3. Obtener el desarrollo en serie de Taylor de la función f, centrado en el origen, en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2) \quad \forall z \in D(0,1)$

(b) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

(c) $f(z) = \operatorname{arc\,sen} z \quad \forall z \in D(0,1)$

(d) $f(z) = \cos^2 z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Mejorado

Aplicar el Tª del Desarrollo en Serie de Taylor.

a) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2) \ \forall z \in D(0,1)$

Vamos a ver que la función $f \in H(D(0,1))$, para ello, bastará ver que, si $g(z) = z^2 - 3z + 2$ $\forall z \in D(0,1)$, $g \in H(D(0,1))$ entonces $\nexists z \in D(0,1) \mid g(z) \subset \mathbb{R}^-$. Para $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$g(z) = (z-1)(z-2) = x^2 + y^2 + 2 - 3x - iy(2x-3)$$

Distinguimos casos:

i) Si $z \in D(0,1) \cap \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$.

- Si $x = 0 \Rightarrow g(z) \notin \mathbb{R}^-$ pues $\operatorname{Re} g(z) > 0$
- Si $x \neq 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \wedge x^2 + y^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) + y^2 > 0 \Rightarrow g(z) \notin \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

De forma análoga se obtienen los demás casos. De esta forma, $f \in H(D(0,1))$ luego es analítica y podemos derivar obteniendo $f'(z) = \dfrac{2z-3}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$ por descomposición.

Como $f' \in H(D(0,1))$, es analítica y si estudiamos cada factor:

- $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

- $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{-1}{2-z} = \dfrac{-1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^{n+1}}$

Luego $f'(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \ \forall z \in D(0,1)$; por el Teorema de holomorfía de funciones dadas como la suma de una serie de potencias $f(z) = \lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{n+1} z^{n+1}$, que tomando $z=0$ obtenemos $\lambda = \log 2$.

b) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$. Sabemos que, por ser una función racional $f \in H(D(0,1))$ luego será analítica y podemos obtener su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen. Si definimos $g: D(0,1) \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \dfrac{-1}{1+z}$ $\forall z \in D(0,1)$ es claro que $f(z) = z^2 \cdot g'(z)$ luego buscamos obtener el desarrollo en serie centrado en el origen de g.

$$g(z) = \frac{-1}{1+z} = -\frac{1}{1-(-z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Luego derivando término a término gracias al teorema de holomorfía de funciones dadas como la suma de una serie de potencias obtenemos

$$g'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+1) z^n$$

luego $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+1) z^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n \quad \forall z \in D(0,1)$

d) $f(z)=\cos^2 z$ sabemos que $f\in \mathcal{H}(D(0,1))$ por ser producto de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. Además, si $g(z)=f'(z)=\operatorname{sen} 2z$ es su derivada vemos que $g\in\mathcal{H}(D(0,1))$ por tanto, por el Teorema de Desarrollo en serie de Taylor sabemos que $g'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ donde $\alpha_n=\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$.

$$g'(z)=2\cos 2z\ ;\ g'(0)=2$$
$$g''(z)=-2^2\operatorname{sen} 2z,\ g''(0)=0$$
$$g'''(z)=-2^3\cos 2z\ ;\ g'''(0)=-2^3$$

Luego α_n vienen dados de la siguiente forma

$$\alpha_n=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ par}\\ 2^n & \text{si } n=1+4k\\ -2^n & \text{si } n=3+4k\end{cases}$$

Por tanto, por el Teorema de holomorfía de funciones dadas como la suma de una serie de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}z^n$.

4. Dado $\alpha\in\mathbb{C}^*\setminus\mathbb{N}$, probar que existe una única función $f\in\mathcal{H}(D(0,1))$, verificando que

Sudar casi

$$z f'(z)-\alpha f(z)=\frac{1}{1+z}\qquad \forall z\in D(0,1)$$

Supongamos que $\exists f\in\mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $zf'(z)-\alpha f(z)=\frac{1}{1+z}$. Por una parte, como $f\in\mathcal{H}(D(0,1))$, sabemos por el Teorema de Desarrollo en serie de Taylor que f es analítica y admite un desarrollo centrado en el origen; de esta manera, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ donde $\alpha_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
Por otro lado, $g(z)=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ luego tenemos que, usando el THFDSSP

$$z\cdot f'(z)-\alpha f(z)=z\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n z^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha_n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\alpha_n z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n-\alpha)\alpha_n z^n=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\qquad \forall z\in D(0,1)$$

Entonces, por el principio de identidad visto en clase $(-1)^n=(n-\alpha)\alpha_n \Rightarrow \alpha_n=\frac{(-1)^n}{n-\alpha}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y por tanto

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\alpha}z^n$$

Para ver la existencia, basta ver que f está bien definida lo cual es claro por ser holomorfa en $D(0,1)$ pues es analítica. Además f tiene radio de convergencia 1 luego vemos que existe.

5. Probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, verificando que $f(0)=0$ y

$$\exp\left(-zf'(z)\right) = 1-z \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Supongamos $\exists f \in H(D(0,1))$ cumpliendo lo pedido, como $g(z)=\exp(-zf'(z)) \in H(D(0,1))$ por ser producto y composición de funciones holomorfas podemos obtener la siguiente ecuación diferencial

$$(-f'(z) - zf''(z))\,g(z) = -1 \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Pero $g(z) = 1-z$ entonces

$$f'(z) + zf''(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Si nos fijamos bien nos encontramos en el caso del ejercicio anterior con $\alpha = -1$ por tanto sabemos que existe y es única. Como conocemos los coeficientes sabemos que

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Luego, usando el THFDSSP obtenemos que $f(z) = \lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)(n+1)} = \lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$. Como $f(0)=0$ tenemos que $\lambda = 0$; por tanto, tenemos ya la existencia y unicidad.

6. Para $z \in \mathbb{C}$ con $1-z-z^2 \neq 0$ se define $f(z) = (1-z-z^2)^{-1}$. Sea $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ la serie de Taylor de f centrada en el origen. Probar que $\{\alpha_n\}$ es la *sucesión de Fibonacci:*

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Calcular en forma explícita dicha sucesión.

Como ya nos dicen que f es analítica, considerando $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid 1-z-z^2 = 0\}$, en Ω; nos limitaremos a construir la serie.

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{\left(z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\left(z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} - \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\left(z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

Calculamos las series de cada sumando:

a) Considerando $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{\alpha+z} = \frac{1/\alpha}{1+z/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+z/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n$

b) Considerando $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{\beta+z} = \frac{1/\beta}{1+z/\beta} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+z/\beta} = \frac{1}{\beta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{\beta}\right)^n$

Juntando ambos resultados vemos que

$$f(z) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^{n+1}}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\beta^{n+1}}z^n\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\alpha^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\beta^{n+1}}\right)z^n$$

Por tanto, vemos que $\alpha_n = \frac{(-1)^n\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}} - \frac{1}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}}\right)$. Deberíamos probar por inducción que es la sucesión de Fibonacci, pero me quedo con el proceso; puedo haber fallado en las cuentas.

7. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $f^{(n)}(0) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\Omega = \mathbb{C},\ a_n = n$ (b) $\Omega = \mathbb{C},\ a_n = (n+1)!$

(c) $\Omega = D(0,1),\ a_n = 2^n n!$ (d) $\Omega = D(0,1/2),\ a_n = n^n$

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n-1)!} z^n$ por lo que definiendo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^n$ $\forall z \in \mathbb{C}$ obtenemos una función entera.

b) $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$, entonces, por el criterio de la raíz n-ésima sabemos que $\{\sqrt[n]{(n+1)}\} \longrightarrow 1$ luego

tendrá radio de convergencia 1 y no podrá existir dicha función.

c) $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 2^n \Rightarrow \{\sqrt[n]{\alpha_n}\} \longrightarrow 2$ luego tendrá radio de convergencia $\frac{1}{2}$ y no podrá existir dicha función holomorfa.

d) $\alpha_n = \frac{n^n}{n!}$ cumple que, por el criterio del cociente, $\left\{ \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right\} = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\} \longrightarrow e$ luego

tendrá radio de convergencia $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ entonces tampoco podrá existir dicha función.

8. Dados $r \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, y $a, b \in \mathbb{C}$ con $|b| < r < |a|$, calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)^k}$$

Puesto que el caso $n=1$ ya lo hemos visto en otros casos trabajaremos para $n \geq 2$ (Fórmula de Cauchy para la circunferencia)

Para $n \geq 2$, sabemos que $\exists A, B_1, \dots, B_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)^n} = \frac{A}{(z-a)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i}{(z-b)^i}$$

de donde vemos que $1 = A(z-b)^n + (z-a)\sum_{i=1}^{k}(z-b)^{k-i} B_i$. Además, para $i \geq 2$ sabemos que la función $z \longmapsto \frac{1}{(z-b)^i}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{b\}$ y admite primitiva. Teniendo en cuenta que $C(0,r)$ es un camino cerrado en ese dominio, podemos ver que $\int_{C(0,r)} \frac{1}{(z-b)^i} dz = 0$ $\forall i \in \{2, \dots, k\}$

Nos queda por estudiar el caso de la función $z \longmapsto \frac{1}{z-a}$ que es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ pero $a \notin C(0,1)$ luego por el Tª de Cauchy para dominios estrellados usado en el ejercicio 1 de la relación 7 obtenemos que $\int_{C(0,1)} \frac{1}{z-a}\, dz = 0$

Por tanto, $\int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)(z-b)^k}\, dz = B_1 \int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-b)}\, dz$ y debemos estudiar esta integral. Tomando por $g(z) = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$, vemos que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ además vemos que $C(0,1) \subset \mathbb{C}$ entonces $\exists R \in \mathbb{R}^+ \mid r < R < |a|$ cumpliendo $C(0,1) \subset D(0,R) \subset \mathbb{C}$ entonces por la fórmula de Cauchy para la circunferencia $\int \frac{1}{(z-b)}\, dz = 2\pi i$.

Buscamos ahora conocer B_1, para ello, como

$$1 = A(z-b)^k + (z-a)\sum_{i=1}^{k}(z-b)^{k-i}B_i$$

tenemos que, para $z=a$:

$$1 = (a-b)^k A$$

$$A = \frac{1}{(a-b)^k}$$

Además, el término que acompaña a z^k es $(B_1 + A)$ luego obtenemos que $A + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{-1}{(a-b)^k}$. En definitiva

$$\int_{C(0,1)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)^k} = \frac{-2\pi i}{(a-b)^k}$$

9. Calcular la integral $\int_\gamma \frac{e^z\, dz}{z^2(z-1)}$, para $\gamma = C(1/4, 1/2)$, $\gamma = C(1, 1/2)$ y $\gamma = C(0,2)$.

Descomponemos en fracciones simples el denominador

$$B = -1,\ C = 1,\ A = -1$$

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{-1}{z} + \frac{-1}{z^2} + \frac{1}{(z-1)}$$

Luego $\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^2(z-1)} = -\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz - \int \frac{e^z}{z^2}\, dz + \int \frac{e^z}{z-1}\, dz$. Distinguimos casos según γ:

- $\gamma = C(1/4, 1/2)$, teniendo en cuenta que $z \longmapsto \frac{e^z}{z-1}$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 1\}$ y $\overline{D}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \subset \Omega$ podemos usar la fórmula de cauchy para las derivadas obteniendo que

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)}\, dz = 2\pi i\, f^{(k)}(0) = -4\pi i$$

- $\gamma = C(1, 1/2)$ tomamos ahora la función $z \longmapsto \frac{e^z}{z^2}$ y vemos que es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, pero como $0 \notin \overline{D}(1, 1/2)$ podemos aplicar la fórmula de Cauchy para la circunferencia en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Entonces

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i \frac{e^1}{1^2} = 2\pi i e$$

- $\gamma = C(0,2)$ haciendo uso de la descomposición que realizamos antes tenemos que

Fórmula de Cauchy para la circunferencia

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i\, e^0 = 2\pi i$$

Fórmula de Cauchy para las derivadas

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2}\,dz = f'(0)2\pi i = 2\pi i$$

Fórmula de Cauchy para la circunferencia

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i e$$

Luego $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)}\,dz = -4\pi i + 2\pi i e$

10. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\,dz$ (b) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\,dz$ (c) $\displaystyle\int_{C(0,1/2)} \frac{\log(1+z)}{z^n}\,dz$

Este ejercicio se basa en usar la fórmula de Cauchy para las derivadas.

a) Sabemos que $z \longmapsto \operatorname{sen} z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ luego $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos determinar el valor del siguiente modo.

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\,dz = f^{(n-1)}(0)\frac{2\pi i}{(n-1)!} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{-2\pi i}{(n-1)!} & \text{si } n = 3+4k \\ \frac{2\pi i}{(n-1)!} & \text{si } n = 1+4k \end{cases}$$

b) En este caso, usando la linealidad de la integral tenemos

$$\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^n}\,dz = f(0)\frac{2\pi i}{(n-1)!} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

$$\int_{C(0,1)} \frac{e^{-z}}{z^n}\,dz = (-1)^n f(0)\frac{2\pi i}{(n-1)!} = (-1)^n \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

Por tanto $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\,dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot\left(1+(-1)^n\right)$

c) Sabemos que $f^{(n)}(z) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+z)^n}$ $\forall z \in D(0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\int_{C(0,1)} \frac{\log(1+z)}{z^n}\,dz = 2\pi i\,\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ \frac{(-1)^n 2\pi i}{n-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$