Definición

Sean E, F Banach y $T: E \longrightarrow F$. Se dice que T es compacto si y solo si $T(A)$ es relativamente compacto para todo $A \subset E$ acotado.

Se dice que $T(A)$ es relativamente compacto si y solo si $\overline{T(A)}$ es compacto.

Ejercicio

i) T es compacto si y solo si $\forall \{x_n\} \subset E$ acotada $\exists \sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\{T(x_{\sigma(n)})\}$ converge en F.

ii) Si E es reflexivo
T es compacto si y solo si $\forall \{x_n\} \xrightarrow{E} x$ $\exists \{x_{\sigma(n)}\} : \{T(x_{\sigma(n)})\} \xrightarrow{F} Tx$

iii) $Id: E \longrightarrow E$ es compacto si y solo si $\dim(E) < \infty$

Proposición

Sean E, F Banach y $T: E \longrightarrow F$ lineal, entonces T es compacto si y solo si $T(B(0,1))$ es relativamente compacto. Además, si T es compacto entonces $\{Tx_n\} \xrightarrow{F} Tx$ $\forall \{x_n\} \xrightarrow{E} x$

Ejercicio Si $T: E \longrightarrow F$ lineal, acotada (continua) y de rango finito ($\dim(T(E)) < \infty$). Entonces T es compacta.

Corolario

Si $T: E \rightarrow F$ es compacto y lineal tenemos que T es continua.

Teorema espectral

Sea H un espacio de Hilbert y $T: H \longrightarrow H$ cumpliendo ser compacta, lineal y simétrica, es decir, $(Tx, y) = (x, Ty)$ $\forall x, y \in H$.

-Demostración-

Para el caso $\lambda = 0$, sabemos que 0 es valor propio cuando $\ker T \neq \{0\}$.

Supongamos entonces que $\lambda \neq 0$.

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y $T: H \longrightarrow H$ lineal.

i) Si T es continua y λ es valor propio de $T \Rightarrow -\|T\| \leq \lambda \leq \|T\|$

ii) Si T es simétrico entonces funciones propias a valores propios distintos son ortogonales.

iii) Si T es compacto $\Rightarrow \underbrace{\dim(\ker(T-\lambda I))}_{\text{multiplicidad algebraica}}<\infty$ para todo valor propio de T, λ.

iv) Si T es compacto y simétrico $\Rightarrow 0$ es el único posible punto de acumulación de valores propios no nulos.

-Demostración-

i) Como λ es valor propio $\exists u \in H\setminus\{0\}$: $Tu=\lambda u$ entonces

$$|\lambda|\|u\|^2 = |(\lambda u,u)| = |(Tu,u)| \leq \|Tu\|\|u\|$$

Podemos suponer que $\|u\|=1 \Rightarrow \lambda \leq \|T\|\|u\| = \|T\|$ y también $-\|T\|\leq\lambda$

ii) Supongamos que $Tu=\lambda u$ y $Tv=\beta v$ para $u,v\in H\setminus\{0\}$ y $\lambda\neq\beta$

$$\begin{aligned} &(Tu,v) = (\lambda u, v) \\ \text{simetría} \rightarrow &\ \ \| \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \lambda(u,v)=\beta(u,v) \\ &(u,Tv) = (u,\beta v) \end{aligned}$$

iii) Supongamos que $V=\ker(T-\lambda I)$ y $\dim(V)=\infty$. Además, podemos encontrar, por ser V un Hilbert y por tanto reflexivo, una sucesión $\{u_n\}\subset V$ con $\|u_n\|=1$ tal que $\{u_n\}\xrightarrow{H} u$ y $\{u_n\}\not\xrightarrow{H} u$.

Como T es lineal y compacta tenemos que $\{Tu_n\}\xrightarrow{H} Tu$. Como $\{u_n\}\subset V$ tenemos que $\{\lambda u_n\}\xrightarrow{H} Tu$; como $\lambda\neq 0$ por hipótesis entonces

$$\{u_n\}\xrightarrow{H}\frac{Tu}{\lambda} \Rightarrow \{u_n\}\xrightarrow{H}\frac{Tu}{\lambda}\Rightarrow \{u_n\}\xrightarrow{H} u !!!$$

iv) Leda pereza

□

De hecho, vamos a estudiar los siguientes casos:

i) $0<\lambda\leq\|T\|$

Ejercicio

Sea H un Hilbert y $T: H\longrightarrow H$ lineal y simétrica. Si $V\subset H$ subespacio cerrado de H y $T(V)\subset V$ entonces $T: V^{\perp}\longrightarrow V^{\perp}$. Si, además, T es compacto $\Rightarrow T: V^{\perp}\longrightarrow V^{\perp}$ es compacto.

Lema

Sea H un Hilbert y $T:H\longrightarrow H$ lineal, compacta y simétrica. Tomando

$$\lambda_1 = \sup\{(Tu,u) : \|u\|=1\}$$

Entonces se cumplen:

i) Si $\dim(H)=\infty$ entonces $\lambda_1\geq 0$

ii) Si λ es valor propio de T entonces $\lambda \leq \lambda_1$

iii) Si $\lambda_1 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ es el valor propio positivo (más grande) de T con u_1 función propia $\|u_1\| = 1$.

iv) T tiene un valor propio positivo $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0$

-Demostración-

i) Sea $\{u_n\} \subset H$ tal que $\|u_n\| = 1$, $\{u_n\} \xrightarrow{H} 0$ y $\{u_n\} \not\longrightarrow 0$.

Como T compacto y lineal $Tu_n \longrightarrow T0 = 0$

$$(Tu_n, u_n) \longrightarrow (T0, 0) = (0,0) = 0$$
$$\downarrow^H \quad \downarrow^H$$
$$0 \quad\;\; 0$$

Por tanto $\lambda_1 \geq 0$.

ii) Por definición de supremo

iv) La doble implicación sale de ii) y iii)

iii) Como $\lambda_1 = \sup\{(Tu,u) : \|u\| = 1\}$ $\exists \{u_n\} \subset H$ con $\|u_n\| = 1$ tal que

$$\{(Tu_n, u_n)\} \longrightarrow \lambda_1$$

Como $\{u_n\}$ acotada $\exists \{u_{\sigma(n)}\} \xrightarrow{H} u$ y considero, sin pérdida de generalidad, que $u_{\sigma(n)} = u_n$. Como T es lineal y compacto tenemos que

$$\{Tu_n\} \longrightarrow Tu_0 \Rightarrow \{(Tu_n, u_n)\} \longrightarrow (Tu_0, u_0)$$

entonces $\lambda_1 = (Tu_0, u_0)$.

Como $\lambda_1 > 0$, necesariamente $u_0 \neq 0$. Veamos ahora que,

si $(Tu,u) = \lambda_1$ con $\|u\| \leq 1$ entonces $Tu = \lambda_1 u$ y, por tanto, λ_1 es v.p.

Para ello, considero $v = \frac{u}{\|u\|}$, $\|v\| = 1$, y $(Tv, v) = \frac{(Tu,u)}{\|u\|^2} = \frac{\lambda_1}{\|u\|^2} = \lambda_1$

$\Rightarrow \|u\| = 1$.

Ahora bien, ahora sabemos que $\lambda_1 = \max\{(Tu,u) : \|u\| = 1\}$

pues se alcanza.

Definimos $A = T - \lambda_1 I \Rightarrow (Av, v) \leq 0 \;\; \forall v \in H$ entonces

$$f(t) = (A(u_0 + tv), u_0 + tv) \leq 0 = f(0)$$

$$f(0) = (Au_0, u_0) = (Tu_0, u_0) - \lambda_1 (u_0, u_0) = 0$$

Además, se cumple que $Au_0 = Tu_0 - \lambda_1 u_0$. En particular

$$(Au_0, u_0) = (Tu_0, u_0) - \lambda_1 (u_0, u_0) = 0 \text{ pues } \|u_0\| = 1$$

$$(Ax, x) = (Tx, x) - \lambda_1 (x, x) \leq 0 \text{ pues}$$

i) si $x = 0$ trivial

ii) si $x \neq 0$, es equivalente a probar que

$$\left(T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right) \le \lambda \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) = \lambda_1$$

Luego $(\Delta x, x) \le 0 \ \forall x \in H$.

Por tanto $\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\Delta x, x) \end{aligned}$ tiene un máximo

en λ_1. Veamos que f tiene un máximo

en $t=0$. Pero como Δ es lineal entonces

$$f(t) = (\Delta u_0 + t\Delta v,\ u_0 + tv) = (\Delta u_0, u_0) + t[(\Delta u_0, v) + (\Delta v, u_0)] + t^2(\Delta v, v).$$

$$f'(0) = (\Delta u_0, v) + (\Delta v, u_0) = (\Delta u_0, v) + (v, \Delta u_0)$$
$$= 2(\Delta u_0, v) = 0 \implies (\Delta u_0, v) = 0 \ \forall v \in H$$

y $T(u_0, v) = \lambda_1 (u_0, v) = (\lambda u_0, v) \implies \boxed{T u_0 = \lambda_1 u_0}$

Una vez probado esto tenemos $V = \langle u_1 \rangle$ y tenemos que $T(V) \subset V$ pues

$$T(t u_1) = t T_{u_1} = t \lambda_1 u_1 \in V$$

Por el ejercicio anterior tenemos que $T: V^\perp \longrightarrow V^\perp$ es compacta y simétrica. Por el lema probado $\exists \lambda_2 \sup \{ (Tx, x) : \substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1} \} = \sup \{ (Tx, x) : \substack{(x, u_1) = 0 \\ \|x\| = 1} \}$.

Repetimos el proceso con $V = \langle u_1, u_2 \rangle$ para obtener λ_3.

ii) $-\|T\| \le \lambda < 0$. Es análogo a i) considerando $\lambda_{-1} = \inf \{ (Tu, u) : \|u\| = 1 \}$.

Ya no sé donde tomarlos ni con qué estructura

Lema

Supongamos que tenemos construido

$$0 < \lambda_{n-1} \le \lambda_{n-2} \le \dots \le \lambda_1 \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \ge 2)$$

con $u_{n-1}, \dots, u_1$ con funciones propias de norma 1 asociadas a $\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1$ ortogonales dos a dos.

Si $\lambda_n := \sup \{ (Tx, x) : \|x\| = 1,\ x \perp u_1, \dots, u_{n-1} \}$ se cumple que:

i) $\lambda_n \ge 0$ si $\dim H = +\infty$

ii) Si λ es v.p de T con $\lambda < \lambda_{n-1}$ entonces $\lambda \le \lambda_n$

iii) Si $\lambda_n > 0$ entonces λ_n es v.p de T.

Análogamente ocurre con los positivos.

Consideramos ahora $A = \{ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \begin{smallmatrix} \lambda_n > 0 & \text{si } n > 0 \\ \lambda_n < 0 & \text{si } n < 0 \end{smallmatrix} \}$ y, para el caso complejo $\dim H = \infty$ tenemos que A es infinito. Y vamos a probar que se cumple que

$$\forall x \in H \quad Tx = \sum_{\substack{n = -\infty \\ n \in A}}^{\infty} \lambda_n (x, u_n) u_n$$

Pero dado $N \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n = x - \sum_{n=-N}^{N} (x, u_n) u_n$ entonces $Tx_n = Tx - \sum_{\substack{n=-N \\ n \in \Delta}}^{N} (x, u_n) T u_n = Tx - \sum_{\substack{n=-N \\ n \in \mathbb{N}}}^{N} (x, u_n) \lambda_n u_n$

y basta probar que $T x_n \longrightarrow 0$.

i) $(x_N, u_k) = (x, u_k) - \sum_{\substack{n=-N \\ n \in \Delta}}^{N} (x, u_n)(u_n, u_k) \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \ -N \leq k \leq N$

$= (x, u_k) - (x, u_k) 1 = 0$

entonces $x_N \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_N, u_{-1}, u_{-2}, \ldots, u_{-N} \rangle^{\perp} = V^{\perp}$

$0 \leq \|Tx_N\| \leq \|T|_{V^\perp}\| \|x_N\| = \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in V^\perp}} |\langle Tu, u \rangle| \cdot \|x_N\| \leq \min\{|\lambda_N|, |\lambda_{-N}|\} \|x_N\|$ (*)

Ejercicio

Sea H Hilbert y $T: H \longrightarrow H$ lineal, acotado y simétrico. Entonces

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle Tu, u \rangle|$$

(*) $\leq \min\{|\lambda_N|, |\lambda_{-N}|\} \|x\|$

$\downarrow$

0

Teorema

Sea H Hilbert, $\dim H = \infty$, $T: H \longrightarrow H$ simétrico y compacto. Entonces, los valores propios no nulos de T están caracterizados por "nuestra" construcción inductiva

$$\{\lambda_n : n \in \Delta\}$$

-Demostración-

Supongamos que $\lambda \neq 0$ es v.p de $T \Rightarrow \exists u \in H \setminus \{0\}$ tal que $Tu = \lambda u$ con $\|u\| = 1$. Por contradicción, supongamos que $\lambda \neq \lambda_n \ \forall n \in \Delta$ entonces $\lambda u = Tu = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \in \Delta}}^{\infty} \lambda_n (u, u_n) u_n$

luego $u \perp u_n \ \forall n \in \Delta \Rightarrow (u, u_n) = 0 \Rightarrow \lambda u = 0$ y $u = 0$!!!

$\square$

Ejercicio

Sea H Hilbert, $T: H \longrightarrow H$ lineal, simétrico y compacto. Probar que:

i) $T = \Theta \Leftrightarrow \Delta = \emptyset$

Ejercicio

Sea H Hilbert, $T: H \longrightarrow H$ lineal, simétrico y compacto entonces, si $H = \operatorname{Ker} T \oplus (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ tenemos que

$$\operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \Delta\}) = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$$

En particular $\{u_n : n \in \Delta\}$ es base ortonormal de $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$:

$\forall x \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp} \quad x = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \in \Delta}}^{\infty} (x, u_n) u_n$