

Лекция 8

Элементы механики жидкостей

Вопросы

1. Давление в жидкости.
2. Уравнение Бернулли
3. Вязкость. Режимы течения вязкой жидкости.
4. Методы определения вязкости.
5. Движение тел в жидкостях и газах.

1. Давление в жидкости

Гидроаэромеханика – раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами, – использует единый подход к изучению жидкостей и газов.

В механике жидкости и газы рассматриваются как **сплошные**, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. Плотность жидкости в отличие от плотности газа мало зависит от давления, поэтому пользуются единым понятием **несжимаемой** жидкости, т.е. жидкости, плотность которой постоянна.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется **давлением** жидкости p :

$$p = \Delta F / \Delta S. \quad (1)$$

Единица измерения давления – **паскаль** (Па): **1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к поверхности площади 1 м², 1 Па = 1 Н/м².** внесистемные единицы измерения давления:

$$1 \text{ ат} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \approx 1 \frac{9,8}{10^{-4}} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \approx 10^5 \text{ Па}; \quad 1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па} \text{ и др.}$$

Закон Паскаля

Давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому данной жидкостью.

Для несжимаемой жидкости на глубине h действует **гидростатическое** давление

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h, \quad (2)$$

т.е. давление изменяется линейно с высотой. Давление ρgh называется **гидростатическим**.

Согласно формуле (2) сила давления на нижние слои больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, определяемая **законом Архимеда**:

на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости (газа) направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа).

$$F_A = \rho g V, \quad (3)$$

2. Уравнение Бернулли

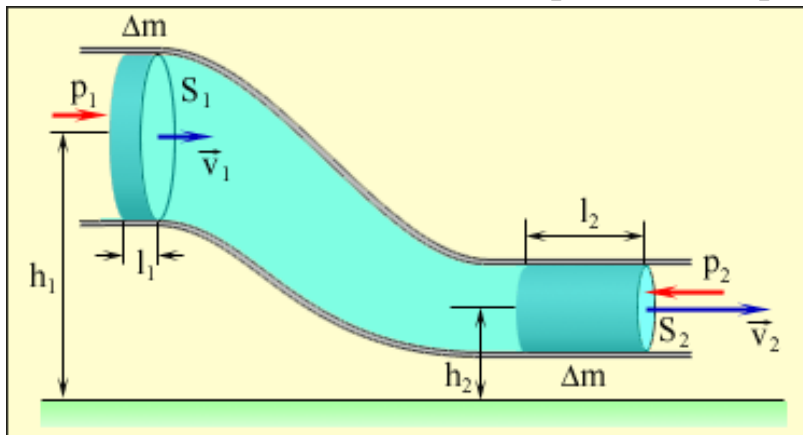


Рис. 1

Воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения, называется **идеальной**.

Линиями тока называются такие линии, касательные к которым совпадают с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется **трубкой тока**.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 .

Закон сохранения энергии

$$E_2 - E_1 = A \quad (4)$$

$$A = F_1 l_1 - F_2 l_2 = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 \quad (5)$$

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \quad (7)$$

$$(5, 6, 7) \Rightarrow (4) \quad \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (8)$$

Объем несжимаемой жидкости постоянный, т.е. $\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$, разделив на него уравнение (8), получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \Rightarrow \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} \quad (9)$$

Полученное **уравнение Бернулли** выражает закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. *Его смысл:* в потоке идеальной несжимаемой жидкости **полное давление**, состоящее из **статического давления** p , **гидростатического давления** $\rho g h$ и **динамического давления** $\rho v^2/2$, сохраняется постоянным.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$)

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const} \quad (10)$$

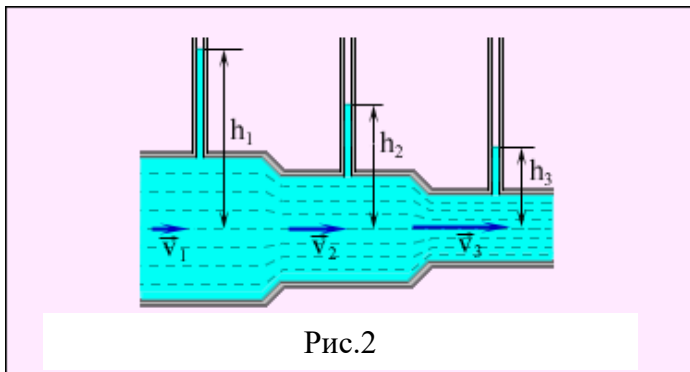


Рис.2

Пример 1. Измерение давления в потоке жидкости с помощью манометров.

С увеличением скорости в потоке жидкости давление падает:

$$v_1 < v_2 < v_3; \quad h_1 > h_2 > h_3.$$

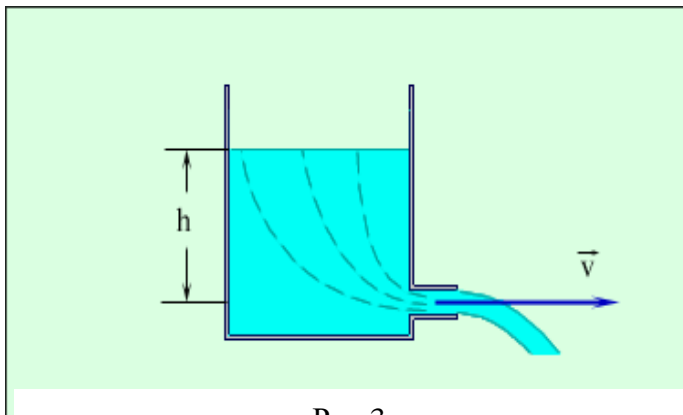


Рис.3

Пример 2. Определение скорости истечения из широкого сосуда (формула Торричелли)

$$\begin{aligned} \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p &= \text{const} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h &= \text{const} \Rightarrow \Rightarrow \\ g h &= \frac{v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2 g h} . \end{aligned}$$

3. Вязкость. Режимы течения вязкой жидкости

Вязкость или внутреннее трение – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости или газа относительно другой.

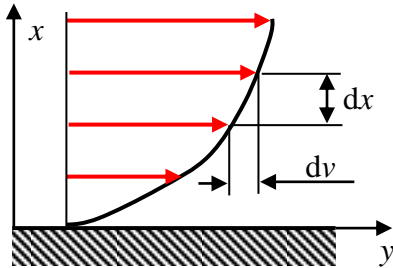


Рис. 4

$$\frac{F_{\text{тр}}}{S} = \eta \frac{dv}{dx} \Rightarrow F_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dx} S, \quad (11)$$

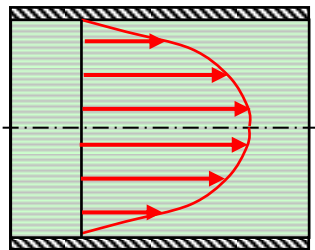
$$\eta = \frac{F_{\text{тр}}}{S(dv/dx)}$$

$$\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \text{ м}/(\text{с} \cdot \text{м})} \rightarrow \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \rightarrow \text{Па} \cdot \text{с} \right] -$$

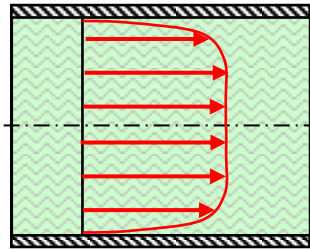
коэффициент динамической вязкости, характеризующий силу вязкого трения, действующую на единичную площадку при единичном градиенте скорости по нормали к этой площадке.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{кг}/\text{м}^3} \rightarrow \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{с}^2} \rightarrow \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right] - \text{коэффициент кинематической вязкости.}$$

Режимы течения вязкой жидкости зависят от соотношения сил вязкого трения $F_{\text{тр}}$ и сил инерции $F_{\text{и}}$.



Ламинарный режим, $F_{\text{тр}} > F_{\text{и}}$



Турбулентный режим, $F_{\text{тр}} < F_{\text{и}}$

Рис. 5

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dx} S,$$

$$F_{\text{и}} = ma = \rho V \frac{dv}{dt} = \rho V \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \rho V v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{F_{\text{и}}}{F_{\text{тр}}} = \frac{\rho V v \frac{dv}{dx}}{\eta \frac{dv}{dx} S} = \frac{V/S \cdot v}{\eta/\rho} = \frac{l \langle v \rangle}{\nu} = \text{Re}$$

$$\text{Re} = \frac{l \langle v \rangle}{\nu}$$

– **число Рейнольдса**, характеризует отношение сил инерции к силам вязкого трения.

Режимы течения

$\text{Re} < 10^3$, $F_{\text{тр}} > F_{\text{и}}$ – ламинарный
 $10^3 < \text{Re} < 10^4$ $F_{\text{тр}} \approx F_{\text{и}}$ – переходный
 $\text{Re} > 10^4$, $F_{\text{тр}} < F_{\text{и}}$ – турбулентный

4. Методы определения вязкости

Метод Стокса

Метод, предложенный английским физиком, математиком **Д. Стоксом** (1819 - 1903 г.г.), основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

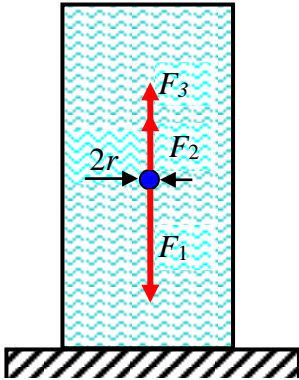


Рис. 6

1. Сила тяжести $F_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ш}} g$;
2. Сила Архимеда $F_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ж}} g$;
3. Сила сопротивления $F_3 = 6\pi\eta r v$.

При равномерном движении $F_1 = F_2 + F_3 \Rightarrow$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ш}} g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ж}} g + 6\pi\eta r v \Rightarrow \eta = \frac{2 (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}) g r^2}{9v} \quad (12)$$

Метод Пуазейля

Метод, предложенный французским физиком, Пуазейлем (1799 - 1868 г.г.), основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре.

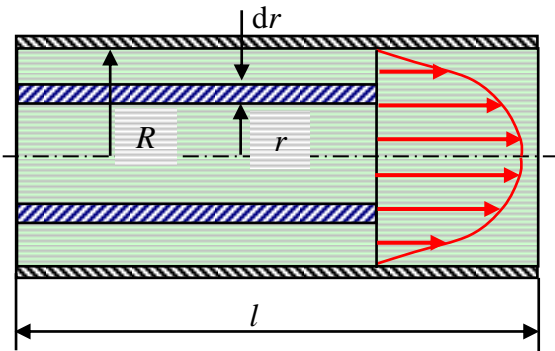


Рис. 7

Равновесие сил трения и внешнего давления

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dr} S = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l = \Delta p \pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_v^0 dv = -\int_r^R \frac{\Delta p}{2\eta l} r dr \Rightarrow v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (13)$$

Объем вытекающей из капилляра жидкости за время t

$$V = \int_0^R v \cdot t \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p t}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi \Delta p t}{2\eta l} \left(\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8Vl} \quad (14)$$

Приборы для измерения вязкости называются **вискозиметрами** (*viscosus* – вязкость, *metreo* – измерять).

5. Движение тел в жидкостях и газах

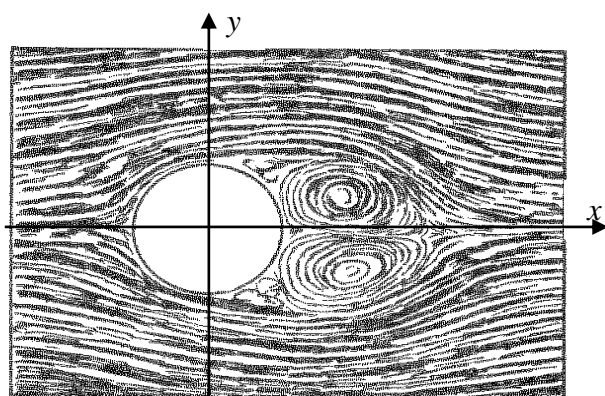


Рис. 8

При движении тела в жидкости или газе на него действуют силы, называемые соответственно **лобовым сопротивлением и подъемной силой**.

Если тело симметрично относительно направления скорости, то на него действует только лобовое сопротивление

$$F_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (15)$$

где S – наибольшее поперечное сечение тела, C_x – эмпирический коэффициент, зависящий от формы тела.

Теория *подъемной силы крыла самолета* была создана **Н. Е. Жуковским**. Он показал, что существенную роль при обтекании крыла играют силы вязкого трения в поверхностном слое. В результате их действия возникает круговое движение (**циркуляция**) воздуха вокруг крыла (зеленые стрелки на рис. 9).

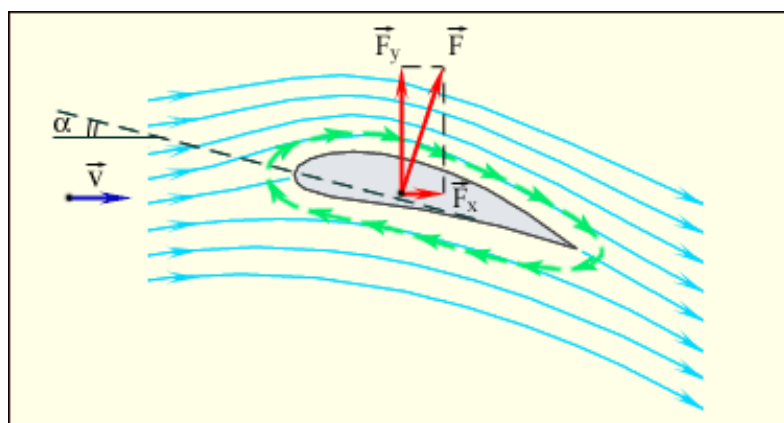


Рис. 9

Подъемная сила крыла зависит от его профиля и наличия **угла атаки**, т.е. угла наклона крыла по отношению к набегающему потоку воздуха. Скорость воздушного потока над крылом оказывается больше, чем под крылом. Из уравнения Бернулли следует, что давление в нижней части крыла будет больше, чем в верхней;

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const} \Rightarrow v_{\text{верх}} > v_{\text{нижн}}; \quad p_{\text{верх}} < p_{\text{нижн}} \Rightarrow F_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S. \quad (16)$$

Для крыла самолета требуется большая подъемная сила при малом лобовом сопротивлении, т.е. высокое качество крыла ($k = C_y / C_x$). Это условие выполняется при малых **углах атаки**.