1. Conocer y comprender la definición de la medida de Lebesgue.

La medida de Lebesgue surge de la necesidad de definir la medida n-dimensional en $\mathbb{R}^N$. Antes de comenzar el desarrollo.

<u>Notación</u>

Sea $N \in \mathbb{N}$, $P(\mathbb{R}^N) \longrightarrow$ conjunto de las partes de $\mathbb{R}^N$ (todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$)

$\Delta_N = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq N\}$

$\pi_k = \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ k-ésima proyección coordenada en $\mathbb{R}^N$, es decir, $\pi_k(x) = x(k)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$

Para nosotros, un intervalo en $\mathbb{R}^N$ no será más que el N-ésimo producto de intervalos de $\mathbb{R}$. Denotamos por $\mathcal{J}$ al conjunto de todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$ ($\emptyset \in \mathcal{J}$). Para $I \in \mathcal{J} \setminus \{\emptyset\}$ y $k \in \Delta_N$, $\pi_k(I)$ es un intervalo acotado en $\mathbb{R}$

Definimos $\mu : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ dada por $\mu(I) = \prod_{k=1}^{N} (\sup \pi_k(I) - \inf \pi_k(I))$ donde I es un intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$. Por convenio, y lógicamente, $\mu(\emptyset) = 0$. A la función μ la llamamos medida elemental de los intervalos acotados.

Lebesgue usó la medida para estimar por exceso la medida de cualquier conjunto $E \in P(\mathbb{R}^N)$. Para ello, consideramos un recubrimiento numerable de E, es decir, $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n \in \mathcal{J}\ \forall n \in \mathbb{N} \mid E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.
Intuitivamente, la medida de E será menor o igual que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$, pero es posible escoger otra sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para aproximar la medida de E todo lo necesario, dando lugar a la definición:

$$\lambda^* : P(\mathbb{R}^N) \longrightarrow [0, \infty] \mid \lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) \mid I_n \in \mathcal{J}\ \forall n \in \mathbb{N},\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \subset P(\mathbb{R}^N)$$

conocida como medida exterior de Lebesgue.
No obstante, esta no es la solución al problema pues si tomamos $E, F \subset P(\mathbb{R}^N) \mid E \cap F \neq \emptyset$ tenemos que la medida de $E \cup F$ podría no coincidir con la suma de las medidas de E y F; dando lugar al concepto de conjunto medible.

Se dice que $E \subset P(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cup E) + \lambda^*(W \setminus E) \quad \forall W \in P(\mathbb{R}^N)$$

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la familia de todos los conjuntos medibles.

En el caso anterior, si $\mathcal{E} \in \mathcal{M}$ y $F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$:

$$\lambda^*(\mathcal{E} \cup F) = \lambda^*((\mathcal{E} \cup F) \cap \mathcal{E}) + \lambda^*((\mathcal{E} \cup F) \setminus \mathcal{E}) = \lambda^*(\mathcal{E}) + \lambda^*(F)$$

Por tanto, podemos definir ya la función

$$\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty] \mid \lambda(\mathcal{E}) = \lambda^*(\mathcal{E})$$

conocida como medida de Lebesgue. Como nota importante cabe recalcar que $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}}$ y que $\forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $W \cap \emptyset = W \setminus \mathbb{R}^N = \emptyset$ y $W \cap \mathbb{R}^N = W \setminus \emptyset = W$

Como $\lambda^*(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset, \mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Concretamente tiene dos propiedades:

→ Crecimiento: La medida de Lebesgue es una función creciente, es decir, si $\mathcal{E}, F \in \mathcal{M}$, $\mathcal{E} \subseteq F$ $\Rightarrow \lambda(\mathcal{E}) \leq \lambda(F)$

Esto es así pues si $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento de F, en particular, lo es de $\mathcal{E}$ por lo que basta usar que el ínfimo de un conjunto es menor o igual que el de cualquiera de los subconjuntos del conjunto de partida no vacíos.

→ Sea $\{\mathcal{E}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ se tiene

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(\mathcal{E}_n) \qquad (1)$$

A esta propiedad se le suele llamar σ-subaditividad. Fijados $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ $\forall k \in \Delta_n$ podemos usar (1) tomando $\mathcal{E}_k = \emptyset$ $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \Delta_N$. Con ello obtenemos:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(\mathcal{E}_k)$$

A esta consecuencia se dice que es finitamente aditiva. En particular, $\lambda^*(\mathcal{E} \cup F) \leq \lambda^*(\mathcal{E}) + \lambda^*(F)$ $\forall \mathcal{E}, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. De aquí deducimos que

$$\mathcal{E} \in \mathcal{M} \iff \lambda^*(W \cap \mathcal{E}) + \lambda^*(W \setminus \mathcal{E}) \leq \lambda^*(W) \; \forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Es obvio si $\lambda^*(W) = \infty$.

$b)$ Continuidad creciente y decreciente de la medida de Lebesgue

Ambos criterios y propiedades son consecuencia de la σ-aditividad de la medida de Lebesgue.

Notación

Sea $\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid A_n \subseteq \Omega \ \forall n\in\mathbb{N} \wedge A_n \subset A_{n+1}$. Entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ puede entenderse como el límite de la sucesión $\{A_n\}$, por lo que $\{A_n\} \nearrow A$. Análogamente, si $A_n \supseteq A_{n+1} \wedge A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ tenemos que $\{A_n\} \searrow A$

Veamos los dos tipos de continuidad.

→ La medida de Lebesgue es creciente continua, es decir

$$A_n \in \mathcal{M} \ \forall n\in\mathbb{N},\ \{A_n\} \nearrow A \Rightarrow \{\lambda(A_n)\} \nearrow \lambda(A) \quad (1)$$

Análogamente

$$A_n \in \mathcal{M} \ \forall n\in\mathbb{N},\ \{A_n\} \searrow A \quad \lambda(A_1) < \infty \Rightarrow \{\lambda(A_n)\} \searrow \lambda(A) \quad (2)$$

Es importante realzar que la hipótesis $\lambda(A_1) < \infty$ es necesaria en (2) pese a que pueda ser a partir de un natural en adelante que se cumpla la condición. Un ejemplo para destacar dicha importancia es $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n = [n, \infty[\subset \mathbb{R} \ / \ \lambda(A_n) = \infty \ \forall n\in\mathbb{N}$. Pero $\{A_n\} \searrow \emptyset$, pero $\{\lambda(A_n)\} \not\to 0$.

$c)$ Relación entre la medida de Lebesgue y la medida elemental de los intervalos acotados

Veamos si, pese a ser algo lógico, $\lambda(I) = m(I) \ \forall I \in \mathcal{J}$. Haciendo uso de una serie de propiedades básicas de $\mathcal{J}$ y $\mathcal{M}$ tenemos que.

→ La medida de Lebesgue extiende a la medida elemental de los intervalos acotados, es decir,

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{M} \quad \wedge \quad \lambda(I) = m(I) \ \forall I \in \mathcal{J}$$

Este resultado nos permite dar una forma correcta de formalizar el concepto de longitud en $\mathbb{R}$, área en $\mathbb{R}^2$ o volumen en $\mathbb{R}^3$ siempre y cuando hablemos de conjuntos medibles. Así como de probar ciertos resultados intuitivos. Si $E \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M} \wedge \lambda(E) = 0$ (siendo E numerable)

3. Conocer y comprender la demostración del teorema referente a la estabilidad de la familia de los conjuntos medibles y la σ-aditividad de la medida de Lebesgue.

Teorema

La familia $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ de los conjuntos medibles tiene las siguientes propiedades:

i) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

ii) $E \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

iii) $E_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N},\ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

A su vez, la medida de Lebesgue tiene la siguiente propiedad:

$$E_n \in \mathcal{M}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \quad (*)$$

Demostración

i) Sea $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, $\lambda^*(W \cap \mathbb{R}^N) + \lambda^*(W \setminus \mathbb{R}^N) = \lambda^*(W)$, y por la definición de conjunto medible $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$.

ii) Si $E \in \mathcal{M}$, $\lambda^*(W \cap E^c) + \lambda^*(W \setminus E^c) = \lambda^*(W \setminus E) + \lambda^*(W \cap E) \underset{\uparrow\, E \in \mathcal{M}}{=} \lambda^*(W) \Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$.

iii) Sean $E, F \in \mathcal{M}$, $\forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene $\lambda^*(W) \underset{\uparrow\, E \in \mathcal{M}}{=} \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \underset{\uparrow\, F \in \mathcal{M}}{=} \lambda^*(W \cap E \cap F) + \lambda^*(W \cap E \cap F^c) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F^c)$.

Si tomamos $W \cap (E \cup F)$ en lugar de W, entonces:

$$\lambda^*(W \cap (E \cup F)) = \lambda^*(W \cap (E \cup F) \cap E) + \lambda^*(W \cap (E \cup F) \cap E^c) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \cap (E^c \cap F)) \overset{F \in \mathcal{M}}{=}$$

$$= \lambda^*(W \cap E \cap F) + \lambda^*(W \cap E \cap F^c) + \lambda^*(W \cap (E^c \cap F) \cap F) + \lambda^*(W \cap (E^c \cap F) \cap F^c) =$$

$$= \lambda^*(W \cap E \cap F) + \lambda^*(W \cap E \cap F^c) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F) \quad (1)$$

Y teniendo en cuenta la expresión de $\lambda^*(W)$ y $\lambda^*(W \cap (E \cup F))$ tenemos:

$$\lambda^*(W) - \lambda^*(W \cap (E \cup F)) = \lambda^*(W \cap E^c \cap F^c)$$

$$\hookrightarrow \lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap (E \cup F)) + \lambda^*(W \cap (E \cup F)^c) \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{M}$$

Aplicando inducción, dada una familia finita de conjuntos medibles, su unión también es medible.
Además, para $E, F \in \mathcal{M}$ con $E \cap F = \emptyset$, $\lambda^*(W \cap (E \uplus F)) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \cap F)\ \forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
y por inducción se obtiene que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$E_k \in \mathcal{M}\ \forall k \in \Delta_n,\ E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k \Rightarrow \lambda^*(W \cap E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(W \cap E_k)\ \ \forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \quad (2)$$

Tomando $W = \mathbb{R}^N$ obtenemos (*) para una familia finita de conjuntos.

Supongamos ahora que $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \mid E_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Para usar lo ya visto tomamos $F_n = \biguplus_{k=1}^{n} E_k\ \forall n \in \mathbb{N}$. Fijados $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ y $n \in \mathbb{N}$ usamos que λ^* es creciente y gracias a (2) como $F_n \in \mathcal{M}$ obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} (W \cap E_k) + \lambda^*(W \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(W \cap E_k) + \lambda^*(W \setminus F_n) = \lambda^*(W \cap F_n) + \lambda^*(W \setminus F_n) = \lambda^*(W) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(W \cap E_n) + \lambda^*(W \setminus E) \leq \lambda^*(W)$$

Como $W \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (W \cap E_n)$ usando la σ-aditividad deducimos que

$$\lambda^*(W) \leq \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(W \cap E_n) + \lambda^*(W \setminus E) \leq \lambda^*(W)$$

Esto prueba que $E \in \mathcal{M}$ y que tomando $W = E$ obtenemos claramente $(*)$

Finalmente, sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid E_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$ que no tienen por qué ser dos a dos disjuntos, y sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
Tomando $H_1 = E_1$ y $H_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sabemos ya que $H_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y que $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} H_n$, luego usando lo ya demostrado, obtenemos que $E \in \mathcal{M}$. Esto prueba que se cumple (iii) ■