

# Planteo general de la Simulación

## Introducción

En la vida real se presentan situaciones o sucesos que requieren tomar decisiones para planificar, predecir, invertir, proyectar, etc.

Por ejemplo, la demanda creciente de un producto hace que la fábrica y los comercios adapten sus producciones y volúmenes de venta para satisfacerla y obtener una mayor rentabilidad. El nivel de calidad de un servicio en un banco se alcanza cuando se establecen una cierta cantidad de facilidades y atención a los clientes, que requieren de distintas transacciones.

Para eso es importante el conocimiento del problema o de la situación y de las posibles soluciones, donde juegan un papel de importancia herramientas que permiten la obtención de información, como la modelización y la simulación. Los datos que se obtienen permiten predecir el comportamiento actual y futuro en distintos escenarios mediante una serie de experiencias realizadas con un programa informático.

Cualquiera sea la aplicación para simular, sea un programa comercial específico o una aplicación con lenguaje de propósitos generales, requieren conocer y manejar una serie de procedimientos y criterios para obtener datos y para analizarlos para tomar decisiones.

Los procesos de modelización y simulación son iterativos y permiten comprender mejor el sistema de estudio y ayudan a la toma de decisiones, sin el exclusivo apoyo de la intuición, experiencia o tradición.

En consecuencia es importante determinar el sistema a estudiar según determinados objetivos, representarlo mediante un modelo y luego simularlo.

En esta unidad se desarrollan las definiciones y los conceptos básicos de sistemas, modelos y simulación aplicados a la resolución de problemas. Se describen distintos enfoques, enfatizando el seguimiento del tiempo según como se comporte el sistema, sea en forma continua o discreta. De acuerdo a ello se plantean los elementos a considerar en la representación con un modelo. Y se describen las principales etapas a seguir para obtener resultados de acuerdo al objetivo planteado.

# El Sistema

## Definición

Un sistema se define como una colección de partes que desarrollan funciones e interactúan juntas para el cumplimiento de algún propósito definido. En la práctica el sistema depende de los objetivos de un estudio particular. En la definición de un sistema como parte de la realidad, se consideran las fronteras, fuera de las cuales existe el Medio Ambiente.

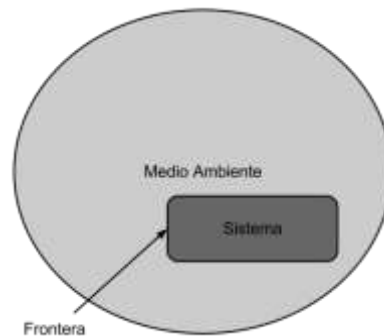


Figura 1: El sistema en el medio ambiente

Además un sistema puede estar compuesto de uno o más subsistemas, el cual puede nuevamente consistir de uno o más subsistemas, y así sucesivamente. Por ejemplo el sistema de impuestos, puede dividirse en un subsistema provincial y otro nacional, el sistema postal (subsistema encomiendas y subsistema correspondencias).

## Clasificación

En relación con su interacción con el **medio ambiente** un sistema se pueden clasificar en:

- **Abierto:** La frontera del sistema es permeable al medio ambiente. Ejemplo: un servidor web de un diario al que acceden los lectores desde distintas partes del mundo, un sistema de ingreso de órdenes de compras en una casa distribuidora, ingreso de pedidos de elaboración de productos, llamadas de servicio de una empresa de taxis, etc.
- **Cerrado:** La frontera del sistema es parcialmente permeable al medio ambiente. Ejemplo: un firewall en un servidor permite filtrar cierto contenido, un aeropuerto no permite que autos circulen por la pista.
- **Aislado:** La frontera del sistema es impermeable al medio ambiente. Ejemplo: un satélite en órbita geoestacionaria que funciona con baterías.

Según el comportamiento de las **variables de estado** en el tiempo el sistema puede ser:

- **Continuo:** cuando las variables que determinan su estado pueden variar en cada instante o unidad de tiempo. Ejemplo: un sistema que controla el llenado de una pileta.
- **Discreto:** cuando los cambios son discontinuos, "de a saltos". Los cambios se producen en instantes determinados de tiempo, entre los cuales permanece sin variaciones. Las variables de estado cambian instantáneamente en puntos separados en el tiempo. Ejemplos: alumnos en un aula, que ingresan o se van de a uno.

Por la forma en que se **producen los cambios** dentro del sistema se puede clasificar en:

- **Determinístico:** Los cambios producen sólo un resultado, la conducta del mismo está determinada. Ejemplo: si se calienta el agua para el mate, la temperatura va a subir indefectiblemente.
- **Estocástico:** Los cambios producen resultados aleatorios más o menos probables. Ejemplo: el número y tipo de llamadas a un call center son valores con una probabilidad de ocurrencia.

Según la **estabilidad** que presente el sistema puede ser:

- **Estable:** Cuando estando quieto o en movimiento, pero en estado estacionario (en régimen), y si se le aplica una perturbación momentánea, luego de cierto tiempo vuelve a su estado original.
- **Inestable:** Si estando quieto o en movimiento uniforme, al aplicarle una pequeña perturbación momentánea, no vuelve a su estado original.

Otras clasificaciones pueden ser:

- Naturales o Artificiales.
- Dinámicos o Estáticos.
- Adaptivos (responde a cambios ambientales) o No Adaptivos.
- Repetible, Recurrente (se repite periódicamente) o Único.

# Modelo de un Sistema

## Introducción

En algún momento de la vida de la mayoría de los sistemas, hay una necesidad de estudiarlos para entender las relaciones entre varios componentes, o para predecir el funcionamiento bajo la consideración de nuevas condiciones. Un sistema puede ser estudiado directamente mediante un experimento o con un modelo que lo representa. Cuando la primer alternativa no es conveniente (por razones de costo o incluso porque el sistema a estudiar podría aún no existir) es usualmente necesario construir un modelo del sistema.

## Definición

1. **Modelo:** es la representación de un conjunto de objetos o ideas de forma diferente a la de la entidad misma.
2. **Modelo:** es una abstracción de la realidad que captura lo esencial para investigar y experimentar en lugar de hacerlo con el sistema real, con menor riesgo, tiempo y costo.

El modelo es una "imitación" del sistema original. Como para poder imitar algo o a alguien es necesario conocerlo bien, será necesario reunir la información precisa respecto del sistema original. En el modelo participan las variables y sus relaciones.

Modelizar es una metodología de trabajo para:

- Describir el comportamiento de los sistemas.
- Hacer hipótesis que expliquen el comportamiento observado.
- Predecir cómo responde el sistema cuando se producen cambios.

En algunas ocasiones se plantean modelos que son visiones particulares o individuales de una parte del mundo real como puede ser un cuadro.



Figura 2: Modelo No Simulable

¿Un cuadro surrealista sería un modelo? Sí, porque es la idea original que tenía en mente el pintor, desde un punto de vista artístico y con el solo objetivo de expresar en forma subjetiva la visión

sobre el sistema que pintó. Por esa razón es un modelo de la realidad, puramente individual y subjetiva, pero el cual no se puede simular o evaluar comportamientos de ese sistema en distintas situaciones.

Cuando se hace un plano a escala de una casa, se plantea un modelo con el que se puede experimentar borrando líneas y cambiándolas de lugar para comprender como se comportaría la relación de espacio-luz en el interior de la casa, se puede evaluar si será cómodo o no para sus habitantes ir de una a otra habitación, etc.

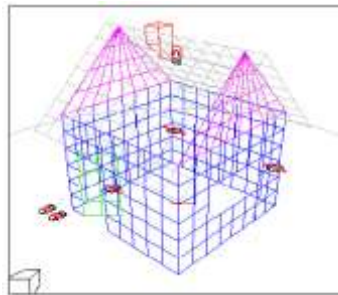


Figura 3: Modelo Simulable

## Clasificaciones generales de un Modelo

Según el punto de vista que se tome (naturaleza del sistema o uso del modelo) surgen diferentes clasificaciones:

- **Estático:** Representa las relaciones del sistema cuando está quieto o en equilibrio. Ejemplo: Maquetas. Plano. El cambio de lugar de la pared del plano de la casa refleja un nuevo **estado**. El modelo no muestra las etapas intermedias ni cómo se desarrollan, sólo el principio y el final.
- **Dinámico:** Refleja los cambios en el sistema a través del tiempo y muestra la evolución desde el principio hasta el final. Ejemplo: crecimiento de un ser viviente, vaciamiento de un tanque de agua, traslado de un camión de mercadería, cocción de un alimento, etc.
- **Determinístico:** Un cambio en el modelo produce uno y sólo un resultado. Ejemplo: Un modelo que represente el cambio de temperatura del agua para el mate. Cuando se calienta el agua, sea de la canilla o de la heladera, siempre va a llegar a la temperatura de 80 a 100 grados.
- **Estocástico:** Un cambio en el modelo produce resultados aleatorios. Ejemplo: Un modelo para estudiar el comportamiento del tránsito en la zona céntrica de la ciudad en distintos horarios.
- **Continuo:** el comportamiento cambia continuamente en el tiempo, no es una cuestión de magnitud del cambio sino de analizar si el mismo se produce en un instante de tiempo o a lo largo de todo el tiempo de estudio. Ejemplo: la caída del agua de un tanque, el movimiento de un vehículo, etc.
- **Discreto:** los cambios en el tiempo son predominantemente discontinuos o instantáneos, es decir que las propiedades que describen su comportamiento cambian en momentos determinados de tiempo, y entre esos instantes no sucede variación alguna. Ejemplo: Representación de un sistema electrónico digital, la entrada de personas a un negocio.

- **Físico o Icónico:** Representaciones a escala del sistema a simular. Ejemplo: Maquetas, planta piloto, avión en túnel de viento, etc.
- **Analógicos:** Para representar el sistema real se utiliza una o varias propiedades que se comportan de manera semejante. Ejemplo: una representación gráfica de la producción en función del tiempo donde la distancia en centímetros representa el tiempo transcurrido.
- **Matemáticos:** Se representan propiedades (variables o constantes) del sistema mediante símbolos matemáticos ( $x$ ,  $y$ ) y las relaciones entre las propiedades mediante operaciones matemáticas. Muchas veces son sistemas de ecuaciones diferenciales. Se resuelven por métodos analíticos o numéricos (cálculos mediante métodos u algoritmos).
- **Mental:** se sigue cierta formulación intuitiva para controlar o para comprender un sistema. Ejemplo: no se requiere de la ecuación matemática de la ley de la gravedad para mantener un vaso en equilibrio.

# Simulación

## Introducción

Una vez construido un modelo matemático, si este es lo suficientemente sencillo, puede ser posible trabajar con sus relaciones y cantidades para obtener una solución analítica exacta.

Si una solución analítica para un modelo matemático está disponible y es computacionalmente eficiente, usualmente es deseable estudiar el modelo en esta forma, en vez que por la vía de la simulación. Sin embargo, muchos sistemas son altamente complejos, de manera que los modelos matemáticos válidos de ellos son ellos mismos complejos, descartando cualquier posibilidad de una solución analítica. En este caso, el modelo debe ser estudiado por medio de simulación. Otro caso es la combinación de reglas lógicas y la matemática.

## Definición

**Simulación:** Es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y realizar experimentos con él para entender el comportamiento del sistema y/o evaluar estrategias para la operación del mismo.

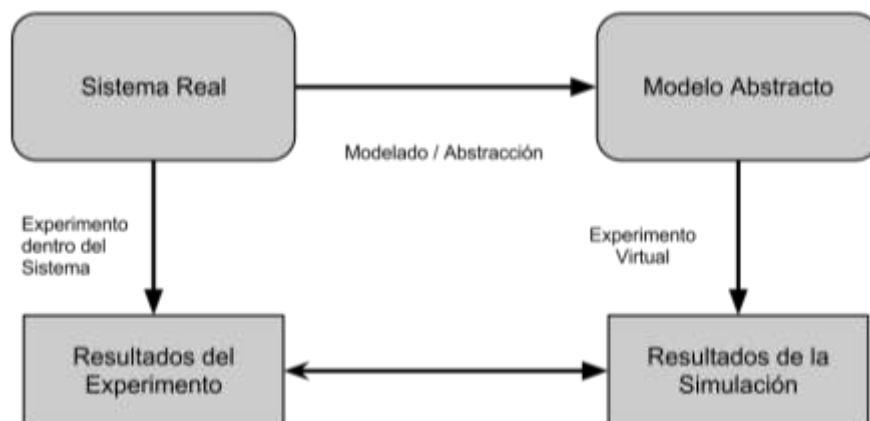


Figura 4: Paradigma modelización-simulación

A un modelo matemático y/o lógico a ser estudiado por medio de simulación lo llamaremos modelo de simulación.

## Clasificación de Modelos de Simulación

Los modelos de simulación se clasifican en:

- **Modelos de Simulación Estáticos o Dinámicos:** un modelo de simulación estático es una representación de un sistema en un momento particular, o una que puede ser usada para representar un sistema en el que el tiempo simplemente no juega ningún rol. Por otro lado, un modelo de simulación dinámico representa un sistema a medida que éste evoluciona en el tiempo. El caso más común de un modelo de simulación estático es el de Montecarlo.
- **Modelos de Simulación Determinísticos o Estocásticos:** si un modelo de simulación no contiene ningún componente probabilístico (por ejemplo aleatorio), es llamado Determinístico; un sistema de ecuaciones diferenciales complicado (e intratable analíticamente) describiendo una reacción química podría ser uno de tales modelos. En los modelos determinísticos, la salida es determinada una vez que el conjunto de cantidades y

relaciones de entrada en el modelo han sido especificadas, aunque podría tomar un montón de tiempo de cálculo. Muchos sistemas, sin embargo, deben ser modelados teniendo al menos algún componente de entrada aleatorio, y éstas dan lugar a modelos de simulación estocásticos. Los modelos de simulación estocásticos producen una salida que es aleatoria en sí misma, y debe ser tratada como una estimación de las características reales del modelo.

- **Modelos de Simulación Continuos o Discretos:** tienen relación con la naturaleza de los sistemas continuos y discretos definidos anteriormente. Se debe mencionar que un modelo discreto no es siempre usado para modelar un sistema discreto y viceversa. La decisión de si usar un modelo discreto o continuo para un sistema particular depende de los objetivos específicos del estudio. Por ejemplo un modelo de flujo de tráfico sobre una autopista podría ser discreto si las características y movimiento de autos individuales son importantes. Alternativamente, si los autos pueden ser tratados “en el agregado” el flujo de tráfico puede ser descrito por ecuaciones diferenciales en un modelo continuo.
- **Modelos de simulación basados en Agentes:** es un modelo en el que los agentes interactúan en repetidas ocasiones. Por ejemplo, cuando los agentes deben optimizar su comportamiento colectivo a través de simples intercambios de información, como se hace en la optimización de una colonia de hormigas o en la optimización de un enjambre de partículas, el objetivo es alcanzar un estado final deseado, es decir, el sistema optimizado, más que simular la dinámica del proceso.

## Tipos de Simulación

Existen distintos tipos de simulación de modelos:

- **Simulación Discreta:** tiene que ver con el modelado de un sistema que evoluciona en el tiempo mediante una representación en la cual las variables de estado cambian instantáneamente, cuando ocurren eventos. Aunque la simulación discreta podría conceptualmente ser realizada mediante cálculos manuales, la cantidad de datos que deben ser almacenados y manipulados en la mayoría de los sistemas del mundo real obliga a que la simulación discreta sea realizada en computadoras digitales.
- **Simulación Continua:** se aplica cuando las variables de estado cambian continuamente con respecto al tiempo. Típicamente, los modelos de simulación continua involucran ecuaciones diferenciales que dan relaciones para las tasas de cambio de las variables con el tiempo. Si las ecuaciones diferenciales son particularmente simples, pueden ser resueltas analíticamente para dar los valores de las variables de estado para todos los valores del tiempo como una función de los mismos en el tiempo 0 o inicial. Sin embargo, para la mayoría de los modelos continuos, no son posibles soluciones analíticas, y se usan técnicas de análisis numérico, por ejemplo, la integración Runge-Kutta, para resolver las ecuaciones diferenciales numéricamente, dados valores específicos para las variables de estado en el tiempo 0.
- **Simulación Discreta-Continua Combinada:** Como algunos sistemas no son ni completamente discretos ni completamente continuos, la necesidad puede llevar a construir un modelo con aspectos tanto de simulación discreta como continua, resultando en una simulación combinada discreta-continua. Los tres tipos fundamentales de interacciones que pueden ocurrir entre variables de estado cambiando continuamente y discretamente son:
  - Un evento discreto puede causar un cambio discreto en el valor de una variable de estado continua.
  - Un evento discreto puede causar que la relación que gobierna una variable de estado continua cambie en un momento particular.



- Una variable de estado continua que alcanza un valor límite o crítico puede causar que ocurra o se programe un evento discreto.
- **Simulación basada en Agentes:** Es un enfoque computacional que permite crear sociedades artificiales para estudiar el comportamiento global que emerge desde la interacción de agentes individuales operando en un dado entorno y bajo reglas limitadas, sólo por la información y la capacidad de procesamiento de cada uno.

## Áreas de aplicación

Las distintas áreas de aplicación son:

- **Comunicaciones:** La aplicación de la simulación en las industrias de las comunicaciones es cada vez más vital. Redes LAN, redes WAN, inalámbricas, sistemas telefónicos, sistemas de comunicaciones satelitales nacionales e internacionales, redes de televisión por cable y teléfonos celulares son ejemplos de los complejos sistemas que demandan la capacidad de la simulación para lograr un diseño y operación eficientes.
- **Educación:** Estudios relacionados a los efectos de cambios en los niveles de inscripción, procesos de registración, ubicación y scheduling de aulas, planeamiento del inventario de la cantina, de la biblioteca y operaciones de diseño de sistemas para escuelas y universidades pueden ser realizados por simulación.
- **Entretenimientos:** Las técnicas de simulación están siendo muy usadas en el diseño de la estructura y operación de los parques de diversiones, estudios de producción y sistemas de cines y teatros, sistemas de venta de tickets, diseño del estacionamiento de autos, diseño de la capacidad y scheduling de paseos, equipamiento y scheduling de producción de películas, son algunos de los típicos propósitos de aplicación de la simulación en la industria del entretenimiento.
- **Servicios Financieros:** Existen muchos reportes de aplicaciones de simulación en un banco, en la bolsa de valores y en las compañías de seguros. Análisis de las transacciones, de cash-flow, diseño de sistemas de oficina, planeamiento de materiales y suministros, procesamiento de datos, diseño de redes, diseño de los sistemas de manejo de los cajeros automáticos son algunas de las actividades que pueden ser realizadas por la simulación.
- **Servicios Alimenticios:** Sistemas de pagos en restaurantes, en locales de comida rápida y sistemas de almacenaje de comestibles, pueden ser sujetos a estudios de simulación con propósitos como planeamiento del inventario y de provisiones, planeamiento de la distribución, selección del sitio, layout, planeamiento y scheduling de mano de obra.
- **Sistemas de Salud:** Hospitales, consultorios de emergencia, oficinas de médicos, son frecuentemente estudiados por la simulación para determinar los cambios de horarios de médicos y enfermeras, inventario de medicamentos y alimentos, planeamiento de la capacidad de recursos como camas, capacidad de las salas de espera, de quirófanos, equipos y ambulancias. También estudios de epidemiología, como pronósticos de las tasas de propagación de enfermedades y análisis de políticas alternativas de control de enfermedades, todas estas son realizadas por la simulación.
- **Hotelería:** Sistemas de hoteles, hostel y resort son estudiados por la simulación para determinar factores como son capacidad, políticas de administración de los recursos de inventario, planeamiento de mano de obra y métodos de scheduling, sistemas de reservas y contratación.
- **Transportes:** Estos sistemas involucran uno o más tipos de vehículos (Por ejemplo: taxis, ómnibus, trenes, barcos, aviones), pasajeros, rutas de transporte y carga. El objetivo de la simulación puede ser obtener la capacidad del vehículo, del personal, planeamiento y

scheduling, planeamiento de recambio de partes, de mantenimiento, planeamiento urbano, rutas de los vehículos, diseño de nuevas autopistas, diseño de sistemas de control de crecimiento del espacio aéreo y diseño de lugares de estacionamiento.

- **Pronósticos del tiempo, medio ambiente y ecología:** Los pronósticos del tiempo, rutinaria e intensivamente usan la simulación. Un gran número de variables son utilizadas por programas de simulación para predecir la situación del tiempo local y global. Estudios relacionados con el control de la polución, el efecto invernadero, población de insectos y otros flujos ambientalistas y ecologistas son también desarrollados a través de la simulación.

Los sistemas de producción y manufactura son otras de las aplicaciones de la simulación. Algunos de los sistemas típicos son las siguientes:

- **Extracción/cosecha de recursos naturales:** industrias como la minería, maderera, de perforación y pesquera usan la simulación para planificar las actividades relacionadas a la creación de políticas de elección oportuna de recursos, como grandes maquinarias, máquinas cargadoras, ascensores, máquinas excavadoras, grúas, trituradoras, cintas transportadoras y barcos.
- **Crecimiento de plantas y animales:** los sistemas de crecimiento pueden ser simulados para pronósticos de producción, planeamiento de recursos como la tierra, fertilizantes, alimentos para los animales, medicamentos, tractores, cosechadoras, vehículos de transporte y para el estudio y diseño de procedimientos operacionales para determinar factores como producción, crecimiento, almacenaje y distribución.
- **Generación de energía:** sistemas de generación de energía eléctrica basados en fuentes como son vapor, combustible fósil, termal, nuclear, solar o de viento usan la simulación para diseñar sistemas de capacidad, configuración y distribución y para el análisis y diseño de sistemas operacionales los cuales pueden tener salidas como la programación de la tasa de generación, la planificación de la distribución, el diseño de sistemas de control, el diseño de sistemas seguros y fiables, la programación de mantenimiento y de control de impacto ambiental.
- **Fabricación:** plantas de procesamiento químico, industrias de automóviles, de aviones, electrónicas, de amoblamientos, de maquinarias, de herramientas, de dispositivos y otros usan la simulación extensivamente en aplicaciones como son el planeamiento estratégico, planeamiento de la capacidad y producción media, diseño del layout de la planta, selección y reemplazo del equipo, diseño de políticas de mantenimiento y reemplazo, planeamiento y control de inventario, planificación de la producción, balance de la línea de ensamble, almacenamiento y manipulación de materiales, diseño de sistemas de manufacturación, y numerosas salidas relacionadas con el diseño, fabricación, ensamble, control de calidad, packaging, almacenaje y distribución. La popularidad de los estudios de simulación en sistemas de manufacturación han incrementado, por lo que, un considerable número de herramientas de simulación, de propósitos especiales, están disponibles comercialmente para el diseño y análisis de estos sistemas.

## Etapas en el desarrollo de un Modelo de Simulación

En el siguiente diagrama se muestran las etapas en el desarrollo de un modelo de simulación:



Figura 5: Etapas en un Modelo de Simulación

No necesariamente todos los estudios contendrán todas estas etapas y en el orden señalado; algunos estudios pueden contener etapas que no se reflejan en el diagrama. Además, un estudio de simulación no es un proceso secuencial simple. A medida que uno avanza con un estudio y un

mejor entendimiento del sistema de interés es obtenido, es frecuentemente deseable volver a un paso previo.

- **Formulación del problema y planificación del estudio:** cada estudio debe comenzar con una sentencia clara de los objetivos globales del estudio y las cuestiones específicas a ser atendidas; sin esta sentencia hay poca esperanza de éxito. El estudio completo debe ser planeado en términos del número de personas, los costos, y el tiempo requerido para cada aspecto del estudio.
- **Recolección de datos y definición de un modelo:** la información y los datos deben ser tomados sobre el sistema de interés (si existe) y usado para especificar los procedimientos operativos y distribuciones de probabilidad para las variables aleatorias usadas en el modelo. Por ejemplo, en el modelado de un banco, se podrían recolectar los tiempos entre arribos y los tiempos de servicio y usar esos datos para especificar distribuciones de tiempos inter-arribos y de servicios para usarlas en el modelo. Si es posible, los datos sobre el rendimiento del sistema, por ejemplo, demoras en la cola de clientes de un banco, deben ser recolectados para propósitos de validación en etapas posteriores.
- **Validación:** aunque la validación es algo que debe ser hecho a lo largo de todo el estudio de simulación, hay varios puntos en el estudio donde la validación es particularmente apropiada. En la construcción del modelo es útil incorporar personas que estén íntimamente familiarizados con las operaciones del sistema actual y los que deben tomar decisiones regularmente. Así se incrementará la validez del modelo y la credibilidad (o validez percibida) por parte de los responsables de decisiones también crecerá. Otro punto para validar es en la adecuación de las distribuciones de probabilidad especificadas para la generación de variables aleatorias de entrada, que debe ser testeada usando pruebas de bondad de ajuste.
- **Construcción de un programa de computación y verificación:** el modelador debe decidir si programar el modelo en un lenguaje de propósito general, o en un lenguaje de simulación diseñado especialmente o simulador. Un lenguaje de programación de propósito general probablemente ya será conocido y estará disponible. Un lenguaje de simulación puede reducir el tiempo de programación requerido significativamente. La verificación de un modelo programado significa que en las corridas no se produzcan errores.
- **Realización de corridas de prueba:** las primeras corridas con el modelo verificado se hacen con propósitos de validación. Son pruebas de corridas con resultados conocidos para verificar si el modelo está bien programado y para validar las salidas de simulación con datos reales.
- **Validación:** las corridas de prueba pueden ser utilizadas para chequear la sensibilidad de la salida del modelo a pequeños cambios en un parámetro de entrada. Si la salida varía mucho, se debe obtener una mejor estimación del parámetro de entrada. Si existe un sistema similar al de interés, los datos de salida pueden ser comparadas con aquellas del sistema existente actual. Si el acuerdo es bueno, el modelo validado es modificado de manera que represente el sistema de interés, siempre que esta modificación no sea demasiado costosa.
- **Diseño de experimentos:** consiste en organizar las corridas de simulación con cambios en los valores de las variables de entrada. Se debe seleccionar el o los diseño/s de sistema y realizar las corridas. Por cada diseño de sistema a ser simulado se deben tomar decisiones sobre las condiciones iniciales para las corridas, la longitud de tiempo de puesta en marcha (si hubiera), la longitud de la o las corrida/s, y el número de corridas de simulación independientes a realizar para cada grupo de datos de entrada.
- **Realización de las corridas de producción:** Las corridas de producción se hacen para proveer datos de rendimiento de los diseños del sistema de interés.

- **Análisis de los datos de salida:** Se utilizan técnicas estadísticas para analizar los datos de salida de las corridas de producción. Los objetivos típicos son construir un intervalo de confianza para una medida de performance para un diseño de sistema particular o decidir cual sistema simulado es el mejor relativo a alguna medida específica de performance.
- **Documentación, presentación, e implementación de resultados:** Como los modelos de simulación son comúnmente usados para más de una aplicación, es importante documentar las suposiciones que se hicieron en el modelo como así también el programa de computadora mismo. Finalmente, un estudio de simulación cuyos resultados nunca son implementados es probablemente una falla. Además, los resultados de modelos altamente creíbles serán probablemente usados.

## Proceso de Modelización

# Introducción

Para plantear un modelo existen tres enfoques principales según la naturaleza del sistema a estudiar, sea continuo, discreto o basado en agentes.

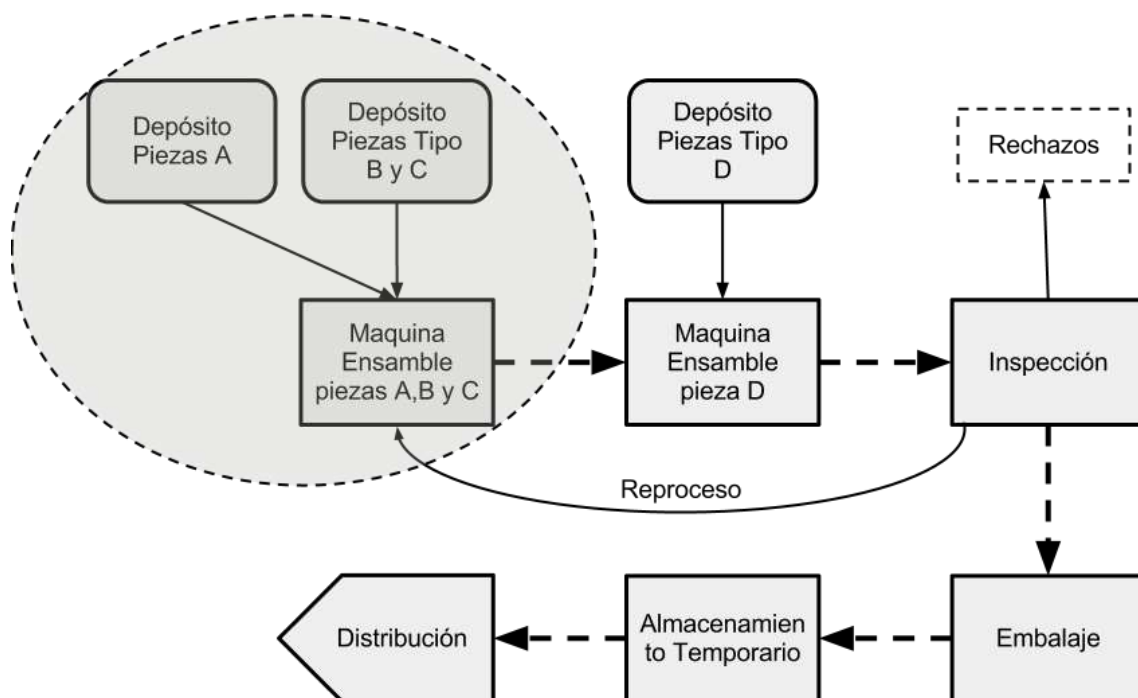
## Modelización Sistemas Discretos

La estructura del modelo de un sistema discreto en general está compuesta por:

- **Entidades:** son objetos de interés en el sistema para un determinado objetivo.
- **Atributos:** son las propiedades o características de las entidades. Permiten describir cuantitativamente al sistema.
- **Estado:** son los valores de los atributos de las entidades en un instante de tiempo. Los atributos describen el estado de una entidad, y los estados de las entidades más importantes definen el estado del sistema.
- **Evento:** es el cambio instantáneo de estado. Los eventos pueden ser continuos si los cambios se producen continuamente en el tiempo, o discretos si se producen a intervalos de tiempo.
- **Actividad:** es la operación que produce transformaciones en los estados del sistema. Las actividades comienzan y terminan con eventos.
- **Funciones:** Establecen las relaciones entre los atributos.

## Ejemplo

Se desea modelar del siguiente sistema de manufactura el arribo y ensamble de piezas remarcado:



El objetivo de estudio del sistema es el tiempo de procesamiento del ensamble de las piezas A, B y C.

Identificamos las entidades, atributos, actividades, estado y eventos:

Entidades	Atributos	Actividades	Estado	Eventos
Pieza A	Cantidad en Stock	Esperando Procesando	En Espera En Procesamiento	Comienzo del procesamiento Fin del procesamiento
Pieza B	Cantidad en Stock	Esperando Procesando	En Espera En Procesamiento	Comienzo del procesamiento Fin del procesamiento
Pieza C	Cantidad en Stock	Esperando Procesando	En Espera En Procesamiento	Comienzo del procesamiento Fin del procesamiento
Maquina Ensamble	Tiempo de servicio Tiempo entre fallas	Procesando Esperando Fallando Reparando	Ocupada Desocupada En reparación Fallada	Comienzo del procesamiento Fin del procesamiento Comienzo de la Reparación Fin de la Reparación Falla
Ordenes de Clientes	Tiempo entre arribos Cantidad de productos	Arribando Completando	En espera En procesamiento	Arribo de la orden Partida de la orden a la siguiente etapa

Hipótesis:

- Una vez que ocurre la falla, la máquina automáticamente comienza a ser reparada.
- Cuando ocurre la falla, las piezas en procesamiento reanudan el trabajo en el punto en donde quedaron.
- Se dispone de stock ilimitado de piezas para cumplimentar las órdenes.

## Modelización de Sistemas Continuos

En el planteo o construcción de un modelo para un sistema continuo se deben distinguir:

- **Componentes:** son partes constituyentes del sistema, también llamados elementos o subsistemas.
- **Variables:** están asociadas al concepto matemático de variable. Pueden clasificarse en:
  - *Exógenas, de entrada o independientes:* son las que afectan al sistema, pero éste no puede modificarlas. Pueden modificarse arbitrariamente desde el medio ambiente.
  - *Endógenas o Dependientes:* Son variables del sistema que se modifican de acuerdo a relaciones, no pueden ser modificadas arbitrariamente.
  - *De estado:* Es el conjunto mínimo de variables dependientes que permiten describir el sistema en  $t + \Delta t$ , si se conocen sus valores más los valores de las independientes en  $t$ .
  - *De salida:* Es el conjunto mínimo de variables de estado que permiten evaluar los objetivos del modelo.
- **Parámetros:** son los valores de entrada del modelo. Están **asociados** al concepto de constante matemática. No cambian su valor en una corrida o escenario de simulación, pero pueden ser modificados entre corridas o escenarios.
- **Relaciones funcionales:** es una relación entre parámetros de uno o más componentes y las variables de salida.
- **Restricciones:** Son las limitaciones que tiene el sistema y pueden ser:
  - *Naturales:* Son las que físicamente no pueden violarse. Ejemplo: si el recipiente está herméticamente cerrado en ningún momento puede variar la cantidad de agua total.

- **Autoimpuestas:** se imponen para acotar el estudio. Ejemplo: la temperatura inicial será siempre de 30°C. Incluye las hipótesis.
- **Funciones Objetivo:** son los objetivos y las metas del modelo. Implica definir para qué se modela y simula y cómo se evaluarán los factores que intervendrán en la experiencia.

## Ejemplo

Se desea analizar el inventario de piezas de tipo A. Para ello se realiza la modelización de la evolución de la cantidad de piezas A en el depósito.

Componentes	Variables Exógenas	Variables Endógenas	Variables de Salida
Piezas A	Velocidad de Arribo de piezas al depósito	Cantidad de Piezas a procesar	Cantidad de Piezas en el depósito

## Modelización de Sistemas Basados en Agentes

Para un la modelización de un sistema basado en agentes debemos primero definir que es un agente:

**Agente:** es un individuo con un conjunto de características y atributos. Es una entidad autónoma, con un conjunto de reglas que gobiernan su comportamiento y su capacidad de tomar decisiones y con protocolos de comunicación. Responden a su entorno e interactúan con otros agentes. Son diversos y heterogéneos.

Propiedades de un agente:

- **Autonomía:** Un agente es autónomo y auto dirigido. Un agente puede funcionar de manera independiente en su entorno y en sus interacciones con otros agentes, generalmente en una gama limitada de situaciones que son de interés y que surgen en el modelo
- **Modularidad:** Los agentes son modulares. Los requerimientos de modularidad implican que un agente tiene un límite, y uno puede determinar fácilmente si algo (es decir, un elemento del estado del modelo) es parte o no de un agente, o es una característica compartida entre los agentes.
- **Sociabilidad:** Un agente es social e interactúa con otros agentes. Incluyen protocolos comunes de interacción entre agentes, peleas por el espacio y para evitar colisiones, reconocimiento de agentes, comunicación e información de cambio, influencia, y otros tipos de dominio o mecanismos específicos de la aplicación.
- **Condicionabilidad:** Un agente tiene un estado que varía con el tiempo. Así como un sistema tiene un estado que consiste en la colección de variables de sus estados, un agente también tiene un estado que representa su condición, las variables esenciales asociadas a su situación actual. Estado de un agente consiste en un conjunto o subconjunto de sus atributos.

Estructura típica de un modelo basado en agente:

1. Agentes, con sus atributos y comportamientos.
2. Relaciones entre agentes y los métodos de interacción. Una topología subyacente de conexión que define cómo y con cuáles agentes interactuar.
3. Medio ambiente de los agentes. Los agentes viven e interactúan con su entorno, además de otros agentes.



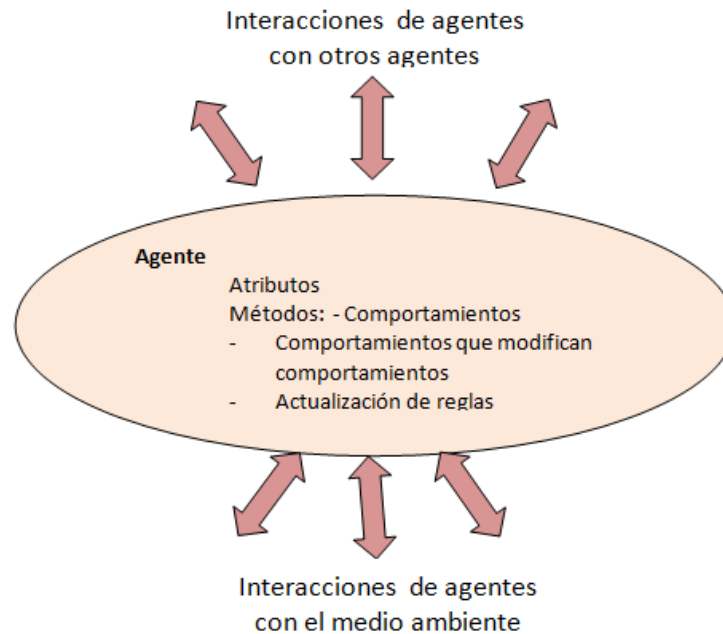


Figura 6: Estructura de un Agente

## Técnicas de simplificación de modelos

Cuando se analiza y se hace una síntesis sobre un sistema se hace una simplificación que permite abstraer el sistema y representarlo con un modelo donde aparezcan sus principales características y comportamientos en relación a un objetivo en estudio. Por ejemplo un diagrama o una ecuación matemática que representa una parte del sistema tiene un alto grado de abstracción.

Una vez contruidos los modelos de las partes entonces se trata de combinarlos, lo que implica sintetizar a partir de partes relativamente simples un modelo aproximado de una situación más compleja. Antes de combinar (sintetizar) es necesario validar y verificar las relaciones.

El procedimiento general para modelar es:

1. Establecer claramente los objetivos.
2. Dividir el problema total en problemas más simples.
3. Buscar analogías.
4. Considerar, si se puede, un ejemplo numérico específico del problema.
5. Hacer esquemas, ponerle nombres a las variables y constantes, escribir las relaciones que se conozcan.
6. Escribir **todos** los datos que se poseen **incluso** los obvios.
7. Si el modelo es manejable o simple, entonces enriquecerlo. Si no lo es, se debe simplificar.

Simplificar puede ser:

- Convertir en constantes algunas variables.
- Eliminar o combinar variables.
- Suponer linealidad o promedios.
- Agregar suposiciones y restricciones más "fuertes".
- Reducir los límites del sistema.

Un buen modelo debe ser:

- Fácil de entender por el usuario.

- Dirigido a objetivos claros.
- No debe dar respuestas absurdas.
- De fácil comunicación.
- Debe describir todo lo importante.
- Adaptable y, por consiguiente, fácil de modificar.
- Evolutivo, implica sencillez al principio y cada vez más complejo (a medida que el usuario aprende a manejarlo).

La construcción de un modelo lógico y matemático de un sistema real para un objetivo dado es tanto un arte como una ciencia. Aunque hay pocas reglas firmes sobre como uno debe avanzar en el proceso de modelado, un punto en el que la mayoría de los autores coinciden es que siempre es una buena idea comenzar con un modelo que es solo moderadamente detallado, el cual mas tarde puede hacerse más sofisticado si es necesario.

Un modelo debe contener solo suficiente detalle para capturar la esencia del sistema para los propósitos para los cuales el modelo fue pensado; no es necesario tener una correspondencia uno a uno entre elementos del modelo y elementos del sistema.

Un modelo con excesivo detalle puede ser demasiado costoso de programar y ejecutar.

## Ventajas y desventajas de la Simulación

Algunas posibles **ventajas** de la simulación son:

- La mayoría de los sistemas complejos del mundo real con elementos estocásticos no pueden ser descriptos precisamente por un modelo matemático que pueda ser evaluado analíticamente. Así, una simulación es comúnmente el único tipo de investigación posible.
- La simulación le permite a uno estimar la performance de un sistema existente bajo algún conjunto proyectado de condiciones operativas.
- Los diseños de sistemas propuestos alternativos (o políticas operativas alternativas para un sistema) pueden ser comparadas vía simulación para ver cuál satisface mejor un requerimiento específico.
- En una simulación podemos mantener mucho mejor control sobre las condiciones experimentales que lo que generalmente sería posible cuando experimentamos con el sistema en sí mismo.
- La simulación nos permite estudiar un sistema con un largo horizonte de tiempo (por ejemplo un sistema económico) en un tiempo comprimido, o alternativamente estudiar los funcionamientos detallados de un sistema en un tiempo expandido.

Algunas **desventajas** de la simulación son:

- Cada ejecución de un modelo de simulación estocástico produce sólo estimaciones de las características reales de un modelo para un conjunto particular de parámetros de entrada. Así, se requerirán varias corridas independientes del modelo para cada conjunto de parámetros de entrada a ser estudiado. Por esta razón, los modelos de simulación no son tan buenos en optimización como lo son en comparación de un número fijo de diseños de sistemas alternativos especificados. Por otro lado, si un modelo analítico es apropiado, puede fácilmente producir las características reales exactas del modelo para una variedad de conjuntos de parámetros de entrada. Así, si un modelo analítico válido está disponible o puede ser desarrollado en forma simple, este será preferible a un modelo de simulación.

- Los modelos de simulación son comúnmente costosos y consumidores de tiempo para desarrollar.
- El gran volumen de números producidos por un estudio de simulación o el impacto persuasivo de una animación realística por lo general crean una tendencia a tenerle mayor confianza al resultado de un estudio. Si un modelo no es una representación válida de un sistema bajo estudio, los resultados de la simulación, sin importar lo impresionantes que parezcan, proveerán poca información útil sobre el sistema actual.
- En algunos estudios, tanto la simulación como los modelos analíticos podrían ser útiles. En particular, la simulación puede usarse para chequear la validez de suposiciones necesarias en un modelo analítico. Por otro lado, un modelo analítico puede sugerir alternativas razonables para investigar en un estudio de simulación.

### **Riesgos al momento de realizar una Simulación**

Asumiendo que se ha tomado una decisión prudente de utilizar la simulación, existen varios riesgos a lo largo del camino hacia la terminación exitosa de un estudio de simulación. Estos riesgos son:

- Fallar en no tener un conjunto de objetivos bien definidos al comienzo del estudio de simulación.
- Inapropiado nivel de detalle del modelo.
- Fallar en no comunicarse regularmente con la administración a lo largo del estudio de simulación.
- Tratar un estudio de simulación como si éste fuera principalmente un ejercicio complicado de programación.
- Fallar en no tener personas con entrenamiento en estadística y operaciones-investigación en el equipo de modelado.
- Usar software de simulación comercial que puede contener errores o cuyas sentencias pueden no estar bien documentadas y pueden no implementar la lógica de modelado deseada.
- Confiar en simuladores que hacen la simulación accesible para “cualquiera”.
- Mal uso de animación.
- Fallar en no tener en cuenta correctamente los orígenes de la aleatoriedad en el sistema actual.
- Usar distribuciones arbitrarias (por ejemplo normal o uniforme) como entrada de la simulación.
- Analizar los datos de salida de una corrida de simulación usando fórmulas estadísticas que suponen independencia.
- Realizar una repetición simple de un diseño de sistema particular y tratar las estadísticas de salida como las “respuestas reales”.
- Comparar diseños de sistemas alternativos sobre la base de una repetición para cada diseño.
- Usar medidas de performance equivocadas.

# Teoría de Colas

## Introducción

La teoría de colas estudia los fenómenos de colas o espera que se producen en un sistema. La formación de colas es una característica de los sistemas discretos, que se produce cuando la demanda por un servicio excede la capacidad para satisfacerlo. En la vida cotidiana son muchos los ejemplos de sistemas de este tipo, aviones que esperan volando en círculo para aterrizar, personas que esperan delante de un cajero automático para poder retirar dinero, gente en la cola de un supermercado esperando pagar por los artículos que compre, etc.

Esta teoría brinda información asociada al fenómeno que permite tomar decisiones sobre cada uno de estos tipos de problemas, como por ejemplo tiempo de espera promedio, longitud promedio de la cola de espera, etc.

## Estructura básica de los modelos de colas

Los dos componentes principales de un problema de colas son las **entidades** que serán atendidas y el **servidor**. Las **entidades** a ser atendidas pueden ser clientes que llegan a un banco, piezas a ser tratadas en un taller, autos en una cabina de peaje, etc. Estas llegarán al servicio y ocuparán el servidor o esperarán a ser llamadas por él para ser atendidas, formando la cola de espera por el servicio.

El análisis de colas se realiza mediante la descripción de los atributos de las entidades componentes, por medio del **tiempo entre llegadas** para las entidades y el **tiempo de servicio** como atributo principal del servidor. Estos tiempos son, generalmente probabilísticos o aleatorios. La combinación de estos dará la característica principal de estos sistemas que es la formación de colas, cuya **longitud** o **tamaño** es una medida necesaria en la calidad del servicio.

La resolución de estos problemas implica conocer la **disciplina de cola** o modo de tratamiento de la misma: esta representa el orden en el que serán atendidas las entidades que esperan por el servicio. Algunas disciplinas más utilizadas son:

- Primero que llega es el primero que sale (FCFS: First Come First Served), para el caso de personas que llegan a una oficina de correo;
- Ultimo que llega primero que sale (LCFS: Last Come First Served), característicos del tratamiento de colas de expedientes apilados en un escritorio;
- Colas totalmente aleatorias en las que no existe un orden de atención, por ejemplo un conjunto de tornillos para armar una pieza cualquiera puede ser sacado para su colocación.

Otro tipo de tratamiento es el que requiere de la selección de las entidades de la cola por algún tipo de **prioridad**, las cuales serán sacadas de la cola por el servidor o serán tratadas en forma preferencial, por ejemplo expedientes de tratamiento urgente, mujeres embarazadas en la cola del supermercado, etc.

Otro aspecto a modelar en este tipo de problemas es el comportamiento de los clientes o entidades en la cola, como por ejemplo **maniobrar** para cambiar de cola esperando reducir su tiempo de espera, **renunciar** a la espera después de un determinado período de espera, o **seleccionar** una cola de un determinado tamaño.

Las instalaciones de servidores pueden ser con un solo servidor o varios de ellos en paralelo (con igual o distinto tiempo de servicio para cada uno), o en serie si la entidad debe cumplir con una serie de actividades en el sistema.

Las entidades en sistemas de colas se crean por una **fuentes de generación** o llegada de clientes al sistema, estas pueden ser **finitas** o **infinitas**. Las del primer tipo limita la llegada de las entidades al sistema, como por ejemplo la cantidad de clientes que pueden acceder a un número de atención para un turno médico en el hospital; en cambio, las fuentes infinitas generan gran cantidad de arribos al servicio, como por ejemplo transacciones electrónicas a una red de cajeros.

### Modelo de colas de Poisson generalizado

En este modelo los tiempos entre las llegadas y los servicios tiene distribución de probabilidad exponencial. Se supone el estado estable para el modelo funcionando en forma continua, esta simplificación ignora lo que sucede en el estado transiente.

El modelo de Poisson supone que las tasas de arribo y salida son dependientes del estado, es decir que depende del número de clientes en el sistema.

Siendo:

- $n$ : número de clientes en el sistema.
- $\lambda_n$ : tasa de llegada de clientes cuando hay  $n$  clientes en el sistema.
- $\mu_n$ : tasa de salida de clientes cuando hay  $n$  clientes en el sistema.
- $p_n$ : probabilidad del estado estable de  $n$  clientes en el sistema.

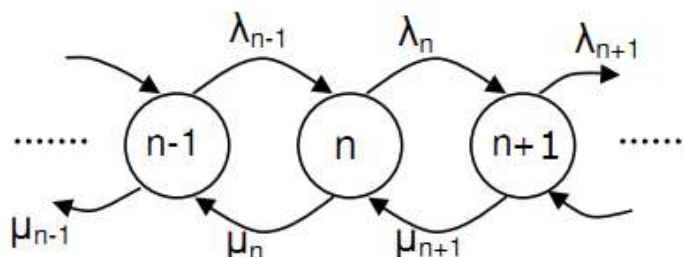


Figura 7: Transiciones de estado en el sistema

$$\text{Tasa flujo de llegada} = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}$$

$$\text{Tasa flujo de salida} = \lambda_n p_n + \mu_n p_n$$

Por condición de estado estable:

$$\lambda_n p_n + \mu_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}$$

Haciendo desde el estado "0" inicial:

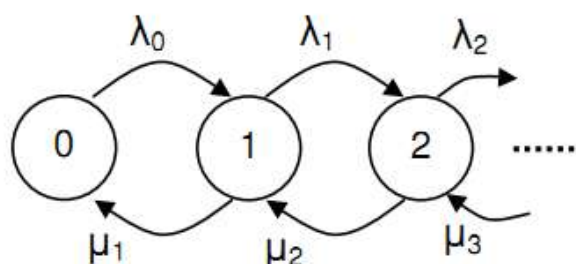


Figura 8: Transiciones de estado del sistema

Para  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}\mu_1 p_1 &= \lambda_0 p_0 \\ p_1 &= \lambda_0 / \mu_1 * p_0\end{aligned}$$

Para  $n = 1$ :

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1 + \mu_1 p_1 = (\lambda_1 + \mu_1) * p_1$$

Reemplazando por la ecuación del estado "0":

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) * \lambda_0 / \mu_1 * p_0$$

Reordenando y despejando de la ecuación anterior:

$$p_2 = (\lambda_1 * \lambda_0) / (\mu_2 * \mu_1) * p_0$$

De aquí se deriva que para el caso del estado estable de "n" clientes en el sistema:

$$P_n = (\lambda_{n-1} * \lambda_{n-2} * \dots * \lambda_1 * \lambda_0) / (\mu_n * \mu_{n-1} * \dots * \mu_1) * p_0$$

Por propiedad de la distribución de Poisson, se sabe que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_n &= 1 \\ p_0 &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \right]^{-1}\end{aligned}$$

## Colas Especializadas de Poisson

Sea un sistema de colas como el que se muestra en la figura:

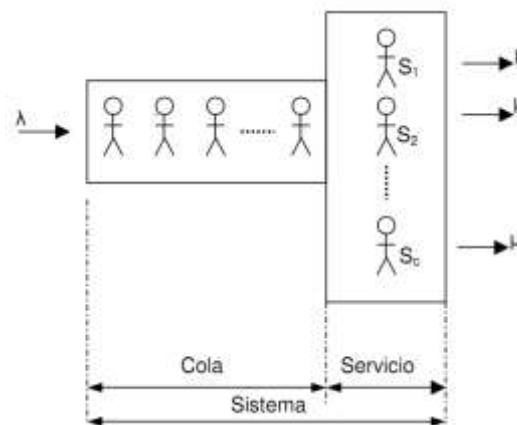


Figura 9: Sistema de colas de Poisson especializado.

Estos sistemas se caracterizan por una llegada sin límites de arribos, con una tasa de arribos de  $\lambda$  y de  $c$  servidores. Los servicios son todos iguales, por lo que todos realizan el servicio con un tiempo promedio de  $\mu$  unidades de tiempo por cliente.

La notación adoptada para este tipo de sistemas es la de Kendall, modificada por Taha:

$$(a / b / c) : (d / e / f)$$

Donde:

- a: Descripción de la distribución (función) de las llegadas o arribos.
- b: Descripción de la distribución (función) de los tiempos de servicio (salidas).
- c: Número de servidores en paralelo.
- d: Disciplina de cola a aplicar.
- e: Número máximo (finito o  $\infty$ ) permitido en el sistema.
- f: Tamaño de la fuente demandante del servicio (finito o  $\infty$ ).

Tanto para las llegadas como para los tiempos de servicio existe una notación estándar para la caracterización de estas distribuciones:

- M: Distribución de llegada o salida de Poisson o de forma equivalente distribución de tiempo entre llegadas o de servicios exponencial.
- D: Tiempo constante de servicio o entre llegadas.
- $E_n$ : Distribución de Erlang o gama para el tiempo de servicio o llegadas.
- G.I.: Distribución genérica del tiempo entre llegadas.
- G: Distribución genérica del tiempo de servicio.

Para la disciplina de cola utilizada en el modelo la expresión del parámetro d es:

- FCFS o FIFO: Primero que entra primero que sale.
- LCSF o LIFO: Último que entra primero que sale.
- SIRO: servicio aleatorio (Service In Random Order)
- G.D.: genérica

## Medidas de Rendimiento

Los estadísticos que se obtienen del tratamiento de los sistemas con la Teoría de colas son los siguientes:

- $L_s$ : número esperado de clientes en el sistema.
- $L_q$ : número esperado de clientes en la cola.
- $W_s$ : tiempo promedio (aproximado) de espera de los clientes en el sistema.
- $W_q$ : tiempo promedio (aproximado) de espera de los clientes que esperaron en cola.
- $\hat{c}$ : número esperado de servidores ocupados.

Estas medidas se derivan de la probabilidad del estado estable para n entidades en el sistema.

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n \times p_n$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c) \times p_n$$

Considerando las fórmulas de Little, provenientes de la estadística:

$$L_s = C W_s$$

$$L_q = \lambda W_q$$

bajo la suposición que todos los clientes que llegan entran al sistema, es decir que no hay abandonos del ingreso por cualquier razón, por ejemplo porque hay muchos clientes en el sistema. Si hubiera abandonos se debería usar una tasa de arribos ( $\lambda$ ) efectiva.

$$W_s = W_q + 1/\mu$$

Esto es el tiempo de espera promedio en el sistema es igual al tiempo promedio de espera en cola más el tiempo promedio de servicio.

Multiplicando por C la ecuación anterior, obtenemos:

$$L_s = L_q + \lambda / \mu$$

Reordenando:

$$L_s - L_q = \lambda / \mu = \hat{c}; \text{ es igual al número de servidores ocupados.}$$

$$\% \text{ Utilización} = c / \hat{c} * 100$$



## Tratamiento Analítico y Numérico de un Modelo Matemático

### Descripción de la situación

Sea un kiosco donde un empleado atiende a los clientes que arriban al lugar. El esquema de la Figura 10, muestra que se da el servicio a los clientes, uno por vez, sobre la base de una disciplina de cola FIFO (primero entrado primero atendido).

Los clientes arriban en forma aleatoria y esperan en la cola si el empleado está ocupado.

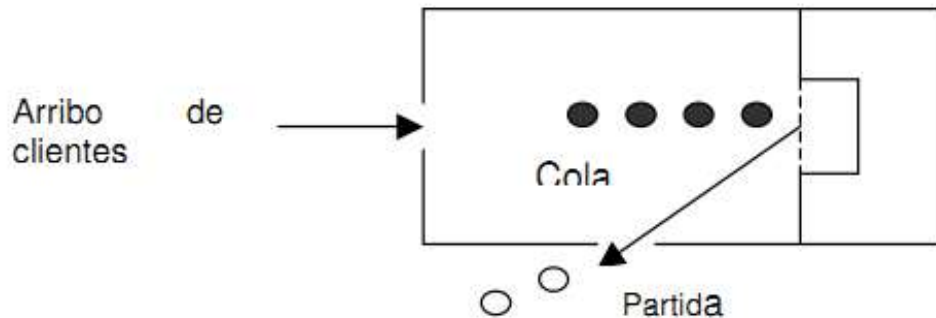


Figura 10: Sistema de una oficina de correos.

Este es un servicio clásico de cola simple – simple servidor, los estadísticos de interés son la velocidad de arribo de los clientes o el tiempo entre arribos, la velocidad de servicio o el tiempo de servicio, la utilización del servidor, la longitud promedio de la cola, el número promedio de clientes en el sistema, el tiempo promedio de espera y el tiempo promedio en el sistema.

Las variables de estado asociadas con estos sistemas son el tiempo de arribo de cada cliente a la cola, el número de clientes en la cola, y el estado (desocupado u ocupado) del servidor.

Tanto el arribo como la partida (una vez que el servicio se completó) son eventos que producen cambios sobre las variables de estado. Si la cola está vacía cuando se termina el servicio de un cliente el servidor se pone en desocupado, de otro modo se selecciona el próximo cliente en la cola para servirlo.

Obviamente el servidor trabaja continuamente mientras hay clientes en la cola. Se observaron los tiempos de arribos, encolado y servicio durante dos horas como se muestra en la tabla 1.4.

Cliente	Tiempo de arribo	Tiempo de Inter-arribos	Inicio de Servicio	Fin de Servicio	Tiempo Servicio	Espera en cola	Tiempo en el Sistema
i					Si	Wi	Si + Wi
1	15	15	15	20	5	0	5
2	17	2	20	23	3	3	6
3	19	2	23	27	4	4	8
4	30	11	30	31	1	0	1
5	35	5	35	37	2	0	2
6	36	1	37	43	6	1	7
7	37	1	43	50	7	6	13
8	49	12	50	53	3	1	4
9	52	3	53	55	2	1	3
10	58	6	58	61	3	0	3
11	60	2	61	64	3	1	4
12	63	3	64	71	7	1	8
13	64	1	71	75	4	7	11
14	65	1	75	77	2	10	12
15	79	14	79	83	4	0	4
16	82	3	83	89	6	1	7
17	83	1	89	95	6	6	12
18	87	4	95	98	3	8	11
19	90	3	98	101	3	8	11
20	95	5	101	106	5	6	11
21	106	11	106	111	5	0	5
22	110	4	111	113	2	1	3
23	112	2	113	116	3	1	4
24	117	5	117	122	5	0	5
25	120	3	122	127	5	2	7
			Totales		99	68	167

Datos observados (tiempo en minutos) en la atención de un kiosco

De esta tabla se construye un histograma del tipo que se muestra en la figura (número de clientes en la cola (parte superior) o en el sistema (parte inferior) en función del tiempo.

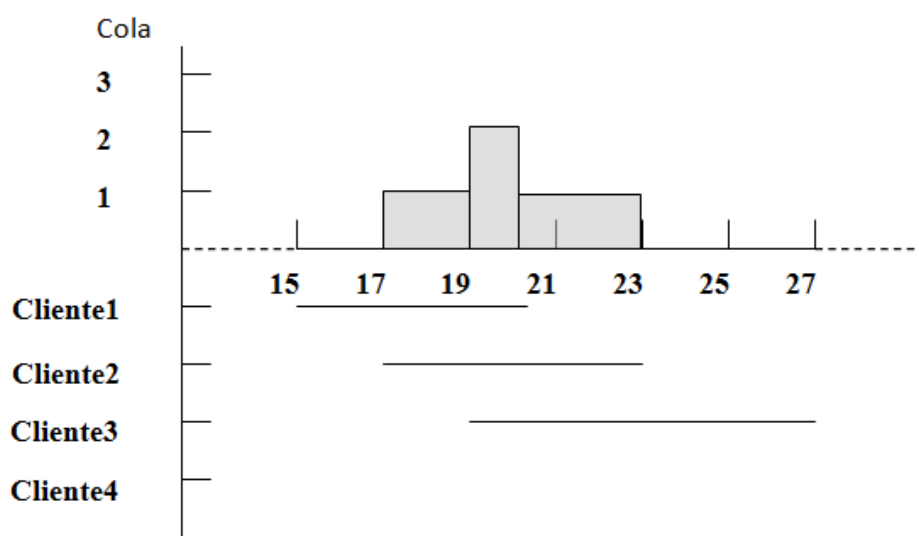


Figura 11: Numero de clientes en la cola observados.

La tabla se derivó de este histograma y se construyó el tiempo acumulado según el número de clientes en la cola y el número total de clientes en el sistema. Se tomó el tiempo T de partida de N clientes del sistema como el período de estudio, en este caso N = 25 clientes.

Para observar este tipo de sistemas se aplicarán distintos enfoques para su estudio.

	Clientes en Cola	Clientes en el sistema	Tiempo Acumulado
i	$m_i$	$n_i$	$t_i$
1	0	0	28
2	0	1	48
3	1	2	34
4	2	3	17

Tiempos acumulativos observados para los clientes en cola y en el sistema

## Método Aproximado

Los datos dados en las tablas están basados en una pequeña muestra de observaciones, y por lo tanto los estadísticos calculados con estos datos son solo una aproximación de las medidas reales de la performance del sistema. De la tabla tenemos:

- Número total de arribos  $N = 25$
- Tiempo de arribo del último cliente  $T' = 120$  min.
- Tiempo de salida del último cliente  $T = 127$  min.
- Velocidad promedio de arribos  $\lambda = N / T' = 25/120 = 0.208$  arribos/minuto
- Tiempo de inter-arribos promedio  $1/\lambda = 4.8$  minutos.
- Velocidad promedio de servicio  $\mu = N / \sum S_i = 25/99 = 0,2525$  servicios/minuto
- Tiempo de servicio promedio  $1/\mu = 3,96$  minutos.
- Utilización del servidor  $\lambda / \mu = 0,824$
- Tiempo promedio de espera en cola  $Wq = \sum W_i / N = 68 / 25 = 2,72$  minutos/cliente
- Tiempo promedio en el sistema  $W = \sum (S_i + W_i)/N = 167 / 25 = 6,68$  minutos/cliente

Usando la segunda tabla se puede calcular número promedio de clientes en la cola:

$$Lq = \sum (m_i t_i) / T$$

$$Lq = (0 \times 28 + 0 \times 48 + 1 \times 34 + 2 \times 17) / 127$$

$$Lq = 68/127 = 0,535 \text{ clientes}$$

Y el número promedio de clientes en el sistema

$$L = \sum (n_i t_i) / T$$

$$L = (0 \times 28 + 1 \times 48 + 2 \times 34 + 3 \times 17)/127$$

$$L = 167/127 = 1,315 \text{ clientes}$$

Si estas medidas de performance son socialmente, económicamente, o de cualquier modo inaceptables entonces el sistema deberá ser rediseñado o modificado para alcanzar los resultados deseados.

## Método Teórico

Los sistemas de cola simple/servidor único del tipo M/M/1/ $\infty$ , como el ejemplo resuelto, considera que el arribo de clientes se produce en forma aleatoria desde una fuente infinita (con una

distribución de Poisson), los tiempo de servicio están distribuidos según una exponencial negativa, tiene un solo servidor y una cola simple y no tiene restricciones para el tamaño de la cola.

Los resultados teóricos estándares para este tipo de sistemas de cola son:

- Tiempo de inter-arribos promedio =  $1/\lambda$
- Tiempo de servicio promedio =  $1/\mu$
- Factor de servicio o utilización de la facilidad o del servidor  $\rho = \lambda/\mu < 1$
- Probabilidad de  $j$  clientes en el sistema =  $P_j = \rho^j (1-\rho)$
- Número promedio de clientes en el sistema =  $\rho/(1-\rho)$
- Longitud promedio de cola =  $\rho^2/(1-\rho)$



Figura 12: Esquema según Teoría de Colas

- Promedio de espera en cola =  $\rho / [(1-\rho) \cdot \mu]$
- Tiempo promedio de espera para aquellos que deben esperar =  $1 / [(1-\rho) \cdot \mu]$
- Tiempo promedio en el sistema =  $1 / (\mu - \lambda)$
- Función de densidad de probabilidad para el tiempo de espera =  $\rho (\mu - \lambda) e^{-t(\mu - \lambda)}$
- Probabilidad de que el tiempo de espera sea mayor que  $t = \rho e^{-t(\mu - \lambda)}$
- Función de densidad de probabilidad para el tiempo total en el sistema =  $(\mu - \lambda) e^{-t(\mu - \lambda)}$
- Probabilidad de pasar un tiempo mayor que  $t$  en el sistema =  $e^{-t(\mu - \lambda)}$

Estas fórmulas son aplicables sólo si el tiempo entre arribos y el tiempo de servicio están distribuidos exponencialmente. Los valores para el ejemplo son:  $\lambda = 0.207$  y  $\mu = 0.260$ .

Los valores estadísticos teóricos del sistema son:

- $\lambda/\mu = \rho = 0.79$
- $Wq = \rho / [(1-\rho) \cdot \mu] = 14.46$
- $W = 1 / (\mu - \lambda) = 18,9$
- $Lq = \rho^2/(1-\rho) = 2,97$
- $L = \rho/(1-\rho) = 3.76$

## Simulación

Realizando la programación en un lenguaje específico (en este caso GPSS) el problema queda de la siguiente manera:

```
GENERATE (EXPONENTIAL (2, 0,312))
QUEUE COLA
SEIZE CORREO
DEPART COLA
ADVANCE (EXPONENTIAL (2, 0,228))
RELEASE CORREO
TERMINATE 1
```

La salida de simulación es el siguiente reporte:

START TIME		END TIME		BLOCKS	FACILITIES	STORAGES	
0.000		8379.513		7	1	0	
NAME		VALUE					
COLA		10000.000					
CORREO		10001.000					
LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY		
	1	GENERATE	25	0	0		
	2	QUEUE	25	0	0		
	3	SEIZE	25	0	0		
	4	DEPART	25	0	0		
	5	ADVANCE	25	0	0		
	6	RELEASE	25	0	0		
	7	TERMINATE	25	0	0		
FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY DELAY
CORREO	25	0.809	271.265	1	0	0	0 0 0
QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
COLA	6	0	25	9	1.729	579.501	905.470 0
FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
26	0	8565.270		26	0	1	

Tiempo promedio en el sistema:  $(271.265 + 579.501) / 60 = 14,18$  min.

La representación de los arribos de las nuevas entidades en el sistema, la representación de lo que las entidades realizan en el sistema y los mecanismos para la terminación de la simulación son los tres componentes esenciales de un modelo de simulación.

## Bibliografía

“Simulation Modeling and Analysis”, Averil M. Law y W. David Kelton, Ed. Mc. Graw-Hill, (1991).

“Discret-Event System Simulation”, Jerry Banks, John S. Carson II, Barry Nelson, Fifth Edition, Ed. Prentice-Hall, (2010).

“Discret-Event System Simulation”, Jerry Banks, John S. Carson II, Barry Nelson, Ed. Prentice-Hall, (1996).

“Computer Simulation and Modelling”, Francis Neelankaveel, John Wiley & Sons, (1986).

“Discrete systems simulation”, B. Koshnevis, McGraw-Hill, (1994).

“Managing Business Complexity. Discovering Strategic Solutions with Agent-Based Modeling and Simulation”, M.J. North and Charles M. Macal, Oxford University Press (2007).