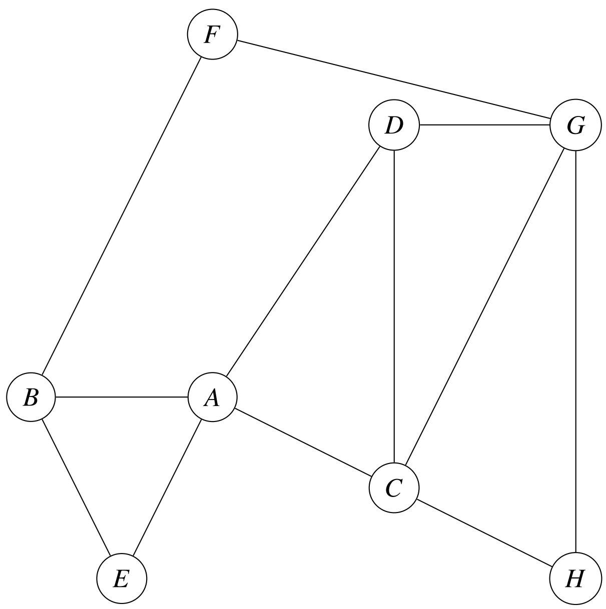
Université de Versailles - Saint Quentin
“Algorithmique de Graphes”
TD5 : Arbres couvrants de poids minimum

1 Exercice de révisions (exercice partiel L2 2022)

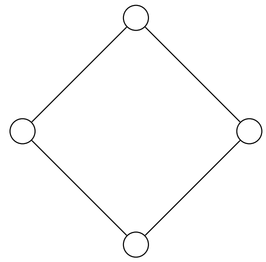
Soit le graphe non orienté suivant :

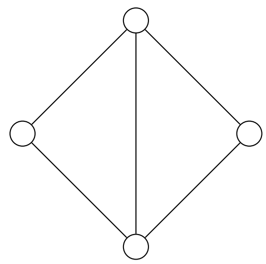


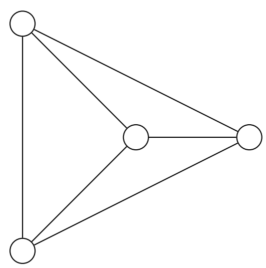
1. Appliquer un parcours en profondeur à partir du sommet A sur le graphe ci-dessus (en prenant les voisins dans l’ordre alphabétique). Donner l’arborescence de parcours obtenue.
2. Appliquer un parcours en largeur à partir du sommet A sur le graphe ci-dessus (en prenant les voisins dans l’ordre alphabétique). Donner l’arborescence de parcours obtenue.
3. Rappeler la définition d’un graphe 1-connexe. Le graphe ci-dessus est-il 1-connexe. Justifier votre réponse.
4. Rappeler la définition d’un graphe 2-connexe. Le graphe ci-dessus est-il 2-connexe. Justifier votre réponse.
5. Rappeler la condition pour qu’il existe un cycle Eulérien. Du coup, existe t’il un cycle Eulérien sur le graphe ci-dessus ? Si oui, le donner.
6. Rappeler la condition pour qu’il existe une chaîne Eulérienne. Du coup, existe t’il une chaîne Eulérienne sur le graphe ci-dessus ? Si oui, la donner.
7. Quel est le diamètre de ce graphe ?

2 Combien d’arbres couvrants ?

Combien d’arbres couvrants différents les 3 petits graphes suivants possèdent-ils ?







3 Arbre couvrant de poids minimum

Un étudiant a proposé la méthode suivante pour construire un arbre de poids minimum dans un graphe $G = (V, E, W)$, graphe non orienté connexe valué de n sommets :

"Initialement T est vide. On prend s un sommet quelconque. On choisit une arête a incidente à s, de coût minimum qu'on ajoute à T. Soit x l'autre extrémité de l'arête a. On recommence avec ce sommet x : on cherche une arête incidente à x, de coût minimum qui n'est pas dans T et on l'ajoute à T, et ainsi de suite. On s'arrête lorsque T a $n-1$ arêtes "

Expliquez pourquoi l'algorithme proposé par cet étudiant n'est pas correct. Vous illustrerez vos propos en proposant 3 contre-exemples :

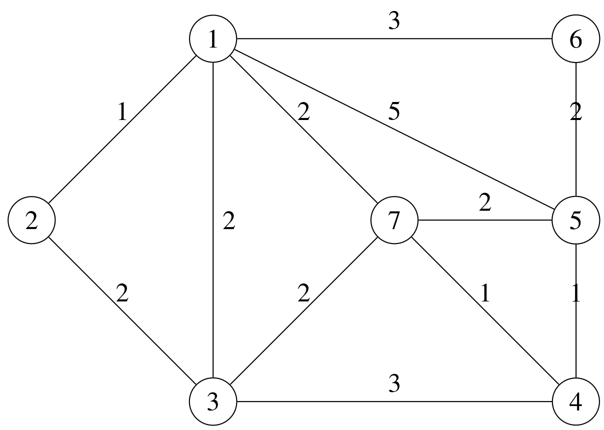
- un où cet algorithme ne parvient pas à la condition d'arret,
- un où cet algorithme termine mais où la structure construite dans T n'est pas un arbre,
- un enfin où c'est bien un arbre qui est construit mais pas celui de poids minimum.

4 C'est parti pour Prim et Kruskal

Sur le graphe ci-dessous :

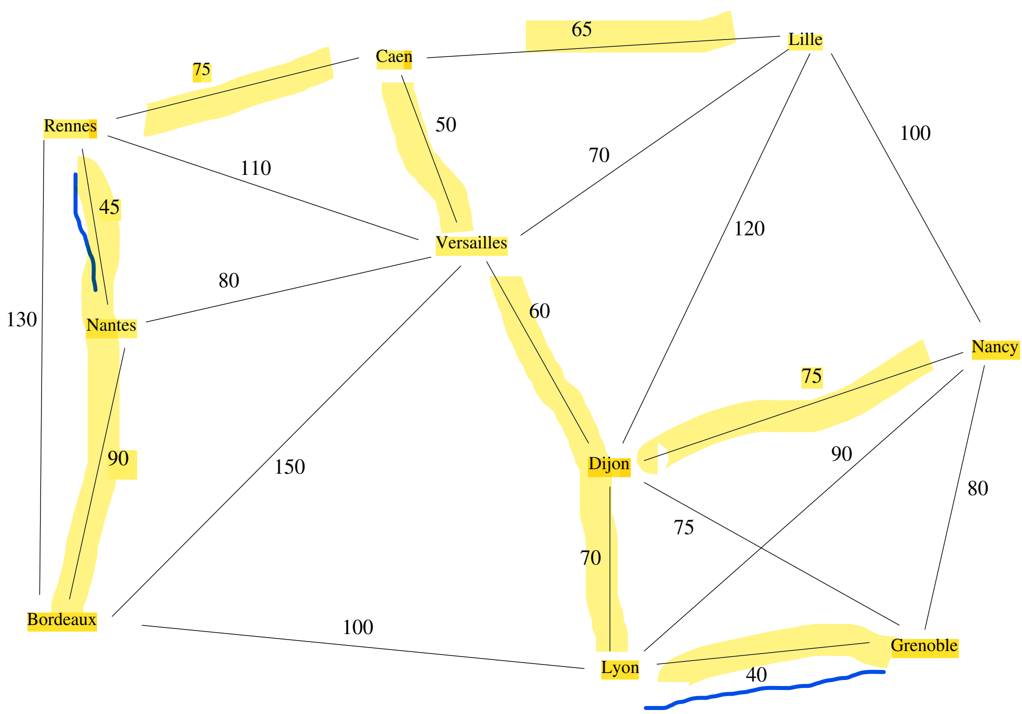
- Trouvez un arbre couvrant de poids minimum en appliquant l'algorithme de Kruskal

— Trouvez un arbre couvrant de poids minimum en appliquant l'algorithme de Prim
— Pouvez-vous trouver tous les arbres couvrants de poids minimum ?



5 Réseau privé

Une entreprise souhaite mettre en place un réseau privé reliant à moindre coût ses 10 agences situées un peu partout en France. Le graphe ci-dessous indique les 10 agences en question et les coûts d'installation des liaisons possibles (exprimés en kilo-Euros).



570

1. Appliquer l'algorithme de Kruskal pour trouver la solution de ce problème.
2. Appliquer l'algorithme de Prim en prenant (bien sûr) Versailles comme sommet de départ.
3. Réfléchir à l'écriture algorithmique des méthodes de Kruskal et Prim. Quels sont les points difficiles de ces 2 méthodes ? Quelles structures de données paraissent adaptées ?