METODO DE BOX- MULLER PARA LA GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS NORMALES.

Introducción

El procedimiento general para generar números aleatorios es : primero generar números aleatorios que se originen a partir de la distribución uniforme y luego se les aplica una transformación que los convierta en los números aleatorios deseados para que puedan ser utilizados en la simulación.

Variables Aleatoria Normales

Una variable aleatoria X está distribuída normalmente con media media μ y varianza σ , si su función de densidad de probabilidad está dada por :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Aplicación del Método:

Sean X y Y variables aleatorias normales unitarias independientes y sean R y θ las coordenadas polares del vector (X , Y). Es decir:

$$R^2 = X^2 + Y^2 \qquad Tan\theta = \left(\frac{Y}{X}\right)$$

Como X y Y son independientes, su densidad conjunta es el producto de sus densidades individuales y por lo tanto está dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

(1)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Para determinar la densidad conjunta de R^2 y θ , llamémosla f (d ,θ), hacemos el cambio de variables:

$$d = x^2 + y^2 \quad , \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Vemos que el cambio de variable fue expresado en las dos funciones en términos de x y y para luego calcular el Jacobiano. Antes de calcularlo recordaremos su definición:

Jacobiano.- Sean x = g(u ,v) y y = h(u ,v) entonces el jacobiano de x y y con respecto a u y v es como se muestra a continuación denotado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial x}{\partial u} . \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} . \frac{\partial y}{\partial v} \right|$$

En nuestro caso antes de encontrar el Jacobiano , vamos a calcular las derivadas parciales de d y θ con respecto de x y y .

$$d = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial d}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial d}{\partial y} = 2y$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{1}{x}\right)$$

Luego de haber calculado las derivadas parciales procedemos a calcular el determinante de ellas, aplicando la definición anterior del jacobiano pero con respecto a dos variables x y y.

Entonces nos queda:

$$J_{xy}^{f} = \frac{\partial(d,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{-y}{x^2}\right) \\ 2y & \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{1}{x}\right) \end{pmatrix}$$

$$= 2x.\left(\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right).\left(\frac{1}{x}\right) - 2y.\left(\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right).\left(\frac{-y}{x^2}\right) \quad = \quad J_{xy}^{f} = 2$$

Como es fácil ver que el jacobiano de esta transformación (*es decir, el determinante de las derivadas parciales de d y θ con respecto de x y*

y) es igual a 2., la ecuación (1) implica que la función de densidad conjunta de R^2 y θ está dada por:

$$f(d,\theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-d/2} \quad , \quad 0 < \mathrm{d} < \infty \,, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

Sin embargo, como esto es igual al producto de una densidad exponencial con media 2 (a saber, $\frac{1}{2}e^{-d/2}$) y la densidad uniforme en (0, 2π) (a saber, 1/2π), esto implica que:

> R^2 y θ son independientes; R^2 es exponencial con media 2 y θ se distribuye uniformemente en (0,2π).

Como las variables R y θ son independientes, sus funciones de densidad vienen dadas por:

$$f(r) = r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} \Rightarrow F(r) = 1 - \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{-2\ln U}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow F(\theta) = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow \theta = 2\pi U$$

Ahora podemos generar un par de variables aleatorias normales estándar independientes X y Y, utilizando R^2 y θ para generar primero sus coordenadas polares (X = R Cosθ Y = R Senθ) y luego transformarlas de nuevo en coordenadas rectangulares.

Para generar entonces variables aleatorias normales hacemos uso del

Método de Box-Muller.

Usamos el siguiente algoritmo :

PASO 1: Generar números aleatorios U_1 y U_2

PASO 2: $R^2 = -2\log \quad U_1$ (y entonces R^2 es exponencial con media 2).
Sea $\theta = 2\pi U_2$ (y entonces θ es uniforme entre 0 y 2π)

PASO 3: Ahora, sean

$$X = R \quad Cos\,\theta = \sqrt{-2\log U_1}\,Cos(2\pi U_2)$$

$$Y = R \quad Sen\,\theta = \sqrt{-2\log U_1}\,Sen(2\pi U_2)$$

Las transformaciones dadas por las ecuaciones en el paso 3, se conocen como transformaciones de *Box - Muller*. El uso de las transformaciones de Box – Muller para generar un par de normales unitarias independientes no es eficiente desde el punto de vista computacional, y la razón está en la necesidad de calcular funciones trigonométricas seno y coseno. Sin embargo, hay una manera casual de evadir esta dificultad mediante un cálculo indirecto del seno y el coseno de un ángulo (opuesto a un cálculo directo, el cual genera U y luego el seno y el coseno de 2πU). Es decir haciendo uso del *Método de Marsaglia*.

PROGRAMA DE BOX MULLER: (En Visual C++)

```
//METODO DE  BOX MULLER
//
#include "stdafx.h"
#include "MLCG.h"
#include "iostream.h"
#include "time.h"
#include "fstream.h"
#include "math.h"
int main(int argc, char* argv[])
{       MLCG u;
        MLCG u2;
        //cambiar semillin
        u.semilla(12345);
        u2.semilla(12345);
        double u_1;
   double u_2;
        double R;
        double X;
```

```
    double Y;
          double teta;
            fstream datos ("boxmuller.txt", ios::out);
            u_1=u.va_Uniforme() ;
            u_2=u2.va_Uniforme() ;
            R=-2*log(u_1);//R cuadrado
            teta=2*(3,1415)*u_2;
            X=sqrt(R)*sqrt(-2*log(u_1))*cos(2*3.1415*u_2);
            Y=sqrt(R)*sqrt(-2*log(u_1))*sin(2*3.1415*u_2);
            datos<<X<<endl;
      datos<<Y<<endl;
return 0;
}
```

Corrida del Programa:

Estos son los valores generados con el método de Box- Muller

0.440248
2.93865

BIBLIOGRAFÍA:

Sheldon M . Ross, " Simulación", 2da. Edición ,Prentice H. ,México,1999 pp. 72-75.