PROMETHEE

(Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations)

Introducción

Con el nombre PROMETHEE se designa a una familia de métodos de la escuela francesa.

Las cuatro primeras variantes de este método fueron propuestas para problemas tipo Pγ. Están caracterizados por un índice de preferencia (s_{ik}) que refleja la credibilidad de la afirmación que la alternativa x_i es preferible a la alternativa x_k. Estos métodos utilizan comparaciones binarias entre alternativas, atributo a atributo. Utilizan el concepto de seudo criterio, con la posibilidad de asociar a los mismos *límites de indiferencia (q) y de preferencia estricta (p).*

De esta manera, dependiendo de las diferencias de performances existentes entre las alternativas, el decisor podrá variar su grado de preferencia de una alternativa en relación a otra de acuerdo a los seudo criterios utilizados. Estableciéndose a través de este procedimiento que, pequeñas diferencias conducen a una menor preferencia y grandes diferencias implican una mayor preferencia. Este grado de preferencia puede ser representado por un número real entre 0 y 1, según una función cuya forma debe ser definida por el decisor, llamada *función de preferencia relativa*.

Este método tiene distintas versiones, de las cuales estudiaremos solamente dos y sus características principales son:

PROMETHEE I la ordenación obtenida es un preorden parcial, ya que es posible que se presente una relación de incomparabilidad entre alternativas.

PROMETHEE II se obtiene un preorden total, ya que las relaciones de incomparabilidad no son admitidas por este método. Con el método PROMETHEE II se obtiene un orden por intervalos ya que el mismo trabaja con límites variables.

PROMETHEE I

Este método tiene como objetivo resolver problemas de ordenación, es decir de tipo P.Υ. Se obtiene un preorden, tal vez parcial, de las alternativas o acciones analizadas.

Para poder aplicar el método sobre una matriz de decisión dada (por ej. m alternativas y n atributos), necesitamos establecer previamente dos cosas:

- el peso w_j relativo a cada atributo j, donde j = 1, ... , n. Suponemos que los pesos w_j son conocidos.
- los tipos de seudo-criterios considerados, representados a través de las funciones de preferencias relativas. Los autores del método PROMETHEE sugieren seis tipos diferentes que se pueden utilizar según las diferentes aplicaciones.

Los pasos a seguir para aplicar este método son los siguientes:

I.- Primer Paso

Determinar cómo se sitúan las alternativas con respecto a cada atributo

II.- Segundo Paso

Expresar la intensidad de la preferencia de la alternativa x_i comparada con x_k

III.- Tercer Paso

Expresar como x_i supera a las demás y como es superada por las otras

IV.- Cuarto Paso

Obtener el preorden deseado

Primer paso: Determinar cómo se sitúan dos alternativas con respecto a un atributo

$\Rightarrow$ calcular, las **diferencias** $\left(\delta_{ik}\right)$ para cada par de alternativas considerando los atributos donde $x_i \succeq x_k$ representa la diferencia de performance de la alternativa x_i con la alternativa x_k relativa al atributo j

$$\delta_{ik} = \left|u_j(x_i) - u_j(x_k)\right|$$

$\Rightarrow$ calcular la **función de preferencia relativa** a cada atributo j:

$$P_j\left(x_i, x_k\right) = P_j\left(\left|u_j(x_i) - u_j(x_k)\right|\right) = P_j\left(\delta_{ik}\right)$$

Segundo paso: Calcular el índice de preferencia s_{ik} de la alternativa x_i con respecto a la alternativa x_k.

$$s_{ik} = \frac{\sum_j w_j P_j\left(x_i, x_k\right)}{\sum_j w_j} = \frac{\sum_j w_j P_j\left(\delta_{ik}\right)}{\sum_j w_j}$$

Este índice expresa la intensidad de la preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_k, considerando simultáneamente a todos los atributos.

Tercer Paso:

Calcular los ***flujos de superación positivos*** (ϕ^+_i) y ***negativos*** (ϕ^-_i) relativos a la alternativa x_i.

$$\phi^+_i = \sum_k s_{ik}$$

ϕ^+_i expresa cómo la alternativa x_i supera a las demás alternativas.

$$\phi^-_i = \sum_k s_{ki}$$

ϕ^-_i expresa cómo la alternativa x_i es superada por las demás alternativas.

Cuarto Paso: Realizar la intersección de los dos preordenes obtenidos en el paso anterior con la finalidad de obtener el preorden parcial deseado, de acuerdo a las siguientes relaciones:

x_i supera a x_k si:	***x_i es indiferente a x_k si:***	***x_i es incomparable a x_k si:***
$\phi^+_i > \phi^+_k$ y $\phi^-_i < \phi^-_k$ ó $\phi^+_i > \phi^+_k$ y $\phi^-_i = \phi^-_k$ ó $\phi^+_i = \phi^+_k$ y $\phi^-_i < \phi^-_k$ ó	$\phi^+_i = \phi^+_k$ y $\phi^-_i = \phi^-_k$ ó	$\phi^+_i > \phi^+_k$ y $\phi^-_i > \phi^-_k$ ó $\phi^+_i < \phi^+_k$ y $\phi^-_i < \phi^-_k$

Función de preferencia relativa

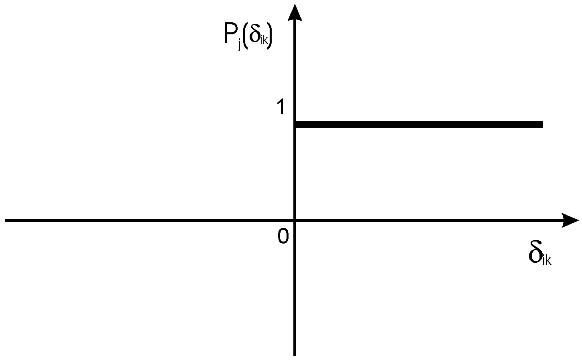
En la construcción de esta función se pueden adoptar diferentes modelos, con el objetivo de definir el poder discriminador del criterio.

Considerando los criterios en los cuales la alternativa x_i es preferible o indiferente a x_k, presentamos seis tipos de funciones que pueden ser utilizadas en aplicaciones prácticas.

1. ***Verdadero Criterio o Criterio Usual***

En este caso no necesitan definirse parámetros. La función de preferencia será:

$$P_j\left(\delta_{ik}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{(indiferencia)} \\ 1 & \text{si} \quad \delta_{ik} \neq 0 \quad \text{(preferencia estricta)} \end{cases}$$

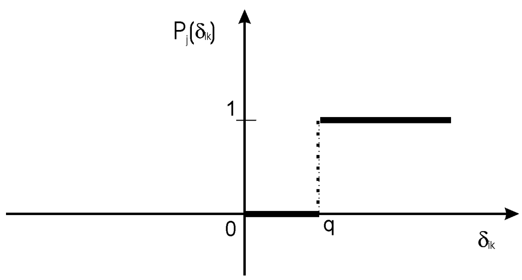


2. ***Cuasi Criterio***

Parámetro a fijar: límite de indiferencia (q).

La función de preferencia será:

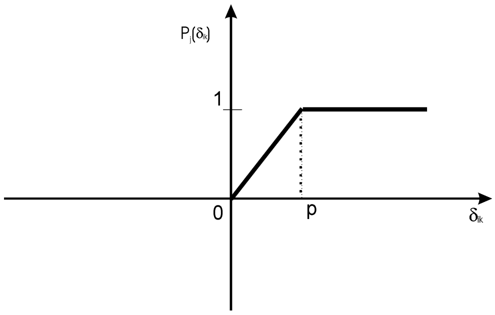
$$P_j\left(\delta_{ik}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta_{ik} \leq q \quad \text{(indiferencia)} \\ 1 & \text{si} \quad \delta_{ik} > q \quad \text{(preferencia estricta)} \end{cases}$$



3. ***Seudo Criterio con preferencia lineal***

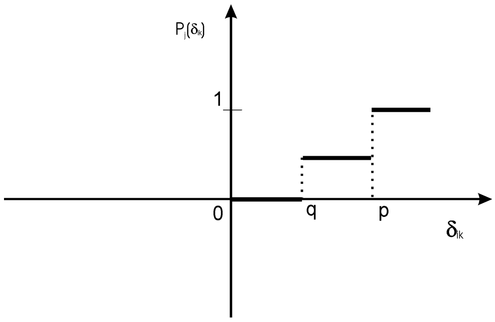
En este caso el decisor fija un límite o umbral de preferencia.

$$P_j\left(\delta_{ik}\right) = \begin{cases} \dfrac{\delta_{ik}}{p} & \text{si} \quad \delta_{ik} \leq p \\ 1 & \text{si} \quad \delta_{ik} > p \end{cases}$$



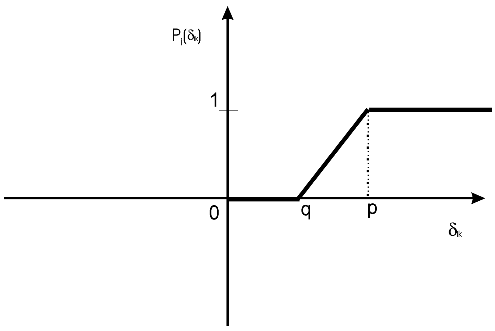
4. ***Level Criterio*** Definir simultáneamente el límite de indiferencia (q) y el de preferencia (p). Entre q y p se presenta una zona de preferencia débil.

$$P_j\left(\delta_{ik}\right)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta_{ik} \leq q \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad q<\delta_{ik} \leq p \\ 1 & \text{si} \quad p<\delta_{ik} \end{cases}$$



5. ***Criterio con preferencia lineal y área de indiferencia***
También se deben definir los dos límites q y p.

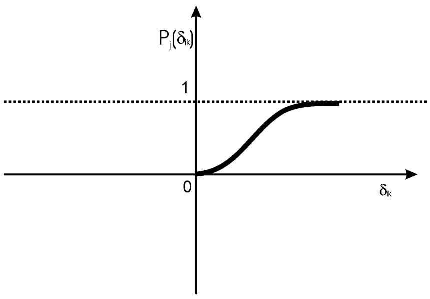
$$P_j\left(\delta_{ik}\right)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta_{ik} \leq q \\ \dfrac{\left(\delta_{ik}-q\right)}{p-q} & \text{si} \quad q<\delta_{ik} \leq p \\ 1 & \text{si} \quad p<\delta_{ik} \end{cases}$$



6. ***Criterio gaussiano***

En esta función, sólo se requiere la determinación de σ.

$$P_j\left(\delta_{ik}\right) = 1 - e^{\left(\frac{-\delta_{ik}^{\;2}}{2\sigma^2}\right)}$$



Aplicación a un EJEMPLO:

Alternativas	Atributos		
	Precio	Confort	Consumo
1	18.000	5	8
2	20.500	6	5
3	24.700	6	4
4	22.800	8	7
Pesos	5	2	3

"Precio": seudo-criterio con preferencia lineal y área de indiferencia, parámetros: p = 4000 y q = 1000
"Confort" y Consumo": verdaderos criterios

1.- ***Determinar cómo se sitúan las alternativas con respecto a cada atributo:*** para cada par de alternativas calcular, las diferencias δ_{ik} para aquellos criterios donde $x_i \succeq x_k$ y a continuación la función de preferencia relativa a cada criterio j.

Considerando las alternativas 1 y 2, obtenemos lo siguiente:

Precio: (a minimizar) $1 \succeq 2$

$$\delta_{12} = |\, 18000 - 20500 \,| = 2500$$

La función de preferencia relativa:

$$P_{\text{precio}}\left(\delta_{12}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_{12} \leq 1000 \\ \dfrac{\left(\delta_{12} - 1000\right)}{4000 - 1000} & \text{si } 1000 < \delta_{12} \leq 4000 \\ 1 & \text{si } 4000 < \delta_{12} \end{cases}$$

Como $\delta_{12} = 2500$, calculamos

$$P_{\text{precio}}(\delta_{12}) = \frac{2500 - 1000}{4000 - 1000} = 0,5$$

Confort: (a maximizar) $1 < 2$ no calculamos la diferencia.

Consumo: (a maximizar) $1 \succeq 2$

$$\delta_{12} = |8 - 5| = 3$$

Como es un verdadero criterio la función de preferencia relativa será:

$$P_{consumo}\left(\delta_{12}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta_{12} = 0 \quad \text{(indiferencia)} \\ 1 & \text{si} \quad \delta_{12} \neq 0 \quad \text{(preferencia estricta)} \end{cases}$$

Como $\delta_{12} = 3$ $\qquad P_{consumo}\left(\delta_{12}\right) = 1$

Par de Alternativas	Precio	Confort	Consumo
1-2	0,5	---	1
1-3	1	---	1
1-4	1	---	1
2-1	---	1	---
2-3	1	0	1
2-4	0,43	---	---
3-1	---	1	---
3-2	---	0	---
3-4	---	---	---
4-1	---	1	---
4-2	---	1	1
4-3	0,3	1	1

2.- Expresar la intensidad de la preferencia de la alternativa x_i comparada con x_k

Calcular el índice de preferencia s_{ik} de la alternativa x_i con respecto a la alternativa x_k.

$$s_{ik} = \frac{\sum_j w_j P_j\left(x_i, x_k\right)}{\sum_j w_j} = \frac{\sum_j w_j P_j\left(\delta_{ik}\right)}{\sum_j w_j}$$

Para nuestro caso y siguiendo con la comparación de las alternativas 1 y 2 para las cuales calculamos anteriormente:

$P_{precio}\left(\delta_{12}\right) = 0,5$ $\quad$ y $\quad$ $P_{consumo}\left(\delta_{12}\right) = 1$

El índice de preferencia será:

$$s_{12} = \frac{w_{precio} * P_{precio}\left(\delta_{12}\right) + w_{consumo} * P_{consumo}\left(\delta_{12}\right)}{\sum_j w_j}$$

$$s_{12} = \frac{5*0,5+3*1}{10} = 0,55$$

Calcular de esta manera el índice de preferencia para cada par de alternativas.

3.- Expresar cómo x_i supera a las demás alternativas y cómo es superada por las otras.

Calcular los flujos de superación salientes ϕ_i^+ y entrantes ϕ_i^-

- sumando en fila para los flujos salientes ϕ_i^+ (dado que en cada fila tenemos los índices de preferencia relativa de la alternativa en fila, con respecto a cada una de las alternativas en columna)
- sumando en columna para los entrantes ϕ_i^- (ya que en cada columna tenemos los índices de preferencia relativa de la alternativa en columna, con respecto a cada una de las alternativas en fila)

Resumimos la información en la tabla:

s_{ik}	1	2	3	4	ϕ^+
1		0,55	0,80	0,80	2,15
2	0,20		0,80	0,22	1,22
3	0,2	0		0	0,2
4	0,2	0,5	0,65		1,35
ϕ^-	0,6	1,05	2,25	1,02	

4.- Obtener el preorden deseado.

Con los datos anteriores y aplicando las relaciones definidas en el cuarto paso, podemos concluir que:

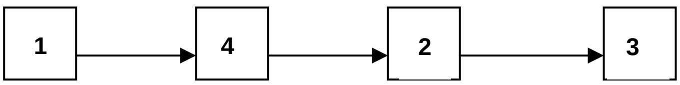
Alternativa 1 supera a las alternativas: 2, 3, 4

Alternativa 2 supera a la alternativa: 3

Alternativa 3 no supera a ninguna alternativa

Alternativa 4 supera a las alternativas: 2,3

Este resultado lo podemos ver gráficamente como:



PROMETHEE II

El método PROMETHEE II tiene por objetivo la resolución de problemas tipo P.γ, obteniendo como resultado final un preorden completo.

Para ello utiliza el mismo procedimiento que el PROMETHEE I pero introduciendo posteriormente un **flujo de superación neto** entre las alternativas ϕ_i que se obtiene, según Barba Romero, Sergio (1997), por diferencia entre los flujos salientes y entrantes calculados en el PROMETHEE I, es decir:

$$\phi_i = (\phi_i^+ - \phi_i^-)$$

y según Autran Monteiro Gómez, Luiz Flavio (1998) este flujo de superación neto debería calcularse como:

$$\phi_i = (\phi_i^+ - \phi_i^-) / m\text{-}1$$

donde m es el número de alternativas.

Se podrá realizar así una ordenación final de las alternativas de más eficiente a menos eficiente según un orden decreciente de los valores de ϕ_i , obteniendo un preorden total.

Si calculamos, para el ejemplo analizado con el método PROMETHEE I, el flujo neto ϕ_i, se obtiene la siguiente ordenación final:

$\phi_1 = 1{,}55$ $\qquad$ $\phi_3 = -2{,}05$

$\phi_2 = 0{,}17$ $\qquad$ $\phi_4 = 0{,}33$

es decir,

$$Alt_1 > Alt_4 > Alt_2 > Alt_3$$