1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$ y uniformemente en cada compacto $K \subset]-1,1[$, pero no converge uniformemente en $]-1,1[$.

Probemos la segunda afirmación:

Supongamos que sí converge uniformemente en $]-1,1[$. Si convergiera uniformemente $\Rightarrow$

$\left\{\frac{x^n}{1-x^n}\right\}$ debe converger unif a 0 en $]-1,1[$.

Para probar lo contrario, tomaremos $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ y veamos si $\{f(x_n)\} \to 0$

$$\{f_n(x_n)\} = \left\{ \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \right\} \longrightarrow \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} \neq 0$$

Sabemos que $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\} \to \frac{1}{e}$

Por tanto no converge unif en $]-1,1[$

Veamos la primera afirmación.

Sea $K \subset]-1,1[$ compacto $\Rightarrow \exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ \ |\rho<1 \Rightarrow |f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| = \frac{|x^n|}{|1-x^n|} \leq \frac{\rho^n}{1-\rho^n}$

Si vemos que $\sum_{n\geq 1} \frac{\rho^n}{1-\rho^n}$ converge tenemos lo pedido por el test de Weierstrass

Usaremos el criterio del cociente.

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \left\{ \frac{\rho^{n+1} \quad (1-\rho^n)}{(1-\rho^{n+1}) \quad \rho^n} \right\} = \left\{\frac{\rho\,(1-\rho^n)}{(1-\rho^{n+1})}\right\} = \left\{\frac{\rho-\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right\} \longrightarrow 1 < 1$$

Luego $\sum_{n\geq 1} \frac{\rho^n}{1-\rho^n}$ converge. Por el Test de Weierstrass tenemos que $\sum_{n\geq 1} f_n$ conv unif

en $K \subset]-1,1[$ compacto arbitrario

Por último demostraremos la convergencia absoluta

Buscamos probar que $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ es conv. $\forall x \in]-1,1[$. Usando el criterio del cociente tenemos

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \left\{\frac{|x^{n+1}|}{|1-x^{n+1}|}\frac{|1-x^n|}{|x^n|}\right\} = \left\{\left|\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}\right|\left|\frac{1-x^n}{x^n}\right|\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \lim_{n\to\infty} |x| \left|\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}\right| = |x| < 1$$

Luego $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ converge ∎

2. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se define:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y que, si $\alpha > 1$, dicha serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

·) Supongamos $\alpha > 1$. Veamos que converge abs. y unif en $\mathbb{R}$. Para ello usaremos el Test de Weierstrass

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} = M_n$$

$\sum_{n\geq 1} M_n = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ Como $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge por ser $\alpha > 1$ ~~tenemos que~~; por el Test de Weierstrass, $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge unif y abs en $\mathbb{R}$

·) Para evitar casos, trabajaremos con $\{|g_n|\}$. Realmente tomamos $0 < \alpha \leq 1$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ \mid M \geq |x| \ \forall x \in A$

Veamos que $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right) \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{M}{n}\right)$

$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x^2}{n^2}} \Rightarrow$ es creciente $\Rightarrow$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{|x|}{n}\right) \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{M}{n}\right)\ \forall x \in A$

Si vemos que $\operatorname{arctg} \frac{M}{n} \leq \frac{M}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ habremos acabado. Para ello, definimos

$h(s) = s - \operatorname{arctg}(s)$, $s \in]0, M]$;

$h'(s) = 1 - \frac{1}{1+s^2}$ ¿$h'(s) = 0$? $\iff \frac{1}{1+s^2} = 1 \iff 1+s^2 = 1 \iff s = 0$ pero $s \neq 0$ $\forall s \in]0, M]$

Además $h'(s) > 0$ $\forall s$ luego es creciente. Por último, es fácil ver con un límite que $h(s) > 0$ $\forall s \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{M}{n}\right) \leq \frac{M}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|g_n(x)| = \left|\frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{M}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \frac{M}{n} \Rightarrow M \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \text{ que converge}$$

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\,x) \log\left(1 + \frac{|x|}{n}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Primero, sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto acotado $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ \mid M \geq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Para probar lo que buscamos usaremos el Test de Weierstrass:

$$|h_n(x)| = \left|\frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \log\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)\right| = |\operatorname{sen}(nx)| \log\left(1 + \frac{|x|}{n}\right) \frac{1}{n} \leq |\operatorname{sen}(nx)| \log\left(1 + \frac{M}{n}\right) \frac{1}{n} =$$
$$\leq \log\left(1 + \frac{M}{n}\right) \frac{1}{n}$$

Si logramos ver que $\log\left(1 + \frac{M}{n}\right) \leq \frac{M}{n}$ obtenemos lo que queríamos

Para ello, tomamos $\varphi(s) = s - \log(1+s) \Rightarrow \varphi'(s) = 1 - \frac{1}{1+s}$ como $s \in]0, M] \Rightarrow$ $\varphi'(s) \neq 0$ $\forall s \in]0, M]$. Además, $\forall s \in]0, M]$ $\varphi'(s) > 0$ pues $\frac{1}{1+s} < 1 \Rightarrow \varphi$ es creciente

Como $\lim_{s \to 0} \varphi(s) = 0$ tenemos la desigualdad buscada. Entonces:

$$|h_n(x)| \leq \frac{M}{n^2}$$

Además, $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^2}$ converge por ser armónica con $\alpha > 1$

Por tanto $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge unif y abs. en todo acotado de $\mathbb{R}$

4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las siguientes series de potencias:

$$\textbf{(a)} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)} \qquad\qquad \textbf{(b)} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$$

a) Estudiamos el radio de convergencia:

Por el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} = 1 \Rightarrow R = 1$$

Luego el intervalo de converg. es $]-1,1[$. Sabemos que conv. abs en $]-1,1[$ y unif en cada compacto de $]-1,1[$.

$x=1$

$$f_n(1) = \frac{1}{\log(n+2)}$$

Veamos si $\sum_{n\geq 1} f_n(1)$ converge. Estamos ante una serie de Bertrand con $\alpha = 0 \Rightarrow$ diverge

$x=-1$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$$

Por el criterio de Leibniz, si $\left\{\frac{1}{\log(n+2)}\right\}$ es decreciente y convergente a cero $\Rightarrow$ la serie converge.

$\left\{\frac{1}{\log(n+2)}\right\}$ converge a 0, pues $\{\log(n+2)\} \longrightarrow \infty$, por tanto, como $\log(n+2)$ es $\nearrow \Rightarrow$ $\frac{1}{\log(n+2)} \searrow 0$. Por tanto en $x=-1$ converge.

Converg unif en $]-1,1[$

Si converge unif en $]-1,1[\Rightarrow$ verifica el Criterio de Cauchy, es decir, dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $n_0 \leq p < q \Rightarrow \left|\sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)\right| < \varepsilon$ $\forall x \in]-1,1[$. Pero entonces

$$\left|\sum_{n=p+1}^{q} f_n(1)\right| = \left|\lim_{x\to 1} \sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=p+1}^{q} f_n(1) \text{ converge !!}$$

b) Estudiamos el radio de convergencia. Tomamos $g_n(x) = \frac{n}{2^n} \cdot (x-1)^n$

$\{\frac{n}{2^n}\} \longrightarrow 0$ por la escala de inf.

$\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}$,por el criterio del cociente.

$$\frac{(n+1) \cdot \cancel{2^n}}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{converge a } \frac{1}{2}$$

Por tanto $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Por lo que el intervalo de convergencia es

$]-1, 3[$. Sabemos que $\sum\limits_{n\geq 0} c_n (x-1)^n$ conv. abs en $]-1,3[$ y unif en todo compacto de $]-1,3[$.

$\underline{x=-1}$

$$\sum_{n\geq 0} g_n(-1) = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{\cancel{2^n}} (-1)^n \cancel{2^n} \Rightarrow \text{no converge}$$

$\underline{x=3}$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{\cancel{2^n}} \cancel{2^n} \quad \text{como } \{n\} \not\to 0 \Rightarrow \text{no hay conv.}$$

Conv. unif en $]-1,3[$

Supongamos que la hubiera $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n_0 \leq p < q \Rightarrow \left|\sum\limits_{n=p+1}^{q} g_n(x)\right| \leq \varepsilon \ \forall x \in]-1,3[$. En particular, para $p, q \in]-1,3[$ fijos tenemos que $\left|\sum\limits_{n=p+1}^{q} g_n(-1)\right| = \left|\lim\limits_{x\to -1} \sum\limits_{n=p+1}^{q} g_n(x)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} g_n(-1)$ converge!!