1 Derivación numérica.

a) Obtén la fórmula progresiva de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ a partir de $f(a)$ y $f(a+h)$, mediante desarrollo de Taylor de $f(a+h)$ en torno a a hasta el cuarto término.

b) Si notamos por $F(a,h)$ la aproximación de $f'(a)$ obtenida anteriormente, expresa el valor exacto de $f'(a)$ en función de $F(a,h)$ y los restantes términos en el desarrollo de Taylor.

c) A partir de una combinación de los valores $F(a,h)$ y $F(a,h/\cancel{2})$ $h/2$ obtén una fórmula con mayor orden de precisión que $F(a,h)$.

d) Aplica las dos fórmulas obtenidas para aproximar $f'(2)$ con $h=0.1$ para la función $f(x)=\ln(x)$, $x\in[1,3]$.

a) Sabemos que $f'(a)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f(x_i)+R(f)$, aplicando el método de Taylor obtenemos:

$$\alpha_0 f(a)=\alpha_0 f(a)$$

$$\alpha_1 f\left(a+\frac{h}{2}\right)=\alpha_1\left[f(a)+f'(a)\frac{h}{2}+\frac{f''(\xi)}{2!}h^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}h^3\right]$$

obteniendo que $\alpha_0 f(a)+\alpha_1 f(a+h)=(\alpha_0+\alpha_1)f(a)+\alpha_1 f'(a)\frac{h}{2}+\alpha_1\frac{f''(\xi)}{2}h^2+\alpha_1\frac{f'''(\xi)}{6}h^3$

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_0=-\frac{1}{h}\\ \alpha_1=\frac{1}{h}\end{cases}$$

Luego $f'(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}h+\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}h^2.$

c) Los coeficientes son los mismos multiplicados por 2 $f'(a)=2\dfrac{f(a+\frac{h}{2})-f(a)}{h}-f''(\xi_1)h$

d) Sea $f(x)=\ln(x)$, sabemos por motivos de comparación que $f'(2)=\frac{1}{2}$

-Por la primera aproximación

$$f'(2)\approx\frac{f(2'1)-f(2)}{0'1}=0'4879016417$$

-Por la segunda aproximación

$$f'(2)\approx 2\,\frac{f(2'05)-f(2)}{0'1}=0'4938522518$$

a) $f'(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-\dfrac{h}{2}f''(a)-\dfrac{h^2}{6}f'''(a)-\dfrac{h^3}{24}f^{iv}(\xi_1)$

b) $F(a,h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $F(a,\frac{h}{2})=\dfrac{2\cdot(f(a+\frac{h}{2})-f(a))}{h}$

$$f'(a)=F(a,\tfrac{h}{2})-\frac{h}{4}f''(a)-\frac{h^2}{4!}f'''(a)-\frac{h^3}{4!\cdot 8}f^{iv}(\xi_1)\rightarrow \text{Desarrollo por Taylor.}$$

c) $f'(a)=2F(a,\frac{h}{2})-F(a,h)-\dfrac{2h^2}{4!}f'''(a)+\dfrac{h^2}{3!}f'''(a)-\dfrac{h^3}{8\cdot 4!}f^{iv}(\xi_1)+\dfrac{h^3}{4!}f^{iv}(\xi_1)$

Podríamos repetirlo tanto como podamos aumentando la exactitud pero trabajaríamos con más nodos.

2 Para evaluar el funcional $L(f) = 2f'(a) - f''(a)$ se propone una fórmula del tipo

$$2f'(a) - f''(a) \approx \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) :$$

a) Imponiendo exactitud en el espacio correspondiente halla la fórmula anterior para que sea de tipo interpolatorio clásico.

b) Obtén una expresión del error de la fórmula en función de unas o varias derivadas de la función de órdenes superiores a dos.

c) Aplica la fórmula obtenida para aproximar $2f'(2) - f''(2)$ con $h = 0.1$ para la función $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1,3]$.

d) Compara el error real obtenido en en el apartado anterior con respecto a una cota deducida de b).

e) Aplica la fórmula para obtener $2f'(0) - f''(0)$ suponiendo que tienes la siguiente tabla de valores de f:

x_i	-0.2	0	0.2	0.4
$f(x_i)$	9	10	9	12

a) Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_2 = \{1, x, x^2\}$ luego:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(f) + R(f)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= \alpha_0 (a-h) + \alpha_1 a + \alpha_2 (a+h) \\ 4a - 2 &= \alpha_0 (a-h)^2 + \alpha_1 a^2 + \alpha_2 (a+h)^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_0 = \frac{2a-2-h}{2h^2-2ah^2} - \frac{1}{h} - \frac{2a-2-h}{4ah-4a^2h}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{h} - \frac{2a-2-h}{2h^2-2ah^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{2a-2-h}{4ah-4a^2h}$$

b) $R(f) = \left[f[a-h, a, a+h, x]\, \pi(x) \right]'(a) = \Big[2 \cdot \big[f[a-h, a, a+h, x, x]\, \cancel{\pi(x)} + f[a-h, a, a+h, x]\, \pi'(x) \big] - \big[f[a-h, a, a+h, x, x, x]\, \cancel{\pi(x)}$

$+ f[a-h, a, a+h, x, x]\, \pi'(x) + f[a-h, a, a+h, x, x]\, \pi'(x) + f[a-h, a, a+h, x]\, \cancel{\pi'(x)} \big] \Big](a) =$

$= 2 \dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}(-h^2) - 2 \dfrac{f^{IV}(\xi_2)}{4!}(-h^2)$ es el error con $\xi_1, \xi_2 \in [\min\{a-h, x\}, \max\{a+h, x\}]$

c) Para $a = 2$, $h = 0'1$ y $f(x) = \ln(x)$ obtenemos:

$\alpha_0 = -102'625$

$\alpha_1 = 105$

$\alpha_2 = -2'375$

Luego $2f'(2) - f''(2) \approx \alpha_0 \cdot f(1'9) + \alpha_1 f(2) + \alpha_2 f(2'1) = 5'14$

d) Error real: $\left| 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 5'14 \right| = 4'2025$

Error teórico: $\dfrac{2}{\xi_1^3 3}(-0'1^2) - \dfrac{(-0'1^2)}{2 \cdot \xi_2^4}$ con ξ_1 y $\xi_2 \in [1'9, 2'1]$

Habría que acotar las derivadas.

3 Considera la fórmula de tipo interpolatorio clásico siguiente

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a+3h)$$

$(x-x_0)(x-x_1) = (x-x_1)+(x-x_0)$

a) Da una expresión del error de dicha fórmula.

b) Úsala para aproximar la derivada $f'(3)$ siendo $f(x) = x^3$ con $h = 0.1$.

a) Sabemos que el error viene dado por $R(f) = f[x_0, \dots, x_n, x]\Pi(x)$, como el funcional es la derivada

tenemos que es $R(f) = f[x_0, \dots, x_n, x, x]\Pi(x) + f[x_0, \dots, x_n, x]\Pi'(x)$

En este caso, $R(f) = \frac{f'''(\mu_1)}{2} \cdot (\cdot + f''(\mu_2) 2h$ con $\mu_1, \mu_2 \in [\min(x_0, x_1, a), \max(x_0, x_1, a)]$

b) Simplemente tomando $x_0 = 2'9$ y $x_1 = 3'3$ obtenemos la aproximación:

$$f'(a) \approx \alpha_0 \cdot 24'389 + \alpha_1 \cdot 35'937$$

donde α_0 y α_1 se pueden determinar mediante los métodos

·) Imponer exactitud en $\{1, x\}$

·) Usar Lagrange para dos nodos dados

•) Utilizar Taylor sabiendo que el error comienza en la segunda derivada.

5 Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f''(0) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f), \qquad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2.$$

a) Sin realizar ningún calculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

b) Determina los valores de α_0, α_1, α_2, x_1 y x_2 para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

c) Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f. ¿Hay alguna otra conclusión que obtengas respecto a los nodos?

d) Aplica el resultado para la función $x\,e^{x^2+1}$.

a) Usando el teorema del máximo grado exactitud $n=2$, $k=2$ $\Rightarrow$ no será exacta para $\mathbb{P}_5 \Rightarrow \mathbb{P}_4$

b) Calculamos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ como queramos. (lo suelo hacer imponiendo exactitud)

Esto no quiero decir que lo vaya a alcanzar.

$$\alpha_0 = \frac{2}{x_1 x_2}, \quad \alpha_1 = \frac{-2}{x_1(x_2-x_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{x_1(x_2-x_1)}$$

Si impongo exactitud es sobre el de 3 luego pienso pa bajo a ver hasta donde pueda

Si hacemos c antes que b ya conozco x_1 y x_2

c) $R(f) = 2\frac{f^{iv}(\xi)}{4!}(x_1 x_2) - 2\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(x_1+x_2)$ Si $x_1 = -x_2 \Rightarrow$ el error solo depende de la derivada iv luego $x_1 = -x_2$

Si hago lo primero de c ya conozco x_1 y x_2

$x_1 \neq 0$ pues 0 ya es un nodo

d) $f''(0) = R(f)$. Hay que hacerlo en general, sólo con $x_1 = -x_2$

6 Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f'(0) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(a) + R(f), \qquad a \neq -1, 1, 2.$$

a) Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

b) Determina los valores de α_0, α_1, α_2, α_3 y a para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

c) Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f.

d) Aplica el resultado para la función $x\,e^{x^2+1}$.

Igual que el anterior. Si no pide el error no lo calculamos.

1. *a*) Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia progresiva en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   b) Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f_2 \in \mathcal{C}^2[a, a+h]$.

   c) Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia centrada en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   d) Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f_2 \in \mathcal{C}^3[a-h, a+h]$.

dos siguientes ejercicios son iguales a este

2. Usando el método de los coeficientes indeterminados deduzca la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f'(a)$ y compruebe que coincide con la fórmula de diferencia centrada en dos nodos.

Se hizo en clase por Lagrange.

3. Obtenga la fórmula de diferencia progresiva en tres nodos para aproximar $f'(a)$ calculando directamente sus coeficientes mediante la base de Lagrange del problema de interpolación unisolvente asociado a dicha fórmula. Halle la expresión del error para esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^4[a, a+2h]$.

Ya se hizo en clase y es hacerse polvo haciendo cuentas

4. Se considera la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_n$ siguiente:

$$f''(c) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Demuestre que si $f \in \mathcal{C}^{n+3}[a,b]$ con $[a,b]$ tal que $x_0, x_1, \cdots, x_n, c \in [a,b]$, entonces

$$R(f) = 2\frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c)$$

siendo $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2 \in \,]\text{mín}\{x_0, c\}, \text{máx}\{x_n, c\}[$ y $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Nosotros sabemos que $R(f) = (f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\Pi(x))''(c)$ luego operando obtenemos que

$$R(f) = 2 \cdot f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x, x]\Pi(c) + 2 f[x_0, \dots, x_n, x, x]\Pi'(c) + f[x_0, \dots, x_n, x]\Pi''(c)$$
$$= 2\frac{f^{(n+3)}(\xi_1)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2 \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_3)}{(n+1)!}\Pi''(c).$$

5. Use el método de los coeficientes indeterminados para obtener la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$. Halle la expresión del error de truncamiento para esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^5[a-2h, a]$.

De nuevo, ya se hizo en clase

6. Use la fórmula de Taylor para obtener, cuando $f \in \mathcal{C}^4[a-h, a+h]$, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f''(a)$ y la expresión de su error. ¿Cuál es el orden de precisión de esta fórmula? ¿Por qué?

Ya se hizo en clase.

7. *a*) Halle la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ de la forma

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a-h_1) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h_2)$$

con $h_1, h_2 > 0$, así como la expresión de su error de truncamiento cuando $f \in \mathcal{C}^4[a-h_1, a+h_2]$. ¿Cuál es el grado de exactitud de esta fórmula? Justifique la respuesta.

b) Use la tabla de valores

x	0.7	1.25	1.50	1.75
$f(x)$	−0.1	0.2	0.3	0.25

para dar valores aproximados de $f'(0.7)$, $f'(1.25)$, $f'(1.5)$ y $f'(1.75)$ utilizando para cada uno de ellos la fórmula de derivación numérica más adecuada. Indique la fórmula usada en cada caso y justifique su uso.

a) Suponemos exactitud en $\mathbb{P}_2$:

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_0 = \frac{-h_2}{h_1(h_1+h_2)} \qquad \alpha_2 = \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}$$

$$1 = \alpha_0 (a-h_1) + \alpha_1 a + \alpha_2 (a+h_2)$$

$$2a = \alpha_0 (a-h_1)^2 + \alpha_1 a^2 + \alpha_2 (a+h_2)^2 \qquad \alpha_1 = \frac{h_2-h_1}{h_1h_2}$$

Por tanto

$$f'(a) \approx \frac{-h_2}{h_1(h_1+h_2)} f(a-h_1) + \frac{h_2-h_1}{h_1h_2} f(a) + \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} f(a+h_2)$$

Calculamos el error:

$$R(f) = L\left(f[a-h_1, a, a+h_1, x]\Pi(x)\right) = f[a-h_1, a, a+h_1, x, x]\overset{0}{\cancel{\Pi(a)}} + f[a-h_1, a, a+h_1, x]\Pi'(a)$$

$$= \frac{f'''(\xi)}{3!}(-h_1h_2) \quad \text{con } \xi \in [a-h_1, a+h_2]$$

Luego el grado de exactitud es 2 pues $R(f)=0 \ \forall f \in \mathbb{P}_2$ pues no se anula para $f(x)=x^3 \ \forall x \in [a-h_1, a+h_2]$

b) Para $f'(0'7)$ usaremos la fórmula progresiva:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(0'7) \approx \frac{f(1'25)-f(0'7)}{0'55} = \frac{0'2+0'1}{0'55} = 0'54$$

Para $f'(1'25)$ vamos a usar la fórmula recién demostrada

$$f'(a) \approx \frac{-h_2}{h_1(h_1+h_2)} f(a-h_1) + \frac{h_2-h_1}{h_1 h_2} f(a) + \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} f(a+h_2)$$

$$f'(1'25) \approx \frac{-0'25}{0'55(0'25+0'55)} \cdot f(0'7) + \frac{0'25-0'55}{0'25 \cdot 0'55} f(1'25) + \frac{0'55}{0'25(0'55+0'25)} f(1'5) = 0'445$$

Para $f'(1'5)$ usaremos la fórmula centrada de dos nodos:

$$f'(1'5) \simeq \frac{f(1'75)-f(1'25)}{1'75-1'25} = \frac{0'25-0'2}{0'5} = 0'1$$

Para $f'(1'75)$ usaremos la fórmula regresiva con dos nodos.

$$f'(a) \simeq \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

$$f'(1'75) \simeq \frac{f(1'75)-f(1'5)}{0'25} = \frac{0'25-0'3}{0'25} = -0'2$$

8. Halle una cota del valor absoluto del error que se comete al aproximar la derivada de la función $f(x) = \cos^2 x$ en $x = 0.8$ mediante la correspondiente fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que usa los valores de f en los puntos 0.6, 0.8 y 1.

Calculamos el error:

$$\mathcal{E}(f) = f(x)-p(x) \Rightarrow R(f) = L(f(x)-p(x)) = L[f[0'6, 0'8, 1, x]\pi(x)]$$

$$= f[0'6, 0'8, 1, x, x]\cancel{\pi(x)}^{\,0} + f[0'6, 0'8, 1, x]\pi'(x)$$

$$= \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (-0'04) = \frac{-4\operatorname{sen}(2\xi)}{3!} \cdot 0'04$$

Luego $$|R(f)| = \left|\frac{-4\operatorname{sen}(2\xi)}{3!} \cdot 0'04\right| = \frac{4 \cdot 0'04}{3!} |\operatorname{sen} 2\xi| \leq \frac{4 \cdot 0'04}{3!} = 0'026$$