Dada la serie

$$\sum \frac{2^n \sin(\alpha)^{2n}}{n^\beta}$$

Estudiaremos su convergencia.

Primero, miraremos la convergencia absoluta:

$$\sum \left| \frac{2^n \sin(\alpha)^{2n}}{n^\beta} \right| = \sum \left| \frac{2\sin(\alpha)^2}{n^{\frac{\beta}{n}}} \right|^n$$

Además, como todos los números son positivos, podemos quitar el valor absoluto y se tiene la siguiente desigualdad

$$\sum \left(\frac{2\sin(\alpha)^2}{n^{\frac{\beta}{n}}} \right)^n \leq \sum \left(2\sin(\alpha)^2 \right)^n$$

Ahora, si $2\sin(\alpha)^2 < 1$, la serie, claramente converge. Por otro lado, si $2\sin(\alpha)^2 > 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > N \qquad 2\sin(\alpha)^2 > n^{\frac{\beta}{n}} \implies \frac{2\sin(\alpha)^2}{n^{\frac{\beta}{n}}} > 1$$

Y por lo tanto, la serie diverge. Por último, si $2\sin(\alpha)^2 = 1$, tenemos

$$\sum \frac{1}{n^\beta}$$

Y por lo tanto la serie converge sii $\beta > 1$.

a) Primero supodremos que la conición del enunciado es falsa, es decir, que no existe W. Entonces tenemos que $\forall W \ni y,\ f^{-1}(W) \not\subseteq U \implies \exists x \in f^{-1}(W) \setminus U$ tal que $f(x) \in W$.

<++>