Logica 2022/2023

Blascovich Alessio
alessio.blascovich@studenti.unitn.it

Contents

Part I

Modellazione

Chapter 1

Rappresentazione

1.1 Rappresentazione mentale

- **Mondo:** Il mondo è ciò che assumiamo esista.
- **Rappresentazione mentale:** Una rappresentazione mentale è una parte del mondo che descrive il mondo stesso, quindi esiste corrispondza tra cosa esiste nel mondo e una rappresentazione mentale.
  La rappresentazione mentale permette di agire nel mondo e di interagire con altri umani.
- **Rappresentazione mentale analogica:** Una rappresentazione analogica è una semplice rappresentazione che si basa su ciò che percepiamo con i nostri sensi.
- **Rappresentazione linguistica mentale:** La rappresentazione che descrive il contesto di una rappresentazione analogica.
  Viene usata per:
  - **Descrivere:** cosa è successo nella rappresentazione mentale analogica.
  - **Comunicare:** con altri umani appropposito della rappresentazione e quindi del mondo.
  - **Imparare:** da cosa viene descritto.
  - **Motiva:** cioè cerca di distinguere quello che non sa da quello che già conosce.

1.2 Rappresentazione

- **Rapresentazione:** Ha due proprietà principali:
  - Pìù umani la percepiscono (come la rappresentazione mentale).
  - E' una parte dello stesso mondo che descrive.
- **Rappresentazione analogica:** Fa una mappatura uno a uno del mondo, considerando anche il contesto in cui ci si trova.
- **Linguistic representation:** Non la ho capita, ste cazzate filosofiche.

1.3 Modellazione

1.3.1 Modellazione

- **Modellazione:** La modellazione è l'attività che porta alla realizzazione di una rappresentazione attraverso una serie di rappresentazioni mentali intermedie.
- **Teoria:** Identifica la rappresentazione linguistica prodotta da attività di modellazione.
- **Modello:** E' una rappresentazione analogica data da un modello.
  Possiamo anche dire che sia il modello inteso dalla teoria e che T sia la teoria del modello M.
- **Modello mondiale:** Un modello mondiale M_W è una cappia data da teoria T e modello M_T legati dalla formula: $M_W = \langle T, M_T \rangle$.

1.3.2 Osservazioni

Nella maggior parte dei modelli mondiali, usati in applicationi CS/AI, è definita solo la teoria.
Il modello inteso è implicito visto che la rappresentazione mentale è simile tra le perone.
Questo modello viene seguito quando il costo degli errori è accettabile.

Alcune volte il modello semantico è sviluppato in seguito e non copre totalmente la semantica.

Alcune volte la mancanza di un modello esplicito porta alla genesi di un dialetto.
Nel caso particolare del IA questa mancanza fa compiere alla macchina azioni imprevedibili perchè impedisce alla macchina di capire quando sbaglia.

Chapter 2

Modellazione mentale

2.1 Conoscenza semantica

2.1.1 Teoria e modelli

- **Denotazione e semantiche:** Diremo che la teoria T denota il suo modello inteso M e scriveremo $T = D(M)$.. In modo alternativo possiamo dire che il modello M è la semantica intesa da T e scriveremo $M = S(T)$.

2.1.2 Frasi e fatti

- **Fatto:** Un modello $M = \{f\}$ è un insieme di fatti f, dove i fatti sono una rappresentazione analogica una parte della parte di mondo descritta da M.

- **Frase:** Una teoria $T = \{s\}$ è un insieme di frasi s, dove una frase è una rappresentazione linguistica di un insieme di fatti f.

- **Denotazione e semantiche:** Diremo che una frase s denota un fatto f e scriveremo $s = D(f)$.
  Alternarivamente, un fatto f è la semantica intesa da s e scriveremo $f = S(s)$.

2.1.3 Osservazioni

Assumiamo sempre che una frase $s \in T$ descriva uno o più fatti $f \in M$.
La nozione della descrizione linguistica e, in particolare, quella della toeria e della frase, possiamo sempre assumere si riferisca (la nozione) a una descrizione mentale possibilmente resa oggettiva tramite un modello che la descrive.

Non esistono rappresentazioni linguistiche senza referenze al mondo.

Una frase $s = D(f)$ può denotare più fatti la D è una relazione e non necessariamente una funzione.
In questi casi diremo che s è ambigua o polisemica (polisemica=esprime più significati).

Un fatto $f = S(s)$ può essere la semantica di più frasi s, allora anche S è una relazione e non per forza una funzione.
Per una fatto f ci sono infiti modi di denotarlo e per questo le frasi che denotano lo stesso fatto vengono dette sinonimi.

Se D e S sono entrambe funzioni allora sono una l'inversa dell'altra.

2.1.4 Toerie e modelli

- **Modello minore:** Siano due modelli $M = \{f\}$ e $\widehat{M} = \{f\}$ tali che $\widehat{M} \subseteq M$.
  Diremmo che $\widehat{M}$ è minore rispetto a M e che un fatto f tale che $f \in M$ e $f \notin \widehat{M}$ è detto al di fuori di $\widehat{M}$.

- **Teorie e modelli:** Sia $M = \{f\}$ un insieme diu fatti e $T = \{s\}$ un insieme di sequenze.
  Sia M_T un insieme minore di M, allora T è una teoria del modello M_T se e solo se $\forall\ s \in T$ abbiamo $s = D(f)$ per qualsiasi $f \in M_T$.
  Possiamo anche dire che M_T è un modello di T.

2.1.5 Osservazioni

Esistono modelli e teorie che sono dei singoletti, ma i due eventi sono indipendenti.

Modelli di fatti diversi possono rappresentare lo stesso mondo a diversi livelli di astrazione, analogamente vale anche per le teorie di frasi corrispondenti.

Più il modello è astratto meno dettagli contiene rispetto a un modello meno astratto.
Un modello meno astratto può comunque rappresentare una gran parte del mondo.

Un modello piccolo rappresenta una piccola parte del mondo, analogamente fanno le teorie.

2.1.6 Correttezza e completezza

- **Correttezza:** Sia $M_T \subseteq M$, allora una teoria T del modello M_T è corretta rispetto a M_T se e solo se: $\forall\ s \in T\ \exists f \in M_T \mid f = S(s)$, viene detta incorretta altrimenti.
- **Completezza:** Sia $M_T \subseteq M$, allora una teoria T di un modello M_T vinene detta dette corretta rispetto a M_T se e solo se $\forall\ f \in M_T\ \exists s \in T \mid s = D(f)$, viene detta icompleta altrimenti.
- **Correttezza e completezza:** Sia $M_T \subseteq M$, allora un teoria T di un modello M_T viene detta corretta e completa se rispetta entrambe le due condizioni.

2.1.7 Osservazioni

La maggior parte delle volte una toeria risulta incompleta perchè le persone descrivono solo parte di ciò che percepiscono .

La principale motivazione per l'incorreteza delle teorie è la mancanza di motivazioni.

In applicazione dove il costo per errore è elevato bisogna far rispettare sia correttezza sia completezza. Alcune volte la completezza non è raggiungibile, perciò bisogna preferira la correttezza alla completezza. Solitamente il metro per preferire completezza/correttezza è dato da motivazioni pratiche come studi probabilistici.

2.2 Semantica linguistica

2.2.1 Linguaggio e dominio

- **Dominio:** Un dominio $D = \{M\}$ è un insieme di modelli M.
- **Linguaggio:** Un linguaggio $L = \{T\}$ è un insieme di teorie T.
- **Denotazione e semantiche:** Diciamo che un linguaggio $L = \{T\}$ denota un dominio $D = \{M\}$ se descrive tutti i suoi modelli e scriveremo $L = Den(D)$.
  Possiamo anche dire che un dominio D è la semantica intesa da L scrivendo $D = S(L)$.

2.2.2 Osservazioni

Il dominio è definito come uno spazione o qualsiasi cosa noi possiamo immaginare, cosa non possibile con i modelli in quanto devono essere una rappresentazione della realtà.

Una situazione può essere modellata da diversi domini.
Uno stesso dominio può essere descritto da linguaggi differenti che si concentrano su aspetti diversi.
Queste due proprietà vengono dette eterogeneità semantica.

Un dominio è definito come $D = \{M\}$, ma ricordando la definizione di insieme di modelli come $M = \{f\}$ con $f \in M$ e $M \in D$.
Risulta che $M \subseteq D$, possiamo quindi dire che il dominio è l'insieme potenza (si, in italiano powerset è insieme potenza) dell'insieme dei fatti $\{f\}$.

Un linguaggio definito $L = \{T\}$ è un insieme di modelli T, un linguaggio può anche essere modllato come l'insieme $L = \{s\}$ di tutte le frasi $s \in L$ appartenenti alle teorie $T \in L$.
Concludiamo che $T \subseteq L$, ne risulta che un linguaggio è l'insieme potenza degll'insieme $\{s\}$.

2.3 Modellazione mentale

Possiamo pensare al modello mentale come formato da 4 componeneti:

1. **Linguaggio:** lo spazio di tutte le possibili teorie
2. **Dominio:** lo spazio di tutti i possibili casi
3. **Modello:** un insieme di fatti
4. **Teoria:** un insieme di frasi che descrivono i fatti nel modello.

2.3.1 Gap semantico

Il mondo causa la generazione del modello mentale con i suoi 4 componenti.
Il modelo mentale rappresenta sia il mondo analogico che quello linguistico, ma si discosterà sempre dal mondo per via del gap semantico.
Questo gap è dato dall'imperfezione umana, dai limiti dei nostri sensi e della nostra lingua.

Chapter 3

Modello mentale formale

3.1 Linguaggio informale

- **Termine:** è un elemento del linguaggio, il termine denota un insieme di entità del mondo.
- **Frase:** è un elemento del linguaggio, la frase denota un insieme di fatti.
- **Sintassi:** la sintassi di un linguaggio L, definito come $L = \{s\}$ un insieme di frasi s, è l'insieme di regole formali che ci permettono di definire tutte le frasi $s \in L$ partendo da primitive chiamate alfabeto.
- **Primita, atomica:** Un termine o frase è primitiva se appartiene all'alfabeto, si dice complesso in tutti gli altri.
  Una frase è atomica se è il caso base delle regole di formazione delle frasi.
  Frasi primitive sono atomiche ma non vale il contrario.
- **Sintassi 2:** la sintassi può anche essere definita come segue
  - Un insieme di termini primitivi chiamati termini alfabetici.
  - Un insieme di regola per la costruzione di termini.
  - Un insieme di regole per la formazione termine a frase.
  - Un insieme di frasi primitive chiamate frasi alfabetiche.
  - Un insieme di regola per la formazione di frasi.
  - Un insieme di regole per la formazione da frase a termine.

3.1.1 Algoritmo

Segue il processo Il linguaggio naturale ha una struttura molto più complessa per definire il linguaggio:

1. Dai termini primitivi definire di cosa si sta parlando.
2. Con i termini complessi si va a definire come definire le entità selezionate.
3. Con le frasi atomiche si definiscono le proprietà delle entità da testare.
4. Dalle frasi primitive si vano a definire le verità basiche.
5. Con le frasi complesse si definisce come comporre le descrizioni complesse.
6. Con i termini atomici costruire altri termini atomici dipendeti.

3.1.2 Osservazioni

- La sintassi permette di definire frasi dichiarative per composizione.
- Il linguaggio naturale ha una struttura molto più complessa ma può essere ridotta ad una sintassi formale.

3.1.3 Ambiguità di rappresentazione

- Ci sono infiniti modelli che rappresentano la stessa situazione nel mondo reale.
- Ci sono infinite teorie per la stessa rappresentazione analogica.
- Tutti i modelli e le teorie sono apprissimati.
- Teorie e modelli diversi seppur rappresentando la stessa cosa possono essere mutualmente esclusivi.
- E' importante non assumere che la nostra rappresentazione mentale sia la stessa degli altri.

3.2 Linguaggi semi-formali

3.2.1 Sintassi formale

- Una sintassi si dice **formale** se:
  - L'alfabeto è riconoscibile.
  - L'insieme di costruttori è finito.
  - Esiste un algoritmo per verificare la correttezza di un frase.
- **Linguaggio informale:** una sintassi che non è formale è detta informale e il linguaggio che genera è detto **linguaggio informale**.
- **Formula ben formulata (wff):** una frase generata da una sintassi formale è detta formula oppure formula ben formata.
  Una wff w_1 è definita sottoformula di una wff w_2 se w_1 è stata usata per costruire w_2.

3.2.2 Esempio

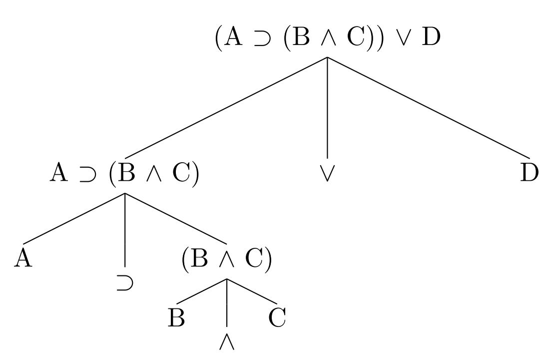
Definiamo un alfabeto riconosciuto:

- Frasi primitive = A, B, C, Q, R, ...
- Connettivi = $\wedge$, $\vee$, $\supset$
- Punteggiatura = (,)

Definiamo un insieme finito di costruttori:

- Ogni frase primitiva è una wff.
- Se A e B sono delle wff in L vale che:
  - A $\wedge$ B è una wff in L.
  - A $\vee$ B è una wff in L.
  - A $\supset$ B è una wff in L.
- Se A è una wff in L allora lo è anche (A).

Ora posso prendere in esempio la stringa (A $\supset$ (B $\wedge$ C)) $\vee$ D e costruire l'albero per rappresentarla.



3.2.3 Linguaggi formali

- Un linguaggio si dice **formale** se rispetta le seguenti proprietà:
  - Le formule ed i termini di L sono definiti da formule sintattiche.
  - Il dominio D denotato da L è formalmente definito.
    Chiamiamo D il dominio di interpretazione di L.
  - La denotazione Den di L, indicata con $L = Den(D)$ è una funzione:
    $$I : L \to D$$
    I è chiamata funzione di interpretazione di L.
- Un linguaggio non formale definito da sintassi formale è chiamato **linguaggio semi-formale**.

3.3 Linguaggi formali

Riprendendo la definizione precedente.

- Un linguaggio si dice **formale** se rispetta le seguenti proprietà:
  - Le formule ed i termini di L sono definiti da formule sintattiche.
  - Il dominio D denotato da L è formalmente definito.
    Chiamiamo D il dominio di interpretazione di L.
  - La denotazione Den di L, indicata con $L = Den(D)$ è una funzione:
    $$I : L \to D$$
    I è chiamata funzione di interpretazione di L.

3.3.1 Linguaggi formali con frasi e termini atomici

- L'interpretazione di un termine è un elemento del dominio.
- E' possibile avere sinonimi ma non polisemia.
- La funzione simbolica è usata per generare termini complessi.
  Viene usata una funzione n-aria che denota lo spazio di tutti i possibili termini che possono essere costruiti.
- Le entità generate da queste funzioni sono tuple (n+1)-arie.

3.3.2 Esempi

1

Sia L un linguaggio formale, potrebbe essere eroneamente definito come segue:

- **Frasi dell'alfabeto** = {A,B}
  - A = "Fausto ha meno di 25 anni"
  - B = "Fausto è un professore di IA"
- **Regole di fomrazione delle frasi** = A, B sono le sole formule.
- **D** = { f_1 = "il fatto cheFausto ha 60 anni", f_2 = "il fatto cheFausto è un professore di IA" }
- **Interpretazione** $I : L \to D$
  - $I(A)$ =??? I non è una funzione interpretativa di L, devo aggiungere fatti o abbandonare A.
  - $I(B) = f_2$

2

Il linguaggio formale L che prima era sbagliato potrebbe essere ridefinito come:

- **Frasi dell'alfabeto** = {A,B}
  - A = "Fausto ha meno di 25 anni"
  - B = "Fausto è un professore di IA"
- **Regole di fomrazione delle frasi** = A, B sono le sole formule.
- **D** = { f_1 = "il fatto cheFausto ha 60 anni", f_2 = "il fatto cheFausto è un professore di IA", f_3 = "il fatto che fausto abbia meno di 25 anni" }
- **Interpretazione** $I : L \to D$
  - $I(A) = f_3$
  - $I(B) = f_2$

3.3.3 Proposizioni

- **Proposizione(secondo Aristotele):** una proposizione è una frase che afferma o nega un predicato.
- **Proposizione:** è una formula che può essere o vera o falsa.

3.3.4 Osservazioni

Consideriamo le tre seguenti frasi.

1. A = "Fausto ha meno di 25 anni"
2. B = "Fausto è un professore di IA"
3. C = "Fausto ha 60 anni"

Possiamo interpretare queste frasi come dei fatti detti $I(A) = f_1$, $I(B) = f_2$, $I(C) = f_3$.
Possiamo anche interpretare il loro valore di verità $I\prime(A) = F$, $I\prime(B) = T$, $I\prime(C) = T$.
Abbiamo cambiato il dominio di interpretazione da D a $D\prime$, quindi dobbiamo anche cambiiare la funzione:

$$I : L \to D \Rightarrow I\prime : L \to D^L$$

Dove $D = \{f\}$ e D^L è un insieme di due distinti valori di proposizioni che stanno per vero, falso.
Riferendoci all'esempio precedente i due domini di interpretazione D e D^L intendono due insiemi molto diveri.

1. D è l'insieme dei fatti che descrivono il mondo.

$$D = \{I(A) = f_1, I(B) = f_2, I(C) = f_3\}$$

2. D^L è l'insieme di giudizi che dicono quali sono i casi nel nostro mondo.

$$D^L = \{I\prime(A) = F, I\prime(A) = F, I\prime(B) = F, I\prime(B) = F, I\prime(C) = F, I\prime(C) = F\}$$

Il passo tra D e D^L risolve il problema dei domini, possiamo affermare che un fatto certo non può essere casuale.

3.3.5 Linguaggio formale con proposizioni

3.3.6 Esempio

- **Alfabeto** = $\{A, B\}$
- **Dominio** D = {0, 1}
- **Interpretazione** $I : L \to D$
- $\mathbf{T}_1$ = {B}, $\mathbf{T}_2$ = {A, B}
- $\mathbf{M}_1$ = {I(B)}, $\mathbf{M}_2$ = {I(A), I(B)}

3.3.7 Osservazioni

Consideriamo l'esempio precedente:

- L = {A, B}
- T_1 ={B} T_2 = {A, B}
- D = {1, 0}
- I1(L) = {I1(B)=1, I1(A)=0} = {I1(B)}: I1 è un modello M_1 di T_1 ma non di T_2.
- I2(L) = {I2(B)=1, I2(A)=1} = {I2(B), I2(A)}: I2 è un modello M_2 di T_1 e di T_2.
- I3(L) = {I3(B)=0, I3(A)=1} = {I3(A)}: I3 non è un modello M di T_1 e T_2.
- I4(L) = {I4(B)=0, I4(A)=0} = ∅: I4 non è un modello M di T_1 né di T_2.

Una teoria viene considerata incompleta/parziale se descrive il vero valore **di un sotto insieme** di formule atomiche del linguaggio.
Un modello è un interpretazione che soddisfa tutte le formule di una teoria.
Una teoria può avere più modelli.

3.3.8 La negazione

Sia L un linguaggio formale, $I : L \to D$ la sua funzione di interpretazione con $D = \{0, 1\}$ e sia ¬ un simbolo primitivo dell'alfabeto allora:

- Se I(A)=1 allora I(¬A)=0
- Se I(A)=0 allora I(¬A)=1

Dove ¬A si legge come "non A".

3.3.9 Osservazione

Una teoria T che contiene sia la formula A che ¬A non ha modello e viene detta **contradditoria**.

3.3.10 Relazione di implicazione

Sia L un linguaggio formale, $I : L \to D$ la sua funzione di interpretazione con $D = \{0, 1\}$, sia $T \subseteq L$ una teoria formale, sia $M \subseteq D$ un modello per T allora $\models_L$ è la funzione di implicazione che associa cosa è vero in M con le wff in T.

$$\models_L \subseteq M \times T$$

Possiamo anche scrivere:

$$M \models_L T$$

Dicendo che M implica T.

3.3.11 Negazione con implicazione

Sia L un linguaggio formale, la funzione di interpretazione $I : L \to D$ ...
Allora per ogni formula atomica $A \in L$:

- I ⊨ A se I(A)=True
- I ⊨ ¬A se non è vero che I ⊨ A (I ⊭ A)

3.3.12 Osservazioni

- Una teoria T che contiene sia la formula A che ¬A non ha modello e viene detta **contradditoria**.
- Per ogni formula A la formula A∧¬A viene detta **contraddizione**.
- Per ogni formula A la formula A∨¬A viene detta **tautologia**.

3.4 Modello mentale formale

3.4.1 Nozioni

Un modello formale è un modello formale in cui:

- La relaziona tra formule atomiche ed il dominio di interpretazione sono formalizzate da una funzione di interpretazione.
- Le relazione tra modello e teoria è formalizzata dalla relazione di implicazione.

La costruzione di un modello mentale formalizzato segue i seguenti step:

1. Il linguaggio è dato.
2. Dominio e funzione di interpretazione sono dati.
3. La funzione di implicazione è data.
4. Un modello è costruito assumendo che un certo insieme di fatti sia vero.
5. Ci sono **solo** 2 usi per un modello formale:
   (a) **Modellazione (apprendimento):** il modello formale viene creato/esteso.
   (b) **Ragionamento:** il modello formale viene usato per risolvere delle query.

Un sistema logic-based che ragiona su conoscenze e dati ha due componenti principali:

1. Una conoscenza di base (**KB**) tale che KB$\subseteq$L che è una teoria del mondo.
2. Un sistema di ragionamento che risponde alle query grazie al contenuto del KB.

Chapter 4

Teoria degli insiemi

4.1 Insieme

Insieme: una collezione di elementi la cui descrivono deve essere non ambigua ed univoca

4.1.1 Concetti di base

- **Insieme vuoto:** è l'insieme che non contiene elementi e si indica $\emptyset$.
- **Appartenenza:** a$\in$A indica che l'elemento a appartiene all'insieme A.
- **Non appartenenza:** è il contrario dell'appartenenza e si indica a$\notin$A.
- **Uguaglianza:** A = B se e solo A e B contengono gli stessi elementi.
- **Non uguaglianza:** se A e B non sono ugualu si indica con A $\neq$ B.
- **Sottoinsieme:** A$\subseteq$B indica che tutti gli elementi di A appartenegono anche a B.
- **Sottoinsieme proprio:** se e solo se A$\subseteq$B e A$\neq$B allora si dice che A$\subset$B.

4.1.2 Power set

Definizione: il power set di un insieme è l'insieme contenente tutti i sottoinsiemi di A.
Se l'insieme ha n elementi il suo power set ha 2^n elementi.

4.1.3 Operazioni sugli insiemi

Unione

Dati due insiemi A e B la loro unione A$\cup$B è defina come l'insieme di tutti gli elementi appartenenti sia ad A si che B.

Intersezione

Dati due insiemi A e B definiamo la loro intersezione A$\cap$B come l'insieme che contiene gli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B.

Differenza

Dati due insiemi A e B la loro differenza A$-$B è l'insieme A a cui sono stati tolti tutti gli elementi che aveva in comune con B.

Complemento

Dati due insiemi A e B tali che A$\subseteq$B defininiremo il complemenetare di A in B come l'insieme di tutti gli elementi che appartengono a B ma non ad A, lo indicheremo con $\bar{\mathrm{A}}$ oppure $\mathrm{C_B A}$.

4.1.4 Proprietà delle operazioni

Con lo stesso insieme:

- A∩A=A
- A∪A=A

Commutative:

- A∩B=B∩A
- A∪B=B∪A

Con l'insieme vuoto:

- A∩∅=∅
- A∪∅=A

Associative:

- (A∩B)∩C=A∩(B∩C)
- (A∪B)∪C=A∪(B∪C)

Dsitributive:

- A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)
- A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C)

Leggi di De Morgan:

- $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}=\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}$
- $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}=\bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}}$

4.1.5 Prodotto cartesiano

Dati deu insiemi A e B, definiamo il prodotto cartesiano di A e B come l'insieme delle tuple ordinate (a,b) tali che a∈A e b∈B.
Formalmente si può esprimere come:

$$A \times B = \{\text{(a,b) : a} \in \text{A and b} \in \text{B}\}$$

Oservazioni

- A×B≠B×A
- Il prodotto cartesiano può essere applicato ad n insiemi di insiemi A_1, A_2, …, A_n.
  $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$ sarà l'insieme ordinato di n-tuple $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ dove $\mathrm{x}_i \in \mathrm{A}_i$ per ogni $i = 1 \ldots n$

4.2 Relazioni

Definizione: una relazione R dall'insieme A ad un insieme B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano di A e B: R⊆A×B.
Se (x,y)∈R scriveremo xRy e diremmo "x è R-relazionato a y".
Una relazione binaria su un insieme A è un sotto insieme R⊆A×A.

Data una relazio e R da A a B:

- Il dominio di R è l'insieme Dom(R)={a∈A | esiste un b∈B che aRb}
- Il codominio di R è l'insieme Cod(R)={b∈B | esiste un a∈A che aRb}

4.2.1 Relazione inversa

Sia R una relazione da A a B, la relazione inversa di R è la relazione $R^{-1} \subseteq B \times A$ definita come:

$$R^{-1}=\{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$$

4.2.2 Proprietà delle relazioni

Sia R una relazione binaria A, allora R può avere le seguenti proprietà:

- **Riflessiva:** se e solo se aRa per ogni a∈A.
- **Simmetrica:** se e solo se aRb implica che bRa per ogni a,b∈A.
- **Transitiva:** se e solo se aRb e bRc implica che aRc per ogni a,b,c∈A.
- **Anti-simmetrica:** se e solo se aRb e bRa implica che a=b per ogni a,b∈A.

4.2.3 Relazione di equivalenza

Sia R una relazione binaria su un insieme A.
R è una relazione di equivalenza se e solo se soddisfa le seguenti proprietà:

- Riflessiva
- Simmetrica
- Transitiva

Le relazioni di equivalenza sono spesso indicate con $\sim$ oppure con $\equiv$.

4.2.4 Partizione di insiemi

Sia A un insieme , una partizione di A è una famiglia F di sottoinsiemi non vuoti tali che:

- L'unione di tutti i sottoinsiemi sia A.
- I sottoinsiemi sono disgiunti a coppie.

Ogni elemento di A apprtiene esattamente ad un insieme di F.

4.2.5 Classe di equivalenza

Sia A un insieme e $\equiv$ una relazione di equivalenza su A, dato x∈A definiamo classe di equivalenza X l'insieme di elementi $x' \in A$ tale che $x' \equiv x$, formalmente:

$$X=\{x' | x' \equiv x\}$$

E' possibile prendere ogni elemento di x per ottenere una classe di equivalenza X, la classe di equivalenza è denotata anche da [x].

4.2.6 Insieme quoziente

L'insieme quozienete di A è l'insieme delle classi di equivalenza definite da $\equiv$ su A, denotato da $A/\equiv$

Teorema

Data una relazione di equivalenza $\equiv$ su A, la classe di equivalenza definita da $\equiv$ su Aè una partizione di A.

Similmente, data una partizione di A, la relazione R definita come xRx' se e solo se x e x' appartengono allo stesso sottoinsieme, e una relazione di equivalenza.

4.2.7 Relazione di ordinamento

Sia A un insieme e R una relazione binaria su A.
R è un ordinamento parziale, denotato come $\leq$, se:

- **Riflessiva:** a$\leq$a
- **Anti-simmetrica:** a$\leq$b e b$\leq$a allora a=b.
- **Transitiva:** a$\leq$b e b$\leq$c allora a$\leq$c.

Se la relazione vale per tutti gli a,b$\in$A allora si dice ordinamento totale.
Una relazione è in ordine stretto, denotata con $<$, se:

- **Transitiva:** a$<$b e b$<$c allora a$<$c.
- Per ogni a,b$\in$A o a$<$b o b$<$a oppure a=b.

4.3 Funzioni

Dati due insiemi A e B, una funzione f da A a B è una relazione che associa ad ogni elemento di a in A esattamente un elemento un elemento b in B, denotata con:

$$\text{f: A} \rightarrow \text{B}$$

Il dominio di f è tutto l'insieme A.
L'immagine di ogni elemento a in A è l'elemento di b in B tale che b=f(a).
Il codominio di f è un sottoinsiemi di B, definito come segue:

$$\text{Im}_\text{f}=\{\text{b}\in\text{B} \mid \exists \text{ a}\in\text{A tale che b=f(a)}\}$$