7. Sea $(X,Y)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad:

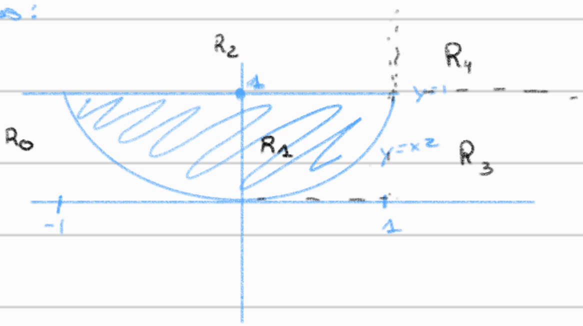
$$f(x,y) = k, \quad x^2 \leq y \leq 1, \quad \text{anulándose fuera del recinto indicado.}$$

Hallar la constante $k$ para que $f$ sea una función de densidad de probabilidad y calcular la función de distribución de probabilidad.

Calcular $P(X \geq Y)$.

Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.

Antes de nada, vamos a ubicar el dominio de $f_{(x,y)}$ en el plano de coordenadas cartesianas:




Para poder trabajar con la función de densidad, debemos determinar $k\in\mathbb{R}$ tal que se cumpla que:

i) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx = 1$

ii) $f_{(x,y)}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y)\in D$, donde $D\subseteq\mathbb{R}^2$ es el dominio de $f_{(x,y)}$

Comprobamos la primera hipótesis.

dominio de f donde no se anula

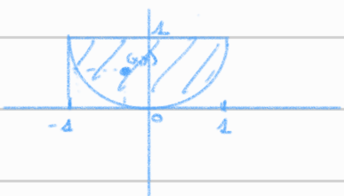
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{x}^{1} k\,dy\,dx = k\int_{-1}^{1}[y]_{x^2}^{1}\,dy\,dx = k\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx =$$

$$= k\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = k\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}k; \quad \boxed{k=\frac{3}{4}}$$

Además, cumple la segunda condición pues $f_{(x,y)}(x,y) = \frac{3}{4} \quad \forall (x,y)\in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2\leq y\leq 1\}$.

Entonces, para $k=\frac{1}{2}$ $f_{(x,y)}$ es función de densidad de probabilidad.

Vamos a estudiar ahora la función de distribución de probabilidad; trabajaremos por regiones obviando $R_0$, región nula, y $R_4$, región de integral igual a 1.

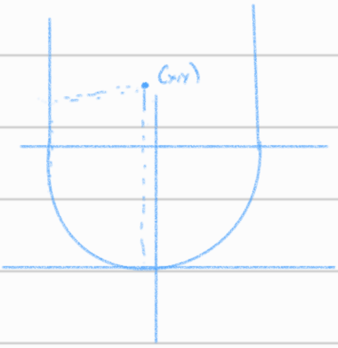



- $R_1$; dado $(x,y)\in\{(a,b)\mid a^2\leq b\leq 1\}$ vemos que la imagen por $F_{(x,y)}:\mathbb{R}^2\longrightarrow[0,1]$ viene dada por

$$F_{(x,y)}(x,y) = \int_{-\sqrt{y}}^{x}\int_{u^2}^{y} f_{(x,y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-\sqrt{y}}^{x}\int_{u^2}^{y}\frac{3}{4}\,dv\,du = \frac{3}{4}\int_{-\sqrt{y}}^{x} y-u^2\,du =$$

$$= \frac{3}{4}\left[uy - \frac{u^3}{3}\right]_{-\sqrt{y}}^{x} = \frac{3}{4}\left(xy - \frac{x^3}{3} - \left(-y\sqrt{y} + \frac{y\sqrt{y}}{3}\right)\right) = \frac{3}{4}\left(xy - \frac{x^3}{3} + y\sqrt{y} - \frac{y\sqrt{y}}{3}\right) =$$

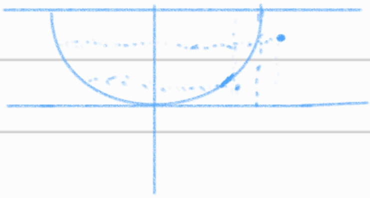
$$= \frac{3}{4}\left(xy - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}y\sqrt{y}\right)$$




- $R_2$, dado $(x,y)\in\{(a,b) \mid -1<x<1 \wedge y\geq 1\}$ vemos que la imagen por $F_{(x,y)}$ viene dada por

$$F_{(x,y)}(x,y) = \int_{-1}^{x}\int_{u^2}^{1}\frac{3}{4}\,dv\,du = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}[v]_{u^2}^{1}\,du = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x} 1-u^2\,du = \frac{3}{4}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{x} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right)$$



- $R_3$; dado $(x,y)\in\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 1,\ x^2\leq y\leq 1\}$ vemos que la imagen por $F_{(x,y)}$ viene dada por

$$F_{(x,y)}(x,y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{u^2}^{y}\frac{3}{4}\,dv\,du = \frac{3}{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}[v]_{u^2}^{y}\,du = \frac{3}{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y-u^2\,du =$$

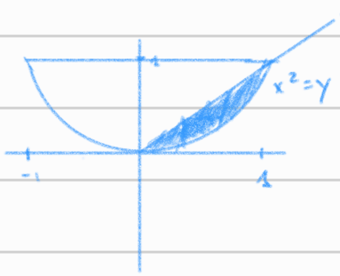
$$= \frac{3}{4}\left[uy - \frac{u^3}{3}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{3}{4}\left(y\sqrt{y} - \frac{y\sqrt{y}}{3} - \left(-y\sqrt{y} + \frac{y\sqrt{y}}{3}\right)\right) = \frac{3}{4}\left(2y\sqrt{y} - \frac{2y\sqrt{y}}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(y\sqrt{y} - \frac{y\sqrt{y}}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2y\sqrt{y}}{3}\right) = y\sqrt{y}$$

Luego la construcción final de $F_{(x,y)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ viene dada por.

$$F_{(x,y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq -\sqrt{y} \text{ ó } y\leq 0 \\ \frac{3}{4}\left(xy - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}y\sqrt{y}\right) & \text{si } -1<x\leq 1 \wedge x^2<y\leq 1 \\ \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right) & \text{si } -1<x\leq 1 \wedge y>1 \\ y\sqrt{y} & \text{si } x>1 \wedge x^2<y\leq 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \wedge y>1 \end{cases}$$

Calculamos ahora la siguiente probabilidad




El dibujo representa $P[X\geq Y]$ y viene dada por la siguiente integral

$$P[X\geq Y] = \int_0^1\int_{u^2}^{u} f_{(x,y)}(u,v)\,dv\,du = \int_0^1\int_{u^2}^{u}\frac{3}{4}\,dv\,du = \frac{3}{4}\int_0^1 u-u^2\,du =$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Calculamos ahora las distribuciones marginales dado la idea será fijar un punto de la variable marginada y desplazar la variable no marginada, es decir:

Dado $x_0 \in ]-1,1[$ vemos que

$$f_X(x_0,y) = \int_{x_0^2}^{1} \frac{3}{4}\, dx = \frac{3}{4}[x]_{x_0^2}^{1} = \frac{3}{4}(1-x_0^2)$$

pero esto es cierto para todo $x \in ]-1,1[$ luego $f_X(x,y) = \frac{3(1-x^2)}{4}$

Dado ahora $y_0 \in ]0,1[$ vemos que.

$$f_Y(x,y_0) = \int_{-\sqrt{y_0}}^{\sqrt{y_0}} \frac{3}{4}\, dy = \frac{3}{4}[y]_{-\sqrt{y_0}}^{\sqrt{y_0}} = \frac{3}{4}(2\sqrt{y_0}) = \frac{3\sqrt{y_0}}{2}$$

pero esto es cierto para todo $y \in ]0,1[$ luego $f_Y(x,y) = \frac{3\sqrt{y}}{2}$

Estudiamos por último las distribuciones condicionadas que vienen dadas por:

$$f_{Y/X=x_0}(x_0,y) = \frac{f_{(X,Y)}(x_0,y)}{f_X(x_0)} \quad , x_0 \in ]-1,1[ \ , y \in ]x_0^2,1[$$

$$f_{X/Y=y_0}(x,y_0) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y_0)}{f_Y(y_0)} \quad , x \in ]-\sqrt{y},\sqrt{y}[ \ , y \in ]0,1[$$

luego sustituyendo en la expresión obtenemos que:

$$f_{Y/X=x_0}(x_0,y) = \frac{3/4}{\frac{3(1-x_0^2)}{4}} = \frac{1}{1-x_0^2} \quad \forall x_0 \in ]-1,1[, \ y \in ]x_0^2,1[$$

$$f_{X/Y=y_0}(x,y_0) = \frac{3/4}{\frac{3\sqrt{y_0}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{y_0}} \quad \forall y_0 \in ]0,1[ \ , x \in ]-\sqrt{y},\sqrt{y}[$$