1. Sean E y F espacios métricos y $f : E \to F$ una función. Probar que f es continua si, y sólo si, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ para todo conjunto $A \subset E$.

$\Rightarrow]$ Supongamos que f es continua $\Rightarrow \forall \mathcal{U} \subset \mathcal{U}(f(x))$, $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}(x)$.

por continuidad

Sea $x \in \overline{A} \Rightarrow \exists \mathcal{U} \in \mathcal{U}(x)$ con $x \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \subset \overline{A} \Rightarrow f(x) \in f(\overline{A})$ con $f(x) \in f(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}(f(x)) \Rightarrow \overline{f(\mathcal{U})} \subset \overline{f(A)}$

$\hookrightarrow$ y en particular $\mathcal{U} \subset A$

$f(x) \in f(\overline{A})$ y $f(x) \in \overline{f(A)}$ luego se da la inclusión

$\Leftarrow]$ Supongamos $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \Rightarrow \forall x \in f(\overline{A})$, $\overline{f(\overline{A})} \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists f(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}(f(x))$. Veamos si $f^{-1}(f(\mathcal{U})) \in \mathcal{U}(x)$. por tanto $f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow \exists f^{-1}(f(\mathcal{U})) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) / f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(f(\mathcal{U})) \Rightarrow f^{-1}(f(\mathcal{U})) \in \mathcal{U}(f^{-1}(f(x)))$. En caso de ser inyectiva tendríamos exactamente la definición de continuidad. Pero en definitiva, ya la tenemos.

2. Dado un subconjunto A de un espacio métrico E, la *función característica* de A es la función $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\chi_A(x) = 1 \quad \forall x \in A \qquad \text{y} \qquad \chi_A(x) = 0 \quad \forall x \in E \setminus A$$

Probar que χ_A es continua en un punto $x \in E$ si, y sólo si, $x \in A^\circ \cup (E \setminus A)^\circ$. Deducir que χ_A es continua si, y sólo si, A es a la vez abierto y cerrado.

$\hookrightarrow$ si puesto que $\overline{A} = A^\circ \Rightarrow (X \setminus A)^\circ = \overline{(X \setminus A)} \Rightarrow$ no hay frontera y luego $x \in A^\circ \cup (E \setminus A)^\circ$

$\Leftarrow]$ Sea $\{x_n\} \in E$ / $\{x_n\} \to x$ con $x_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ / $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A \Rightarrow \{\chi_A(x_n)\} = \{1\} \to 1 = \chi_A$ igual con $E \setminus A$. Escrito porque siempre hay al menos un entorno de x dentro del conjunto a tratar

$\Rightarrow$ Sea χ_A continua en $x \notin \Rightarrow \exists \{x_n\} \in E$ / $\{x_n\} \to x$, Supongamos $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in E \setminus A \Rightarrow$

$\chi_A(\{x_n\}) = \{0\} \to 0 = \chi_A(0)$ Como x debe ser punto de acumulación $x \in \overline{A}$.

Supongamos $x \notin A^\circ \wedge x \notin (E \setminus A)^\circ \Rightarrow x \in \partial(A) = \partial(E \setminus A) \Rightarrow \chi_A(x) = 1$ si $x_n \in A^\circ$ y $\chi_A(x_n) = 0$ si $x_n \in (E \setminus A)^\circ \Rightarrow$ no converge $\Rightarrow$ no continua $\blacksquare$

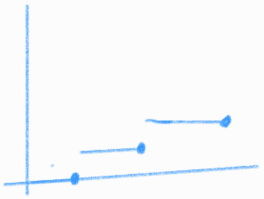
3. Si E y F son espacios métricos, se dice que una función $f : E \to F$ es *localmente constante* cuando, para cada $x \in E$, existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $f\big|_U$ es constante. Probar que entonces f es continua. Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y una función localmente constante $f : A \to \mathbb{R}$, cuya imagen $f(A)$ sea un conjunto infinito.

Sabemos que f continua $\Leftrightarrow \forall x \in E$, $f|_{\mathcal{U}}$ es continua con $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(x)$

Supongamos que f es localmente continua $\Rightarrow \forall x \in E$ $\exists \mathcal{U} \subset \mathcal{U}(x) / f|_{\mathcal{U}}$ es constante. Como es constante, toda función constante es continua $\Rightarrow$ aplicando lo de arriba f es continua.

Sea $g \approx E(x)$ parte entera y sea $A = (x, x+1]$ $\Rightarrow$ tenemos que g es localmente continua

Pero $g(A)$ finito



4. Sea E un espacio métrico con distancia d y A un subconjunto no vacío de E. Probar la continuidad de la función $f : E \to \mathbb{R}$ dada por

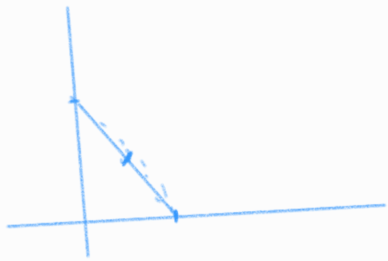
$$f(x) = d(x,A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{d(x,a) : a \in A\} \qquad \forall x \in E$$

Veamos que $d(x,A)$ es una distancia, en tal caso, es continua por definición

Como lo vimos en el tema pasado, es una distancia luego es continua.

β $\quad$ A

5. Sea E un espacio métrico con distancia d, y consideremos el espacio producto $E \times E$. Probar que, para todo $r \in \mathbb{R}_0^+$, el conjunto $\{(x,y) \in E \times E : d(x,y) < r\}$ es abierto, mientras que $\{(x,y) \in E \times E : d(x,y) \leqslant r\}$ es cerrado. En particular se tiene que la *diagonal* $\Delta(E) = \{(x,x) : x \in E\}$ es un conjunto cerrado. Deducir que, si F es otro espacio métrico y $f,g : E \to F$ son funciones continuas, entonces $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de E.



Sea $(x,y) \in A \Rightarrow d(x,y) < r \Rightarrow \exists B(\frac{x+y}{2}, r\cdot\varepsilon) \,/\, (x,y) \in B \ \forall (x,y) \in E\times E \Rightarrow$ es abierto ¿?

Si tomamos $(x',y') \in \beta \Rightarrow d(x',y') \le r$, supongamos $d(x',y') = r \Rightarrow \nexists \varepsilon > 0 \,/\, B((x,y),\varepsilon) \subset \beta \Rightarrow$ es cerrado

Tenemos que $d(x,x) = 0 \Rightarrow (x,x) \subset \beta \Rightarrow \forall (x,x) \in E\times E \Rightarrow$ es cerrado

$A' = \{x \in E \,/\, f(x) = g(x)\}$. Veamos que es cerrado $\Rightarrow$ Como f y g son continuas $\{f(x_n)\} \to f(x) = g(x)$ $\Rightarrow$
$\{g(x_n)\} \to g(x) = f(x)$

$\Rightarrow \{x_n\} \to x$ ¿?

6. Sean E, F espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua. Probar que su *gráfica*, es decir, el conjunto $\mathrm{Gr}\, f = \{(x, f(x)) : x \in E\}$, es un subconjunto cerrado del espacio métrico producto $E \times F$.

$$\varphi : E \longrightarrow E \times F$$
$$x \longmapsto (x, f(x))$$

Tenemos que $\varphi = (Id_E, f)$ donde hemos usado que las proyecciones coordenadas de g_r son la identidad y f. Como Id, f son continuas $\Rightarrow \varphi$ es continua.

Para ver que g_r es cerrado basta con ver que $\varphi^{-1}(g_r)$ es cerrado $\equiv$ ver que si $Id^{-1}(E) = E$ o $f^{-1}(F)$ es cerrado $\Rightarrow g_r^{-1}(E \times F)$ es cerrado.

Por sucesiones sale mucho más fácil. Tomar una sucesión de puntos de g_r y ver que converge a uno dentro de la gráfica

7. Sea E un espacio métrico e Y un espacio pre-hilbertiano. Para $f,g \in \mathcal{F}(E,Y)$, se define una función $h \in \mathcal{F}(E)$ por $h(x) = \big(f(x)\,\big|\,g(x)\big)$ para todo $x \in E$. Probar que, si f y g son continuas en un punto $a \in E$, entonces h también lo es.

Como Y es pre-hilbertiano, en particular es normado con $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ y métrico con $d(x,y) = \|y-x\|$. $f,g \in F(E,Y)$ y $h \in F(E)$ $h(x) = (f(x)|g(x))$ $\forall x \in E$.

Sean f,g continuas y $\{x_n\} \to x$ / $x \in E$ y $x_n \in E \setminus \{x\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tenemos $h: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow (f(x)|g(x))$

Veamos que $\{h(x_n)\} \to h(x) = (f(x)|g(x))$ → necesito Y prehilb para que "sea" un prod. escalar

$\{h(x_n)\} = \{(f(x_n)|g(x_n))\}$ que por ser continuas f y g tenemos que $\{f(x_n)\} \to f(x)$, $\{g(x_n)\} \to g(x)$ } ambas ent

luego $\{(f(x_n)|g(x_n))\} \to (f(x)|g(x)) \in \mathbb{R}$. Luego h es continua en x.

$\{\sum_{k=1}^{N} (fg)(x_n(n))\} \to$ aplicar suma de lím lím suma y toda la pesca.

Nota:

$(f(x)|g(x)) = \sum_{k=1}^{N} f(x)(n)\, g(x)(n) \Rightarrow (f(x_n)|g(x_n)) = \sum_{k=1}^{N} f(x_n)(n)\, g(x_n)(n) = \sum_{k=1}^{N} f(x_n(n)) g(x_n(n))$

$= \sum (fg)(x_n(n))$ ← por ser continuas.

Por la composición demostrando la continuidad del producto escalar.

8. Sea E un espacio métrico y $f,g : E \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un punto $a \in E$. Probar que la función $h : E \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in E$, también es continua en a.

$f,g \in \mathcal{C}(E) \Rightarrow h \in \mathcal{C}(E)$?

$\Rightarrow A \in \mathcal{U}(x)$, en particular $x \in A$ y $x_n \in A$ tomamos $h|_A$.

Sea $\{x_n\} \to x$ con $x_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \{h|_A(x_n)\} \to h|_A(x)$?

$\{h|_A(x_n)\} = \{\max\{f|_A(x_n), g|_A(x_n)\}\}$.

La restricción no tiene sentido. ¿a donde te lleva?

Supongamos $f(y) = g(y)$ $\forall y \in A$ $\Rightarrow$ $\max\{f(x), g(x)\} = f(x)$ $\Rightarrow \{\max\{f|_A(x_n), g|_A(x_n)\}\} \to \max\{f|_A(x), g|_A(x)\}$

$= f|_A(x) = h|_A(x)$. Luego $h|_A$ es continua en x $\Rightarrow$ h es continua en x $\forall A \in \mathcal{U}(x)$

Supongamos $f|_A(y) > g|_A(y)$ $\forall y \in A \Rightarrow \max\{f|_A(y), g|_A(y)\} = \max\{f|_A(y)\} = f(x) \Rightarrow$ mismo raz. ← para algún x

Igual con $f|_A(x) < g|_A(y)$.

Pero y si en A no hay una desigualdad clara?

Tomamos $\varepsilon > 0$ / $g[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)]$ y $g[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)]$ mantengan una desigualdad y restringimos a hí.

Es una ~~composición~~

9. Probar que si Y es un espacio normado, E un espacio métrico y $f : E \to Y$ una función continua en un punto $a \in E$, entonces la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \| f(x) \|$ para todo $x \in E$, también es continua en el punto a.

Se hace usando que la norma es una ap. continua por Y y f continua $\Rightarrow$ composición continua

$\hookrightarrow$ en Y su esp. normado.

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ (b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4} = 1$

Teorema del cambio de variable

a) hagamos el cambio de variable $x^2+y^2 = t \Rightarrow$ (a) $= \lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$, según lo visto en primero se tiene el resultado por L'Hopital

b) igual que en a, tomamos $t = x^4+y^4 \Rightarrow$ (b): $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ por 1º y sale por l'Hôpital

Lo suyo es tomar una acotación. Acotamos sobre f y sale