Trabajo sobre superficies compactas

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Autor:Lucas Hidalgo Herrera

Grado: Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Asignatura: Topología II

Fecha: 10 de enero de 2026

Índice General

1 Introducción

A lo largo de este documento trataremos de demostrar dos resultados bastante significativos en la clasificación de superficies compactas conexas, como es la **invarianza de la característica de Euler por transformaciones elementales** y un conjunto de equivalencias sobre el concepto **orientabilidad** de una superficie conexa y compacta, nos permitirá clasificar de forma sencilla toda superficie compacta y conexa.
Para ello, deberemos tratar una serie de conceptos preliminares que nos permitirán obtener estos resultados.

2 Preliminares

Cabe destacar que, daremos por conocidos ciertos conceptos básicos que se han visto en clase y que son la base de este trabajo; ejemplos de esto son: espacios topológicos **localmente euclídeos**, **disco regular**, **triángulo topológico**... Incluso, uno de los resultados que conocemos y es fundamental para poder tratar con superficies, el **Teorema de Radó**, que nos permite triangularizar las superficies en cuestión. Por último, no daremos la definición de cada una de las transformaciones elementales aplicables a una presentación poligonal debido a su extensión.

2.1 Elementos básicos

Aunque hayamos dejado atrás algunos conceptos básicos, es imprescindible citar el concepto de superficie pues es el elemento central de este tema.

Definicion 1. *Dado un espacio topológico (S, τ) cumpliendo el segundo axioma de separabilidad y el segundo axioma de numerabilidad, diremos que es una superficie si para cada punto existe un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.*

Como última definición estrictamente necesaria, hablaremos del concepto de **presentación poligonal**, pues la usaremos en innumerables ocasiones.

Definicion 2. *Llamaremos presentación poligonal de una superficie compacta S a una expresión de la forma:*

$$P = a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_m, n, m \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

donde a_i son símbolos y w_j son expresiones del siguiente tipo:

$$w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \ldots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$

Además, $\epsilon_{j_l} \in \{-1, 1\} \, \forall l \in \{1, \ldots, k\}$ y el número de veces que aparece cada símbolo en el global de las expresiones es exactamente 2.

Como añadido, daremos por conocido el siguiente resultado, que nos permitira escoger una presentación poligonal dada una superficie compacta.

Corolario 2.1. *Toda superficie compacta tiene una presentación poligonal; recíprocamente, toda presentación poligonal da una superficie compacta.*

2.2 Clasificación de las superficies compactas

Debido a la longitud del mismo, daremos por conocido el **algortimo de determinación de** $|P|$ dada una presentación poligonal P cualquiera. Este algoritmo nos permite conocer los siguientes corolarios.

Corolario 2.2. *Sea S una superficie compacta y conexa, entonces S es homeomorfa a alguna de las siguientes superficies:*

- $\mathbb{S}^2$
- *Dado* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $\mathbb{T}_n$
- *Dado* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $\mathbb{RP}^2_n$

Demostración. Durante el desarrollo del algoritmo se obtiene esta clasificación. □

El siguiente corolario, lo daremos por demostrado, pues se vió en clase y el debido al **primer grupo de homología** obtenido como el abelianizado del grupo fundamental.

Corolario 2.3. ?? *Sea S una superficie compacta y conexa, entonces S es homeomorfa a una, y solo una, de las siguientes superficies:*

- $\mathbb{S}^2$
- *Dado* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $\mathbb{T}_n$
- *Dado* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $\mathbb{RP}^2_n$

2.3 Característica de Euler y orientabilidad

Debido a que lo usaremos a lo largo del trabajo, debemos conocer qué es la **característice de Euler**. Primero lo vemos para el caso de una presentación poligonal y después lo trataremos para el caso de una superficie compacta cualquiera.

Definicion 3 (Definición)**.** *Dada una presentación poligonal P, denotamos por V,A y C al número de vertices, aristas y caras de la presentación poligonal, respectivamente. Cabe destacar que V y A están vistos en la realización geométrica de P,$|P|$. Se define, la **característica de Euler de P** como:*

$$\chi(P) = V - A - C$$

Para facilidad práctica, es fácil ver que A es el número de símbolos que usamos en la presentación poligonal y C es el número de expresiones.

Con vistas a la demostración del resultado de la sección 4, vamos a tratar el concepto de orientabilidad de una superficie compacta cualquiera. Antes de tratar con superficies compactas, debemos tratar con alguna de sus presentaciones poligonales.

Definicion 4. *Dada una presentación poligonal* $P = \{a_1, \ldots, a_n; w_1, \ldots, w_m\}, n, m \in \mathbb{N}$*, diremos que es* ***no orientable*** *si, en alguna de sus expresiones, alguno de los símbolos aparece dos veces con el mismo exponente.*
Análogamente, diremos que P *es una presentación poligonal* ***orientable*** *si cada símbolo dispone de sus apariciones en las expresiones con símbolos opuestos.*

Definicion 5. *Dada una superficie topológica compacta* (S, τ_S)*, diremos que es* ***no orientable*** *cuando alguna de sus presentaciones poligonales es no orientada.*
Análogamente, diremos que S *es* ***orientable*** *si admite alguna presentación poligonal orientada.*

3 Invarianza por transformaciones elementales

Estamos ya en disposición de enunciar el primero de los objetivos de este documento. Buscamos probar que la característica de Euler es invariante por cualquiera de las transformaciones elementales que hemos citado anteriormente.

Proposición 3.1 (Invarianza de la característica de Euler)**.** *Dada una presentación poligonal* $P = \{a_1 \ldots a_n; w_1, \ldots, w_m\}$ *y sea* $\chi(P)$ *su característica de Euler, esta es invariante por cualquier transformación elemental.*

Demostración. Veamos que esto es cierto para cualquiera de las transformaciones elementales que hemos visto:

- **Renombrar**: Supongamos que dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, renombramos a_i por b_i, lo cual no varía el número de caras (número de expresiones), tampoco el número de aristas(número de símbolos), ni el número de vértices. Esto último ocurre porque ninguna de las expresiones cambia, salvo el renombramiento, luego en el cociente todo sigue igual.

- **Subdividir**: Supongamos que subdividimos el símbolo $a_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ añadiendo los símbolos b_1, b_2; distinguimos casos:

  - $|\{j \in \{1, \ldots, m\} \,|a_i \in w_j\}| = 1$: En este caso, sin pérdida de generalidad, sea
  $$w_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_1} \ldots a_i \ldots a_i^{-1} \ldots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$$
  dicha expresión, tras aplicar la transformación la transformación obtenemos
  $$\bar{w}_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_1} \ldots b_1 b_2 \ldots b_2^{-1} b_1^{-1} \ldots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$$
  Por tanto, hemos añadido un vértice entre b_1 y b_2, y una arista; consiguiendo así la invarianza.
  - $|\{j \in \{1, \ldots, m\} \,|a_i \in w_j\}| = 2$: En este caso, sin pérdida de generalidad, sean
  $$w_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_{0_1}} \ldots a_i \ldots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_{0_k}}$$
  $$w_{j_1} = a_{j_{1_1}}^{\epsilon_{1_1}} \ldots a_i^{-1} \ldots a_{j_{1_k}}^{\epsilon_{1_k}}$$

dichas expresiones, tras aplicar la transformación obtenemos

$$\bar{w}_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_{0_1}} \dots b_1 b_2 \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$$

$$\bar{w}_{j_1} = a_{j_{1_1}}^{\epsilon_{1_1}} \dots b_2^{-1} b_1^{-1} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$$

Por tanto, hemos añadido un vértice entre b_1 y b_2, y una arista; consiguiendo así la invarianza.

- **Consolidar** Supongamos que los símbolos $a_{i_0}, a_{i_1} \in \{a_1, \dots, a_n\}$ aparecen de alguna de las siguientes formas en todas sus apariciones:

$$a_{i_0} a_{i_1} \text{ ó } (a_{i_0} a_{i_1})^{-1}$$

En ese caso, buscamos consolidar la combinación $a_{i_0} a_{i_1}$ en el símbolo $b \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Debemos distinguir casos, al igual que en el caso anterior:

  - $|\{j \in \{1, \dots, m\} \, | a_{i_0} a_{i_1} \in w_j\}| = 1$: En ese caso, sin pérdida de generalidad, sea

$$w_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_1} \dots a_{i_0} a_{i_1} \dots (a_{i_0} a_{i_1})^{-1} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$$

dicha expresión; tras aplicar la transformación obtenemos:

$$\bar{w}_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_1} \dots b \dots b^{-1} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$$

Como podemos observar hemos reducido en una unidad el número de aristas y ,también, en 1 el número de vértices eliminando el vértice entre a_{i_0} y a_{i_1}; manteniendo así la invarianza.

  - $|\{j \in \{1, \dots, m\} \, | a_{i_0} a_{i_1} \in w_j\}| = 2$: En ese caso, sin pérdida de generalidad, sean

$$w_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_{0_1}} \dots a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_{0_k}}$$

$$w_{j_1} = a_{j_{1_1}}^{\epsilon_{1_1}} \dots (a_{i_0} a_{i_1})^{-1} \dots a_{j_{1_k}}^{\epsilon_{1_k}}$$

dichas expresiones; tras aplicar la transformación obtenemos:

$$\bar{w}_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_{0_1}} \dots b \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_{0_k}}$$

$$\bar{w}_{j_1} = a_{j_{1_1}}^{\epsilon_{1_1}} \dots b^{-1} \dots a_{j_{1_k}}^{\epsilon_{1_k}}$$

Como podemos observar hemos reducido en una unidad el número de aristas y ,también, en 1 el número de vértices eliminando el vértice entre a_{i_0} y a_{i_1}; manteniendo así la invarianza.

- **Reflejar**: Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, reflejamos la expresión $w_j = a_{j_1} \dots a_{j_k}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, dejaría el número de aristas invariante pues no hemos introducido ningún símbolo asícomo el número de caras, pues no hemos introducido ninguna expresión.Por último, el número de vértices queda invariante, ya que invertir el sentido de los lados del polígono no cambia la adyacencia de los vertices del mismo en el cociente.

- **Rotar**: Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, rotamos la expresión $w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$; en ese caso, el número de caras queda invariante, el número de aristas queda invariante al no añadir ningún símbolo más. Por último, el número de vértices no cambia, pues en el cociente no ha cambiado ninguna orientación de los lados.

- **Cortar**: Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, cortamos la expresión $w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ en el símbolo $j_t, t \in \{2, \dots, k-2\}$ añadiendo el símbolo $b \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Obtendríamos el siguiente resultado:
$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}} \overset{\text{Cortar}}{\rightsquigarrow} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} b, b^{-1} a_{j_t+1}^{\epsilon_{j_t+1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$$
Como podemos ver, hemos añadido un símbolo y una expresión, lo que se reflaja en una arista y una cara, respectivamente. Por tanto, queda invariable la característica de Euler.

- **Pegar**: Supongamos que existen $j_0, j_1 \in \{1, \dots, m\}$ tales que las expresiones correspondientes son de la forma
$$w_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_{0_1}} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_{0_k}} b$$
$$w_{j_1} = b^{-1} a_{j_{1_1}}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{j_{1_k}}^{\epsilon_{1_k}}$$
con $b \in \{1, \dots, n\}$; entonces podemos aplicar la transformación de pegar; tras la transformación obtenemos la expresión siguiente:
$$w = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_{0_1}} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_{0_k}} a_{j_{1_1}}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{j_{1_k}}^{\epsilon_{1_k}}$$
Como podemos ver, hemos perdido un símbolo y una expresión, lo que se reflaja en una arista y una cara, respectivamente. Por tanto, queda invariable la característica de Euler.

- **Desdoblar**: Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, desdoblamos la expresión $w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ en el símbolo $j_t, t \in \{2, \dots, k-2\}$ añadiendo el símbolo $b \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Obtendríamos el siguiente resultado:
$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}} \overset{\text{Desdoblar}}{\rightsquigarrow} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} bb^{-1} a_{j_t+1}^{\epsilon_{j_t+1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$$
Como podemos ver, hemos añadido un símbolo, lo que se reflaja en una arista y un vertice, respectivamente. Esto último es así porque, en el espacio topológico cociente para obtener la realización geométrica de P, el final de b y b^{-1} no se relacionan con ningún otro vértice. Por tanto, queda invariable la característica de Euler.

- **Doblar**: Supongamos que existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que la expresión w_j permite doblar el símbolo $b \in \{a_1, \dots, a_n\}$(estamos suponiendo que la longitud de la expresión lo permite), entonces:
$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots bb^{-1} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}} \overset{\text{Doblar}}{\rightsquigarrow} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$$

De forma análoga al caso anterior, podemos ver que hemos eliminado el símbolo b, perdiendo una arista, y hemos eliminado el vértice entre b y b^{-1}. POr tanto, la característica de Euler se mantiene invariante.

$\square$

4 Equivalencias de orientabilidad

Ya hemos porbado que la característica de Euler es invariante por transformacione elementales; lo que, junto al **algoritmo de determinación de la realización geométrica** nos permite deducir una buena definición de **característica de Euler de una superficie compacta** cualquiera.

Definicion 6 (Definición). *Dada una superficie compacta cualquiera,S, se define la **característica de Euler de S** como la característica de Euler de cualquiera de sus presentaciones poligonales.*

Pasamos ya a enunciar el resultado que nos permitirá, junto a la **característica de Euler**, clasificar cualquier superficie compacta y conexa dada una presentación poligonal suya.
El siguiente resultado nos resultará útil para probar el último resultado.

Teorema 4.1 (Superficies orientables). *Sea S una superficie compacta y conexa, se tiene que*

$$S \textit{es orientable} \iff S \textit{es homeomorfa a la esfera o a una suma conexa de uno o más toros}$$

Demostración. Si consideramos las presentaciones estándar P_1 y P_2 de la esfera y el toro, respectivamente, sabemos que son las siguientes:

- $P_1 = \{a, b; aa^{-1}bb^{-1}\}$
- $P_2 = \{a, b; aba^{-1}b^{-1}\}$

Que son claramente orientadas; por tanto, por definición de superficie orientable estas son orientables. Además, puesto que la presentación poligonal de la suma conexa de dos superficies compactas y conexas se caracteriza por concatenar ambas expresiones y tomar como conjunto de símbolos todos los símbolos de las expresiones, podemos asegurar que la presentación poligonal de la suma conexa de n toros, $n \in \mathbb{N}$, sigue siendo orientada. Sea ahora M una superficie que admita, al menos, una presentacion orientable y veamos que deben ser alguna de ellas. Para ello, sea P dicha presentación, debemos aplicar el algoritmo de determinación de $|P|$, en el vimos que, tras agrupar las componentes conexas que pudiéramos en el paso 1, debíamos doblar tantas veces como se pudiera. Tras esto, pudimos clasificar $|P|$ en dos posibilidades:

- $|P|$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^2$
- $|P|$ es homeomorta a $\mathbb{RP}^2$

Sin embargo, puesto que **doblar** no influye en la orientabilidad de la presentación poligonal al no cambiar ningún exponente de la misma, es imposible el segundo caso. Si obtenemos el primero de ellos hemos acabado; en caso contrario, debemos seguir aplicando el algoritmo para obtener alguna de los siguientes resultados:

- $|P|$ es homeomorfa a $\mathbb{T}_n$ con $n \geq 1$
- $|P|$ es homeomorfa a $\mathbb{RP}^2_n, n \geq 2$

No obstante, como la única transformación elemental que altera el exponente de los símbolos de una expresión es **reflectar** que, en el algoritmo, sólo se usa si había apariciones de símbolos con el mismo exponente en la presentación de partida como por ejemplo el paso 3 (si seguimos el teorema de clasificación de las superficies compactas de la bibliografía serían los pasos 4 y 7 también); podemos ver que no necesitamos aplicar esos pasos obteniendo así que la presentación poligonal resultante es orientada consiguiendo así que $|P|$ es homeomorfa a $\mathbb{T}_n$ con $n \geq 1$. $\square$

Por tanto, sabemos ya que, gracias al corolario **??**, las únicas superficies compactas, conexas y orientables, salvo homeomorfismos, son:

- La esfera, $\mathbb{S}^2$.
- La suma conexa de n toros con $n \geq 1$, $\mathbb{T}_n$.

Proposición 4.1 (Equivalencias de orientabilidad). *Sea (S, τ_S) una superficie compacta y conexa. Entonces, equivalen:*

- *S es orientable*
- *S tiene una presentación poligonal de una única expresión que es orientada.*
- *Cualquier presentación poligonal de S de una única expresión es orientada.*

Demostración.

i) $\Longrightarrow$ *ii)*] Puesto que S es orientable, por definición, se tiene que admite una presentación poligonal orientada.

Además, como S es conexa entonces, basta aplicar el primero de los pasos del algoritmo de determinación de $|P|$ para obtener dicha presentación con una única expresión.

ii) $\Longrightarrow$ *iii)*] Supongamos que S admite una presentación poligonal de una única expresión que es orientada, séase P_0.

Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que P es otra presentación poligonal de S que es **no** orientada; puesto que, el algoritmo de determinación de $|P|$ nos dice que todas las presentaciones de S se pueden derivar de una dada mediante transformaciones elementales, tenemos que P se obtiene de P_0 en una secuencia finita de transformaciones elementales.

Puesto que la superficies es conexa, podemos suponer sin pérdida de generalidad, salvo aplicación del primer paso del algoritmo de determinación de $|P|$, que tiene una única expresión.

Ahora bien, solo nos queda por ver que P debe ser orientada; puesto que P_0 sí es orientada y hemos visto en la demostración del teorema 4.1 que el algoritmo de determinación de $|P_0|$ deja invariante la orientabilidad de una presentación poligonal orientada, tenemos que, necesariamente, P es orientada al ser equivalente a P_0, lo cual es una contradicción con nuestra suposición.

Esto es así porque, en caso de que $|P|$ no fuera orientada se tendría, por el teorema 4.1, que $|P|$ no sería homeomorfa a ni a la esfera de $\mathbb{R}^3$ ni a la suma de n toros, para ningún $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Sin embargo, al ser P una presentación poligonal de S, estaríamos concluyendo que S tampoco cumpliría esos homeomorfismos contradiciendo así el teorema 4.1, lo cual es una contradicción.

Por tanto, toda presentación poligonal de S de una única expresión es orientada.

iii) $\Longrightarrow$ *i)*] Puesto que, por hipótesis, cualquier presentación poligonal de S es orientada entonces S admite, al menos, una presentación poligonal orientada; y por tanto, es orientable.

$\square$