Análisis Matemático II

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 2

1. Conocer la definición de convergencia absoluta de una serie de funciones, así como su relación con la convergencia puntual y la uniforme.

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

   a) Convergencia de una serie de potencias, conocido su radio de convergencia

   b) Propiedades de la suma de una serie de potencias

3. Conocer y comprender el test de Weierstrass, incluyendo su demostración.

4. En casos sencillos, saber estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de una serie de funciones. En particular, saber resolver los ejercicios propuestos del tema 2.

1. Sea $A \neq \emptyset$, $\sum_{n\geq 0} f_n$ una serie de funciones $/$ $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $C \subset A$. Diremos que la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolutamente en $C \iff \sum_{n\geq 0} |f_n|$ converge puntualmente en C. Esto equivale a que la serie $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converga.

Para hablar de la relación entre convergencia absoluta y puntual, basta enunciar que:

Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolutamente en $C \Rightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ converge puntualmente en C. Además, se cumple que

$$\left|\sum_{n\geq 0}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n\geq 0}^{\infty} |f_n(x)| \quad \forall x \in C$$

Como ejemplo, usamos la serie alternada $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ que claramente no converge absolutamente pero sí puntualmente en $\mathbb{R}$

Otro ejemplo es la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ que converge absolutamente en $\mathbb{R}$ y por consiguiente converge puntualmente en $\mathbb{R}$ y a 0

Nota: Es conveniente definir la convergencia absoluta y uniforme de series de funciones que viene deducida por la de sucesiones de funciones.

Un resultado útil en la práctica es la condición necesaria de la convergencia uniforme.

- Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente en $C \Rightarrow \{f_n\}$ conv unif a 0 en C

Pese a eso, no hay relación aparente entre la convergencia uniforme y absoluta

a) Antes de nada, estando en la misma situación, diremos que $\sum_{n\geq 0} f_n$ es una serie de potencias si f_n es de la forma $f_n: A \to \mathbb{R} \mid f_n: c_n(x-a)^n$ donde c_n es el n-ésimo coeficiente de la serie y $a\in A$. En este caso, diremos que la serie está centrada en $a \in A$, punto donde siempre converge. Es claro que $f_0 = c_0$

Para definir el radio de convergencia es conveniente recordar que, si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión $\mid \alpha_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \{\alpha_n\} = \lim_{n\to\infty} (\sup\{\alpha_k \mid k \in \mathbb{N}, k\geq n\})$

Recalcamos que si $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ no está mayorado $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \{\alpha_n\} = \infty$

Definimos el radio de convergencia como $R := \frac{1}{L} \in \mathbb{R}^+$ donde $L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ con el siguiente acuerdo

·) Si $L=0 \Rightarrow R=\infty$

·) Si $L=\infty \Rightarrow R=0$

De este término se induce el concepto de intervalo de convergencia (J) que viene dado por $J := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < R\}$, de esta forma

·) $R=\infty \Rightarrow J=\mathbb{R}$

·) $R=0 \Rightarrow J=\{a\} \to$ series inútiles

Como resultados importantes tenemos que

·) Sea $\sum_{n\geq 0} f_n$ serie de potencias $| f_n = c_n (x-a)^n$, R su radio de convergencia y J su intervalo de convergencia. Entonces, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en todo compacto $K \subset J$. Además, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolutamente en J. Por último, $\sum_{n\geq 0} f_n$ no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus (J \cup \{a\})$.

Nota: conviene explicar todos los casos

·) La serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ de potencias sólo converge uniformemente en $\mathbb{R}$ cuando el conjunto de coeficientes no nulos es finito, es decir,

$$\# \{ n \in \mathbb{N} \mid c_n \neq 0 \} < \infty .$$

Como ejemplo tenemos la serie $\sum_{n\geq 0} x^n$ cuyo radio de convergencia es obviamente 1. Por tanto tenemos que converge absolutamente en $]-1,1[$, no converge en $\{-1,1\}$ ni converge unif. en $]-1,1[$

b) Veamos las propiedades de una suma de potencias.

Es evidente que se preserva la continuidad. Todos los términos son funciones continuas y supongamos que $x_0 \in J$ intervalo de convergencia $\Rightarrow$ si K es compacto de $J \mid K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow K$ es entorno de x_0 y como $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en dicho entorno tenemos que, al ser los términos continuos en $x_0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0}^{\infty} f_n$ es continua en x_0

Por otro lado, también se conserva la derivabilidad en todo compacto de J. Como todos los términos son derivables en J tenemos que podemos estudiar la serie de derivadas

$$\sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} n\, c_n (x-a)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, es otra serie de potencias de la cual podemos estudiar la convergencia. Tras un brevísimo desarrollo se llega a que ambas tienen el mismo radio. Por tanto, podemos establecer el siguiente resultado

) Sea $\sum_{n\geq 0} c_n (x-a)^n$ una serie de potencias con radio $R\neq 0$, $J\neq\emptyset$ su intervalo de convergencia. Entonces la suma de la serie, es decir, $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \forall x\in J$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en J. Además, $\forall k\in\mathbb{N}$, la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k}(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R y su suma es la k-ésima derivada de f

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k} (x-a)^n$$

En particular $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$

3. Test de Weierstrass

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de un conjunto A en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{C}$ un subconjunto de A

Supongamos que $\exists \sum_{n\geq 0} M_n$ serie de números reales convergente tales que

$$|f_n(x)|\leq M_n \quad \forall x\in\mathcal{C}, \forall n\in\mathbb{N}$$

Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathcal{C}$

Demostración

Debido al criterio de comparación de series de números reales tenemos que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en $\mathcal{C}$. Fijado $x\in\mathcal{C}$, como $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ converge

Para la convergencia uniforme haremos uso del Criterio de Cauchy

Fijado $\varepsilon>0$, como $\sum_{n\geq 1} M_n$ es de Cauchy $\Rightarrow \exists m\in\mathbb{N} \mid m\leq p<q \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon$

Entonces también $\exists m\in\mathbb{N} \mid m\leq p<q$ y $\forall x\in\mathcal{C}$ tenemos

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |f_k(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon$$

$\square$