Condiciones del ejercicio donde s_i será la clave de P_i $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

1. P_i entra en sección crítica si y sólo si cumple que:
   - $s_i \neq s_{i-1}$ para $i > 0$
   - $s_0 = s_{n-1}$ para $i = 0$

2. P_i actualiza las variables cuando sale de sección crítica de la siguiente forma:
   - $s_i = s_{i-1}$ para $i > 0$
   - $s_0 = (s_0 + 1) \bmod n$

1. Propiedad de exclusión mutua:

Razonaremos por inducción sobre el número de procesos n demostrando el caso base ($n=2$) para después demostrar el caso general.

Si $n = 2$, disponemos de los procesos P_0 y P_1.

- Supongamos que P_0 accede a sección crítica, entonces ha debido pasar que $s_0 = s_1$; de esta manera, si P_1 intenta acceder a la sección no podrá pues en caso de poder debería cumplirse que $s_1 \neq s_0$ lo cual es una contradicción.
- Supongamos que P_1 accede a sección crítica, entonces ha debido pasar que $s_0 \neq s_1$; de esta manera, si P_0 intenta acceder a la sección no podrá pues en caso de poder debería cumplirse que $s_0 = s_1$ lo cual es una contradicción.

Demostrado ya el caso base y suponiendo el resultado cierto para $n-1$, veamos qué ocurre para n.

- Supongamos que P_0 accede a sección crítica; por hipótesis de inducción, P_j, $j \in \{1, \dots, n-2\}$ no accede a sección crítica.

  Como P_0 sí accede tenemos que $s_0 = s_{n-1}$; de la misma manera sabemos que, como P_j no accede entonces $s_j = s_{j-1}$ $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$ luego $s_j = s_0$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

  Si P_{n-1} pudiera acceder, tendríamos que $s_{n-1} \neq s_{n-2}$, es decir, $s_{n-1} \neq s_0$ luego P_0 no accedería, lo cual es una contradicción.

- Supongamos ahora que P_i con $i \neq 0$ accede a sección crítica; usando de nuevo la hipótesis de inducción obtenemos que $\{P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_{n-2}\}$ no acceden a sección crítica

Como P_i sí accede, tenemos que $s_i \neq s_{i-1}$; ahora, como $P_j \mid j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n-2\}$ no accede tenemos que $s_j = s_{j-1}$ $\forall j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-2\}$ A esto se añade que $s_0 \neq s_{n-1}$ pues P_0 no accede a sección crítica

Si P_{n-1} accediera a sección crítica, tendríamos que $s_{n-1} \neq s_{n-2}$, pero $s_{n-2} = s_i$ y $s_0 = s_{n-1}$ con $s_0 \neq s_i$ luego $s_{n-1} = s_i$, $s_{n-1} = s_0$ y $s_0 \neq s_i$ lo cual es una contradicción

Por tanto, hemos probado por inducción la propiedad de seguridad de exclusión mutua del programa

2. Propiedad de alcanzabilidad de la sección crítica

Para esta demostración denotaré por s_i^t al valor de la clave s_i del proceso P_i en el instante de tiempo t para cualquier $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Además, T denotará el conjunto de todos los instantes durante la ejecución del programa.

Al igual que antes procederemos por inducción. Sea $n \in \mathbb{N}$ el número de procesos que buscan acceder a la sección crítica demostraremos el caso base $(n=2)$ para luego demostrar el caso general

- Si $n=2$ disponemos de los procesos P_0 y P_1. Supondremos que alguno de ellos no es capaz de acceder a sección crítica para demostrar lo contrario:

  - Supongamos que para todo instante $t \in T$ P_0 no es capaz de acceder a sección crítica; es decir:

$$s_0^t \neq s_1^t \quad \forall t \in T$$

entonces $s_0^{t_0} = s_1^{t_0}$ $t_0 \in T$, luego P_1 accede a sección crítica. Tras ello, es decir, cuando $t' > t_0$, $t' \in T$ $s_1^{t'} = s_0^{t_0}$ luego P_0 accederá a sección crítica.

- Supongamos ahora que para todo $t \in T$ P_1 no es capaz de acceder a sección crítica, es decir:

$$s_1^t = s_0^t \quad \forall t \in T$$

entonces $s_1^{t_0} = s_0^{t_0}$ para algún $t_0 \in T$, entonces P_0 accederá a sección crítica. Tras ello, es decir, $t' > t_0$ $t' \in T$, P_0 pondrá $s_0^{t'} = (s_0^{t_0} + 1) \bmod 2$ luego $s_0^{t'} \neq s_0^t$ por las propiedades del anillo $\mathbb{Z}_2$ pudiendo así acceder P_1.

Supuesto cierto para $n-1$, veamos qué ocurre para n. Tendremos siempre en mente que, por hipótesis de inducción (HI), al menos $n-1$ procesos pueden acceder a sección crítica.

- Supongamos que P_0 no puede acceder a sección crítica, es decir,

$$s_0^t \neq s_{n-1}^t \quad \forall t \in T$$

Usando la HI sabemos que $\exists t_0 \in T \mid P_{n-1}$ podrá acceder a sección crítica; luego, $s_{n-1}^{t_0} \neq s_{n-2}^{t_0}$. Tras ello, es decir, $t' > t_0$ $t' \in T$, P_{n-1} actualizará $s_{n-1}^{t'} = s_{n-2}^{t_0}$.

Como $s_0^t \neq s_{n-1}^t \ \forall t \in T$, $s_{n-1}^{t_0} \neq s_{n-2}^{t_0} \wedge s_{n-1}^{t'} = s_{n-2}^{t_0}$ entonces

$$s_0^{t'} = s_{n-1}^{t'}$$

permitiendo la entrada de P_0 en la sección crítica lo cual es una contradicción.

- Supongamos que P_i, $i \neq 0$, no puede acceder a sección crítica, es decir,

$$s_i^t = s_{i-1}^t \quad \forall t \in T$$

Usando la HI sabemos que $\exists t_0 \in T \mid P_{i-1}$ podrá acceder a sección crítica, es decir, $s_{i-1}^{t_0} \neq s_{i-2}^{t_0}$. Tras ello, es decir, $t' > t_0$ $t' \in T$, P_{i-1} actualizará su clave, es decir,

$$s_{i-1}^{t'} = s_{i-2}^{t_0}$$

luego, como $s_i^t = s_{i-1}^t \ \forall t \in T$, $s_{i-1}^{t'} = s_{i-2}^{t_0}$ y $s_{i-1}^{t_0} \neq s_{i-2}^{t_0}$ entonces

$$s_i^{t'} \neq s_{i-1}^{t'}$$

permitiendo la entrada de P_i a sección crítica, lo cual es una contradicción.

Hemos probado la propiedad de alcanzabilidad de la sección crítica de este algoritmo de exclusión mutua.