## MODELIZACIÓN DE PREFERENCIAS

Es razonable pensar que el tomador de decisiones, frente a dos alternativas $x_1$ y $x_2$ que pertenecen a su conjunto de elección, es capaz de decir cuál de ellas prefiere o si le resultan indiferentes.

Esta expresión de preferencias del decisor, cuando efectúa las comparaciones, se realiza a través de relaciones binarias.

Para asegurar una representación realista de las preferencias del decisor, al hacer las comparaciones entre dos alternativas, se definen cuatro situaciones fundamentales y mutuamente excluyentes entre sí, de la siguiente manera:

- **Indiferencia (I)**: Cuando el decisor es indiferente entre $x_1$ y $x_2$, es decir que existen razones que justifican una equivalencia entre ambas alternativas, lo denotaremos como $x_1 \approx x_2$ ($\approx$ significa "indiferente a") o $x_1 I x_2$. Esta relación binaria es **simétrica y reflexiva**.

- **Preferencia estricta (P)**: el decisor prefiere estrictamente $x_1$ a $x_2$ cuando su elección se efectúa sin ninguna duda, lo que denotaremos como $x_1 \succ x_2$. ($\succ$ significa "estrictamente preferido a") o $x_1 P x_2$. Esta relación binaria es **asimétrica e irreflexiva**.

- **Preferencia débil (Q)**: cuando el decisor no sabe si prefiere estrictamente $x_1$ a $x_2$, o si le resultan indiferentes, diremos que "$x_1$ es preferida o indiferente a $x_2$" y lo representaremos por $x_1 \succeq x_2$ o $x_1 Q x_2$. La relación binaria Q es **asimétrica e irreflexiva**.

- **Incomparabilidad (R o NC)**: se produce cuando no existen razones que justifiquen una de las tres situaciones anteriores. Esta relación binaria es **simétrica e irreflexiva**.

Las cuatro situaciones anteriores pueden ser reagrupadas obteniéndose de esta manera otras que son de particular interés.

## RELACIONES DE SUPERACIÓN

**La relación de Superación (S)**, reagrupa las situaciones de preferencia estricta , de preferencia débil y de indiferencia, sin posibilidad de diferenciarlas.

$x_1 S x_2 \Leftrightarrow (x_1 P x_2 \text{ o } x_1 Q x_2 \text{ o } x_1 I x_2)$

## SISTEMA DE RELACIONES DE PREFERENCIAS

Las relaciones binarias definidas conforman un sistema de relaciones de preferencias de un decisor, sobre el conjunto de alternativas posibles, si:

1. ellas pueden ser consideradas como **representaciones de las preferencias** del decisor sobre las alternativas que constituyen el conjunto $X$.
2. son **exhaustivas**, es decir que para cualquier par de alternativas del conjunto $X$ al menos una de las relaciones se verifica.
3. son **mutuamente excluyentes**, es decir que para un par de alternativas, nunca se verifican dos relaciones distintas.

## ESTRUCTURAS DE PREFERENCIAS

Tomando como base las relaciones binarias enunciadas y sus propiedades, se pueden expresar las principales estructuras de preferencia sobre un conjunto de alternativas $\mathcal{X}$.

**Preorden completo**

Una estructura de preorden completo corresponde a la noción intuitiva de clasificación con posibilidad de empate.

Un par de relaciones binarias (T , V) sobre un conjunto de alternativas $\mathcal{X}$ es un preorden completo si:

T y V son exhaustivas y mutuamente excluyentes

V es asimétrica y transitiva

T es simétrica y transitiva

Un preorden completo (T , V) donde T sólo se verifica entre dos alternativas idénticas se denomina orden completo, lo que corresponde a la noción intuitiva de clasificación sin posibilidad de que exista empate.

Las nociones de órdenes y preordenes antes enunciadas, no son adecuadas para realizar cálculos. Sin embargo, existe un conjunto ordenado que se adapta muy bien a los mismos: el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Recordemos que en este conjunto se pueden establecer relaciones de preorden tales como $\geq$ y $\leq$ ; de esta manera podemos establecer un vínculo entre un preorden sobre un conjunto cualquiera y el conjunto $\mathbb{R}$.

La igualdad representa la parte simétrica (T) y las relaciones de "mayor que" y "menor que" representan la parte asimétrica (V). De esta manera un preorden completo (T , V) sobre un conjunto $\mathcal{X}$ siempre puede, en aplicaciones prácticas, representarse por una función de valor real, definida sobre $\mathcal{X}$, a la que llamaremos función criterio, tal que:

$\forall\, x_1 , x_2 \in \mathcal{X}$

$x_1 \text{ T } x_2 \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$

$x_1 \text{ V } x_2 \Leftrightarrow u(x_1) > u(x_2)$

A partir de las relaciones binarias que definen las preferencias de un decisor sobre un conjunto de alternativas, se pueden construir los sistemas de relaciones de preferencia (I, P), ($\sim$, P), ($\sim$, $\succ$) o (I, $\succ$) que tienen una estructura de preorden completo.

Esto supone las siguientes propiedades:

- ausencia de incomparabilidad
- transitividad de P (o $\succ$) y de I (o $\sim$).

La imposición de transitividad para I o $\sim$ , conduce a una modelización poco realista de las preferencias. Debido a esto se definen las estructuras de cuasi orden, orden de intervalo, preorden parcial y seudo orden.

El **cuasi orden** y **orden de intervalo** surgen de admitir que la relación simétrica no es perfectamente transitiva.

La consideración de no transitividad se realiza a través de la noción de umbral o límite de indiferencia **q**.

Un cuasi orden (T, V) sobre un conjunto $\mathcal{X}$ puede ser representado por una función de valores reales, definida sobre $\mathcal{X}$, tal que $\forall$ $x_1$, $x_2$ $\in$ $\mathcal{X}$:

$$x_1Tx_2 \Leftrightarrow |u(x_1) - u(x_2)| \leq q$$
$$x_1Vx_2 \Leftrightarrow u(x_1) > u(x_2) + q$$

Un orden de intervalo (T , V) sobre un conjunto $\mathcal{X}$ puede ser representado por dos funciones u y q, tal que:

$$x_1Tx_2 \Leftrightarrow u(x_1) - u(x_2) \leq q(u(x_2)) \text{ y }$$
$$u(x_2) - u(x_1) \leq q(u(x_1))$$
$$x_1Vx_2 \Leftrightarrow u(x_2) + q(u(x_2)) < u(x_1)$$

Donde la función límite de indiferencia q es tal que $q(u(x_i)) \geq 0 \ \forall \ x_i \in \mathcal{X}$

Un cuasi orden con límite de indiferencia nulo es un preorden completo. De la misma manera, un orden de intervalo con límite de indiferencia constante es un cuasi orden.

A partir de las relaciones binarias que definen las preferencias de un decisor sobre un conjunto de alternativas, se pueden construir los sistemas de relaciones de preferencias (I, P), ($\sim$, P), ($\sim$, $\succ$) o (I, $\succ$), los que tienen una estructura de cuasi orden o de orden de intervalo.

**Preorden parcial**

Una estructura de preorden parcial generaliza la estructura de preorden completo, ya que admite la incomparabilidad en la clasificación, conservando la transitividad.

Un preorden parcial se denomina orden parcial si:

$$\forall \ x_1 \ x_2 \in \mathcal{X}, \ x_1Tx_2 \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$$

Los sistemas de relaciones preferencia que pueden tener una estructura de preorden parcial son del tipo: (I , P, R) , (I , >, R) , ($\sim$, P, R) o ($\sim$, >, R).

**Seudo orden**

Una estructura más compleja corresponde a un **cuasi orden** en el cual se inserta de manera adecuada otra relación W. Esta relación corresponde para la modelización de preferencias a la preferencia débil (W = Q) que está entre la indiferencia ( I ) y la preferencia estricta ( P ). Esto se hace posible a través de la introducción de un límite de preferencia estricta **p**.

Un **seudo orden**, en la práctica se representa por tres funciones u, q, y p. La función u tiene valores reales definidos sobre $\mathcal{X}$ y las funciones q y p se definen de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de manera tal que:

$$x_1 \ T \ x_2 \Leftrightarrow u(x_1) - u(x_2) \leq q(u(x_2)) \text{ y }$$
$$u(x_2) - u(x_1) \leq q(u(x_1))$$

$x_1Wx_2 \Leftrightarrow u(x_2) + q(u(x_2)) < u(x_1) \leq u(x_2) + p(u(x_2))$

$x_1Vx_2 \Leftrightarrow u(x_1) > u(x_2) + p\ (u(x_2))$

Donde las funciones límites de indiferencia y preferencia q y p son tales que:

$\forall\ x_1, x_2 \in \mathcal{X}$

$p(u(x_2)) \geq q(u(x_2)) \geq 0$

$u(x_1) > u(x_2) \Rightarrow u(x_1) + q(u(x_1)) \geq u(x_2) + q(u(x_2))$ y

$u(x_1) + p(u(x_1)) \geq u(x_2) + p(u(x_2))$

Siempre es posible escoger una representación de un seudo orden de tal modo que una de las dos funciones límite de indiferencia y límite de preferencia q y p sea constante.

Un cuasi orden es un seudo orden particular en el que W = $\emptyset$

Un sistema de relaciones de preferencias del tipo (I, Q, P) tiene una estructura de seudo orden.

## VERDADERO-CRITERIO, CUASI-CRITERIO Y SEUDO-CRITERIO

En la construcción de un criterio se pueden adoptar diferentes modelos, con el objetivo de definir lo que se denomina poder discriminador del criterio. Dependiendo del modelo adoptado, el criterio puede recibir el nombre de verdadero criterio, cuasi criterio o seudo criterio. Este tipo de información es conocida como información intra-criterio.

En un modelo verdadero-criterio se supone que:

$$\forall x_1, x_2 \in X$$

$$x_1P_jx_2 \Leftrightarrow u_j(x_1) > u_j(x_2) \text{ y}$$

$$x_1I_jx_2 \Leftrightarrow u_j(x_1) = u_j(x_2)$$

Dónde $P_j$ es una relación binaria de la forma: " ... es estrictamente preferible a ... según el criterio j" e $I_j$ es una relación binaria de la forma: " ... es indiferente a ... según el criterio j"

Cualquier diferencia entre los valores de la función $u_j$ implica una situación de preferencia estricta y la situación de indiferencia sólo ocurre cuando la función $u_j$ asume el mismo valor tanto para $x_1$ como para $x_2$. En este tipo de modelo el sistema de relaciones de preferencia ( $P_j$ , $I_j$ ) es un preorden completo.

Es razonable pensar que pequeñas diferencias entre los valores $u_j(x_1)$ y $u_j(x_2)$ se pueden traducir igualmente en una indiferencia entre $x_1$ y $x_2$. Es posible entonces introducir al modelo otro parámetro (*q*) llamado límite de indiferencia. Este valor representa el mayor desvío compatible con una situación de indiferencia entre $x_1$ y $x_2$.

En este caso, suponiendo que $u_j(x_1) > u_j(x_2)$, se tiene:

$$x_1P_jx_2 \Leftrightarrow u_j(x_1) - u_j(x_2) > q(u_j(x_2))$$

$$x_1I_jx_2 \Leftrightarrow u_j(x_1) - u_j(x_2) \leq q(u_j(x_2))$$

El modelo definido anteriormente se denomina cuasi criterio y el sistema de relaciones de preferencia ( $P_j, I_j$ ) es un cuasi orden (si *q* fuera constante) o un orden de intervalo (si *q* fuera variable).

En un modelo cuasi criterio, cualquier desvío ligeramente superior al límite de indiferencia manifiesta una situación de preferencia estricta. Para evitar un pasaje brusco de indiferencia a preferencia estricta, se establece un modelo con dos límites, siendo uno de indiferencia (*q*) y el otro de preferencia estricta (*p*). Así como el límite de indiferencia, el valor de *p* puede ser constante o variable.

La introducción de estos límites crea una región de preferencia débil ( $Q_j$ ) que se traduce en una vacilación (incertidumbre) entre la indiferencia $I_j$ y la preferencia estricta $P_j$.

En este caso, suponiendo que $u_j(x_1) \geq u_j(x_2)$ , se tiene:

$$x_1 P_j x_2 \Leftrightarrow u_j(x_1) - u_j(x_2) > p(u_j(x_2))$$
$$x_1 Q_j x_2 \Leftrightarrow q(u_j(x_2)) < u_j(x_1) - u_j(x_2) \leq p(u_j(x_2))$$
$$x_1 I_j x_2 \Leftrightarrow u_j(x_1) - u_j(x_2) \leq q(u_j(x_2))$$

El modelo anterior se denomina seudo criterio y el sistema de relaciones de preferencia $(I_j, Q_j, P_j)$ es un seudo orden.

Un cuasi criterio es un seudo criterio tal que:

$$q(u_j(x_i)) = p(u_j(x_i)), \forall x_i \in X..$$

Un verdadero criterio es un seudo criterio tal que:

$$q(u_j(x_i)) = p(u_j(x_i)) = 0, \forall x_i \in X.$$