1 L'algebra delle espressioni regolari

Due espressioni regolari r, s sono equivalenti ($r \equiv s$) se $L)r) = L(s)$.

Ad esempio, $a + b \equiv b + a$, $a + a \equiv a$, $aa^* \equiv a^*a$, $ab \not\equiv ba$.

1.1 Precedenza di operatori

Assumiamo che $\cdot$ abbia precedenza su $+$. Quindi, $a + b \cdot c \equiv a + (b \cdot c)$. Inoltre, rappresentiamo l'operatore $\cdot$ con la concatenazione degli operandi: $ab \equiv a \cdot b$.

1.2 Proprietà di $+$ e $\cdot$

1. $+$ è commutativa ($r + s \equiv s + r$), associativa ($r + (s + t) \equiv (r + s) + t$), con elemento neutro $\emptyset$ ($r + \emptyset \equiv r$), idempotente ($r + r \equiv r$)
2. $\cdot$ è associativa ($r(st) \equiv (rs)t$), con elemento neutro $\{\varepsilon\}$ ($r\{\varepsilon\} \equiv r$) e elemento nullo $\emptyset$ ($r\emptyset \equiv \emptyset$)
3. $\cdot$ si distribuisce su $+$ ($r(s + t) \equiv rs + rt$)
4. $+$ non si distribuisce su $\cdot$ ($r + st \not\equiv (r + s)(r + t)$)

Qualche proprietà derivabile (osservando che i relativi linguaggi sono uguali).

1. $\emptyset^* \equiv \{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$
2. $r^* \equiv r^*r^* \equiv (r^*)^* \equiv r + r^*$
3. $r^* \equiv \{\varepsilon\} + r^* \equiv \{\varepsilon\} + rr^* \equiv (\{\varepsilon\} + r)^* \equiv (\{\varepsilon\} + r)r^*$
4. $r^* \equiv (r + r^2 + \cdots + r^k)^* \equiv \{\varepsilon\} + r + r^2 + \cdots + r^{k-1} + r^k r^*$ per ogni $k \geq 1$
5. $r^*r \equiv rr^*$
6. $(r + s)^* \equiv (r^* + s^*)^* \equiv (r^*s^*)^* \equiv (r^*s)^*r^* \equiv r^*(sr^*)^*$
7. $r(sr)^* \equiv (rs)^*r$
8. $(r^*s)^* \equiv \{\varepsilon\} + (r + s)^*s$
9. $(rs^*)^* \equiv \{\varepsilon\} + r(r + s)^*$

2 Qualche esempio di dimostrazione

- Dimostrazione che $(a + b)^* \not\equiv a^* + b^*$.
  Basta osservare che $ab \in L((a + b)^*) - L(a^* + b^*)$.
- Dimostrazione che $(a + b)^* \not\equiv a^*b^*$.
  Basta osservare che $ba \in L((a + b)^*) - L(a^*b^*)$
- Semplificazione dell'espressione regolare $aa(b^* + a) + a(ab^* + aa)$:

$$\begin{aligned} aa(b^* + a) + a(ab^* + aa) &\equiv aa(b^* + a) + aa(b^* + a) \text{ per la distributività} \\ &\equiv aa(b^* + a) \text{ in quanto } r + r \equiv r \end{aligned}$$

- Dimostrazione che $(a + aa)(a + b)^* \equiv a(a + b)^*$

$$\begin{aligned}(a + aa)(a + b)^* &\equiv (a + aa)a^*(ba^*)^* \text{ in quanto } (r + s)^* \equiv r^*(sr^*)^* \\ &\equiv a(\{\varepsilon\} + a)a^*(ba^*)^* \text{ in quanto } r \equiv r\{\varepsilon\} \\ &\equiv aa^*(ba^*)^* \text{ in quanto } (\{\varepsilon\} + r)r^* \equiv r^* \\ &\equiv a(a + b)^* \text{ in quanto } (r + s)* \equiv r^*(sr^*)^*\end{aligned}$$

- Dimostrazione che $a^*(b + ab^*) \equiv b + aa^*b^*$

$$\begin{aligned}a^*(b + ab^*) &\equiv (\{\varepsilon\} + aa^*)(b + ab^*) \text{ in quanto } r^* \equiv \{\varepsilon\} + rr^* \\ &\equiv b + ab^* + aa^*b + aa^*ab^* \text{ per distributività} \\ &\equiv b + (ab^* + aa^*ab^*) + aa^*b \text{ per associatività e commutatività di } + \\ &\equiv b + (\{\varepsilon\} + aa^*)ab^* + aa^*b \text{ in quanto } r \equiv r\{\varepsilon\} \\ &\equiv b + a^*ab^* + aa^*b \text{ in quanto } r^* \equiv \{\varepsilon\} + rr^* \\ &\equiv b + aa^*b^* + aa^*b \text{ in quanto } r^*r \equiv rr^* \\ &\equiv b + aa^*(b^* + b) \text{ per distributività} \\ &\equiv b + aa^*b^* \text{ in quanto } r^* \equiv r^* + r\end{aligned}$$