

## Лекция 9

### Элементы механики сплошных сред

### Вопросы

1. Поверхностные и капиллярные явления в жидкостях.
2. Деформация твердого тела.
3. Потенциальная энергия упругого деформирования.

#### 1. Поверхностные и капиллярные явления в жидкостях

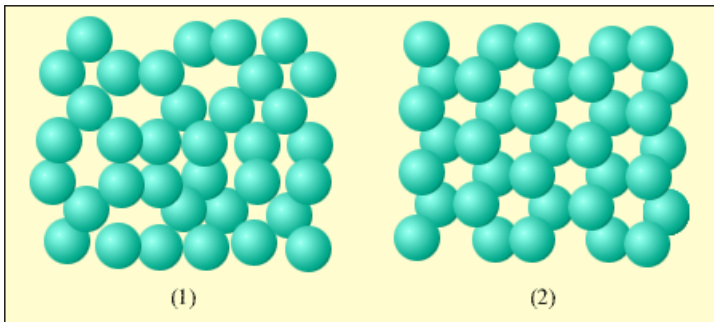


Рис. 1. Пример ближнего порядка молекул жидкости и дальнего порядка молекул кристаллического вещества: 1 – вода; 2 – лед.

Молекулы вещества в жидком состоянии расположены почти вплотную друг к другу. Это явление называется **ближним порядком**.

Среднее расстояние между молекулами пара в десятки раз превышает среднее расстояние между молекулами воды.

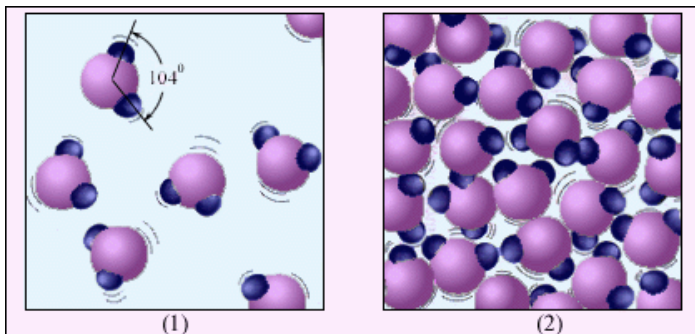


Рис. 2. Водяной пар (1) и вода (2). Молекулы воды увеличены примерно в  $5 \cdot 10^7$  раз.

Вследствие плотной упаковки молекул сжимаемость жидкостей, т. е. изменение объема при изменении давления, очень мала; она в десятки и сотни тысяч раз меньше, чем в газах.

#### 1.1. Поверхностное натяжение.

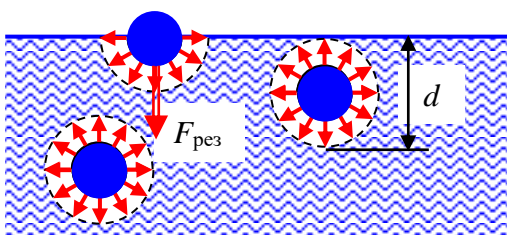


Рис. 3.

Особенностью жидкостей является наличие **свободной поверхности**.

Силы межмолекулярного взаимодействия, действующие на одну из молекул внутри жидкости со стороны соседних молекул, в среднем взаимно скомпенсированы.

Молекулы в пограничном слое жидкости ( $d \approx 10^{-9}$  м) не скомпенсированы, возникает результирующая сила, перпендикулярная свободной поверхности.

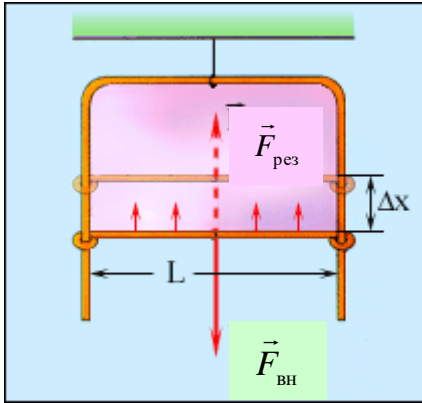


Рис. 4.

Количественный прирост потенциальной энергии пропорционален приросту площади поверхности жидкости:

$$\Delta E_{\text{п}} = \alpha \Delta S \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta E_{\text{п}}}{\Delta S} \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} \right], \quad (1)$$

$\alpha$  – **коэффициент поверхностного натяжения**, характеризует изменение потенциальной энергии при увеличении площади поверхности жидкости на единицу.

С другой стороны,

$$\Delta E_{\text{п}} = F_{\text{рез}} \cdot \Delta x = \alpha \cdot \Delta S = \alpha \cdot 2L \cdot \Delta S \Rightarrow \alpha = \frac{F_{\text{рез}}}{2L} \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}} \right], \quad \left[ 1 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \right], (2)$$

**коэффициент поверхностного натяжения** характеризует **силу поверхностного натяжения**, действующую на единицу длины линии, ограничивающей поверхность пленки.

Таблица 1

Жидкость	Вода	Ртуть	Расплав меди
$\alpha$ , Н/м	0,075	0,47	1,12

## 1.2. Капиллярные явления

Из-за действия сил поверхностного натяжения в каплях жидкости возникает избыточное давление  $\Delta p$ .

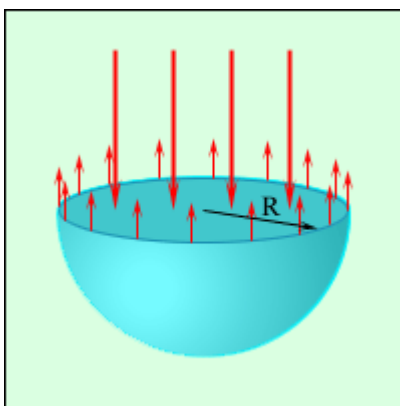


Рис. 5. Сечение сферической капли жидкости.

Условие равновесия сил поверхностного натяжения и сил избыточного давления для капли:

$$\alpha \cdot 2\pi R = \Delta p \cdot \pi R^2 \quad (3)$$

Избыточное давление внутри капли:

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R} \text{ — формула Лапласа для сферы.} \quad (4)$$

Дополнительное давление (4) называется **капиллярным** или **лапласовским**.

**Мениском** называется искривленная свободная поверхность, форма которой зависит от сил взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердого тела.

**Краевой угол  $\Theta$**  – это угол между касательной к поверхности жидкости и твердой стенкой, отсчитываемый через жидкость.

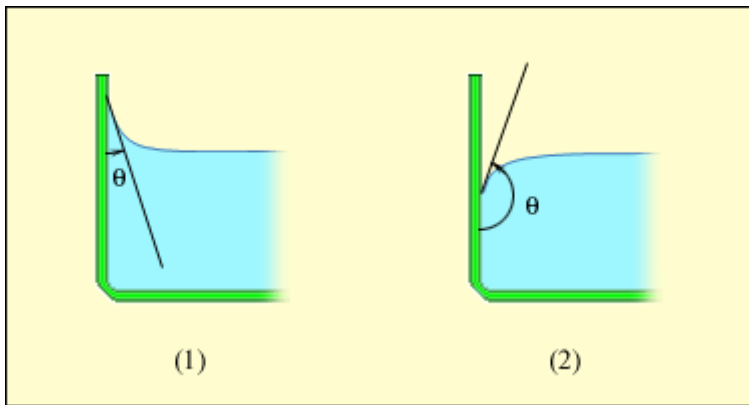


Рис. 6. Краевые углы смачивающей (1) и несмачивающей (2) жидкостей.

$\Theta < \pi/2$  – смачивание,  
 $\pi/2 < \Theta < \pi$  – не смачивание,  
 $\Theta = 0$  – полное смачивание,  
 $\Theta = \pi$  – полное не смачивание.

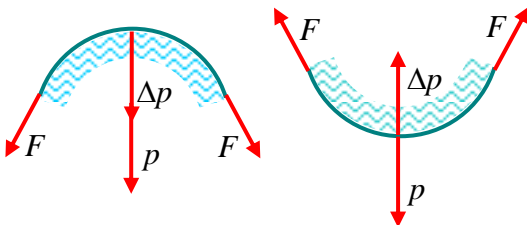


Рис. 7

**Капиллярными явлениями** называют подъем или опускание жидкости в трубках малого диаметра – **капиллярах**.

Смачивающие жидкости поднимаются по капиллярам, не смачивающие – опускаются.

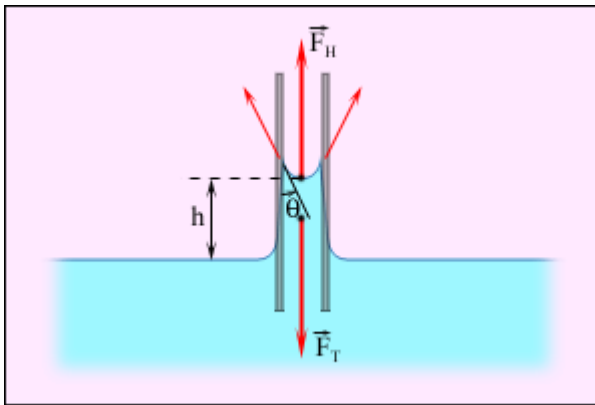


Рис.8. Подъем смачивающей жидкости в капилляре.

*Расчет высоты подъема смачивающейся жидкости плотностью  $\rho$  в капилляре радиусом  $r$*

Подъем жидкости в капилляре продолжается до тех пор, пока сила тяжести  $\vec{F}_T$ , действующая на столб жидкости в капилляре, не станет равной по модулю результирующей  $\vec{F}_H$  сил поверхностного натяжения, действующих вдоль границы соприкосновения жидкости с поверхностью капилляра:  $F_T = F_H$ .

$$F_T = mg = \rho \cdot h \pi r^2 \cdot g, \quad F_H = \alpha \cdot 2\pi r \cdot \cos \Theta \Rightarrow \rho \cdot h \pi r^2 \cdot g = \alpha \cdot 2\pi r \cdot \cos \Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\alpha \cos \Theta}{\rho g r} . \quad (5)$$

Полное смачивание,  $\Theta = 0$ ,  $\cos \Theta = 1 \Rightarrow h = \frac{2\alpha}{\rho g r} > 0$ .

Полное не смачивание,  $\Theta = \pi$ ,  $\cos \Theta = -1 \Rightarrow h = -\frac{2\alpha}{\rho g r} < 0$ .

Практические применения: водный баланс растений, флотация, крашение, защита металлов от коррозии и т. д.

## 2. Деформация твердого тела

**Деформация** твердого тела является результатом изменения под действием внешних сил взаимного расположения частиц, из которых состоит тело, и расстояний между ними.

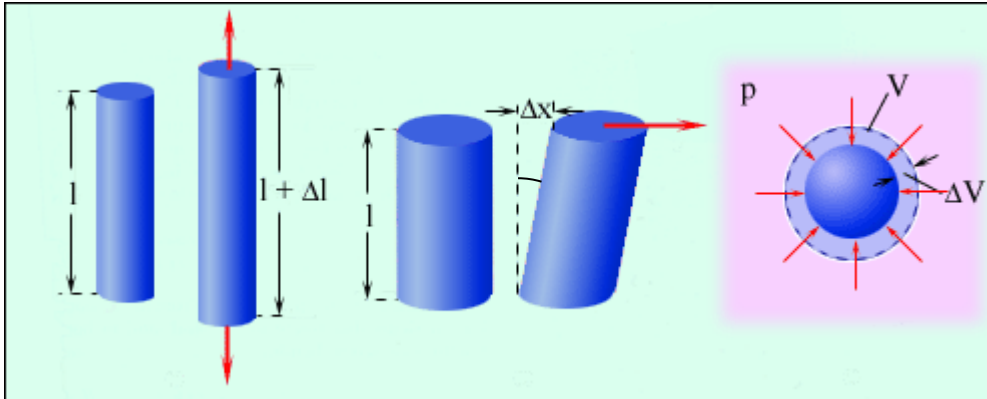


Рис. 9. Некоторые виды деформаций твердых тел:  
1 – деформация растяжения; 2 – деформация сдвига;  
3 – деформация всестороннего сжатия.

### Деформация растяжения (сжатия)

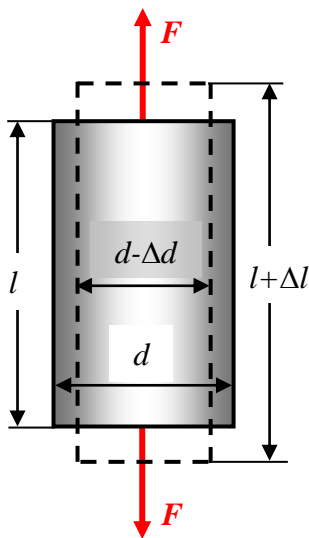


Рис. 10

$\varepsilon = \Delta l / l$  – продольная относительная деформация;

$\varepsilon' = \Delta d / d$  – поперечная относительная деформация;

$\varepsilon' = -\mu \varepsilon$ ,  $\mu$  – коэффициент Пуассона, характеризует отношение поперечной деформации к продольной.

$\sigma = F / S$ ,  $\text{Н/м}^2 \rightarrow \text{Па}$  – нормальное напряжение, характеризует отношение силы, действующей по нормали к поверхности, к площади этой поверхности.

Коэффициент Пуассона для несжимаемого тела ( $V = \text{const}$ )

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{-\Delta d}{d} \cdot \frac{l}{\Delta l} = \frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{l}{\Delta l} \quad (6)$$

$$V = \pi \frac{d^2}{4} l = \frac{\pi}{4} (d - \Delta d)^2 (l + \Delta l) = \frac{\pi}{4} (d^2 - 2d \cdot \Delta d + \cancel{\Delta d^2}) \cdot (l + \Delta l) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 l = d(d - 2 \cdot \Delta d) \cdot (l + \Delta l) \Rightarrow d \cdot \cancel{l} = d \cdot \cancel{l} + d \cdot \Delta l - 2l \cdot \Delta d - 2\Delta d \cdot \cancel{\Delta l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \cdot \Delta l = 2l \cdot \Delta d \Rightarrow \frac{l}{\Delta l} = \frac{d}{2\Delta d} \Rightarrow \mu = \frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{d}{2\Delta d} = 0,5$$

### Закон Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (7)$$

где  $E$ , Па – модуль упругости (модуль Юнга), характеризует отношение нормального напряжения к продольной деформации.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow (\sigma = F/S, \varepsilon = \Delta l/l) \Rightarrow F = \frac{E \cdot S}{l} \Delta l = k \cdot \Delta l, \quad (8)$$

$k$  – коэффициент упругости

### Деформация сдвига

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{l}, \text{ при } \Delta x/l \ll 1 \quad \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta x}{l} \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta x}{l},$$

$\tau = F/S$  – **касательное напряжение**, характеризует отношение силы, действующей по касательной к поверхности, к площади этой поверхности.

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (9)$$

где  $G$ , Па – модуль сдвига (модуль Юнга), характеризует отношение нормального напряжения к продольной деформации. Модуль сдвига для большинства твердых материалов в 2–3 раза меньше модуля Юнга. Например, у меди  $E = 1,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0,42 \cdot 10^{11}$  Па. Следует помнить, что у жидких и газообразных веществ модуль сдвига равен нулю.

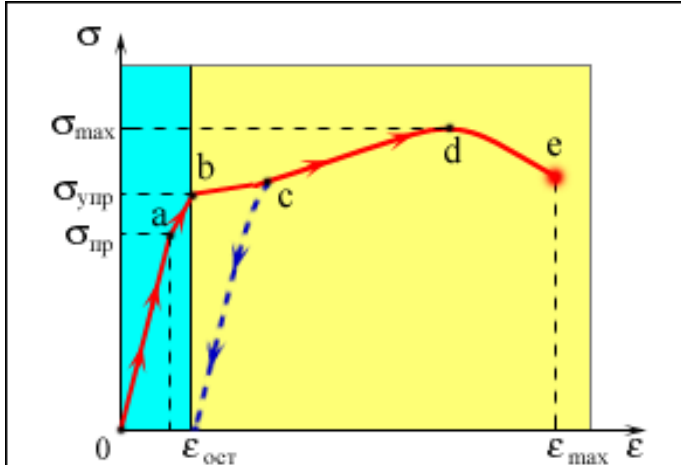
### Деформация всестороннего сжатия

**При всестороннем сжатии** твердого тела (например, погруженного в жидкость) механическое напряжение совпадает с давлением  $p$  в жидкости. Относительная деформация определяется как отношение изменения объема  $\Delta V$  к первоначальному объему  $V$  тела. При малых деформациях

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{B} p, \quad (10)$$

где  $B$  – коэффициент пропорциональности, называемый **модулем всестороннего сжатия**.

Всестороннему сжатию могут подвергаться не только твердые тела, но и жидкости и газы. У воды  $B = 2,2 \cdot 10^9$  Па, у стали  $B = 1,6 \cdot 10^{11}$  Па. На дне Тихого океана, на глубине порядка 4 км, давление  $p$  приблизительно равно  $4 \cdot 10^7$  Па. В этих условиях относительное изменение  $\Delta V / V$  объема воды составляет 1,8 %, в то время как для стального тела оно составляет всего лишь 0,025 %, т. е. в 70 раз меньше. Твердые тела с их жесткой кристаллической решеткой значительно менее сжимаемы по сравнению с жидкостями, атомы и молекулы которых не так сильно связаны со своими соседями. Сжимаемость газов на много порядков выше, чем у жидкостей и твердых тел.



*Диаграмма деформирования*

- $\sigma_{\max}$  – предел прочности;
- $\sigma_{\text{упр}}$  – предел упругости;
- $\sigma_{\text{пр}}$  – предел пропорциональности;
- $\epsilon_{\max}$  – максимальная деформация;
- $\epsilon_{\text{ост}}$  – остаточная деформация;

Рис. 11. Типичная диаграмма растяжения для пластичного материала. Голубая полоса – область упругих деформаций.

### 3. Потенциальная энергия упругого деформирования

$$W = A = \int_0^{\Delta l} F dx = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{ES}{2l} (\Delta l)^2 = \frac{ES \cdot l}{2l^2} (\Delta l)^2 = \frac{E \cdot V}{2} \epsilon^2, \quad (11)$$

$$W_v = \frac{W}{V} = \frac{E \cdot \epsilon^2}{2}, \quad (12)$$

т.е. потенциальная энергия упругого деформирования пропорциональна квадрату деформации