Universidad de las Fuerzas Armadas

ESPE

Integrantes: Joffre Gomez - Damian Toscano - Kenned Sigcha

Carrera: Ing. en Software

NRC: 13761 Profesor: Ing. Andrade Kleber

① Un tanque industrial tiene forma cilíndrica con extremos hemisféricos, como se muestra en la figura. El depósito debe almacenar 1000 litros de fluido. Determinar el radio r y longitud h que minimizan la cantidad de material utilizado por la construcción del tanque.

$1000 \ l = 1 m^3$

$r \geq 0 \wedge h \geq 0$ (en metros)

Vol. del cilindro $= \pi r^2 h$

Vol. de los dos hemisferios: $4/3 \ \pi r^3$

$V(r,h) = 4/3 \ \pi r^3 + \pi r^2 h$

Condición:

$V(r,h) = 1$ $\qquad 4/3 \pi r^3 + \pi r^2 h = 1 \qquad 4\pi r^3 + 3\pi r^2 h = 3$

$S(r,h) = 4\pi r^2 + 2\pi r h$

$$F(r,h,\lambda) = 4\pi r^2 + 2\pi r h + \lambda(4\pi r^3 + 3\pi r^2 h - 3)$$

$F_r = 8\pi r + 2\pi h + \lambda(12\pi r^2 + 6\pi r h) = 0$ ①

$F_h = 2\pi r + \lambda(3\pi r^2) = 0$ ②

$F_\lambda = 4\pi r^3 + 3\pi r^2 h - 3 = 0$ ③

② $2\pi r + \lambda(3\pi r^2) = 0 \rightarrow \lambda = -\dfrac{2\pi r}{3 r^2} = -\dfrac{2}{3r}$

en ① : $8\pi r + 2\pi h + \left(-\dfrac{2}{3r}\right)(12\pi r^2 + 6\pi r h) = 0$

$8\pi r + 2\pi h - 8\pi r - 4\pi h = 0 \rightarrow -2\pi h = 0 \qquad h = 0$

En $h=0$

③ $4\pi r^3 + 3\pi r^2 h = 3$

$4\pi r^3 = 3$

$r^3 = \dfrac{3}{4\pi}$

$r = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}} \approx 0,62$

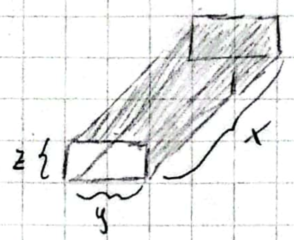
Para minimizar la cantidad de material, se debe construir un tanque esférico de radio $r = 62cm$ y $h = 0cm$

2. Un contenedor de carga (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies³. La parte inferior costará $5 por pie² para construir los lados y la superior $3 por pie² para construcción.

Usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo

Sol

$G(x,y,z) = xyz = 480$



P. inferior: $5xy$

P frontal y trasera: $3(2yz)$

laterales → $(3(2\,2xz)$

Superior → $3xy$

$(x,y,z) = 5xy + 6yz + 6xz + 3xy$

$(x,y,z) = 8xy + 6yz + 6xz$

$$\begin{cases} C_x(x,y,z) = \lambda G_x(x,y,z) \\ C_y(x,y,z) = \lambda G_x(x,y,z) \\ C_z(x,y,z)\ \lambda G_x(x,y,z). \end{cases}$$

$D_x: (8xy + 6yz + 6xz).$

$8y + 6z = xyz$

$D_y: \lambda(8xy + 6yz + 6xz).$

$8x + 6z = \lambda xz$

$D_z: \lambda(8xy + 6yz + 6xz)$

$6x + 6y = \lambda xy$

$6x + 6y = \lambda xz$

$$\begin{cases} 8y + 6z = \lambda yz \\ 8x + 6z = \lambda xz \\ 6x + 6y = \lambda xy \end{cases}$$

(1) $8y + 6z \rightarrow \lambda = \dfrac{8y + 6z}{yz}$

$\lambda = \dfrac{8\cancel{y}}{\cancel{y}z} + \dfrac{6\cancel{z}}{y\cancel{z}} = \lambda = \dfrac{8}{z} + \dfrac{6}{y}$ (4)

(2) $8x + 6z = \lambda xz \rightarrow \lambda = \dfrac{8\cancel{x}}{\cancel{x}z} + \dfrac{6\cancel{z}}{x\cancel{z}}$

$\lambda = \dfrac{8}{z} + \dfrac{6}{x}$ (5)

(3) $6x + 6y = \lambda xy \rightarrow \lambda = \dfrac{6\cancel{x}}{\cancel{x}y} + \dfrac{6\cancel{y}}{x\cancel{y}}$

$\lambda = \dfrac{6}{y} + \dfrac{6}{x}$ (6)

(4) y (5)

$\cancel{\dfrac{8}{z}} + \dfrac{6}{y} = \cancel{\dfrac{8}{z}} + \dfrac{6}{x} \rightarrow 6(x - y) = 0$

$x = y$ (7)

$\dfrac{8}{z} + \cancel{\dfrac{6}{x}} = \dfrac{6}{y} + \cancel{\dfrac{6}{x}} \rightarrow \dfrac{4}{3}y = z$

Para $G(x,y,z) = xyz$

$y \cdot y \cdot \dfrac{4}{3}y = 480 \Rightarrow y^3 = 360$

$x = \sqrt[3]{360}$

$$\frac{z}{1} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{360}$$

Las dimensiones son

$$x = \sqrt[3]{360} \quad ; \quad y = \sqrt[3]{360} \quad ; \quad z = \frac{4}{3}\sqrt[3]{360}$$

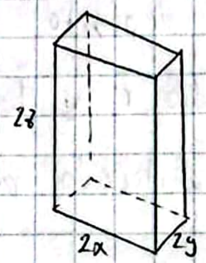
Para que el contenedor tenga un costo minimo.

③ Calcular el volumen de la caja rectangular más grande cuyos bordes sean paralelos a los ejes y que pueda estar inscrito en el elipsoide $9x^2+36y^2+4z^2=36$

$$\frac{9}{36}x^2+\frac{\cancel{36}}{\cancel{36}}y^2+\frac{4z^2}{36}=\cancel{36/36}$$

$$x^2/4+y^2+1/9\,z^2=1$$

$V=8xyz$



Restricción

$x^2/4+y^2+z^2/9=1$

$\nabla\Lambda=0$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x}=8yz+\frac{\lambda x}{2}=0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial y}=8xz+2\lambda y=0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial z}=8xy+\frac{2\lambda z}{9}=0$$

$$\begin{cases}8yz+\frac{\lambda x}{2}=0\\ 8xz+2\lambda y=0\\ 8xy+\frac{2\lambda z}{9}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\lambda=-16yz\\ \lambda=-4xz/y\\ \lambda=-36xy/z\end{cases}$$

$$\frac{16yz}{x}=\frac{4xz}{y}=\frac{36xy}{z}$$

$y^2=1/4\,x^2$; $z^2=9/4\,x^2$

Reemplazar en Restricción

$$\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}=1$$

$3x^2=4$

$x^2=4/3$

$x=\pm\frac{2}{\sqrt3}$ → vertices simetricos → $x=\frac{2}{\sqrt3}$

$\cdot y^2=\frac14\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)^2=\frac14\left(\frac43\right)=\frac13$

$y=\pm\frac{1}{\sqrt3}\to\frac{1}{\sqrt3}$

$\cdot z^2=\frac94\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)^2=\frac94\left(\frac43\right)=\frac93=3$

$\cdot z=\pm\sqrt3\to\sqrt3$

$(x,y,z)=\left(\frac{2}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\sqrt3\right)$

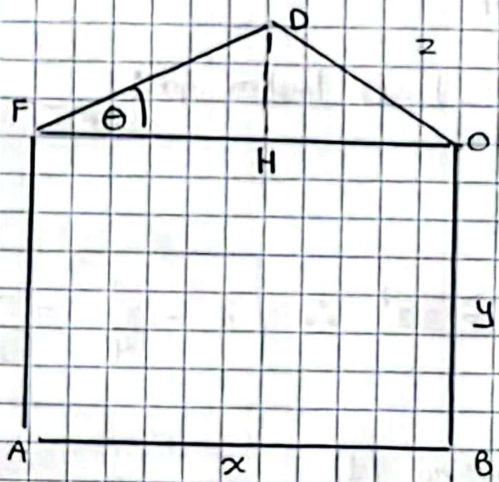
Calcular volumen

$V=8xyz$

$V=8\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(\sqrt3\right)$

$V=\frac{16}{\sqrt3}\approx 9,237$

4. Un pentagono se forma al colocar un triangulo isosceles sobre un rectangulo, como se muestra en la figura. Si el pentagono tiene un perimetro fijo P, determinar las longitudes de los lados del pentagono que maximicen el area del pentagono



$\overline{AB} = x$

$\overline{BC} = y$

$\overline{CD} = z$

Area del pentagono

$$f(x,y,z) = xy + \frac{x}{2}\sqrt{z^2 - \frac{x^2}{4}}$$

maximan la condicion de:

$$x + 2y + 2z - P = 0$$

formamos $(f(x,y,z,\lambda)$

$$f(x,y,z,\lambda) = xy + \frac{x}{2}\sqrt{z^2 - \frac{x^2}{4}} + \lambda(x - 2y + 2z - P) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 - \frac{x^2}{4}}} + \lambda = 0 \quad ①$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \quad ②$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{2} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 - \frac{x^2}{4}}} + 2\lambda = 0 \quad ③$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = x + 2y + 2z - P = 0 \quad ④$$

5.) Utilizar la multiplicación de Lagrange para calcular los valores mínimos y máximos de la función sujeta a la restricción $f(x,y,z) = x + 3y + 5z$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$x + 3y + 5z \quad - \ + d(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$D_x \rightarrow \quad 1 = d2x \rightarrow \quad x = -\frac{1}{2d}$

$D_y \rightarrow \quad 3 = d2y \rightarrow \quad y = -\frac{3}{2d}$

$D_z \rightarrow \quad 5 = d2z \quad z = -\frac{5}{2y}$

$D_d = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Reemplazo

$$\left(-\frac{1}{2d}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2d}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2d}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4d^2} + \frac{9}{4d^2} + \frac{25}{4d^2} = 1$$

$$\frac{35}{4d^2} = 1$$

$$d^2 = \frac{35}{4}$$

$$d_1 = +\frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$d_2 = \frac{-\sqrt{35}}{2}$$

$$x = \frac{-1}{\frac{-2\sqrt{35}}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{35}}$$

$$y = \frac{-3}{\frac{-2\sqrt{35}}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{35}}$$

$$z = \frac{-5}{\frac{-2\sqrt{35}}{2}} = \pm\frac{5}{\sqrt{35}}$$

Para $d_1 = \frac{\sqrt{35}}{2}$

$$f = -\frac{1}{\sqrt{35}} - \frac{3}{\sqrt{35}} - \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{-9}{\sqrt{35}}$$

Para $d_2 = \frac{9}{\sqrt{35}}$

Valor Máximo $= \frac{9}{\sqrt{35}}$

Valor Mínimo $= \frac{-9}{\sqrt{35}}$

Estos valores corresponden a puntos críticos de una esfera dado por la restricción