Optique du cours
Théorie des Graphes

- Introduire la terminologie et les concepts de base
- Découvrir les problèmes et les algorithmes les plus importants
- Apprendre à raisonner dans les graphes

Plan du cours
Théorie des Graphes

- Définitions et concepts de base
- Arbres et arborescences
- Problèmes de plus courts chemins
- Ordonnancement

Définitions et concepts de base

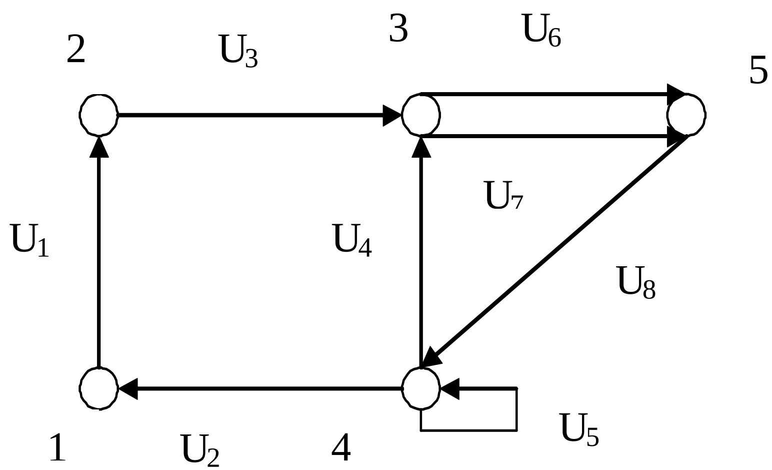
Graphes Orientés

D1: **Un graphe Orienté** G=(X,U) est défini par la donnée d'un ensemble X (avec $|X| > 1$) dont les éléments sont appelés des **sommets** ou des **nœuds** et d'un ensemble U (avec $|U| \geq 0$) dont les éléments $u \in U$ sont des **arcs** et correspondent à des couples ordonnés de sommets.

R1: Dans toute la suite on ne considère que des graphes finis pour lesquels X et U sont des ensembles finis. Si $|X| = n$ (resp. $|U| = m$), on dit que le graphe G est **d'ordre n** (resp. de **taille m**).

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

<u>Exemple de graphe orienté</u> :



Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

D3 : Si $G = (X,U)$ est un graphe et si $u = (i,j)$ est un arc de G alors i est l'**extrémité initiale** de l'arc $u = (i,j)$, j est l'**extrémité terminale** de l'arc $u = (i,j)$. Et on pose : $i = I(u)$ et $j = T(u)$. L'arc u est une **boucle** si $i = j$.

D4 : On dit que j est un **successeur** de i, s'il existe un arc ayant **i** comme extrémité initiale et **j** comme extrémité terminale. L'ensemble des successeurs d'un sommet $i \in X$ est noté : $\Gamma^+(i)$.

On dit que j est un **prédécesseur** de i, s'il existe un arc de la forme (j,i). L'ensemble des prédécesseurs de $i \in X$ est noté : $\Gamma^-(i)$.

$\Gamma^+(i) \cup \Gamma^-(i)$ est appelé ensemble des **voisins** de i.

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

D 4 : Etant donné un Graphe G = (X,U) et un arc u = (i,j) on dit que :

- i et j sont deux sommets **adjacents.**
- i et j sont **incidents** à l'arc u = (i,j).
- L'arc u = (i,j) est **incident** aux sommets i et j.
- Deux arcs sont **adjacents** s'ils sont incidents à un même sommet.

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

D5 : Soit x un sommet d'un graphe G = (X,U), on pose :

$d_G^+(x) = |\{u \in U / \ I(u) = x\}|$: le nombre d'arcs dont x est l'extrémité initiale. $d_G^+(x)$ est appelé le **demi degré extérieur du sommet x**.

$d_G^-(x) = |\{u \in U / \ T(u) = x\}|$: le nombre d'arcs dont x est l'extrémité terminale. $d_G^-(x)$ est appelé le **demi degré intérieur du sommet x**.

$d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$: le nombre d'arcs adjacents au sommet x. $d_G(x)$ est appelé le **degré du sommet x**.

Cas particuliers : **sommet isolé**, **sommet pendant**

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

T1 : Soit G = (X,U) un graphe. On a :

$$\sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x) = |U|$$

C1 : Dans un Graphe G = (X,U), on a :

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = 2 * |U|$$

C2 : Dans un Graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

D6 : Soit G = (X,U) un graphe. Etant donné $A \subset X$ et $V \subset U$. On appelle :

Sous-graphe engendré par A le Graphe G_A dont les sommets sont les éléments de A et dont les arcs sont les arcs de G ayant leurs deux extrémités dans A.

Graphe partiel engendré par V le Graphe ayant le même ensemble X de sommets que G, et dont les arcs sont les arcs de V.

Sous graphe partiel engendré par A et V le graphe dont les sommets sont les éléments de A et dont les arcs sont les arcs de V ayant leurs deux extrémités dans A.

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

D7: Deux **Graphes** G' =(X',U') et G"=(X",U") sont **isomorphes** s'il existe 2 bijections B_x : X' → X" et B_u : U' → U" telles que 2 arcs qui se correspondent dans la bijection B_u aient pour extrémités initiales et terminales des sommets qui se correspondent dans la bijection B_x.

D8 :Soient e et v deux arcs distincts et x,y deux sommets d'un Graphe, alors si e = (x,y) = v on dit que e et v sont deux **arcs parallèles**. Un **graphe** sera dit **Simple** s'il est sans boucles et sans arcs parallèles.

Définitions et concepts de base

Graphes Orientés

Exemple de graphes isomorphes :

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

R2: A tout graphe Simple G=(X,U), on peut faire correspondre une relation binaire et une seule et réciproquement. Il suffit de poser :

$$(x,y) \in U \iff x\,R\,y$$

D9 : Un graphe Simple G = (X,U) est dit :

- Symétrique si $(i,j) \in U \Rightarrow (j,i) \in U$
- Antisymétrique si $(i,j) \in U \Rightarrow (j,i) \notin U$
- Transitif si $(i,j) \in U, (j,k) \in U \Rightarrow (i,k) \in U$

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

D10 : Soit $G = (X,U)$ un Graphe et $x, y \in X$.
Une **chaîne** de **longueur q** joignant x à y dans G est une séquence de q arcs de G ($q \geq 1$) telle que :

1. Le premier arc u_1 de la séquence est incident à x par une de ses extrémités et au second arc u_2 de la séquence par son autre extrémité.
2. Le dernier arc de la séquence est incident à y par une de ses extrémités et à l'avant dernier arc de la séquence par son autre extrémité.
3. Chaque arc intermédiaire de la séquence est incident au précédent par une de ses extrémités et au suivant par l'autre extrémité.

Définitions et concepts de base

Graphes Orientés

D11: Une chaîne entre x_0 et x_q est une séquence alternée de sommets et d'arêtes de la forme : $s_0u_1s_1u_2\ldots u_{q-1}s_{q-1}u_qs_q$ où chaque arc u_i est incident aux sommets s_{i-1} et s_i .

Cas particuliers : **chaîne simple**, **chaîne élémentaire, cycle, cycle élémentaire .**

Définitions et concepts de base

Graphes Orientés

R3 : On dit couramment que la chaîne C joint les sommets x_0 et x_q .

R4 : Une chaîne élémentaire est évidemment Simple.

R5 : Un cycle peut être démarré de n'importe lequel de ses sommets.

R6 : Un cycle élémentaire est un cycle minimal (pour l'inclusion) c'est à dire ne contenant strictement aucun autre cycle

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

D12 : Soit $G = (X,U)$ un Graphe et $x, y \in X$.
Une **chemin** de **longueur q** joignant x à y dans G est une séquence de q arcs de G ($q \geq 1$) telle que :

1. L'extrémité initiale du premier arc de la séquence est x.
2. L'extrémité terminale du dernier arc de la séquence est y.
3. L'extrémité initiale de chaque arc de la séquence (sauf le premier) coïncide avec l'extrémité terminale de l'arc précédent.

R7 : Un chemin est une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens.

Définitions et concepts de base

Graphes Orientés

D13: Un chemin de x_0 à x_q est une séquence alternée de sommets et d'arcs de la forme : $s_0u_1s_1u_2\ldots u_{q-1}s_{q-1}u_qs_q$ telle que :

$I(u_i) = s_{i-1}$ et $T(u_i) = s_i$

Cas particuliers : **chemin simple**, **chemin élémentaire, circuit, circuit élémentaire.**

Définitions et concepts de base

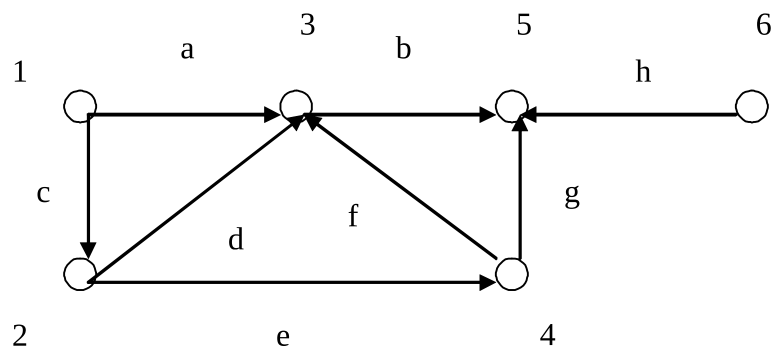
Graphes Orientés

R8 : Un Chemin élémentaire est évidement simple.

R9 : Soient x_i et x_j deux sommets appartenant à un même circuit alors il existe un chemin de x_i à x_j et un chemin de x_j à x_i.

Définitions et concepts de base
Graphes Orientés

Exemples :

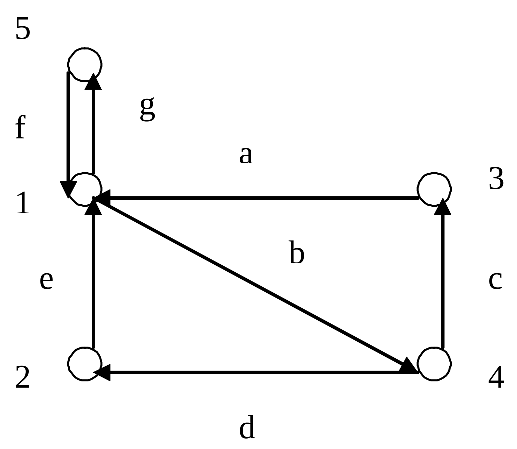


(a,f,g,b,f,e), (c,d,f,e), (a,b,g,e), (a,b,g,f,d,c),(b,g,f),(a,d,e,f,d,c) ?

Définitions et concepts de base

Graphes Orientés

Exemples :



(d,e,a), (d,e,b,c), (f,b,d), (b,c,a), (f,b,d,e,g) ?

Définitions et concepts de base

Connexité

D 14 : On définit la relation binaire de **Connexité** sur l'ensemble des sommets X d'un graphe G =(X,U) par :

$$x \, C \, y \iff \begin{cases} \text{Soit } \; x = y \\ \text{Soit } \; \text{il existe une chaine joignant x et y.} \end{cases}$$

Terminologie : **composantes connexes, nombre de connexité d'un graphe, graphe connexe.**

Définitions et concepts de base

h-connexité, connectivité

D15: Un Graphe connexe G est dit **h-connexe** (resp. **h-arc connexe**) si la suppression de tout ensemble de (h-1) sommets (ou moins) et des arcs incidents à ses sommets (resp... la suppression de tout ensemble de (h-1) arcs ou moins) ne disconnecte pas G.

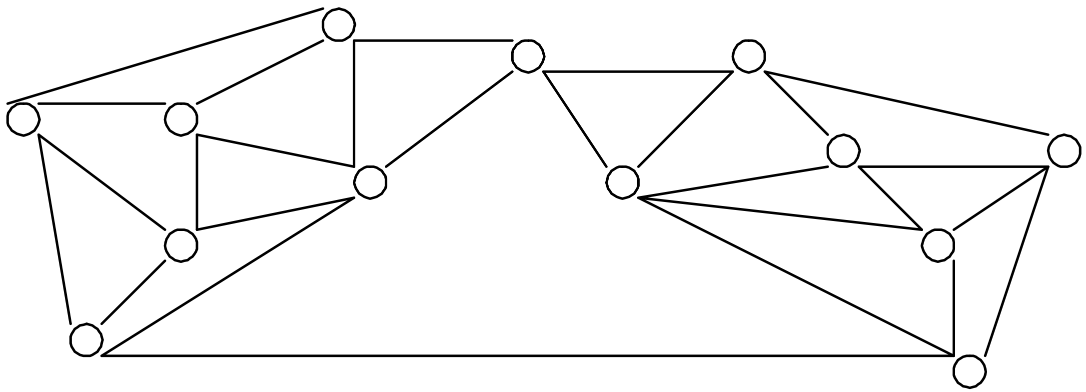
D16 : La **connectivité** (resp.. **l'arc-connectivité**) d'un graphe G est la valeur maximum pour laquelle G est h-connexe (resp. h-arc connexe). C'est donc le nombre minimum de sommets (resp.. d'arcs) qu'il faut supprimer pour disconnecter le graphe.

Terminologie : **ensemble d'articulation, point d'articulation, isthme**

Définitions et concepts de base

h-connexité, connectivité

- Exemple :



Définitions et concepts de base

Forte-connexité

D 17 : On définit la relation binaire de **Connexité forte** sur l'ensemble des sommets X d'un graphe G =(X,U) par :

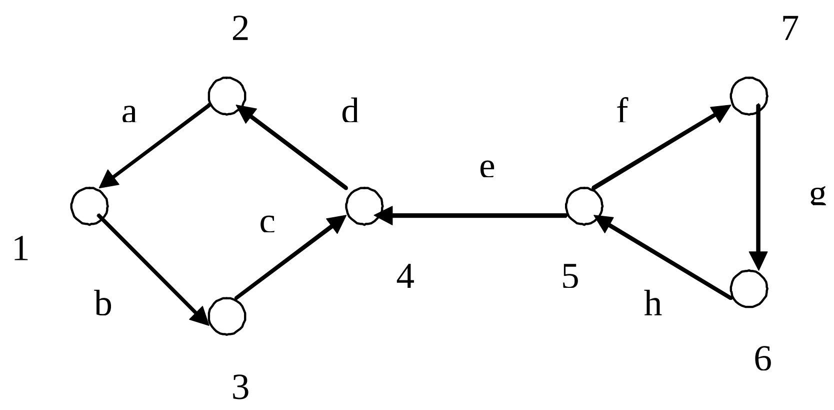
$$x \ \hat{C} \ y \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Soit} \quad x = y \\ \text{Soit il existe dans G un chemin de x à y et un chemin de y à x.} \end{cases}$$

Terminologie : **composantes fortement connexes, nombre de Connexité forte d'un graphe, graphe fortement connexe, graphe réduit.**

Définitions et concepts de base

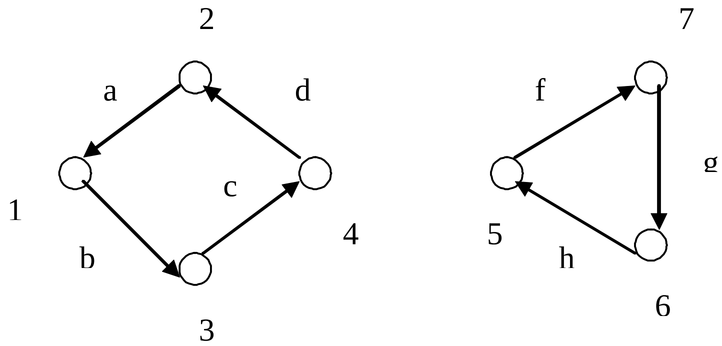
Forte-connexité

- Exemple :



- G est connexe mais non fortement connexe
- G n'est ni 2-connexe ni 2-arc connexe

- **<u>Exemple (suite)</u>** :
- G a 2 composantes fortement connexes :



- Le graphe réduit de G est :

Détermination des composantes fortement connexes d'un Graphe.

i) **Algorithme pour déterminer une composante fortement connexe d'un Graphe G contenant le sommet a :**

1- Donner à **a** les marques **+** et **-**; Aller en 2).

2- Marquer d'un **+** *tout* successeur non encore marqué d'un sommet déjà marqué **+.**

3- Marquer d'un **-** *tout* prédécesseur non encore marqué - d'un sommet déjà marqué **-**.

4- Les sommets marqués à la fois **+** et **-** constituent la composante fortement connexe contenant **a**.

ii) **Pour déterminer une 2ème composante fortement connexe éventuelle de G**, on répète la procédure ci dessus à partir d'un sommet n'appartenant pas à la première. En répétant au besoin, on détermine toutes les composantes fortement connexes de G.

Matrices d'adjacence et d'incidence

D 18 : La matrice d'adjacence $X = [x_{ij}]$ d'un graphe G non orienté et sans arêtes parallèles et comportant n sommets est une matrice carrée de type n , n dont chaque rangée et chaque colonne correspondent à un sommet et dont les éléments sont définis comme suit :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête entre i et j} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

D 19 : La matrice d'incidence $A = [a_{ij}]$ d'un graphe orienté G sans boucles de n sommets et de m arcs est une matrice de type n , m dont chaque ligne correspond à un sommet et chaque colonne à un arc et dont les éléments sont définis comme suit :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le jème arc sort du sommet i} \\ -1 & \text{si le jème arc arrive au sommet i} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Matrices d’adjacence et d’incidence (Suite)

Théorème2 :

Soit X La matrice d'adjacence d'un graphe G non orienté et sans arêtes parallèles et comportant n sommets. Alors la matrice binaire $X^{(p)}$ (p =1,2,...) définie à partir de **l'addition et de la multiplication de l'algèbre de Boole** est telle que :

$$X_{ij}^{(p)} \equiv (X^{p})_{ij} = 1 \Leftrightarrow (\text{ il existe une chaîne de p arêtes exactement reliant les ième et jème sommets de G })$$

Matrices d'adjacence et d'incidence (Suite)

Corollaire 1 :

Dans un graphe G de n sommets et de matrice d'adjacence X, il existe (au moins) une chaîne reliant les sommets distincts i et j si et seulement si le terme y_{ij} de la matrice

$$Y = X \oplus X^2 \oplus X^3 \oplus \dots \oplus X^{n-1} \text{ est différent de } 0$$

Corollaire 2 :
Un graphe G de n sommets et de matrice d'adjacence X, est connexe si et seulement si la matrice Y ne contient pas de terme non diagonal nul.

Matrices d’adjacence et d’incidence (Suite)

R10 :

Le théorème et ses deux corollaires s'appliquent pour un graphe orienté sans arcs parallèles, il suffit de remplacer le terme chaîne par chemin et connexe par fortement connexe

Théorème3 :

La matrice d'incidence B d'un graphe orienté sans boucle est **totalement unimodulaire** c'est à dire que le déterminent de toute sous matrice carrée de A vaut +1,-1 ou 0.

Serie : 1

Exercice 1

a- Montrer que, tout chemin (resp. chaîne) élémentaire est simple.

b- Montrer que si dans un graphe G, il existe un chemin (resp. chaîne) du sommet **x** au sommet **y**, alors il existe un chemin (resp. chaîne) élémentaire de **x** à **y**.

c- Montrer que tout circuit (resp. cycle) est union disjointe au sens des arcs (resp. arêtes) de circuits (resp. cycles) élémentaires.

Exercice 2

Montrer que si G = (X, E) est connexe alors pour toute arête e de G ,
G’ = (X, E – {e}) a au plus 2 composantes connexes.

Exercice 3

Montrer que si un graphe a exactement deux sommets de degré impair, alors il existe une chaîne reliant ces deux sommets.

Série : 1

Exercice 4

Montrer que si on a deux chaînes élémentaires distinctes entre deux sommets x et y d'un graphe G alors G contient nécessairement un cycle

Exercice 5

Un cycle d'un graphe comportant toutes les arêtes du graphe est appelé cycle d'Euler. Un graphe contenant un cycle d'Euler est appelé graphe d'Euler.

Montrer que pour un graphe connexe fini G, G est un graphe d'Euler si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair (pour démontrer la condition suffisante, pensez à une preuve par construction).