Espacios $L^p(\Omega)$

Consideramos $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ medible para la medida de Lebesgue, se define el espacio $L^p(\Omega)$ como sigue:

$$L^p(\Omega) = \left\{ [f] : f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \wedge \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\}$$

$$\text{donde } [f] = \left\{ g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} \mid f = g \text{ a.e.} \right\}$$

Realmente, denotaremos por $f = [f]$ de forma que, si $f = g$ lo que estamos diciendo es que $f = g$ a.e.
Gracias a esto, conseguiremos que, dada $f \in L^p(\Omega)$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}$$

está bien definida y es una norma. Gracias a considerar clases de equivalencia podemos probar que, si $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ a.e.

Teorema de Riesz-Fisher

$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Seguimos considerando que $1 \leq p < \infty$.

Corolario

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ es convergente a $f \in L^p(\Omega) \Rightarrow \exists \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ converge a $f \in L^p(\Omega)$ a.e.
Además $\exists H \in L^p(\Omega) : |f_{\sigma(n)}(x)| \leq H(x)$ a.e. $x \in \Omega$

Teorema de la convergencia dominada en $L^p(\Omega)$

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones medibles verificando que

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) \longrightarrow \overset{\in L^p(\Omega)}{f(x)} \text{ a.e. } x \in \Omega \\ |f_n(x)| \leq h(x) \in L^p(\Omega) \text{ a.e. } x \in \Omega \end{array}\right\} \overset{*}{\Rightarrow} \underbrace{\int_\Omega |f_n - f|^p}_{= (\|f_n - f\|_p)^p} \longrightarrow 0$$

Caso $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ [f] : f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible y acotada} \right\}$$

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ k \geq 0 : |f(x)| \leq k \text{ a.e. } x \in \Omega \right\} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (0,1)} |f(x)| = \sup_{x \in (0,1)} |[f]|$$

Relaciones de inclusión si $|\Omega| < \infty$ y $\infty \geq p_1 > p_2 \geq 1$

$$L^1(\Omega) \supset \dots \supset L^{p_2}(\Omega) \supset \dots \supset L^{p_1}(\Omega) \supset \dots \supset L^\infty(\Omega)$$

Representación de $(L_p(\Omega))^*$ $1<p<\infty$

Consideramos $1<p<\infty$ y defino $T: L^{p'}(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))^*$

$$v \longmapsto T_v: L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto \langle T_v, w\rangle := \int_\Omega vw$$

·) Bien definida.

Como $v \in L^{p'}(\Omega)$ y $w \in L^p(\Omega)$, la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int_\Omega |vw| \le \Big(\underbrace{\int |v|^{p'}}_{<\infty}\Big)^{1/p'} \Big(\underbrace{\int |w|^p}_{<\infty}\Big)^{1/p}$$

luego, como $|vw|$ es medible positiva con integral finita $\Rightarrow$ integrable.

Entonces vw es integrable $\Rightarrow$ T_v está bien definida y $|\langle T_v, w\rangle| \le \|v\|_{p'} \|w\|_p$ $\forall w \in L^p(\Omega)$ $\forall v \in L^{p'}(\Omega)$. De hecho, como T_v es lineal $\forall v \in L^{p'}(\Omega)$, tenemos que $T_v \in (L^p(\Omega))^*$. Tenemos ya que T está bien definida y es lineal.

Ahora bien:

$$\|T_v\|_{L^p(\Omega)^*} = \min\{k>0 : |\langle T_v, w\rangle| \le k\|w\|_p \ \forall w \in L^p(\Omega)\} \le \|v\|_{p'}$$

Buscamos ahora obtener dicha constante y para ello, tomando

$$w(x) = \begin{cases} |v(x)|^{p'-2} v(x) & , \text{si } v(x) \ne 0 \\ 0 & \text{si } v(x) = 0 \end{cases}$$

de donde

$$\langle T_v, w\rangle = \int_\Omega vw = \int_{v(x)\ne 0} |v|^{p'-2} v^2 = \int_{v(x)\ne 0} |v|^{p'} \overset{p'>1}{=} \int_\Omega |v|^{p'} = \|v\|_{p'}^{p'} = \|v\|_{p'}^{p'-1} \|v\|_{p'}$$

Pero $w \in L^p(\Omega)$ pues $\|w\|_p = \Big(\int_{v(x)\ne 0} |w|^p\Big)^{1/p} = \Big(\int_{v(x)\ne 0} (|v|^{p'-1})^p\Big)^{1/p} = \Big(\int_\Omega |v|^{p'}\Big)^{1/p}$

$$= \Big[\Big(\int |v|^{p'}\Big)^{1/p'}\Big]^{p'/p} = \|v\|_{p'}^{p'/p} = \|v\|_{p'}^{p'-1}$$

Entonces $\langle T_v, w\rangle = \|w\|_p \cdot \|v\|_{p'}$ de donde obtenemos que $\|T_v\|_{L^p(\Omega)^*} = \|v\|_{p'}$

Como T es lineal y conserva normas es una isometría, falta ver que es sobreyectiva.
Pero antes son claros los siguientes resultados:

(i) Como $L^{p'}(\Omega)$ completo $\Rightarrow T(L^{p'}(\Omega))$ es completo.

(ii) Como $T(L^{p'}(\Omega)) \subseteq L^p(\Omega)^*$ y $L^p(\Omega)^*$ es Banach $\Rightarrow T(L^{p'}(\Omega))$ es cerrado de $L^p(\Omega)^*$

Veamos que T es sobreyectiva.

1. Vamos a ver que $L^p(\Omega)$ es reflexivo cuando $2 \leq p < \infty$.

La prueba se basa en la siguiente desigualdad de números reales:

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Si tomamos ahora $a = w(x)$ y $b = \tilde{w}(x)$ con $w, \tilde{w} \in L^p(\Omega)$ tenemos que

$$\int_\Omega \left|\frac{w(x)+\tilde{w}(x)}{2}\right|^p + \int_\Omega \left|\frac{w(x)-\tilde{w}(x)}{2}\right|^p \leq \int_\Omega \frac{1}{2}\left(|w(x)|^p + |\tilde{w}(x)|^p\right)$$

Primera identidad de Clarkson ($2 \leq p < \infty$)

de donde $\boxed{\left\|\frac{w-\tilde{w}}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{w-\tilde{w}}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\left(\|w\|_p^p + \|\tilde{w}\|_p^p\right)}$ $\forall w, \tilde{w} \in L^p(\Omega)$

Consecuencia de 1ª Identidad de Clarkson

Sea $0 < \varepsilon < 2$ $\|w\|_p = 1 = \|\tilde{w}\|_p$: $\|w-\tilde{w}\|_p > \varepsilon$ $\Rightarrow \left\|\frac{w+\tilde{w}}{2}\right\|_p^p < 1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}$

De aquí deducimos que $\left\|\frac{w+\tilde{w}}{2}\right\|_p \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p} =: 1 - \delta < 1$

donde $\delta := 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p}$ (< 1).

Además, podemos asegurar que $\forall 0 < \varepsilon < 2$, $\forall w, \tilde{w} \in L^p(\Omega)$ con $\|w\| = 1 = \|\tilde{w}\|$, $\|w - \tilde{w}\|_p > \varepsilon$ $\exists \delta > 0 : \left\|\frac{w+\tilde{w}}{2}\right\| \leq 1 - \delta$

con δ sólo dependiente de ε.

Cuando se cumple esto para un espacio de Banach cualquiera diremos que dicho espacio es uniformemente convexo.

De aquí vemos que $L^p(\Omega)$ es uniformemente convexo y por tanto reflexivo $\Rightarrow$ ejercicio

Como consecuencia de este ejercicio tenemos que todo Hilbert es reflexivo por ser uniformemente convexo gracias a la identidad del paralelogramo

2. Veamos el caso $1 < p < 2$.

Podemos considerar $T : L^p(\Omega) \longrightarrow L^{p'}(\Omega)^*$ la isometría análoga a la probada al principio, y sabemos que $T(L^p(\Omega)) \subset L^{p'}(\Omega)^*$ es subespacio cerrado y vamos a probar su sobreyectiva.

Ahora bien, como $1<p<2 \Rightarrow p' \geq 2$ y $L^{p'}(\Omega)$ es reflexivo $\Rightarrow L^{p'}(\Omega)^*$ es reflexivo y entonces $T(L^p(\Omega))$ es reflexivo. Por ser T isometría con T sobreyectiva con la restricción a la imagen tenemos que $L^p(\Omega)$ es reflexivo.

2^a Identidad de Clarkson, para $1<p<2$

$$\left\|\frac{w+\bar{w}}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{w-\bar{w}}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left[\frac{1}{2}\left(\|w\|_p^p + \|\bar{w}\|_p^p\right)\right]^{\frac{1}{(p-1)}} \quad \forall w, \bar{w} \in L^p(\Omega)$$

Ejercicio Demostrarla

Vamos ahora a probar que $V = T(L^{p'}(\Omega))$ es denso pues en ese caso, al ser cerrado, será $L^p(\Omega)^*$.

Sea $\varphi \in L^p(\Omega)^{**}$ y supongamos que $\langle \varphi, Tv \rangle = 0 \quad \forall v \in L^{p'}(\Omega)$. Veamos que $\varphi \equiv 0$.

Como $L^p(\Omega)$ es reflexivo $\forall 1<p<\infty \iff J(L^p(\Omega)) = L^p(\Omega)^{**} \Rightarrow \exists! w \in L^p(\Omega) \mid J(w) = \varphi$

$0 = \langle \varphi, Tv \rangle = \langle Jw, Tv \rangle = \int vw \iff w \in L^p(\Omega) \wedge \int vw = 0 \quad \forall v \in L^{p'}(\Omega) \Rightarrow w = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

tomamos $v = |w|^{p-2} w$

Luego V es denso, $T(L^p(\Omega)) = L^{p'}(\Omega)$ y T es sobreyectiva $\Rightarrow T$ biyectiva

Esto se llama Teorema de Representación de Riesz para $L^p(\Omega)$.

Teorema de Representación de Riesz para $L^1(\Omega)^*$

$\forall \phi \in L^1(\Omega)^* \quad \exists!\, u \in L^\infty(\Omega) : \langle \phi, f \rangle = \int_\Omega fu \, dx \quad \forall f \in L^1(\Omega)$. Además $\|\phi\|_{L^1(\Omega)^*} = \|u\|_\infty$

- Demostración -

> Observación
>
> Si $u \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow \begin{array}{ccl} L^1(\Omega) & \longrightarrow & L^\infty(\Omega) \\ u & \longmapsto & \int_\Omega fu \end{array} \in L^1(\Omega)^*$ por ser lineal, continua y bien definida.

Vamos a suponer que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ con Ω_n medible, $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, $0 < |\Omega_n| < \infty$ y $0 < |\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Unicidad

Supongamos que $\exists u_1, u_2 \in L^\infty(\Omega)$ cumpliendo la tesis y sea $v = u_1 - u_2$, bastará ver que, si $\int_\Omega fv = 0 \Rightarrow v = 0$.

Sea $f = \chi_{\Omega_n} \operatorname{sgn}(v)$ con $\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(x) = 0 \\ \frac{v(x)}{|v(x)|} & \text{si } v(x) \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$, veamos que $f \in L^1(\Omega)$, pero $\chi_{\Omega_n} \in L^1(\Omega)$ pues $\int_\Omega \chi_{\Omega_n} = |\Omega_n| < \infty$ y como $\operatorname{sgn}(v)$ está acotada tenemos, por la observación, que $f \in L^1(\Omega)$.

Entonces $0 = \int_\Omega \chi_{\Omega_n} (\text{sgn}\, v) v = \int_{\Omega_n} \text{sgn}(v) v = \int_{\Omega_n} |v| \Rightarrow v=0$ a.e $\Omega_n \Rightarrow v=0$ a.e $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$

$\Rightarrow v=0$ en $L^1(\Omega)$.

Por tanto $v_1 = v_2$.

· Existencia

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ y defino $\Theta(x) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } x\in\Omega_1 \\ \alpha_2 & \text{si } x\in\Omega_2\setminus\Omega_1 \\ \vdots \\ \alpha_n & \text{si } x\in\Omega_n\setminus\Omega_{n-1} \\ \dots \end{cases}$ $\forall x\in\Omega$ que es medible

como límite de funciones simples positivas. Además, $\Theta \in L^2(\Omega)$ pues

$$\int_\Omega \Theta^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 |\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}| \qquad \text{con } \Omega_0 = \emptyset$$

Escogemos α_n de manera que $\alpha_n^2 |\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}| = \frac{1}{n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{n\sqrt{|\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}|}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

con esta elección $\int_\Omega \Theta^2(x)\,dx < \infty$ y por tanto $\Theta \in L^2(\Omega)$.

Definimos ahora $\phi_\Theta : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ la cual está bien definida

$f \longmapsto \langle \phi, \Theta f \rangle$

pues $\Theta f \in L^1(\Omega)$ ya que $\Theta \in L^2(\Omega)$, $f\in L^2(\Omega)$ y la desigualdad de Cauchy-Schwartz

nos asegura que $\Theta f \in L^1(\Omega)$

Además, ϕ_Θ es lineal y vamos a ver que ϕ_Θ es continua:

$$\langle \phi_\Theta, f\rangle = \langle \phi, \Theta f\rangle \le \|\phi\|_{L^1(\Omega)^*} \|\Theta f\|_1 \le \overbrace{\|\phi\|_{L^1(\Omega)^*} \|\Theta\|_2}^{cte} \|f\|_2$$

Luego $\phi_\Theta \in L^2(\Omega)^* = L^2(\Omega)$ y por el teorema de representación de Riesz para $L^2(\Omega)^*$

tenemos que $\exists!\, v\in L^2(\Omega) : \langle \phi, \Theta f\rangle = \int_\Omega f v$ $\forall f\in L^2(\Omega)$

Vamos a ver que $u = \frac{v}{\Theta}$ y está bien definida pues $\Theta(x) > 0$ $\forall x\in\Omega$.

(i) u es medible por ser cociente de medibles

(ii) $u\chi_{\Omega_n} \in L^2(\Omega)$ pues $\int_\Omega (u\chi_{\Omega_n})^2 = \int_{\Omega_n} u^2 = \int_{\Omega_n} \frac{v^2}{\Theta^2} \le \int_{\Omega_n} \frac{v^2}{\min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}$

$$= \frac{1}{\min\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}} \int_{\Omega_n} v^2 < \infty$$

Sea ahora $g\in L^\infty(\Omega)$ luego acotada y defino $f = \chi_{\Omega_n} \frac{g}{\Theta}$ bien definida, acotada

luego $f\in L^\infty(\Omega)$ pues $\frac{1}{\Theta}$ acotada por $\frac{1}{\min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}$ y $f=0$ en $\Omega\setminus\Omega_n$

de donde $\int_\Omega f^2 \le \|f\|_\infty \cdot |\Omega_n| < \infty$ y $f\in L^2(\Omega)$.

Entonces, por el T^{ma} de representación de Riesz para $p=2$ tenemos que

$$\int_\Omega \chi_{\Omega_n} g u = \int_\Omega \chi_{\Omega_n} \frac{g}{\theta} v = \langle \phi, \theta f \rangle = \langle \phi, \chi_{\Omega_n} g \rangle \quad \forall g \in L^\infty(\Omega)$$

Veamos ahora que $u \in L^\infty(\Omega)$, es decir, acotada. De hecho, vamos a probar que $\|u\|_\infty \leq \|\phi\|_{L^1(\Omega)^*}$. Sea $C > \|\phi\|_{L^1(\Omega)^*}$ y $A = \{x \in \Omega \mid |u(x)| > C\}$, veamos que $|A| = 0$, lo que nos dirá la desigualdad buscada tomando límite cuando $C \to \|\phi\|_{L^1(\Omega)^*}$

Para $|A| = 0$, basta probar que $|A \cap \Omega_n| = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, tomando $g = \chi_A \, \mathrm{sgn}(u) \in L^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$C|A \cap \Omega_n| < \int_{A \cap \Omega_n} |u| = \int_{\Omega_n} \chi_A |u| = \langle \phi, \chi_{\Omega_n} \chi_A \mathrm{sgn}(u) \rangle$$