1. Sea $X = \mathbb{S}^2 \cup \{x_0\}$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^2$. En X se considera la topología tal que los entornos de los puntos de $\mathbb{S}^2$ son los usuales, y los de x_0 son de la forma $(V \setminus \{N\}) \cup \{x_0\}$, donde $N = (0,0,1)$ y V es un entorno de N en $\mathbb{S}^2$. Demuestra que X es localmente euclídeo, es IIAN, pero no es T_2.

Veamos que no es T_2; por definición, un espacio topológico es T_2 si para cada dos puntos $x, y \in X$ existen entornos $V_x \in N_x$, $V_y \in N_y$ tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$. Basta tomar $x = x_0$ e $y = N$ para ver que, necesariamente $V_{x_0} \cap V_N \neq \emptyset$ $\forall V_{x_0} \in N_{x_0}, V_N \in N_N$.

Veamos ahora que es localmente euclídeo, como $\mathbb{S}^2$ lo es basta ver que para el punto $x = x_0$ se cumple que $\exists\, \mathcal{U} \in N_{x_0}$ abierto tal que $\mathcal{U}$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Basta tomar el entorno, dado $0<\varepsilon<1$ $(B_\varepsilon \setminus N) \cup \{x_0\}$ donde $B_\varepsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid (x,y,0) \in B(0,\varepsilon), z \in (0,1)\}$ que, tomando el homeomorfismo $f : (B_\varepsilon \setminus N) \cup \{x_0\} \longrightarrow B(0,\varepsilon)$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y,z) \neq x_0 \\ (0,0) & \text{si } (x,y,z) = x_0 \end{cases}$$

Queda por ver que es IIAN; para ello, debemos construir una base numerable. Como $\mathbb{S}^2$ con la topología usual sí es IIAN, sea β_1 su base numerable, basta ver que

$$\beta = \beta_1 \cup \{(\mathcal{U}_u \setminus N) \cup \{x_0\} : \mathcal{U}_u \in \beta_1 \wedge N \in \mathcal{U}_u\}$$

es una base, lo cual es bien sabido (que da pereza).

2. Consideremos el espacio producto $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, donde en $\mathbb{R}^2$ se considera la topología usual y en $\mathbb{R}$ la topología discreta. Demuestra que X es localmente euclídeo, es $T2$, pero no es IIAN.

Veamos que es localmente euclídeo, sea $((x,y),z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, basta tomar $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ como el entorno abierto que buscamos y como función, la proyección a $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, veamos que no es IIAN; supongamos que lo fuera entonces existiría una base numerable β de forma que, si consideramos su proyección sobre la tercera componente, obtenemos una base numerable de $\mathbb{R}$ con la topología discreta, lo cual es una contradicción.

3. Prueba que los siguientes espacios topológicos no son superficies:

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

b) $\mathbb{R}^n$ con $n \neq 2$.

c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.

¿Es la unión o intersección de dos superficies en $\mathbb{R}^3$ una superficie?

a) Veamos que ningún entorno abierto del punto $(0,0,0)$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $\exists\, \mathcal{U} \in N_{(0,0,0)} \subset S$ tal que $\exists h : \mathcal{U} \longrightarrow h(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfismo; en ese caso,

$$h|_{\mathcal{U} \setminus (0,0,0)} : \mathcal{U} \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow h(\mathcal{U}) \setminus h(0,0,0)$$

sería homeomorfismo. Ahora bien, como $(0,0,0) \in \mathcal{U}^\circ$, necesariamente $h(0,0,0) \in h(\mathcal{U})^\circ$ ($\mathcal{U}$ es abierto, esto es trivial). Sin embargo, $h(\mathcal{U}) \setminus h(0,0,0)$ es conexo y $\mathcal{U} \setminus \{(0,0,0)\}$ no lo es, pues

$$\mathcal{U} \setminus \{(0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in S \mid z > 0\} \cup \{(x,y,z) \in S \mid z < 0\}$$

b) Distinguimos casos:

i) Para $n=1$, es imposible que un abierto de $\mathbb{R}$ sea homeomorfo a uno de $\mathbb{R}^2$.

ii) Para $n>2$, como ningún abierto de $\mathbb{R}^n, n>2$, es homeomorfo a uno de $\mathbb{R}^2$ tenemos lo pedido.

c) Supongamos que lo fuera, en ese caso, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists \mathcal{U}\in\mathcal{N}_{(x,0)}$ abierto de la forma $V\cap S$ con $V\in\mathcal{N}_{(x,0)}\subset\mathbb{R}^2$ abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Como $\mathcal{U}$ es convexo y sea $h:\mathcal{U}\longrightarrow h(\mathcal{U})$ el homeomorfismo, $h(\mathcal{U})$ es convexo. Ahora bien, $h|_{\mathcal{U}\setminus\{(x,0)\}}:\mathcal{U}\setminus(x,0)\longrightarrow h(\mathcal{U})\setminus h((x,0))$

es un homeomorfismo, pero $\Pi_1(\mathcal{U}\setminus\{(x,0)\})\cong\{0\}$ y $\Pi_1(h(\mathcal{U})\setminus h((x,0)))\cong\mathbb{Z}$.

La respuesta a la pregunta es, en general no, para el caso de la intersección basta tomar $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ y S^2. Para el caso de la unión podemos tomar $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ y $\{0\}\times\mathbb{R}^2$, que en $(0,0,0)$ no es localmente euclídea.

4. Sea (R,p) un recubridor de una superficie topológica S. Si R es IIAN, demuestra que R es una superficie topológica.

Sea $x_0\in S$, como p es recubridora sabemos que $\exists\,\mathcal{U}_{x_0}\subset S$ abierto regularmente recubierto por $\{\Delta_i\}_{i\in I}\subset R$ tal que $p|_{\Delta_i}:\Delta_i\longrightarrow\mathcal{U}_{x_0}$ es homeomorfismo. Ahora bien, sea $V_{x_0}\in\mathcal{N}_{x_0}$ abierto tal que $\exists h:V_{x_0}\longrightarrow h(V_{x_0})\subset\mathbb{R}^2$ homeomorfismo, por ser S superficie.

Si consideramos ahora $\mathcal{U}_{x_0}\cap V_{x_0}$ tenemos que $p|_{\Delta_i}:p^{-1}(\mathcal{U}_{x_0}\cap V_{x_0})\cap\Delta_i\longrightarrow\mathcal{U}_{x_0}\cap V_{x_0}$ es homeomorfismo y $h:V_{x_0}\cap\mathcal{U}_{x_0}\longrightarrow h(V_{x_0}\cap\mathcal{U}_{x_0})$ es homeomorfismo.

Sea ahora $z\in R$, consideramos $p(z)=x_0\in S$, podemos por ser sobreyectiva (es lioso pero por no escribir la misma construcción), basta considerar $p|_{\Delta_i}^{-1}(\mathcal{U}_{x_0}\cap V_{x_0})\cap\Delta_i$ y el homeomorfismo $p|_{\Delta_i}\cap h$ para ver que es localmente euclídea a $\mathbb{R}^2$.

Se debe hacer con aps rec. $\longrightarrow$ Ahora bien, como S es T_2 y R es localmente homeomorfo a S tenemos que R es T_2. Y por tanto, una superficie.

6. Prueba que la característica de Euler de la suma conexa de dos superficies compactas es igual a la suma de sus características de Euler menos dos.

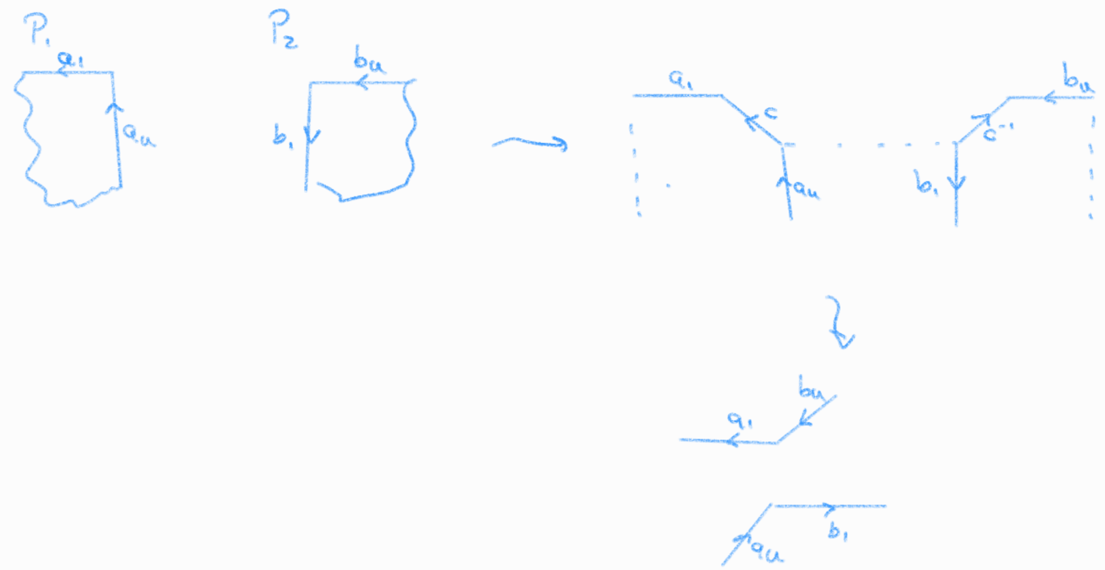
Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas, P_1 y P_2 algunas de sus respectivas presentaciones; podemos suponer que son

$$P_1 = \{a_1, \dots, a_n; w_1, \dots, w_m\} \wedge P_2 = \{b_1, \dots, b_p; t_1, \dots, t_k\} \quad n,p>1,\ m,k\geq 1$$

con $\chi(P_1)$ y $\chi(P_2)$ sus características de Euler. Ahora bien, como la suma conexa está definida por superficies conexas, necesariamente $m=k=1$.

$$P_1 = \{a_1, \dots, a_n; w\} \wedge P_2 = \{b_1, \dots, b_p; t\} \quad n,p\geq 1$$

Por definición $S_1 \# S_2$ tiene por presentación a $P=\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_p; wt\}$, donde el número de caras de $S_1 \# S_2$ es 1, el número de lados es la suma de los lados de S_1 y de S_2 y el número de vértices se reduce en 1 al añadir un lado y pegar



7. Calcula la característica de Euler de la suma conexa de un plano proyectivo y n toros.

Nos piden $\chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}_n)$; pero por el ejercicio anterior $\chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}_n) = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}_n) - 2 = 1 - 2n$

5. Sean S una superficie y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Definimos el grafo de f como el espacio topológico

$$G(f) = \{(x,t) \in S \times \mathbb{R} :\ t = f(x)\}$$

con la topología inducida por la topología producto en $S \times \mathbb{R}$. Prueba que $G(f)$ es una superficie, que además es compacta si y solo si lo es S.

Para ver que $G_r(f)$ es una superficie vamos a probarlo por su definición:

i) $(G_r, T_S \times T_u)$ es Hausdorff; pero $\mathbb{R}$ es T_2 y S es superficie luego T_S es T_2.

ii) Veamos que es IIAN; como S es superficie, tenemos que es IIAN; de donde $\exists \beta_S \subset T_S$ numerable. Además, $\mathbb{R}$ es IIAN luego $\exists \beta_u \subset T_u$ numerable, por tanto, basta considerar la base $\beta_S \times \beta_u \subset T_S \times T_u$ como topología producto.

iii) Sea $x \in S$, consideramos el punto $(x, f(x)) \in \mathbb{R}$. Como S es superficie tenemos que $\exists U_x \in \mathcal{N}_x$ abierto y $h : U_x \longrightarrow h(U_x)$ homeomorfismo con $h(U_x) \subset \mathbb{R}^2$. Basta considerar el entorno

$U_x \times \{f(x)\}$ que es abierto como preimagen de un abierto por una aplicación continua; séase la proyección a S.

Por tanto, tenemos que $Gr(f)$ es una superficie. Veamos ahora la doble implicación:

$\Rightarrow]$ Supongamos que $Gr(f)$ es compacto; en particular, $Gr(f) = S \times f(S)$, tomando la aplicación continua

$$p: Gr(f) \longrightarrow S$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

tenemos que $p(Gr(f)) = S$ es compacto al ser imagen de un compacto por una aplicación continua.

$\Leftarrow]$ Supongamos ahora que S es compacto; como $Gr(f)$ es un subespacio cerrado de $S \times \mathbb{R}$ basta ver que $f(S)$ es acotado; pero f es continua luego $f(S)$ es compacto y en particular $S \times f(S) = Gr(f)$ es compacto por el Teorema de Tychonoff.

8. Estudia la orientabilidad de $S_1 \# S_2$ a partir de la de S_1 y de S_2.

Sean S_1 y S_2 dos superficies y $P_1 = \{a_1, \dots, a_n; \omega\}$, $P_2 = \{b_1, \dots, b_k; t\}$ sus presentaciones poligonales respectivamente. Recordemos que, una presentación poligonal es no orientada cuando incluye una cinta de Möbius. Distinguimos casos:

i) Si S_1 y S_2 son orientables, es claro que $S_1 \# S_2$ es orientable

ii) Si S_1 es no orientable y S_2 sí lo es, es claro que $S_1 \# S_2$ es no orientable

iii) Si S_1 y S_2 son no orientables; en ese caso $\exists u_0 \in \{1, \dots, n\}$, $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ de forma que

$$\omega = a_{i_{01}} \cdots a_{u_0} a_{u_0} \cdots a_{i_{0g}}$$
$$t = b_{j_{01}} \cdots b_{k_0} b_{k_0} \cdots b_{j_{0k}}$$

Entonces, una presentación poligonal de $S_1 \# S_2$ es

$$P = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; \omega t\}$$

donde $\omega t = a_{i_{01}} \cdots a_{u_0} a_{u_0} \cdots a_{i_{0g}} b_{j_{01}} \cdots b_{k_0} b_{k_0} \cdots b_{j_{0k}}$ luego no orientable.

8. Estudia la orientabilidad de $S_1 \# S_2$ a partir de la de S_1 y de S_2.

9. Para cada una de las siguientes presentaciones poligonales de superficies compactas, calcula la característica de Euler y determina a cuál de las superficies modelo es homeomorfa:

a) $\langle a, b, c; abacb^{-1}c^{-1} \rangle$.

b) $\langle a, b, c; abca^{-1}b^{-1}c^{-1} \rangle$.

c) $\langle a, b, c, d; abcdca^{-1}bd^{-1} \rangle$.

d) $\langle a, b, c, d, e; aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}ed^{-1}e^{-1} \rangle$.

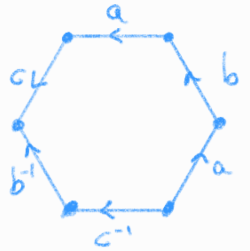
e) $\langle a, b, c, d, e, f; abcadb^{-1}efce^{-1}df^{-1} \rangle$.

f) $\langle a, b, c, d, e, f; abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa \rangle$.

g) $\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o;$
$abc, bde, dfg, fhi, haj, c^{-1}kl, e^{-1}mn, g^{-1}ok^{-1}, i^{-1}l^{-1}m^{-1}, j^{-1}n^{-1}o^{-1} \rangle$.

h) $\langle a, b, c, d, e, f; abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa \rangle$.

a)

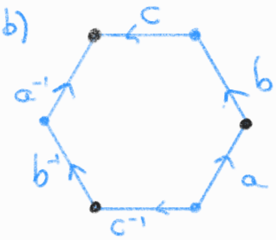


$C = 1$

$A = 3$ $\Rightarrow \chi(S) = V - A + C = 1 - 3 + 1 = -1 \Rightarrow \mathbb{RP}^2_3$

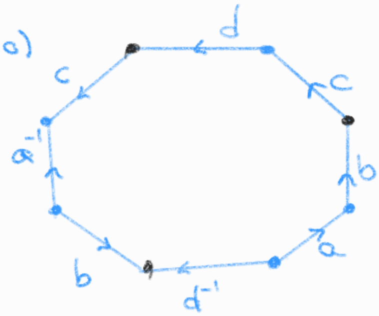
$V = 1$

b)



$\chi(S) = 1 - 3 + 2 = 0$. Como es orientable tenemos que la superficie es $\mathbb{T}_1$

c)



$\chi(S) = 1 - 4 + 2 = -1 \Rightarrow \mathbb{RP}^2_3$

Siguiendo este proceso:

d: $\mathbb{T}_2$

e: $\mathbb{T}_2$

f: $\mathbb{S}^2$

g: me equivoqué al hacerlo

$h = f$

10. Clasifica la suma conexa de las superficies representadas en los apartados a) y b) del ejercicio anterior.

Por el ejercicio 6 sabemos que $\chi(S_{a)} \# S_{b)}) = \chi(S_{a)}) + \chi(S_{b)}) - 2 = -1 + 0 - 2 = -3$ luego es $\mathbb{RP}^2_5$.

12. Identifica, salvo homeomorfismos, las superficies compactas y conexas con característica de Euler igual a -2.

Como $\chi(\mathbb{S}^2) > 0$ y $\chi(\mathbb{RP}^2) > 0$ podemos descartarlo. Por tanto, distinguimos casos:

i) Si es orientable $\Rightarrow S \approx \mathbb{T}_n$ con $n = 2$.

ii) Si no es orientable $\Rightarrow S \approx \mathbb{RP}^2_n$ con $n = 4$.

13. Sea S una superficie compacta y conexa. Probar que $\chi(S) \geq -2$ si y solo si S tiene una presentación poligonal $\mathcal{P} = \langle A; W \rangle$ donde A tiene exactamente 4 elementos.

$\Leftarrow$] Supongamos que $A = 4$ y $\chi(S) < -2$ en ese caso:

$$-2 > \chi(S) = 1 - 4 + V$$

de donde $V < -2 + 4 - 1 = 1$ lo cual es una contradicción.

$\Rightarrow$) Distinguimos casos:

i) Si $S \approx S^2$ una presentación suya es $aa^{-1}c, c^{-1}bb^{-1} \rightsquigarrow aa^{-1}de, e^{-1}d^{-1}bb^{-1}$

ii) Si $S \approx \mathbb{RP}^2$ una presentación suya es $aa^{-1}c, cbb \rightsquigarrow aa^{-1}de, de\,cbb$

iii) Si $S \approx \mathbb{T}_n$, distinguimos casos:

$n=1$; una presentación suya es $abc, c^{-1}a^{-1}b^{-1} \rightsquigarrow abde, e^{-1}d^{-1}a^{-1}b^{-1}$

$n=2$; una presentación suya es $a_1 b_1 a^{-1} b^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$

iv) Si $S \approx \mathbb{RP}^2_n$, distinguimos casos:

$n=2 \longrightarrow aabb \rightsquigarrow aac, c^{-1}bb \rightsquigarrow aade, e^{-1}d^{-1}bb$

$n=3 \longrightarrow aabbcc \rightsquigarrow aabd, d^{-1}bcc$

$n=4 \longrightarrow aabbccdd$

14. Discute de forma razonada si cada par de las siguientes superficies compactas y conexas son homeomorfas entre sí:

a) S_1 tiene por presentación poligonal a $\langle a,b,c,d; abcdad^{-1}cb^{-1}\rangle$.

b) S_2 cumple $\chi(S_2) \geq 0$ y $\pi_1(S_2)$ no es abeliano.

c) S_3 cumple que $\pi_1(S_3)$ es isomorfo al grupo $F(a,b,c)/\langle acbcba^{-1}\rangle_N$.

Para ello, veremos a qué superficie compacta son homeomorfas.

a) $\chi(S_1) = 1-4+2 = -1 \Rightarrow S_1 \approx \mathbb{RP}^2_3$

b) Las opciones son las siguientes:

i) $S_2 \approx S^2$, pero $\pi_1(S^2) \cong \mathbb{Z}$, abeliano

ii) $S_2 \approx \mathbb{T}_1$, pero $\pi_1(\mathbb{T}_1) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, abeliano

iii) $S_2 \approx \mathbb{RP}^2$, lo cual ocurre por descarte.

c) Por tanto, una presentación poligonal de S_3 es $\{a,b,c; acbcba^{-1}\}$ y su característica de Euler es $\chi(S_3) = 1$ luego $S_3 \approx \mathbb{RP}^2$

De donde concluimos que $S_2 \approx S_3$.

15. Obten la presentación poligonal canónica de la superficie S_1 del ejercicio anterior efectuando para ello las transformaciones elementales que sean necesarias.

Para ello, buscaremos aplicar el algoritmo de determinación de PI:

i) Este paso ya está hecho.

ii) Este paso también está hecho.

iii) $abcdad^{-1}cb^{-1} \rightsquigarrow d^{-1}cb^{-1}abcda \rightsquigarrow d^{-1}cb^{-1}d^{-1}c^{-1}b^{-1}aa \rightsquigarrow c^{-1}b^{-1}aad^{-1}cb^{-1}d^{-1} \rightsquigarrow c^{-1}b^{-1}aabc^{-1}d^{-1}d^{-1}$

$\rightsquigarrow d^{-1}d^{-1}c^{-1}b^{-1}aabc^{-1} \rightsquigarrow d^{-1}d^{-1}b^{-1}a^{-1}a^{-1}b\,c^{-1}c^{-1} \rightsquigarrow c^{-1}c^{-1}d^{-1}d^{-1}b^{-1}aab$

$\rightsquigarrow b^{-1}baa\,c^{-1}c^{-1}d^{-1}d^{-1} \rightsquigarrow a_1a_1\,a_2a_2a_3a_3$

16. Sea S la superficie compacta y conexa que admite una presentación poligonal de la forma

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}c - da^{-1}ebc^{-1} - \rangle,$$

donde cada guión $-$ está ocupado por un único símbolo. Completa los guiones correspondientes para que S sea homeomorfa a:

a) $\mathbb{T}_2$.

b) $\mathbb{RP}^2_4$.

c) La superficie compacta con grupo fundamental abelianizado isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^4$.

a) Estudiamos el caso de $\mathbb{T}_2$ sabiendo que es orientable; de donde descartamos los casos:

i) $\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}cdda^{-1}ebc^{-1}e\rangle$

ii) $\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}cdda^{-1}ebc^{-1}e^{-1}\rangle$

iii) $\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}ceda^{-1}ebc^{-1}d\rangle$

iv) $\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}ce^{-1}da^{-1}ebc^{-1}d\rangle$

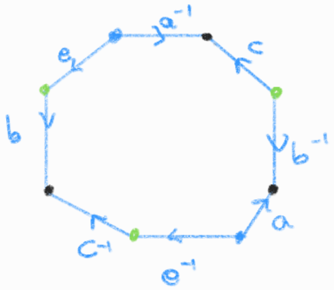
v) $\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}cd^{-1}da^{-1}ebc^{-1}e\rangle$

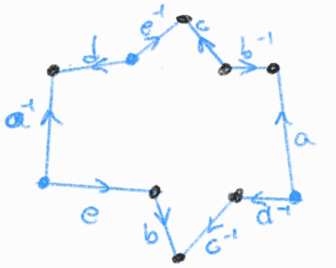
vi) $\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}ceda^{-1}ebc^{-1}d^{-1}\rangle$

Son posibles los siguientes casos:

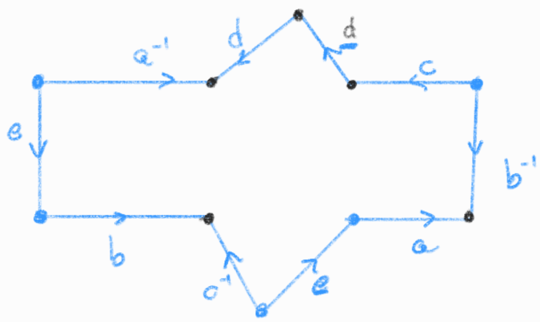
i) $\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}cd^{-1}da^{-1}ebc^{-1}e^{-1}\rangle \Rightarrow \chi(\cdot) = 3-4+1 = 0 \rightsquigarrow \mathbb{T}$

ii) $\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}ce^{-1}da^{-1}ebc^{-1}d^{-1}\rangle \Rightarrow \chi(\cdot) = 2-5+1 = -2 \rightsquigarrow \mathbb{T}_2$





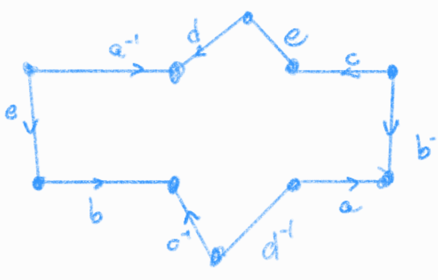
b) Tenemos $n=4$; sabemos que $C=1$, $A=5$ y $V=2$. Además, debe ser no orientada pues S es no orientable; en cuyo caso



Por tanto una presentación válida para esta superficie es:

$\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}cdda^{-1}ebc^{-1}e\rangle$

c) Puesto que nos están dando el primer grupo de homología deducimos que $S \cong \mathbb{RP}^2_5$ de donde $\chi(S) = 2-5 = -3$; como $C=1$ y $A=5$ tenemos que $V=1$.



y por tanto, una posible presentación es

$\langle a,b,c,d,e;\ ab^{-1}ceda^{-1}ebc^{-1}d^{-1}\rangle$