METODO ELECTRE

(***El***imination et ***C***hoix ***T***raduisant la ***Ré***alité)

Los métodos de tipo ELECTRE se diferencian entre sí por:

1. problemática que intentan resolver
2. informaciones inter e intra-atributos utilizadas
3. cantidad de relaciones de superación que se construyen e investigan.

Utilizan el concepto de pesos (w_j) como una medida de la importancia que para el decisor tiene cada atributo.

A partir de estos pesos, se construyen:

- ✓ ***INDICES DE CONCORDANCIA***
- ✓ ***INDICES DE DISCORDANCIA***

Que se utilizarán para construir las RELACIONES ***DE SUPERACION***

ELECTRE I: pretende obtener un subconjunto N de alternativas, tal que toda alternativa no contenida en N es superada por lo menos por una alternativa de N. Este subconjunto, que se intenta sea lo más pequeño posible, es el conjunto donde se encuentra la solución para el problema.

Consta de dos etapas importantes:

I. Construcción de relaciones de superación
II. Análisis de las relaciones de superación determinadas

Problemas que resuelve: selección de alternativas.

OBJETIVO:

Obtener un subconjunto de alternativas, lo más pequeño posible, donde se encuentre la solución para el problema.

A través del uso de relaciones de superación realiza una partición en el conjunto de alternativas para obtener el mínimo subconjunto dominante denominado núcleo o kernel, que tiene las siguientes características:

- ✓ Una alternativa que pertenece al conjunto N, no es superada por ninguna otra alternativa de N.
- ✓ Para toda alternativa que no pertenece al conjunto N, existe alguna alternativa que pertenece a N que la supera.

ETAPAS:

I. Construcción de relaciones de superación
II. Análisis de las relaciones de superación determinadas

I.- CONSTRUCCIÓN DE RELACIONES DE SUPERACIÓN:

- Conjunto finito $\mathcal{X}$ de alternativas.
- Conjunto $\mathbb{J}$ de atributos.
- Matriz de decisión con m alternativas y n atributos, cuyos elementos $a_{ij} = u_j(x_i)$ representan la evaluación de cada alternativa con respecto a cada atributo
- Los a_{ij} deben estar normalizados
- Asociar a cada par de alternativas (x_i, x_k) un índice de concordancia y un índice de discordancia.

CONJUNTO DE CONCORDANCIA entre x_i y x_k, formado por todos los atributos en los cuales la alternativa x_i es preferible o indiferente a x_k ($x_i \succeq x_k$)

$C(x_i, x_k) = \{ j \ / \ x_i \succeq_j x_k \}$ donde $j=1,\dots,n$

ÍNDICE DE CONCORDANCIA:

Mide el peso de los atributos en los cuales $x_i \succeq x_k$, es decir, suma los pesos de los atributos que pertenecen a la concordancia entre x_i y x_k

Forma de cálculo:

$$C_{i,x} = \sum_{j \in C(x_i, x_k)} w_j$$

Donde los w_j representan los pesos normalizados, de manera que $\sum w_j = 1$.

Siempre

$$0 \leq c_{i,k} \leq 1$$

Además:

- $c_{i,k} = 1$ si y sólo si x_i supera a x_k en todos los atributos y
- $c_{i,k} = 0$ si y sólo si x_k supera a x_i en todos los atributos.

Algunos autores sugieren en caso de indiferencia entre dos alternativas ($u(x_i)=u(x_k)$), asignarle a cada una la mitad del peso (w_j). En este caso el número de cálculos a realizar disminuye considerablemente, la cantidad de índices de concordancia a calcular será igual a $\frac{m(m-1)}{2}$, dado que:

- El índice de concordancia $c_{ki} = 1 - c_{ik}$
- Las alternativas no se comparan con sí mimas

CONJUNTO DE DISCORDANCIA entre x_i y x_k, formado por los atributos para los cuales x_k es preferible a x_i

$$D(x_k, x_i) = \{ j \ / \ x_k \succ_j x_i \} \qquad \text{para } j = 1, \dots, n$$

Este conjunto es el complemento del conjunto de Concordancia.

INDICE DE DISCORDANCIA:

Es la mayor diferencia de utilidad entre x_i y x_k, para los atributos en los que x_k es preferible a x_i**,** dividida por la máxima diferencia intra–atributo posible para todas las alternativas y todos los atributos.

Forma de cálculo:

$$d_{i,k} = \left(\frac{1}{d}\right) \max_{j \in D(x_i, x_k)} \left(u_j\left(x_i\right) - u_j\left(x_k\right)\right)$$

Donde $d = \max_{j} \max_{(x_i, x_k) \in X^2} \left(u_j\left(x_k\right) - u_j\left(x_i\right)\right)$ para j=1……n

Siempre

$$0 \leq d_{i,k} \leq 1$$

Además:

$d_{i,k} = 0$ si y sólo si x_i es preferible a x_k en todos los atributos.

Para construir las **Relaciones de Superación Globales** se debe establecer:

- ***limite de concordancia "c"***
- ***limite de discordancia "d"***

De tal forma que:

$x_i \; S \; x_k$ si y sólo si

$c_{i,k} \geq \mathbf{c}$ y $d_{i,k} \leq \mathbf{d}$

Podemos resumir estas relaciones en una matriz de Superación **S**, en la cual los elementos serán ceros o unos, según si se presenta la relación de superación o no.

Análisis de las relaciones de superación determinadas:

La relación de superación se representa por un grafo:

- los *vértices* representan las alternativas
- los *arcos* representan la relación de superación

En este grafo o red, se busca identificar un subconjunto N de alternativas tal que:

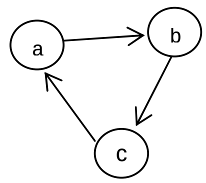
$\forall \; x_k \notin N, \; \exists \; x_i \in N \; / \; x_i \; S \; x_k$ y además

$\forall \; x_i, x_h \in N, \; x_i \; NC \; x_h$

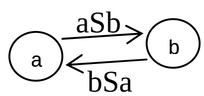
Particularidades de los Grafos

Grafos con circuitos

Un circuito es una secuencia de arcos con la misma orientación, en el cual no puede identificarse un vértice inicial y uno final. Ejemplo:



La presencia de circuitos en un grafo determinará la existencia o no de núcleos.
Un circuito de longitud dos, es decir que, aSb y bSa, implica que aIb:



Asimismo se puede afirmar que:

→ Todo grafo sin circuito posee un único núcleo.

→ Todo grafo sin circuito de longitud impar tiene núcleo.

Observemos los siguientes grafos:

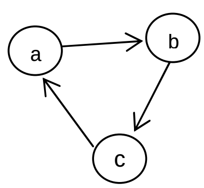


Figura 1

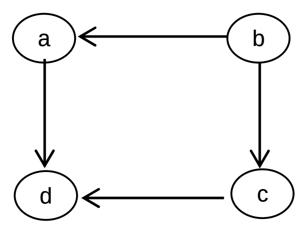


Figura 2

En la figura 1 tenemos un grafo con un circuito de longitud impar y por lo tanto no tiene núcleo. En la Figura 2 tenemos un grafo con un circuito de longitud par y en él podemos observar que existen dos núcleos: {a, c} y {b, d}.

Como la existencia de circuitos (ciclos) puede significar que no existe núcleo o que éste no es único, Roy propone la eliminación de los ciclos considerando que desde un punto de vista de selección si se da que a→b→c→a el decisor no será capaz de escoger entre estas alternativas, entonces podrán considerarse a todas ellas como una sola alternativa virtual r={a, b, c} y que ocupará el lugar del circuito en el grafo. De esta manera este nuevo grafo sin circuitos tendrá un solo núcleo.

Un Ejemplo:

Una familia desea adquirir un automóvil, para ello está considerando cuatro posibles alternativas.

Los atributos que analiza para tomar la decisión son tres: *precio*, *confort* y *consumo* de combustible, entendiéndose por consumo la cantidad de Km que recorre con un litro de combustible.

La siguiente tabla indica la evaluación de cada alternativa con respecto a cada atributo:

Alternativas	Atributos		
	Precio	Confort	Consumo
1	18.000	5	8
2	20.500	6	5
3	24.700	6	4
4	22.800	8	7
Pesos	5	2	3

I. Primer paso:

Normalizar todos los valores de la tabla y los pesos

<u>Criterio de normalización</u>: cociente entre el elemento a normalizar y la suma total del atributo o la suma total de los pesos.

Así obtenemos la siguiente tabla:

Alternativas	Atributos		
	Precio	Confort	Consumo
1	0,209	0,20	0,333
2	0,238	0,24	0,208
3	0,287	0,24	0,167
4	0,265	0,32	0,292
Pesos	0,5	0,2	0,3

II. Segundo paso:

Calcular los índices de concordancia

En este caso, analizamos un criterio a minimizar (precio) y dos a maximizar (confort y consumo).

Por ejemplo para las alternativas 1 y 2:

$$c_{1,2} = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

Efectuando los cálculos para todos los pares de alternativas posibles, obtendremos la matriz C, que agrupa todos los índices de concordancia:

$$C = \begin{bmatrix} & 0,8 & 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & & 1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 1 & \end{bmatrix}$$

III. Tercer paso:

Calculamos los índices de discordancia

	Precio (Min)	Confort (Max)	Consumo (Max)
1	0,209	0,2	0,333
2	0,238	0,24	0,208
3	0,287	0,24	0,167
4	0,265	0,32	0,292

1 y 2	0,029	0,04	0,125
1 y 3	0,078	0,04	0,166
1 y 4	0,056	0,12	0,041
2 y 3	0,049	0	0,041
2 y 4	0,027	0,08	0,084
Max	0,078	0,12	0,166

Max **0,166**

Donde $\boldsymbol{d} = \max_j \left[0,078;\ 0,12;\ 0,166\right] = 0,166$

El vector $\left[0,078; 0,12; 0,166\right]$ resume las diferencias de utilidad máxima entre los elementos de cada una de las columnas.

El valor ***d*** puede determinarse fácilmente calculando la diferencia entre el máximo y el mínimo valor de la matriz que resume las utilidades.

- Por ejemplo para las alternativas 2 y 4, considerando los atributos para los cuales la x_4 es preferible a la alternativa x_2:

$$d_{2,4} = \left(\frac{1}{d}\right) \max_{j \in D(x_i, x_k)} \left(u_j\left(x_i\right) - u_j\left(x_k\right)\right)$$

$$\mathrm{d}_{2,4} = \frac{1}{0,166} \text{máx}\left[0,08;\ 0,084\right]$$

$$d_{2,4} == \frac{0,084}{0,166}$$

$$\mathrm{d}_{2,4} = 0,506$$

- Para las alternativas 3 y 4, considerando los atributos para los cuales la x_4 es preferible a la alternativa x_3:

$$\mathrm{d}_{3,4} = \frac{1}{0,166} \text{máx}\left[0,022;\ 0,08;\ 0,125\right]$$

$$d_{3,4} == \frac{0,125}{0,166} = 0,753$$

Efectuando los cálculos para todos los pares de alternativas obtendremos la matriz D, que agrupa todos los índices de discordancia:

$$D = \begin{bmatrix} & 0,241 & 0,241 & 0,723 \\ 0,753 & & 0 & 0,506 \\ 1 & 0,295 & & 0,753 \\ 0,337 & 0,163 & 0 & \end{bmatrix}$$

IV. Cuarto paso:

Fijamos los límites de concordancia y discordancia

Algunos autores sugieren fijar como límites de concordancia y discordancia al promedio de los c_{ik} y de los d_{ik} respectivamente y a continuación hacerlos variar.

Por ejemplo:

$\mathbf{c} = 0{,}60$ $\mathbf{d} = 0{,}40$

V. Quinto paso:

Construimos las relaciones de superación

Recordemos que $x_i \, S \, x_k$ si y sólo si

$c_{i,k} \geq \mathbf{c}$ y $d_{i,k} \leq \mathbf{d}$

Por ejemplo:

- Alternativas 1 y 3 $c_{1,3} = 0{,}8 \Rightarrow c_{1,3} > \mathbf{c}$

  $d_{1,3} = 0{,}24 \Rightarrow d_{1,3} < \mathbf{d}$

1 *S* 3 y en la matriz de superación, el elemento será 1

- Alternativas 1 y 4 $c_{1,4} = 0{,}8 \Rightarrow c_{1,4} > \mathbf{c}$

  $d_{1,4} = 0{,}723 \Rightarrow d_{1,4} > \mathbf{d}$

1 *NS* 4 y en la matriz de superación, el elemento será 0

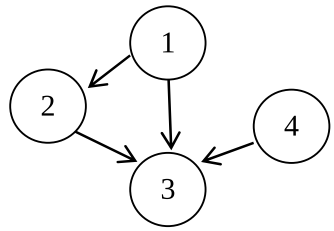
Realizando estas comparaciones para cada par de alternativas, obtenemos la siguiente matriz de superación:

$$S = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

VI. Sexto paso:

Análisis de las relaciones de superación

El grafo correspondiente a esta matriz:



Subconjunto ***N*** de alternativas: formado por las alternativas 1 y 4

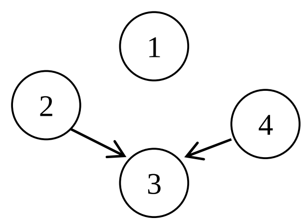
Si se cambian los valores de los límites obtendremos otros resultados, por ejemplo:

c = 0,80 **d** = 0,20

$$S = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

Núcleo: 1, 4

El gráfico correspondiente es el siguiente:



En la siguiente tabla se resumen las alternativas del subconjunto N para distintos valores de los límites:

C	**d**	Nº de arcos en el grafo	Alternativas en el núcleo
0,5	0,5	5	4,1
0,6	0,4	4	4,1
0,7	0,3	4	4,1
0,8	0,2	2	4,2,1
0,9	0,1	2	4,2,1

Conclusiones del ejemplo:

- no cabe extraer de los resultados anteriores ninguna otra consecuencia que la de ***seleccionar*** las alternativas 4,1 y 4, 2, 1 según los límites que fijemos.
- hay que evitar afirmar que las alternativas se ordenan como $4 \succ 2 \succ 1$.
- existen otras versiones posteriores en las cuales se permite abordar el problema de una ordenación final de todas las alternativas.