lambda_{r1} v_1 + \cdots + \lambda_{rm} u_m$$

Con $r > m$. Y en efecto tenemos que

$$(e_i)^t U \Sigma V^t (e_j) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m & 0 & \cdots & 0 \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{——} & v_1 & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & v_m & \text{——} \\ \text{——} & v_{m+1} & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & v_n & \text{——} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1(e_i) & \cdots & u_m(e_i) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(e_j) \\ \vdots \\ v_m(e_j) \\ \vdots \\ v_n(e_j) \end{pmatrix} = (u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_n \otimes v_n)(e_i, e_j)$$

Y por lo tanto, $f = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_m \otimes v_m$ es una descomposición minimal de f (Ya que $rang(f) = rang(A)$), donde además $\{u_1, \ldots, u_m\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son ortogonales.

Aplicando esto al ejemplo anterior, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = U \Sigma V^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.296914 & 0.334428 & -0.894427 \\ 0.593829 & 0.668855 & 0.447214 \\ 0.747803 & -0.663921 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.23278 & 0 & 0 \\ 0 & 0.470434 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 2.44443 & 0.157326 & 0 \\ 4.88886 & 0.314652 & 0 \\ 6.1565 & -0.312331 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.452822 & -0.679426 & 0.57735 \\ 0.814811 & 0.0524421 & -0.57735 \\ 0.361989 & 0.731868 & 0.57735 \end{pmatrix}^t$$

Y de ahí obtenemos $u_1 = (2.4443, 4.88886, 6.1565)^t$, $u_2 = (0.157326, 0.314652, -0.312331)^t$, $v_1 = (0.452822, 0.814811, 0.361989)^t$ y $v_2 = (-0.679426, 0.0524421, 0.731868)^t$.

Ejercicio 6

En las mismas hipótesis del apartado anterior, suponemos que f es una forma bilineal simétrica ($f \in S_2(E)$). Demostrad que se puede encontrar una descomposición minimal de f con los vectores $v_i = \pm u_i$, siendo también los vectores $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ortogonales. Encontrad la descomposición cuando $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Demostración
Como A es simétrica, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ veps de A (por el teorema espectral real). Además, sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ los veps de A (tal que $Ax_i = \lambda_i x_i$), podemos imponer además, que estos veps sean ortogonormales

$$AX = A \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$A = X\Lambda X^{-1} = X\Lambda X^t$$

Por otro lado, sabemos que, si $rang(A) = m$, entonces $\lambda_{i_{m+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = 0$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m} \neq 0$ y definimos $u_i = x_{i_m}\sqrt{\lambda_{i_m}} = v_i$ y se tiene que

$$(e_i)^t A(e_j) = (e_i)^t \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix}^t (e_j) =$$

$$\begin{pmatrix} x_1(e_i) & \cdots & x_1(e_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(e_j) \\ \vdots \\ x_n(e_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 x_1(e_i)x_1(e_j) + \cdots + x_m(e_i)x_m(e_j) = (u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_m \otimes v_m)(e_i, e_j)$$

Por lo tanto, $f = u_1 \otimes v_1 + \cdots u_m \otimes v_m$ con $\{u_1, \dots, u_m\}$ ortogonales y $u_i = v_i$

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tenemos que sus veps son

$$\begin{cases} x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t & \text{de vap } 4 \\ x_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t & \text{de vap } 1 \\ x_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{6}\right)^t & \text{de vap } 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $u_1 = v_1 = 2x_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t$, $u_2 = v_2 = x_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ y $u_3 = v_3 = x_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{6}\right)^t$

Ejercicio 7
Demostrad que si $rang(f) = r$ y tenemos la descomposición (**), entonces $\{w_1, \dots, w_r\}$ son linealmente independientes.

Demostración
Suponemos que $\{w_1, \ldots, w_r\}$ son l.d. entonces, se tiene que $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ con $\lambda_i \neq 0$ (para al menos una i) tales que

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r = 0 \iff w_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} w_1 + \cdots + \frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i} w_{i-1} + \frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i} w_{i+1} + \cdots + \frac{-\lambda_r}{\lambda_i} w_r$$

Ahora, podemos escribir f como

$$f = w_1 \wedge w_2 + \cdots + w_i \wedge w_{i+1} + \cdots + w_{r-1} \wedge w_r$$

Y ustituyendo u_r, obtenemos

$$f = w_1 \wedge w_2 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_i} w_1 + \cdots + \frac{-\lambda_r}{\lambda_i} w_r \right) \wedge w_{i+1} + \cdots + w_{r-1} \wedge w_r$$

Agrupando ahora los términos, obtenemos

$$f = w_1 \wedge \left(w_2 + \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} w_{i+1} \right) + \cdots + w_{r-1} \wedge \left(w_r + \frac{-\lambda_m}{\lambda_r} w_{i+1} \right)$$

Y por lo tanto, hemos encontrado una descomposición de f como (**), con menos términos que la original, lo cual es imposible ya que la descomposición era minimal.

Ejercicio 8

Demostrad que si $rang(f) = r = 2k$, entonces $\forall 1 \leq m \leq k$ se verifica que $\overbrace{f \wedge \cdots \wedge f}^{m} \neq 0$ y que $\overbrace{f \wedge \cdots \wedge f}^{k+1} = 0$.

Demostración
Sea

$$f = w_1 \wedge w_2 + \cdots + w_3 \wedge w_r$$

Una descomposición minimal de f como (**). Ahora, sea $\omega_i = w_{2i-1} \wedge w_{2i} \forall i = 1, \ldots, k$, entonces

$$f = \omega_1 + \cdots + \omega_k$$

Y de finimos $f^i = \overbrace{f \wedge \cdots \wedge f}^{i}$. Entonces, se tiene

$$f^m = f^{m-1} \wedge f \overset{(1)}{=} f \wedge f^{m-1} = (\omega_1 + \cdots + \omega_k) \wedge \left(\lambda^{m-1}_{I_1^{m-1}} \omega_{I_1^{m-1}} + \cdots + \lambda^{m-1}_{I_{m-1}^{m-1}} \omega_{I_{m-1}^{m-1}} \right) =$$
$$\omega_1 \wedge \left(\lambda^{m-1}_{I_1^{m-1}} \omega_{I_1^{m-1}} + \cdots + \lambda^{m-1}_{I_{m-1}^{m-1}} \omega_{I_{m-1}^{m-1}} \right) + \cdots + \omega_k \wedge \left(\lambda^{m-1}_{I_1^{m-1}} \omega_{I_1^{m-1}} + \cdots + \lambda^{m-1}_{I_{m-1}^{m-1}} \omega_{I_{m-1}^{m-1}} \right) =$$
$$\lambda^m_{I_1^m} \omega_{I_m^m} + \cdots + \lambda^m_{I_1^m} \omega_{I_m^m}$$

Donde I^h es un conjunto de h elementos entre 1 y k ordenados de forma creciente, $\lambda^h_{I^h}$ es una constante de ajuste y

$$\omega_{I^h} = \omega_{I(1)} \wedge \omega_{I(2)} \wedge \cdots \wedge \omega_{I(h)} \overset{(2)}{=} \omega_{s(I(1))} \wedge \omega_{s(I(2))} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(I(h))} \qquad s \in \mathcal{S}_h$$

(1) y (2) se producen ya que todos los omegas pertenecen a $T_{2t}(E)$. Además, los ω_{I^h} son l.i. (ya que los $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ son l.i.). Por lo tanto, para $m \leq k$

$$f^m = \lambda^m_{I_1^m}\omega_{I_m^m} + \cdots + \lambda^m_{I_1^m}\omega_{I_m^m} \neq 0$$

Teniendo en cuenta que solo existe un I^k, tenemos que

$$f^{k+1} = f^k \wedge f = f \wedge f^k = (\omega_1 + \cdots + \omega_k) \wedge \left(\lambda^k_{I^k}\omega_{I^k}\right) =$$
$$\lambda^k_{I^k}(\omega_1 + \cdots + \omega_k) \wedge (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = 0$$

Ejercicio 9
Sea $E = \mathbb{R}^4$, consideramos la base canonica $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Calculad el rango del 2-tensor antisimétrico

$$f = e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^* + e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_4^* + e_3^* \wedge e_4^*$$

Demostración
Primero vamos a ver que $rang(f) \geq 2$. Para ello, vamos a ver que $rang(M_B(u \wedge v)) \leq 2$. Tenemos que

$$u \wedge v = u \otimes v - u \otimes v \implies M_B(u \wedge v) = M_B(u \otimes v) - M_B(v \otimes u)$$

Como hemos visto en el ejercicio **??**, $rang(M_B(u \otimes v)) = 1$ por lo tanto

$$rang(M_B(u \wedge v)) \leq rang(M_B(u \otimes v)) + rang(M_B(v \otimes u)) = 2$$

Suponemos ahora que $rang(f) = 1$, entonces $\exists u, v \in E^*$ tales que

$$f = u \wedge v \implies M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M_B(u \wedge v)$$

Pero esto no puede ser, ya que $rang(M_B(f)) = 4$ y hemos visto que $rang(M_B(u \wedge v)) \leq 2$. Una vez visto que $rang(f) \geq 2$, solo nos falta encontrar $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ tales que $f = w_1 \wedge w_2 + w_3 \wedge w_4$ y habremos demostrado que $rang(f) = 2$, si tomamos $w_1 = (1,1,0,0)^t$, $w_2 = (0,1,1,1)^t$, $w_3 = (0,0,0,1)^t$ y $w_4 = (0,0,1,0)^t$. En efecto

$$M_B(w_1 \wedge w_2) = M_B(w_1 \otimes w_2) - M_B(w_2 \otimes w_1) =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_B(w_3 \wedge w_4) = M_B(w_1 \otimes w_2) - M_B(w_2 \otimes w_1) =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_B(w_1 \wedge w_2 + w_3 \wedge w_4) = M_B(w_1 \wedge w_2) + M_B(w_3 \wedge w_4) = 5$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M_B(f)$$

Ejercicio 10
Si $rang(f) = r$ y tenemos la descomposición minimal (**), ampliamos los vectores $\{w_1, \dots, w_r\}$ hasta tener una base $B = \{w_1, \dots w_n\}$ de E^*. Calculad $A = M_B(f)$. ¿Qué relación tiene $rang(f)$ con $rang(A)$? Deducid que las dos definiciones de rango de f (considerando $f \in T_2(E)$ o $f \in A_2(E)$) coinciden.

Demostración
Comenzamos calculando $M_B(f)$

$$A = M_B(f) = M_B(w_1 \wedge w_2 + \dots + w_{r-1} \wedge w_r) = M_B(w_1 \wedge w_2) + \dots + M_B(w_{r-1} \wedge w_r)$$

Ahora,

$$M_B(w_i \wedge w_{i+1}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto,

$$M_B(f) = A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, $rang(A) = r = rang(f)$. Por lo tanto, $rang_{A_2(E)}(f) = rang(A) = rang_{T_2(E)}(f)$ y las definiciones coinciden.

Ejercicio 11
Demostrad que cualquier matri¡ antisimétrica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tiene rango par $r = 2k$. Además, existe $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que

$$S^t A S = \begin{pmatrix} 0 & Id_k & 0 \\ -Id_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración
Primero vamos a ver que toda matriz antisimétrica A, representa a un tensor f antisimétrico.

$$e_i^t A e_j = a_{ij} \overset{\text{antisimétrica}}{=} -a_{ji} = -e_j^t A e_i$$

Por lo tanto, $rang(A) = rang(f)$ y $rang(f)$ es par por definición.