Tema 4. Superficies Compactas

1. Superficies topológicas

Definición

Diremos que un espacio topológico X es localmente euclídeo si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto $x \in U \subset X$ homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición

Diremos que S es una superficie si S es un espacio topológico tal que $\forall x \in S$ $\exists U \subset S$, $x \in U$ abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Además, pediremos que S sea Hausdorff y IIAN (la topología admite una base numerable)

Ejemplos

(i) $\mathbb{R}^2$ y S^2 son superficies

(ii) Cualquier abierto de una superficie es una superficie. En particular, las bolas abiertas de $\mathbb{R}^2$ son superficies.

(iii) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq r\} = \overline{B}(0,r)$. No es una superficie, la idea es quitar un punto y tratar grupos fundamentales.

(iv) $S^1 \times \mathbb{R}$ o bien $S^1 \times S^1$ son ejemplos de superficies. Como $\mathbb{R}^2$ es el recubridor universal $\Rightarrow$ son localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^2$.

(v) La unión disjunta de superficies es superficie. La intersección de superficies no.

Observación

Si X es un e.t. localmente euclídeo entonces cumple las propiedades locales de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, es IAN o es localmente simplemente conexo; en particular, X ha de tener recubridor universal

Definición

Sea S una superficie topológica y $D \subset S$ un abierto. Decimos que D es un disco regular en S si $\exists D' \supset \overline{D}$ abierto de S y $\exists h: D' \longrightarrow \mathbb{D}$ homeomorfismo tal que $h(D) = r\mathbb{D}$ con $r<1$.

Si cojo otro abierto homeomorfo a $\mathbb{D}$ cuyo homeomorfismo me lleva D a un disco más pequeño $r\mathbb{D}$ $r<1$.

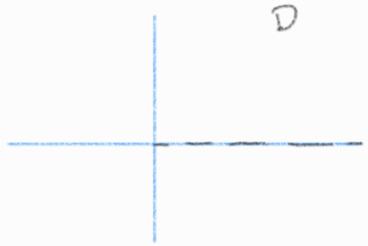
Ejemplos

(i) En S^2 consideramos $D = \{(x,y,z) \in S^2 : z < r\}$ con $-1 < r < 1$ es un disco regular con la proyección estereográfica.

(ii) En el ejemplo anterior, tomando $r=1$ no puede ser un disco regular.

(iii) $D_1 = B((0,0),r) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un disco regular trivial en $\mathbb{R}^2$. Pero no lo es en $S = D_1$. Porque no hay más abiertos que lo contengan.

(iv) En $\mathbb{R}^2$, si tomamos $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x>0\}$



Si existiese D' $\Rightarrow$ $D' \setminus D$ debe ir a  que es conexo y sería homeomorfo a $D' \setminus D$ que debe ser conexo y por tanto arcoconexo y, de hecho, simplemente conexo entonces no sería el mismo grupo fundamental. Esta es la idea pero no es formal.

Lema

Sea $p_0 \in S$ con S una superficie topológica. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_{p_0}$ existe D un disco regular que contiene a p_0 y está contenido en $\mathcal{U}$. En particular, los discos regulares forman una base de la topología.

-Demostración-

Como S es superficie $\Rightarrow$ $\exists V \subset S$ abierto con $p_0 \in V$ homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$, sea dicho homeomorfismo φ. Ahora bien, $\mathcal{U} \cap V$ es entorno de p_0 $\Rightarrow$ $\varphi(\mathcal{U} \cap V)$ es entorno de $\varphi(p_0)$. Entonces, $\exists\, r_0, r_1 > 0 : r_0 < r_1$ y $B(\varphi(p_0), r_1) \subset \varphi(\mathcal{U} \cap V)$. Cabe destacar que $\overline{B}(\varphi(p_0), r_0) \subset B(\varphi(p_0), r_1)$. Entonces, basta tomar como $D = \varphi^{-1}(\overline{B}(\varphi(p_0), r_0))$ y $D' = \varphi^{-1}(B(\varphi(p_0), r_1))$ y ya es rutinario probar que D es un disco regular usando una transformación afín.

Definición

Sean S_1 y S_2 dos superficies conexas disjuntas. Tomamos $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ dos discos regulares y consideramos un homeomorfismo $h: \underbrace{Fr(D_1)}_{\approx S^1} \longrightarrow \underbrace{Fr(D_2)}_{\approx S^1}$. Sobre el espacio topológico $\mathcal{Z} = (S_1 \setminus D_1) \cup (S_2 \setminus D_2)$

Se puede tomar siempre por el lema y por definición de disco regular.

consideramos la relación de equivalencia

$$x_1 \sim x_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \vee \\ \{x_1, x_2\} = \{z, h(z)\} \text{ con } z \in Fr(D_1) \end{cases}$$

Si se pegan en la transformación.

Denotamos por $S_1 \# S_2$ al espacio cociente de $\mathcal{Z}/_\sim$

Teorema

El espacio topológico $S_1 \# S_2$ es una superficie conexa que, salvo homeomorfismos, no depende de la elección de D_1, D_2 regulares ni del homeomorfismo h.

Lo más importante

Al espacio topológico $S_1 \# S_2$ se le llama suma conexa de S_1 con S_2

Observación

(i) $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$

(ii) Si S_1 es una superficie cualquiera y $S_2 = \mathbb{S}^2 \Rightarrow S_1 \# S_2 \approx S_1$ Es como un grupo

(iii) Si tenemos $n \in \mathbb{N}$ toros $(n \geq 2)$ podemos definir $\mathbb{T}_n$ = suma conexa de los n toros.

que llamaremos n-toro o esfera con n asas.

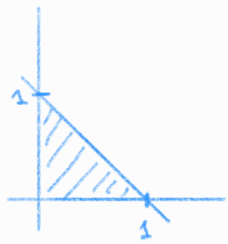
(iv) La suma conexa de $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, planos proyectivos lo llamaremos

n-plano proyectivo: $\underset{\overset{\uparrow}{\overset{n}{\#}\mathbb{RP}^2}}{\mathbb{RP}^2_n} \neq \underset{\overset{\uparrow}{\dim n}}{\mathbb{RP}^n}$

2. Presentaciones Poligonales de superficies

Definición

Consideramos el triángulo:



$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$

Cualquier deformación de un triángulo

Decimos que un e.t. $\mathbb{X}$ es un triángulo topológico si existe un homeomorfismo $h: T \longrightarrow \mathbb{X}$. En tal caso, llamaremos vértices en $\mathbb{X}$ a la imagen mediante h de los vértices de T y aristas de $\mathbb{X}$ a la imagen mediante h de las aristas del triángulo.

Teorema de Radó

Toda superficie compacta puede ser triangulada, es decir, la superficie puede verse como una unión finita de triángulos topológicos de forma que dos triángulos distintos, o bien son disjuntos o bien solo se intersecan en un vértice o solo en una arista común completamente.

-Idea-

La idea del teorema será que toda superficie compacta puede ser reconstruida pegando un número finito de triángulos a través de sus aristas.

Definición

Llamaremos presentación poligonal de una superficie compacta a una expresión de la forma

$$\boxed{P = \{a_1, \dots, a_n ; w_1, \dots, w_m\},\ n, m \in \mathbb{N},\ n > 1 \text{ es obligatorio}}$$

para poder tener, al menos, un triángulo

donde a_i son símbolos y w_i son expresiones del siguiente tipo

$$w_i = a_{j_1}^{\varepsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\varepsilon_{j_k}}$$

donde $k \geq 3$ (es decir, hay al menos 3 símbolos en la expresión w_i) y cada $\varepsilon_{j_p} \in \{1, -1\}$ y, además, el número de veces que aparece cada símbolo en el total de los w_i es 2

Ejemplo:

(i) $P = \{a, b;\ aba^{-1}b^{-1}\}$

(ii) $P = \{a, b, c;\ aab,\ bcc^{-1}\}$

d aparece 3 veces

(iii) $P = \{a, b, c, d;\ aab,\ bcd,\ cdd^{-1}\}$ no es una presentación poligonal.

A cada presentación poligonal P le asociaremos un espacio topológico que vamos a denotar por $|P|$ y que llamaremos la realización geométrica de la presentación poligonal. Su construcción es la siguiente:

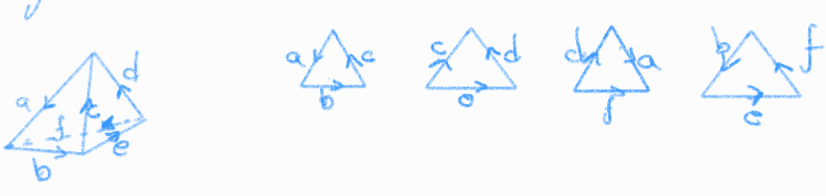
(i) Para cada w_i consideramos un polígono P_i (regular) con número de aristas igual al número de símbolos de w_i. Los P_i serán disjuntos entre sí.

(ii) Para cada P_i asociado a un w_i elegimos un lado cualquiera y, en sentido contrario a las agujas del reloj, nombramos cada lado de P_i con el nombre del símbolo correspondiente en w_i.

Además, a cada lado le daremos la orientación contraria a las agujas del reloj si el exponente es $+1$ y la opuesta si el exponente es -1.

(iii) En el e.t. dado por la unión de todos los polígonos P_i consideramos la relación de equivalencia que identifica los lados con igual nombre mediante el único homeomorfismo (aplicación afín) que lleva un lado en otro sin cambiar el sentido de las flechas. Pegamos lados con el mismo sentido

(iv) Llamamos $|P|$ al espacio cociente dado por la unión de los polígonos bajo la relación de equivalencia anterior.



$P = \{a,b,c,d,e,f ; abc, c^{-1}ed, a^{-1}d^{-1}f, bef\}$ da la esfera.

Proposición

El espacio topológico $|P|$ asociado a una presentación poligonal P es una superficie compacta. (Posiblemente no conexa) La realización geométrica de toda presentación poligonal es una superficie compacta.

Corolario

Toda superficie compacta debe tener una presentación poligonal y, recíprocamente, toda presentación poligonal da una superficie compacta. $\Rightarrow$) Radó
$\Leftarrow$) Proposición

Como una misma superficie puede tener muchas presentaciones poligonales; nuestro objetivo será, dada una presentación poligonal P, llegar a otra P' reconocible que represente a la misma superficie.

3. Transformaciones elementales

Dada una presentación poligonal, P, vamos a ver una serie de transformaciones que, aunque cambian la presentación, no cambian la superficie (salvo homeomorfismo)

(i) Renombrar: Dado un símbolo a_{i_0} en P podemos cambiarlo de nombre por otro distinto b_{i_0} que no esté utilizado. También, podemos cambiar el exponente de un símbolo, en todas sus apariciones.

(ii) Subdividir: Podemos cambiar un símbolo a_{i_0} en P por dos símbolos $b_1 b_2$ y $a_{i_0}^{-1}$ por $b_2^{-1}b_1^{-1}$, donde b_1 y b_2 no se han usado anteriormente.

(iii) Consolidar: Si en las expresiones aparecen $a_{i_1}a_{i_2}$ y/o $a_{i_2}^{-1}a_{i_1}^{-1}$ (siempre por parejas y concatenados, piensa en juntar bordes). Entonces, podemos cambiar $a_{i_1}a_{i_2}$ por b_0 y $a_{i_2}^{-1}a_{i_1}^{-1}$ por b_0^{-1} siempre que b_0 no se haya usado. Subdividir^{-1}

Solo se puede hacer cuando las expresiones a reducir tengan más de 4 símbolos, porque necesitamos formar triángulos, al menos.

(iv) Reflejar: Dada una expresión $w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \text{—} a_{i_p}^{\varepsilon_p}$ la podemos cambiar por $w_i' = a_{i_p}^{-\varepsilon_p} \text{—} a_{i_1}^{-\varepsilon_1}$

(v) Rotar: Dada una expresión $w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \text{—} a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \text{—} a_{i_p}^{\varepsilon_p}$ la podemos cambiar por $w_i' = a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \text{—} a_{i_p}^{\varepsilon_p} a_{i_1}^{\varepsilon_1} \text{—} a_{i_k}^{\varepsilon_k}$

(vi) Cortar: Dada una expresión $w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} — a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} — a_{i_p}^{\varepsilon_p}$ podemos sustituirla por las dos expresiones

$$w_i' = a_{i_1}^{\varepsilon_1} — a_{i_k}^{\varepsilon_k} b, \quad w_i'' = b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} — a_{i_p}^{\varepsilon_p}$$

Para poder cortar, cada una de las expresiones resultantes deben tener 3 símbolos, al menos.

(vii) Pegar: Dadas dos expresiones de la forma Cortar^{-1}

$$w_i' = a_{i_1}^{\varepsilon_1} — a_{i_k}^{\varepsilon_k} b, \quad w_i'' = b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} — a_{i_p}^{\varepsilon_p}$$

las podemos sustituir por

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} — a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} — a_{i_p}^{\varepsilon_p}$$

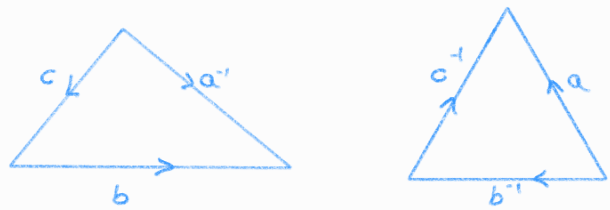
(viii) Desdoblar: Dada una expresión $w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} — a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} — a_{i_p}^{\varepsilon_p}$ le podemos añadir un símbolo nuevo, b, cambiando la expresión anterior por:

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} — a_{i_k}^{\varepsilon_k} b\, b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} — a_{i_p}^{\varepsilon_p}$$

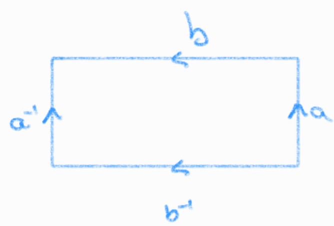
(ix) Doblar: Dada una expresión $w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} — a_{i_k}^{\varepsilon_k} b\, b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} — a_{i_p}^{\varepsilon_p}$, podemos eliminar el símbolo b en todas sus apariciones siempre y cuando queden al menos 3 símbolos. Desdoblar^{-1}

Ejemplos:

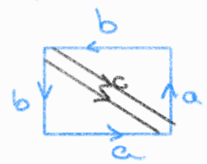
(i) $P = \{a, b, c;\ a^{-1}cb, ac^{-1}b^{-1}\}$



$a^{-1}cb, ac^{-1}b^{-1} \xrightarrow{\text{rotar}} ba^{-1}c, c^{-1}b^{-1}a \longrightarrow ba^{-1}b^{-1}a \longrightarrow aba^{-1}b^{-1} \equiv$ toro

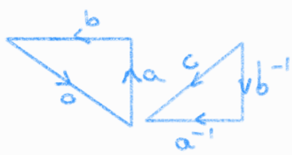


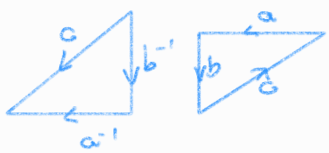
(ii) $P = \{a, b;\ aabb\}$



$aabb \longrightarrow abba \longrightarrow abc, c^{-1}ba \rightarrow abc, a^{-1}b^{-1}c \rightarrow$

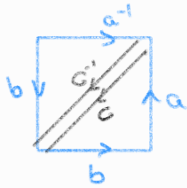
$\longrightarrow cab, b^{-1}ca^{-1} \longrightarrow caca^{-1}$





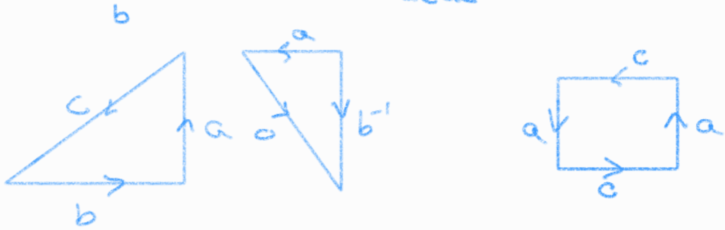
Botella de Klein

(iii) $P = \{a, b;\ aa^{-1}bb\}$



$aa^{-1}bb \longrightarrow baa^{-1}b \longrightarrow bac,\ c^{-1}a^{-1}b \longrightarrow bac,\ b^{-1}ac \rightarrow acb,\ b^{-1}bc$

$\longrightarrow acac$



Plano proyectivo

4. Clasificación de las superficies compactas

Proposición

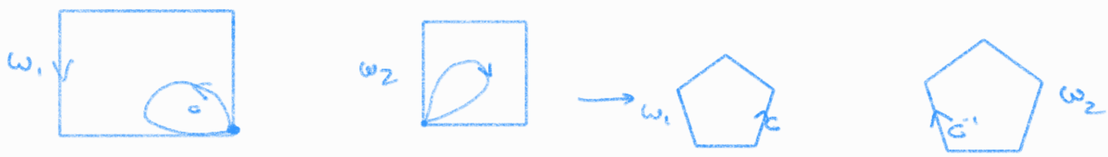
Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas dadas, respectivamente, como $|P_1|$ y $|P_2|$ para las presentaciones

$$P_1 = \{a_1, \ldots, a_n;\ w_1\} \quad , \quad P_2 = \{b_1, \ldots, b_n;\ w_2\}$$

donde cada presentación tiene una única expresión (esto dice que la superficie es conexa). Entonces $S_1 \# S_2$ tiene como presentación:

$$\boxed{P = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n;\ w_1 w_2\}}$$

-Demostración por dibujo-



Corolario

Una presentación de:

(i) La esfera : $aa^{-1}bb^{-1}$

(ii) El plano proyectivo : $aa^{-1}bb$ — Banda de Möbius

(iii) El n-toro (o esfera de n asas) : $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$

(iv) El n-plano proyectivo $\mathbb{RP}^2_n$: $a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_n a_n$

- Demostración -

Los casos (i), (ii) y (iii) son claros. Veamos (iv) usando la proposición anterior.

$$\mathbb{RP}^2_n = \mathbb{RP}^2 \# \overset{(n)}{\cdots} \# \mathbb{RP}^2$$

Usamos que $\mathbb{RP}^2$ tiene por presentación: $acac$ (ejemplo iii) $\Rightarrow$ Por la proposición anterior una presentación del n-plano proyectivo es: $\underbrace{b_1c_1}_{a_1}\underbrace{b_1c_1}_{a_1}\underbrace{b_2c_2}_{a_2}\underbrace{b_2c_2}_{a_2} \dots b_nc_nb_nc_n$

Observación

Del ejemplo ii se deduce que $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ es la botella de Klein.

Algoritmo de determinación de $|P|$

Vamos a partir de una presentación poligonal P y vamos a ver un algoritmo que nos dirá que la superficie compacta, en caso de ser conexa, será homeomorfa a alguna de las siguientes: $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}_n$, $\mathbb{RP}^2_n$.

1. El primer paso del algoritmo es diferenciar las componentes conexas de la siguiente forma. Tomamos la primera expresión w_1, a ésta le pegamos cualquier otra expresión w_i que tenga un símbolo común, par a $i \neq 1$. Entonces, queda una nueva expresión w_1' a la que le repetimos el proceso hasta ya no poder repetirlo más, obteniendo una expresión donde todos sus símbolos tienen a su pareja en esa expresión.

   Esta expresión final dará, en el cociente, una componente conexa de $|P|$. Si en una expresión aparecen todos será una sup. conexa

A partir de aquí, sólo nos centraremos en estudiar presentaciones poligonales de superficies conexas, es decir, con una única expresión.

2. Ahora, de nuestra única expresión, doblamos tantas veces como se pueda; es decir, eliminamos los símbolos que aparezcan adyacentes con ellos mismos y con diferente exponente.

   Esto lo podremos hacer siempre y cuando, al eliminar dichos símbolos adyacentes con ellos mismos y distinto exponente, queden al menos 4 símbolos.

   Si no pudiésemos quitar aa^{-1} de w, es porque la expresión es alguna de las siguientes:

   $$\overset{\mathbb{RP}^2}{aa^{-1}bb} \quad \text{ó} \quad \overset{\mathbb{S}^2}{aa^{-1}bb^{-1}}$$

   Entonces $|P| = \mathbb{RP}^2$ ó $|P| = \mathbb{S}^2$.

3. Si nuestra expresión es de la forma $w = y_1 a y_2 a$ donde el símbolo a aparece las dos veces con el mismo exponente y y_1, y_2 son expresiones. Entonces,

podrá cambiar w por $w'=y_1y_2^{-1}aa$ donde, si $y_2=b_1^{\varepsilon_1}\ldots b_k^{\varepsilon_k}$ entonces $y_2^{-1}=b_k^{-\varepsilon_k}\ldots b_1^{-\varepsilon_1}$

-Demostración-

$$y_1ay_2a \longrightarrow y_1ac,\ c^{-1}y_2a \longrightarrow cy_1a,\ c^{-1}y_2a \longrightarrow cy_2a,\ a^{-1}y_2^{-1}c \longrightarrow cy_1y_2^{-1}c$$
$$\longrightarrow y_1y_2^{-1}cc \longrightarrow y_1y_2^{-1}aa \qquad \square$$

En una cantidad finita de pasos, la expresión inicial pasa a ser de la forma $\boxed{w=y\,a_1a_1a_2a_2\ldots a_ka_k}$ donde en y aparecen símbolos repetidos 2 veces con distinto exponente.

En caso de ser necesario, aplicamos el paso 2 el número de veces que sea posible.

Si tenemos $w=ya_1a_1a_2a_2\ldots a_ka_k$, podemos hacer algunas transformaciones elementales para cambiar a una expresión $w'=y'a_1a_1\ldots a_ka_k$ tal que todos los vértices del polígono asociado a w' son el mismo punto en el cociente (en P_1)

-Demostración-

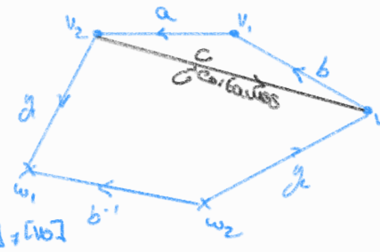
Supongamos que existen vértices en el polígono asociado a w que no son el mismo punto en el cociente.

Elegimos v_0 un vértice cualquiera

$[v_0]$ tiene, al menos, dos vértices pues en caso contrario tendríamos una contradicción.

Vamos a ver que podemos hacer transformaciones elementales para quitarle un vértice a $[v_0]$. De esta forma, en una cantidad finita de pasos $[v_0]$ sólo tendrá un representante y así podremos eliminarlo con 2).

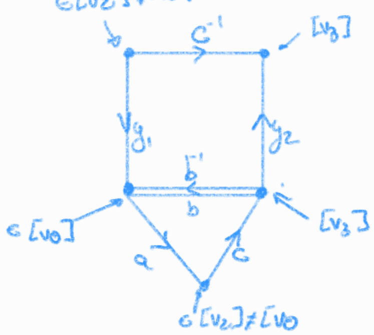
Tomamos un lado a cuyo vértice inicial está en $[v_0]$ y el final no



$v_1\in[v_0]$

y pegamos b y b^{-1}

$\in[v_2]\neq[v_0]$



$w_1\in[v_0]$, $w_2\in[v_3]$

En este proceso, para el nuevo polígono, hay un vértice menos en $[v_0]$.

Con todo esto tendríamos la siguiente situación:

$$w = y a_1 a_1 \text{ --- } a_n a_n$$

donde sólo hay un vértice en el cociente.

Si $y = \emptyset$ tendríamos que $|P| \cong \mathbb{R}P^2_n$

Si $y \neq \emptyset$, en y sólo aparecen aristas con un exponente y su opuesto y, además, de forma no consecutiva. Debe ocurrir entonces que

$$y = \ldots b \ldots c \ldots b^{-1} \ldots c^{-1}$$

4. Si tenemos una expresión del tipo

$$w = y_1 b y_2 c y_3 b^{-1} y_4 c^{-1} y_5 a_1 a_1 \text{ --- } a_n a_n$$

entonces con transformaciones elementales podemos llegar a la expresión:

$$w' = y b c b^{-1} c^{-1} a_1 a_1 \text{ --- } a_n a_n$$

En un proceso finito nos quedará

$$w'' = b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \ldots b_p c_p b_p^{-1} c_p^{-1} a_1 a_1 \text{ --- } a_n a_n$$

5. Las expresiones del tipo $y b c b^{-1} c^{-1} a a$ las podemos cambiar por transformaciones elementales por

$$y' a a b b c c$$

Como conclusión final: la expresión inicial la podemos alterar haciendo transformaciones elementales hasta llegar a una del siguiente tipo

(i) $a a^{-1} b b^{-1}$ = esfera

(ii) $a a^{-1} b b \equiv \mathbb{R}P^2$

(iii) $a_1 a_1 \text{ --- } a_n a_n \equiv \mathbb{R}P^2_n$

(iv) $b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \ldots b_p c_p b_p^{-1} c_p^{-1} \equiv p$-toro

Corolario

Si S es una superficie compacta y conexa, entonces S es homeomorfa a alguna de las siguientes superficies:

(i) $\mathbb{S}^2$

(ii) n-toro

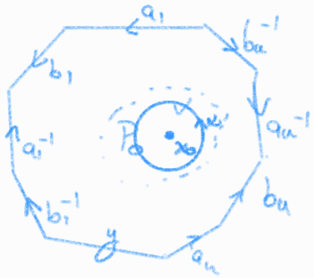
(iii) n-plano proyectivo

Los grupos fundamentales de estas figuras son:

i) $\pi_1(S^2)\cong\{0\}$

ii) $\pi_1(\mathbb{RP}^2)\cong\mathbb{Z}_2$

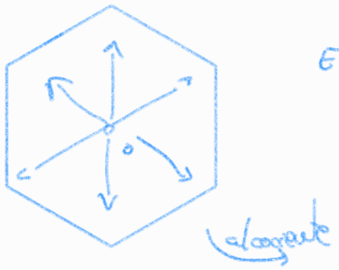
iii) $\pi_1(n\text{-toro})$: Tenemos un polígono de $4n$ lados



n-toro es P_0 bajo la relación de equivalencia R que identifica a los lados con igual nombre

$T_n = P_0/R \Rightarrow U = T_n \setminus \{x_0\}$ y V = disco abierto centrado en x_0 que no toque el borde

¿$\pi_1(U)$?



El borde es retracto de deformación de U.

$2n$ circunferencias que se tocan en un punto

Entonces $\pi_1(U)\cong F(a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_n,b_n)$

$\pi_1(U\cap V)\cong\mathbb{Z}$ generado por $[\alpha]$.

Por Seifert van-Kampen

$$\boxed{\pi_1(T_n)\cong \frac{\pi_1(U)}{\underbrace{\langle i_{1*}(\alpha)\rangle_N}_{\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}\rangle_N}}}$$

aquí no hay conmutatividad si $n\neq 1$.

iv) $\mathbb{RP}^2_n$

El argumento es idéntico al otro

$\pi_1(U) = \pi_1(\text{borde de } U)\cong$

$\pi_1(V)\cong\{0\}$

$\pi_1(U\cap V)\cong\mathbb{Z}$

$$\boxed{\pi_1(U\cup V)\cong \frac{F(a_1,\dots,a_n)}{\langle i_{1*}([\alpha])\rangle_N} \quad \langle i_{1*}([\alpha])\rangle_N = \langle a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n\rangle_N}$$

Recordemos que dado un grupo $\mathcal{G}$ cualquiera, se define el conmutador de $\mathcal{G}$ por

$$[\mathcal{G}:\mathcal{G}] = \langle \{ghg^{-1}h^{-1} : g,h\in \mathcal{G}\}\rangle_N$$ El subgrupo normal generado por los elementos que conmutan

El grupo abelianizado de $\mathcal{G}$ es

$$\boxed{\mathcal{G}/_{[\mathcal{G}:\mathcal{G}]}}$$

En el caso de un espacio topológico X, el abelianizado de $\pi_1(X)$ (suponiendo que es arcoconexo) se suele llamar primer grupo de homología de X y se denota por $H_1(X)$ (o bien $H_1(X,\mathbb{Z})$)

Corolario

El primer grupo de homología de las superficies compactas es:

i) $H_1(\mathbb{S}^2)\cong\{0\}$

ii) $H_1(\mathbb{RP}^2)\cong\mathbb{Z}_2$

iii) $H_1(\mathbb{T}_n)\cong \mathbb{Z}^{2n} = \mathbb{Z}\times\overset{2n)}{\cdots}\times\mathbb{Z}$

iv) $H_1(\mathbb{RP}^2_n)\cong \mathbb{Z}\times\overset{(n-1)}{\cdots}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ Tiene que haber una cinta de Möbius

Corolario

Si S es una superficie conexa y compacta, entonces S es homeomorfa a una, y solo una, de las siguientes superficies: $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}_n$ ó $\mathbb{RP}^2_n$ con $n\geq 1$.

5. Característica de Euler y orientabilidad

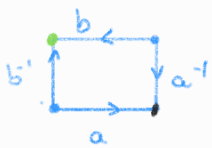
Definición

Dada una presentación poligonal P, denotamos por V, A y C al número de vértices, número de aristas y número de caras (o número de polígonos) de P; donde V y A están vistos en $|P|$. Definimos la característica de Euler de P como

$$\chi(P) = V-A+C$$

Ejemplos

i) $P=\{a,b;\ aa^{-1}bb^{-1}\}$



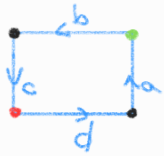
$C=1$

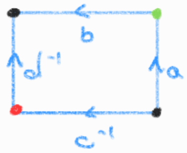
$A=2$

$V=3$

$\chi(P) = 1-2+3=2$

ii) $P=\{a,b,c,d;\ abcd, abd^{-1}c^{-1}\}$



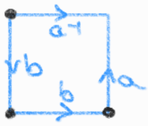


$C=2$

$A=4$ $\qquad \chi(P) = 3-4+2 = 1$

$V=3$

iii) $P = \{a, b;\ a a^{-1} b b\}$



$C=1$

$V=2$ $\qquad \chi(P) = 1$

$A=2$

iv) $P = \{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n;\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}\}$

Hazlo como los otros

$\chi(P) = 2-2n = 2(1-n)$

v) $P = \{a_1, \dots, a_n;\ a_1 a_1 \dots a_n a_n\}$

$\chi(P) = 2-n$

Proposición

La característica de Euler de una presentación poligonal es invariante por transformaciones elementales

Corolario

Dada una superficie compacta cualquiera, la característica de Euler de cualquier presentación suya es la misma.

Definición

Dada una superficie compacta, definimos su característica de Euler como la característica de Euler de cualquier presentación suya. La denotaremos por $\chi(S)$.

$\chi(\mathbb{S}^2) = 2$

$\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$

$\chi(\mathbb{T}_n) = 2-2n$ $(\leq 0), n \geq 1$

$\chi(\mathbb{RP}^2_n) = 2-n$ $, n \geq 2$

Definición

Decimos que una presentación poligonal P es no orientada si en alguna de sus expresiones aparece dos veces un símbolo con el mismo exponente.

Debe ser en la misma expresión y con el mismo exponente.

Decimos que una superficie compacta es no orientable cuando alguna de sus presentaciones es no orientada.

Proposición

Sea S una superficie compacta y conexa. Entonces son equivalentes:

i) S es orientable

ii) S tiene una presentación poligonal de una única expresión que es orientada.

iii) Cualquier presentación poligonal de S de una única expresión es orientada.

Por tanto, la característica de Euler junto a su orientabilidad ya sí determina unívocamente a la superficie conexa y compacta.