Лекция 11
Колебательное движение
Вопросы

1. **Математический маятник.**
2. **Физический маятник.**
3. **Сложение колебаний одной частоты, направленных вдоль одной прямой. Биения.**
4. **Сложение колебаний разных частот, направленных вдоль одной прямой.**
5. **Сложение колебаний разных частот, направленных вдоль одной прямой.**
6. **Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.**

1. Математический маятник

В физике под **маятником** понимают твердое тело, совершающее под действием квазиупругой силы колебания вокруг неподвижной точки или оси.

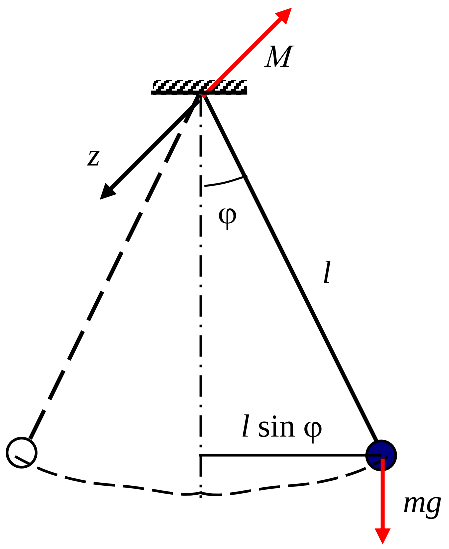


Рис. 1

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешено тело с сосредоточенной в одной точке массой, совершающее колебательное движение под действием силы тяжести.

$$M = -mgl\sin\varphi\,, \quad J = ml^2\,, \quad \varepsilon = d^2\varphi/dt^2 \qquad (1)$$

$$M = J\varepsilon \;\Rightarrow\; ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad \text{сравниваем с} \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \;\Rightarrow\; \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}\,; \quad \varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \qquad (2)$$

Следовательно, при малых колебаниях угловое смещение математического маятника изменяется со временем по *гармоническому* закону.

Период колебаний математического маятника зависит только от ускорения свободного падения и от длины маятника и не зависит от его массы.

2. Физический маятник

Физическим маятником называется любое твердое тело, способное под действием силы тяжести совершать колебания вокруг неподвижной оси, не совпадающей с его центром инерции.

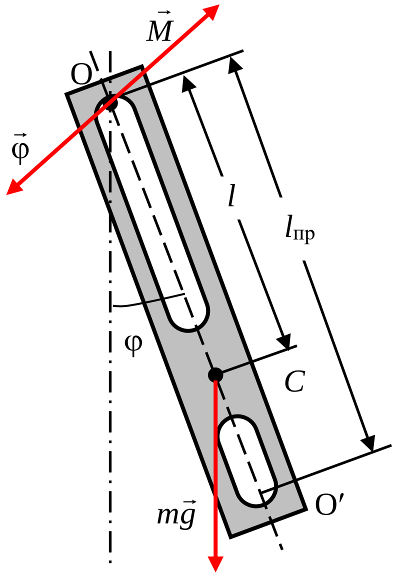


Рис. 2

По аналогии с уравнением для математического маятника запишем уравнение для физического маятника:

$$J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\,\sin\varphi\,, \qquad (3)$$

В случае малых колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \qquad (4)$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{mgl}{J_O}$.

Решение *дифференциального уравнения колебаний физического маятника* (4) имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgl}}\,, \quad J_O = J_C + ml^2 \qquad (5.28)$$

При малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, период которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром инерции маятника.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgl}} \;\Leftrightarrow\; T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \;\Rightarrow\; l_{пр} = \frac{I_O}{ml}.$$

Приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точка O′ на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется *центром качания физического маятника*.

3. Сложение колебаний одной частоты, направленных вдоль одной прямой. Биения

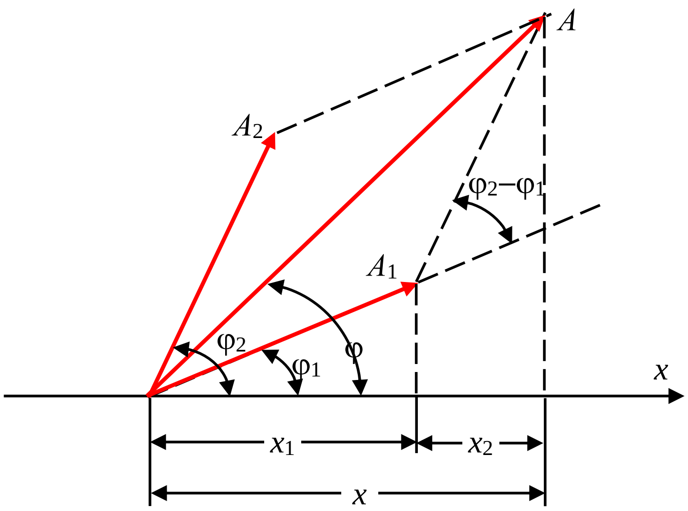


Рис. 3

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \quad (5)$$

$$x = x_1 + x_2. \quad (6)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)\right]$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (7)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \quad (8)$$

Частные случаи

1. Колебания совпадают по фазе: $\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$

$$A = A_1 + A_2.$$

2. Колебания находятся в противофазе $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$

$$A = |A_1 - A_2|.$$

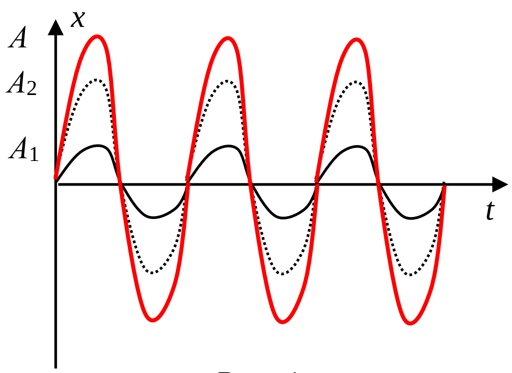


Рис. 4

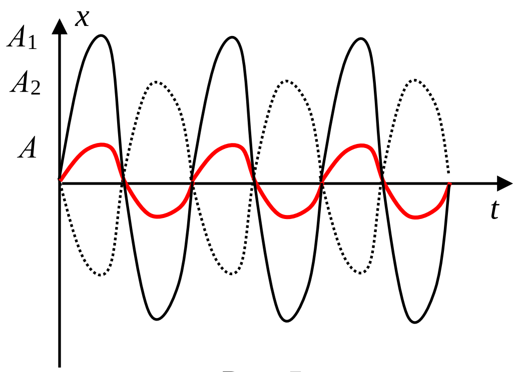


Рис. 5

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания мало отличаются по частоте. Результирующее движение при этих условиях можно рассматривать как гармонические колебания с пульсирующей амплитудой. Такие колебания называются ***биением***.

$$x_1 = A\cos\omega t, \qquad x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)\, t. \qquad \Delta\omega \ll \omega. \tag{9}$$

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = 2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = x_1 + x_2 = 2A\cdot\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\cdot\cos\omega t \tag{10}$$

Амплитуда и частота биений

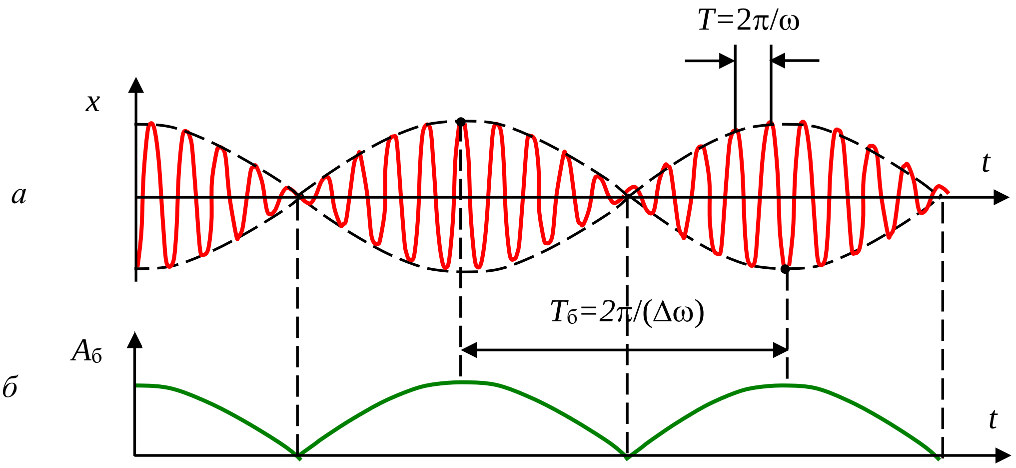


Рис. 6

$$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|, \quad T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \tag{11}$$

5. Сложение колебаний разных частот, направленных вдоль одной прямой

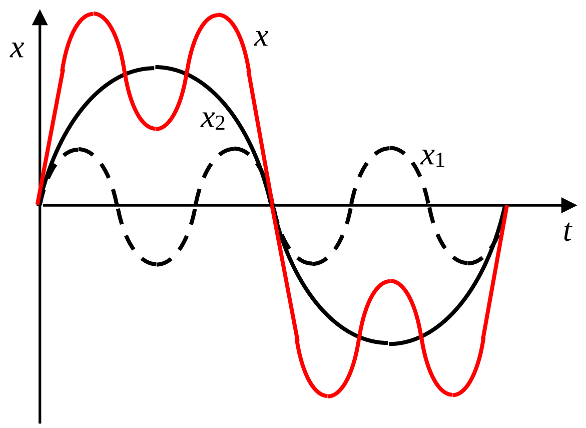


Рис. 4

$$x_1 = A_1\cos\omega_1 t,$$
$$x_2 = A_2\cos\omega_2 t$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t, \tag{12}$$

Результирующее колебание периодическое, но не гармоническое.

Теорема Фурье

Любое сложное периодическое негармоническое колебание можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с кратными частотами.

$$x = f(t) = A_0 + A_1\cos\left(\omega_0 t + \varphi_1\right) + A_2\cos\left(2\omega_0 t + \varphi_2\right) + \ldots + A_n\cos\left(n\omega_0 t + \varphi_n\right) \quad (13)$$

6. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

Рассмотрим результат сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одной частоты ω_0

$$x = A\sin\omega_0 t, \qquad y = B\sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad (14)$$

Исключим из уравнений (14) параметр t:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \Rightarrow \frac{y}{B} = \sin\omega_0 t\cdot\cos\varphi + \cos\omega_0 t\cdot\sin\varphi$$

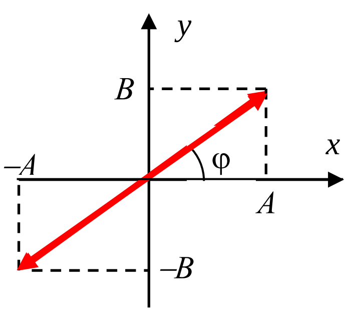
$$\sin\omega_0 t = \frac{x}{A} \Rightarrow \cos\omega_0 t = \sqrt{1-\sin^2\omega_0 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\varphi + \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi \Rightarrow \frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi \Rightarrow \uparrow^2$$

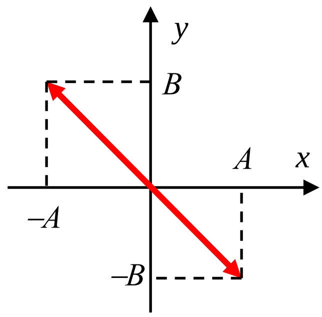
$$\Rightarrow \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\varphi = \left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)\sin^2\varphi \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi}, \qquad (15)$$

это уравнение *эллипса*, оси которого ориентированы относительно координатных осей x и y произвольно.



$m = 1, \pm3, \pm5, \ldots$



$m = 0, \pm2, \pm4, \ldots$

Рис. 5

Частные случаи

1. $\varphi = m\pi$ $(m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \pm 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \mp\frac{B}{A}x.$$

Результирующее колебание – гармоническое с амплитудой

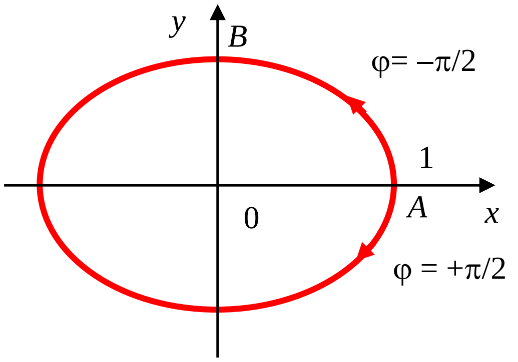


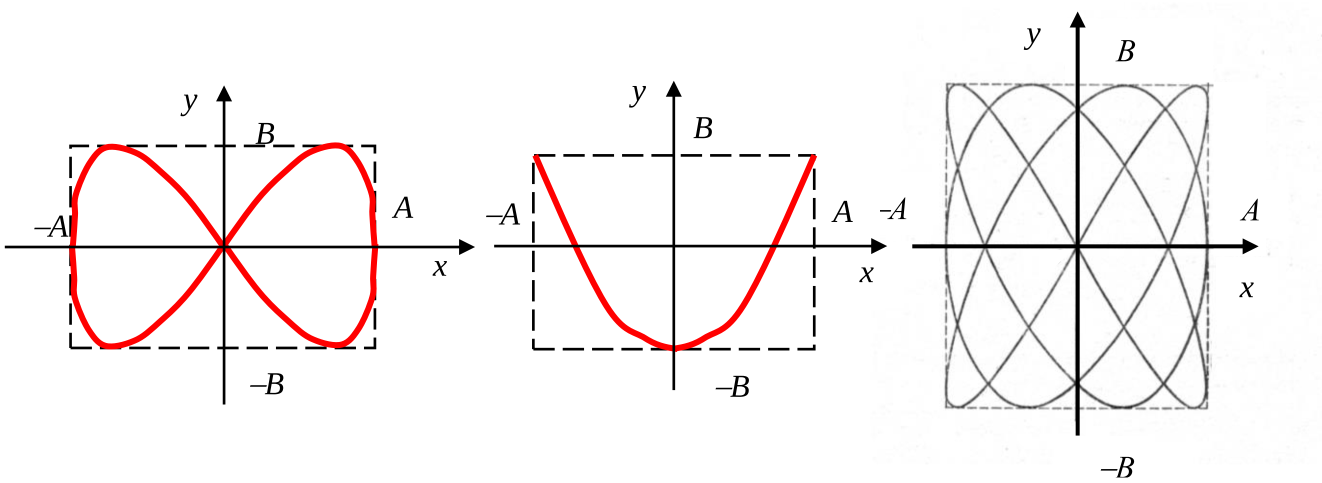
Рис. 6

$$\sqrt{A^2+B^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\cos\, m\pi\right)$$

$$2.\ \varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\pm 2\frac{xy}{AB}\cos\,\varphi = \sin^2\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$



$\omega_1/\omega_2 = 1/2;\ \varphi = \pi/2$ $\omega_1/\omega_2 = 1/2;\ \varphi = 0$ $\omega_1/\omega_2 = 3/4;\ \varphi = \pi/2$

Рис. 7.

При неодинаковых частотах взаимно перпендикулярных колебаний траектория результирующего движения имеет вид сложных кривых, называемых ***фигурами Лиссажу.***