Le problème du plus court chemin

D1 : Etant donné un graphe orienté G = (X,U) et une application de U dans IR qui à chaque arc fait correspondre sa longueur. La longueur d'un chemin C dans **le réseau R = (X,U,d)** sera égale à la somme des longueurs des arcs qui constituent le chemin C soit :

$$l(C) = \sum_{u \in C} d(u)$$

Convention : Un chemin qui ne comporte aucun arc, a une longueur nulle.

Le problème du plus court chemin

D2 : Le problème du **plus court chemin entre deux sommets i et j :** sera de trouver un chemin μ (i,j) de i à j dont la longueur soit minimum. La longueur de ce plus court chemin quand il existe est appelée **plus courte distance de i à j.**

R1 : Un chemin de i à j dans un réseau R = (X,U,d) est un plus long chemin si et seulement si c'est un plus court chemin dans (X,U,-d).

D3 : Pour un problème de plus court chemin un circuit C tel que $\sum_{u \in C} d(u) < 0$ est appelé **circuit absorbant.**

Le problème du plus court chemin

T1 : Pour qu'un chemin de longueur minimum joignant un sommet **i** à un sommet **j** dans un réseau R = (X,U,d) existe il faut et il suffit que :

i) l'ensemble Y des sommets qui sont à la fois des descendants de i et des ascendants de j soit non vide.

ii) le sous réseau construit sur Y ne contienne pas de circuit absorbant.

R2 : Le théorème affirme, qu'en l'absence de circuit absorbant entre 2 sommets i et j, la recherche d'un plus court chemin entre i et j revient à la recherche d'un plus court chemin élémentaire entre i et j.

Le problème du plus court chemin

T 2 : Soit C un plus court chemin, dans le réseau R = (X,U,d), d'un sommet i à un sommet j et soit Cxy la portion de ce chemin située entre deux sommets x et y. Alors Cxy est un plus court chemin de x à y.

T 3 : Soit un réseau R = (X,U,d) sans circuit absorbant et admettant le sommet s comme racine. A chaque sommet x on associe la longueur $\pi(x)$ d'un plus court chemin de s à x dans R (ou encore plus courte distance de s à x). On a :

i) $\pi(s) = 0$

ii) $\pi(T(u)) - \pi(I(u)) \leq d(u) \quad \forall u \in U$

Réciproquement un système de potentiels $\pi(x)$ satisfaisant $\pi(s)=0$ et les inéquations (ii) constitue un ensemble de bornes inférieures des longueurs des plus court chemins de s à x dans R.

Le problème du plus court chemin

T 4 : Soit un réseau $R=(X,U,d)$ sans circuit absorbant et admettant le sommet s comme racine. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de potentiels π représente les plus courtes distances sur le réseau $R=(X,U,d)$ entre le sommet s et tous les autres sommets est que :

(i) $\pi(s) = 0$

(ii) $\pi(T(u)) - \pi(I(u)) \leq d(u) \qquad \forall u \in U$

(iii) $U' = \{u \in U / \pi(T(u)) - \pi(I(u)) = d(u)\}$ admet le sommet s comme racine.

Le problème du plus court chemin

Conséquences :

- Tout arc d'un plus court chemin quelconque de s à n'importe quel sommet appartient à U'.
- Si π (T(u)) - π (I(u)) < d(u), u n'est sur aucun plus court chemin entre s et T(u).
- Tout chemin de s à un sommet quelconque z dans (X,U') est un plus court chemin de s à z.
- Si π (T(u)) - π (I(u)) = d(u), il existe au moins un plus court chemin entre s et T(u) contenant u.

R3 : Les résultats ci dessus permettent de ramener la recherche de l'ensemble des plus courts chemins issus de s dans un réseau R=(X,U,d) à la recherche de l'ensemble des plus courtes distances.

Le problème du plus court chemin

Les **algorithmes** de résolution seront différents suivant :

les propriétés du graphe :

- $d(u) \geq 0, \forall\ u \in U$
- G est sans circuit
- G et d(u) quelconques.

Et suivant le problème considéré :

- Recherche du plus court chemin d'un sommet à un autre.
- Recherche du plus court chemin d'un sommet à tous les autres.
- Recherche du plus court chemin entre tous les couples de sommets.

Le problème du plus court chemin

Algorithme de Bellman

Hypothèse :

- R=(X,U,d) ne comporte pas de circuit; le test n'est pas fait.
- s est le seul sommet tel que $\Gamma^{-1}(s) = \varnothing$.

But :

Recherche du plus court chemin du sommet s à tous les autres.

Principe :

Il consiste à chercher les plus courtes distances de proche en proche sur les sommets du réseau . On ne calcule la plus courte distance de s à un sommet x que si on a déjà calculé les plus courtes distances de s à tous les prédécesseurs de x. S désigne l'ensemble des sommets pour lesquels on a déjà calculé les plus courtes distances.

Le problème du plus court chemin

<u>Algorithme de Bellman</u> (données: X,U,I,T,d, Résultats: $\prod$, A)

- $S := \{s\}$; $\prod(s) := 0$; $A(s) := -1$;

- Tantqu' il existe $j \in \overline{S}$ tel que $\Gamma^{-1}(j) \subset S$ et $\Gamma^{-1}(j) \neq \varnothing$

  - Poser $\prod(j) = \underset{\{u / T(u) = j\}}{\text{Min}} [\prod(I(u)) + d(u)] = \prod(I(\hat{u})) + d(\hat{u})$;

  - $A(j) := \hat{u}$; $S := S \cup \{j\}$

- FinTantque

Le problème du plus court chemin

Algorithme de Dijkstra

Hypothèse :
R = (X,U,D) est tel que les longueurs sont positives ou nulles. **s** un sommet de R.

But :
Plus courts chemins d'un sommet **s** à ses descendants.

Principe :
Calcule également les plus courtes distances de proche en proche. Comme dans l'algorithme de Bellman l'ensemble S des sommets pour lesquels on a déjà trouvé la sous arborescence des plus courts chemins y aboutissant s'enrichit d'une unité à chaque itération.

Le problème du plus court chemin

Algorithme de Dijkstra : (données: X,U,I,T,d,s; résultats: $\prod$, A)

-S :={s}; $\prod$(s) :=0 ; A(s) :=-1; xpivot :=s ;
$\prod$(x) := $+\infty$ pour tout $x \in X$, $x \neq s$;

-Tantque $S \neq X$ et $\prod(xpivot) < \infty$ faire
pour tout $u \in U$ tel que $I(u) = xpivot$ et $T(u) \notin S$ faire
x :=T(u)
si $\prod(x) > \prod(xpivot) + d(u)$ alors
$\prod(x) := \prod(xpivot) + d(u)$; A(x) : = u;
finsi
fin pourtout
choisir $x \notin S$ tel que $\prod(x) = Min[\prod(y)]$ avec $y \notin S$;
xpivot :=x; S:=S **U** {xpivot};
-Fintantque

Le problème du plus court chemin

Remarques à propos de Dijkstra :

- Si le minimum dans $\prod(x)= \min_{y \notin S}[\prod(y)]$ est atteint par plusieurs valeurs on procède à un choix arbitraire.
- Si ce minimum vaut $+\infty$, tous les sommets de S ne sont pas des descendants de s.
- Si on ne cherche qu'un plus court chemin de s à un sommet x fixé, on arrête aussitôt qu'on a xpivot=x
- Dans Dijkstra, les sommets s'introduisent dans S dans l'ordre de leur (plus courte distance) croissante à s.
- À chaque instant, les $\prod(x)$ désignent la longueur d'un chemin de s à x le plus court dans la sous classe des chemins dont tous les sommets intermédiaires sont dans S.

Le problème du plus court chemin

ALGORITHME GENERAL:

Hypothèse :

- R = (X, U, d) quelconque.
- A un sous ensemble d'arcs tel que (X, A) soit une arborescence de racine s .

But :
Recherche d'une arborescence de plus courts chemins de racine s.

Principe :
Consiste en l'amélioration de l'arborescence (X, A) jusqu'à ce quelle satisfasse les conditions du Th 4 ou bien jusqu'à la détection d'un circuit absorbant

Le problème du plus court chemin

ALGORITHME GENERAL :

CircuitAbs := faux ;
DIJSTRA ;

TANQUE il existe $u \in U$ avec $d(u) < \prod(T(u)) - \prod(I(u))$ et circuitAbs=faux Faire

Si (X, A ∪ {u}) contient un circuit C alors circuitAbs = vrai
Sinon
$x := T(u)$; $A := A \cup \{u\} - A(x)$; $A(x) := u$

$\varepsilon := \prod(T(u)) - \prod(I(u) - d(u)$

$\prod(y) := \prod(y) - \varepsilon$ pour tout sommet y descendant de x dans l'arborescence (X,A).

Finsi
FINTANQUE