Ejercicio 2. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal y acotada para la que existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \geqslant c\|x\|_X, \qquad \forall x \in X$$

Prueba que T es compacto si y solo si $\dim X < \infty$.

Procedemos por doble implicación:

$\Leftarrow$) Supongamos que $\dim X < \infty$; en ese caso, como T es lineal tenemos que $\dim \operatorname{Im}(T) < \infty$ de donde T es un operador lineal de rango finito, lo que nos asegura que T sea compacto.

$\Rightarrow$) Sea $\{x_n\} \subset \overline{B(0,1)}$ una sucesión de puntos de X; como T es un operador lineal y compacto sabemos que $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parcial tal que $\{Tx_{\sigma(n)}\}$ es convergente por lo que, en particular será de Cauchy.

Fijado $\varepsilon > 0$ se tiene que $\exists m \in \mathbb{N}$: si $p, q \geq m$ entonces $\|Tx_{\sigma(p)} - Tx_{\sigma(q)}\| < \varepsilon$. Ahora bien, como T es lineal tenemos que $\varepsilon > \|T(x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)})\| \geq c\|x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)}\|$ por lo que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es también de Cauchy, como X es Banach, esta será convergente; de hecho, es fácil ver que $\{x_{\sigma(n)}\} \longrightarrow \frac{x}{c}$ con $x = \lim_{n \to \infty} \{c\, x_{\sigma(n)}\}$. Además, como $\overline{B(0,1)}$ es cerrado tenemos que $\frac{x}{c} \in \overline{B(0,1)}$

Por tanto, hemos probado que toda sucesión de puntos de $\overline{B(0,1)}$ admite una parcial convergente, es decir, hemos probado que $\overline{B(0,1)}$ es secuencialmente compacto, como X es un espacio métrico en particular se tiene que es compacto. Por tanto, como $\dim X < \infty \Leftrightarrow \overline{B(0,1)}$ es compacto se tiene lo pedido.

Ejercicio 1. Para $\alpha \in \,]0, 1]$, sea

$$X = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y } \sup_{x \neq y \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

con

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \qquad \forall f \in X$$

Prueba que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Antes de nada, debemos probar que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado; para ello, veamos que $\|\cdot\|$ es una norma.

i) No degeneración; supongamos que $\|f\| = 0$ entonces $0 = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0,1]} \frac{|f(x) + f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ como ambos sumandos son no negativos ambos deben de ser 0 de donde $f = 0$ por ser $\|\cdot\|_\infty$ una norma.

ii) Desigualdad triangular; sean $f, g \in X$ veamos que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$\|f+g\| = \|f+g\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0,1]} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

$$= \|f\| + \|g\|$$

iii) Homogeneidad por homotecias; sea $f \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\|\lambda f\| = \|\lambda f_\infty\| + \sup \frac{|(\lambda f)(x) + (\lambda f)(y)|}{|x-y|^\alpha} = \lambda \|f\|_\infty + \sup \frac{|\lambda(f(x) - f(y))|}{|x-y|^\alpha}$$

$$= |\lambda| \|f\|_\infty + |\lambda| \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} = |\lambda| \|f\|_\infty$$

Para ver que dicho espacio es Banach, tomaremos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{X}$ una sucesión de Cauchy y trataremos de ver que es convergente. Para evitar arrastrar notación liosa notaremos por $[f]_\alpha$ cociente incremental que aparece en la norma $\|\cdot\|$.

Comenzamos probando que $\{f_n\}$ converge en $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$; como $\{f_n\}$ es de Cauchy en $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ tenemos que $\{\|f_n - f_m\|\} \longrightarrow 0$ para $n,m \in \mathbb{N}$ de donde se deduce que $\{f_n\}$ es de Cauchy en $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ pues

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f_m\|_\infty + [f_n - f_m]_\alpha \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

de donde se tiene que $\{\|f_n - f_m\|_\infty\} \longrightarrow 0$. En consecuencia como $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach se tiene que $\exists f \in C([0,1])$ tal que $\{f_n\} \xrightarrow[\infty]{} f$.

Buscamos ahora probar que $f \in \mathfrak{X}$, es decir, debemos probar que $[f]_\alpha < \infty$; para ello, lo que vamos a probar es que $\{[f_n - f]_\alpha\} \longrightarrow 0$. Veamos esto, como $\{f_n\}$ es de Cauchy en $\mathfrak{X}$ tenemos que, dado $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que, si $p,q \geq N$ se cumple que

$$\frac{|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))|}{|x-y|^\alpha} \leq [f_p - f_q]_\alpha \leq \|f_p - f_q\| < \varepsilon$$

de donde la sucesión $[f_n]_\alpha$ es de Cauchy; usando ahora que $f_m(t) \longrightarrow f(t)$ por lo probado anteriormente tenemos que, tomando límite cuando $m \to \infty$ se cumple que

$$\frac{|(f_p(x) - f(x)) - (f_p(y) - f(y))|}{|x-y|^\alpha} \leq [f_p - f]_\alpha < \varepsilon$$

de donde tenemos ya que $f \in \mathfrak{X}$ y que

$$\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_\infty + [f_n - f]_\alpha \leq 2\varepsilon$$

probando así la convergencia de $\{f_n\}$ en la norma $\|\cdot\|$.

Ejercicio 3. Sea X un espacio de Banach reflexivo y $f : [0,1] \to X$ una función continua. Prueba que existe $x \in X$ tal que

$$\int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds = \langle \varphi, x \rangle, \qquad \forall \varphi \in X^*$$

Para probar esa existencia definimos

$$x : \mathfrak{X}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto \langle x, \varphi \rangle = \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds$$

vemos que es lineal en virtud de la linealidad de la integral y de φ. Además, si consideramos la norma de $\mathfrak{X}$ tenemos que

$$|\langle x, \varphi \rangle| = \left| \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds \right| \leq \int_0^1 |\langle \varphi, f(s) \rangle| \, ds \leq \int_0^1 \|\varphi\| \|f(s)\| \, ds = \|\varphi\| \int_0^1 \|f(s)\| \, ds$$
$$\leq \|\varphi\| \int_0^1 \max\{\|f(s)\| : s \in [0,1]\} = \|\varphi\| \max\{\|f(s)\| : s \in [0,1]\}$$

por lo que x es continuo, de donde $x \in \mathfrak{X}^{**}$. Como $\mathfrak{X}$ es reflexivo tenemos que $\exists x \in \mathfrak{X}$ tal que $J_x = x$ y en particular tenemos que, para cada $x \in \mathfrak{X}$ se tiene que

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle J_x, \varphi \rangle = \langle x, \varphi \rangle = \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds$$