1. Probar que, en cualquier espacio métrico, toda sucesión de Cauchy está acotada.

Supongamos $\{x_n\}$ sucesión de Cauchy $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : p,q \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_p, x_q) < 1$.

Luego $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_p : p < m\} \cup \{x_q : q \geq m\}$ $\Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado

finito luego acotado

que está acotado por ser de Cauchy

2. Probar que todo espacio métrico compacto es completo. $\Rightarrow$ si $\{x_n\}$ Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ convergente.

Supongamos E compacto $\Rightarrow \forall \{x_n\}\ \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \{x_{\varphi(n)}\}$ converge

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

Como E compacto $\Rightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \{x_{\varphi(n)}\}$ converge pero $\{x_{\varphi(n)}\}$ de Cauchy $\Rightarrow \{d(x_{\varphi(n)}, x)\} \to 0$

como $x_{\varphi(n)} \in x_n \Rightarrow$ para algún $\varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N} : p, q \in \varphi(\mathbb{N}) \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$ y $\{d(x_p, x_q)\} \to 0 \Rightarrow$

$\{x_n\}$ converge $\Rightarrow E$ completo.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Probar que definiendo

$$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

se obtiene una distancia en $\mathbb{R}$, equivalente a la usual. ¿Cuando es ρ completa?

¿Cuándo $(\mathbb{R}, \rho)$ completo?

(i) Como son equiv $\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \mid \alpha d(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \beta d(x,y)$

(ii) $(\mathbb{R}, \rho)$ compacto?

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada de Cauchy para $(\mathbb{R}, \rho) \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}\ \{\rho(x_n, z)\}$ está acotada

$\Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ acotado $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}\ \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B(z, r) \Rightarrow \rho(x_n, z) < r$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f(x_n) - f(z)| = \rho(x_n, z) \leq \beta\, d(x_n, z) = \beta |x_n - z|$ $\Rightarrow 0 \leq |f(x_n) - f(z)| \leq \beta |x_n - z|$ luego f no expansiva en $(\mathbb{R}, d)$

p.: f inyectiva

Veamos que $\rho |x_n - z| \to 0 \Rightarrow \{\rho d(x_n,z)\} \to 0$? $\{d(x_n,z)\} \to 0$? Usando la otra desigualdad

$\{x_n\}$ es una sucesión acotada de $(\mathbb{R},d)$ que es de Cauchy $\Rightarrow$ es convergente $\Rightarrow$ Como $\forall z$

$\{d(x_n,z)\}$ acotada $\Rightarrow$ en particular lo es para $x := z$ con x límite de la sucesión $\Rightarrow \{d(x_n,x)\} \to 0$

$\Rightarrow \{\rho(x_n,z)\} \to 0 \Rightarrow \{x_n\}$ convergente.

Luego ρ es completa cuando la sucesión que tomemos de Cauchy en $(\mathbb{R},\rho)$ tmb es de Cauchy en $(\mathbb{R},d)$.

4. ¿Qué se puede afirmar sobre la composición de dos funciones uniformemente continuas?

Que no siempre es uniformemente continua. Daría un contraejemplo pero no lo veo:

$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$?

5. Dado un espacio normado $X \neq \{0\}$, probar que la función $f : X \setminus \{0\} \to X$, dada por

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|} \qquad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

no es uniformemente continua. Sin embargo, probar también que, para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$, la restricción de f al conjunto $\{x \in X : \|x\| \geqslant \delta\}$ es una función lipschitziana.

Para ver lo pedido nos basta con tomar dos sucesiones cuyas distancias tiendan a 0 pero que las distancias entre las imágenes tiendan a separarse.

Sea $\{x_n\}$ la sucesión $\{\frac{-1}{n}\}$ y $\{y_n\}$ la sucesión $\{\frac{1}{n}\} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{n}$ | $\{f(x_n)\} = \{-1\}$

$\{f(y_n)\} = \{1\}$

$\Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) = 2$

Sean $x, y \in X \setminus \overline{B(0,\delta)} \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\|x\|} \geq \frac{2}{\delta}\|x-y\|$

$\frac{2}{\delta} \leq \frac{2}{\|x\|}$ $\quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{x}{\delta} - \frac{y}{\delta} \right\|$

$\Rightarrow$

$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{x}{\delta} - \frac{y}{\delta} \right\| \leq \left\| \frac{x-y}{\delta} \right\| \leq \frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq \frac{2\|x-y\|}{\|x\|} \Rightarrow$ es lipschitziana con constante

$\frac{1}{\delta}$.

6. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E y $f : E \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \text{ínf}\left\{ d(x,a) : a \in A \right\}$ para todo $x \in E$. Probar que f es no expansiva.

Sean $x, y \in E$