Лекция 13
Волновое движение
Вопросы

1. **Волновые процессы. Продольные и поперечные волны.**
2. **Уравнение плоской бегущей волны.**
3. **Энергия упругой волны. Вектор Умова.**
4. **Принцип суперпозиции. Групповая скорость**
5. **Интерференция волн.**
6. **Стоячие волны.**

1. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны

Волновым процессом (или **волной**) называется процесс распространения колебаний в сплошной среде.

Основным свойством всех волн, независимо от их природы, является **перенос энергии без переноса вещества.**

Виды волн: **волны на поверхности жидкости,**
упругие,
электромагнитные волны.

Упругими волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают продольные и поперечные.

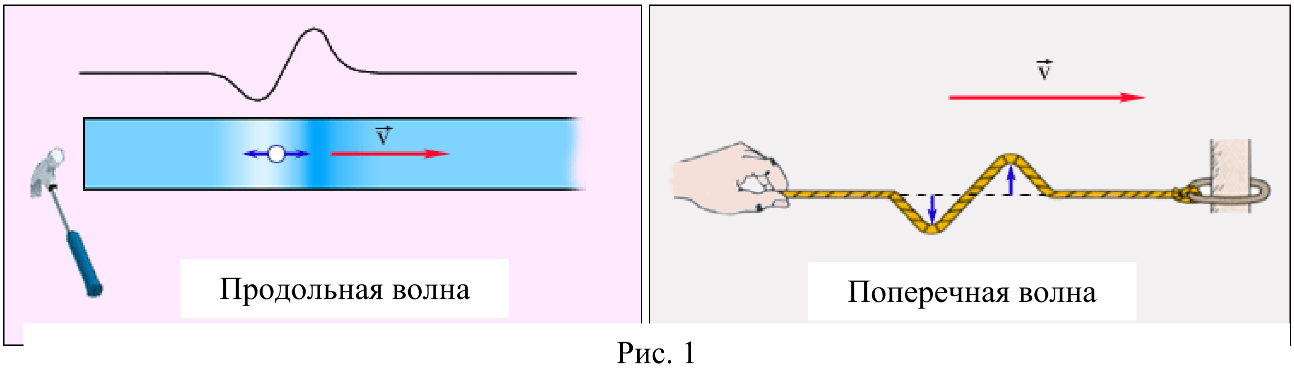

Рис. 1

Продольные волны – частицы колеблются в направлении распространения волны. **Поперечные волны** – частицы колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

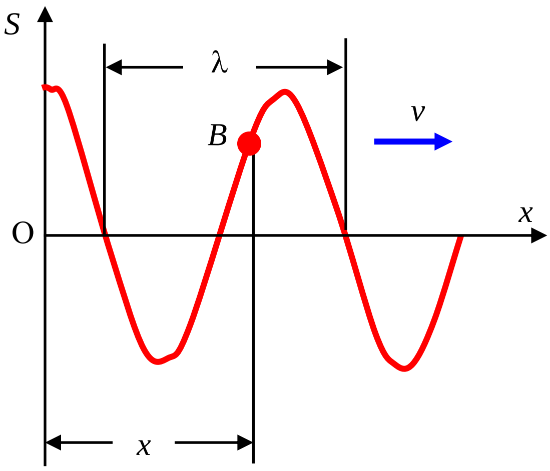

Рис. 2

Упругая волна называется **гармонической,** если соответствующие ей колебания частиц являются гармоническими.

Фронтом волны называется геометрическое место точек, до которых доходит колебание к данному моменту времени.

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны** λ ($\lambda = vT$)

2. Уравнение плоской бегущей волны

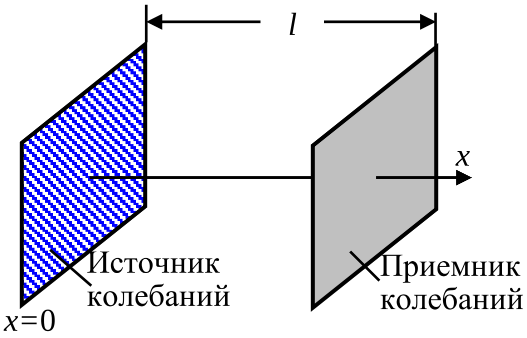

Рис. 3

Колебания источника $S = S_0 \sin \omega_0 t$

Колебания приемника

$$S = S_0 \sin\left[\omega_0 (t - \tau)\right] = S_0 \sin\left(\omega_0 t - \omega_0 \frac{l}{v}\right) =$$

$$= S_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{T}\frac{l}{v}\right) = S_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda} l\right).$$

$\lambda = T \cdot v$ $\quad$ $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – **волновое число**, характеризующее число волн, укладывающихся на отрезке 2π радиан.

$$\boxed{S = S_0 \sin\left(\omega_0 t - k\, l\right)}$$ – уравнение плоской бегущей волны (1)

$\varphi = \left(\omega_0 t - k\ l\right)$ – **фаза волны**, характеризует смещение от положения равновесия частиц, находящихся в момент времени t на расстоянии l от источника;

$\varphi_1 = \omega_0 t$ – **временна′я часть фазы**, определяет смещение частиц в данный момент времени;

$\varphi_2 = -kl = -\dfrac{2\pi}{\lambda} l$ – **пространственная часть фазы**, определяет смещение частиц на расстоянии l от источника колебаний.

Фазовая скорость

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda} l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dl}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dl}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dl}{dt} = v_\text{ф} = \frac{\omega_0 \lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega_0}{k}\ . \qquad (2)$$

Фазовой скоростью $v_\text{ф}$ скорость перемещения фазы волны. Зависимость фазовой скорости от частоты **дисперсией волн,** а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, – **диспергирующей средой.**

Фазовая скорость пропорциональна частоте колебаний, а поскольку для частоты ограничений не существует, не существует ограничений и для фазовой скорости: она может быть больше скорости света в вакууме.

Волновое уравнение

$$\boxed{S = S_0 \sin\left(\omega_0 t - k\,l\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -\omega_0^2 S_0 \cdot \sin\left(\omega_0 t - kl\right),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial l^2} = -k^2 S_0 \cdot \sin\left(\omega_0 t - kl\right).$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial l^2} = \frac{k^2}{\omega_0^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial l^2} = \frac{1}{v_ф}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}} \text{ – волновое уравнение }. \qquad (3)$$

3. Энергия упругой волны. Вектор Умова

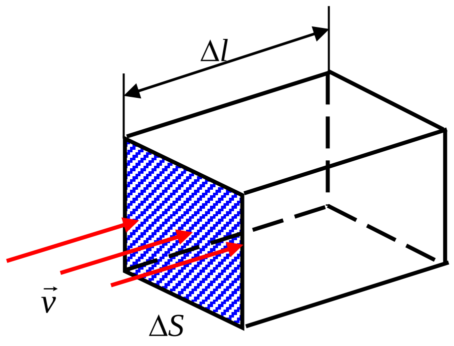

Рис. 4

Бегущими называются волны, которые переносят в пространстве энергию. Перенос энергии в волнах количественно характеризуется **вектором плотности потока энергии (вектором Умова).**

Плотностью потока энергии называется векторная физическая величина, характеризующая перенос энергии в пространстве и численно равная энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta S\ \Delta t}}, \left[\frac{Дж}{м^2 с} \to \frac{Вт}{м^2}\right]. \qquad (4)$$

$$\boxed{\Delta W = w\Delta V = w\Delta S\Delta l} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \frac{w\Delta S\Delta l}{\Delta S\Delta t} = w\vec{v}} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = w\vec{v}}, \qquad (5)$$

где w, $\left[Вт/м^3\right]$ – объемная плотность потока энергии

Вектор Умова совпадает по направлению с направлением скорости распространения волны и равен произведению объемной плотности энергии на вектор скорости распространения волны.

Так как поглощением энергии при распространении волны пренебрегаем, то вся энергия колебаний частиц среды определяется энергетическим излучением источника:

$$\Delta W = \frac{m\,\omega_0^2\,S_0^2}{2}, \quad m = \rho \cdot \Delta V, \qquad (6)$$

Средняя объемная плотность энергии, переносимой волной

$$< w > = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\rho\ \Delta V \cdot S_0^2\ \omega_0^2}{2\Delta V} = \frac{\rho\omega_0^2 S_0^2}{2}\ . \qquad (7)$$

4. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Принцип суперпозиции: при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.

Исходя из принципа суперпозиции, любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, т.е. в виде **волнового пакета**.

Волновым пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

Сконструируем простейший волновой пакет из двух гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \Rightarrow$$

$$S = A_0\cos(\omega t - kx) + A_0\cos\,[(\omega+\mathrm{d}\omega)t - (k+\mathrm{d}k)x] = 2A_0\cos\left(\frac{t\mathrm{d}\omega - x\mathrm{d}k}{2}\right)\cos\,(\omega t - kx).$$

$$A = \left|2A_0\cos\left(\frac{t\mathrm{d}\omega - x\mathrm{d}k}{2}\right)\right|$$ – медленно изменяющаяся амплитуда

За скорость распространения волнового пакета принимают скорость перемещения максимума амплитуды волны (**групповая скорость**)

$$t\mathrm{d}\omega - x\mathrm{d}k = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = u \qquad (8)$$

Связь между групповой и фазовой скоростями

$$v_ф = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}(v_ф \cdot k)}{\mathrm{d}k} = v_ф + k\frac{\mathrm{d}v_ф}{\mathrm{d}k} = v_ф + k\left(\frac{\mathrm{d}v_ф}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}k}\right) = v_ф + k\left(-\frac{\lambda}{k}\right)\frac{\mathrm{d}v_ф}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$\boxed{u = v_ф - \lambda\frac{\mathrm{d}v_ф}{\mathrm{d}\lambda}}\ . \qquad (9)$$

В недиспергирующей среде $dv/d\lambda = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

Понятие групповой скорости очень важно, так как именно она фигурирует при измерении дальности в радиолокации, в системах управления космическими объектами и т.д. В теории относительности доказывается, что **групповая скорость** $u \le c$**, в то время как для фазовой скорости ограничений не существует**.

5. Интерференция волн

Интерференцией называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких волновых процессов, в результате сложения которых получается усиление или ослабление результирующей волны**.**

Интерференцию связывают с понятием **когерентности**. Волны называются **когерентными, если разность их фаз в каждой точке пространства остается постоянной во времени.**

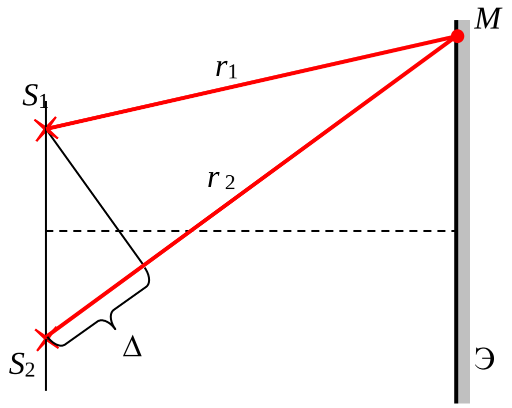

Рис. 2

Пусть уравнения двух когерентных сферических волн, накладывающихся друг на друга, заданы в виде

$$S_1 = \frac{A_0}{r_1}\cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1),$$

$$S_2 = \frac{A_0}{r_2}\cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2),$$

Амплитуда результирующей волны

$$A^2 = A_0^2\left\{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\left[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)\right]\right\} \qquad (10)$$

Так как для когерентных источников разность начальных фаз $(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const}$, то результат сложения колебаний зависит от разности хода волн $\Delta = r_1 - r_2$.

Условие интерференционного максимума

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (11)$$

амплитуда результирующего колебания $A = \dfrac{A_0}{r_1} + \dfrac{A_0}{r_2}$.

Условие интерференционного минимума

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2(m + 1)\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (12)$$

амплитуда результирующего колебания $A = \left| \frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2} \right|$,

m – **порядок** интерференционного максимума или минимума**.**

7. Стоячие волны

Стоячие волны являются частным случаем интерференции и образуются при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

$$S_1 = A\cos(\omega t - kx),$$
$$S_2 = A\cos(\omega t + kx). \quad (13)$$

Сложив эти уравнения и учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, получим

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow S = S_1 + S_2 = 2A\cos kx \cos\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = A_{ст}\cos\omega t$$ – **уравнение стоячей волны** , (14)

$$A_{ст} = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$$ – амплитуда стоячей волны (15)

Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна ($A_{ст} = 2A$), называются **пучностями** стоячей волны, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю ($A_{ст} = 0$), – **узлами** стоячей волны**.**

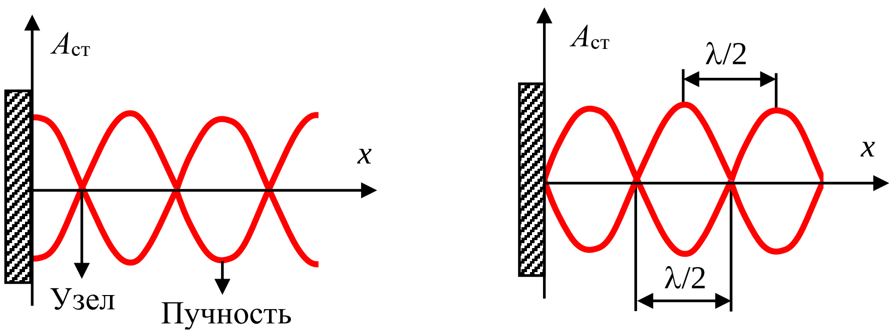

Рис. 6.3

Координаты пучностей

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm m\pi \Rightarrow x_п = \pm m\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad (16)$$

Координаты узлов

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \Rightarrow \quad x_{\text{узл}} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

Образование стоячих волн наблюдается при интерференции бегущей и отраженной волн. Что будет на границе отражения – узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения получается пучность, если более плотная – узел. В случае стоячей волны энергия не переносится.