DOKUMEN BUKTI HAK CIPTA

Konstruksi Bahasa Waktu Nyata (Real Time Language) dengan Merancang Bahasa yang Gramatikanya Diberi Waktu (Timed Grammar) untuk Interaksi Manusia-Mesin (semua jenis mesin) dalam Waktu Nyata

Pengusul Hak Cipta

Dr. Aslan Alwi, S.Si., M.Cs

Dr. Azhari, M.T

Dr. Suprapto, M.Kom

UNIVERSITAS GADJAH MADA

YOGYAKARTA

2021

Konstruksi Bahasa Waktu Nyata (Real Time Language) dengan Merancang Bahasa yang Gramatikanya Diberi Waktu (Timed Grammar) untuk Interaksi Manusia-Mesin (semua jenis mesin) dalam Waktu Nyata

A. RINCIAN KLAIM TATA CARA KONSTRUKSI

Bagian ini merinci tata cara konstruksi bahasa waktu nyata yang diusulkan sebagai bagian utama dari pengusulan hak cipta. Rincian konstruksi dimulai dengan sejumlah definisi terminologi yang digunakan di dalam menyatakan algoritma. Kemudian dibuat beberapa teorema untuk menyatakan langkah-langkah pembuktian di dalamnya. Rincian itu adalah sebagai berikut:

Abstrak

Bahasa yang diberi waktu adalah bahasa yang dibangun untuk keperluan memodelkan input yang diberi waktu untuk diumpankan kepada sistem real-time yang menerimanya. Di dalam beberapa literatur, bahasa yang diberi waktu dibangun dengan mendefinisikan langsung waktu atau clock pada setiap simbol dari string bahasa, yang mana konstruksi ini mendefinisikan bahasa yang diberi waktu sebagai himpunan string tetapi stringnya adalah tupel dengan waktu. Pada dokumen hak cipta ini dikemukakan cara lain mengkonstruksikan bahasa yang diberi waktu, yaitu dengan mengkonstruksikan gramatika yang diberi waktu atau diberi aturan waktu kemudian sebuah bahasa yang diberi waktu dibangun menggunakan gramatika yang diberi waktu tersebut. Konstruksi teori untuk gramatika yang diberi waktu adalah bersifat umum untuk seluruh tipe bahasa Chomsky, sehingga diharapkan teori ini dapat digunakan untuk sembarang kompleksitas input yang diberi waktu kepada sistem real-time. Konsep sistem real-time sebenarnya berkaitan dengan bahasa yang diberi waktu dan automata yang diberi waktu, akan tetapi di dalam makalah ini ditinjau pada sisi bahasa yang diberi waktu, kemudian diusulkan sebuah teori untuk mengkonstruksikan bahasa yang diberi waktu dengan menggunakan gramatika yang diberi waktu. Teori ini tidak saja ditujukan kepada permodelan sistem real-time untuk suatu model checking. Akan tetapi, juga ditujukan untuk pembuatan bahasa pemrograman yang real-time yang mungkin belum pernah ada sebelumnya dibuat oleh orang.

Kata Kunci

Sistem real-time, input yang diberi waktu, Bahasa yang diberi waktu, automata yang diberi waktu, clock, tipe bahasa Chomsky.

Pendahuluan

Sebagai permulaan, pada dokumen hak cipta ini ingin dikemukakan sebuah pendahuluan tentang konsep waktu yang telah dikemukakan orang, terutama oleh Rajeev Alur. Konsep waktu yang akan dijelaskan terletak pada dua konteks. Pertama adalah waktu yang diletakkan pada *word* atau bahasa (*timed-language*). Kedua adalah waktu yang diletakkan pada automata (*timed automata*). Gagasan meletakkan waktu (*clock*) pada bahasa dan automata adalah sesuatu yang baru dalam gagasan Rajeev. Penjelasan tentang ini dapat dilihat pada makalahnya (Alur-Dill, 1994). Seluruh perkerjaan orang sebelumnya (sebelum Rajeev) tentang bagaimana meletakkan waktu pada *real time system (RTS)* dapat dirumuskan sebagai "Usaha untuk melibatkan waktu dalam model qualitatif atau penalaran qualitatif". Celah yang telah Rajeev temukan dari seluruh hasil pekerjaan sebelumnya, yaitu tidak ada yang mengemukakan gagasan timed-language dan gagasan algoritma (*quantitatif qualitatif*) yang dapat melakukan verifikasi pada model yang melibatkan waktu (*incorporating time*) yang mana paradigma waktunya adalah *dense time*.

Terdapat tiga paradigma waktu pada sistem yang bersifat *real time* yaitu *discrete time*, *fictious time* dan *dense time*. *Discrete time* adalah paradigma waktu yang mana mekanisme runtutan kerja sistem dalam waktu dinyatakan dalam urutan bilangan-bilangan bulat yang monoton naik. Konsep ini banyak digunakan pada sirkuit digital terutama pada proses sinkronisasi sirkuit (Alur-Dill, 1994). *Fictitious time* adalah paradigma waktu yang melihat waktu pada runtutan kerja sistem *real time* sebagai urutan waktu kontinu positif (R^+). Akan tetapi, hanya mengambil bagian-bagian yang diskrit yaitu bilangan-bilangan bulat di dalam R^+ sebagai fokus perhatian saja dan sebagai nilai pendekatan (pembulatan) terhadap waktu (Alur-Dill, 1994). *Dense time* adalah paradigma waktu yang melihat waktu semata kontinu (R^+), tidak memfokuskan diri pada bilangan-bilangan bulat atau hasil pembulatan waktu.

Rajeev lebih memilih paradigma *dense time* karena lebih natural sedang yang lain dengan mudah dapat dimanipulasi, dihilangkan sehingga seakan-akan akan sistem tak perlu mempertimbangkan waktu (Alur-Dill, 1994).

Rajeev mempostulatkan gagasan waktu dalam cara pandang *dense time* sebagai berikut:

a. Waktu t adalah bilangan rill ($t \in R^+ \cup \{0\}$).
b. Waktu monoton naik (postulat monotonitas).
c. Untuk setiap bilangan asli N selalu terdapat waktu t yang mana $t > N$ (postulat keberlanjutan/*progress*).

Pada dasarnya makalah Alur-Dill (1994) adalah tentang gagasan *timed automata* dan *timed-language* ditujukan kepada assumsi bahwa sistem *real time* yang terus menerus bekerja, menerima terus menerus input untuk tetap hidup sebagai sebuah mesin atau sistem yang *real time*. Ini nampak pada postulat waktu yang menyatakan bahwa “Untuk setiap bilangan asli N selalu terdapat waktu t yang mana t > N”. Itulah sebabnya *timed-language* yang dimaksud adalah *timed*-ω-*language*, yaitu bertumpu pada ω-*regular language* yang diberi waktu. Simbol ω menandakan bahwa bahasa yang dimaksud adalah bahasa yang himpunan stringnya memiliki panjang yang tak berhingga. Itu berarti jika bahasa itu harus diterima oleh sebuah automata maka automata itu ditujukan kepada automata yang bisa menerima panjang string tak berhingga, dalam hal ini, *timed automata* yang dimaksud adalah ω-*automata*, yaitu Buchi atau Muller automata yang diberi waktu.

Perbedaan Teori Rajeev dengan Teori Diusulkan dalam Dokumen hak cipta ini

Perbedaan pertama adalah bahwa teori dan model yang dikemukakan dalam dokumen hak cipta ini melihat bahwa sistem yang dimaksud adalah sepasang entitas, yaitu pengguna yang memberi inputan berupa *word* dan *sistem real-time* (teori berfokus kepada **interaksi dua entitas** bukan fokus kepada verifikasi mekanisme kerja sistem tunggal semata atau *model checking*).

Perbedaan kedua yaitu bahwa pengguna sebagai yang berinteraksi dengan *sistem real-time* (RTS), tidaklah mungkin memberi input *word* yang panjangnya tak berhingga. Selalu merupakan string atau *word* yang panjangnya berhingga yang diumpankan kepada RTS.

Ini berarti bahasa yang dimiliki oleh pengguna untuk berinteraksi dengan RTS bukanlah bahasa yang berupa ω- *language*, tetapi bahasa pengguna adalah bahasa yang semua panjang stringnya adalah berhingga. Ini berarti, jika interaksi antara pengguna dan RTS terjadi maka pengguna selalu hanya memberi panjang string yang berhingga.

Bahasa pengguna yang hanya merupakan himpunan panjang string yang berhingga maka sebagian postulat waktu Rajeev tidak dapat digunakan. Tepatnya yaitu postulat “Untuk setiap bilangan asli N selalu terdapat waktu t yang mana t > N”. Karena itu, dalam dokumen hak cipta ini postulat itu ditiadakan, tetapi tidak digantikan. Peniadaan ini dimaksudkan bahwa konsep waktu dapat diberlakukan untuk interaksi pengguna-RTS dengan waktu terbatas, tetapi tidak menghalangi jika secara teoritis orang mengemukakan sebuah interaksi pengguna-mesin dengan assumsi panjang waktu yang tak berhingga.

Perbedaan penting berikutnya antara penelitian Alur- Dill (1994) dan dokumen hak cipta ini adalah bahwa teori yang dihasilkan oleh Rajeev ditujukan untuk verifikasi sistem (*model checking*) sebagai sebuah cara alternatif untuk memeriksa keabsahan sistem menggunakan ω-*regular language* dan *timed automata*, bukan dengan cara modal logic atau cara lain yang telah ditempuh orang sebelum Rajeev. Adapun teori yang dihasilkan dari dokumen hak cipta ini adalah ditujukan kepada pembuatan bahasa- bahasa pemrograman yang *real time* dan arsitektur interepreter atau *compiler* yang ditujukan kepada bahasa- bahasa yang dikonstruksikan menggunakan automata (bukan dengan gramatika sebagaimana bahasa-bahasa pemrograman yang sudah umum seperti bahasa C, pascal dan sebagainya yang menggunakan gramatika pada konstruksinya) sehingga konsep waktu adalah ditujukan kepada pembuatan bahasa- bahasa *real time* dan *interpreter* atau *compiler* yang *real time*.

Dibawah ini kemukakan sebuah definisi waktu yang digunakan untuk membangun bahasa yang diberi waktu dengan panjang string input yang terbatas.

Definisi 1.1 *Sebuah barisan waktu* $t = t_1 t_2 t_3 ...$ *adalah sebuah barisan nilai waktu* $t_i \in R^+ \cup \{0\}$ *yang mana* $t_i \geq 0$ *dan memenuhi postulat monotonitas : waktu t selalu menaik secara monoton; yaitu* $t_i < t_{i+1}$ *untuk semua* $i \geq 1$.

Definisi ini berbeda dengan definisi waktu yang dikemukakan oleh Rajeev, ini karena dia menambahkan satu postulat lagi, yaitu postulat keberlanjutan (*progress*) sehingga bahasa yang dibangun oleh konsep waktu Rajeev adalah selalu merupakan ω-*language*, yaitu bahasa yang string-stringnya adalah string dengan panjang yang tak berhingga.

Dibawah ini ingin dikemukakan gagasan teori tentang bagaimana membangun sebuah bahasa yang diberi waktu (*timed-language*). Perbedaan gagasan ini dengan gagasan Rajeev adalah terletak pada gramatika. Dalam makalah Alur-Dill (1994), Rajeev tidak mendefinisikan waktu pada gramatika bahasa tetapi langsung pada string elemen dari bahasa.

Konstruksi bahasa dalam gagasan Rajeev dimulai pada string, misal sebuah string *s* elemen dari suatu bahasa L yang mana $s = s_1 s_2 s_3 ...$ maka suatu *timed-L*, adalah berarti menulis *s* dalam bentuk waktu sebagai (s,t) yang mana $(s,t)=(s_1,t_1)(s_2,t_2)(s_3,t_3)...$ Sebagai contoh konstruksi *timed- language* oleh Rajeev:

Misalkan suatu bahasa L = $\{x \mid x=a^n b^m\}$ konstruksi bahasa dengan perilaku waktu dalam cara pandang Rajeev adalah sebagai berikut:

Timed-L = $\{(x,t) \mid (x,t)=(a,ti)^n(b,tj)^m \text{ , } ti < 2tj + 1 \}$

Jika ditulis dalam bentuk $(s,t)=(s1,t1)(s2,t2)(s3,t3)\ldots$

maka: $(x,t)=(a,ta1)(a,ta2)(a,ta3)\ldots(a,tan)(b,tb1)(b,tb2)(b,tb3)\ldots(b,tbm)$

yang mana berlaku $tai < 2tbj + 1$

Contoh lain:

Timed-L= $\{((ab)^\omega,t) \mid \forall i. (t2i < t2i + 2))\}$

Jika ditulis dalam bentuk $(s,t)=(s1,t1)(s2,t2)(s3,t3)\ldots$ maka: $((ab)^\omega,t) = (ab,t1)(ab,t2)(ab,t3)\ldots$ dan berlaku $(t2i < t2i + 2)$, simbol ω menyatakan perulangan yang tak berhingga sehingga penulisan $(ab)^\omega$ menyatakan perulangan penulisan (ab) secara tak berhingga, membangun string dengan panjang tak hingga.

Pada dasarnya, Rajeev mengkonstruksikan timed- language hanya berdasarkan bahasa dalam definisi himpunan, seperti misal bahasa timed-L didefinisikan dalam definisi himpunan $\{((ab)^\omega,t) \mid \forall i. (t2i < t2i + 2))\}$.

Secara umum, cara konstruksi Rajeev dapat ditulis sebagai:

Timed-language L ditulis timed-L = { *(w,t)* | *P(t)* } yang mana *P(t)* adalah sebuah proposisi tentang waktu.

Pada dokumen hak cipta ini, dikemukakan gagasan untuk mengkonstruksikan bahasa yang diberi waktu dengan cara yang berbeda, yaitu dengan menggunakan gramatika yang diberi waktu. Gagasan ini dinamakan sebagai *timed- grammar* disingkat sebagai *timed-G* sehingga misalkan L adalah sebuah *timed-language maka* di sana mungkin ada gramatika G yang diberi waktu, ditulis *timed-G* sehingga sebuah bahasa L yang diberi waktu ditulis sebagai *timed- L(timed-G)*.

Runtutan teori dan model yang menyatakan gagasan- gagasan ini adalah seluruhnya berdiri di atas postulat waktu pada definisi 1.1., sebagai perbedaan yang mendasar dengan seluruh gagasan Rajeev (Alur-Dill, 1994). Runtutan teori dan model itu adalah sebagai berikut:

Konstruksi Timed-Grammar

a. Arti waktu bagi sebarang bahasa L (*timed-L*)

Sebuah *word* yang diberi waktu dilihat sebagai bahwa setiap simbol dari penyusun *word* diberi *clock* (jam) yang detaknya memenuhi sifat monoton, misal sebuah *word* $w = a1a2a3\ldots an$

kemudian diberi sebuah barisan *clock* sebagai berikut $t = t_1t_2t_3...t_n$ sehingga sebuah *timed-word* dikonstruksikan sebagi (w,t) yang mana:

- $(w,t) = (a_1,t_1)(a_2,t_2)(a_3,t_3)...(a_n,t_n)$
- Waktu t_i bersifat monoton naik: $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq ... \leq t_n \leq t$ untuk semua nilai *i* bilangan bulat.
- Setiap kali t_i berdetak 1 satuan maka t_{1+1} berdetak 2 satuan atau 3 satuan dan seterusnya yang mana selalu dipenuhi bahwa $t_i \leq t_{i+1}$
- Sifat monoton naik ini adalah sifat perilaku waktu (*time behaviour*) universal yang ditetapkan berlaku bagi seluruh konstruksi *timed-language* dan *timed automata*.

Dengan demikian **secara universal**, jika sebuah *timed- language* dikonstruksikan maka bentuk konstruksi umumnya adalah sebagai berikut:

- $timed\text{-}L = \{(w,t)|(w,t) = (a_1,t_1)(a_2,t_2)(a_3,t_3)...(a_n,t_n),\ t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq ... \leq t_n \leq t,\ a_i \in \Sigma\}$, yaitu bahwa *timed-L* adalah himpunan *timed-word* yang setiap *clock* nya memenuhi sifat monoton naik.

Selanjutnya, perilaku waktu bagi sebuah bahasa dapat dinyatakan saja sebagai pernyataan waktu *P(t)* sehingga konstruksi sebuah timed-L dapat dibuat dalam bentuk singkat sebagai berikut:

- $timed\text{-}L = \{(w,t) \mid P(t)\}$ yang mana *t* dalam *(w,t)* memenuhi *P(t)* dan *t* serta *P(t)* memenuhi sifat monoton naik.

Contoh konstruksi *timed-L*: konstruksi bahasa tanpa perilaku waktunya:

$L = \{x \mid x=a^n b^m\}$

Konstruksi bahasa dengan perilaku waktu:

timed-L = $\{(x,t) \mid ((x,t)=(a,t_i)^n(b,t_j)^m,\ t_j < t_i + 1\}$

$t_j < t_i + 1$ adalah pernyataan waktu yaitu *P(t)* dari L.

Contoh lain konstruksi timed-L:

Timed-L = {*(a,3.4)(b,4)(a,5), (b,1)(b,2)(b,3)(a,6)(a,6.7),(b,4.6)(b,5.6)*}

Bahasa ini memenuhi sifat monoton naik pada perilakuwaktunya karena :

Untuk *(a,3.4)(b,4)(a,5)* dipenuhi $3.4<4<5$

Untuk *(b,1)(b,2)(b,3)(a,6)(a,6.7)* dipenuhi $1<2<3<6<6.7$

Untuk *(b,4.6)(b,5.6)* dipenuhi $4.6<5.6$

- Generalisasi konsep *timed-L* sebagai kumpulan *timed-word* menjadi *timed-L* sebagai kumpulan *timed-multiword*

Perluasan Gagasan

Konstruksi bahasa *timed-L* yang berbasiskan kepada *timed-multiword* dapat dilakukan dengan menggunakan sekumpulan *timed-L* yang berbasiskkan *timed-word*. Pada usulan ini, bahasa *timed-L* yang berbasiskan kepada *timed- multiword* dapat diformalkan dalam bentuk definisi berikut:

> ***Definisi 1.2 (timed-multiword)*** *Sebuah timed- multiword ditulis* (w,t) *yaitu* $(w,t) = (w1,t1)(w2,t2)\,(w3,t3)...(wn,tn)$ *yang mana* (wi,ti) *adalah sebuah timed word.*

Selanjutnya, bahasa yang dibangun oleh kumpulan *timed-multiword* dinamai sebagai *timed-multiL* atau disingkat saja sebagai *timed-mL*, disedifinisikan sebagai berikut:

> ***Definisi 1.3. (timed-mL)*** *Sebuah timed-mL adalah sebuah bahasa yang dapat ditulis dalam bentuk* $timed\text{-}mL = \{(w,t) \mid (w,t) = (w1,t1)(w2,t2)(w3,t3)...\,(wn,tn),\ (wi,ti) \in timed\text{-}Li\}$ *yang mana* $(wi,ti) = (ai1,ai1,ai1,...,ti) = (ai1,ti1),\ (ai1,ti2),\ (ai1,ti3),...$ *serta* $ti \leq ti+1$ *dan* $tij \leq t(i+1)k$ *dan* $i,j,k=1,2,3,...$

Definisi ini dapat ditulis juga secara ekivalen dengan pernyataan bahwa $timed\text{-}mL = timed\text{-}L1 \circ timed\text{-}L2 \circ timed\text{-}L2... \circ timed\text{-}Ln$ yang mana o adalah operator konkatenasi.

Contoh penerapan:

Sebagai contoh konstruksi bahasa timed-mL adalah sebagai berikut:

timed-mL = $\{(w,t) \mid (aaab,ti)^n(bbba,tj),\ ti\text{-}2 + ti<tj\}$

Jika bahasa ini diurai secara lebih rinci menggunakan definisi 1.3 yang dikemukakan sebelumnya maka sebagai berikut:

$(w,t)=(aaab,ti)^n(bbba,tj)=(aaab,t1)(aaab,t2)(aaab,t3)...(aaab,tn)(bbba,tn+1)$ yang mana $i=1,2,3,...,n$ dan $j=n+1$ dan $(aaab,ti) \in timed\text{-}Li$ *dan* $(bbba,tj) \in timed\text{-}Lj$.

Dengan demikian, penurunan dapat dilakukan sebagai berikut:

$(aaab,ti)=(a,ti1)(a,ti2)(a,ti3)(a,ti4)$ dan $(bbba,tj)=(b,tj1)(b,tj2)(b,tj3)(a,tj4)$ yang mana $ti1 \leq ti2 \leq ti3 \leq ti4 \leq ti$ untuk setiap timed-Li dan $tj1 \leq tj2 \leq tj3 \leq tj4 \leq tj$ untuk timed-Lj dan $ti1 \leq ti2 \leq ti3 \leq ti4 \leq ti \leq tj1 \leq tj2 \leq tj3 \leq tj4 \leq tj$ menunjukkan sifat monoton naik dalam bahasa timed-mL secara keseluruhan.

- Konstruksi *timed-L* menggunakan gramatika yang diberi waktu yaitu *timed-grammar*

(*timed-G*)

Pada bagian ini diusulkan pembuatan bahasa *timed-L* menggunakan gramatika. Bahasa ini ditulis sebagai *timed- L(timed-G)* yang mana *timed-G* adalah gramatika dari bahasa tersebut yang diberi perilaku waktu. Gramatika ini dibangun menggunakan perilaku waktu sebagai konsekuensi bahwa bahasa L yang dibangunnya adalah bahasa dengan perilaku waktu. Usulan itu adalah sebagai berikut:

Misal $G = \langle S, E, T, NT, P\rangle$ adalah sebuah gramatika bahasa dengan *S* adalah simbol start, *T* adalah himpunan terminal, *NT* adalah himpunan nonterminal, *E* adalah alphabet dan *P* adalah aturan-aturan produksi. Sebuah *timed-G* didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.4 (timed-G) *Sebuah timed-G adalah* $\langle S,E,T,NT,timed\text{-}P\rangle$ *yang mana S adalah simbol start, T adalah himpunan terminal, NT adalah himpunan nonterminal, E adalah alphabet dan timed-P adalah aturan-aturan produksi yang diberi perilaku waktu dan t adalah clock pada aturan produksi.*

Selanjutnya, untuk mendefinisikan apa itu *timed-P*, pada bagian ini terlebih dulu diperkenalkan konsep *infimum* (nilai waktu terkecil) dari waktu sebuah *word*. Misalkan sebuah *word w*, $(w,t)=(x_1,t)(x_2,t_2)(x_3,t_3)\ldots$ yang mana $x_i \in T\cup NT$ maka waktu *infimum* dari *t* adalah *infimum* dari himpunan $\{t_1,t_2,t_3,\ldots\}$ ditulis sebagai $inf\{t_1,t_2,t_3,\ldots\}$ atau disingkat saja sebagai $inf(t)$. Oleh karena assumsi bahwa waktu sebuah *word* adalah monoton naik sehingga $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots$ maka jelaslah bahwa $inf(t)$ adalah t_1, yaitu $inf(t)=t_1$.

Definisi 1.5 (waktu infimum sebuah timed-word) *Misalkan* (α,t) *adalah sebuah word yang dibangun dari* $T\cup NT$ *yaitu:* $(\alpha,t)=(x_1,t)(x_2,t_2)(x_3,t_3)\ldots$ *yang mana* $x_i \in T\cup NT$ *maka* $inf(t) = inf\{t_1,t_2,t_3,\ldots\}$.

Selanjutnya, berdasarkan konsep waktu *infimum*, dibawah ini dikemukakan pendapat tentang *timed-P*.

Definisi 1.6 (timed-P) *Sebuah timed-P adalah sebuah himpunan aturan produksi* $(P_i,t_i) \equiv (\alpha_i,t_i) \rightarrow (\beta_j,t_j)$ *yang mana:*

1. (α_i,t_i) *adalah timed-word dan* $(\alpha_i,t_i)=(x_{i1},t_{i1})(x_{i2},t_{i2})(x_{i3},t_{i3})\ldots(x_{i3},t_{in})$ *dan* $x_{ik} \in T\cup NT$
2. (β_j,t_j) *adalah timed-word dan* $(\beta_j,t_j)=(y_{j1},t_{j1})(y_{j2},t_{j2})(y_{j3},t_{j3})\ldots(y_{j3},t_{jm})$ *dan* $y_{jd} \in T\cup NT$ *dan*
3. *Misalkan suatu string* $(u,t_u)(\alpha_i,t_i)(v,t_v)$ *padanya dilakukan subtitusi menggunakan* (P_i,t_i) *sehingga diperoleh* $(u,t_u)(\beta_j,t_j)(v,t_v)$ *maka berlaku sifat waktu* $t_u \leq inf(t_j) \leq t_j \leq inf(t_v)$ *dan* $t_j \leq t_i$ *yang mana* $u,v \in (T\cup NT)^*$.

Sebagai contoh penerapan untuk menguji secara kasus apakah hasil produksi *timed-P* selalu monoton naik(memenuhi postulat waktu yaitu monotonitas pada definisi), dikemukakan sebagai berikut: Misal *timed-P*:

$(P1,t1) \equiv (S,t1) \rightarrow (a,t11)(a,t12)(a,t13)(B,t14)(b,t15)$

$(P2,t2) \equiv (B,t2) \rightarrow (a,t21)(b,t22)(R,t23)$

$(P3,t3) \equiv (R,t3) \rightarrow (a,t31)(b,t32)$

$(P4,t4) \equiv (R,t3) \rightarrow empty$

Contoh produksi menggunakan *timed-P* di atas:

Step 0: Gunakan aturan produksi $(P1,t1)$

Step 1: Diperoleh $(S,t1)$

Step 2: Diperoleh $(a,t11)(a,t12)(a,t13)(B,t14)(b,t15)$, dari definisi 1.6. diperoleh perilaku waktu $t11 \le t12 \le t13 \le inf(t14) \le t14 \le t15 \le t1$

Step 3: Subtitusi menggunakan $(P2,t2)$ diperoleh $(a,t11)(a,t12)(a,t13)(a,t21)(b,t22)(R,t23)(b,t15)$, dari definisi 5.11., $inf(t14)=inf\{t21,t22,t23\}=t21$ dan $t21 \le t22 \le t23 \le t14$ maka diperoleh perilaku waktu: $t11 \le t12 \le t13 \le t21 \le t22 \le t23 \le t15 \le t1$. Sselanjutnya dari definisi 8.10 juga diperoleh $t11 \le t12 \le t13 \le t21 \le t22 \le inf(t23) \le t23 \le t15 \le t1$.

Step 4: Subtitusi menggunakan $(P3,t3)$, diperoleh $(a,t11)(a,t12)(a,t13)(a,t21)(b,t22)(a,t31)(b,t32)(b,t15)$, dari definisi 8.10., $inf(t23)=inf\{t31,t32\}=t31$ dan $t31 \le t32 \le t23$ maka diperoleh $t11 \le t12 \le t13 \le t21 \le t22 \le t31 \le t32 \le t15 \le t1$, diperoleh bahwa untuk string $(a,t11)(a,t12)(a,t13)(a,t21)(b,t22)(a,t31)\ (b,t32)(b,t15)$ yang diproduksi dari *timed-P*, diperoleh bahwa perilaku waktu bersifat monoton naik, yaitu $t11 \le t12 \le t13 \le t21 \le t22 \le t31 \le t32 \le t15 \le t1$.

Ini memberi bukti untuk kasus khusus ini. Berikutnya diberikan contoh kasus kedua yang mana *timed-P* memproduksi string (*sentence*) secara rekursif. Apakah dalam produksi yang rekursif, *timed-P* juga menghasilkan *sentence* yang waktunya monoton naik?

Contoh kedua, misal *timed-P*:

$(P1,t1) \equiv (S,t1) \rightarrow (a,t11)(S,t12)(b,t13)$

$(P2,t2) \equiv (S,t2) \rightarrow empty$

Proses produksi sebuah string (*sentence*) dengan jalan rekursif dapat dilakukan sebagai berikut:

Step 0 : Gunakan aturan produksi $(P1,t1)$

Step 1 : $(S,t1) \rightarrow (a,t11)(S,t12)(b,t13)$ yang mana $t11 \leq t12 \leq t13 \leq t1$

Step 2 : Akan tetapi, dengan menggunakan $(P1,t1)$ kembali pada $(S,t12)$ diperoleh bentuk $(P12,t12)$ yang mana $(P12,t12) \equiv (S,t12) \rightarrow (a,t1211)(S,t1212)(b,t1213)$ yang mana $t1211 \leq t1212 \leq t1213 \leq t12$ dan $inf(t12)=inf\{t1211, t1212, t1213, t12\}= t1211$, *y*ang mengikuti bentuk $(P1,t1)$ sehingga subtitusi menjadi:

Step 3 : $(a,t11)(a,t1211)(S,t1212)(b,t1213)(b,t13)$ yang mana $t11 \leq inf(t12) \leq t12 \leq t13 \leq t1$ sehingga diperoleh $t11 \leq t1211 \leq t1212 \leq t1213 \leq t12 \leq t13 \leq t1$

Step 4 **:** Selanjutnya, subtitusi lagi $(S,t1212)$ dengan menggunakan $(P2,t2)$, tetapi karena subtitusinya adalah dengan *empty* yaitu sebuah string kosong maka diperoleh $(a,t11)(a,t1211)(b,t1213)(b,t13)$ dengan perilaku waktu $t11 \leq t1211 \leq t1213 \leq t12 \leq t13 \leq t1$ yang monoton naik.

Berdasarkan kasus ini diperoleh bukti untuk kasus kedua bahwa *timed-P* menghasilkan string (*sentence*) yang waktunya monoton naik. Berikutnya akan dikemukakan sebuah teorema yang diharapkan berlaku secara umum, yaitu bahwa:

Teorema 1.1 (sifat monoton naik string dari timed- P) *Setiap string yang dihasilkan oleh sebuah timed- P adalah memiliki perilaku waktu yang monoton naik.*

Bukti:

Untuk memproduksi sebuah string, proses produksi adalah selalu dimulai aturan pertama yang memuat simbol start, misal aturan pertama itu adalah $(P0,t0) \equiv (\alpha 0,t0) \rightarrow (\beta j,tj)$.

Tinjau kasus *i* = 0:

Misal aturan pertama itu adalah $(P0,t0) \equiv (\alpha 0,t0) \rightarrow (\beta j,tj)$, terapkan $(P0,t0)$ diperoleh $(\beta j,tj)$. Akan tetapi, dari definisi *timed-P* $(\beta j,tj) = (yj1,tj1)(yj2,tj2)(yj3,tj3)...(yjm,tjm)$ dan $yjd \in T \cup NT$ adalah sebuah *timed-word* sehingga diperoleh perilaku waktu $tj1 \leq tj2 \leq tj3 \leq ... \leq tjm \leq tj \leq t0$ yang mana sifat monoton naik selalu terpenuhi. Ini membuktikan bahwa untuk kasus *i*=0, teorema terbukti.

Tinjau kasus *i* = *n*:

Misalkan bahwa pada penurunan atau penggunaan aturan produksi hingga langkah ke-n adalah juga benar menghasilkan perilaku waktu yang bersifat monoton naik sehingga diperoleh string $(u,t_u)(\alpha_n,t_n)(v,t_v)$ yang merupakan string hasil langkah ke-n penggunaan aturan-aturan produksi yang mana $u,v \in (T \cup NT)^*$ dan $t_u \le t_n \le t_v$ monoton naik.

Akan ditunjukkan bahwa untuk kasus *i = n+1*, *timed-P* juga menghasilkan string dengan perilaku waktu yang monoton naik.

Tinjau kasus *i = n+1*:

Untuk kasus *i = n* diperoleh string $(u,t_u)(\alpha_n,t_n)(v,t_v)$, lakukan penerapan aturan produksi untuk langkah ke-*n*+1. Ambil aturan produksi $(P_n,t_n) \equiv (\alpha_n,t_n) \rightarrow (\beta_k,t_k)$ sehingga diperoleh hasil subtitusi $(u,t_u)(\beta_k,t_k)(v,t_v)$.

Akan tetapi, berdasarkan definisi timed-P diperoleh $t_u \le \inf(t_k) \le t_k \le \inf(t_v)$ dan $(\beta_k,t_k) = (y_{k1},t_{k1})(y_{k2},t_{k2})(y_{k3},t_{k3}) \dots (y_{km},t_{km})$ dan $y_{kd} \in T \cup NT$, yang berarti bahwa $\inf(t_k)=\inf\{t_{k1},t_{k2},t_{k3},\dots,t_{km}\}=t_{k1}$ sehingga diperoleh perilaku waktu untuk i = n+1 sebagai $t_u \le t_{k1} \le t_{k2} \le t_{k3} \le \dots \le t_{km} \le t_k \le t_v$ yang membuktikan bahwa perilaku waktu bersifat monoton naik.

Dengan demikian teorema terbukti.

Selanjutnya dengan mudah dapat membuktikan bahwa setiap *sentence* (produk akhir dari *timed-P* yang mana tidak ada lagi simbol nonterminal pada string hasil produksinya) yang dihasilkan oleh *timed-P* mestilah waktunya bersifat monoton naik.

Teorema 1.2 (sifat monoton naik sentence dari timed-P) *Tiap-tiap sentence yang dihasilkan oleh timed-P selalu merupakan sentence dengan perilaku waktu yang monoton naik.*

Bukti:

Ini akibat langsung (*trivial*) dari teorema 8.1. sebelumnya, yaitu dengan mengambil $(u,t_u)(\beta_k,t_k)(v,t_v)$ yang mana $u,v \in T^*$ bukan lagi $u,v \in (T \cup NT)^*$ dan $(\beta_k,t_k) = (y_{k1},t_{k1})(y_{k2},t_{k2})(y_{k3},t_{k3}) \dots (y_{km},t_{km})$ dan $y_{kd} \in T$, bukan lagi $y_{kd} \in T \cup NT$. *qed.*

- Konstruksi *timed-mL* menggunakan multi-grammar yang diberi waktu yaitu *timed-multigrammar* (*timed-mG*)

Pada bagian ini inShaa Allah akan diusulkan perluasan dari *timed-grammar* sebagai perluasan yang analogi dengan *timed-mL* yang sebelumnya menggunakan definisi himpunan. Perluasan gramatika ini adalah dari *timed- grammar* menjadi *timed-multigrammar* diharapkan ekivalen atau mengasilkan bahasa yang *timed-mL*, yaitu yang dapat ditulis sebagai *timed-mL(timed-mG)* yang mana *timed-mG* adalah *timed-multigrammar*. Dalam penulisan yang singkat, bagian ini adalah perluasan *timed-L(timed-G)* menjadi *timed-mL(timed-mG)*.

Timed-multigrammar adalah gramatika yang dibangun dari sejumlah *timed-grammar* yang secara bersama atau sebagian membangun string yang diberi waktu. Sebelum merumuskan *timed-mG*, terlebih dulu dinyatakan bahwa sebuah *untime-G* dari *timed-G*, *<S,E,T,NT,timed-P>*, adalah *<S,E,T,NT,untime-P>* yang mana *untime-P* adalah *P*, yaitu aturan-aturan produksi yang dihilangkan *clock* nya sebagai berikut:

Definisi 1.7 (unitme-P) *Misalkan timed-P adalah* $(P_i,t_i) \equiv (\alpha_i,t_i) \rightarrow (\beta_j,t_j)$ *maka untime-P adalah* $P_i \equiv \alpha_i \rightarrow \beta_j$.

Sebuah *timed-mG* didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.8 (timed-mG) *Sebuah timed-mG adalah <S,E,T,NT,timed-mP> dan terdapat timed-*G_i *yaitu* $<S_i,E_i,T_i,NT_i,timed\text{-}P_i>$ *yang mana* $T=L(untime\text{-}G1)\cup L(untime\text{-}G2)\cup L(untime\text{-}G3)\cup \ldots$, *NT adalah himpunan non terminal dan S adalah simbol start dan timed-mP sebagai aturan-aturan produksi yang diberi clock.*

Alasan filosofis yang mendasari mengapa $T=L(untime\text{-}G1)\cup L(untime\text{-}G2)\cup L(untime\text{-}G3)\cup \ldots$ dan bukan $T=T_1^{*}\cup T2^{*}\cup T3^{*}\cup \ldots$, yaitu karena diinginkan bahwa setiap terminal dari *timed-mG* adalah word dari bahasa-bahasa *timed-L(timed-G)* yang sudah di untime, bukan berasal dari sembarang word yang belum tentu merupakan elemen dari bahasa-bahasa yang diniatkan membangun *timed-mL*. Penjelasan ini secara sederhana adalah bahwa *timed-mG* diniatkan sebagai *meta grammar* dari berbagai *grammar*, selanjutnya sebuah *timed- mP* dapat diusulkan sebagai berikut:

Definisi 1.9 (timed-mP) *Sebuah timed-mP adalah sebuah himpunan aturan produksi* $(P_i,t_i) \equiv (\alpha_i,t_i) \rightarrow (\beta_j,t_j)$ *yang mana:*

1. (α_i,t_i) *adalah timed-multiword yaitu* $(\alpha_i,t_i)=(x_{i1},t_{i1})(x_{i2},t_{i2})(x_{i3},t_{i3})\ldots(x_{i3},t_{in})$ *dan* $x_{ik}\in T\cup NT$ *yang mana* $t_{i1}\le t_{i2}\le t_{i3}\le \ldots \le t_{in}\le t_i$
2. (β_j,t_j) *adalah timed-multiword yaitu* $(\beta_j,t_j)=(y_{j1},t_{j1})(y_{j2},t_{j2})(y_{j3},t_{j3})\ldots(y_{j3},t_{jm})$ *dan* $y_{jd}\in T\cup NT$ *yang mana* $t_{j1}\le t_{j2}\le t_{j3}\le \ldots \le t_{jm}\le t_j$
3. $T=L(untime\text{-}G1)\cup L(untime\text{-}G2)\cup L(untime\text{-}G3)\cup \ldots$ *dan misalkan suatu string* $(u,t_u)(\alpha_i,t_i)(v,t_v)$ *padanya dilakukan subtitusi menggunakan* (P_i,t_i) *sehingga diperoleh* $(u,t_u)(\beta_j,t_j)(v,t_v)$ *maka berlaku sifat waktu* $t_u\le inf(t_j)\le t_j\le inf(t_v)$ *dan* $t_j\le t_i$ *yang mana* $u,v\in (T\cup NT)^*$.

Contoh penerapan dan bukti perkasus bahwa diamemenuhi postulat monotonitas:

Misalkan terdapat *timed-G1* dan *timed-G2*, keduanya digunakan untuk membangun sebuah *timed-mG*.

Timed-G1 adalah <*S1,E1, T1,NT1,timed-P1*> yang mana

$T1=\{x,y,z\}$

$NT1=\{S1,B\}$

timed-P1 adalah:

$(P11,t11) \equiv (S1,t11) \rightarrow (x,t111)(y,t112)(B,t113)(z,t114)$

$(P11,t11) \equiv (S1,t11) \rightarrow (x,t111)(S1,t112)$

$(P11,t11) \equiv (S1,t11) \rightarrow empty$

$(P12,t12) \equiv (B,t12) \rightarrow (y,t121)$

$(P12,t12) \equiv (B,t12) \rightarrow empty$

Timed-G2 adalah <*S2,T2,NT2,timed-P2*> yang mana

$T2=\{w,q\}$

$NT2=\{S2,A\}$

timed-P2 adalah:

$(P21,t21) \equiv (S2,t21) \rightarrow (w,t211)(A,t212)(q,t213) \mid (A,t211)$

$(P22,t22) \equiv (A,t22) \rightarrow (q,t221)(S2,t222)$

$(P23,t23) \equiv (A,t23) \rightarrow empty$

Selanjutnya, buat sebuah *timed-mG* sesuai definisisebagai berikut:

Timed-mG = <*S, E, T, NT, timed-mP*> yang mana

S simbol start

$T = L(untime\text{-}G1) \cup L(untime\text{-}G2) NT = \{S,C,D\}$

Timed-mP adalah:

$(S,t1) \rightarrow (xyz,t11)(wqqq,t12)(C,t13)(D,t14)(xyyz,t15) \mid (xxx,t11)$

$(S,t12)\ (C,t21) \rightarrow (wq,t21) \mid empty$

$(D,t31) \rightarrow (wqqqqq,t31) \mid empty$

Konstruksi di atas, telah sesuai dengan definisi karena:

$xyz, xyyz, xxx \in L(untime\text{-}G1)$

$wqqq, wq, wqqqqqq \in L(untime\text{-}G2)$

$S, C, D \in NT$

Selanjutnya, dapat dibangun sebuah *timed-multiword* menggunakan aturan-aturan produksi di atas sebagai berikut kemudin memeriksa waktu pada *sentence timed-multiword* yang dihasilkannya, apakah menghasilkan waktu yang monoton naik?.

Contoh pembuatan sebuah *sentence timed-multiword* menggunakan *timed-mP* tersebut:

Mulai dari simbol start.

$(S,t1) \rightarrow (xyz,t11)(wqqq,t12)(C,t13)(D,t14)(xyyz,t15)$ *yang mana*

$t11 \leq t12 \leq t13 \leq t14 \leq t15 \leq t1$

tetapi $(C,t13) \rightarrow (wq,t131)$ *sehingga* $inf(t13)= t131$ *maka*

$(xyz,t11)(wqqq,t12)(wq,t131)(D,t14)(xyyz,t15)$

yang mana $t11 \leq t12 \leq inf(t13)=t131 \leq t13 \leq t14 \leq t15 \leq t1$ *berdasarkan definisi timed-mP, selanjutnya diperoleh* $t11 \leq t12 \leq t131 \leq t14 \leq t15 \leq t1$ *tetapi* $(D,t14) \rightarrow (wqqqqqq,t141)$ *sehingga* $inf(t14)= t141$ *maka* $(xyz,t11)(wqqq,t12)(wq,t131)(wqqqqqq,t141)(xyyz,t15)$ *yang mana* $t11<t12<t131 \leq inf(t14)= t141 \leq t14 \leq t15 \leq t1$

selanjutnya diperoleh $t11 \leq t12 \leq t131 \leq t141 \leq t15 \leq t1$

Hasil ini menunjukkan bahwa dari aturan produksi *timed-mP* diperoleh *timed-multiword*: $(xyz,t11)(wqqq,t12)(wq,t131)(wqqqqqq,t141)(xyyz,t15)$ yang mana waktunya memiliki perilaku monoton naik $t11 \leq t12 \leq t131 \leq t141 \leq t15$. Akan tetapi, $(xyz,t11), (xyyz,t15) \in$ *timed-L(timed-G1)* dan $(wqqq,t12), (wq,t131), (wqqqqqq,t141) \in$ *timed- L(timed-G2)* sehingga masing-masing timed-word itu juga memenuhi sifat monoton naik, yaitu:

- $(xyz,t11)=(x,t111)(y,t112)(z,t113)$ yang mana $inf(t11)=t111 \leq t112 \leq t113 \leq t11$
- $(xyyz,t15)=(x,t151)(y,t152)(y,t153)(z,t154)$, $inf(t15)=t151 \leq t152 \leq t153 \leq t154 \leq t15$
- $(wqqq,t12)=(w,t121)(q,t122)(q,t123)(q,t124)$, $inf(t12)=t121 \leq t122 \leq t123 \leq t124 \leq t12$
- $(wq,t131)=(w,t1311)(q,t1321)$, $inf(t131)=t1311 \leq t1312 \leq t131$

- $(wqqqqqq,t141)=(w,t1411)(q,t1412)(q,t1413)(q,t1414)(q,t1415)(q,t1416)(q,t1417)$ yang mana $inf(t141)=t1411\leq t1412\leq t1413\leq t1414\leq t1415\leq t1416\leq t1417\leq t141$

Dengan demikian, berdasarkan definisi timed-mP, waktu total yang dihasilkan oleh $(xyz,t11)(wqqq,t12)(wq,t131)$ $(wqqqqqq,t141)(xyyz,t15)$ adalah seluruhnya monoton naik, yaitu $inf(t11)=t111\leq t112\leq t113\leq t11\leq inf(t12)=t121\leq t122\leq t123\leq t124$ $\leq t12\leq inf(t131)=t1311\leq t1312\leq t131\leq inf(t141)=t1411\leq t1412\leq t1413\leq t1414$ $\leq t1415\leq t1416\leq t1417\leq t141\leq inf(t15)=t151\leq t152\leq t153\leq t154\leq t15$

Dengan menghilangkaninfimum diperoleh:

$t111\leq t112\leq t113\leq t11\leq t121\leq t122\leq t123\leq t124\leq t12\leq t1311\leq t1312\leq t131\leq t1411\leq t1412\leq t1413$ $\leq t1414\leq t1415\leq t1416\leq t1417\leq t141\leq t151\leq t152\leq t153\leq t154\leq t15$

Contoh ini membuktikan secara kasus bahwa *timed-mP* menghasilkan waktu yang monoton naik.

Berikut ini dikemukakansebuah teorema yangmenyatakan sifat monoton naik dari setiap string yang diproduksi oleh *timed-mP*.

Teorema 1.3 (sifat monoton naik string dari timed- mP) *Setiap string yang dihasilkan oleh sebuah timed-mP adalah memiliki perilaku waktu yang monoton naik.*

Bukti:

Untuk memproduksi sebuah string, proses produksi adalah selalu dimulai aturan pertama yang memuat simbol start. Skema pembuktiannya sebagai berikut:

Langkah pertama buktikan untuk string yang diperoleh dari aturan pertama *timed-mP*, Misal aturan pertama itu adalah $(P0,t0)\equiv(\alpha 0,t0)\rightarrow(\beta j,tj)$ maka diperoleh produksi string langkah ke-0 (i=0) yaitu $(\beta j,tj)$, lalu tunjukkan bahwa string langkah ke-0 yaitu $(\beta j,tj)$ memenuhi postulat kemonotonan.

Langkah kedua misalkan benar bahwa terjadi penurunan string menggunakan aturan-aturan produksi *timed-mP* hingga langkah ke-n ($i=n$) dan postulat kemonotonan tetap berlaku. Misalkan string yang dihasilkan pada langkah ke-n itu adalah $(u,tu)(\alpha n,tn)(v,tv)$ dan masih berlaku postulat kemonotonan, yaitu $tu\leq tn\leq tv$.

Langkah ketiga buktikan bahwa untuk penurunan string pada langkah ke-n+1 ($i = n+1$). Oleh karena pada langkah ke-n string yang diperoleh adalah $(u,tu)(\alpha n,tn)(v,tv)$ maka penurunan langkah ke-n+1 adalah dengan menggunakan aturan produksi $(Pn,tn) \equiv (\alpha n,tn) \rightarrow (\beta k,tk)$ sehingga diperoleh string pada langkah ke-n+1 yaitu $(u,tu)(\beta k,tk)(v,tv)$, tunjukkan bahwa $(u,tu)(\beta k,tk)(v,tv)$ memenuhi postulat kemonotonan.

Pembuktian ini sebagai berikut:

Tinjau kasus i=0:

Misal aturan pertama itu adalah $(P0,t0) \equiv (\alpha 0,t0) \rightarrow (\beta j,tj)$

Terapkan $(P0,t0)$ diperoleh $(\beta j,tj)$

Akan tetapi, dari definisi timed-mP, $(\beta j,tj)=(yj1,tj1)(yj2,tj2)(yj3,tj3)...(yjm,tjm)$ dan $yjd \in T \cup NT$ yang mana $T=L(untime\text{-}G1) \cup L(untime\text{-}G2) \cup L(untime\text{-}G3) \cup ..$ berdasarkan definisi 8.13. dipenuhi bahwa $tj1 \leq tj2 \leq tj3 \leq ... \leq tjm \leq tj \leq t0$

Akan tetapi, $timed\text{-}Gk=<Sk,Ek,Tk,NTk,timed\text{-}Pk>$ untuk semua juga masing-masing selalu menghasilan string yang waktunya monoton naik, berdasarkan teorema 8.1. sebelumnya. Dengan demikian secara umum, walaupun (yjk,tjk) masing-masing diuraikan lagi untuk tiap-tiap *timed- Gk* maka string yang dihasilkan oleh *timed-mP* pada $i=0$ adalah selalu menghasilkan string yang waktunya monoton naik. Ini membuktikan bahwa untuk kasus $i=0$, teorema terbukti.

Tinjau kasus i=n:

Misalkan pada penurunan atau penggunaan aturan produksi hingga langkah ke-n adalah juga benar menghasilkan perilaku waktu yang bersifat monoton naik sehingga diperoleh string $(u,tu)(\alpha n,tn)(v,tv)$ yang merupakan string hasil langkah ke-n dari runtun penggunaan aturan-aturan produksi yang mana $u,v \in (T \cup NT)^*$, yaitu bahwa $tu \leq tn \leq tv$ monoton naik. Akan ditunjukkan bahwa untuk kasus $i=n+1$ yaitu pada langkah penggunaan aturan produksi yang berikut, *timed-P* juga menghasilkan string dengan perilaku waktu yang monoton naik.

Tinjau kasus *i=n+1*:

Untuk kasus $i=n$ diperoleh string $(u,tu)(\alpha n,tn)(v,tv)$, lakukan penerapan aturan produksi untuk langkah ke-n+1. Ambil aturan produksi $(Pn,tn) \equiv (\alpha n,tn) \rightarrow (\beta k,tk)$, sehingga diperoleh hasil subtitusi berikut $(u,tu)(\beta k,tk)(v,tv)$ yang merupakan penurunan string langkah ke-n+1. Akan tetapi, berdasarkan definisi *timed-P* diperoleh $tu \leq inf(tk) \leq tk \leq inf(tv)$ dan $(\beta k,tk) = (yk1,tk1)(yk2,tk2)(yk3,tk3)...(ykm,tkm)$ dan $ykd \in T \cup NT$ yang berarti bahwa $inf(tk)=inf\{tk1,tk2,tk3,...,tkm\}=tk1$ sehingga diperoleh perilaku waktu untuk $i=n+1$ sebagai $tu \leq tk1 \leq tk2 \leq tk3 \leq ... \leq tkm \leq tk \leq tv$. Akan tetapi, *timed-Gk=<Sk,Ek,Tk,NTk,timed-Pk>* juga masing-masing selalu menghasilan string yang waktunya monoton naik, berdasarkan teorema 1.1. sebelumnya sehingga secara keseluruhan membuktikan bahwa perilaku waktu bersifat monoton naik. Teorema telah dibuktikan.

Dengan demikian, setiap *sentence* (produk akhir dari *timed-mP* yang mana tidak ada lagi simbol nonterminal pada string hasil produksinya) yang dihasilkan oleh *timed-mP* dapat dibuktikan bahwa waktunya bersifat monoton naik.

Teorema 1.4 *Tiap-tiap sentence yang dihasilkan oleh timed-mP selalu merupakan sentence dengan perilaku waktu yang monoton naik.*

Bukti:

Ini akibat langsung (*trivial*) dari teorema 8.3. sebelumnya, yaitu dengan mengambil $(u,tu)(\beta k,tk)(v,tv)$ yang mana $u,v \in T$ bukan lagi $u,v \in (T \cup NT)^*$ dan $(\beta k,tk)=(yk1,tk1)(yk2,tk2)(yk3,tk3)...(ykm,tkm)$ dan $ykd \in T$, bukan lagi $ykd \in T \cup NT$.

Kesimpulan untuk Konstruksi Teori Timed-G dan Timed-mG

Konstruksi *timed-L(timed-G)* dan *timed-mL(timed-mG)* adalah universal dalam seluruh hierarki bahasa menurut Chomsky karena konstruksi tidak mensyaratkan suatu aturan khusus dari bentuk aturan produksi, tetapi semata aturan produksi dalam bentuk umum yaitu: $(Pn,tn) \equiv (\alpha n,tn) \rightarrow (\beta k,tk)$ Ini berarti telah dimiliki landasan teoritis untuk membangun bahasa-bahasa yang bersifat *real time* mengunakan *timed-L(timed-G)* atau *timed-mL(timed-mG)* baik dalam bahasa regular ataupun dalam versi bahasa bebas konteks atau dalam level bahasa diatasnya.

REFERENCES

[1] W.L. Hosch, augmented reality | computer science | Britannica.com, Encycl. Br. Inc. (2017) 1. https://www.britannica.com/technology/augmented-reality (accessed September 1, 2017).

[2] D. Kim, W. Moon, S. Kim, A Study on Method of Advanced Marker Array, Int. J. Softw. Eng. Its Appl. 8 (2014) 1–16.

[3] S. Siltanen, Theory and applications of marker-based augmented reality, JULKAISIJA – UTGIVARE – PUBLISHER, 2012. http://www.vtt.fi/publications/index.jsp.

[4] A.F. Waruwu, I.P.A. Bayupati, I.K.G. Darma Putra, Augmented Reality Mobile Application of Balinese Hindu Temples : DewataAR, Ijcnis. (2015) 59–66. doi:I. J. Computer Network and Information Security.

[5] D. Pawade, A. Sakhapara, Augmented Reality Based Campus Guide Application Using Feature Points Object Detection, Ijitcs. (2018) 76– 85. doi:10.5815/ijitcs.2018.05.08.

[6] F. Khalifa, N. Semary, H. El-Sayed, M. Hadhoud, Local Detectors and Descriptors for Object Class Recognition, Ijisa. (2015) 12–18. doi:10.5815/ijisa.2015.10.02.

[7] G. D, O. Kumar, S. Ram, Marker Based Augmented Reality Application in Education: Teaching and Learning, Int. J. Res. Appl. Sci. Eng. Technol. 4 (2016) 153–158. www.ijraset.com.

[8] M. Shetty, V. Lasrado, R. Mohammed, Marker Based Application in Augmented Reality Using Android, Int. J. Innov. Res. Comput. Commun. Eng. Vol. 3 (2015) 146–151.

[9] J.M. Mota, I. Ruiz-Rube, J.M. Dodero, I. Arnedillo-Sánchez, Augmented reality mobile app development for all, Comput. Electr. Eng. 65 (2018) 250–260. doi:10.1016/j.compeleceng.2017.08.025.

[10] A.K. Sin, H.B. Zaman, Tangible Interaction in Learning Astronomy through Augmented Reality Book-Based Educational Tool, IVIC 2009, LNCS 5857, Springer-Verlag Berlin Heidelb. 2009. (2009) 302–313.