Conjuntos numéricos

Sitio: Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida
Curso: Elementos de Analisis Matematico 1° F
Libro: Conjuntos numéricos

Imprimido por: MARIO DAVID GONZALEZ BENITEZ
Día: lunes, 19 de agosto de 2024, 20:42

Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección vamos a conocer los **números enteros y reales, racionales e irracionales**.

¿Empezamos?

2. Números naturales y enteros

Preliminares y definición

Como viste en el problema de inicio de la semana, esta semana nos introducimos en el estudio de ciertos conjuntos: los **conjuntos numéricos**, es decir, aquellos conjuntos cuyos elementos son números. Iniciemos este recorrido y veamos cómo se relaciona con el problema.

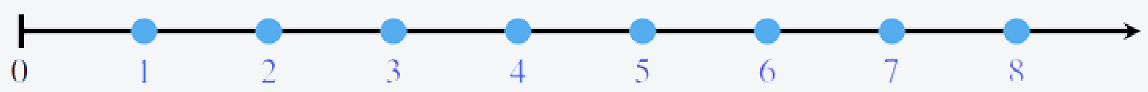
Números naturales y enteros

Los números naturales forman el primer conjunto de números que fue utilizado por los seres humanos, tanto para contar objetos como para ordenarlos. En matemática, denotamos este conjunto con el símbolo $\mathbb{N}$ y podemos describirlo así:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Algo que trabajaremos bastante en la materia tiene que ver con la representación , y es bueno empezar a familiarizarse con esa idea. En matemática, es deseable tener diferentes formas de representar a los objetos que estudiamos. A diferencia de otras ciencias como la biología, la física o la química, nuestros objetos de estudio no son empíricos, no podemos "tocarlos".

Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N}$ puede representarse en una semirrecta con puntos igualmente espaciados como los celeste que se ven a continuación.



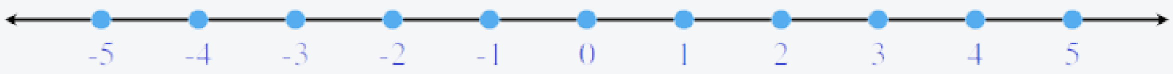
De esta forma, puede verse que $\mathbb{N}$ es un conjunto ordenado: un número natural es menor que otro si está colocado su izquierda en la recta numérica, y es mayor que otro, si está colocado a su derecha. Por ejemplo, 5 es menor que 7 , lo que se escribe en símbolos como $5 < 7$ y 6 es mayor que 3, que se escribe como $6 > 3$.

El conjunto de los naturales, además, es infinito y tiene primer elemento, el 1, pero no último: siempre es posible obtener otro natural a partir de uno dado buscando el sucesor, no importa cuán grande pueda ser ese número. También se trata de un conjunto discreto: entre dos naturales dados, siempre existe una cantidad finita de naturales entre ellos.

En cuanto a operaciones, sabemos sumar números naturales y por ello también sabemos que el resultado de la suma será siempre un elemento del conjunto; sin embargo, en el caso de la resta no es así: no es posible efectuar la operación $3 - 18$ y obtener un resultado natural. Situaciones como estas, dieron lugar a la introducción de nuevos símbolos que permitieran representar estas situaciones y así, incluyendo al 0 y a los opuestos de los naturales es que definimos el conjunto de los números enteros.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

El conjunto $\mathbb{Z}$ es llamado conjunto de los **números enteros** y puede representarse en la recta numérica del siguiente modo.



Al igual que los naturales, los enteros constituyen un conjunto ordenado, infinito y discreto. La diferencia es que no tiene primer elemento y todo número entero tiene un antecesor y un sucesor entero.

Como antes, un número entero es menor que otro si está colocado a su izquierda en la recta numérica, y es mayor que otro si está a su derecha. Por ejemplo:

$$-5 < -3; \quad 3 > -2; \quad 0 > -7; \quad 3 < 5$$

Como ya vimos, los signos $<$ y $>$ permiten representar simbólicamente la idea de orden. Esto se extiende para las relaciones de "menor o igual que" y "mayor o igual que" con los signos $\leq$ y $\geq$.

3. Números racionales e irracionales

Números racionales e irracionales

Así como vimos que fue necesario agregar símbolos (los enteros) que representen el resultado de restarle a un número natural otro natural mayor o igual, veremos ahora un nuevo conjunto numérico, que permite representar el resultado de dividir dos naturales cualesquiera. Es así como surgen los números racionales, íntimamente ligados con el concepto de **fracción** .

Recordemos que en la fracción $\frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$, el número m es llamado denominador y representa en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad (el todo), mientras que n es llamado numerador y representa cuántas de dichas partes se deben tomar.

Las fracciones están ligadas al contexto de medida y por eso resultan siempre positivas. Sin embargo, es posible extender esta idea al caso negativo y formar un nuevo conjunto numérico. Esto es, precisamente, el conjunto de los **números racionales** .

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se define como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

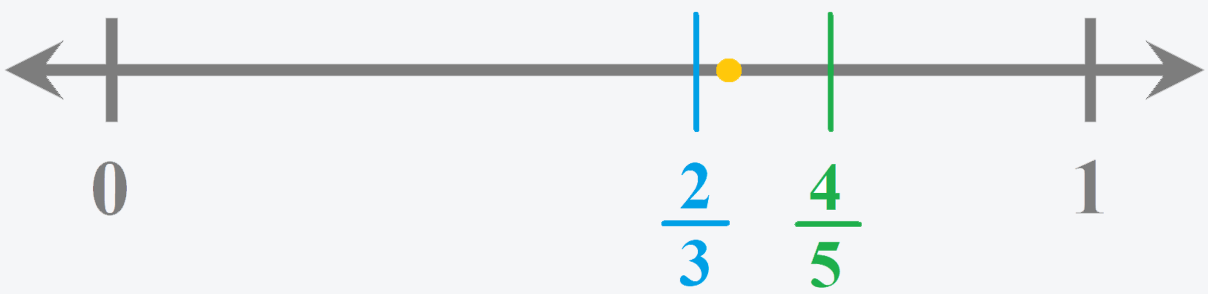
Es decir, es el conjunto formado por todas las fracciones con numerador y denominador enteros, y denominador no nulo.

Recordemos que dos fracciones equivalentes representan el mismo número racional. De esta forma, los racionales $\frac{-n}{m}$ y $\frac{n}{-m}$ son iguales, y se los denota como $-\frac{n}{m}$.

Los números racionales tienen la particularidad de admitir una doble representación: como fracción (positiva o negativa) y como decimal. Esto se debe a que todo número racional en forma de fracción de enteros puede expresarse en base decimal. Desde el punto de vista numérico, la fracción $\frac{n}{m}$ posee una expresión decimal que es la que se obtiene haciendo la división de n entre m .

Cada fracción se representa como un punto de la recta numérica, y se ubica en una posición intermedia entre dos números enteros consecutivos. Sin embargo, representar a todas las posibles fracciones ya no es sencillo porque entre dos fracciones dadas, siempre habrá una fracción diferente.

Por ejemplo, $\frac{11}{15}$ es una fracción que está entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, pero no es la única.



Esta es precisamente una propiedad fundamental de los números racionales y recibe el nombre de orden denso : entre dos números racionales, siempre es posible encontrar otro número racional.

En este momento es inevitable preguntarse si cubriremos toda la recta numérica con números racionales. Y la respuesta es ¡no! Esa recta, en la que pudiéramos representar como puntos a los infinitos racionales, ¡estaría infinitamente "agujereada"!

Más aún, se puede probar que existen números que no es posible representarlos como $\frac{n}{m}$ con n, m enteros y m no nulo. Esos números son los irracionales: no son racionales y su expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas. Algunos números irracionales famosos son:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1.41421356237\ldots\\ \sqrt{3} &= 1.73205080757\ldots\\ \pi &= 3.14159265359\ldots\\ e &= 2.71828182846\ldots\end{aligned}$$

pero existen infinitos más.

El conjunto de todos los números irracionales se denota con el símbolo $\mathbb{I}$. Hasta ahora, entonces, un número es o bien racional, o bien irracional; pero no puede ser ambas cosas a la vez. Es decir, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos disjuntos, lo que denotamos como $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

A continuación estableceremos una relación con el problema 1: **"El hotel de los conjuntos numéricos".** Ingresá al siguiente subcapítulo.

3.1. Relación con el problema 1

Relación con el problema 1 "El hotel de los conjuntos numéricos"

Volvamos al problema 1 de esta semana. Recordemos que las habitaciones disponibles eran:

- Habitación N → en la cual se alojan todos los números naturales.
- Habitación Z → en la cual se alojan todos los números enteros.
- Habitación Q → en la cual se alojan todos los números racionales.
- Habitación I → en la cual se alojan todos los números irracionales.
- Habitación R → en la cual se alojan todos los números reales.

Como el grupo 1 era el formado por los números pares positivos y los impares negativos, cualquiera de los números de ese grupo es entero. Entonces pueden alojarse en la habitación Z. Pero como los números enteros son un caso particular de los racionales y, a su vez, de los reales, también pueden alojarse en las habitaciones Q o R.

El grupo 2 estaba integrado por los números primos 2 y 3, acompañados por el famoso número "π". Los números 2 y 3 son naturales (y, por lo tanto, enteros, racionales y reales), pero π es un número irracional, entonces ese grupo solo podrá alojarse en la habitación R: es decir, la única característica común a los tres números es la de ser un número real.

El grupo 3 estaba integrado por los números que son la raíz cuadrada de estos números: 3, 5, 7 y 11. La raíz cuadrada de un número no siempre es un número irracional: por ejemplo, la raíz cuadrada de 4 es igual a 2 y, por lo tanto, esa raíz cuadrada es un número natural. Pero esto solo ocurre con números que son cuadrados perfectos: es decir, números que son el cuadrado de otros números naturales, como 4 lo es de 2. Sin embargo, ni 3, ni 5, ni 7 ni 11 son cuadrados de números naturales, por lo tanto, su raíz cuadrada será irracional. Luego, el grupo 3 debe hospedarse en la habitación I, pero también puede hacerlo en la habitación R, pues también son números reales.

Por último, el grupo 4 estaba integrado por los números que resultan de dividir a 1 por un número par positivo no nulo. Los números pares positivos son naturales, al igual que lo es el número 1. Luego, los números que resultan de dividir a 1 por un número par positivo no nulo son racionales, pues por definición, son números que resultan del cociente de dos enteros. Por lo tanto, el grupo 4 podrá hospedarse en la habitación Q y, naturalmente, también en la R.