5. Si se lanzan 5 dados equilibrados de forma independiente, calcular la probabilidad de que los números 1 y 4 aparezcan el mismo número de veces.

Como tenemos 5 dados, para que el nº de 4s y nº de 1's coincidan tomarán los valores 0, 1 y 2.

X_1 = nº de dados en los que sale 1, $p_1 = \frac{1}{6}$

X_2 = nº de dados en los que sale 4, $p_2 = \frac{1}{6}$

X_3 = nº de dados en los que sale distinto de 1 y 4. $p_3 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$P[X_1=0, X_2=0, X_3=5] = \frac{5!}{0!0!5!} \frac{1}{6}^0 \frac{1}{6}^0 \left(1-\frac{1}{3}\right)^5 = \left(1-\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$P[X_1=1, X_2=1, X_3=3] = \frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!} \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{20}{36}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{36}\cdot\frac{8}{27}$$

$$P[X_1=2, X_2=2, X_3=1] = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{30}{36^2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{60}{3\cdot 36^2}$$

$$P[X_1=X_2] = P[X_1=0, X_2=0, X_3=5] + P[X_1=1, X_2=1, X_3=3] + P[X_1=2, X_2=2, X_3=1] = 0'3117$$

12. Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución normal con parámetros $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ y ρ. Demostrar que X e Y son independientes $\Leftrightarrow \rho = 0$.

$\Rightarrow)$ Inmediato

$\Leftarrow)$ $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)} = f_X(x) f_Y(y)$ luego X e Y son independientes

7. Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución normal con parámetros $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 8$, $\sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 9$, $\rho = 0.6$. Calcular

$$P(5 < Y < 11/X = 2).$$

Sabemos que $(X,Y) \rightsquigarrow N_2(5, 8, 4^2, 3^2, 0'6)$

Ya sabemos que en la normal bivariante son normales unidimensionales

$$Y|X=2 \rightsquigarrow N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\overset{2}{x}-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right) = N(6'65, 5'76)$$

$$P(5<Y<11 \mid X=2) = P_{Y|X=2}(5<Y<11) = P\left(\frac{5-\mu}{\sigma} < Z < \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P(-0'6875<Z<1'8525) =$$

$$= P(Z<1'8525) - (1-P(Z<0'6875)) = 0'96485 - (1-0'75175) = 0'7166$$