

# Logica 2022/2023

Blascovich Alessio  
alessio.blascovich@studenti.unitn.it



# Contents

<b>I</b>	<b>Modellazione</b>	<b>7</b>
<b>I.1</b>	<b>Rappresentazione</b>	<b>9</b>
I.1.1	Rappresentazione mentale . . . . .	9
I.1.2	Rappresentazione . . . . .	9
I.1.3	Modellazione . . . . .	9
I.1.3.1	Modellazione . . . . .	9
I.1.3.2	Osservazioni . . . . .	10
<b>I.2</b>	<b>Modellazione mentale</b>	<b>11</b>
I.2.1	Conoscenza semantica . . . . .	11
I.2.1.1	Teoria e modelli . . . . .	11
I.2.1.2	Fraasi e fatti . . . . .	11
I.2.1.3	Osservazioni . . . . .	11
I.2.1.4	Toerie e modelli . . . . .	11
I.2.1.5	Osservazioni . . . . .	12
I.2.1.6	Correttezza e completezza . . . . .	12
I.2.1.7	Osservazioni . . . . .	12
I.2.2	Semantica linguistica . . . . .	12
I.2.2.1	Linguaggio e dominio . . . . .	12
I.2.2.2	Osservazioni . . . . .	12
I.2.3	Modellazione mentale . . . . .	13
I.2.3.1	Gap semantico . . . . .	13
<b>I.3</b>	<b>Modello mentale formale</b>	<b>15</b>
I.3.1	Linguaggio informale . . . . .	15
I.3.1.1	Algoritmo . . . . .	15
I.3.1.2	Osservazioni . . . . .	15
I.3.1.3	Ambiguità di rappresentazione . . . . .	16
I.3.2	Linguaggi semi-formali . . . . .	16
I.3.2.1	Sintassi formale . . . . .	16
I.3.2.2	Esempio . . . . .	16
I.3.2.3	Linguaggi formali . . . . .	17
I.3.3	Linguaggi formali . . . . .	17
I.3.3.1	Linguaggi formali con frasi e termini atomici . . . . .	17
I.3.3.2	Esempi . . . . .	17
I.3.3.3	Proposizioni . . . . .	18
I.3.3.4	Osservazioni . . . . .	18
I.3.3.5	Linguaggio formale con proposizioni . . . . .	18
I.3.3.6	Esempio . . . . .	18
I.3.3.7	Osservazioni . . . . .	19
I.3.3.8	La negazione . . . . .	19
I.3.3.9	Osservazione . . . . .	19
I.3.3.10	Relazione di implicazione . . . . .	19
I.3.3.11	Negazione con implicazione . . . . .	19
I.3.3.12	Osservazioni . . . . .	19
I.3.4	Modello mentale formale . . . . .	20
I.3.4.1	Nozioni . . . . .	20

<b>I.4 Teoria degli insiemi</b>	<b>21</b>
I.4.1 Insieme . . . . .	21
I.4.1.1 Concetti di base . . . . .	21
I.4.1.2 Power set . . . . .	21
I.4.1.3 Operazioni sugli insiemi . . . . .	21
I.4.1.4 Proprietà delle operazioni . . . . .	22
I.4.1.5 Prodotto cartesiano . . . . .	22
I.4.2 Relazioni . . . . .	22
I.4.2.1 Relazione inversa . . . . .	23
I.4.2.2 Proprietà delle relazioni . . . . .	23
I.4.2.3 Relazione di equivalenza . . . . .	23
I.4.2.4 Partizione di insiemi . . . . .	23
I.4.2.5 Classe di equivalenza . . . . .	23
I.4.2.6 Insieme quoziente . . . . .	23
I.4.2.7 Relazione di ordinamento . . . . .	24
I.4.3 Funzioni . . . . .	24
I.4.3.1 Classi di funzioni . . . . .	24
I.4.3.2 Funzioni composte . . . . .	24
<b>I.5 Ragionamento formale</b>	<b>25</b>
I.5.1 Logiche . . . . .	25
I.5.1.1 Logica proposizionale . . . . .	25
I.5.1.2 Logica del primo ordine . . . . .	25
I.5.1.3 Logica descrittiva . . . . .	26
I.5.2 Problemi di ragionamento . . . . .	26
I.5.2.1 Tabelle di verità . . . . .	26
I.5.2.2 Verifica del modello . . . . .	27
I.5.2.3 Soddisfacibilità . . . . .	27
I.5.2.4 Validità . . . . .	27
I.5.2.5 Insoddisfacibilità . . . . .	27
I.5.2.6 Conseguenza logica . . . . .	27
I.5.2.7 Equivalenza logica . . . . .	28
I.5.3 Scegliere una logica . . . . .	28
I.5.3.1 Decidibilità . . . . .	28
I.5.3.2 Complessità . . . . .	28
I.5.3.3 Espressività . . . . .	29
<b>I.6 Usare modelli formali</b>	<b>31</b>
I.6.1 Livello di formalizzazione . . . . .	31
I.6.1.1 Linguaggio specifico . . . . .	31
I.6.1.2 Perché i linguaggi informali? . . . . .	31
I.6.1.3 Perché i diagrammi? . . . . .	31
I.6.1.4 Perché le logiche? . . . . .	31
I.6.2 Usare le logiche . . . . .	31
<b>II Logica Proposizionale</b>	<b>33</b>
<b>II.1 La logica</b>	<b>35</b>
II.1.1 Intuizioni iniziali . . . . .	35
II.1.2 Sintassi . . . . .	35
II.1.2.1 Alfabeto proposizionale . . . . .	35
II.1.2.2 Formule ben formate (wff) . . . . .	36
II.1.2.3 Sottoformule . . . . .	36
II.1.3 Funzione di interpretazione . . . . .	37
II.1.4 Implicazione . . . . .	37
II.1.5 Errori comuni . . . . .	37

<b>II.2</b>	<b>Calcolo</b>	<b>39</b>
II.2.1	Tabelle di verità	39
II.2.2	Verifica del modello	39
II.2.2.1	Algoritmo	39
II.2.3	Soddisfacibilità	40
II.2.4	Validità	41
II.2.5	Insoddisfacibilità	41
II.2.6	Correlazioni tra validità soddisfacibilità e insoddisfacibilità	42
II.2.7	Conseguenza logica	42
II.2.8	Equivalenza logica	43
<b>II.3</b>	<b>La procedura di decisione DPLL</b>	<b>45</b>
II.3.1	Nozioni di base	45
II.3.2	CNF (Conjunctive Normal Form)	45
II.3.3	Soddisfacibilità di una formula in CNF	46
II.3.4	La procedura di decisione	47
II.3.4.1	Semplificazione con unità di propagazione	47
II.3.4.2	Algoritmo DPLL con unità di propagazione	48
<b>II.4</b>	<b>Decisione procedura basata su Tableau</b>	<b>49</b>
II.4.1	Nozioni di base	49
II.4.2	Sistema Tableau	49
II.4.2.1	Regole $\alpha$	49
II.4.2.2	Regole $\beta$	50
II.4.2.3	Controllare la soddisfacibilità	50
II.4.2.4	Derivazione	50
II.4.2.5	Utilità	50
II.4.2.6	Teoremi finali	50



Part I

**Modellazione**





# Chapter I.1

## Rappresentazione

### I.1.1 Rappresentazione mentale

- **Mondo:** Il mondo è ciò che assumiamo esista.
- **Rappresentazione mentale:** Una rappresentazione mentale è una parte del mondo che descrive il mondo stesso, quindi esiste corrispondenza tra cosa esiste nel mondo e una rappresentazione mentale. La rappresentazione mentale permette di agire nel mondo e di interagire con altri umani.
- **Rappresentazione mentale analogica:** Una rappresentazione analogica è una semplice rappresentazione che si basa su ciò che percepiamo con i nostri sensi.
- **Rappresentazione linguistica mentale:** La rappresentazione che descrive il contesto di una rappresentazione analogica.  
Viene usata per:
  - **Descrivere:** cosa è successo nella rappresentazione mentale analogica.
  - **Comunicare:** con altri umani approposito della rappresentazione e quindi del mondo.
  - **Imparare:** da cosa viene descritto.
  - **Motiva:** cioè cerca di distinguere quello che non sa da quello che già conosce.

### I.1.2 Rappresentazione

- **Rappresentazione:** Ha due proprietà principali:
  - Più umani la percepiscono (come la rappresentazione mentale).
  - E' una parte dello stesso mondo che descrive.
- **Rappresentazione analogica:** Fa una mappatura uno a uno del mondo, considerando anche il contesto in cui ci si trova.
- **Linguistic representation:** Non la ho capita, ste cazzate filosofiche.

### I.1.3 Modellazione

#### I.1.3.1 Modellazione

- **Modellazione:** La modellazione è l'attività che porta alla realizzazione di una rappresentazione attraverso una serie di rappresentazioni mentali intermedie.
- **Teoria:** Identifica la rappresentazione linguistica prodotta da attività di modellazione.
- **Modello:** E' una rappresentazione analogica data da un modello.  
Possiamo anche dire che sia il modello inteso dalla teoria e che  $T$  sia la teoria del modello  $M$ .
- **Modello mondiale:** Un modello mondiale  $M_W$  è una coppia data da teoria  $T$  e modello  $M_T$  legati dalla formula:  
 $M_W = \langle T, M_T \rangle$ .

### **I.1.3.2 Osservazioni**

Nella maggior parte dei modelli mondiali, usati in applicazioni CS/AI, è definita solo la teoria.

Il modello inteso è implicito visto che la rappresentazione mentale è simile tra le persone.

Questo modello viene seguito quando il costo degli errori è accettabile.

Alcune volte il modello semantico è sviluppato in seguito e non copre totalmente la semantica.

Alcune volte la mancanza di un modello esplicito porta alla genesi di un dialetto.

Nel caso particolare del IA questa mancanza fa compiere alla macchina azioni imprevedibili perchè impedisce alla macchina di capire quando sbaglia.

## Chapter I.2

# Modellazione mentale

### I.2.1 Conoscenza semantica

#### I.2.1.1 Teoria e modelli

- **Denotazione e semantiche:** Diremo che la teoria  $T$  denota il suo modello inteso  $M$  e scriveremo  $T = D(M)$ . In modo alternativo possiamo dire che il modello  $M$  è la semantica intesa da  $T$  e scriveremo  $M = S(T)$ .

#### I.2.1.2 Frasi e fatti

- **Fatto:** Un modello  $M = \{f\}$  è un insieme di fatti  $f$ , dove i fatti sono una rappresentazione analogica una parte della parte di mondo descritta da  $M$ .
- **Frase:** Una teoria  $T = \{s\}$  è un insieme di frasi  $s$ , dove una frase è una rappresentazione linguistica di un insieme di fatti  $f$ .
- **Denotazione e semantiche:** Diremo che una frase  $s$  denota un fatto  $f$  e scriveremo  $s = D(f)$ . Alternativamente, un fatto  $f$  è la semantica intesa da  $s$  e scriveremo  $f = S(s)$ .

#### I.2.1.3 Osservazioni

Assumiamo sempre che una frase  $s \in T$  descriva uno o più fatti  $f \in M$ .

La nozione della descrizione linguistica e, in particolare, quella della teoria e della frase, possiamo sempre assumere si riferisca (la nozione) a una descrizione mentale possibilmente resa oggettiva tramite un modello che la descrive.

Non esistono rappresentazioni linguistiche senza referenze al mondo.

Una frase  $s = D(f)$  può denotare più fatti la  $D$  è una relazione e non necessariamente una funzione.

In questi casi diremo che  $s$  è ambigua o polisemica (polisemica=esprime più significati).

Un fatto  $f = S(s)$  può essere la semantica di più frasi  $s$ , allora anche  $S$  è una relazione e non per forza una funzione.

Per un fatto  $f$  ci sono infiniti modi di denotarlo e per questo le frasi che denotano lo stesso fatto vengono dette sinonimi.

Se  $D$  e  $S$  sono entrambe funzioni allora sono una l'inversa dell'altra.

#### I.2.1.4 Teorie e modelli

- **Modello minore:** Siano due modelli  $M = \{f\}$  e  $\widehat{M} = \{f\}$  tali che  $\widehat{M} \subseteq M$ . Diremo che  $\widehat{M}$  è minore rispetto a  $M$  e che un fatto  $f$  tale che  $f \in M$  e  $f \notin \widehat{M}$  è detto al di fuori di  $\widehat{M}$ .
- **Teorie e modelli:** Sia  $M = \{f\}$  un insieme di fatti e  $T = \{s\}$  un insieme di sequenze. Sia  $M_T$  un insieme minore di  $M$ , allora  $T$  è una teoria del modello  $M_T$  se e solo se  $\forall s \in T$  abbiamo  $s = D(f)$  per qualsiasi  $f \in M_T$ . Possiamo anche dire che  $M_T$  è un modello di  $T$ .

### I.2.1.5 Osservazioni

Esistono modelli e teorie che sono dei singoletti, ma i due eventi sono indipendenti.

Modelli di fatti diversi possono rappresentare lo stesso mondo a diversi livelli di astrazione, analogamente vale anche per le teorie di frasi corrispondenti.

Più il modello è astratto meno dettagli contiene rispetto a un modello meno astratto.

Un modello meno astratto può comunque rappresentare una gran parte del mondo.

Un modello piccolo rappresenta una piccola parte del mondo, analogamente fanno le teorie.

### I.2.1.6 Correttezza e completezza

- **Correttezza:** Sia  $M_T \subseteq M$ , allora una teoria  $T$  del modello  $M_T$  è corretta rispetto a  $M_T$  se e solo se:  
 $\forall s \in T \exists f \in M_T \mid f = S(s)$ , viene detta incorretta altrimenti.
- **Completezza:** Sia  $M_T \subseteq M$ , allora una teoria  $T$  di un modello  $M_T$  viene detta corretta rispetto a  $M_T$  se e solo se  $\forall f \in M_T \exists s \in T \mid s = D(f)$ , viene detta incompleta altrimenti.
- **Correttezza e completezza:** Sia  $M_T \subseteq M$ , allora una teoria  $T$  di un modello  $M_T$  viene detta corretta e completa se rispetta entrambe le due condizioni.

### I.2.1.7 Osservazioni

La maggior parte delle volte una teoria risulta incompleta perchè le persone descrivono solo parte di ciò che percepiscono.

La principale motivazione per l'incorrettezza delle teorie è la mancanza di motivazioni.

In applicazione dove il costo per errore è elevato bisogna far rispettare sia correttezza sia completezza. Alcune volte la completezza non è raggiungibile, perciò bisogna preferire la correttezza alla completezza. Solitamente il metro per preferire completezza/correttezza è dato da motivazioni pratiche come studi probabilistici.

## I.2.2 Semantica linguistica

### I.2.2.1 Linguaggio e dominio

- **Dominio:** Un dominio  $D = \{M\}$  è un insieme di modelli  $M$ .
- **Linguaggio:** Un linguaggio  $L = \{T\}$  è un insieme di teorie  $T$ .
- **Denotazione e semantiche:** Diciamo che un linguaggio  $L = \{T\}$  denota un dominio  $D = \{M\}$  se descrive tutti i suoi modelli e scriveremo  $L = Den(D)$ .  
 Possiamo anche dire che un dominio  $D$  è la semantica intesa da  $L$  scrivendo  $D = S(L)$ .

### I.2.2.2 Osservazioni

Il dominio è definito come uno spaziale o qualsiasi cosa noi possiamo immaginare, cosa non possibile con i modelli in quanto devono essere una rappresentazione della realtà.

Una situazione può essere modellata da diversi domini.

Uno stesso dominio può essere descritto da linguaggi differenti che si concentrano su aspetti diversi.

Queste due proprietà vengono dette eterogeneità semantica.

Un dominio è definito come  $D = \{M\}$ , ma ricordando la definizione di insieme di modelli come  $M = \{f\}$  con  $f \in M$  e  $M \in D$ .

Risulta che  $M \subseteq D$ , possiamo quindi dire che il dominio è l'insieme potenza (si, in italiano powerset è insieme potenza) dell'insieme dei fatti  $\{f\}$ .

Un linguaggio definito  $L = \{T\}$  è un insieme di modelli  $T$ , un linguaggio può anche essere modellato come l'insieme  $L = \{s\}$  di tutte le frasi  $s \in L$  appartenenti alle teorie  $T \in L$ .

Concludiamo che  $T \subseteq L$ , ne risulta che un linguaggio è l'insieme potenza dell'insieme  $\{s\}$ .

## I.2.3 Modellazione mentale

Possiamo pensare al modello mentale come formato da 4 componenti:

1. **Linguaggio:** lo spazio di tutte le possibili teorie
2. **Dominio:** lo spazio di tutti i possibili casi
3. **Modello:** un insieme di fatti
4. **Teoria:** un insieme di frasi che descrivono i fatti nel modello.

### I.2.3.1 Gap semantico

Il mondo causa la generazione del modello mentale con i suoi 4 componenti.

Il modello mentale rappresenta sia il mondo analogico che quello linguistico, ma si discosterà sempre dal mondo per via del gap semantico.

Questo gap è dato dall'imperfezione umana, dai limiti dei nostri sensi e della nostra lingua.



## Chapter I.3

# Modello mentale formale

### I.3.1 Linguaggio informale

- **Termine:** è un elemento del linguaggio, il termine denota un insieme di entità del mondo.
- **Frase:** è un elemento del linguaggio, la frase denota un insieme di fatti.
- **Sintassi:** la sintassi di un linguaggio  $L$ , definito come  $L = \{s\}$  un insieme di frasi  $s$ , è l'insieme di regole formali che ci permettono di definire tutte le frasi  $s \in L$  partendo da primitive chiamate alfabeto.
- **Primita, atomica:** Un termine o frase è primitiva se appartiene all'alfabeto, si dice complesso in tutti gli altri. Una frase è atomica se è il caso base delle regole di formazione delle frasi. Frasi primitive sono atomiche ma non vale il contrario.
- **Sintassi 2:** la sintassi può anche essere definita come segue
  - Un insieme di termini primitivi chiamati termini alfabetici.
  - Un insieme di regola per la costruzione di termini.
  - Un insieme di regole per la formazione termine a frase.
  - Un insieme di frasi primitive chiamate frasi alfabetiche.
  - Un insieme di regola per la formazione di frasi.
  - Un insieme di regole per la formazione da frase a termine.

#### I.3.1.1 Algoritmo

Segue il processo Il linguaggio naturale ha una struttura molto più complessa per definire il linguaggio:

1. Dai termini primitivi definire di cosa si sta parlando.
2. Con i termini complessi si va a definire come definire le entità selezionate.
3. Con le frasi atomiche si definiscono le proprietà delle entità da testare.
4. Dalle frasi primitive si vano a definire le verità basiche.
5. Con le frasi complesse si definisce come comporre le descrizioni complesse.
6. Con i termini atomici costruire altri termini atomici dipendeti.

#### I.3.1.2 Osservazioni

- La sintassi permette di definire frasi dichiarative per composizione.
- Il linguaggio naturale ha una struttura molto più complessa ma può essere ridotta ad una sintassi formale.

### I.3.1.3 Ambiguità di rappresentazione

- Ci sono infiniti modelli che rappresentano la stessa situazione nel mondo reale.
- Ci sono infinite teorie per la stessa rappresentazione analogica.
- Tutti i modelli e le teorie sono approssimati.
- Teorie e modelli diversi seppur rappresentando la stessa cosa possono essere mutualmente esclusivi.
- E' importante non assumere che la nostra rappresentazione mentale sia la stessa degli altri.

## I.3.2 Linguaggi semi-formali

### I.3.2.1 Sintassi formale

- Una sintassi si dice **formale** se:
  - L'alfabeto è riconoscibile.
  - L'insieme di costruttori è finito.
  - Esiste un algoritmo per verificare la correttezza di un frase.
- **Linguaggio informale:** una sintassi che non è formale è detta informale e il linguaggio che genera è detto **linguaggio informale**.
- **Formula ben formulata (wff):** una frase generata da una sintassi formale è detta formula oppure formula ben formata.  
Una wff  $w_1$  è definita sottoformula di una wff  $w_2$  se  $w_1$  è stata usata per costruire  $w_2$ .

### I.3.2.2 Esempio

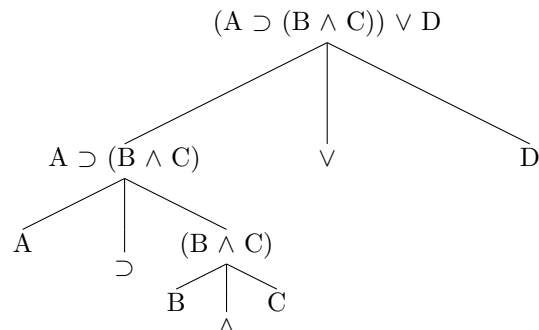
Definiamo un alfabeto riconosciuto:

- Frasi primitive = A, B, C, Q, R, ...
- Connettivi =  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\supset$
- Punteggiatura = (, )

Definiamo un insieme finito di costruttori:

- Ogni frase primitiva è una wff.
- Se A e B sono delle wff in L vale che:
  - $A \wedge B$  è una wff in L.
  - $A \vee B$  è una wff in L.
  - $A \supset B$  è una wff in L.
- Se A è una wff in L allora lo è anche (A).

Ora posso prendere in esempio la stringa  $(A \supset (B \wedge C)) \vee D$  e costruire l'albero per rappresentarla.





### I.3.2.3 Linguaggi formali

- Un linguaggio si dice **formale** se rispetta le seguenti proprietà:
  - Le formule ed i termini di  $L$  sono definiti da formule sintattiche.
  - Il dominio  $D$  denotato da  $L$  è formalmente definito.  
Chiamiamo  $D$  il dominio di interpretazione di  $L$ .
  - La denotazione  $Den$  di  $L$ , indicata con  $L = Den(D)$  è una funzione:

$$I : L \rightarrow D$$

$I$  è chiamata funzione di interpretazione di  $L$ .

- Un linguaggio non formale definito da sintassi formale è chiamato **linguaggio semi-formale**.

## I.3.3 Linguaggi formali

Riprendendo la definizione precedente.

- Un linguaggio si dice **formale** se rispetta le seguenti proprietà:
  - Le formule ed i termini di  $L$  sono definiti da formule sintattiche.
  - Il dominio  $D$  denotato da  $L$  è formalmente definito.  
Chiamiamo  $D$  il dominio di interpretazione di  $L$ .
  - La denotazione  $Den$  di  $L$ , indicata con  $L = Den(D)$  è una funzione:

$$I : L \rightarrow D$$

$I$  è chiamata funzione di interpretazione di  $L$ .

### I.3.3.1 Linguaggi formali con frasi e termini atomici

- L'interpretazione di un termine è un elemento del dominio.
- E' possibile avere sinonimi ma non polisemia.
- La funzione simbolica è usata per generare termini complessi.  
Viene usata una funzione  $n$ -aria che denota lo spazio di tutti i possibili termini che possono essere costruiti.
- Le entità generate da queste funzioni sono tuple  $(n+1)$ -arie.

### I.3.3.2 Esempi

1

Sia  $L$  un linguaggio formale, potrebbe essere erroneamente definito come segue:

- **Fraasi dell'alfabeto**  $= \{A, B\}$ 
  - $A = \text{"Fausto ha meno di 25 anni"}$
  - $B = \text{"Fausto è un professore di IA"}$
- **Regole di fomrazione delle frasi**  $= A, B$  sono le sole formule.
- **D**  $= \{ f_1 = \text{"il fatto cheFausto ha 60 anni"}, f_2 = \text{"il fatto cheFausto è un professore di IA"} \}$
- **Interpretazione**  $I : L \rightarrow D$ 
  - $I(A) = ???$   $I$  non è una funzione interpretativa di  $L$ , devo aggiungere fatti o abbandonare  $A$ .
  - $I(B) = f_2$

## 2

Il linguaggio formale  $L$  che prima era sbagliato potrebbe essere ridefinito come:

- **Fraasi dell'alfabeto**  $= \{A, B\}$ 
  - $A = \text{"Fausto ha meno di 25 anni"}$
  - $B = \text{"Fausto è un professore di IA"}$
- **Regole di fomrazione delle frasi**  $= A, B$  sono le sole formule.
- **D**  $= \{ f_1 = \text{"il fatto che Fausto ha 60 anni"}, f_2 = \text{"il fatto che Fausto è un professore di IA"}, f_3 = \text{"il fatto che fausto abbia meno di 25 anni"} \}$
- **Interpretazione**  $I : L \rightarrow D$ 
  - $I(A) = f_3$
  - $I(B) = f_2$

### I.3.3.3 Proposizioni

- **Proposizione(secondo Aristotele):** una proposizione è una frase che afferma o nega un predicato.
- **Proposizione:** è una formula che può essere o vera o falsa.

### I.3.3.4 Osservazioni

Consideriamo le tre seguenti frasi.

1.  $A = \text{"Fausto ha meno di 25 anni"}$
2.  $B = \text{"Fausto è un professore di IA"}$
3.  $C = \text{"Fausto ha 60 anni"}$

Possiamo interpretare queste frasi come dei fatti detti  $I(A) = f_1, I(B) = f_2, I(C) = f_3$ .

Possiamo anche interpretare il loro valore di verità  $I(A) = F, I(B) = T, I(C) = T$ .

Abbiamo cambiato il dominio di interpretazione da  $D$  a  $D^L$ , quindi dobbiamo anche cambiare la funzione:

$$I : L \rightarrow D \Rightarrow I^L : L \rightarrow D^L$$

Dove  $D = \{f\}$  e  $D^L$  è un insieme di due distinti valori di proposizioni che stanno per vero, falso.

Riferendoci all'esempio precedente i due domini di interpretazione  $D$  e  $D^L$  intendono due insiemi molto diversi.

1.  $D$  è l'insieme dei fatti che descrivono il mondo.

$$D = \{I(A) = f_1, I(B) = f_2, I(C) = f_3\}$$

2.  $D^L$  è l'insieme di giudizi che dicono quali sono i casi nel nostro mondo.

$$D^L = \{I(A) = F, I(A) = F, I(B) = F, I(B) = F, I(C) = F, I(C) = F\}$$

Il passo tra  $D$  e  $D^L$  risolve il problema dei domini, possiamo affermare che un fatto certo non può essere casuale.

### I.3.3.5 Linguaggio formale con proposizioni

### I.3.3.6 Esempio

- **Alfabeto**  $= \{A, B\}$
- **Dominio**  $D = \{0, 1\}$
- **Interpretazione**  $I : L \rightarrow D$
- **T**<sub>1</sub>  $= \{B\}$ , **T**<sub>2</sub>  $= \{A, B\}$
- **M**<sub>1</sub>  $= \{I(B)\}$ , **M**<sub>2</sub>  $= \{I(A), I(B)\}$

### I.3.3.7 Osservazioni

Consideriamo l'esempio precedente:

- $L = \{A, B\}$
- $T_1 = \{B\}$   $T_2 = \{A, B\}$
- $D = \{1, 0\}$
- $I_1(L) = \{I_1(B)=1, I_1(A)=0\} = \{I_1(B)\}$ :  $I_1$  è un modello  $M_1$  di  $T_1$  ma non di  $T_2$ .
- $I_2(L) = \{I_2(B)=1, I_2(A)=1\} = \{I_2(B), I_2(A)\}$ :  $I_2$  è un modello  $M_2$  di  $T_1$  e di  $T_2$ .
- $I_3(L) = \{I_3(B)=0, I_3(A)=1\} = \{I_3(A)\}$ :  $I_3$  non è un modello  $M$  di  $T_1$  e  $T_2$ .
- $I_4(L) = \{I_4(B)=0, I_4(A)=0\} = \emptyset$ :  $I_4$  non è un modello  $M$  di  $T_1$  né di  $T_2$ .

Una teoria viene considerata incompleta/parziale se descrive il vero valore **di un sotto insieme** di formule atomiche del linguaggio.

Un modello è un'interpretazione che soddisfa tutte le formule di una teoria.

Una teoria può avere più modelli.

### I.3.3.8 La negazione

Sia  $L$  un linguaggio formale,  $I : L \rightarrow D$  la sua funzione di interpretazione con  $D = \{0, 1\}$  e sia  $\neg$  un simbolo primitivo dell'alfabeto allora:

- Se  $I(A)=1$  allora  $I(\neg A)=0$
- Se  $I(A)=0$  allora  $I(\neg A)=1$

Dove  $\neg A$  si legge come "non A".

### I.3.3.9 Osservazione

Una teoria  $T$  che contiene sia la formula  $A$  che  $\neg A$  non ha modello e viene detta **contraddittoria**.

### I.3.3.10 Relazione di implicazione

Sia  $L$  un linguaggio formale,  $I : L \rightarrow D$  la sua funzione di interpretazione con  $D = \{0, 1\}$ , sia  $T \subseteq L$  una teoria formale, sia  $M \subseteq D$  un modello per  $T$  allora  $\models_L$  è la funzione di implicazione che associa cosa è vero in  $M$  con le wff in  $T$ .

$$\models_L \subseteq M \times T$$

Possiamo anche scrivere:

$$M \models_L T$$

Dicendo che  $M$  implica  $T$ .

### I.3.3.11 Negazione con implicazione

Sia  $L$  un linguaggio formale, la funzione di interpretazione  $I : L \rightarrow D \dots$

Allora per ogni formula atomica  $A \in L$ :

- $I \models A$  se  $I(A)=\text{True}$
- $I \models \neg A$  se non è vero che  $I \models A$  ( $I \not\models A$ )

### I.3.3.12 Osservazioni

- Una teoria  $T$  che contiene sia la formula  $A$  che  $\neg A$  non ha modello e viene detta **contraddittoria**.
- Per ogni formula  $A$  la formula  $A \wedge \neg A$  viene detta **contraddizione**.
- Per ogni formula  $A$  la formula  $A \vee \neg A$  viene detta **tautologia**.

## I.3.4 Modello mentale formale

### I.3.4.1 Nozioni

Un modello formale è un modello formale in cui:

- La relazione tra formule atomiche ed il dominio di interpretazione sono formalizzate da una funzione di interpretazione.
- La relazione tra modello e teoria è formalizzata dalla relazione di implicazione.

La costruzione di un modello mentale formalizzato segue i seguenti step:

1. Il linguaggio è dato.
2. Dominio e funzione di interpretazione sono dati.
3. La funzione di implicazione è data.
4. Un modello è costruito assumendo che un certo insieme di fatti sia vero.
5. Ci sono **solo** 2 usi per un modello formale:
  - (a) **Modellazione (apprendimento)**: il modello formale viene creato/esteso.
  - (b) **Ragionamento**: il modello formale viene usato per risolvere delle query.

Un sistema logic-based che ragiona su conoscenze e dati ha due componenti principali:

1. Una conoscenza di base (**KB**) tale che  $KB \subseteq L$  che è una teoria del mondo.
2. Un sistema di ragionamento che risponde alle query grazie al contenuto del KB.

## Chapter I.4

# Teoria degli insiemi

### I.4.1 Insieme

**Insieme:** una collezione di elementi la cui descrizione deve essere non ambigua ed univoca

#### I.4.1.1 Concetti di base

- **Insieme vuoto:** è l'insieme che non contiene elementi e si indica  $\emptyset$ .
- **Appartenenza:**  $a \in A$  indica che l'elemento  $a$  appartiene all'insieme  $A$ .
- **Non appartenenza:** è il contrario dell'appartenenza e si indica  $a \notin A$ .
- **Uguaglianza:**  $A = B$  se e solo se  $A$  e  $B$  contengono gli stessi elementi.
- **Non uguaglianza:** se  $A$  e  $B$  non sono uguali si indica con  $A \neq B$ .
- **Sottoinsieme:**  $A \subseteq B$  indica che tutti gli elementi di  $A$  appartengono anche a  $B$ .
- **Sottoinsieme proprio:** se e solo se  $A \subseteq B$  e  $A \neq B$  allora si dice che  $A \subset B$ .

#### I.4.1.2 Power set

**Definizione:** il power set di un insieme è l'insieme contenente tutti i sottoinsiemi di  $A$ .  
Se l'insieme ha  $n$  elementi il suo power set ha  $2^n$  elementi.

#### I.4.1.3 Operazioni sugli insiemi

##### Unione

Dati due insiemi  $A$  e  $B$  la loro unione  $A \cup B$  è definita come l'insieme di tutti gli elementi appartenenti sia ad  $A$  sia che  $B$ .

##### Intersezione

Dati due insiemi  $A$  e  $B$  definiamo la loro intersezione  $A \cap B$  come l'insieme che contiene gli elementi che appartengono contemporaneamente ad  $A$  e a  $B$ .

##### Differenza

Dati due insiemi  $A$  e  $B$  la loro differenza  $A - B$  è l'insieme  $A$  a cui sono stati tolti tutti gli elementi che aveva in comune con  $B$ .

##### Complemento

Dati due insiemi  $A$  e  $B$  tali che  $A \subseteq B$  definiremo il complementare di  $A$  in  $B$  come l'insieme di tutti gli elementi che appartengono a  $B$  ma non ad  $A$ , lo indicheremo con  $\bar{A}$  oppure  $C_B A$ .

### I.4.1.4 Proprietà delle operazioni

Con lo stesso insieme:

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

Commutative:

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Con l'insieme vuoto:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$

Associative:

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Distributive:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Leggi di De Morgan:

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

### I.4.1.5 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , definiamo il prodotto cartesiano di  $A$  e  $B$  come l'insieme delle tuple ordinate  $(a, b)$  tali che  $a \in A$  e  $b \in B$ .

Formalmente si può esprimere come:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ and } b \in B\}$$

**Osservazioni**

- $A \times B \neq B \times A$
- Il prodotto cartesiano può essere applicato ad  $n$  insiemi di insiemi  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .  
 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  sarà l'insieme ordinato di  $n$ -tuple  $(x_1, \dots, x_n)$  dove  $x_i \in A_i$  per ogni  $i = 1 \dots n$

## I.4.2 Relazioni

**Definizione:** una relazione  $R$  dall'insieme  $A$  ad un insieme  $B$  è un sottoinsieme del prodotto cartesiano di  $A$  e  $B$ :  $R \subseteq A \times B$ .

Se  $(x, y) \in R$  scriveremo  $xRy$  e diremmo "x è R-relazionato a y".

Una relazione binaria su un insieme  $A$  è un sotto insieme  $R \subseteq A \times A$ .

Data una relazione  $R$  da  $A$  a  $B$ :

- Il dominio di  $R$  è l'insieme  $Dom(R) = \{a \in A \mid \text{esiste un } b \in B \text{ che } aRb\}$
- Il codominio di  $R$  è l'insieme  $Cod(R) = \{b \in B \mid \text{esiste un } a \in A \text{ che } aRb\}$

### I.4.2.1 Relazione inversa

Sia  $R$  una relazione da  $A$  a  $B$ , la relazione inversa di  $R$  è la relazione  $R^{-1} \subseteq B \times A$  definita come:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

### I.4.2.2 Proprietà delle relazioni

Sia  $R$  una relazione binaria  $A$ , allora  $R$  può avere le seguenti proprietà:

- **Riflessiva:** se e solo se  $aRa$  per ogni  $a \in A$ .
- **Simmetrica:** se e solo se  $aRb$  implica che  $bRa$  per ogni  $a, b \in A$ .
- **Transitiva:** se e solo se  $aRb$  e  $bRc$  implica che  $aRc$  per ogni  $a, b, c \in A$ .
- **Anti-simmetrica:** se e solo se  $aRb$  e  $bRa$  implica che  $a=b$  per ogni  $a, b \in A$ .

### I.4.2.3 Relazione di equivalenza

Sia  $R$  una relazione binaria su un insieme  $A$ .

$R$  è una relazione di equivalenza se e solo se soddisfa le seguenti proprietà:

- Riflessiva
- Simmetrica
- Transitiva

Le relazioni di equivalenza sono spesso indicate con  $\sim$  oppure con  $\equiv$ .

### I.4.2.4 Partizione di insiemi

Sia  $A$  un insieme, una partizione di  $A$  è una famiglia  $F$  di sottoinsiemi non vuoti tali che:

- L'unione di tutti i sottoinsiemi sia  $A$ .
- I sottoinsiemi sono disgiunti a coppie.

Ogni elemento di  $A$  appartiene esattamente ad un insieme di  $F$ .

### I.4.2.5 Classe di equivalenza

Sia  $A$  un insieme e  $\equiv$  una relazione di equivalenza su  $A$ , dato  $x \in A$  definiamo classe di equivalenza  $X$  l'insieme di elementi  $x' \in A$  tale che  $x' \equiv x$ , formalmente:

$$X = \{x' \mid x' \equiv x\}$$

E' possibile prendere ogni elemento di  $x$  per ottenere una classe di equivalenza  $X$ , la classe di equivalenza è denotata anche da  $[x]$ .

### I.4.2.6 Insieme quoziente

L'insieme quoziente di  $A$  è l'insieme delle classi di equivalenza definite da  $\equiv$  su  $A$ , denotato da  $A/\equiv$

#### Teorema

Data una relazione di equivalenza  $\equiv$  su  $A$ , la classe di equivalenza definita da  $\equiv$  su  $A$  è una partizione di  $A$ .

Similmente, data una partizione di  $A$ , la relazione  $R$  definita come  $xRx'$  se e solo se  $x$  e  $x'$  appartengono allo stesso sottoinsieme, è una relazione di equivalenza.

### I.4.2.7 Relazione di ordinamento

Sia  $A$  un insieme e  $R$  una relazione binaria su  $A$ .

$R$  è un ordinamento parziale, denotato come  $\leq$ , se:

- **Riflessiva:**  $a \leq a$
- **Anti-simmetrica:**  $a \leq b$  e  $b \leq a$  allora  $a=b$ .
- **Transitiva:**  $a \leq b$  e  $b \leq c$  allora  $a \leq c$ .

Se la relazione vale per tutti gli  $a, b \in A$  allora si dice ordinamento totale.

Una relazione è in ordine stretto, denotata con  $<$ , se:

- **Transitiva:**  $a < b$  e  $b < c$  allora  $a < c$ .
- Per ogni  $a, b \in A$  o  $a < b$  o  $b < a$  oppure  $a=b$ .

## I.4.3 Funzioni

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , una funzione  $f$  da  $A$  a  $B$  è una relazione che associa ad ogni elemento di  $a$  in  $A$  esattamente un elemento  $b$  in  $B$ , denotata con:

$$f: A \rightarrow B$$

Il dominio di  $f$  è tutto l'insieme  $A$ .

L'immagine di ogni elemento  $a$  in  $A$  è l'elemento di  $b$  in  $B$  tale che  $b=f(a)$ .

Il codominio di  $f$  è un sottoinsieme di  $B$ , definito come segue:

$$\text{Im}_f = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tale che } b=f(a)\}$$

### I.4.3.1 Classi di funzioni

1. **Suriettive:** una funzione  $f: A \rightarrow B$  è suriettiva se ogni elemento in  $b$  è l'immagine di qualche elemento in  $A$ .
2. **Iniettiva:** una funzione  $f: A \rightarrow B$  è iniettiva se ogni elemento di  $A$  ha un immagine diversa in  $B$ .
3. **Biettiva:** una funzione  $f: A \rightarrow B$  è biettiva se è sia iniettiva che suriettiva.
4. **Inversa:** se  $f: A \rightarrow B$  è biettiva possiamo definire una funzione inversa:

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

### I.4.3.2 Funzioni composte

Siano  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$  funzioni, allora la composizione di  $f$  e  $g$  creerà la funzione  $g \circ f: A \rightarrow C$ .

- $(g \circ f)(a) = g(f(a))$



## Chapter I.5

# Ragionamento formale

### I.5.1 Logiche

- **Logica:** una logica  $L$  è una tripla  $\mathcal{L} = \langle L, I, \models \rangle$  dove  $L$  è un linguaggio formale,  $I$  una funzione di interpretazione  $I: L \rightarrow D$  e  $\models$  una relazione di implicazione.
- **Calcolo logico:** un calcolo logico  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  è una tupla  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{L}, \mathcal{P} \rangle$  dove  $\mathcal{L}$  è una logica e  $\mathcal{P}$  un insieme di domande.
- **Ragionamento logico:** dato un calcolo logico  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ , con ragionamento logico indichiamo il processo con il quale si risolve un problema applicando un algoritmo non per forza terminale.

#### I.5.1.1 Logica proposizionale

Le caratteristiche di questa logica sono:

- Un linguaggio proposizionale contiene solo proposizioni primitive.
- Le formule sono interpretate attraverso un dominio di giudizi.
- Le formule complesse sono formate usando un numero arbitrario di connettivi proposizionali.
- I connettivi proposizionali possono essere.
  - $\neg$  letto come "not" per la negazione.
  - $\wedge$  letto come "and" per le congiunzioni.
  - $\vee$  letto come "or" per le disgiunzioni.
  - $\implies$  letto come "implies" per le implicazioni.
  - $\iff$  letto come "if and only if" per le equivalenze.
  - $\uparrow$  letto come "nand" per le congiunzioni negate.
  - $\downarrow$  letto come "nor" per le disgiunzioni negate.

La logica proposizionale è utile per problemi che possono essere formalizzati per essere indipendenti da strutture interne.

#### I.5.1.2 Logica del primo ordine

Le caratteristiche di questa logica sono:

- Termini e formule sono complesse.
- Molto spesso le formule primitive non sono parte del linguaggio.
- Termini e formule atomiche sono interpretate su un dominio di entità e fatti.  
Le formule complesse sono interpretate attraverso un dominio di giudizi.
- Le formule complesse sono formate usando connettivi proposizionali e un numero arbitrario di quantificatori.
- I quantificatori sono:

- $\forall$  letto come "for all" per quantificare tutti i termini di un insieme.
- $\exists$  letto come "there exists" per dire se esiste almeno un elemento in un insieme.

La logica del primo ordine è utile ogni volta la struttura interna dei termini e la loro composizione per formare la verità o la falsità di una formula atomica è importante, quindi quando è importante essere molto descrittivi.

### I.5.1.3 Logica descrittiva

Le caratteristiche di questa logica sono:

- Le logiche proposizionali + una logica del primo ordine permettono di usare solo formule atomiche e non primitive.
- Solo predicati unari e binari sono permessi.
  - Predicati unari detti classi.
  - Predicati binari detti ruoli.
- Termini e formule sono interpretati su un dominio di entità e fatti.
- Le formule complesse sono formate usando connettivi proposizionali e due operatori modali.
- Gli operatori modali sono:
  - $\exists R$  letto come "there exists an element of ..." per quantificare l'esistenza su un codominio di ruoli.
  - $\forall R$  letto come "for all elements of" per la quantificazione universale su un codominio di ruoli.

I modelli di logica descrittiva permettono di rappresentare e ragionare sui diagrammi ER, diagrammi UML e knowledge graph.

## I.5.2 Problemi di ragionamento

Il ragionamento è usato per ultimare alcuni compiti come:

- Verifica del modello.
- Soddisfacibilità.
- Validità.
- Insoddisfacibilità.
- Conseguenza logica.
- Equivalenza logica.

### I.5.2.1 Tabelle di verità

Sono il modo per dimostrare la verità dei fatti oppure di una proposizione che descrive quei fatti.

Permettono di descrivere ogni possibile modello  $M$  di un certo dominio  $D$ , questo significa costruire ogni possibile combinazione di fatti.

Infatti esistono  $2^n$  possibili modelli con  $n$  il numero di fatti nel dominio.

Due frasi che rappresentano lo stesso fatto avranno lo stesso valore e possono essere rappresentate da una sola proposizione.

#### Esempi

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \uparrow B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

### I.5.2.2 Verifica del modello

Data un teoria  $T$  e un modello  $M$ , la verifica consiste nel verificare che qualsiasi sia  $M$  possa essere un modello valido per  $T$ , equivale a verificare che  $M \models T$ .

### I.5.2.3 Soddisfacibilità

Una teoria  $T$  viene detta soddisfacibile se esiste un modello rappresentato da  $T$ , invece se viene dato  $T$  bisogna verificare se esiste o meno un modello  $M$  che coincide con un modello descritto da  $T$ .

#### Esempio

Dobbiamo compilare la tabella di verità di  $A \wedge B$  per vedere se la formula è soddisfacibile o meno.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La formula è soddisfatta visto che c'è almeno un modello che implica la formula, ovvero che è vero.

### I.5.2.4 Validità

Una teoria  $T$  è detta valida se ogni modello possibile è rappresentato da  $T$ .

Una teoria  $T$  è detta valida se ogni modello  $M$  del nostro dominio soddisfa  $T$ , e.g.:

$$\forall M, M \models T$$

#### Esempio

Computiamo ora la tabella di verità di  $\neg(A \wedge \neg A)$  per verificare che la formula sia valida o meno.

A	$\neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$
1	0	1
0	1	1

### I.5.2.5 Insoddisfacibilità

Una teoria  $T$  è detta insoddisfabile se non c'è un modello rappresentato da  $T$ .

Una teoria  $T$  è detta insoddisfabile se:

Non esiste un modello  $M$  tale che

$$M \models T$$

Ogni modello  $M$  è tale che:

$$M \not\models T$$

#### Esempio

Computiamo ora la tabella di verità di  $A \wedge \neg A$  per verificare che la formula sia soddisfabile o meno.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

La formula risulta insoddisfabile visto che non ci sono modelli che la implicano.

### I.5.2.6 Conseguenza logica

Una teoria  $T_2$  viene detta conseguenza logica di un'altra teoria  $T_1$  se ogni modello rappresentato da  $T_1$  viene rappresentato anche da  $T_2$ .

$$\forall M: M \models T_1, M \models T_2$$

**Esempio**

Computiamo ora la tabella di verità di  $A$  e  $\neg(\neg A \wedge B \wedge \neg A)$  per vedere se quest'ultima è una conseguenza di  $A$ :

A	B	$\neg(\neg A \wedge B \wedge \neg A)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Come si può vedere la formula è una conseguenza logica di  $A$  visto che ogni volta che  $A$  è 1 anche la formula lo è.

**I.5.2.7 Equivalenza logica**

Una teoria  $T_1$  viene detta equivalenza logica di un'altra teoria  $T_2$  rappresentano lo stesso modello.

$$\forall M: M \models T_1 \text{ se e solo se } M \models T_2$$

**Esempio**

Computiamo ora la tabella di verità di  $A$  e  $\neg(\neg A \wedge \neg(B \wedge \neg B))$  per vedere se le due formule sono logicamente equivalenti.

A	B	$\neg(\neg A \wedge \neg(B \wedge \neg B))$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Le formule  $\neg(\neg A \wedge \neg(B \wedge \neg B))$  e  $A$  sono equivalenze logiche visto che sono vere e false negli stessi momenti.

**I.5.3 Scegliere una logica**

Per affrontare un problema dobbiamo seguire i seguenti passi:

1. Formalizzare le domande e le risposte di un problema.
2. Sviluppare l'approccio che ci sembra più logico.
3. Scegliere il tipo di logica più adatto.
4. Scrivere la teoria  $T$  che modella il problema.
5. Usare la logica per risolvere il problema.

Sulla scelta della logica bisogna prestare molta attenzione perchè ogni logica è caratterizzata da:

- **Diversa espressività** Quali problemi di decisione posso esprimere.
- **Efficienza computazionale** Quanto è oneroso risolvere un problema decisionale.

**I.5.3.1 Decidibilità**

Una logica è decidibile se esiste un metodo efficace per verificare che una formula appartenga sia inclusa in una teoria.

- Il metodo effettivo è un algoritmo che dato un problema decisionale ritorna vero o falso.
- Tutte le logiche del corso sono decidibili, tranne la logica del primo ordine.

**I.5.3.2 Complessità**

Data una logica decidibile la complessità quantifica la difficoltà a computare il ragionamento in una data logica. I linguaggi logici sono classificati secondo vari gradi di complessità:

- P
- NP
- PSpace
- $\vdots$

### I.5.3.3 Espressività

Linguaggio	Frase NL	Formule
Logica proposizionale	Fausto likes skiing I like skiing	Fausto-likes-skiing I-like-skiing
Logica del primo ordine	Every person likes skiing I like skiing Fausto likes skiing	$\forall \text{person. like-skiing}(\text{person})$ $\text{like-skiing}(\text{I})$ $\text{like-skiing}(\text{Fausto})$
Logica descrittiva	Every persons likes cars	$\text{person} \sqsubseteq \exists \text{ likes.Car}$



## Chapter I.6

# Usare modelli formali

### I.6.1 Livello di formalizzazione

#### I.6.1.1 Linguaggio specifico

Esistono diversi tipi di linguaggi specifici che dipendono dal linguaggio che usano.

- **Modelli informali** usano linguaggio naturale.
- **Modelli semi-formali** usano linguaggi strutturati con sintassi semi-formali e delle semantiche informali.
- **Modelli logici** usano linguaggi formali.

#### I.6.1.2 Perchè i linguaggi informali?

Usato per	Vantaggi	Svantaggi
Specifiche informali	Economico da usare Utile per interagire con utenti	La semantica è informale Impossibile da automatizzare

#### I.6.1.3 Perchè i diagrammi?

Usato per	Vantaggi	Svantaggi
Specifiche semi-formali	Economico da usare Utile per interagire con utenti	La semantica è informale Impossibile da automatizzare

#### I.6.1.4 Perchè le logiche?

Usato per	Vantaggi	Svantaggi
Specifiche formali Automazioni	Molto capibile per le sintassi e semantiche formali Molto efficiente da automatizzare	Difficile da usare con gli utenti

### I.6.2 Usare le logiche

Esempi di problemi:

- Usare una teoria per concordare.
- Usare una teoria per garantire l'interoperabilità.
- Usare il ragionamento  $\models$  per garantire che il programma faccia ciò per cui è pensato.
- Usare il ragionamento per implementare IA.





Part II

Logica Proposizionale



# Chapter II.1

## La logica

### II.1.1 Intuizioni iniziali

Le caratteristiche della logica proposizionale sono:

- Un linguaggio proposizionale contiene solo proposizioni primitive.
- Le formule sono interpretate attraverso un dominio di giudizi.
- Le formule complesse sono formate usando un numero arbitrario di connettivi proposizionali.
- I connettivi proposizionali possono essere.
  - $\neg$  letto come "not" per la negazione.
  - $\wedge$  letto come "and" per le congiunzioni.
  - $\vee$  letto come "or" per le disgiunzioni.
  - $\implies$  letto come "implies" per le implicazioni.
  - $\iff$  letto come "if and only if" per le equivalenze.
  - $\uparrow$  letto come "nand" per le congiunzioni negate.
  - $\downarrow$  letto come "nor" per le disgiunzioni negate.

La logica proposizionale è utile per problemi che possono essere formalizzati per essere indipendenti da strutture interne. Sulla logica proposizionale possiamo fare le seguenti osservazioni:

- Una proposizione è una frase che descrive il mondo.
- Una proposizione può essere o vera o falsa.
- "not P" è vera se P è falsa e viceversa.
- "P and Q" è vera se e solo se P e Q sono entrambe vere.
- "P or Q" per essere vera è sufficiente che solo una delle due sia vera.
- "P implies Q" indica che Q è vera quando lo è P, ma non dice nulla su quando P è falsa.
- "P if and only if Q" indica che P e Q devono essere vere/false allo stesso momento.
- "P xor Q" è vera solo se una delle due è vera.

### II.1.2 Sintassi

#### II.1.2.1 Alfabeto proposizionale

L'alfabeto è composto da:

- Simboli logici:  $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ .
- Simboli non logici: costanti proposizionali e insiemi **PROP** che contengono simboli P chiamati variabili proposizionali che possono contenere una costante proposizionale come un valore.
- Simboli separatori: "(" e ")".

### II.1.2.2 Formule ben formate(wff)

Una formula wff viene definita come segue:

- Ogni  $P \in \mathbf{PROP}$  è una formula atomica.
- Ogni formula atomica è wff.
- Se A e B sono formule, allora  $\neg A$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \supset B$  e  $A \equiv B$  sono formule.

Per leggere una formula è importante sapere che i vari operatori hanno delle diverse priorità, come in matematica le parentesi fungono da modificatore delle priorità.

Simbolo	Priorità
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\supset$	4
$\equiv$	5

### II.1.2.3 Sottoformule

Una sottoformula di una formula, rappresentata come un albero, indica l'insieme di tutti i suoi sottoalberi. Viene formalmente definita come:

- A è una sottoformula di se stessa.
- A e B sono sottoformule di  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \supset B$  e  $A \equiv B$ .
- A è una sottoformula di  $\neg A$ .
- Se A è una sottoformula di B e B è una sottoformula di C, allora A è una sottoformula di C.
- A è una sottoformula propria di B se A è sottoformula di B e  $A \neq B$ .

### Esempi

1. Se piove mentre splende il sole apparirà l'arcobaleno.  
 $p$ =piove;  $q$ =splende il sole;  $r$ =arcobaleno;  
 $(p \wedge q) \supset r$
2. Claudio viene se Elsa viene.  
 $p$ =Claudio viene;  $q$ =Elsa viene;  
 $q \supset p$
3. Claudio viene se Elsa viene e viceversa.  
 $p$ =Claudio viene;  $q$ =Elsa viene;  
 $q \equiv p$
4. Giacomo viene se e solo se Pietro resta a casa.  
 $p$ =Giacomo viene;  $q$ =Pietro sta a casa;  
 $p \equiv q$
5. Noi andiamo se non piove.  
 $p$ =Noi andiamo;  $q$ =piove;  
 $p \equiv \neg q$
6. Claudio ed Elsa sono o fratello e sorella o nipoti.  
 $p$ =Claudio ed Elsa sono fratello e sorella;  $q$ = Claudio ed Elsa sono nipoti;  
 $p \vee q$
7. Se perdo se non posso fare una mossa, allora ho perso.  
 $p$ =ho perso;  $q$ =non posso fare una mossa;  
 $(q \supset p) \supset p$

## II.1.3 Funzione di interpretazione

Il dominio di interpretazione della logica proposizionale è  $D=\{\text{True}, \text{False}\}$ .  
L'interpretazione proposizionale è una funzione:

$$I: \mathbf{PROP} \rightarrow D$$

Se  $|\mathbf{PROP}|$  è la cardinalità di  $\mathbf{PROP}$  allora esistono  $2^{|\mathbf{PROP}|}$  interpretazioni differenti corrispondenti a tutti i sottoinsiemi di  $\mathbf{PROP}$ .

## II.1.4 Implicazione

Diciamo che una funzione di interpretazione implica una formula A se:

- $I \models A$ , se  $I(A)=\text{True}$  con  $A \in \mathbf{PROP}$ .
- $I \models \neg A$ , se non è vero che  $I \models A$ .
- $I \models A \wedge B$  se  $I \models A$  e  $I \models B$ .
- $I \models A \vee B$  se  $I \models A$  o  $I \models B$ .
- $I \models A \supset B$  se  $I \models A$  allora  $I \models B$ .
- $I \models A \equiv B$  se  $I \models A$  se e solo se  $I \models B$ .

$\neg \text{True}$	False
$\neg \text{False}$	True
$\text{True} \wedge \text{True}$	True
$\text{True} \wedge \text{False}$	False
$\text{False} \wedge \text{True}$	False
$\text{False} \wedge \text{False}$	False
$\text{True} \vee \text{True}$	True
$\text{True} \vee \text{False}$	True
$\text{False} \vee \text{True}$	True
$\text{False} \vee \text{False}$	False

$\text{True} \supset \text{True}$	True
$\text{True} \supset \text{False}$	False
$\text{False} \supset \text{True}$	True
$\text{False} \supset \text{False}$	True
$\text{True} \equiv \text{True}$	True
$\text{True} \equiv \text{False}$	False
$\text{False} \equiv \text{True}$	False
$\text{False} \equiv \text{False}$	True

## II.1.5 Errori comuni

- Noi esprimiamo le congiunzioni con molte parole oltre a "e", degli esempio posso essere "ma", "quindi", "per tanto", ...
- Alcune vole "e" non unisce due proposizioni intere ma solo due sostantivi.
- Alcune volte "and" unisce due aggettivi.
- Il modo per esprimere una disgiunzione esclusiva è  $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$ , mentre il modo per indicare che hanno valori di verità diversi è negare la loro uguaglianza  $\neg(p \equiv q)$ .
- **Anche se:** la frase "p anche se q" può essere tradotta in  $p \wedge (q \vee \neg q)$ .



## Chapter II.2

# Calcolo

### II.2.1 Tabelle di verità

Sono il mezzo attraverso il quale generiamo tutte le possibili interpretazioni generate considerando tutte le proposizioni atomiche per rispondere ai quesiti di:

- Verifica del modello.
- Soddisfabilità.
- Validità.
- Insoddisfabilità.
- Conseguenza logica.
- Equivalenza logica.

Per costruire una tabella di verità, con  $n$  proposizioni atomiche, è possibile seguire l'algoritmo:

1. Esiste una riga per ogni interpretazione, quindi ne avrò  $2^n$ .
2. Le prime  $n$  colonne comprendono tutte le interpretazioni, mentre l'ultima i valori di verità della formula totale. Le colonne nel mezzo contengono i valori di verità delle sottoformule della formula finale presa in considerazione.
3. L'assegnamento dei valori alle proposizioni atomiche inizia da sinistra verso destra, nella prima colonna alterno T e F con periodo 1, nella seconda con periodo 2 e nella  $n$  con periodo  $n$ .

### II.2.2 Verifica del modello

Sia  $I$  un'interpretazione applicata ad un linguaggio proposizionale  $L$ .

Possiamo verificare che una formula  $A \in L$  è soddisfabile da  $I$  applicando in modo ricorsivo l'algoritmo **MCHECK**( $I, A$ ).

#### II.2.2.1 Algoritmo

Caso base

$A = p$

```
MCHECK( $I \models p$ )
if  $I(p) == \text{True}$  then
    return YES
else
    return NO
```

**Caso ricorsivo**

$A = B \wedge C$

```

MCHECK( $I \models B \wedge C$ )
if MCHECK( $I \models B$ ) then
    return MCHECK( $I \models C$ )
else
    return NO

```

$A = B \vee C$

```

MCHECK( $I \models B \vee C$ )
if MCHECK( $I \models B$ ) then
    return YES
else
    return MCHECK( $I \models C$ )

```

$A = B \supset C$

```

MCHECK( $I \models B \supset C$ )
if MCHECK( $I \models B$ ) then
    return MCHECK( $I \models C$ )
else
    return YES

```

$A = B \equiv C$

```

MCHECK( $I \models B \equiv C$ )
if MCHECK( $I \models B$ ) then
    return MCHECK( $I \models C$ )
else
    return  $\neg$ MCHECK( $I \models C$ )

```

**II.2.3 Soddisfacibilità**

Possiamo controllare che qualsiasi formula  $A \in L$  è soddisfabile applicando l'algoritmo **SAT(A)** che è definito come segue:

- **Input:** inseriamo la formula  $A$  della quale vogliamo sapere se esiste un'interpretazione che la soddisfa.
- **Output:** ci viene restituita l'interpretazione se la formula è soddisfabile in caso contrario viene ritornato "no".
- Possiamo verificare  $A$  sia soddisfabile applicando in modo ricorsivo **MCHECK(I,A)** come segue:
  - Estrarre tutte le proposizioni atomiche di  $A$ .
  - Generare tutte le interpretazioni  $I$  utili.
  - Applicare **MCHECK(I,A)** finchè non si verifica una delle due condizioni.
    1. Se **MCHECK(I,A)** ritorna "YES" allora viene ritornato  $I$ .
    2. Se non ci sono più  $I$  da analizzare viene ritornato "NO".
- **SAT(A)** compie una cosiddetta lazy evaluation infatti salta le interpretazioni quando irrilevanti così evita di valutare  $2^n$  casi.

**Esempio**

Controllo se  $(P \wedge Q) \vee (R \supset S)$  è soddisfabile.

Devo calcolare tutte le possibili  $I$ :

- $\{P, Q, R, S\}$
- $\{P, Q, R\}$



- {P, Q}
- ⋮

Per ogni I rimpiazzare i valori di verità corrispondenti nelle primitive.  
Con  $I=\{P\}$  abbiamo che:

$$\begin{array}{c} (\text{True} \wedge \text{False}) \vee (\text{False} \supset \text{False}) \\ \text{False} \vee \text{True} \\ \text{True} \end{array}$$

Quindi la formula è soddisfabile.

## II.2.4 Validità

Possiamo controllare che qualsiasi formula  $A \in L$  sia valida applicando l' algoritmo **VALID(A)** come segue.

- **Input:** inseriamo la formula A della quale vogliamo sapere se è soddisfabile per ogni interpretazione.
- **Output:** viene ritornato "YES" se è una formula valida, "NO" altrimenti.
- Possiamo ora verificare che A sia valida applicando **MCHECK(I,A)** come segue:
  - Estrarre tutte le proposizioni atomiche di A.
  - Generare tutte le interpretazioni I utili.
  - Applicare **MCHECK(I,A)** finchè non si verifica una delle due condizioni.
- 1. Se un **MCHECK(I,A)** ritorna "NO" allora tutta la funzione ritorna "NO".
- 2. Se non ci sono più formule da analizzare ritorna "YES".
- **VALID(A)** compie una lazy evaluation così appena una parte ritorna "NO" si ferma.

### Esempio

Controllo se  $(P \wedge Q) \vee (R \supset S)$  è valida.  
Devo calcolare tutte le possibile I:

- {P, Q, R, S}
- {P, Q, R}
- {P, Q}
- ⋮

Per ogni I rimpiazzare i valori di verità corrispondenti nelle primitive.  
Con  $I=\{P, R\}$  abbiamo che:

$$\begin{array}{c} (\text{True} \wedge \text{False}) \vee (\text{True} \supset \text{False}) \\ \text{False} \vee \text{False} \\ \text{False} \end{array}$$

Essendo un interpretazione falsa la formula non è valida.

## II.2.5 Insoddisfabilità

Possiamo dire per una qualsiasi formula  $A \in L$  se è insoddisfabile applicando l'algoritmo **UNSAT(A)** come segue:

- **Input:** inseriamo la formula A della quale vogliamo sapere se è insoddisfabile.
- **Output:** ritorna "YES" se nessuna I soddisfa A, ritorna "NO" altrimenti.
- Possiamo ora verificare che A sia insoddisfabile applicando **MCHECK(I,A)** come segue:
  - Estrarre tutte le proposizioni atomiche di A.

- Generare tutte le interpretazioni  $I$  utili.
  - Applicare **MCHECK**( $I, A$ ) finchè non si verifica una delle due condizioni.
1. Se un **MCHECK**( $I, A$ ) ritorna "YES" allora si ritorna "NO".
  2. Se non ci sono più formule da analizzare ritorna "YES".

### Esempio

Controllo se  $(P \wedge Q) \vee (R \supset S)$  è invalida.

Calcolo tutti i possibili  $I$ .

Prendo  $I = \{P\}$  abbiamo che:

$$\begin{aligned} & (\text{True} \wedge \text{False}) \vee (\text{False} \supset \text{False}) \\ & \quad \text{False} \vee \text{True} \\ & \quad \text{True} \end{aligned}$$

In questo caso **UNSAT**( $A$ ) ritornerà "NO" perchè la formula è soddisfabile.

## II.2.6 Correlazioni tra validità soddisfacibilità e insoddisfabilità

Queste 3 proprietà sono legate tra di loro.

**Proposizione 1:** se una formula è valida allora è soddisfabile e anche non insoddisfabile.

$$\text{valida} \supset \text{soddisfabile} \supset \neg \text{insoddisfabile}$$

**Proposizione 2:** se una formula è insoddisfabile allora è non soddisfabile e non valida.

$$\text{insoddisfabile} \supset \neg \text{soddisfabile} \supset \neg \text{valida}$$

**Proposizione 3:** data una formula  $A$  allora vale che:

$A$	$\neg A$
valida	insoddisfabile
soddisfabile	$\neg$ valida
$\neg$ valida	soddisfabile
insoddisfabile	valida

**Proposizione 4:** Per un qualsiasi insieme finito  $\Gamma$  di formule ( $A_1, \dots, A_n$  con  $n \geq 1$ ) possiamo dire che  $\Gamma$  è:

- Valido se e solo se  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$  è valida.
- Soddisfabile se e solo se  $A_1 \vee \dots \vee A_n$  è soddisfabile.
- Insoddisfabile se e solo se  $A_1 \vee \dots \vee A_n$  è insoddisfabile

## II.2.7 Conseguenza logica

Possiamo capire se una qualsiasi  $T_1 \models T_2$  è valida applicando l'algoritmo **LOGCONS**( $T_1, T_2$ ) come segue:

- **Input:**  $T_1$  è la teoria di partenza che assumo essere vera mentre  $T_2$  è quella che deve seguire o meno  $T_1$ .
- **Output:** ritorna "YES" se  $T_2$  segue da  $T_1$ , "NO" altrimenti.
- Possiamo ora verificare che sia una conseguenza logica come segue:
  - Genero tutte le interpretazioni utili  $I$ .
  - Applico sistematicamente **MCHECK**( $I, T_1$ ) con i seguenti risultati:
    1. Se **MCHECK**( $I, T_1$ ) ritorna "YES" applico **MCHECK**( $I, T_2$ ) che se ritorna "NO" faccio ritornare "NO" da tutto.
    2. Se non ci sono più  $I$  da analizzare ritorno "YES".
- **LOGCONS**( $T_1, T_2$ ) compie una lazy evaluation quando una chiamata ritorna "NO".

## II.2.8 Equivalenza logica

Possiamo capire se una qualsiasi  $T_1$  e  $T_2$  sono logicamente equivalenti con l'algoritmo **LOGEQ**( $T_1, T_2$ ) come segue:

- **Input:**  $T_1$  è la teoria di partenza che assumo essere vera mentre  $T_2$  è quella che deve essere equivalente o meno  $T_1$ .
- **output:** ritorna "YES" se sono equivalenza logica, "NO" altrimenti.
- Possiamo verificare che due teorie sono un'equivalenza logica applicando l'algoritmo:
  - Genero le interpretazioni che potrebbero essermi utili.
  - Applico **MCHECK**( $I, T_1$ ) e **MCHECK**( $I, T_2$ ).
  - Se i risultati sono diversi ritorno "NO", ritorno "YES" altrimenti.



## Chapter II.3

# La procedura di decisione DPLL

### II.3.1 Nozioni di base

SAT o UNSAT sono delle proprietà chiave che indicano se una teoria può essere applicata in pratica.

PL SAT è un problema NP-completo quindi tutti i problemi NP-completi possono essere codificati in SAT.

**Teorema di deduzione:** data  $\Gamma$ , se  $\phi \models \psi$  allora  $\Gamma \models \phi \supset \psi$  con  $\Gamma$  possibilmente vuota.

Questo ci permette di ridurre il problema dalla verifica della conseguenza logica ad PL SAT.

PL SAT può essere ridotto con l'uso di CNF PL SAT (Conjunctive Normal Form), a questo punto CNF SAT può essere risolto in modo molto efficiente usando l'euristica.

### II.3.2 CNF (Conjunctive Normal Form)

Definizioni:

- **Letterale:** è o una variabile proposizionale oppure il negato di una variabile proposizionale, due esempi sono le formule  $p$  e  $\neg p$ .
- **Clausole:** è una disgiunzione ( $\vee$ ) di letterali.
- **CNF (Conjunctive Normal Form):** una formula è in CNF se è una congiunzione di varie clausole per esempio:

$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r$$

Una CNF ha sempre la seguente formula:

$$(L_{(1,1)} \vee \dots \vee L_{(1,n_1)}) \wedge \dots \wedge (L_{(m,1)} \vee \dots \vee L_{(m,n_m)})$$

Scritto anche come:

$$\bigwedge_{i=1}^m (\bigvee_{j=1}^{n_j} L_{i,j})$$

dove  $L_{i,j}$  è il  $j$ -esimo letterale della  $i$ -esima formula.

Proprietà delle clausole:

- L'ordine dei letterali in una clausola non importa  $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$ , infatti  $(p \vee q \vee r \vee \neg r) \equiv (\neg r \vee q \vee p \vee r)$ .
- Alcuni letterali possono essere uniti, se una clausola c'è più di un'occorrenza di un letterale posso spostare i due uguali vicini per unirli  $\phi \vee \phi \equiv \phi$ , infatti  $(p \vee q \vee r \vee q \vee \neg r) \equiv (p \vee q \vee r \vee \neg r)$ .
- Le clausole sono insiemi di letterali, possiamo costruire un insieme togliendo le disgiunzioni e ignorando le ripetizioni, infatti  $(p \vee q \vee r \vee \neg r)$  è rappresentato da  $\{p, q, r, \neg r\}$ .

Proprietà delle formule CNF:

- L'ordine delle clausole non importa se una formula CNF  $\phi$  è ottenuta riordinando i termini di una formula CNF  $\phi'$  allora  $\phi \equiv \phi'$ .

- Le clausole uguali posso essere unite in una unica clausola.
- Una formula in CNF può essere vista come un insieme clausole.
- **Esistenza:** ogni formula può essere riscritta in CNF.
- **Equivalenza:**  $\models \text{CNF}(\phi) \equiv \phi$ .
- **Funzione CNF:** data una formula PL  $\phi$  la funzione  $\text{CNF}(\dots)$  che trasforma  $\phi$  nella sua forma CNF è definita ricorsivamente:

$$\begin{aligned}
\text{CNF}(p) &= p \text{ se } p \in \mathbf{PROP} \\
\text{CNF}(\neg p) &= \neg p \text{ se } p \in \mathbf{PROP} \\
\text{CNF}(\phi \supset \psi) &= \text{CNF}(\neg \phi) \otimes \text{CNF}(\psi) \\
\text{CNF}(\phi \wedge \psi) &= \text{CNF}(\phi) \wedge \text{CNF}(\psi) \\
\text{CNF}(\phi \vee \psi) &= \text{CNF}(\phi) \otimes \text{CNF}(\psi) \\
\text{CNF}(\phi \equiv \psi) &= \text{CNF}(\phi \supset \psi) \wedge \text{CNF}(\psi \supset \phi) \\
\text{CNF}(\neg \neg \phi) &= \text{CNF}(\phi) \\
\text{CNF}(\neg(\phi \supset \psi)) &= \text{CNF}(\phi) \wedge \text{CNF}(\neg \psi) \\
\text{CNF}(\neg(\phi \wedge \psi)) &= \text{CNF}(\neg \phi) \otimes \text{CNF}(\neg \psi) \\
\text{CNF}(\neg(\phi \vee \psi)) &= \text{CNF}(\neg \phi) \wedge \text{CNF}(\neg \psi) \\
\text{CNF}(\neg(\phi \equiv \psi)) &= \text{CNF}(\phi \wedge \neg \psi) \otimes \text{CNF}(\psi \wedge \neg \phi)
\end{aligned}$$

Dove  $(C_1 \wedge \dots \wedge C_n) \otimes (D_1 \wedge \dots \wedge D_m)$  è definito come:

$$(C_1 \vee D_1) \wedge \dots \wedge (C_1 \vee D_m) \wedge \dots \wedge (C_n \vee D_1) \wedge \dots \wedge (C_n \vee D_m)$$

### Esempio di CNF

Proviamo ora a trasformare in CNF la seguente formula:

$$\begin{aligned}
& p1 \equiv (p2 \equiv (p3 \equiv (p4 \equiv (p5 \equiv p6)))) \\
& \text{CNF}(p1 \supset (p2 \equiv (p3 \equiv (p4 \equiv (p5 \equiv p6)))) \wedge \text{CNF}((p2 \equiv (p3 \equiv (p4(p5 \equiv p6)))) \supset p1) \\
& \quad \vdots
\end{aligned}$$

la lunghezza della formula diventa di lunghezza esponenziale se si continua, nel caso peggiore la formula  $\text{CNF}(\phi)$  è esponenzialmente lunga rispetto a  $\phi$  però calcolare la validità/insoddisfabilità di una formula CNF richiede un tempo lineare.

### II.3.3 Soddisfabilità di una formula in CNF

Sia  $\text{CNF}(\phi) = C_0, \dots, C_n$  dove  $C_0, \dots, C_n$  sono le clausole in  $\text{CNF}(\phi)$ , allora vale che:

- $I \models \phi$  se e solo se  $I \models C_i$  per ogni  $i=0, \dots, n$ .
- $I \models C_i$  se e solo se per un letterale  $k \in C_i$ ,  $I \models k$ .

Per vedere se un modello  $I$  soddisfa  $N$  non abbiamo bisogno di conoscere tutti i valori dei letterali che appaiono in  $N$ . Per esempio se  $I(P)=\text{True}$  e  $I(q)=\text{false}$  possiamo dire che  $I \models \{\{p, q, \neg r\}, \{\neg q, s\}\}$ .

Possiamo usare una funzione parziale per assegnare ad alcune variabili dell'alfabeto il valore di verità, grazie a questa valutazione parziale possiamo dire che i letterali o le clausole sono True, False o Undefined.

- **True:** una clausola è True se secondo  $I$  almeno uno dei suoi letterali è True.
- **False:** una clausola è falsa se tutti i suoi letterali sono falsi.
- **Undefined:** quando il valore di verità dei suoi letterali è irrilevante per l'interpretazione corrente.

**Semplificazione di formule attraverso letterali positivi:** per una formula in CNF  $\phi$  ed il termine  $p$  allora  $\phi|_p$  indica la formula ottenuta da  $\phi$  con:

- Rimpiazzando tutte le occorrenze di  $p$  con il valore  $\top$ .
- Semplificando il risultato rimuovendo:
  - Le clausole contenenti il termine disgiuntivo  $\top$ .
  - I letterali  $\neg\top = \perp$  nelle formule rimanenti.

**Semplificazione di formule attraverso letterali negativi:** per una formula in CNF  $\phi$  ed il termine  $p$  allora  $\phi|_{\neg p}$  indica la formula ottenuta da  $\phi$  con:

- Rimpiazzando tutte le occorrenze di  $\neg p$  con il valore  $\perp$ .
- Semplificando il risultato rimuovendo:
  - Le clausole contenenti i termini di disgiunzione  $\neg\top = \perp$ .
  - I letterali  $\top$  nelle clausole rimanenti.

**Soddisfabilità di una CNF:** sia una  $CNF(\phi) = C_0 \dots C_n$  dove i termini sono le clausole delle formula, iteriamo il processo di valutazione letterale, alla fine possiamo finire con due alternative:

1.  $\{\}$ , cioè un insieme vuoto di clausole quindi  $\phi$  è soddisfabile.
2.  $\{\dots\{\}\dots\}$  se sono riuscito a semplificare solo parte delle clausole vuol dire che  $\phi$  è insoddisfabile.

### Esempio

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$$

Prima cosa faccio il merge delle clausole uguali:

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$$

Ora divido in insiemi:

$$\{\{p, q\}, \{p, \neg p\}, \{\neg q, q\}, \{\neg q, \neg p\}\}$$

Posso ora applicare una semplificazione per termini positivi in  $p$  quindi  $\phi|_p$

$$\{\{\top, q\}, \{\top, \perp\}, \{\neg q, q\}, \{\neg q, \perp\}\}$$

Rimango quindi con:

$$\{\{q\}, \{\neg q, q\}, \{\neg q\}\}$$

Semplifico ora in  $\neg q$  quindi  $\phi|_{\neg q}$

$$\{\{\perp\}, \{\top, \perp\}, \{\top\}\}$$

Semplificando rimango con  $\{\}$  quindi la formula è soddisfabile.

## II.3.4 La procedura di decisione

### II.3.4.1 Semplificazione con unità di propagazione

**Clausola unita:** se una formula in CNF  $\phi$  contiene una clausola  $C = \{I\}$  che consiste un singolo letterale  $I$  nel suo insieme.

### Esempio

Prendiamo la formula in CNF  $\phi = \{\{p\}, \{\neg p\}, \{\neg q, r\}\}$  è soddisfabile solo se se esiste un'interpretazione  $I$  tale che  $I \models \phi$ .

$$\begin{aligned} & \{\{p\}, \{\neg p\}, \{\neg q, r\}\}|_p \\ & \{\{\top\}, \{\perp\}, \{\neg q, r\}\} \\ & \{\{\}, \{\neg q, r\}\} \\ & \{\dots, \{\}, \dots\} \end{aligned}$$

Quindi la formula non è soddisfabile.





## Chapter II.4

# Decisione procedura basata su Tableau

### II.4.1 Nozioni di base

Dobbiamo capire perchè i Tableau possono risolvere il problema di SAT.

**Principio di confutazione:** ci permette di trasformare un problema di conseguenza logica in uno di insoddisfabilità.

$$\Gamma \models \phi \text{ se e solo se } \Gamma \cup \{\neg\phi\}$$

Come con DPLL vengono dati input all'algoritmo solo le formule rilevanti per la valutazione.

Anche se con i Tableau non serve che la formula sia in CNF e il passo di inferenza è diverso da DPLL anche se creano un algoritmo per la nozione di implicazione.

I Tableau sono, infatti, una rappresentazione diretta della definizione di implicazione questo lo rende concettualmente più semplice da capire ma anche più difficile da scalare su formule complesse.

### II.4.2 Sistema Tableau

**Tableau:** il metodo basato su Tableau è composto da 3 elementi:

1. Un insieme di premesse  $\Gamma$  e di conclusioni  $\phi$ .
2. Un compito, provare che  $\Gamma \models \phi$ .
3. Le procedure che dimostrano che  $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$  non è soddisfabile, oppure che  $\Gamma \cup \{\phi\}$  è valido quindi soddisfabile

**Tableau proposizionali:** è un albero con radice dove:

- Ogni nodo indica una proposizione.
- La radice è la formula che dobbiamo provare insoddisfabile.
- I fogli di un nodo  $n$  sono generati con apposite regole di espansione ad  $n$  o ad uno dei suoi antenati.

#### II.4.2.1 Regole $\alpha$

$$\begin{array}{c} \phi \wedge \psi \\ \downarrow \\ \phi \\ \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\phi \vee \psi) \\ \downarrow \\ \neg\phi \\ \neg\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\phi \supset \psi) \\ \downarrow \\ \phi \\ \neg\psi \end{array}$$

Le regole  $\alpha$  sono congiuntive quindi creano un solo figlio.

**Esempio**

$$\begin{array}{c}
\neg(p \supset (q \vee \neg(p \wedge r))) \\
\downarrow \\
p \\
\neg(q \vee \neg(p \wedge r)) \\
\downarrow \\
\neg q \\
p \wedge r \\
\downarrow \\
p \\
r
\end{array}$$

**II.4.2.2 Regole  $\beta$** 

$$\begin{array}{c}
\phi \vee \psi \\
\wedge \\
\phi \quad \psi
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\neg(\phi \wedge \psi) \\
\wedge \\
\neg\phi \quad \neg\psi
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\phi \supset \psi \\
\wedge \\
\neg\phi \quad \psi
\end{array}$$

Le regole  $\beta$  sono disgiuntive quindi creano due rami distinti che sono entrambi da completare, e quindi bene lasciare queste regole per ultime e usarle solo se necessario.

**II.4.2.3 Controllare la soddisfacibilità**

Se vogliamo controllare che  $\Gamma$  sia soddisfabile metto nella radice del Tableau  $\Gamma$  e applico le regole, se almeno un ramo non chiude vuol dire che  $\Gamma$  è soddisfabile e dal quel ramo possiamo prendere i valori da dare ai termini atomici.

**II.4.2.4 Derivazione**

Siano  $\phi$  una formula proposizionale e  $\Gamma$  un insieme di formule proposizionali, scriveremo  $\Gamma \vdash \phi$  se esiste un Tableau chiuso per  $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ .

**II.4.2.5 Utilità**

- Una formula è insoddisfabile se e solo se soddisfabile, per testare che  $\phi$  sia valida basta testare che il Tableau chiuda tutti i rami di  $\neg\phi$ .
- Per verificare che  $\phi$  è una conseguenza logica di  $\Gamma$  quindi  $\Gamma \models \phi$  basta verificare con un Tableau che  $\Gamma \wedge \neg\phi$  chiuda un ramo.
- Per verificare l'equivalenza logica basta ricondursi al caso di conseguenza logica.

Per riassumere:

Formula	Tableau	Significato
$p$	Chiude	$p$ è insoddisfabile, $\neg p$ è valida
$p$	Aperto	$p$ è soddisfabile
$\neg p$	Chiude	$\neg p$ è insoddisfabile, $p$ è valida
$\neg p$	Aperto	$\neg p$ è soddisfabile

**II.4.2.6 Teoremi finali**

- **Terminazione:** per ogni Tableau proposizionale dopo un numero finito di espansioni nessuna regola è più applicabile.
- **Equità:** definiamo così un Tableau proposizionale quando ogni non-letterale di un ramo viene analizzato in quel ramo.
- **Solidità:** Se  $\Gamma \vdash \phi$  allora  $\Gamma \models \phi$ .
- **Completezza:** Se  $\Gamma \models \phi$  allora  $\Gamma \vdash \phi$ .