Ejercicio 1 (2 puntos). Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in X$$

a) Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

b) ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

c) ¿Son equivalente $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X? Justifica tu respuesta.

d) ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.

a) Para ello, habrá que probar la linealidad y acotación de δ en $\|\cdot\|_\infty$. Procedemos a ello:

i) La linealidad de δ se tiene por hipótesis

ii) Veamos la continuidad de δ; para ello, sea $f \in X$ se tiene que

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leq \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} = \|f\|_\infty$$

de donde se obtiene que, como f es continua en un compacto dicho supremo se alcanza, $\|\delta\| \leq 1$.

Por tanto, hemos probado que $\delta \in X_\infty^*$ y que $\|\delta\| \leq 1$; buscamos probar que $\|\delta\| = 1$ y para ello, buscamos encontrar $f \in C([0,1])$ tal que $\delta(f) = 1$, es decir, que $f(0) = 1$; basta tomar, por ejemplo, la función constantemente igual a 1 que claramente cumple las condiciones.

b) Puesto que δ es lineal, buscamos estudiar si δ está acotado en la norma $\|\cdot\|_1$; sin embargo, podemos encontrar un contraejemplo que pruebe que esto no es así, buscamos una sucesión de funciones continuas en $[0,1]$ que converjan a la función 0 tales que la evaluación en δ no converja a 0

Lo que se prueba aquí es que no hay continuidad en 0

Para ello, consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ definida como sigue

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in [1/n, 1] \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1]$$

claramente, se cumple que $\{\|f_n\|_1\} \longrightarrow 0$ pero $\delta(f_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{\delta(f_n)\} \longrightarrow 1$

c) Sabemos de clase que dos normas equivalentes dan lugar a la misma topología, es decir, disponen de las mismas aplicaciones continuas; sin embargo, el apartado a y el apartado b nos demuestran que no son equivalentes.

d) Veamos que este espacio no es completo; supongamos que $(X, \|\cdot\|_1)$ fuera Banach, en ese caso, sea $f \in X$, se tiene que

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \int_0^1 \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} = \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty \int_0^1 1\, dt = \|f\|_\infty$$

Como sabemos de clase que X_∞ sí es Banach, se tendría que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ serían equivalentes obteniendo una contradicción con el apartado anterior.

Ejercicio 2 (2 puntos). Sea X un espacio reflexivo e Y un espacio de Banach. Pruébese que si existe $T \in L(X,Y)$ sobreyectiva, entonces Y es reflexivo.

Primero de todo, veamos que X es completo; como es reflexivo tenemos que $J(X) \simeq X^{**}$; ahora bien, como X^{*} es Banach como dual de un espacio normado, se tiene que $J(X)$ es también Banach y usando que J preserva la norma se tiene que X es Banach.

Veamos ahora que $J_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$, $y \longmapsto J_y$ es sobreyectiva; para ello, primero veamos la situación en el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "J_X"'] & Y \arrow[d, "J_Y"] \\ X^{**} & Y^{**} \end{tikzcd}$$

y definimos ahora $\varphi : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ dada por $\varphi(\xi) = (J_Y \circ T \circ J_X^{-1})(\xi)$ $\forall \xi \in Y^{**}$. Si conseguimos probar que φ es continua y sobreyectiva se tendrá que J_Y es sobreyectiva; pero eso equivale a probar que $\varphi \circ J_x$ es sobreyectiva $\forall x \in X$. De hecho, como T es sobreyectiva dispone de inversa por la derecha, sea ésta T^{-1} de donde

$$J_Y(y) = (\varphi \circ J_X \circ T^{-1})(y) \quad \forall y \in Y$$

Veamos que $\varphi \circ J_X \circ T^{-1}$ es sobreyectiva, pero basta probar que φ lo es; para ello, usaremos que $\operatorname{Im}(T)^{\perp} = \ker(T^{*})$ por lo que, como T es sobreyectiva tenemos que $\operatorname{Im}(T)^{\perp} = \{0\}$ obteniendo que T^{*} es inyectiva. Usando esto una vez más tenemos que $\operatorname{Im}(\varphi) = Y^{**}$.

De esta forma tenemos que J_Y es sobreyectiva

Ejercicio 3 (2 puntos). Sean $S : c_0 \to c_0$ y $T : l_1 \to l_1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k) y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \qquad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in l_1$$

Demuestra que S y T son continuos.

Bastará probar que uno de ellos es continuo, concretamente que S lo es pues, como $\ell_1 \cong c_0^{*}$ tendremos la continuidad de T gracias a que se nos dice que

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x \in c_0,\ y \in \ell_1$$

Por tanto, intentemos probar que S es continuo. Para ello, comprobemos que S tiene gráfica cerrada pues, en ese caso, el Teorema de la Gráfica Cerrada nos asegura la continuidad de S.

Consideremos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset c_0$ tal que $\{x_n\} \longrightarrow 0_n$ y $\{Sx_n\} \longrightarrow z \in c_0$; debemos probar que $z = 0$. Sea ahora $y \in \ell_1$ se tiene que $\langle Sx_n, y \rangle = \langle x_n, Ty \rangle$ de donde, como $\{x_n\} \longrightarrow 0_n$ se tiene que $\{\langle x_n, Ty \rangle\} \longrightarrow 0$ de donde, como $Sx_n \longrightarrow z$, $\langle z, y \rangle = 0$ de donde $z = 0$ obteniendo la continuidad de S.