DISTRIBUCIONES DE TIPO CONTINUO

1.DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA.

1.1 DEFINICIÓN.

Una variable aleatoria se dice que sigue una distribución uniforme continua en un intervalo real (a,b), y se representa por $X \to U(a,b)$, si su función de densidad es constante en dicho intervalo y nula fuera de él; es decir:

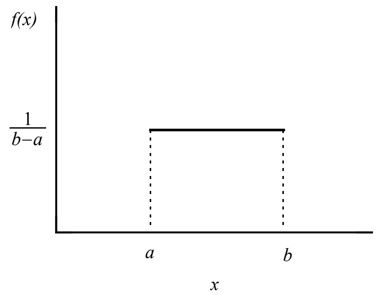
$$f_X(x) = \begin{cases} k & a < x < b \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Debemos calcular k:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow \int_a^b k\ dx = k(b-a) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

Por tanto, la función de densidad de una v.a. uniforme continua de parámetros *a* y *b*, $(a, b \in R, a < b)$ es:

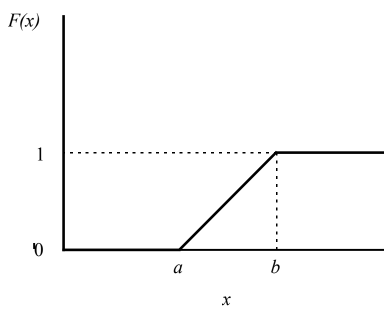
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$



Cualquier elección de puntos reales al azar y sin preferencias en un intervalo es una v.a. uniforme.

1.2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$



1.3. ESPERANZA.

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} \right)_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

1.4. VARIANZA.

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3} \right)_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\Rightarrow \; Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Propiedad: *Sea X una v.a. absolutamente continua con función de distribución* $F_X(x)$. *Entonces la variable* $Y = F_X(X)$ *sigue una distribución uniforme en el intervalo* (0 ,1).

Demostración:

$$F_Y(y) = p(Y \leq y) = p(F_X(X) \leq y) = p(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = F_X(X) \rightarrow U(0,1)$$

2. DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR, TIPIFICADA O DE LAPLACE - GAUSS.

2.1. DEFINICIÓN.

Una variable aleatoria sigue una distribución normal tipificada $(X \rightarrow N(0,1))$ si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

Comprobemos que está bien definida:

1º) $f_X(x) \geq 0$ $(trivial)$.

2º) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left(Cambio\ t = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2 \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.$$

2.2. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD.

1. $f_X(x)$ es continua en todo *R*.

2. $f_X(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas: $f_X(t) = f_X(-t)$.

3. Nunca toma el valor cero, pero tiene como asíntota horizontal el eje de abscisas:

$$\lim_{x \to -\infty} f_X(x) = \lim_{x \to \infty} f_X(x) = 0$$

4. $f_X'(x) = -x\, f_X(x) = \begin{cases} >0, & si\, x<0 \Rightarrow f_X(x)\ es\, creciente \\ <0, & si\, x>0 \Rightarrow f_X(x)\ es\, decreciente \end{cases}$

5. Tiene un máximo en el punto $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$:

$$f_X'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

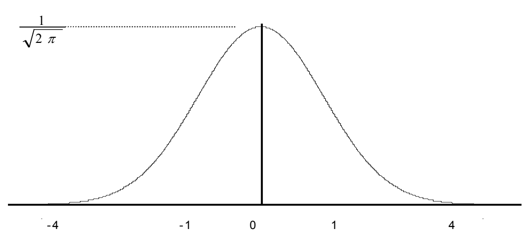
$$f_X''(x) = -f_X(x) + x^2 f_X(x) \Rightarrow f_X''(0) = -f_X(0) < 0$$

$\Rightarrow$ *alcanza el máximo cuando x* = 0, *tomando el valor* $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

6. Presenta dos puntos de inflexión, en $x = -1$ y en $x = 1$, siendo cóncava hacia abajo si $-1 < x < 1$ y cóncava hacia arriba en otro caso:

$$f_X''(x) = \left(-1 + x^2\right) f_X(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

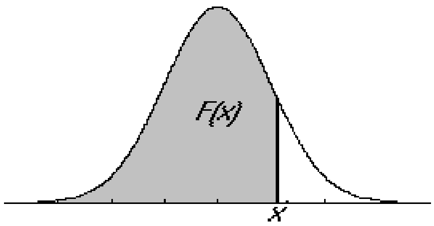
Con toda esta información, podemos obtener la gráfica:



Fue De Moivre quien estableció en 1733 la expresión matemática de la distribución normal como aproximación de la distribución binomial. Posteriormente, Laplace y Gauss llegaron a ella empíricamente estudiando la distribución de los errores en la medición. El calificativo de "normal" se debe a que es típica de muchos experimentos y observaciones, en especial de fenómenos de la naturaleza, donde intervienen muchas causas, cada una de pequeño efecto, que pueden suponerse independientes.

2.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{cuando} \quad -\infty < x < \infty$$



La función de distribución de un punto x es el área sombreada en la figura.

La función de densidad de la distribución normal no tiene primitiva, por lo cual la función de distribución se calcula numéricamente. Esos valores se recogen en una tabla.

2.4. ESPERANZA.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

*** Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x^2}{2} = t \Rightarrow xdx = dt$

2.5. VARIANZA.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (\text{por partes}) =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = u \quad \Rightarrow dx = du \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = dv \Rightarrow v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}}$$

$$= \left[-x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 + 1 = 1$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$$

2.6. DISTRIBUCIÓN $N(\mu,\sigma)$.

Una variable aleatoria, X, sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$, $-\infty<\mu<\infty$, $\sigma>0$, si su función de densidad es:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad -\infty<x<\infty$$

Cualquier variable Z con distribución $N(0,1)$ se puede transformar en una $N(\mu,\sigma)$ mediante un cambio de variable: $X=\sigma Z+\mu$.

Lo podemos comprobar:

$$F_X(x)=p[X\le x]=p[\sigma Z+\mu\le x]=p\left[Z\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right]=F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f_X(x)=f_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X)=\sigma E(Z)+\mu=\mu$$
$$Var(X)=\sigma^2 Var(Z)=\sigma^2$$

<u>Propiedad 1</u>: *Sean X_1, ..., X_n v.a. independientes con distribución N (μ_i ,σ_i). La variable aleatoria* $Y=a_1X_1+...+a_nX_n+b\ \rightarrow N(a_1\mu_1+...+a_n\mu_n+b,\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+...+a_n^2\sigma_n^2})$.

<u>Propiedad 2</u>: La distribución normal es reproductiva: *la suma de variables normales independientes es una variable normal.*

Se demuestra suponiendo que $a_1=...=a_n=1$ y $b=0$. Entonces:

$$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i\rightarrow N(\mu_1+...+\mu_n,\sqrt{\sigma_1^2+...+\sigma_n^2})$$

<u>Propiedad 3</u>: *Sean X_1, ..., X_n v.a. independientes e igualmente distribuidas N (μ,σ). La variable "media muestral"* $\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\ \rightarrow N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

<u>Propiedad 4</u>: *Si X es una v.a. N (μ,σ) , la variable $Y=aX+b$ sigue una distribución*

$N(a\mu+b,a\sigma)$.

La demostración es inmediata si aplicamos la 1ª propiedad cuando sólo hay una variable.

3. DISTRIBUCIÓN GAMMA.

3.1. DEFINICIÓN.

Una variable aleatoria sigue una distribución gamma de parámetros a y p si tiene función de densidad:

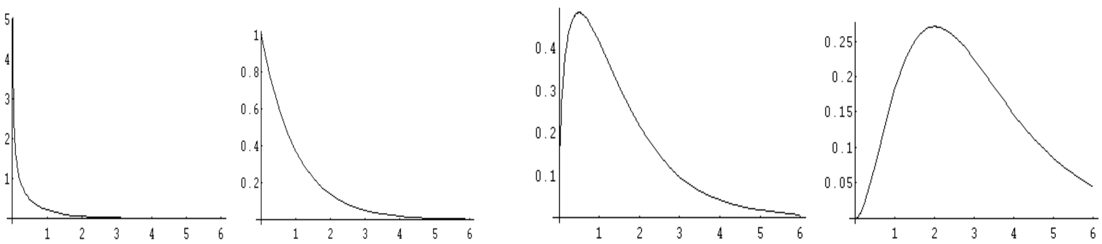
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a^p}{\Gamma(p)}\, x^{p-1}\, e^{-a\,x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad\qquad a,\, p > 0$$

Se representa por $X \to \gamma(a,p)$. El valor de $\Gamma(p)$ se obtiene:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\; e^{-x}\; dx \;=\; (p-1)!$$

Para comprobar que es función de densidad, basta hacer el cambio $ax = t$.

Dependiendo de los distintos valores de a y p, podemos obtener diferentes funciones de densidad, como muestran las siguientes gráficas:



p < 1   p = 1   p > 1

Las variables "tiempo de espera" se ajustan bien a una distribución gamma.

3.2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{a^p}{\Gamma(p)}\, t^{p-1}\; e^{-at}\; dt & x > 0 \end{cases}$$

Los valores de esta función se recogen en una tabla.

3.3. MOMENTOS.

$$E\left(X^k\right) = \int_0^\infty x^k \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p+k)}{a^k\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{a^{p+k}}{\Gamma(p+k)} x^{p+k-1} e^{-ax} dx$$

$$\Rightarrow E\left(X^k\right) = \frac{\Gamma(p+k)}{a^k\,\Gamma(p)}$$

Esperanza: $$E(X) = \frac{\Gamma(p+1)}{a\,\Gamma(p)} = \frac{p\,\Gamma(p)}{a\,\Gamma(p)} = \frac{p}{a}$$

Varianza: $$E\left(X^2\right) = \frac{\Gamma(p+2)}{a^2\,\Gamma(p)} = \frac{(p+1)p\,\Gamma(p)}{a^2\,\Gamma(p)} = \frac{p^2+p}{a^2}$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \frac{p^2+p}{a^2} - \left(\frac{p}{a}\right)^2 = \frac{p}{a^2}$$

Propiedad 1: *Sean* $X_1, ..., X_n$ *v.a. independientes, con* $X_i \to \gamma(a,p_i)$. *Entonces*:

$$\sum_{i=1}^n X_i \to \gamma(a, p_1 + ... + p_n)$$

Propiedad 2: *Sea* $X \to \gamma(a,p)$. *La variable* $kX \to \gamma\left(a/k, p\right)$

Propiedad 3: *Sean* $X_1, ..., X_n$ *v.a. independientes, igualmente distribuidas* $\gamma(a,p)$.

La variable $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to \gamma(an, pn)$.

La demostración se hace siguiendo las propiedades anteriores.

4. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL NEGATIVA.

Es un caso particular de la anterior, donde $p = 1$. Por tanto, su función de densidad es:

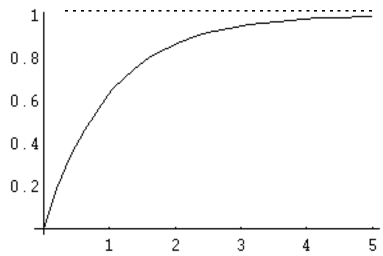
$$f_X(x) = \begin{cases} a\,e^{-a\,x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

siendo $a \in R, a > 0$.

Se representa por $X \to \xi(a) \equiv \gamma(a,1)$.

4.1. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x ae^{-at}\ dt\ =\ 1 - e^{-ax} & x \geq 0 \end{cases}$$



4.2. MOMENTOS.

$$E\left(X^k\right) = \frac{\Gamma(1+k)}{a^k} \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \dfrac{1}{a} \\ \\ Var(X) = \dfrac{1}{a^2} \end{cases}$$

<u>Propiedad 1</u>: *Sean* $X_1, \ldots, X_n$ *v.a. independientes e igualmente distribuidas, siguiendo una distribución* $\xi\,(a)$*. La variable* $X = X_1 + \ldots + X_n \rightarrow \gamma(a,n)$.

<u>Propiedad 2</u>: **Propiedad del olvido**. *Sea X una v.a. con distribución exponencial negativa de parámetro* a*. Entonces:*

$$\mathrm{p}\left[{X > s+t}\middle/{X > s}\right] = \mathrm{p}[X > t]$$

<u>Demostración:</u> $\mathrm{p}[X > x] = 1 - \mathrm{p}[X \leq x] = 1 - \left(1 - e^{-ax}\right) = e^{-ax}$

$$\mathrm{p}\left[{X > s+t}\middle/{X > s}\right] = \frac{\mathrm{p}[X > s+t, X > s]}{\mathrm{p}[X > s]} = \frac{\mathrm{p}[X > s+t]}{\mathrm{p}[X > s]} =$$

$$= \frac{e^{-a(s+t)}}{e^{-as}} = e^{-at} = \mathrm{p}[X > t]$$

El recíproco también es cierto, de forma que la falta de memoria caracteriza a la distribución exponencial entre las distribuciones continuas no negativas.

Si la variable que estudiamos es el "tiempo de vida" de la pieza de cierto aparato, la falta de memoria nos dice que, si lleva funcionando un tiempo *s,* la probabilidad de que siga funcionando un tiempo adicional t sólo depende de t y es igual a la probabilidad de que una pieza nueva no falle durante un tiempo t. Esto significa que los modelos exponenciales deben aplicarse al "tiempo de vida" de piezas que no sufran desgaste o deterioro en su funcionamiento.

5. DISTRIBUCIÓN BETA.

5.1. DEFINICIÓN.

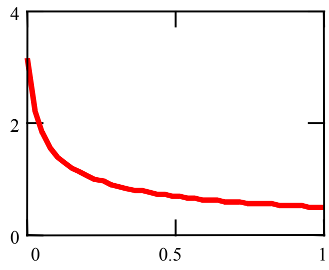
Una variable aleatoria diremos que sigue una distribución beta de parámetros p y q, con $p, q \in R$; $p,\ q > 0$, y se representa por $X \to \beta(p,q)$, si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(p,q)}\, x^{p-1}\ (1-x)^{q-1} & 0 < x < 1 \\ \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

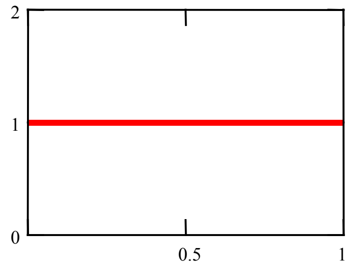
donde $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\ dx.$

Dada la gran flexibilidad de la distribución beta y el hecho que tomar valores entre cero y uno, variables que describen proporciones, como la proporción de riqueza en un cierto mineral, la incidencia del gasto en alimentación en el presupuesto familiar, o la proporción de manufacturas defectuosas, se ajustan bien a esta distribución.

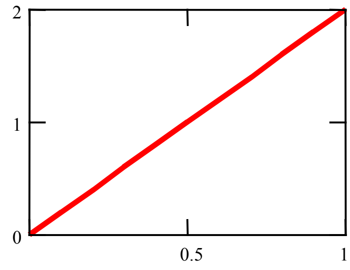
Las gráficas siguientes nos muestran la forma de la función de densidad de distintas distribuciones beta:



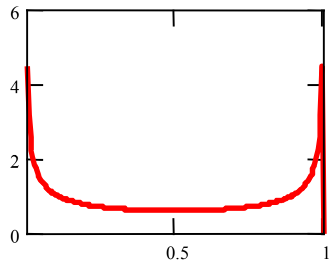
$p = \frac{1}{2},\ q = 1$



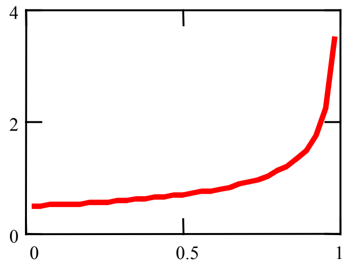
$p = 1,\ q = 1$



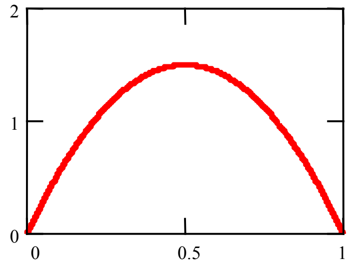
$p = 2,\ q = 1$



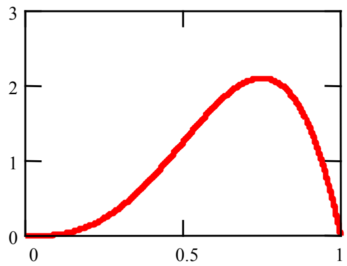
$p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$



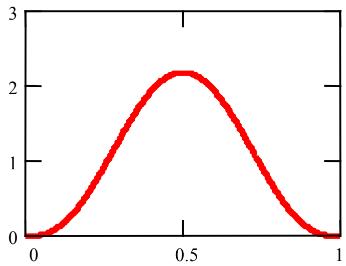
$p = 1,\ q = \frac{1}{2}$



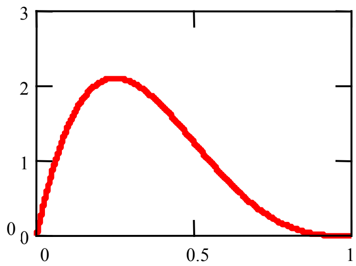
$p = 2,\ q = 2$



$p = 4,\ q = 2$



$p = 4,\ q = 4$



$p = 2,\ q = 4$

5.2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\, t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt & 0 < x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

5.3. MOMENTOS.

$$E(X^k) = \int_0^1 x^k \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\, x^{p-1}\,(1-x)^{p-1}\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(p+q)\,\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)\,\Gamma(p+q+k)} \int_0^1 \frac{\Gamma(p+q+k)}{\Gamma(p+k)\,\Gamma(q)}\, x^{p+k-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p+q)\,\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)\,\Gamma(p+q+k)}$$

<u>Esperanza y varianza</u>:

$$k=1 \;\Rightarrow\; E(X) = \frac{\Gamma(p+q)\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p+q)\,p\,\Gamma(p)}{\Gamma(p)\,(p+q)\,\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q}$$

$$k=2 \;\Rightarrow\; E\left(X^2\right) = \frac{\Gamma(p+q)\,\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)\,\Gamma(p+q+2)} = \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)}$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2 = \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)} - \left(\frac{p}{p+q}\right)^2 = \frac{p\,q}{(p+q+1)(p+q)^2}$$

Propiedad: *Sea* $X \to \beta(p,q)$; *sea* a, *con* $0<a<1$. *Entonces se verifica*:

$$\mathrm{p}\left[X \le a\right] = \mathrm{p}\left[Y \ge p\right]$$

siendo Y *una variable con distribución* $B(p+q-1, a)$.

Esta propiedad permite, en algunos casos, obtener la función de distribución de una variable beta a partir de las tablas de la distribución binomial.

6. DISTRIBUCIÓN BETA EXTENDIDA.

6.1. DEFINICIÓN.

Una variable aleatoria tiene una distribución beta extendida de parámetros p, q, a, b, y se representa por $Y \to \beta_e\,(p,q,a,b)$, si la variable puede escribirse como: $Y = a + X(b-a)$, siendo $X \to \beta(p,q)$, $0 \le a \le b$.

6.2. FUNCIÓN DE DENSIDAD.

$$F_Y(y) = \mathrm{p}\left[Y \le y\right] = \mathrm{p}\left[a + X(b-a) \le y\right] = \mathrm{p}\left[X \le \frac{y-a}{b-a}\right] = F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right)$$

Derivando:

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right)\frac{1}{b-a}$$

Sustituyendo:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(p,q)\,(b-a)^{p+q-1}}\;(y-a)^{p-1}\;(b-y)^{q-1} & a \le y \le b \\ \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

6.3. ESPERANZA Y VARIANZA.

Si $X \to \beta(p,q)$, conocemos su varianza y su esperanza. Luego:

$$E(Y) = a + (b-a)\,E(X) = a + (b-a)\frac{p}{p+q}$$

$$Var(Y) = (b-a)^2\,Var(X) = \frac{(b-a)^2\,p\,q}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

6.4. MODA.

La moda es el valor que hace máxima la función de densidad. Derivando $f_Y^{'}(y) = 0$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{(q-1)\,a + (p-1)\,b}{p+q-2}$$

Se puede comprobar mediante la segunda derivada que es un máximo. Así pues:

$$Moda = m = \frac{(q-1)\,a + (p-1)\,b}{p+q-2}$$

6.5. APROXIMACIONES USADAS EN EL MÉTODO PERT.

Vamos a obtener expresiones aproximadas para la media y la desviación típica de la v.a. $Y =$ "Duración de una actividad", en función de *a, b* y *m*.

Dada cualquier variable aleatoria *Y*, sabemos, por la desigualdad de Tchebychev:

$$\text{p}[\mu - 3\sigma \le Y \le \mu + 3\sigma] \ge 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} = 0.89$$

Si la distribución de Y también fuese unimodal, su probabilidad sería mayor:

$$\text{p}[\mu - 3\sigma \le Y \le \mu + 3\sigma] \approx 1$$

Como en nuestro caso sabemos que $\text{p}[a \le Y \le b] = 1$, igualando tendremos:

$$\left.\begin{matrix} \mu - 3\sigma \approx a \\ \mu + 3\sigma \approx b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad 6\sigma \approx b - a \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{b-a}{6} \quad \Rightarrow \quad Var(Y) \approx \frac{(b-a)^2}{36}.$$

De las expresiones anteriores de la varianza y de la moda, podemos despejar p y q en función de *a, b* y *m*, en el sistema:

$$Var(Y) \approx \frac{(b-a)^2}{36}$$

La esperanza de *Y* se puede obtener por aproximación, bajo ciertas condiciones.

- Supongamos que $p+q = 6$.
- Sustituyendo en la moda:

$$m = \frac{(q-1)a+(p-1)b}{p+q-2} \underset{[q=6-p]}{=} \frac{(6-p-1)a+(p-1)b}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4m = 6a + p(b-a) - a - b$$

- Por otro lado, $E(Y) = a + (b-a)\dfrac{p}{p+q} = a+(b-a)\dfrac{p}{6}$.

$$\Rightarrow \; 6E(Y) = 6a + (b-a)\,p \;\Rightarrow\; (b-a)\,p = 6E(Y) - 6a$$

- Teniendo en cuenta los dos resultados:

$$4m = 6a + 6E(Y) - 6a - a - b$$

$$\Rightarrow \; \boxed{E(Y) \approx \frac{a+4m+b}{6}}$$

7. DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR.

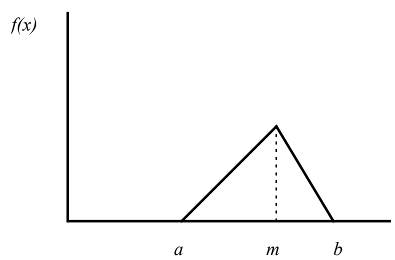
7.1. DEFINICIÓN.

Se dice que una variable aleatoria sigue una distribución triangular, si su función de densidad es de la forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(b-a)(m-a)}(x-a) & a \le x \le m \\[2ex] \dfrac{2}{(b-a)(b-m)}(b-x) & m \le x \le b \\[2ex] 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

donde m es la moda.

La representación gráfica de su función de densidad:



7.2. ESPERANZA.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_a^m \frac{2}{(b-a)(m-a)}\, x\,(x-a)\, dx + \int_m^b \frac{2}{(b-a)(b-m)}\, x\, (b-x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{(b-a)} \left[\left[\frac{2m^2 - ma - a^2}{6(m-a)} \right] + \left[\frac{b^2 + mb - 2m^2}{6(b-m)} \right] \right] = \frac{b^2 + mb - ma - a^2}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{a+m+b}{3}.$$

7.3. VARIANZA.

Teniendo en cuenta que:

$$E(X^2) = \int_a^m \frac{2}{(b-a)(m-a)}\, x^2\,(x-a)\, dx + \int_m^b \frac{2}{(b-a)(b-m)}\, x^2\,(b-x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{(b-a)} \left[\left[\frac{3m^4 - 4am^3 + a^4}{12\,(m-a)} \right] + \left[\frac{b^4 - 4bm^3 + 3m^4}{12\,(b-m)} \right] \right] =$$

$$= \frac{2}{(b-a)} \left[\left[\frac{m^3 - am^2 - ma^2 - a^3}{12} \right] + \left[\frac{b^3 + bm^2 + mb^2 - m^3}{12} \right] \right] =$$

$$= \frac{2}{(b-a)} \left[\frac{b^3 + bm^2 + mb^2 - am^2 - ma^2 - a^3}{12} \right] = \frac{a^2 + am + ab + bm + b^2 + m^2}{6}.$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a^2 + am + ab + bm + b^2 + m^2}{6} - \left[\frac{a+m+b}{3} \right]^2 =$$

$$= \frac{a^2 - am - ab - bm + b^2 + m^2}{18} = \frac{(b-a)^2 - (b-m)(m-a)}{18}$$

Entonces, $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{(b-a)^2 - (b-m)(m-a)}{18}$

DISTRIBUCIONES RELACIONADAS CON LA NORMAL

8. CHI – CUADRADO (χ^2).

8.1.DEFINICIÓN.

Sea $X \rightarrow N(0,1)$. La variable X^2 sigue una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad, es decir, $X^2 \rightarrow \chi_1^2$.

Si $Y = X^2$:

$$\mathrm{p}[Y \le y] = \mathrm{p}[X^2 \le y] = \mathrm{p}[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_X(x) = f_X(\sqrt{y})\,\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y})\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,y^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{y}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,y^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{y}{2}}$$

La función de densidad es la de una $\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

<u>Propiedad 1</u>: *Sean* $X_1, \ldots, X_k$ *independientes, con* $X_i \rightarrow \chi^2_{n_i}$. *Entonces*:

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \rightarrow \chi^2_{n_1+\ldots+n_k}$$

<u>Propiedad 2</u>: *Sean* $X_1, \ldots, X_k$ *i.i.d., con* $X_i \rightarrow \chi^2_n$. *Entonces*:

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \rightarrow \chi^2_{kn}$$

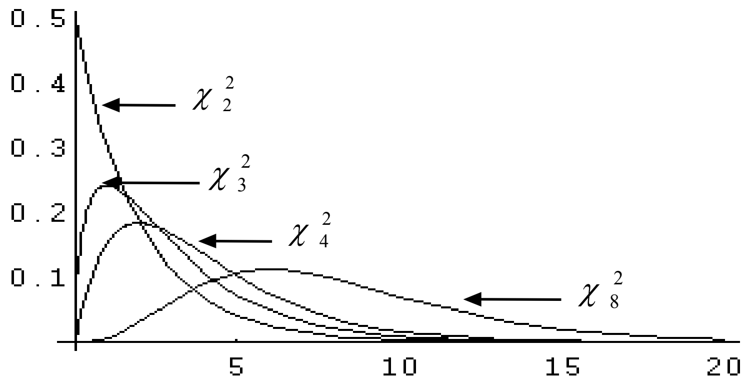
<u>Consecuencia</u>: *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *son i.i.d.* $N(0,1)$, *entonces*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightarrow \chi^2_n \equiv \gamma\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)$$

Su función de densidad será: $f_X(x) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}, \quad si\ \ x > 0$

Los momentos de orden *k*: $E(X^k) = \dfrac{2^k\ \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E(X) = n \\ Var(X) = 2n \end{array}}$

Su gráfica, para diferentes valores de n será:



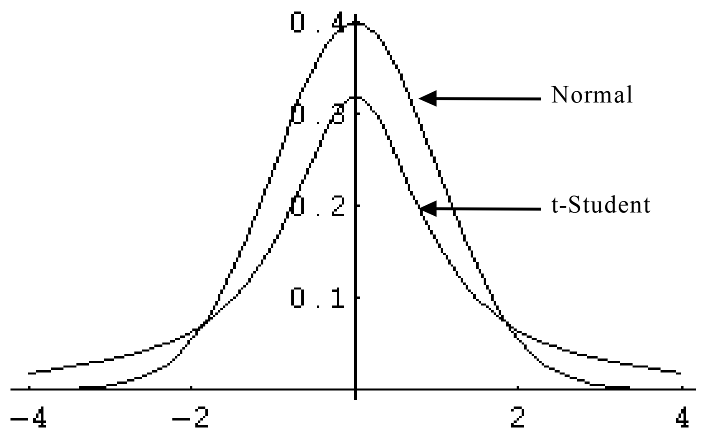
9. *t* - STUDENT.

9.1.DEFINICIÓN.

Sean $X \to N(0,1)$ e $Y \to \chi_n^2$, independientes. La variable $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ sigue una distribución *t* de Student con *n* grados de libertad; es decir, $T \to t_n$.

Su función de densidad es: $f_T(t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $\quad si \ -\infty < t < \infty.$

Es simétrica respecto de cero.



Propiedad: *Sean X, X*$_1$*, ..., X*$_n$ *i.i.d.* $N(0, \sigma)$. *Entonces* $\dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}} \to t_n$.

9.2. MOMENTOS.

- Supongamos que $n > 1$.
- En este caso, existe $E\left(X^k\right)$, con $k < n$.
- Si k es impar, $E\left(X^k\right) = 0$.

Si k es par, $E\left(X^k\right) = n^{\frac{k}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E(X) = 0 \\ E\left(X^2\right) = Var(X) = \dfrac{n}{n-2} \quad si \quad n > 2 \end{array}}$$

10. *F* DE SNEDECOR.

10.1. DEFINICIÓN.

Sean $\begin{cases} X \to \chi^2_n \\ Y \to \chi^2_m \end{cases}$ v.a. independientes. La variable $F = \dfrac{X/n}{Y/m}$ sigue una distribución F con n y m grados de libertad. Se representa por $F \to F_{n,m}$.

Su función de densidad es: $g(f) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \dfrac{n^{\frac{n}{2}}\ m^{\frac{m}{2}}\ f^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nf)^{\frac{n+m}{2}}}$, $si \quad f > 0$.

10.2. MOMENTOS.

Supongamos que $k > 0$.

$$E\left(X^k\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^k \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \qquad m > 2k$$

En particular,

$$\boxed{\begin{array}{ll} E(X) = \dfrac{m}{m-2} & si \quad m > 2 \\ Var(X) = \dfrac{2\,m^2\,(n+m-2)}{n\,(m-2)^2\,(m-4)} & si \quad m > 4 \end{array}}$$

<u>Propiedad 1</u>: *Si* $X \to F_{n,m} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{X} \to F_{m,n}$.

Esta propiedad se utilizará para obtener ciertas probabilidades en las tablas.

Propiedad 2: *Si* $X \rightarrow F_{1,m}$ e $Y \rightarrow t_m \quad \Rightarrow \quad X \overset{d}{=} Y^2$.

La gráfica de la función de densidad, para diferentes valores de los parámetros: