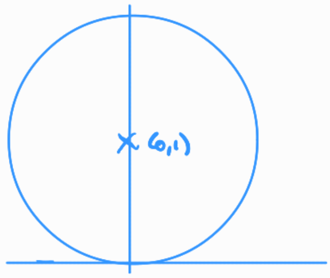
$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x^2 \le 2y - y^2\}$, $f(x,y) = x^2 + y(y^3-4)$ $\forall (x,y)\in A$

$x^2 \le 2y - y^2 \iff x^2+y^2 \le 2y \iff x^2+y^2-2y+1 \le 1 \iff x^2 + (y-1)^2 \le 1$ (1)

$A = \overline{B}((0,1),1)$ $\quad$ A compacto y convexo luego conexo.



$f(A) = [\min f(A), \max f(A)]$ con f continua

$\mathring{A} = B((0,1),1)$ $\quad$ f es parcialmente derivable en $\mathring{A}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{matrix} 2x = 0 \iff \\ 4y^3-4 = 0 \iff \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix}}$

No cojo el $(0,-1)$ pues no está en $\mathring{A}$

$\mathcal{C} = Fr(A) = S((0,1),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2 = 1\}$

Sea $(x,y)\in\mathcal{C} \Rightarrow (y-1)^2 \le 1 \Rightarrow |y-1| \le 1 \iff y\in[0,2]$

$f(x,y) = 2y - y^2 + y(y^3-4) = y^4 - y^2 - 2y$

Los valores de la circunferencia se corresponden con los valores de $y\in[0,2]$

Definimos $\quad h : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad\qquad y \longmapsto y^4 - y^2 - 2y$

$f(\mathcal{C}) = h([0,2])$

Como h es derivable, $h'(y) = 4y^3 - 2y - 2 = 2(2y^3 - y - 1) = 2(y-1)(2y^2+2y+1)$

Como $2y^2+2y+1 \ge 1$ $\forall y\in[0,2] \Rightarrow$ El único punto sospechoso es 1.

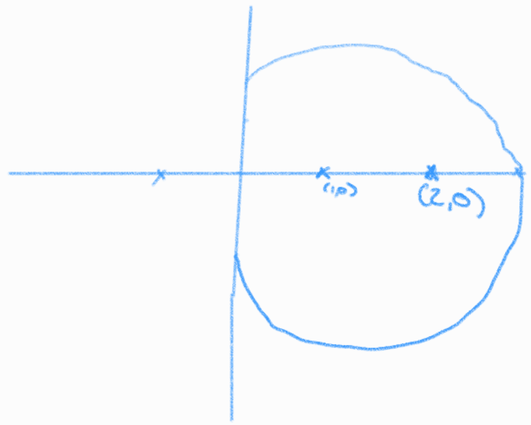
Puntos posibles. $\{0,1,2\}$ Valor del dominio en la función de la frontera (se obtienen despejando de (1))

$h(0) = 0 \to (0,0)$ $\qquad h([0,2]) = [-2,8]$
$h(1) = -2 \to (1,1)$ $\qquad\qquad \shortparallel$
$\qquad\qquad (-1,1)$ $\qquad\qquad f(\mathcal{C})$
$h(2) = 8$
$\quad \hookrightarrow (0,2)$

Son los puntos de la frontera

Puntos del interior $\qquad f(0,1) = -3 \Rightarrow f(A) = [-3,8]$

Tomamos $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$



$f(x,y) = (x-2)^2 + 2y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A} = B \cap H$

$B = \overline{B}((1,0),2)$, $H = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$\mathcal{A}$ es compacto y convexo $\Rightarrow$ conexo

$\mathcal{A}^\circ = B^\circ \cap H^\circ$

$B^\circ = B((1,0),2) \qquad H^\circ = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (2,0) \in \mathcal{A}^\circ$

Como la función es positiva $\forall (x,y) \in \mathcal{A} \Rightarrow$ como $f(2,0) = 0 \Rightarrow \min f(\mathcal{A}) = 0$

La frontera son dos arcos paramétricos

$Fr(\mathcal{A}) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

$\mathcal{C}_1 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 3\}$

$f(\mathcal{C}_1) = \{f(0,y) \mid y^2 \leq 3\} = \{2y^2 + 4 \mid y^2 \leq 3\} \qquad \max f(\mathcal{C}_1) = 10$

$\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0\}$ $\rightarrow$ ¿De donde saca $y^2 \geq 0$?

$(x,y) \in \mathcal{C}_2 \qquad (x-1)^2 \leq 4 \qquad |x-1| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$

$h(x) = (x-2)^2 + 8 - 2(x-1)^{2} = 10 - x^2 \qquad \max f(\mathcal{C}_2) = 10$

$f(\mathcal{A}) = [0, 10]$