Operaciones entre conjuntos

Sitio: Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida
Curso: Elementos de Analisis Matematico 1° F
Libro: Operaciones entre conjuntos

Imprimido por: MARIO DAVID GONZALEZ BENITEZ
Día: martes, 27 de agosto de 2024, 18:00

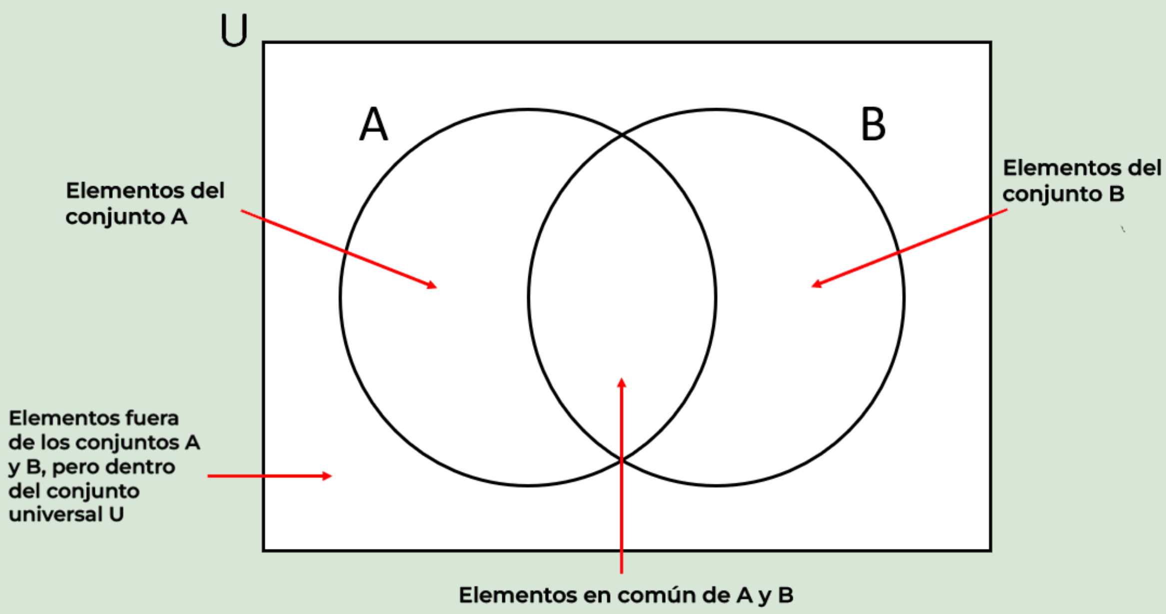
Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección estudiaremos las operaciones entre conjuntos y analizaremos su vinculación con el problema 2. Estas son:

- Unión
- Intersección
- Diferencia
- Complemento

Para explicar cada una de las operaciones entre conjuntos, vamos a emplear el siguiente diagrama:

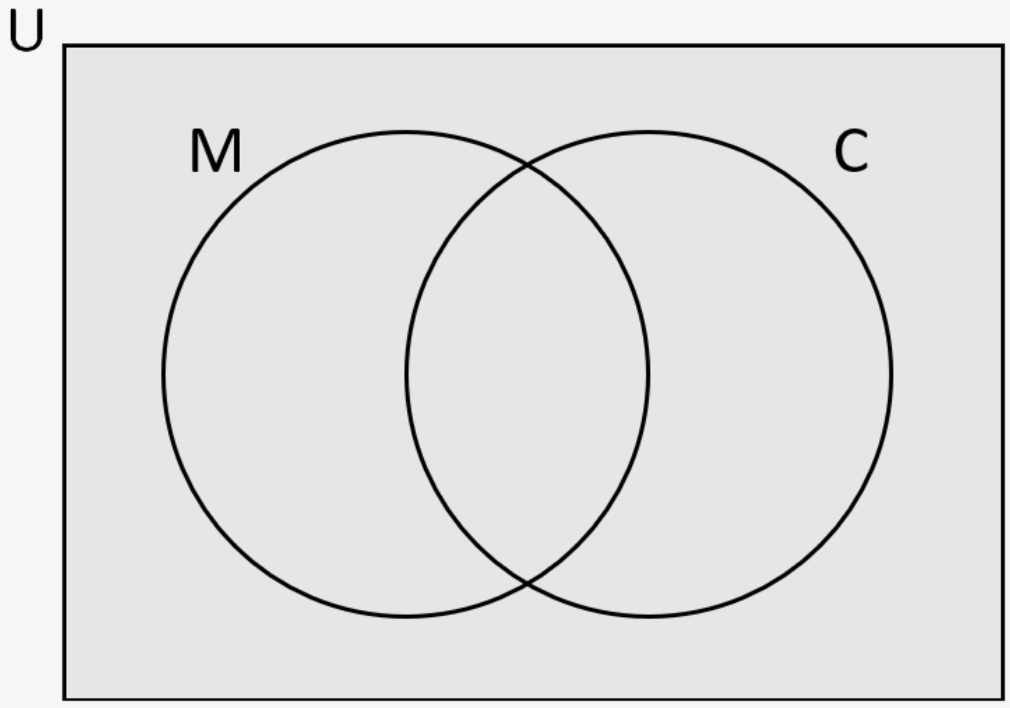


- En cada uno de los conjuntos se anotan sus respectivos elementos.
- En la parte donde se intersecan, se escriben los que tienen en común.
- En la parte del rectángulo (por fuera de los círculos), se anotan los elementos que están en el conjunto universal U, pero no están ni en A, ni en B.

2. Diagrama de Venn del problema 2

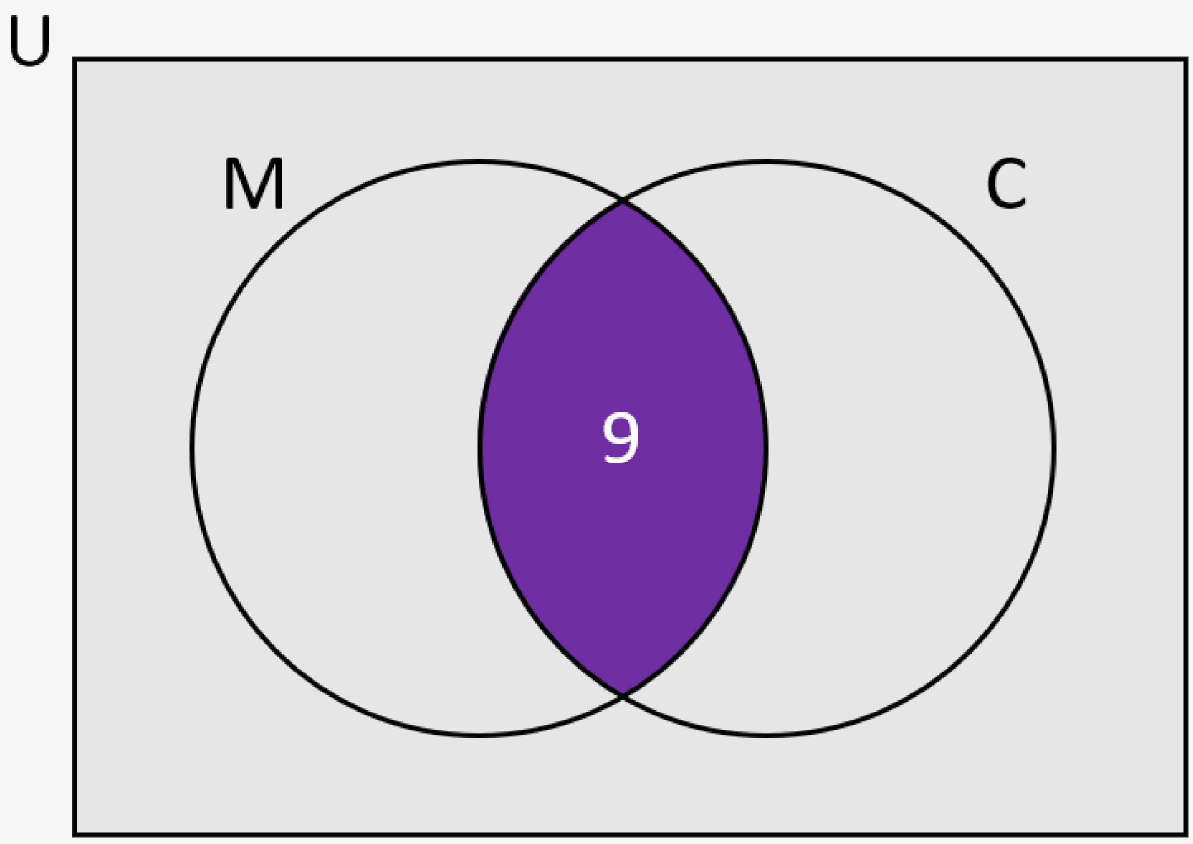
En este apartado vamos a construir el diagrama de Venn del problema 2, dado que este nos va a servir para entender las operaciones entre conjuntos.

Primero, vamos a dibujar lo siguiente:



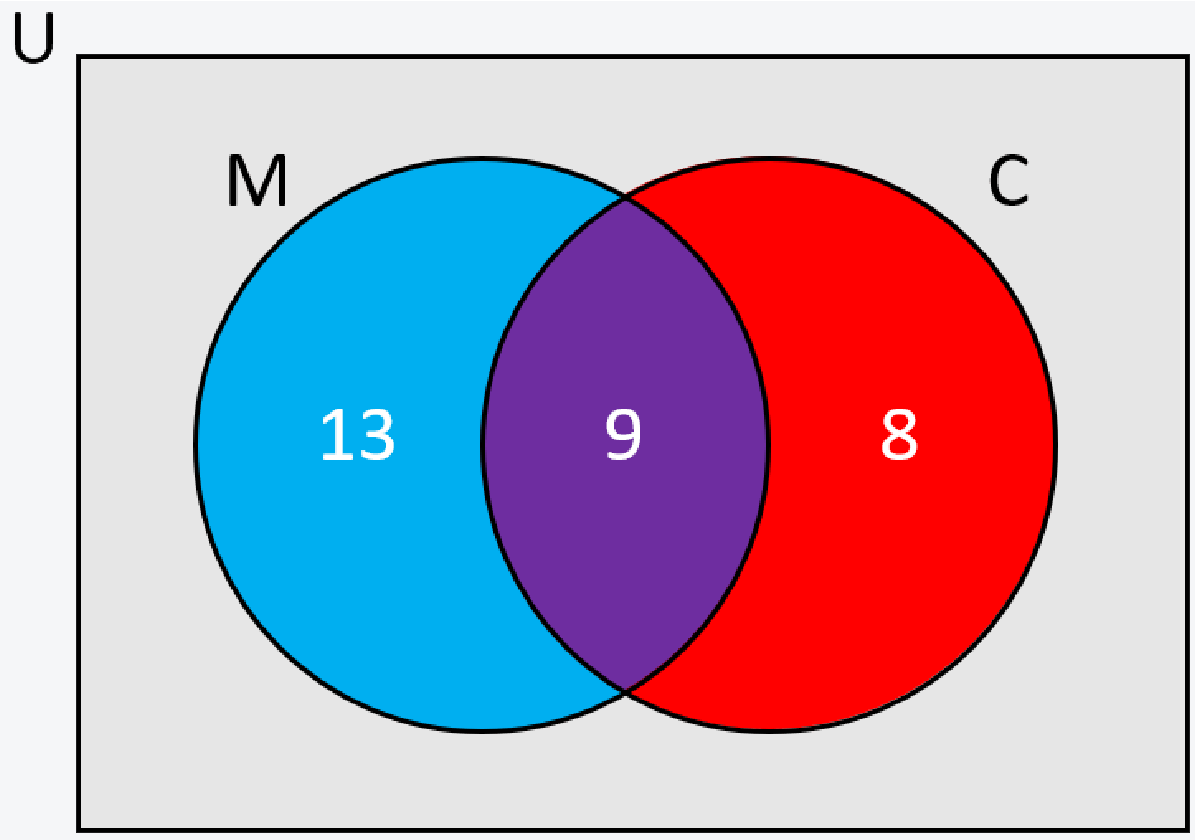
El conjunto M hace referencia a las personas que hacen musculación, C a las que hacen CrossFit y U es el conjunto universal, es decir, el total de las personas que asisten a ese gimnasio.

En primer lugar, se recomienda ubicar los elementos que están en ambos conjuntos, en este caso son los que hacen musculación y CrossFit, dicha cantidad es 9:

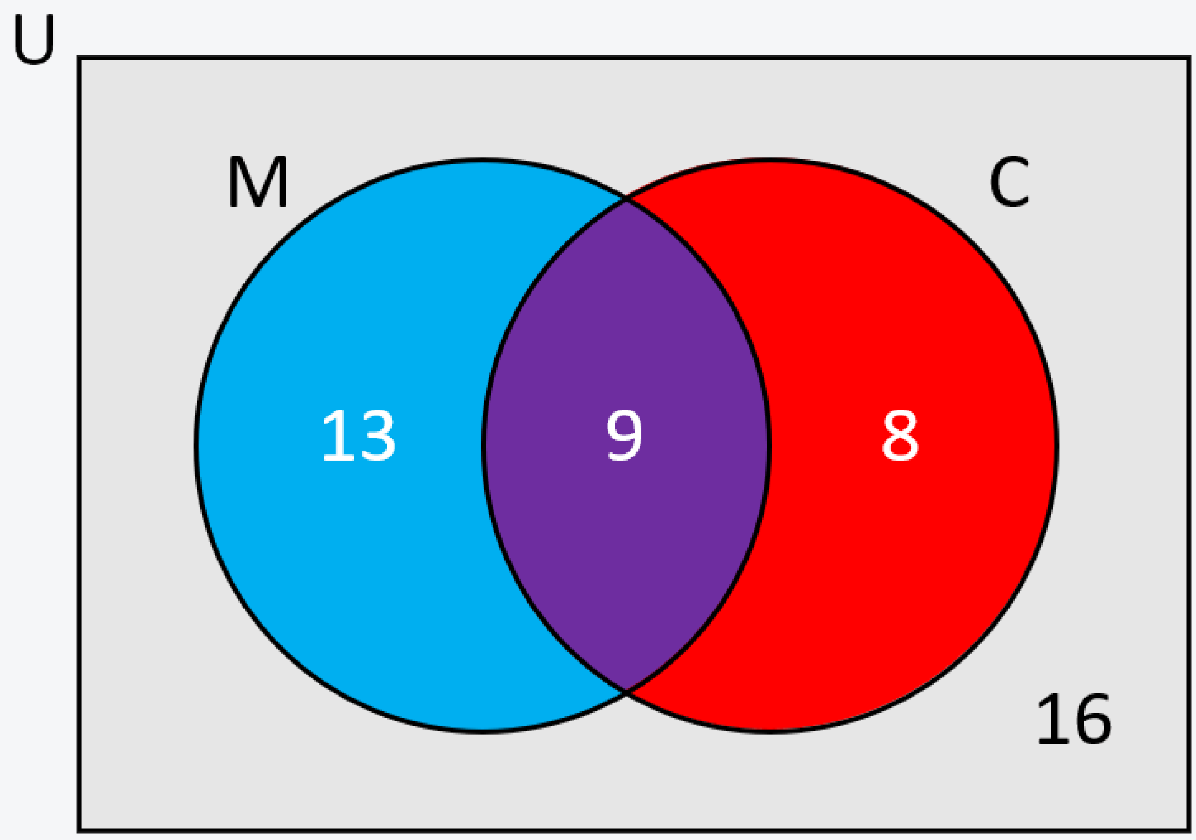


Luego, vamos a anotar los elementos que faltan para completar los conjuntos M y C, teniendo en cuenta los 9 que ya comparten ambos.

- Si en total hacen musculación 22 personas y ya tenemos 9 anotadas, entonces nos faltan 13 $(22 - 9 = 13)$
- Si en total hacen CrossFit 17 personas y ya tenemos 9 anotadas, entonces nos faltan 8 $(17 - 9 = 8)$.

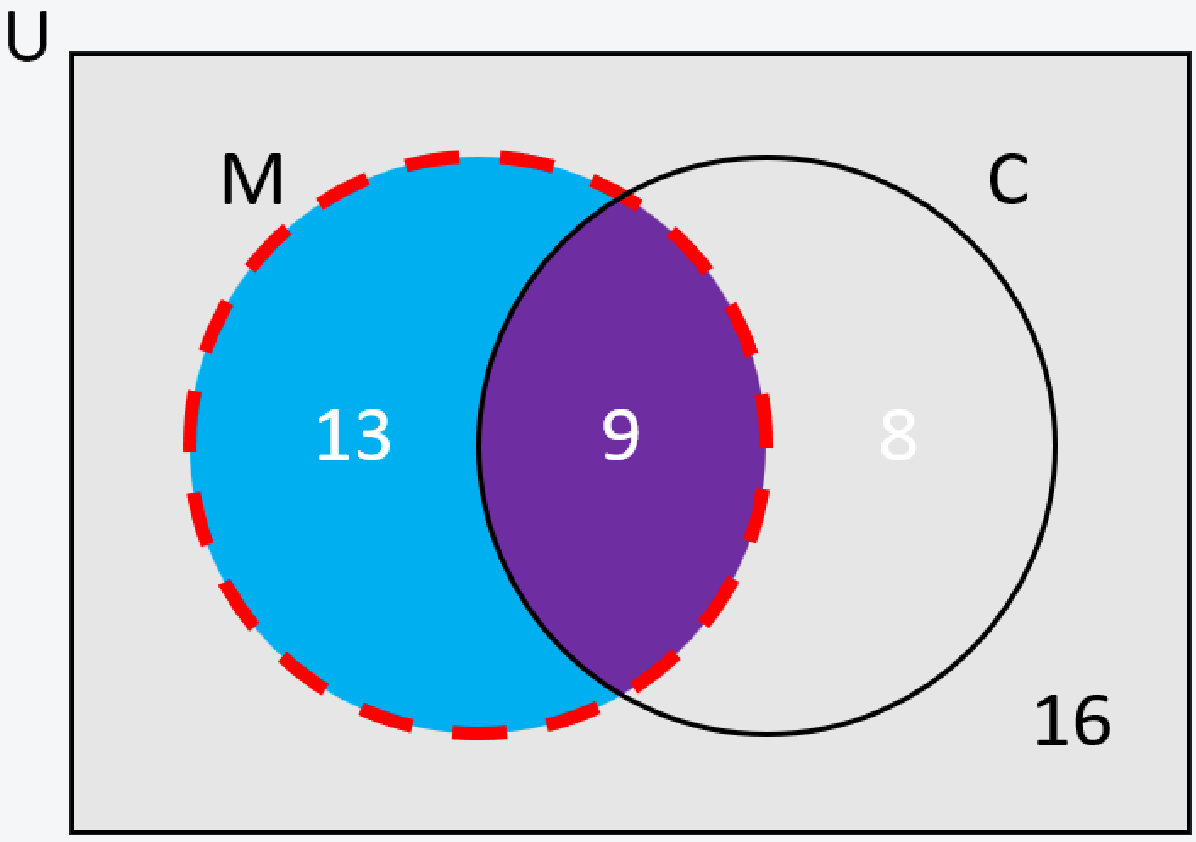


Por último, nos faltan anotar a las personas que van al gimnasio pero no hacen ni musculación, ni CrossFit. Como en total son 46 clientes los que tiene el gimnasio, ya hay 30 personas que hacen al menos uno de estos dos entrenamientos $(13 + 9 + 8 = 30)$. Por lo tanto, hay 16 personas $(46 - 30 = 16)$ que realizan un entrenamiento diferente. Esto se anota en la parte de color gris como se muestra:



dado que pertenecen al conjunto universal U pero no están ni en M, ni en C.

Observá que cada uno de los conjuntos reúne la cantidad pedida. Por ejemplo, 22 personas hacen musculación; esto en el diagrama de Venn se corrobora así:



También se cumple el cardinal del conjunto universal, que según el problema es de 46, el cual se obtiene de la siguiente manera: $13+9+8+16=46$

3. Unión entre conjuntos

Ahora sí ya estamos en condiciones de comenzar con las operaciones entre conjuntos.

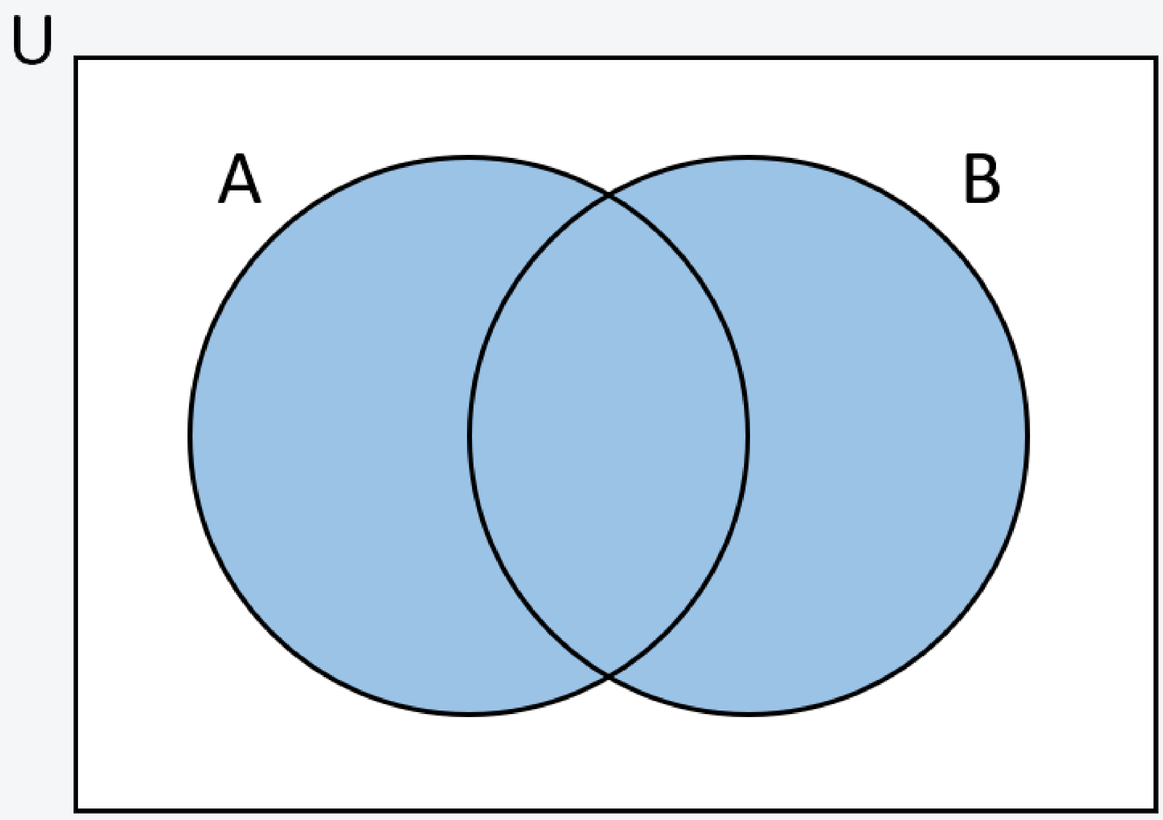
La unión de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota la unión de A y B por:

$$A \cup B$$

que se lee "A unión B ". En símbolos, esto se escribe:

$$A \cup B=\{x: x \in A \, o \, x \in B\}$$

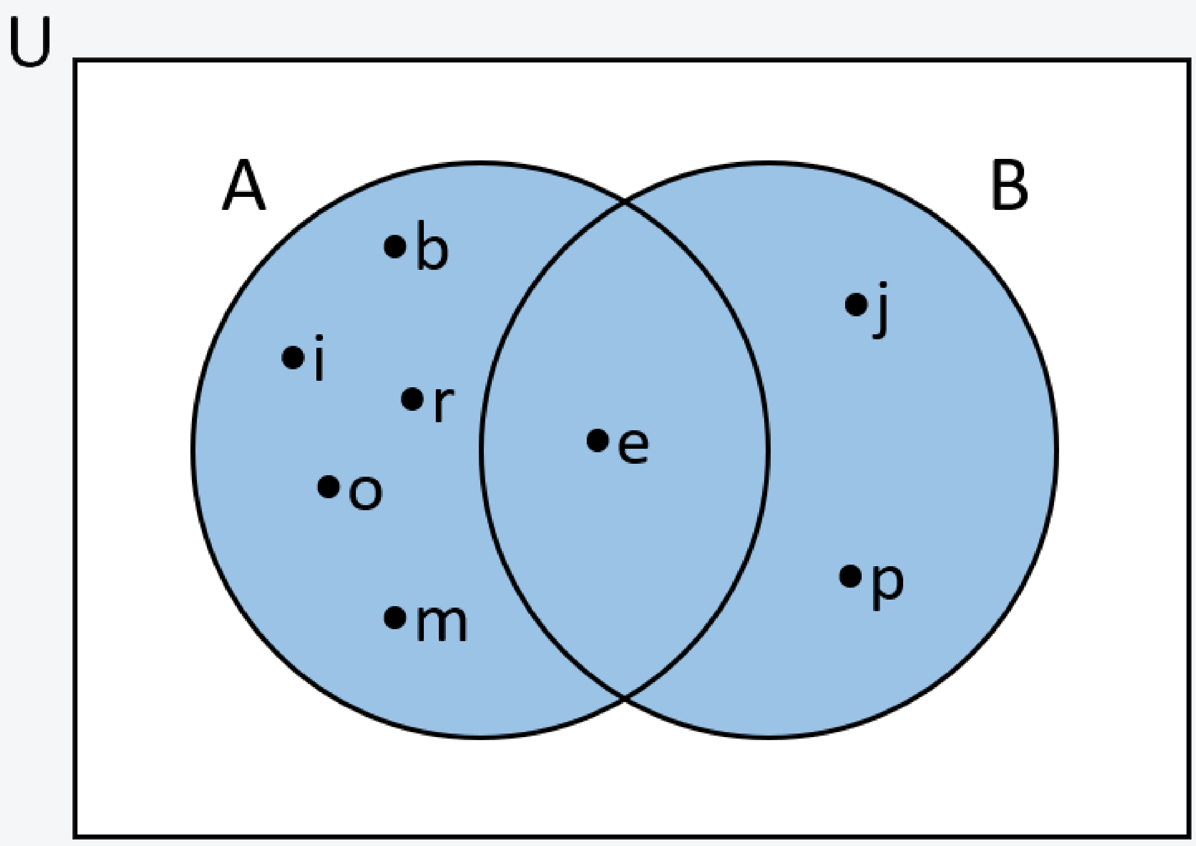
Gráficamente, $A \cup B$ es toda la zona sombreada de color azul:



La unión de más de dos conjuntos se define de la misma manera.

Ejemplo 1: Sea A el conjunto formado por las letras de la palabra "birome", y sea $B=\{j, p, e\}$. Entonces:

$$A \cup B=\{b, i, r, o, m, e\} \cup\{j, p, e\}=\{b, i, r, o, m, e, j, p\}$$

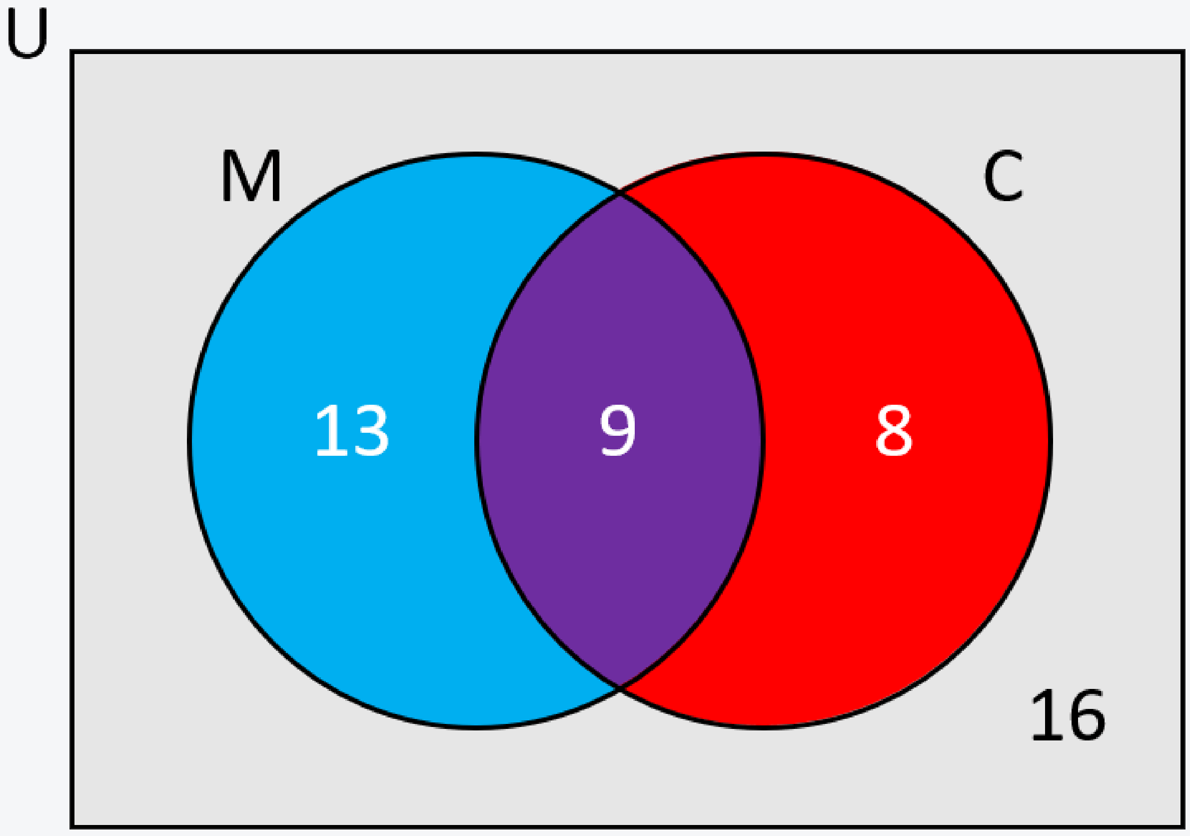


Ejemplo 2: Si $C=\{1,3,5\}$, $D=\{2,4,6,8\}$ y $E=\{7\}$, entonces:

$$C \cup D \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Volviendo a nuestro problema 2 "El gimnasio de Pepe":

La unión entre conjuntos aparece cuando se pregunta por cuántas personas realizan al menos uno de los dos entrenamientos (musculación y/o CrossFit). Para responderla, debemos pensar en los elementos que pertenecen al conjunto M o al conjunto C o a ambos. De ahí que la respuesta correcta es 30 $(13 + 9 + 8 = 30)$.



Algunas uniones particulares:

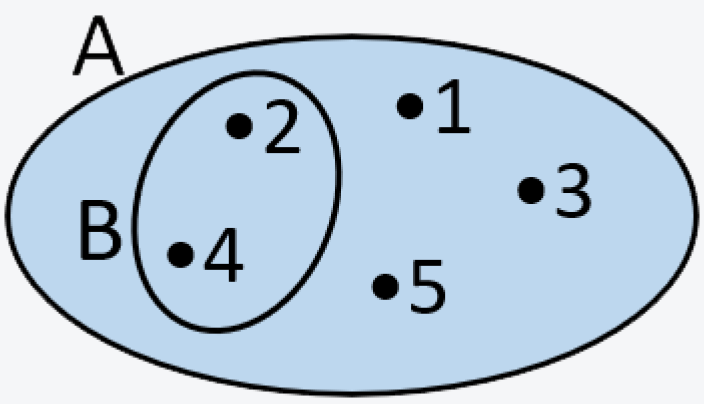
- **Uniendo el conjunto vacío:**

Notar que $A \cup \emptyset = A$ para cualquier conjunto A. Esto ocurre ya que, al unir con el conjunto vacío, no se agrega ningún elemento.

- **Uniendo un subconjunto:**

Si $B \subseteq A$ entonces $A \cup B = A$, ya que los elementos de B no agregan nada nuevo al conjunto "mas grande", que es A.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 4\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$.



4. Intersección entre conjuntos

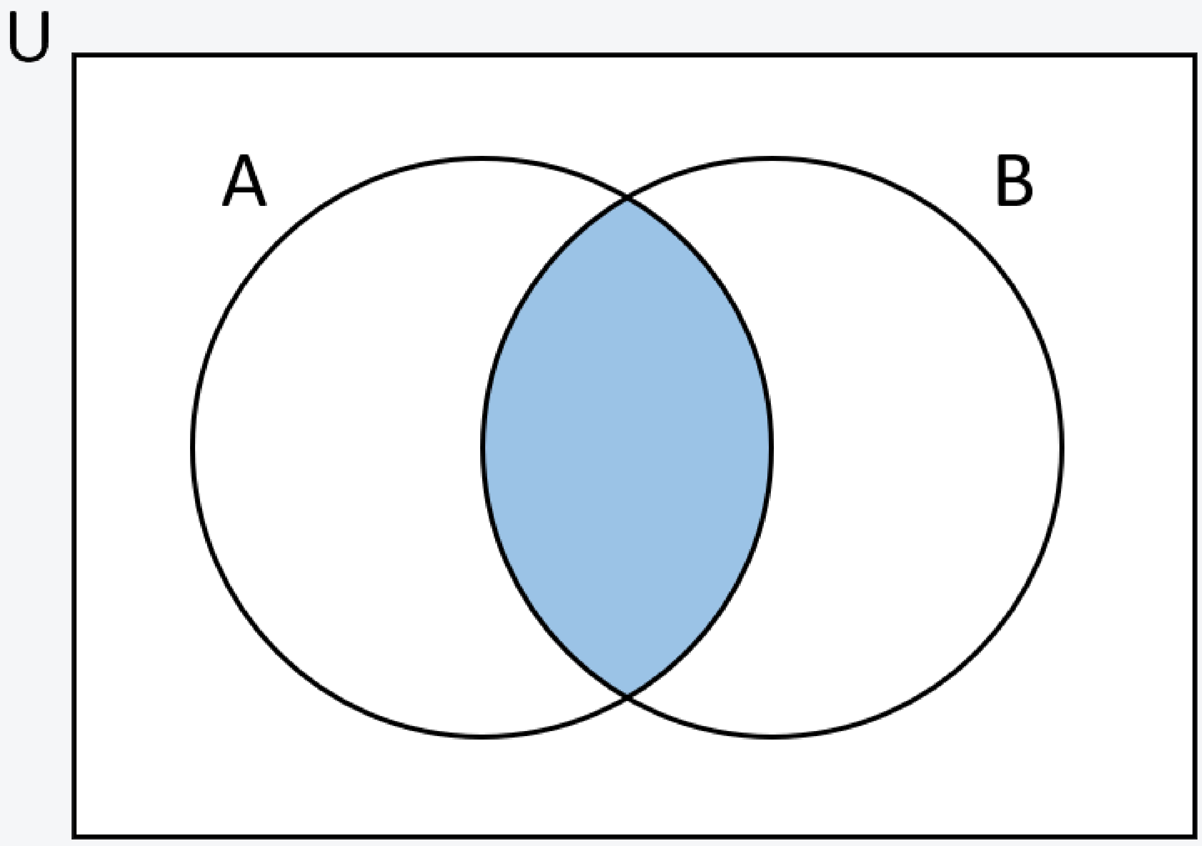
La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que son comunes a A y a B, esto es, de aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B. Se denota la intersección de A y B por:

$$A \cap B$$

que se lee "A intersección B ". En símbolos se indica de la siguiente manera:

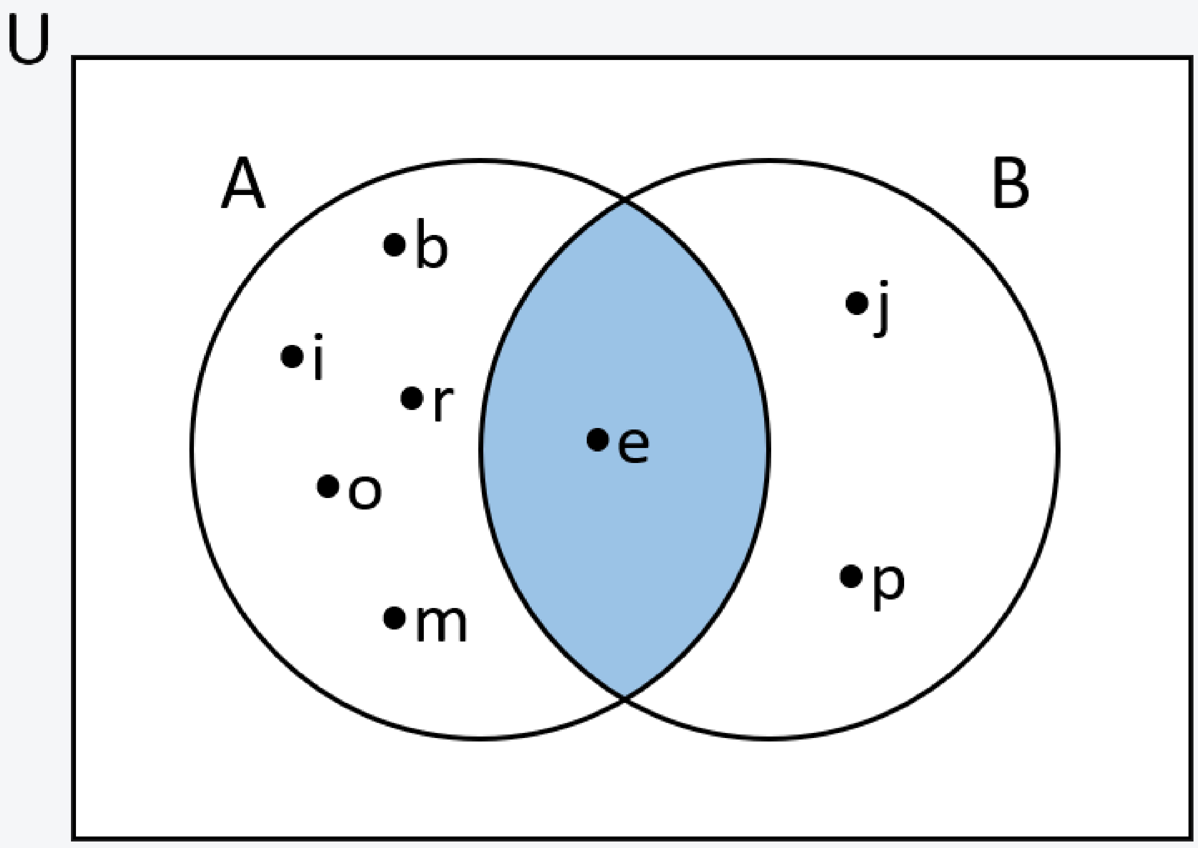
$$A \cap B = \{x : x \in A \; y \; x \in B\}$$

En el siguiente diagrama de Venn se ha pintado $A \cap B$, que es el área común a ambos conjuntos:



Como antes, la intersección de más de dos conjuntos se define de la misma manera. Si $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son conjuntos **disjuntos** .

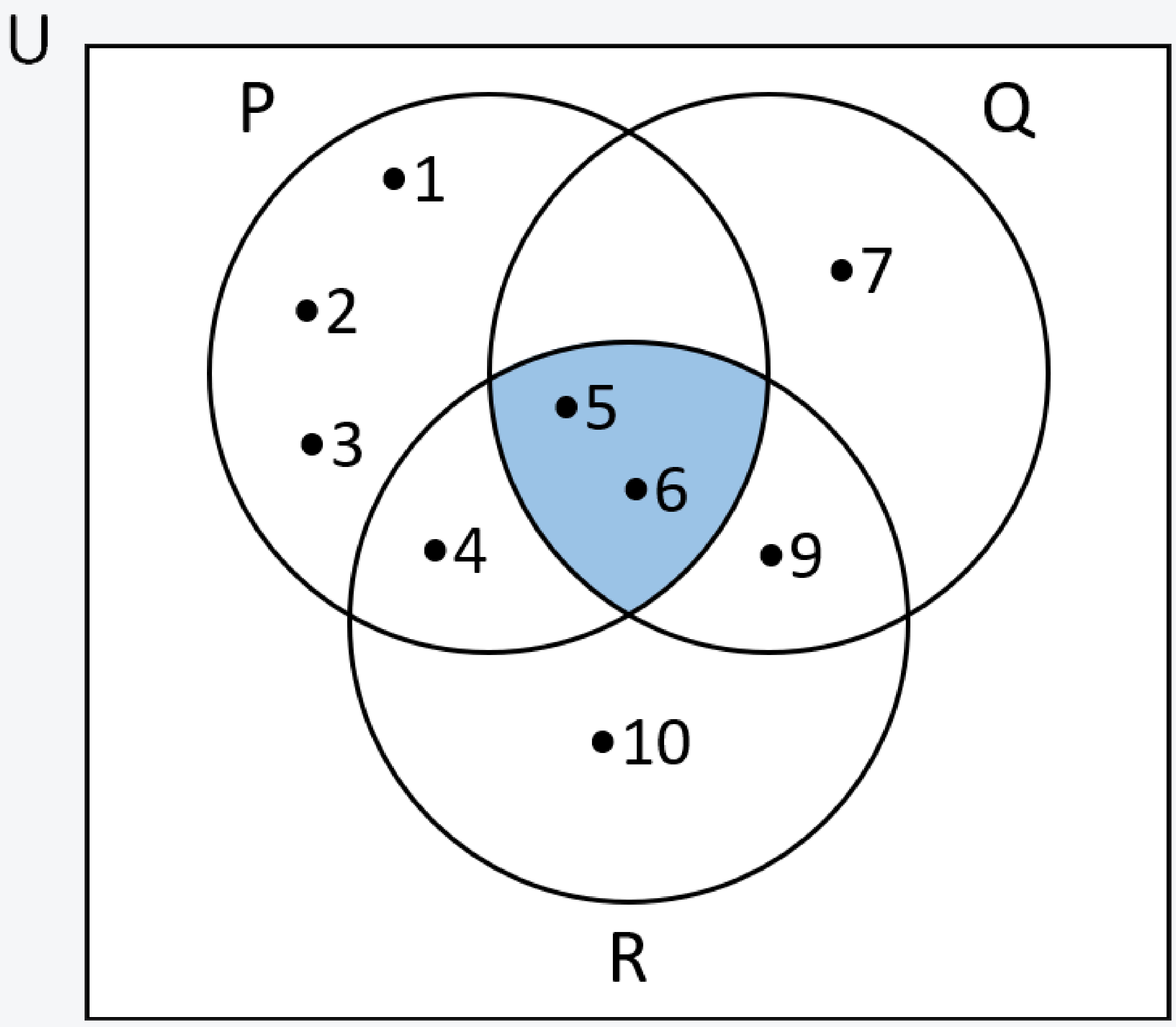
Ejemplo 1:
Consideremos los conjuntos A y B del ejemplo 1 anterior, es decir, $A = \{b, i, r, o, m, e\}$ y $B = \{j, p, e\}$.
Luego, $A \cap B = \{e\}$, ya que el elemento "e" es el único que pertenece a ambos conjuntos. Gráficamente, $A \cap B$ es la zona sombreada:



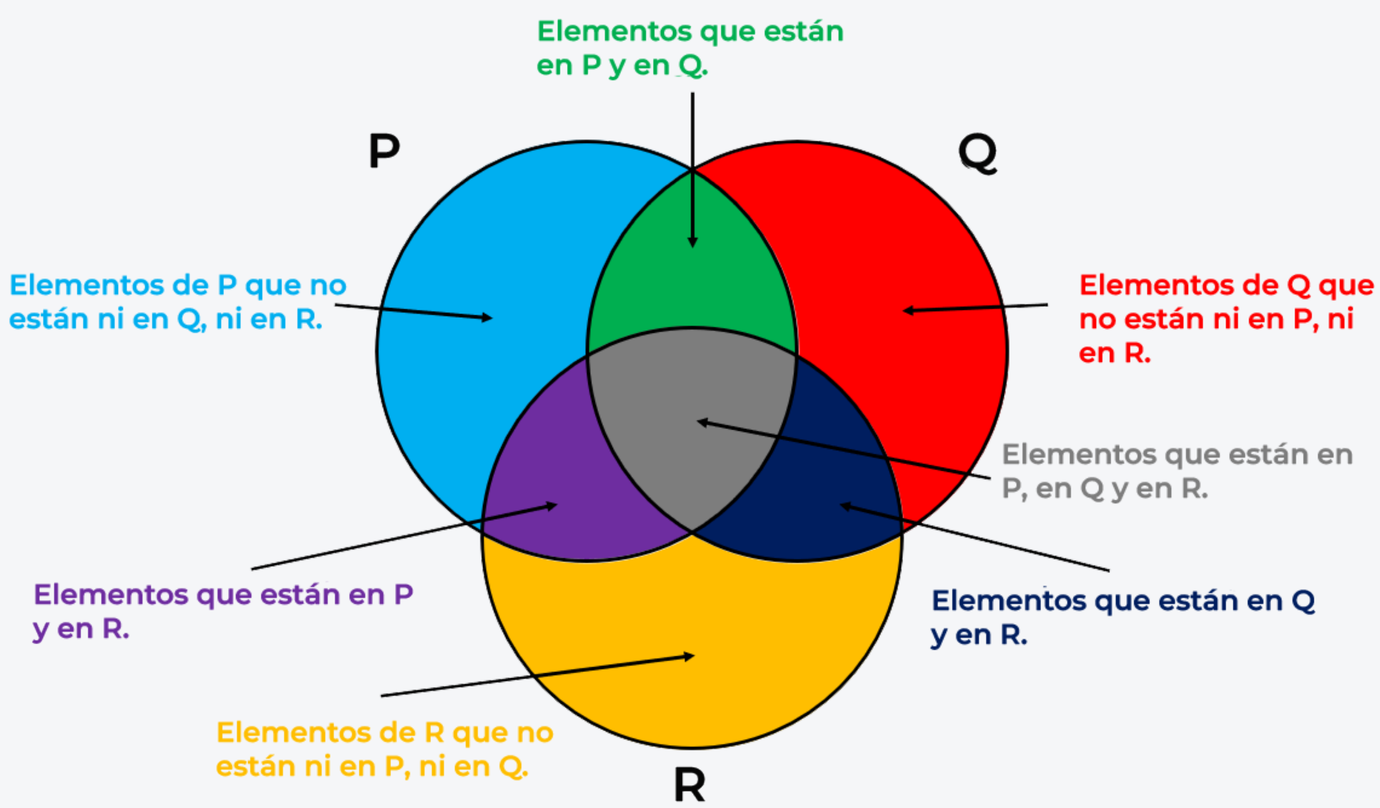
Ejemplo 2:

Sean los conjuntos $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Q = \{5, 6, 7, 9\}$ y $R = \{4, 5, 6, 9, 10\}$, entonces:

$$P \cap Q \cap R = \{5, 6\}$$

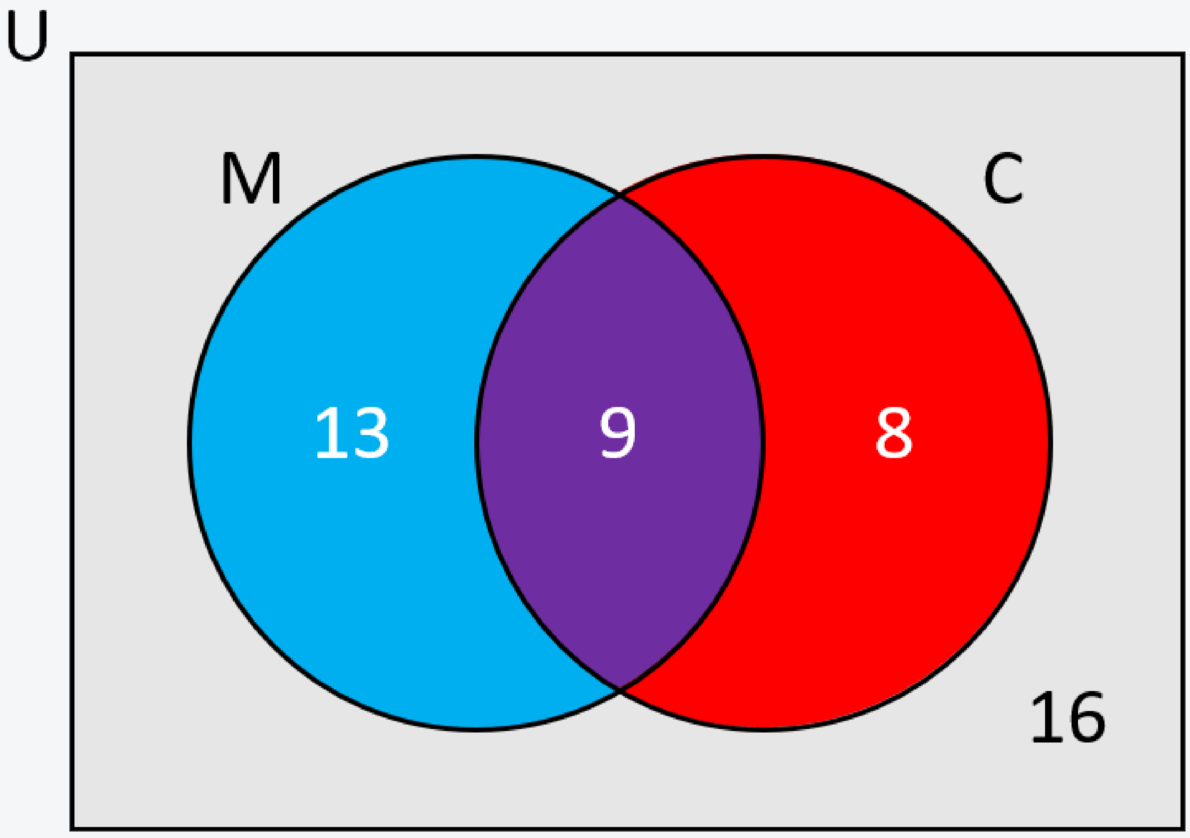


Vamos a explicar las zonas del diagrama de Venn anterior:



Volviendo a nuestro problema 2 "El gimnasio de Pepe".

La intersección entre conjuntos aparece cuando se pregunta por cuántas personas hacen musculación y CrossFit. Para responderla, debemos pensar en los elementos que están en el conjunto M y en el conjunto C. De ahí que la respuesta correcta es 9.



Algunas intersecciones particulares

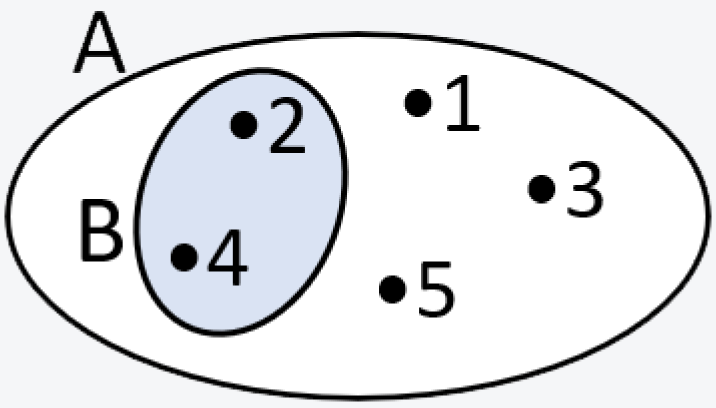
- **Intersecando con el conjunto vacío:**

Notar que $A \cap \emptyset = \emptyset$ para cualquier conjunto A, pues ningún elemento está en el conjunto vacío.

- **Intersecando con un subconjunto:**

Si $B \subseteq A$ entonces $A \cap B = B$, ya que todos los elementos de B pertenecen también al conjunto "más grande" A.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 4\}$, entonces se tiene que $A \cap B = \{2, 4\} = B$.



5. Diferencia entre conjuntos

Llamamos diferencia entre dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B. Denotamos a este conjunto con $A - B$. En símbolos, esto se escribe como:

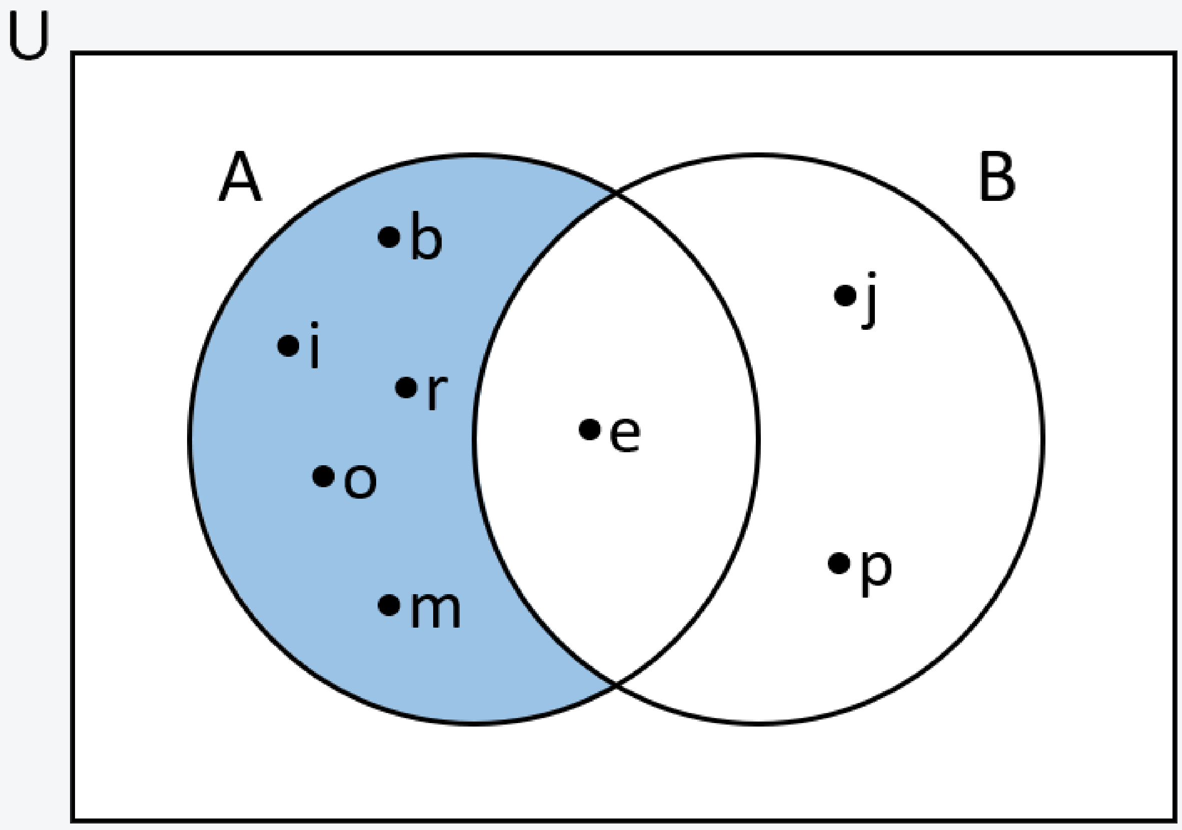
$$A - B = \{x : x \in A \; y \; x \notin B\}$$

En palabras, el conjunto $A - B$ se forma con todos los elementos de A, a los cuales les "quitamos" los que a su vez pertenecen a B. De esta definición se observa que $A - B$ es un subconjunto de A: $A - B \subseteq A$.

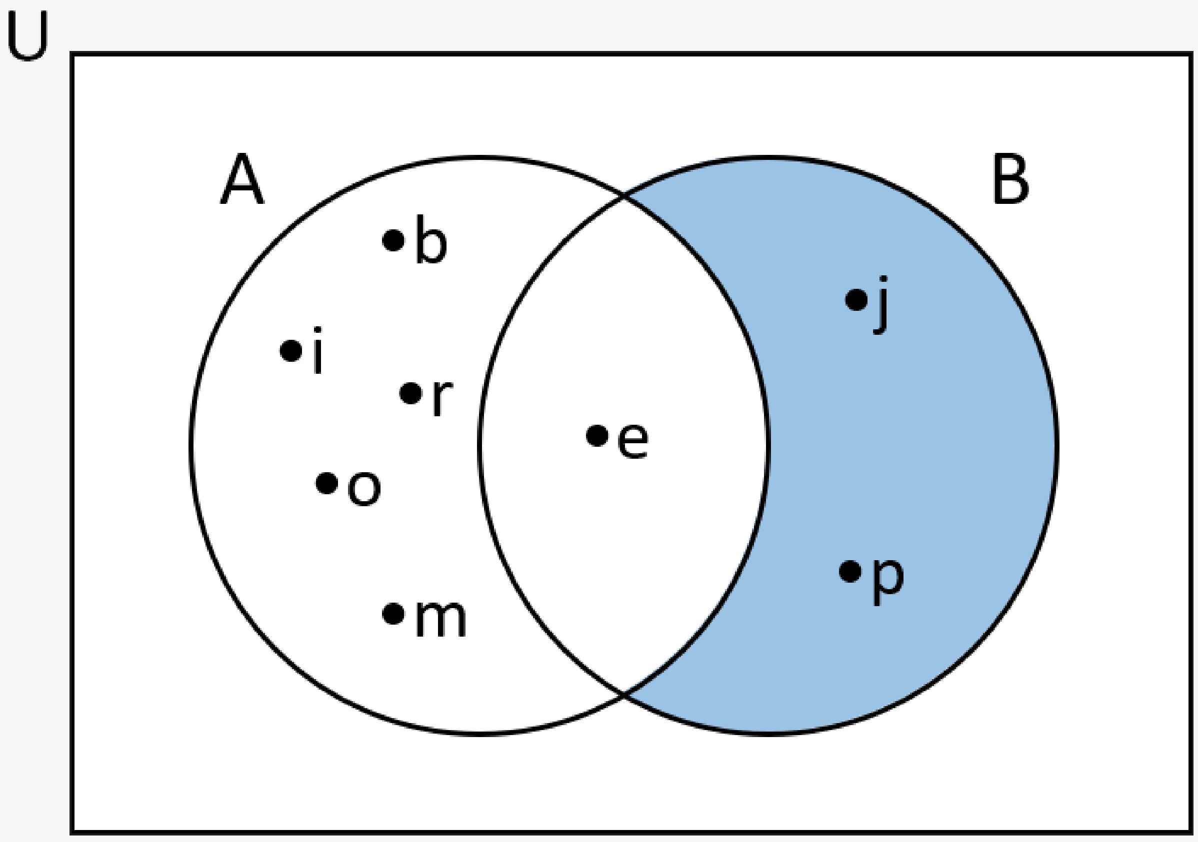
Ejemplo 1:

Consideremos los conjuntos A y B de los ejemplos anteriores, es decir, $A = \{b, i, r, o, m, e\}$ y $B = \{j, p, e\}$

Luego, $A - B = \{b, i, r, o, m\}$. Gráficamente, $A - B$ es la zona sombreada:



Notar que en las operaciones anteriores (unión e intersección), no importaba el orden en que aparecen los conjuntos. Es decir, $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$. Sin embargo, en la diferencia de conjuntos sí importa el orden: no es lo mismo $A - B$ que $B - A$. Para verlo, es suficiente con observar que en el ejemplo anterior tenemos que $B - A = \{j, p\}$, que corresponde a la zona sombreada en el siguiente diagrama de Venn:



Ejemplo 2:

Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, entonces las siguientes diferencias quedan planteadas:

- $A - B = A$
- $B - A = B$

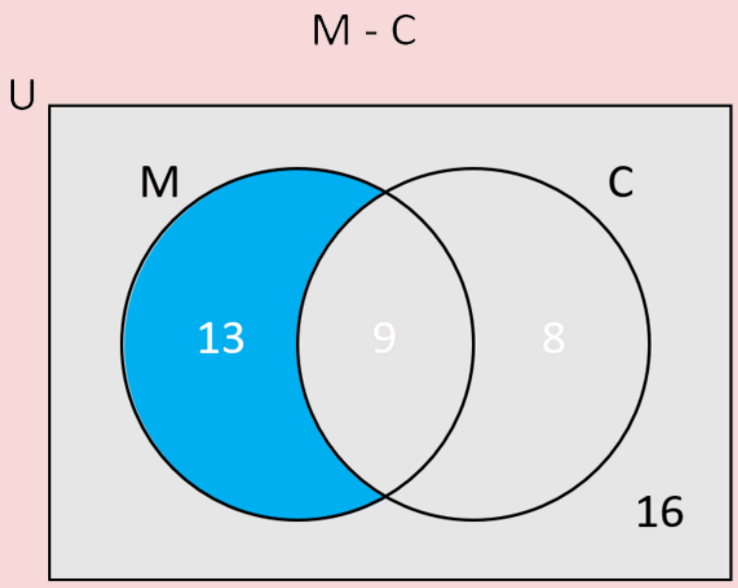
¿Te diste cuenta por qué ocurre esto?

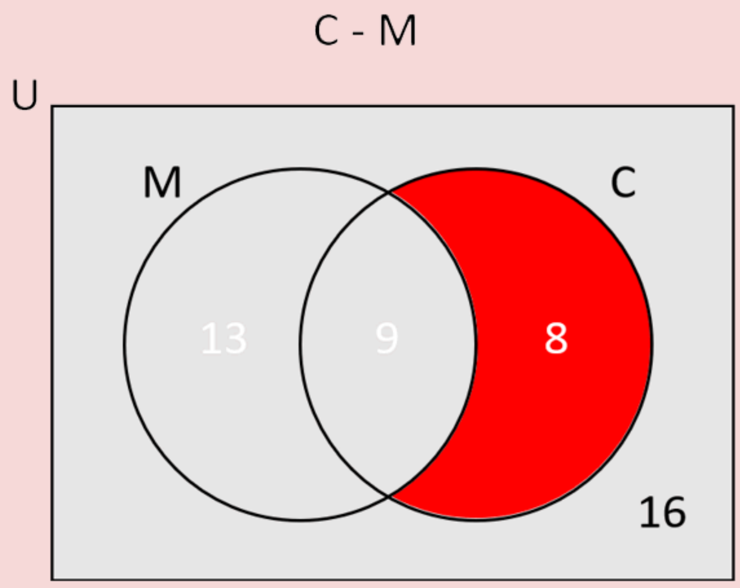
Volviendo a nuestro problema 2 "El gimnasio de Pepe".

La diferencia entre conjuntos aparece en las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas personas hacen musculación pero no CrossFit?
2. ¿Cuántas personas hacen CrossFit pero no musculación?

En estas dos preguntas aparece el concepto de diferencia porque estamos queriendo obtener la cantidad de elementos que están en M pero no en C y los que están en C pero no en M, respectivamente. Por lo tanto, las diferencias quedan planteadas de la siguiente manera:



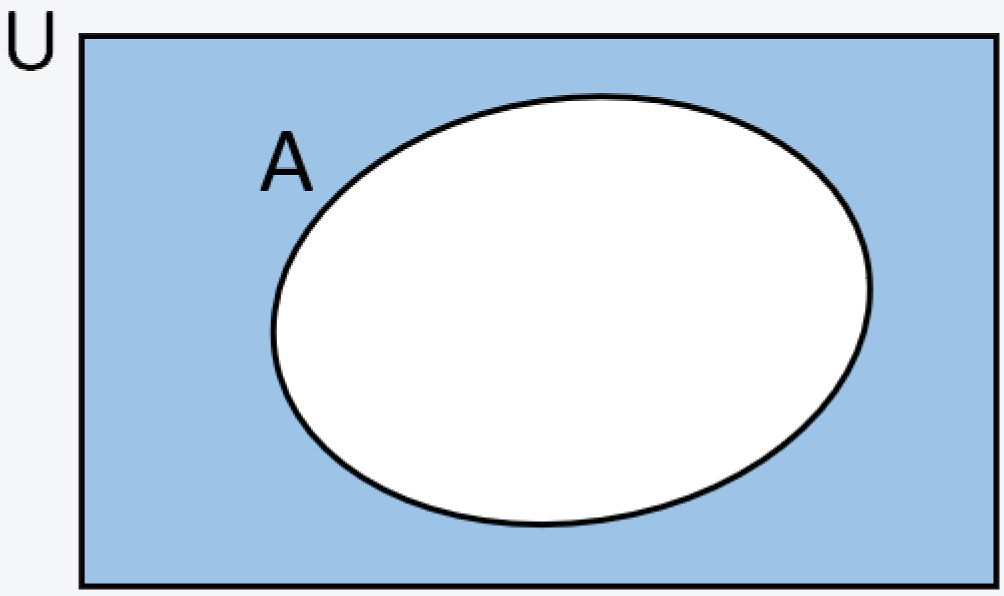


De ahí que las respuestas correctas son: 13 personas hacen musculación pero no CrossFit y 8 personas hacen CrossFit pero no musculación.

6. Complemento de un conjunto

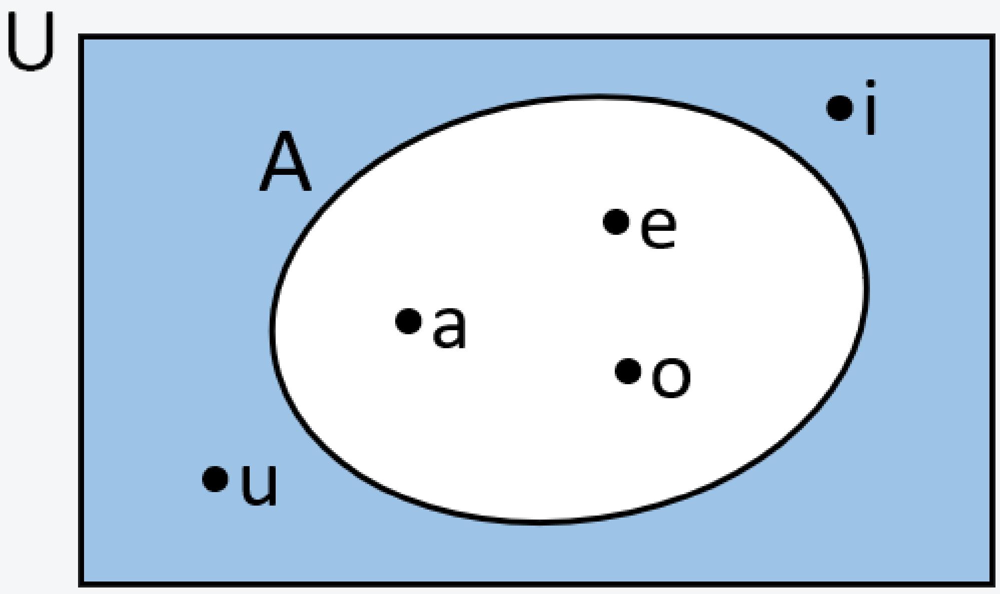
Dados dos conjuntos A y U tales que $A \subseteq U$, el conjunto $U - A$ es llamado el complemento del conjunto A con respecto a U. En otras palabras, es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A. El complemento de A se denota como A^c.

Gráficamente, el complemento de A es la zona sombreada:



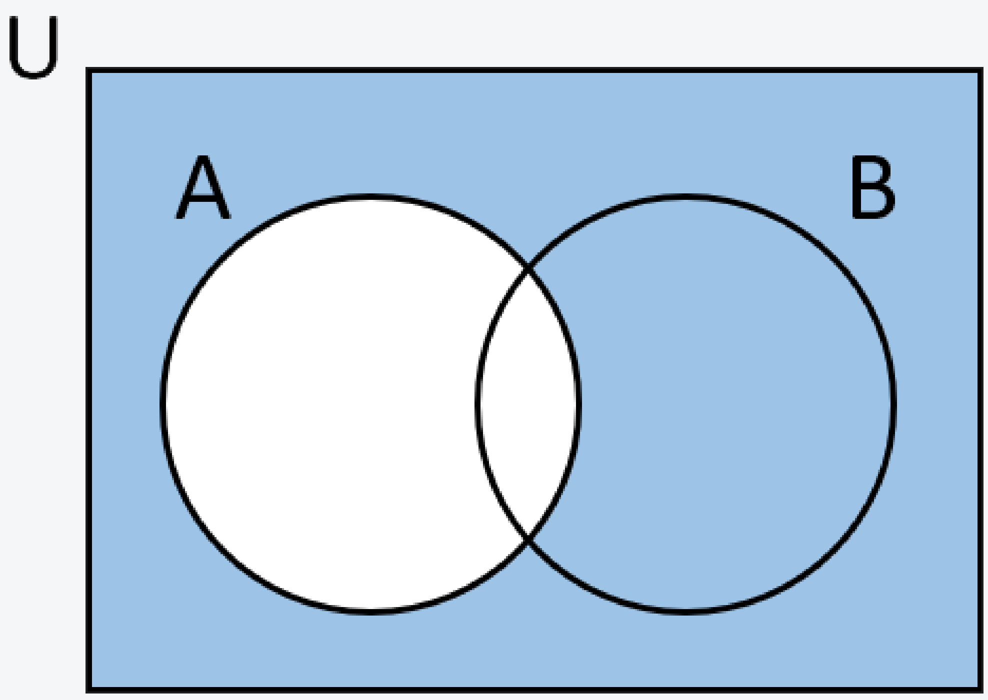
Ejemplo: Consideremos el conjunto $U = \{a, e, i, o, u\}$ de las vocales y $A = \{a, e, o\}$. Entonces, tenemos que:

$$A^c = U - A = \{i, u\}$$

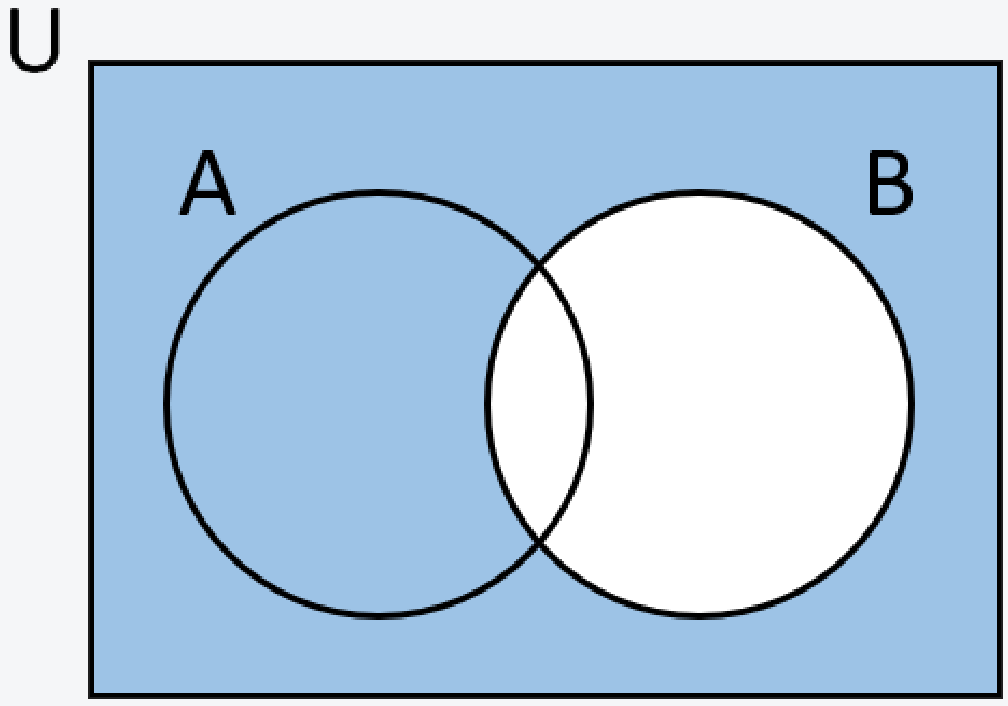


Analicemos los siguientes complementos cuando tenemos dos conjuntos A y B:

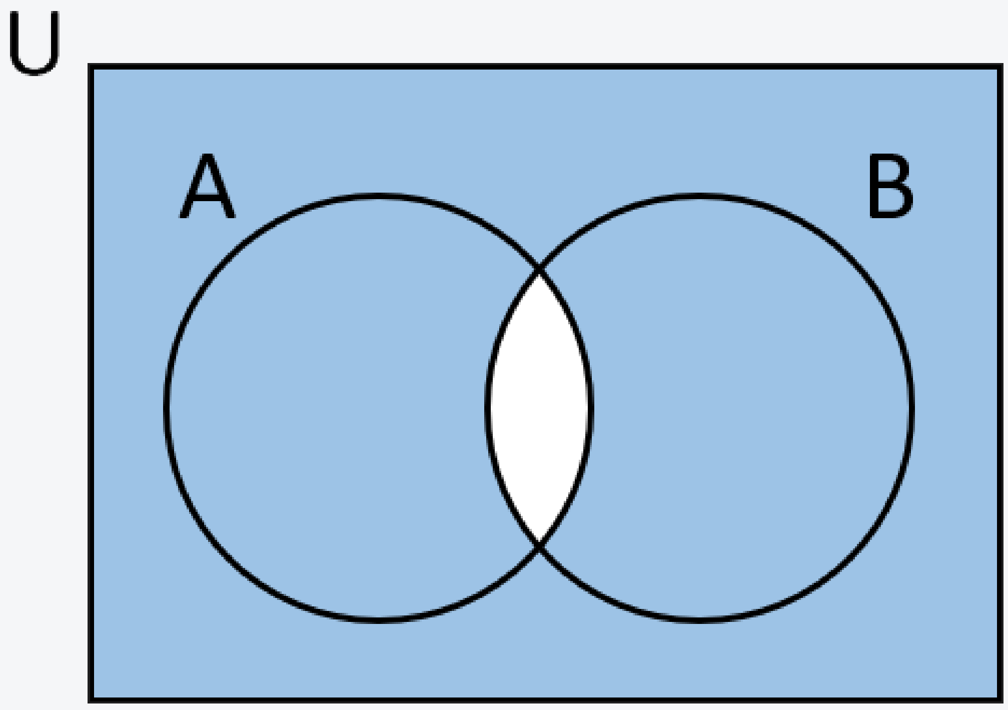
- El complemento de A:



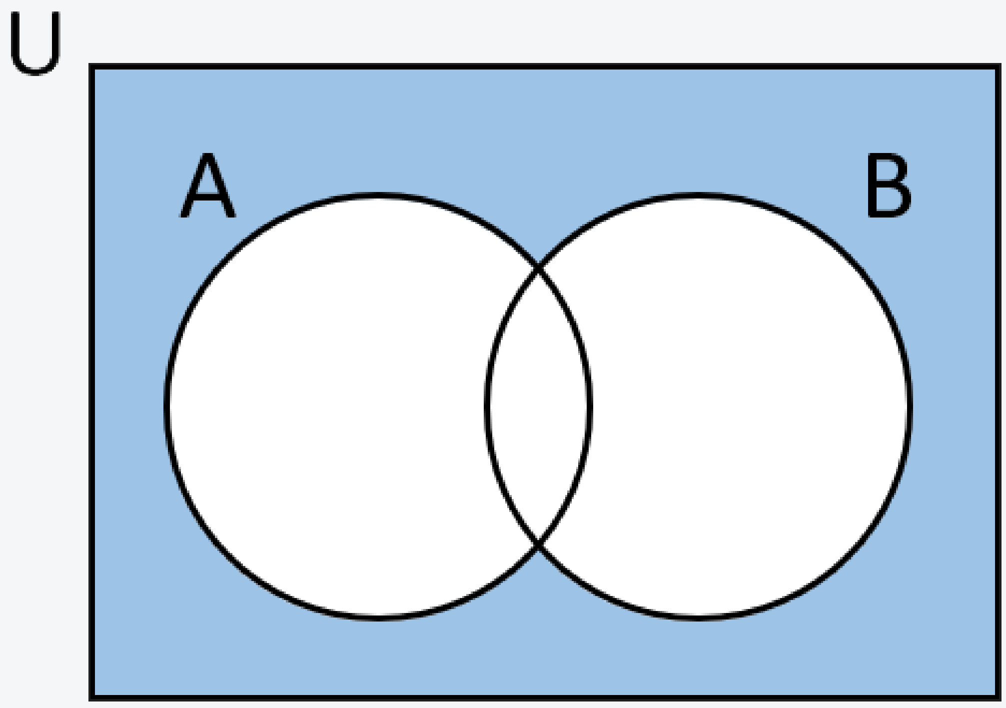
- El complemento de B:



- El complemento de $A \cap B$:



- El complemento de $A \cup B$:



Recordá que el complemento es la parte sombreada en cada caso.

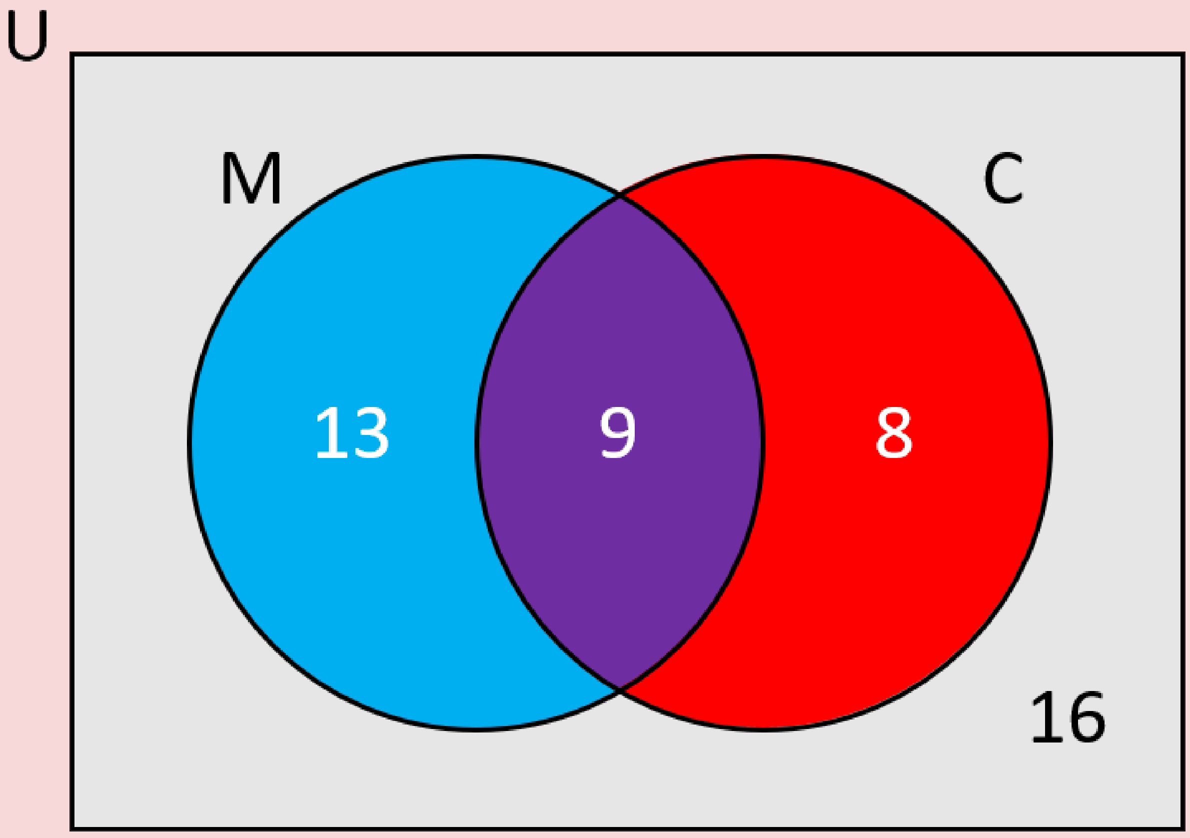
Volviendo a nuestro problema 2 "El gimnasio de Pepe".

El complemento de un conjunto aparece en la siguiente pregunta:

¿Cuántas personas hacen otro entrenamiento que no sea ni musculación, ni CrossFit?

Debemos pensar en el complemento de la unión entre los conjuntos M y C, ya que buscamos la cantidad de personas que no hacen ni musculación, ni CrossFit, ni mucho menos ambos.

Gráficamente, es la parte gris que ya hemos considerado antes:



Por eso, la respuesta correcta es que 16 personas realizan otro entrenamiento que no sea ni musculación, ni CrossFit.