Límite de una función

Sitio:	Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida	Imprimido por:	MARIO DAVID GONZALEZ BENITEZ
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° F	Día:	lunes, 16 de septiembre de 2024, 19:13
Libro:	Límite de una función		

Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección vamos a introducirnos en el tema **límite de una función.**

Te invitamos recorrer el índice de la derecha, el cual contiene lo siguiente:

- Relación con el problema 1
- Noción de límite de una función
- Definición del límite de una función
- Límites laterales
- Propiedades de los límites

2. Relación con el problema 1

Relación con el problema 1: Depósito en el banco

Como se pudo concluir en el problema 1, cuando el capital inicial se acercaba cada vez más a los $\$100000$ (ya sea por valores un poquito más grandes o más chicos), el capital acumulado del conserje, luego de un mes, se acercaba a los $\$106000$.

Si le llamamos x al capital inicial y $A(x)$ al capital acumulado, podríamos indicar lo siguiente:

$$A(x) \to \ \$106000 \text{ cuando } x \to \ \$100000$$

Ya hemos explicado anteriormente que la flecha ($\to$) se lee "tiende a". Entonces, lo anterior nos dice que $A(x)$ tiende a $\$106000$ cuando x tiende a $\$100000$.

Esto es lo que se conoce como el límite de una función y es lo que estudiaremos en la presente semana.

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

3. Noción de límite de una función

Vamos a investigar el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos (pero no iguales) a 2. Primero lo vamos a hacer mediante una tabla y luego, con la gráfica de la función.

¿Qué sucede con los valores de la función f cuando x toma valores un poquito más chicos que 2?.

$x \to 2$

x	$f(x)$
1	2
1,5	2,75
1,8	3,44
1,9	3,71
1,95	3,8525
1,99	3,9701
1,995	3,985025
1,999	3,997001

$f(x) \to 4$

Como podemos ver, cuando nos acercamos al valor 2 de x, la función f se acerca cada vez más al valor 4, incluso pareciera ser que nos podemos acercar tanto como nosotros quisiéramos.

¿Qué sucede con los valores de la función f cuando x toma valores un poquito más grandes que 2?

$x \to 2$

x	$f(x)$
3	8
2,5	5,75
2,2	4,64
2,1	4,31
2,05	4,1525
2,01	4,0301
2,005	4,015025
2,001	4,003001

$f(x) \to 4$

Se puede observar el mismo comportamiento que antes.

Veamos ahora la siguiente animación que analiza lo que sucede con la función cuando estamos

cercanos al valor 2 de x, pero utilizando esta vez la representación gráfica de f:

Para ver la animación deberás hacer clic en el botón disponible en el siguiente recurso.

En el caso de no poder visualizar la animación podés hacer clic [aquí](#).

En la animación vemos lo mismo que en las tablas. Cuando x se aproxima a 2 por valores más grandes o más chicos, la función $f(x)$ se acerca a 4.

De las tablas y la gráfica de f vemos que cuando x se aproxima a 2 (por ambos lados de 2), $f(x)$ se aproxima a 4. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cerca de 4 como queramos, tomando x suficientemente cercano a 2. Esto lo expresamos diciendo que "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x tiende a 2 es igual a 4". La notación para esto es:

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$$

Observaciones:

- Cuando consideramos valores un poquito más grandes al de x, decimos que x tiende a ese valor por derecha.
- Cuando consideramos valores un poquito más chicos al de x, decimos que x tiende a ese valor por izquierda.

4. Definición del límite de una función

Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. Entonces escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos que:

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos) tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados), pero no iguales a a.

En términos generales, esto quiere decir que los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x tiende a a. En otras palabras, los valores de $f(x)$ tienden a estar más y más cerca del número L cuando x se acerca cada vez más al número a por ambos lados (izquierda y derecha), pero $x \neq a$.

Una notación alternativa para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ es:

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to a$$

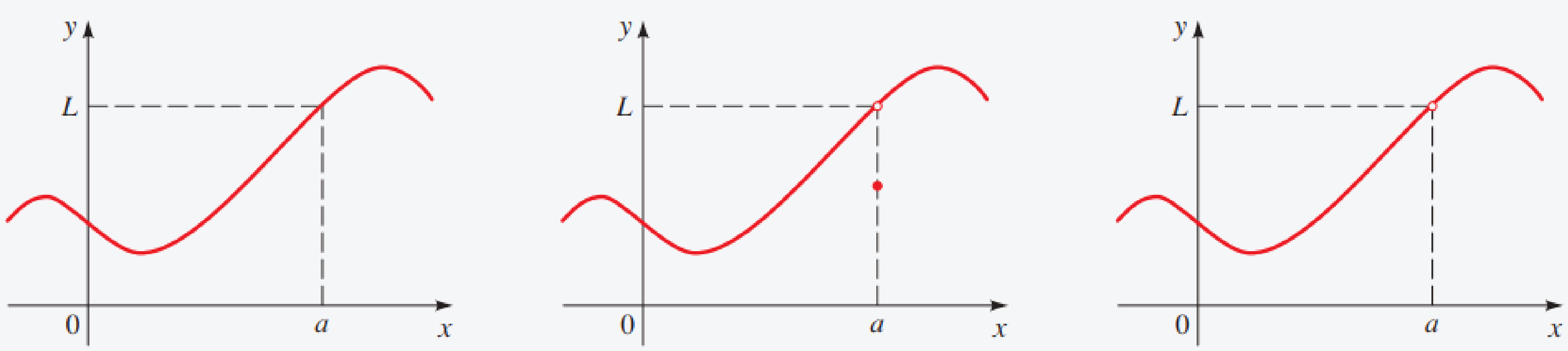
que se lee:

"$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Noten la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, no se considera $x = a$. De hecho, $f(x)$ no necesita estar definida en a. Lo único que importa es cómo se define f cerca de a.

A continuación, se muestran tres gráficas de funciones. Observen que en el último caso, $f(a)$ no está definida (hay un punto vacío en ese lugar) y, en el segundo inciso, $f(a) \neq L$, ya que el punto "relleno" está más abajo. Sin embargo, en cada caso, independientemente de lo que suceda en a, es cierto que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



(a) (b) (c)

4.1. Ejemplos

Ejemplo 1

Vamos a estimar el límite de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ cuando x tiende a 1.

Nótese que la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ no está definida cuando $x = 1$, pero esto no tiene importancia porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que consideramos valores de x que son cercanos a a pero no iguales a a. Las tablas siguientes dan valores de $f(x)$ (redondeados a seis lugares decimales) para valores de x que se aproximan a 1 (por ambos lados), pero no iguales a 1.

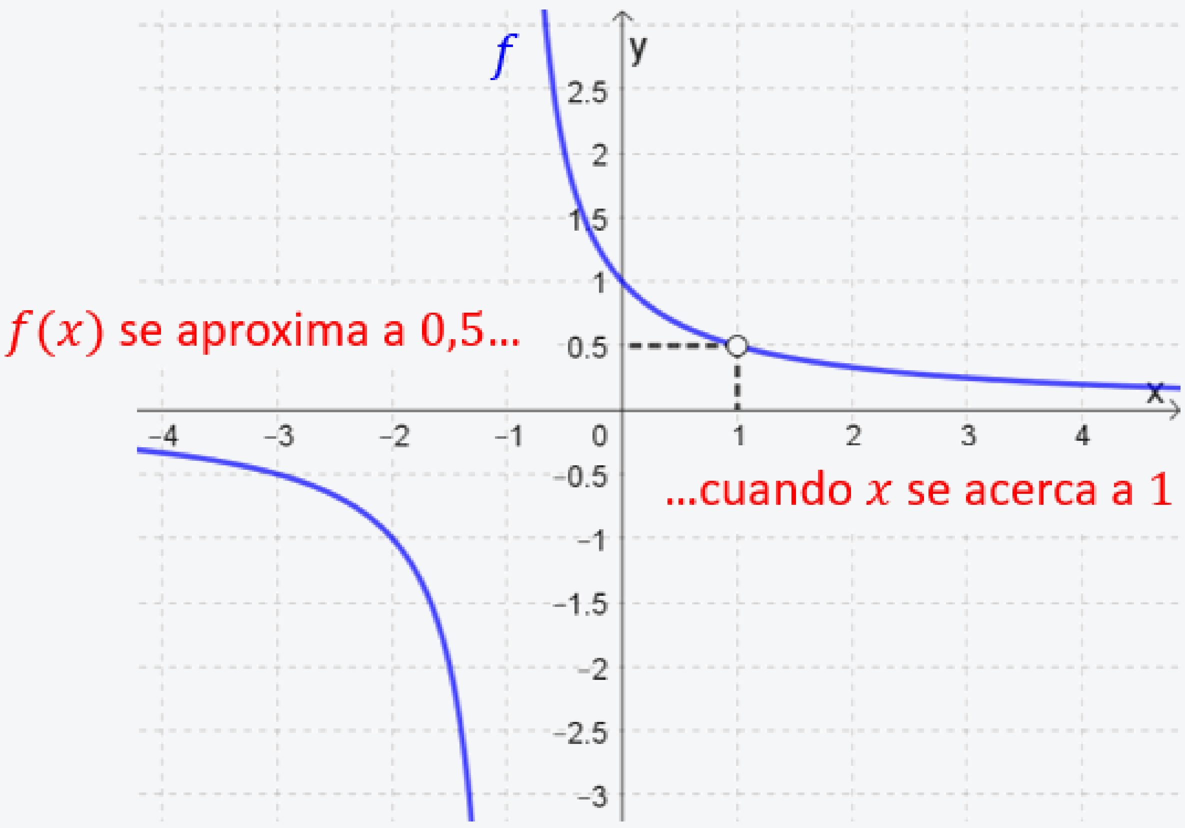
$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,4
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

Con base en los valores de las dos tablas, hacemos la conjetura de que cuando $x \to 1$, $f(x) \to 0,5$, es decir:

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) = 0,5$$

Esto también se puede determinar gráficamente, como se muestra a continuación:



Aparece un punto vacío porque la función en ese lugar presenta una discontinuidad.

Ejemplo 2: Dada la función $g(x) = x^2 + 1$, vamos a determinar el siguiente límte:

$$\lim_{x \to -2} g(x)$$

Primero comenzamos construyendo las tablas de valores:

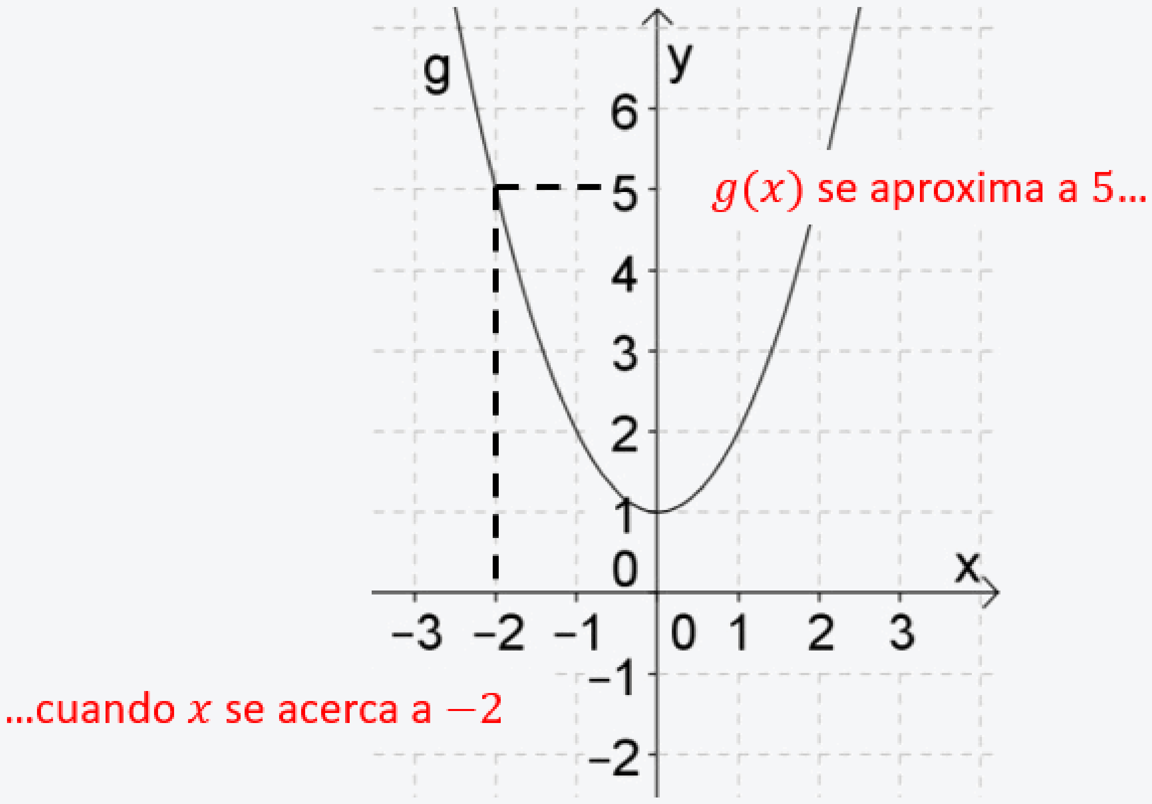
$x > -2$	$x^2 + 1$
$-1{,}98$	$4{,}9204$
$-1{,}99$	$4{,}9601$
$-1{,}999$	$4{,}996001$
$-1{,}9999$	$4{,}99960001$

$x < -2$	$x^2 + 1$
$-2{,}1$	$5{,}41$
$-2{,}01$	$5{,}0401$
$-2{,}001$	$5{,}004001$
$-2{,}0001$	$5{,}00040001$

Observar que cuando x toma valores mayores que -2, la función se acerca al valor 5. Lo mismo hace cuando toma valores menores que -2. Entonces, decimos que:

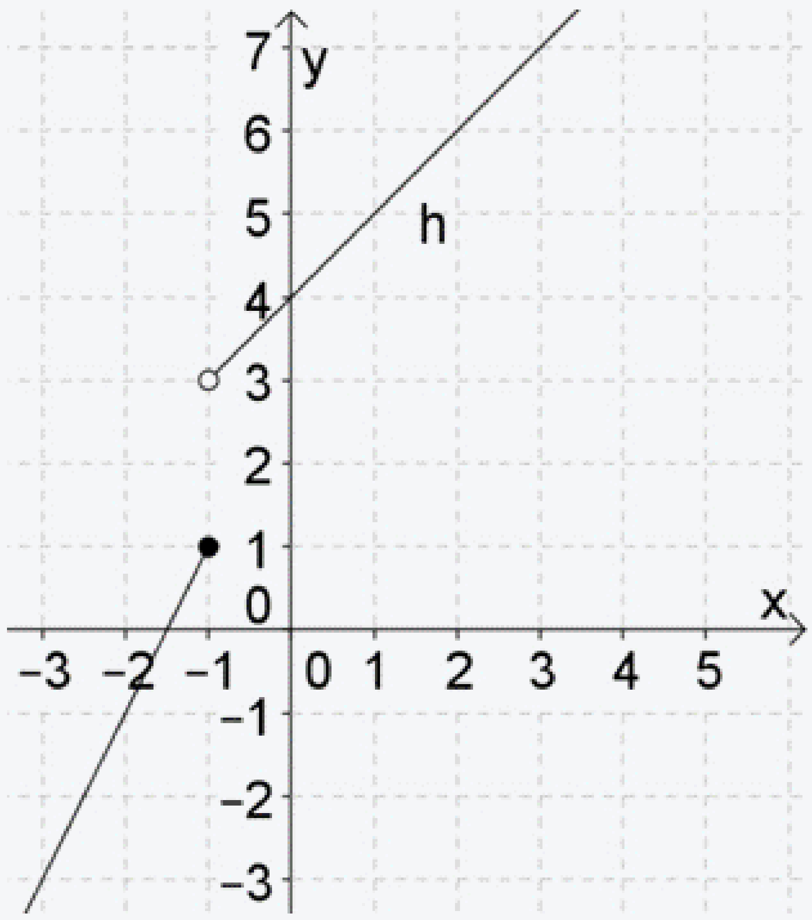
$$\lim_{x \to -2} (x^2 + 1) = 5$$

Veamos cómo es la gráfica de la función $g(x)$:

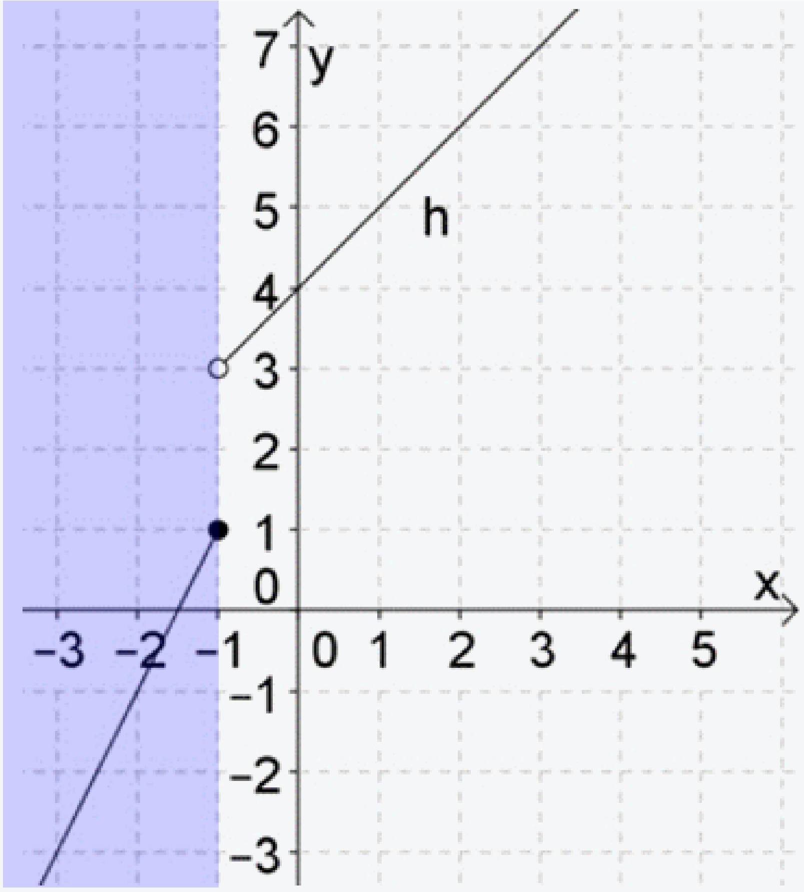


Ejemplo 3

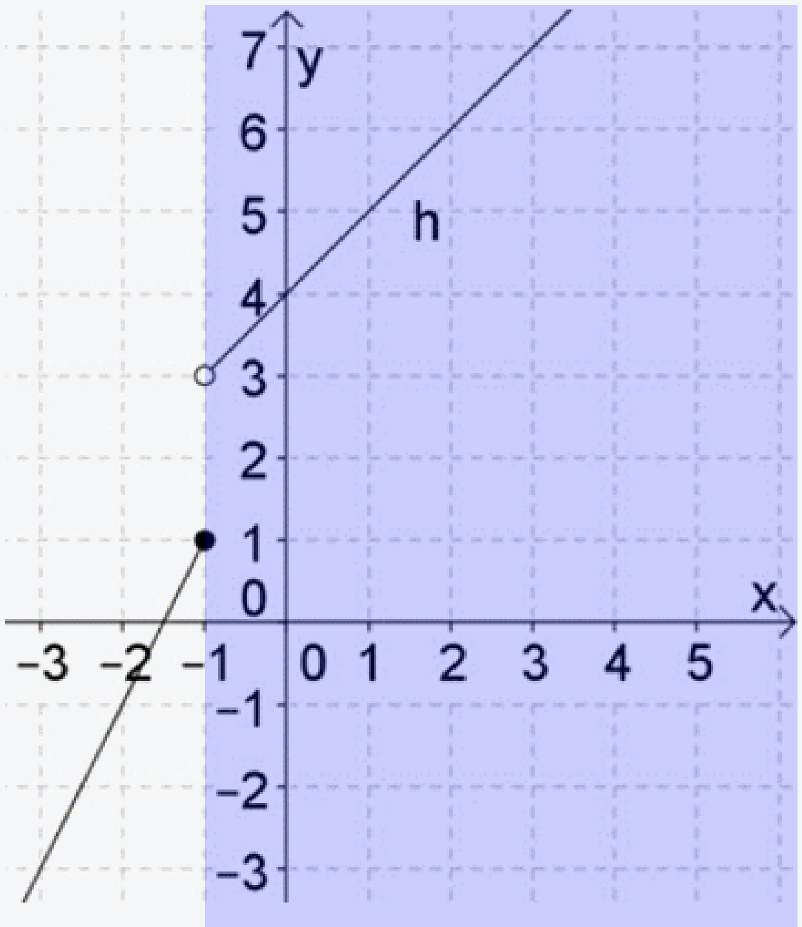
A partir de la gráfica de la función $h(x)$, que está definida por partes, vamos estimar su límite cuando x tiende a -1.



Observando la gráfica, vemos que cuando nos acercamos al valor -1 de x por la izquierda, es decir, por valores que son menores, la función se acerca al 1.



Sin embargo, cuando nos acercamos por la derecha al -1, es decir, por valores que son mayores, la función se acerca al 3.



Por lo tanto, cuando x tiende a -1, la función no se acerca a un solo valor. Debido a esto, decimos que el límite de $h(x)$ cuando x tiende a -1 no existe, ya que si el límite existe es único. En símbolos, anotamos:

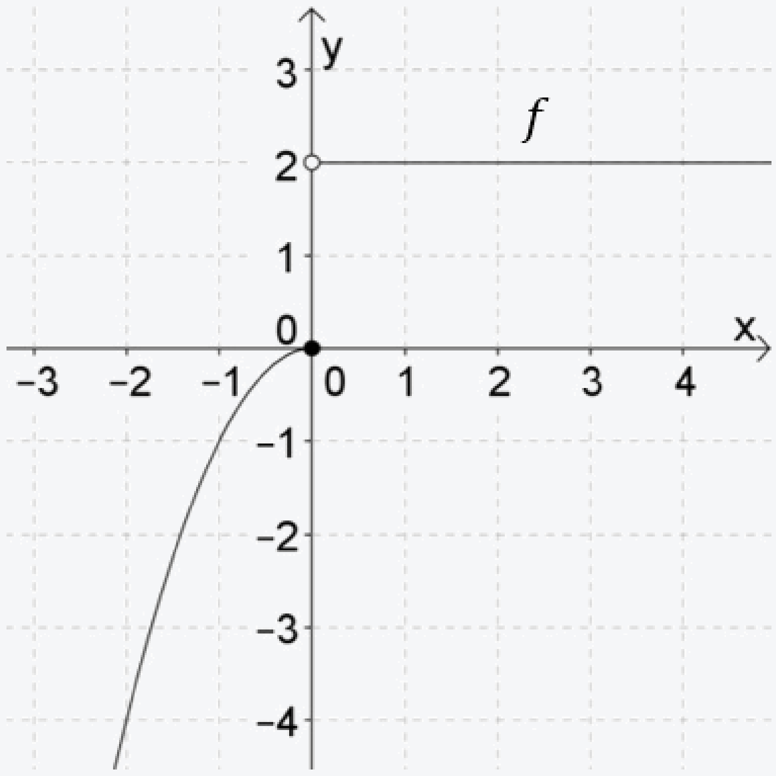
$$\lim_{x \to -1} h(x) = \nexists$$

Notar que el límite no existe a pesar de que la función está definida para $x = -1$.

$$f(-1) = 1$$

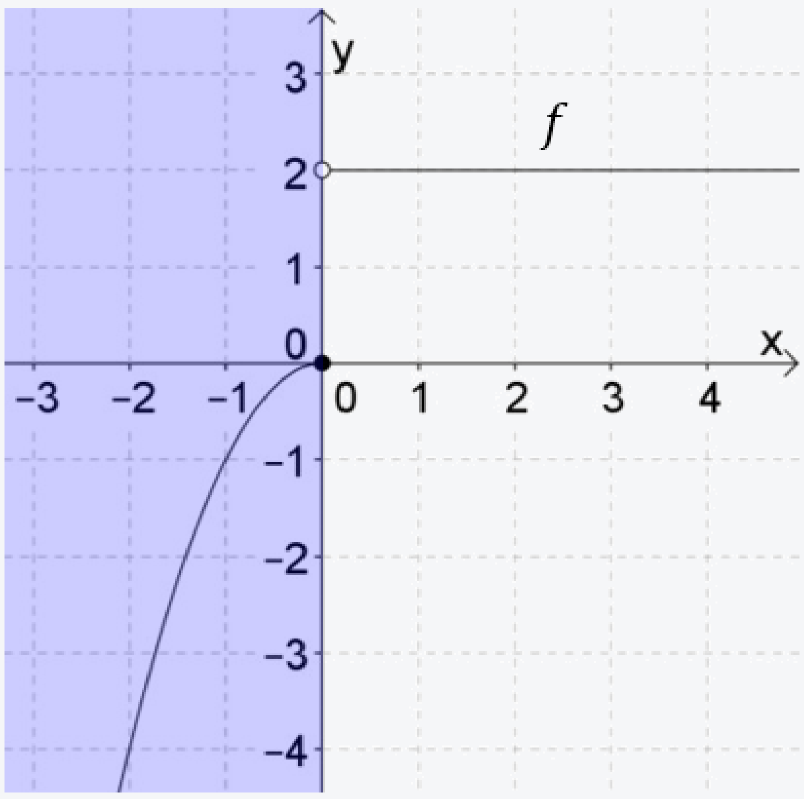
5. Límites laterales

Dada la gráfica de la función $f(x)$:



Observar que cuando x tiende a 0 por la izquierda, es decir, por valores que son menores que 0, la función también se acerca al 0. Esto lo podemos indicar de la siguiente manera:

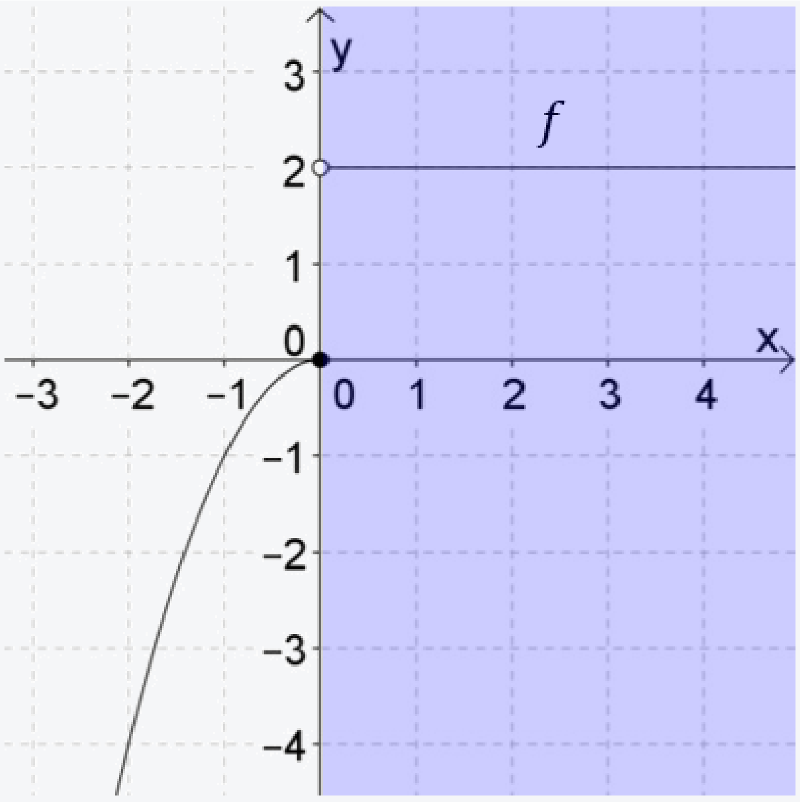
$$L_i = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$



En general, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ significa que cuando x se acerca a a por la izquierda, la función se acerca cada vez más al valor L_1.

Ahora bien, cuando x tiende a 0 por la derecha, es decir, por valores que son mayores que 0, la función se acerca al 2. Esto lo podemos indicar de la siguiente manera:

$$L_d = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$



En general, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ significa que cuando x se acerca a a por la derecha, la función se acerca cada vez más al valor L_2.

Estos límites se conocen como límites laterales, y el límite existirá si y solo si ambos existen y son iguales, es decir, $L_1 = L_2$.

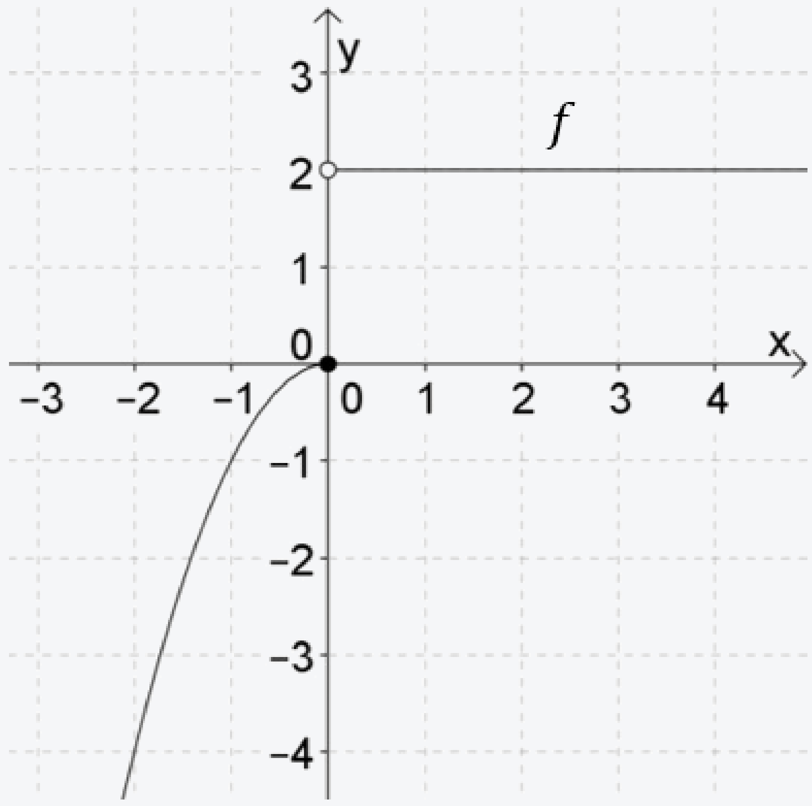
En símbolos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

En nuestro caso, como $L_1 \neq L_2$, el $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

5.1. Otro ejemplo

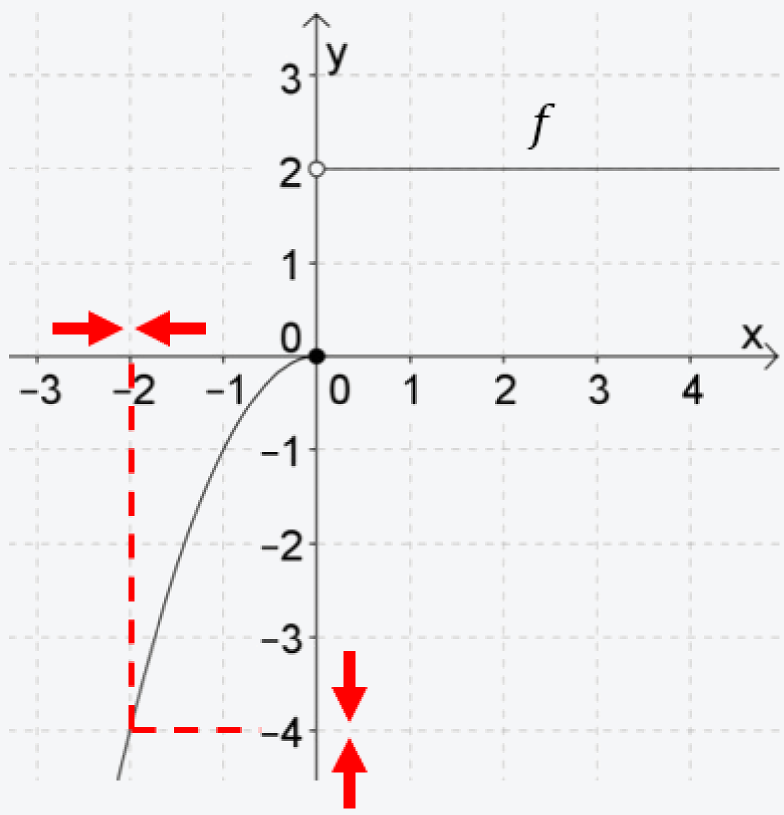
Considerando la misma gráfica de la función $f(x)$, vamos a calcular el $\lim_{x \to -2} f(x)$.



Para esto, debemos estimar primero los límites laterales y ver qué sucede con ellos:

- $L_i = \lim_{x \to -2^-} f(x) = -4$
- $L_d = \lim_{x \to -2^+} f(x) = -4$

Luego, como $L_i = L_d = -4$, entonces el $\lim_{x \to -2} f(x) = -4$.



6. Propiedades de los límites

Existen propiedades de los límites que nos permiten poder calcularlos de manera analítica, sin necesidad de armar tablas de valores ni de realizar la gráfica de la función en cuestión.

A continuación veremos algunas de esas formas.

Para la explicación de todas, vamos a suponer que c es una constante, es decir, un número real, y que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existen.

6.1. Propiedades (grupo 1)

Propiedad 1: el límite de una constante, es la propia constante.

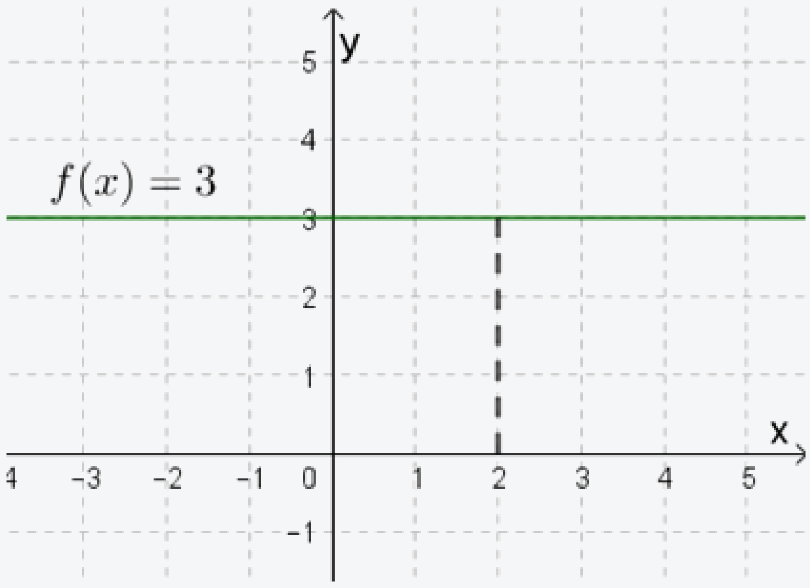
$$\lim_{x \to a} c = c$$

Ejemplo: según esta propiedad, el $\lim_{x \to 2} 3 = 3$. Tomemos la función constante $f(x) = 3$ y analicemos por tablas qué sucede cuando nos acercamos al valor 2 de x por ambos lados:

Por izquierda	
x	$f(x)$
1,9	3
1,99	3
1,999	3

Por derecha	
x	$f(x)$
2,1	3
2,01	3
2,001	3

Puede observarse que a medida que nos acercamos al 2 de x, la función tiende al 3. Esto se puede apreciar también gráficamente:



Luego, se concluye que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 3 = 3$$

Tal como lo habíamos afirmado con la propiedad 1.

Otros ejemplos son los siguientes:

$$\lim_{x \to 8} -14 = -14, \quad \lim_{x \to -3} 0 = 0$$

Propiedad 2: si $f(x) = x$, entonces el límite de la función coincide con el valor al cual tiende la x.

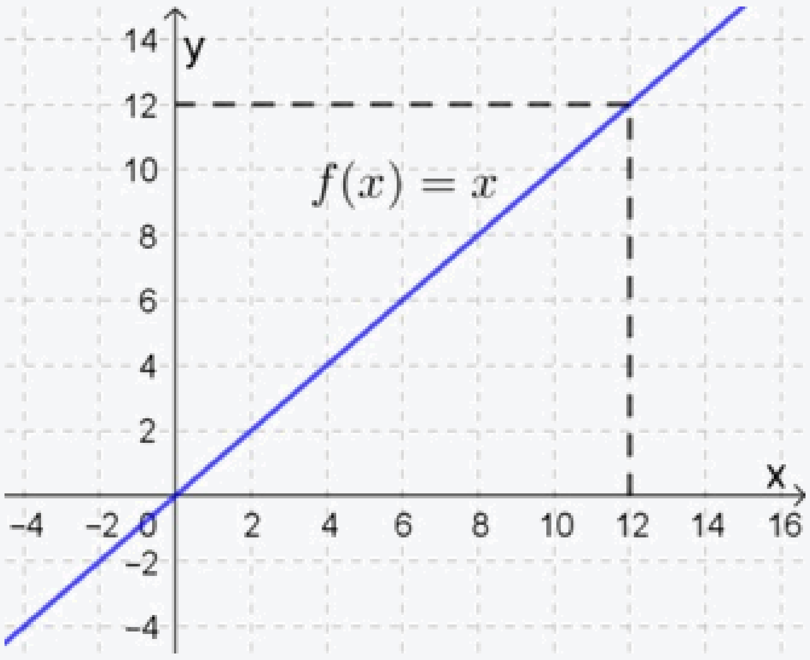
$$\lim_{x \to a} x = a$$

Ejemplo: según la propiedad, $\lim_{x \to 12} x = 12$. Tomemos la función $f(x) = x$ y analicemos por tablas qué sucede cuando nos acercamos al valor 12 de x por ambos lados:

Por izquierda	
x	$f(x)$
11,9	11,9
11,99	11,99
11,999	11,999

Por derecha	
x	$f(x)$
12,1	12,1
12,01	12,01
12,001	12,001

Puede observarse que a medida que nos acercamos al 12 de x, la función tiende también al 12. Esto se puede apreciar gráficamente:



Esta función recibe el nombre de "función identidad".

Luego, se concluye que:

$$\lim_{x \to 12} f(x) = \lim_{x \to 12} x = 12$$

Tal como lo habíamos afirmado con la propiedad 2.

A continuación, se detallan otros ejemplos:

$$\lim_{x \to -10} x = -10, \quad \lim_{x \to 0} x = 0, \quad \lim_{t \to \frac{1}{2}} t = \frac{1}{2}$$

Propiedad 3: para cualquier entero positivo n se cumple que:

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

Ejemplo: para estimar el $\lim\limits_{t \to 4} t^2$, hacemos:

$$\lim_{t \to 4} t^2 = 4^2 = 16$$

Esto puede verificarse haciendo tablas de valores o la gráfica, como se mostró para las propiedades anteriores.

A continuación, se detallan otros ejemplos:

$$\lim_{x \to -\frac{2}{3}} x^4 = (-\tfrac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}, \quad \lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8$$

Propiedad 4: para cualquier entero positivo n, se cumple que:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Si n es par, suponemos que $a \geq 0$.

Ejemplo: para estimar el $\lim\limits_{x \to 25} \sqrt{x}$, hacemos:

$$\lim_{x \to 25} \sqrt{x} = \sqrt{25} = 5$$

Esto puede verificarse haciendo tablas de valores o la gráfica, como se mostró para las propiedades anteriores.

A continuación, se deja otro ejemplo:

$$\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2$$

6.2. Propiedades (grupo 2)

Propiedad 5: el límite de una suma (o diferencia), es la suma (o diferencia) de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Ejemplo: vamos a estimar el $\lim\limits_{x\to -6}(x+8)$. Suponiendo que $f(x) = x$ y que $g(x) = 8$, podemos plantear lo siguiente:

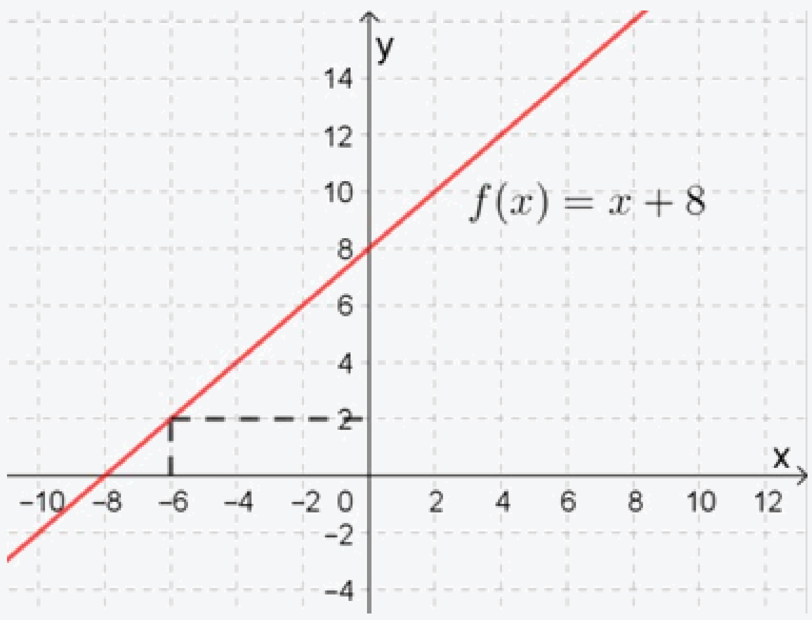
$$\lim_{x\to -6}(x+8) = \lim_{x\to -6} x + \lim_{x\to -6} 8 \quad \text{por la propiedad 5}$$

$$\lim_{x\to -6}(x+8) = -6+8 \quad \text{por las propiedades 2 y 1, respectivamente}$$

$$\lim_{x\to -6}(x+8) = 2$$

Observación

Lo que está dentro del paréntesis es una función de primer grado. Si la graficamos y analizamos lo que sucede estando próximos al valor -6 de x, vemos que la función tiende al 2, lo cual indica que la propiedad 5 funciona.



A continuación, se deja la resolución de otro límite:

$$\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}-2) = \lim_{x\to 9}\sqrt{x} - \lim_{x\to 9} 2 \quad \text{por la propiedad 5}$$

$$\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}-2) = \sqrt{9}-2 \quad \text{por las propiedades 4 y 1, respectivamente}$$

$$\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}-2) = 1$$

Propiedad 6: el límite de un producto, es el producto de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Ejemplo: vamos a determinar el $\lim\limits_{x\to 3}[(x+4)\cdot(x^2-7)]$. Consideramos $f(x) = x+4$ y $g(x) = x^2-7$. A partir de esto podemos hacer el siguiente procedimiento:

$$\lim_{x\to 3}[(x+4)\cdot(x^2-7)] = \lim_{x\to 3}(x+4)\cdot\lim_{x\to 3}(x^2-7) \quad \text{por la propiedad 6}$$

$$\lim_{x \to 3}[(x+4) \cdot (x^2-7)] = (\lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 4) \cdot (\lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} 7)$$ por la propiedad 5

$$\lim_{x \to 3}[(x+4) \cdot (x^2-7)] = (3+4) \cdot (3^2-7)$$ por las propiedades 1, 2 y 3

$$\lim_{x \to 3}[(x+4) \cdot (x^2-7)] = 14$$

Propiedad 7: el límite de una constante por una función, es la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Si observan con atención, esta propiedad es un caso particular de la anterior.

Pequeña demostración:

$$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$ por la propiedad 6

$$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$ por la propiedad 1

Ejemplo: determinar el $\lim_{x \to 1} -8x$.

$$\lim_{x \to 1} -8x = -8 \cdot \lim_{x \to 1} x$$ por la propiedad 7

$$\lim_{x \to 1} -8x = -8 \cdot 1$$ por la propiedad 2

$$\lim_{x \to 1} -8x = -8$$

Propiedad 8: el límite de un cociente, es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Ejemplo: calcularemos el $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim_{x \to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x \to -2}(5-3x)}$$ por la propiedad 8

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \cdot \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \cdot \lim_{x \to -2} x}$$ por las propiedades 5 y 7

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{(-2)^3+2 \cdot (-2)^2-1}{5-3 \cdot (-2)}$$ por las propiedades 1, 2 y 3

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = -\frac{1}{11}$$

Propiedad 9: el límite de una potencia es la potencia del límite.

$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$, donde n es un entero positivo.

Propiedad 10: el límite de una raíz es la raíz del límite.

$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, donde n es un entero positivo. Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.

Ejemplo: estimaremos el $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt[3]{x+4}$.

$$\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x+4} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 5}(x+4)} \quad \text{por la propiedad 10}$$

$$\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x+4} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4} \quad \text{por la propiedad 5}$$

$$\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x+4} = \sqrt[3]{5+4} \quad \text{por la propiedad 2}$$

$$\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x+4} \approx 2,08$$

Para el caso de la potencia, se resuelve de manera similar.

6.3. Límite por sustitución directa

Actividad introductoria

Dado $f(x) = x^2 + 4x - 6$, se pide:
a) Calcular $f(9)$.
b) Estimar el $\lim_{x \to 9}(x^2 + 4x - 6)$ aplicando las propiedades anteriores.

Te recomendamos que te tomes unos minutitos para resolverlo y después continúes con la lectura, la explicación acá te va a estar esperando. Tomate el tiempo que necesites.

¿Listo? Veamos entonces la resolución de esta actividad.

Para el apartado (a), tenemos que cambiar el valor de x por 9 y resolver las operaciones que quedan planteadas:

$$f(9) = 9^2 + 4 \cdot 9 - 6$$

$$f(9) = 111$$

Para el apartado (b), el cálculo del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 9, aplicando las propiedades, nos queda:

$$\lim_{x \to 9}(x^2 + 4x - 6) = \lim_{x \to 9} x^2 + \lim_{x \to 9} 4x - \lim_{x \to 9} 6 \quad \textit{por la propiedad 5}$$

$$\lim_{x \to 9}(x^2 + 4x - 6) = \lim_{x \to 9} x^2 + 4 \cdot \lim_{x \to 9} x - \lim_{x \to 9} 6 \quad \text{por la propiedad 7}$$

$$\lim_{x \to 9}(x^2 + 4x - 6) = 9^2 + 4 \cdot 9 - 6 \quad \text{por las propiedades 3, 2 y 1, respectivamente}$$

$$\lim_{x \to 9}(x^2 + 4x - 6) = 111$$

¿Qué sucede con los resultados obtenidos en ambos apartados?

¡Exacto! Son iguales. Es decir, $f(9) = \lim_{x \to 9} f(x)$. Esto nos permite enunciar esta última propiedad que facilita muchísimo el cálculo de los límites.

Límites por sustitución directa

Si f es una función polinómica o una función racional y a está en el dominio de f, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Aquellas funciones que cumplen con esta propiedad se denominan continuas en a.

Ejemplo

Determinar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 3}(2x^3 - 10x - 8)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+5x}{x^4+2}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^3 + 36}$

Para resolver cada uno de los límites, podríamos aplicar las propiedades vistas anteriormente. Pero aquí vamos a agilizar el cálculo con la propiedad de sustitución directa, aunque primero tenemos que ver si se puede aplicar o no.

Veamos...

En el apartado (a), la función $f(x) = 2x^3 - 10x - 8$ es polinómica, por lo que podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to 3}(2x^3 - 10x - 8) = 2 \cdot 3^3 - 10 \cdot 3 - 8 = 16$$

Por lo tanto, el $\lim\limits_{x \to 3}(2x^3 - 10x - 8) = 16$.

En el apartado (b), la función $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^4+2}$ es racional y $x = -1$ está en su dominio, porque el denominador no es cero para $x = -1$. Entonces, podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+5x}{x^4+2} = \frac{(-1)^2+5\cdot(-1)}{(-1)^4+2} = -\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, el $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+5x}{x^4+2} = -\frac{4}{3}$.

Finalmente, en el apartado (c) tenemos una función que no es ni polinómica ni racional, sino que es irracional y está definida para $x = 4$. Así que primero debemos aplicar la propiedad de la raíz vista anteriormente:

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x^3 + 36} = \sqrt{\lim_{x \to 4} x^3 + 36}$$

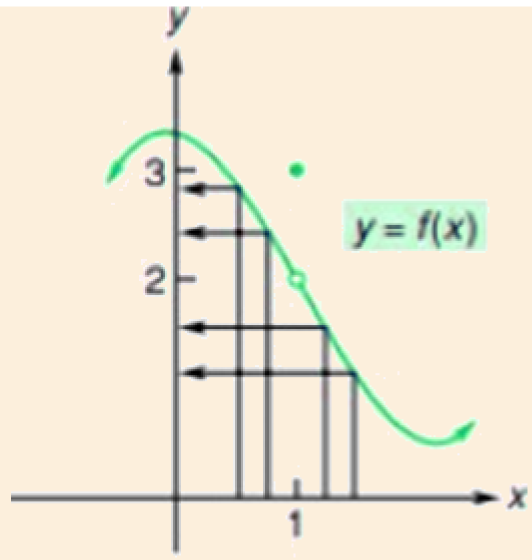
Ahora si, vemos que tenemos que calcular el límite de una función polinómica, la cual es $f(x) = x^3 + 36$. Aplicando sustitución nos queda:

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x^3 + 36} = \sqrt{4^3 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Entonces, se concluye que $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^3 + 36} = 10$.

Observación

No se calculan límites con solo "sustituir", a menos que podamos apoyarnos en alguna propiedad. El uso indiscriminado de la sustitución puede conducir a resultados erróneos. Por ejemplo, podemos observar en la gráfica que el valor de $f(1) = 3$ no coincide con el valor del $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.


y
3
2
y = f(x)
x
1