Calcul de pseudospectres

Encadrants. Stef Graillat (`stef.graillat@sorbonne-universite.fr`)

Mots clés. pseudospectres, valeurs propres, valeurs singulières, SVD

Domaine et problématiques. Le ε-pseudospectre [3] d'une matrice A est défini comme le sous-ensemble du plan complexe consistant en toutes les valeurs propres de toutes les matrices situées à une distance ε de A. C'est un outil très utilisé en théorie du contrôle et en automatique pour tester la robustesse de la stabilité d'un système.

Considérons maintenant une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Nous notons par $\Lambda(A)$ son spectre. Étant donné $\varepsilon > 0$, le ε-pseudospectre de la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble $\Lambda_\varepsilon(A)$ défini par

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : z \in \Lambda(X) \text{ avec } X \in M_n(\mathbb{C}) \text{ et } \|X - A\|_2 \leqslant \varepsilon\}.$$

On peut montrer que

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min}(A - zI) \leqslant \varepsilon\},$$

où $\sigma_{\min}$ représente la plus petite valeur singulière. Cela donne un algorithme de calcul du pseudospectre connu sous le nom de `GRID`.

Algorithme 1 Calcul de pseudospectres

Entrée : la matrice A et la perturbation ε
Sortie : tracé du pseudospectre dans le plan complexe
1: On maille un carré contenant tout le pseudospectre
2: On calcule $f(z) := \sigma_{\min}(A - zI)$ pour tous les points z de la grille.
3: On affiche la ligne de niveau $f(z) = \varepsilon$

On remarque que cet algorithme est massivement parallèle. En effet, il revient à calculer de manière indépendante une SVD (décomposition en valeurs singulières) de $A - zI$ pour chaque point z de la grille. Un tel algorithme devrait donc pleinement tirer parti des architectures parallèles. Néanmoins, il nécessite beaucoup de calcul de valeurs singulières en des points qui ne font pas partie du pseudospectre. Une méthode basée sur un algorithme de prédiction-correction (suivi de trajectoire) a été proposée pour pallier ce problème [1].

Description détaillée du travail attendu. Le travail pourra se dérouler de la manière suivante.

1. Étude théorique des pseudospectres et de la décomposition en valeur singulière (complexité, algorithme de calcul en particulier).
2. Étude du langage Julia [1].

1. `https://julialang.org/`

3. Implantation de l'algorithme `GRID` en Julia. Proposer une version parallèle de cet algorithme.
4. Implantation de l'algorithme de prédiction-correction en Julia. Comparaison en terme de performance et de parallélisation avec `GRID`.
5. Étendre ces algorithmes à la notion de pseudospectres par composante [2].

Références.

[1] Martin Brühl. A curve tracing algorithm for computing the pseudospectrum. *BIT*, 36(3) :441–454, 1996.

[2] A. N. Malyshev and M. Sadkane. Componentwise pseudospectrum of a matrix. *Linear Algebra Appl.*, 378 :283–288, 2004.

[3] Lloyd N. Trefethen and Mark Embree. *Spectra and pseudospectra.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.