

1. SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE COLAS

Jorge Eduardo Ortiz Triviño

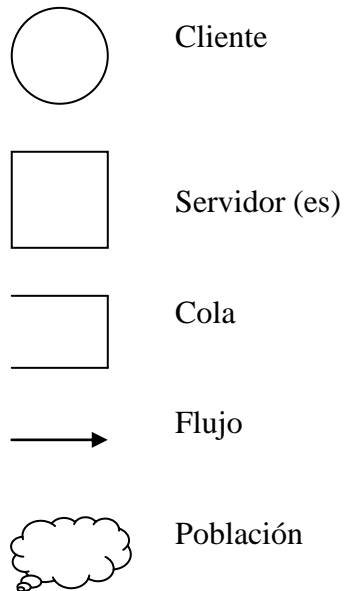
Profesor Asociado

Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial

Universidad Nacional de Colombia

jeortizt@unal.edu.co

1.1 INTRODUCCION & NOTACION



1.2 SISTEMAS DE COLA SIMPLE

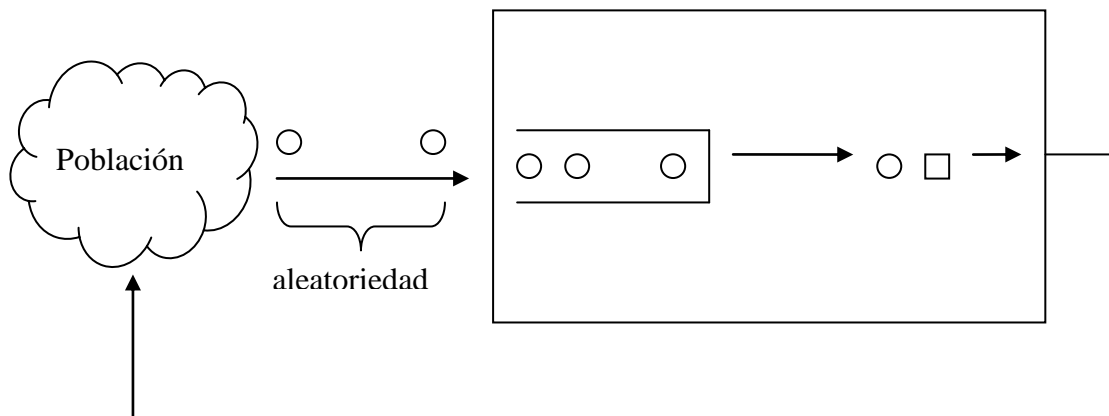


Figura 2.11: Sistemas de Cola Simples

1.3 DISCIPLINA DE SERVICIO

1. Las llegadas y las salidas son de naturaleza estocásticas.
2. Existe una política de atención (proceso).
 - **FIFO** (First in First Out): El primero que llega es el primero que sale.
 - **LIFO** (Last in First Out): El último que llega es el primero que sale.
 - **RANDOM**: La atención es aleatoria, es decir, no existe relación directa entre el tiempo de llegada y la atención prestada.
 - **PRIORIDAD**: Se le proporcionan determinados privilegios a ciertos tipos de clientes. Por ejemplo, las filas preferenciales a los titulares de las cuentas en los bancos.

1.4 NOTACIÓN DE KENDALL

Para un sistema de colas, se definen:

- a : Estructura probabilística del proceso de llegada.
- b : Estructura probabilística del proceso de salida.
- c : Número de servidores en paralelo.
- d : Disciplina de atención.
- e : Capacidad del sistema.
- f : Tamaño de la población.

La notación es $(a/b/c):(d/e/f)$

De esta manera, la estructura probabilística del proceso de llegada se refiere al comportamiento como se dan las llegadas al sistema, por ejemplo Poisson; la estructura probabilística del proceso de salida se refiere al comportamiento como se dan las salidas del sistema, por ejemplo Exponencial; el número de servidores en paralelo se refiere a cuantos servidores pueden atender al mismo tiempo y no dependen de los demás, por ejemplo la

cantidad de cajeros en un banco; la disciplina de atención, a como se atienden los clientes, es decir, los primeros en llegar son los primeros en salir (FIFO, por las siglas en ingles First In, First Out) o los primeros en llegar son los últimos en salir (FILO, Firts In, Last Out); la capacidad del sistema es la cantidad de clientes que puede soportar el sistema, por ejemplo la cantidad de clientes que puede atender un restaurante; y el tamaño de la población es la cantidad de clientes potenciales que tiene el sistema.

Un ejemplo de esta notación es: $G\left(p = \frac{1}{5}\right) / u(1,5) / 2 : (FIFO / \infty / \infty)$; y quiere decir que el proceso de llegadas es geométrico; el proceso de salida es uniforme, hay dos servidores en paralelo; se maneja una disciplina de atención primeros en llegar, primeros en salir; la capacidad del sistema es infinito al igual que la población.

Cuando la estructura probabilística es Poisson (Exponencial) la notación para los comportamientos se escribe M , en honor a Marcov y por ser el comportamiento más estudiado y más utilizado. De esa manera, a continuación se presenta este modelo.

1.5 MEDIDAS DE DESEMPEÑO

- Tiempo promedio en fila
- Tiempo promedio en atención
- Tiempo promedio en sistema.
- Número promedio de clientes en fila
- Número promedio de clientes en el sistema.
- La utilización (porcentaje de tiempo que el servidor esta ocupado).

1.6 RESULTADOS TEÓRICOS PARA EL MODELO $(M / M / 1)$.

Se conoce como sistema de nacimiento y muerte (puros) y se asume que la parte faltante de la notación es $(FIFO / \infty / \infty)$. Si se define $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ como la utilización del sistema. De esa

manera, $p^n = \rho^n p_0$ y con una sencilla deducción matemática $p_n = (1 - \rho)\rho^n$. También, el número promedio de clientes en el sistema (en estado estacionario) es $\bar{n} = E(n) = \frac{1}{1 - \rho}$.

La varianza del número de clientes en el sistema es $\sigma_n^2 = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$. Por último, se aplica la Ley de Little, que expresa que el número de clientes promedio en el sistema es igual al tiempo promedio de permanencia en el mismo multiplicado por la tasa de llegadas. Se define como $\bar{n} = \lambda \bar{\tau}$, donde $\bar{\tau}$ es el tiempo promedio de permanencia en el sistema.

1.7 RESULTADOS POR SIMULACIÓN (M / M / 1).

1.7.1 Formas de análisis del sistema

1. En un período específico de tiempo.
2. Hasta que se atiendan un número específico de clientes.

En lo que sigue, se supone el segundo enfoque, es decir, hasta haber atendido n clientes.

1.7.2 Modelo matemático para simulación.

Sea:

t_i : Tiempo de llegada del i-ésimo cliente. El sistema comienza con $t_0 = 0$.

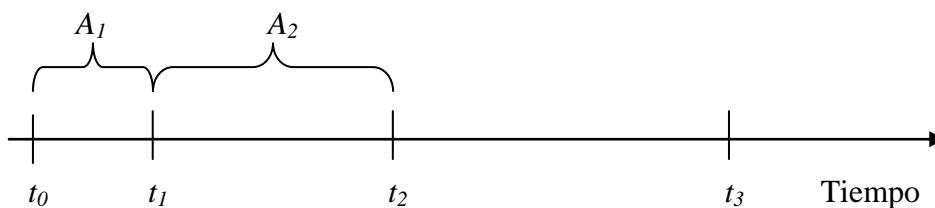


Figura 2.12: Notación

A_i : $t_i - t_{i-1}$ El tiempo entre llegadas del i-ésimo y el (i-1)-ésimo clientes.

S_i : Tiempo que el servidor “gasta” en atender el i-ésimo cliente.

D_i : Tiempo que gasta el cliente i haciendo fila.

C_i : Instante en el que el cliente i sale del sistema $C_i = t_i + D_i + S_i$

En general:

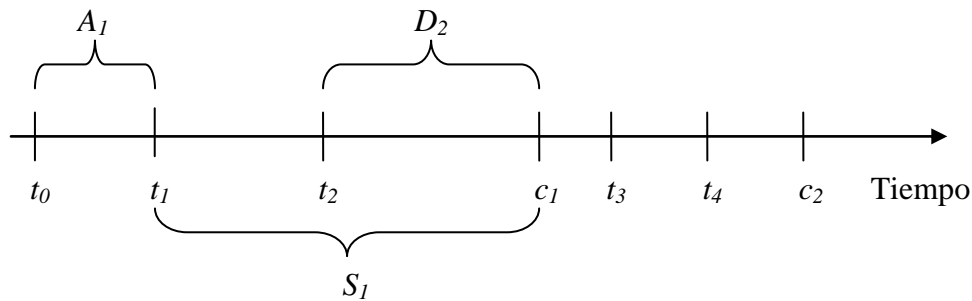


Figura 2.13: Notación General

1.7.3 Cálculo de medidas de desempeño

Las medidas que se emplearán se calculan teniendo observando el sistema hasta tener que se han atendido n clientes.

1.7.3.1 Tiempo promedio en fila.

$$\bar{d}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$$

1.7.3.2 Número promedio de clientes en fila.

$$q_n = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i$$

p_i : Probabilidad de que el sistema tenga i clientes.

En la práctica se puede aproximar p_i con los datos de llegada y salida de los clientes.

$$\bar{q}_n = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \hat{p}_i$$

Para estimar \hat{p}_i se define:

T_i : Tiempo Total durante el análisis del sistema en el que hay i clientes.

T_n : Tiempo Total de análisis del sistema hasta que se han atendido n clientes.

$$\hat{p}_i = \frac{T_i}{T_n}.$$

Reemplazando el valor de \hat{p}_i en la ecuación anterior tenemos que:

$$\bar{q}_n = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{T_i}{T_n} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot T_i}{T_n}$$

1.7.3.3 Utilización

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si el servidor está ocupado en } t \\ 0 & \text{Si el servidor está libre en } t \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$u_n = \frac{\int_{t_0}^{t_n} u(t) dt}{T_n}$$

1.7.4 Algoritmos para los eventos de llegadas y salidas

1.7.4.1 Algoritmos para los eventos de llegadas

```

N FUNCIÓN EVENTO _llegadas( $\langle$ Argumentos $\rangle$ )
  INICIO
     $\langle$ CalcularSiguieteLlegada $\rangle$ ;
    SI ( $\langle$ EstaElServidorLibre $\rangle$ )
      INICIO
         $D_i \leftarrow 0$ ;
         $\langle$ ActualizarEstadisticas $\rangle$ ;
         $NumClientesAtendidos \leftarrow NumClientesAtendidos + 1$ ;
         $\langle$ EstadoServidor $\rangle \leftarrow Ocupado$ ;
         $\langle$ ProgramarEventoDeSalidaNuevoClienteAtendido $\rangle$ ;
      FIN
    SINO
      INICIO
         $\langle$ ActualizarAreaBajoLaCurvaClientesEnFila $\rangle$ ;
         $ClientesEnFila \leftarrow ClientesEnFila + 1$ ;
         $\langle$ Guardar  $_t_i$  $\rangle$ ;
      FIN
  FIN _FUNCIÓN _EVENTO _Salidas
```

1.7.4.2 Algoritmos para los eventos de **Salidas**

```

 $\mathbb{N}$  FUNCIÓN EVENTO _ Salidas( $\langle \text{Argumentos} \rangle$ )
  INICIO
    SI ( $\langle \text{ColaVacia} \rangle$ )
      INICIO
         $\langle \text{EstadoServidor} \rangle \leftarrow \text{Ocupado};$ 
         $\langle \text{Tiemposalida} \rangle \leftarrow \infty;$ 
      FIN
    SINO
      INICIO
         $\langle \text{ActualizarAreaBajoLaCurvaClientesEnFila} \rangle;$ 
         $\text{ClientesEnFila} \leftarrow \text{ClientesEnFila} - 1;$ 
         $\langle \text{Calcular } _ D_i \rangle;$ 
         $\langle \text{ActualizarEstadisticas} \rangle;$ 
         $\text{NumClientesAtendidos} \leftarrow \text{NumClientesAtendidos} + 1;$ 
         $\langle \text{ProgramarEventoDeSalidaNuevoClienteAtendido} \rangle;$ 
        SI ( $\langle \text{ColaNoVacia} \rangle$ ) ENTONCES
          INICIO
             $\langle \text{MoverLosClientesEnFilaUnLugarAdelante} \rangle;$ 
          FIN
        FIN
      FIN
    FIN _ FUNCIÓN _ EVENTO _ Salidas
```