1. Resuelve el problema

$$x' = \frac{x}{t} + (\frac{x}{t})^2, \ \ x(1) = 1.$$

¿En qué intervalo está definida la solución?

$s=1$ $\boxed{y(1)=1}$

$x' = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2$ $\varphi = \begin{cases} t=s \\ y = \frac{x}{t} \end{cases}$ $\Rightarrow x' = y't + y \Rightarrow y's + y = y + y^2 \Leftrightarrow y' = \frac{y^2}{s}$

Ec. variables sep. con sol. constante $y=0$ $\Rightarrow$ $\ln(s) + c = \frac{-1}{y} \Leftrightarrow -\frac{1}{\ln(s)+c} = y(s)$

$y(1) = 1 \Rightarrow$ $\frac{-1}{c} = 1 \Leftrightarrow c = -1$

Por tanto $\frac{x(t)}{t} = \frac{-1}{\ln(t) - 1} \Leftrightarrow x(t) = \frac{-t}{\ln(t)-1}$ $t>0$

2. La ecuación diferencial

$$x' = \frac{2x+t+1}{2x+t+7}$$

pertenece a una de las familias estudiadas en clase. ¿De qué familia se trata? Encuentra un cambio de variable que la transforme en una ecuación de variables separadas.[1]

Es una ecuación reducible a homogénea con $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ tomamos $\varphi = \begin{cases} s = t \\ y = 2x + t \end{cases}$

$y' = 2x' + 1 \Leftrightarrow x' = \frac{y-1}{2}$

$\frac{y'-1}{2} = \frac{y+1}{y+7} \Leftrightarrow y' = \frac{2y+2}{y+7} - 1 = \frac{2y+2-y-7}{y+7} = \frac{y-5}{y+7}$

Ese es el cambio de variable

5. Se considera la ecuación $x' = a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)$, donde $a_0, a_1, a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. En el dominio $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$ se efectúa el cambio de variable $s = -t$, $y = \frac{1}{x}$. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes a_0, a_1 y a_2 para que la ecuación permanezca invariante por este cambio de variable?

Aplicamos el cambio de variable: $x = \frac{1}{y} \Rightarrow x' = \frac{-y'}{y^2}$

$$\frac{-y'}{y^2} = a_2(-s)\frac{1}{y^2} + a_1(-s)\frac{1}{y} + a_0(-s)$$

$$-y' = a_2(-s) + a_1(-s)y + a_0(-s)y^2$$

$$y' = -a_0(-s)y^2 - a_1(-s)y - a_2(-s)$$

Luego claramente se debe cumplir $\begin{cases} a_0(s) = -a_2(-s) \\ a_1(s) = -a_1(-s) \end{cases}$ para que permanezca invariante la ecuación

Al menos son las únicas que he encontrado