APELLIDOS: Herrezuelo Bortsova, Hidalgo Herrera, Vílchez Sánchez GRUPO: 1

NOMBRE: Antonio, Lucas, Juan Carlos NIF: 79383156 J 26512990 Q 14276362 D Nº HOJAS: 4

LMD

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

26 de abril de 2024

1. Demuestre por inducción que para todo número natural n existe un polinomio $f_n(x, y)$ cumpliendo:

$$x^n - y^n = (x - y)f_n(x, y)$$

   Tras perfeccionar la demostración, defina sin ambigüedad el factor $f_n(x, y)$ de $x^n - y^n$ cuya existencia ha concluido y calcule su valor para $n \in 4$.

2. Encuentre la solución general de la recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

   y posteriormente encuentre la solución particular que cumple $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

2. Encuentre la solución general de la recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

y posteriormente encuentre la solución particular que cumple $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

El orden de la recurrencia k es 2 pues para cada término u_{n+2} este depende de los dos anteriores.
Es claro que el polinomio característico $p(x)$ es

$$p(x) = x^2 - 6x + 9$$

De donde deducimos que la ecuación característica es

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

cuyas raíces r_i y sus multiplicidades r_i son

$$r_1 = 3 \quad \text{con} \quad m_1 = 3$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea notada por $x_n^{(h)}$ es

$$x_n^{(h)} = (c_0 + c_1 n) 3^n$$

con $p(n) = c_0 + c_1 n$ un polinomio de grado 1 por la multiplicidad de la raíz

Vamos a estudiar la parte no homogénea buscando una solución particular que se notará por $x_n^{(p)}$

Las funciones de ajuste son las siguientes

$$f(n) = 3 \cdot 2^n$$
$$g(n) = 7 \cdot 3^n$$

Para el caso $f(n)$, como $s=2$ no es solución de la ecuación característica, es decir, tiene multiplicidad cero, $q(n) = 3$ con grado 0 luego por el Corolario 2.4.2

$$\overline{x}_n^{(p)} = c_2 2^n$$

Del mismo modo, para $g(n)$, como $s = 3$ es solución de la ecuación característica con multiplicidad 2 y $g(n) = 7$ con grado 0 luego por el Corolario 2.4.2

$$\tilde{x}_n^{(p)} = n^3 c_3 3^n$$

Haciendo uso del Teorema 2.4.3 sabemos que una solución particular $x_n^{(p)}$ de nuestra recurrencia será $x_n^{(p)} = \overline{x}_n^{(p)} + \tilde{x}_n^{(p)} = c_2 2^n + n^2 c_3 3^n$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, sabemos que

$$3\,2^n+7\cdot 3^n = U_{n+2}-6U_{n+1}+9U_n = x_{n+2}^{(p)}-6x_{n+1}^{(p)}+9x_n^{(p)}$$

de donde

$$x_{n+2}^{(p)} = c_2 2^{n+2}+(n+2)^2 c_3 3^{n+2} = 2^n(4c_2)+3^n(9(n+2)^2 c_3)$$

$$x_{n+1}^{(p)} = c_2 2^{n+1}+(n+1)^2 c_3 3^{n+1} = 2c_2 2^n+3^n(3(n+1)^2 c_3)$$

Luego

$$3\cdot 2^n+7\cdot 3^n = 2^{n+2}c_2+(n+2)^2 3^{n+2}c_3-6(2^{n+1}c_2+(n+1)^2 3^{n+1}c_3)+9(2^n c_2+n^2 3^n c_3)$$

$$= 4\cdot 2^n c_2+(n^2+4n+4)\cdot 9\cdot 3^n c_3-6(2\,2^n c_2+(n^2+2n+1)\,3\cdot 3^n c_2)+9\cdot 2^n c_2+9n^2\cdot 3^n c_3$$

$$= 4\cdot 2^n c_2+(9n^2+36n+36)\cdot 3^n c_3-12\,2^n c_2+(-18n^2-36n-18)\cdot 3^n c_3+9\,2^n c_2+9n^2 3^n c_3$$

$$= 2^n(4c_2-12c_2+9c_2)+3^n(\cancel{9n^2}c_3+\cancel{36n}c_3+36c_3-\cancel{18n^2}c_3-\cancel{36n}c_3-18c_3+\cancel{9n^2}c_3)$$

$$= 2^n(c_2)+3^n(18c_3)$$

Por tanto bastará con que

$$3 = c_2$$

$$7 = 18c_3, \quad c_3 = \frac{7}{18}$$

Es decir $x_n^{(p)} = 3\,2^n+\frac{7}{18}\cdot 3^n$

y la solución general $x_n = x_n^{(h)}+x_n^{(p)}$ es

$$x_n = (c_0+c_1 n)3^n+3\cdot 2^n+n^2\cdot 3^n\frac{7}{18}$$

Usando las condiciones determinadas en el enunciado calculamos c_0 y c_1

$$1 = U_0 = c_0+3, \quad c_0 = -2$$

$$4 = 3c_0+3c_1+6+\frac{7}{6} = 3c_0+3c_1+\frac{43}{6} = -6+3c_1+\frac{43}{6} = 3c_1+\frac{7}{6}, \quad \frac{17}{18} = c_1$$

Es decir la solución particular para las condiciones del problema dadas es

$$x_n = \left(-2+\frac{17}{18}n\right)3^n+3\,2^n+n^2\cdot 3^n\frac{7}{18}$$

1. Demuestre por inducción que para todo número natural n existe un polinomio $f_n(x, y)$ cumpliendo:

$$x^n - y^n = (x - y)f_n(x, y)$$

Tras perfeccionar la demostración, defina sin ambigüedad el factor $f_n(x, y)$ de $x^n - y^n$ cuya existencia ha concluido y calcule su valor para $n \in 4$.

La demostración es por el principio de inducción matemática según el predicado del tenor $P(n)$

$$x^n - y^n = (x-y) f_n(x,y) \quad \text{donde } f_n(x,y) \text{ es un polinomio}$$

En el caso base $n=0$, tenemos que $f_0(x,y)=0$ luego

$$0 = 1-1 = x^0 - y^0 = (x-y)\cdot 0$$

Luego $P(0)$ vale.

Como hipótesis de inducción supondremos que n es un natural y que $P(n)$ es cierto, es decir que

$$x^n - y^n = (x-y) f_n(x,y)$$

y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ vale

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x \cdot x^n - y \cdot y^n = x(x^n - y^n) + y^n(x-y) \\ &= x(x-y) f_n(x,y) + y^n(x-y) \\ &= (x-y)(x f_n(x,y) + y^n) \end{aligned}$$

y como la combinación lineal de polinomios es polinomio tenemos que $P(n+1)$ vale

Por el principio de inducción matemática sabemos que para todo natural n, $P(n)$ es cierto y eso era lo que se pedía

Por lo tanto definimos $f_{n+1}(x,y) = x f_n(x,y) + y^n$. Procedemos pues a calcular su valor para $n=4$.

$$f_0(x,y) = 0$$

$$f_1(x,y) = y$$

$$f_2(x,y) = x f_1(x,y) + y^2 = xy + y^2$$

$$f_3(x,y) = x f_2(x,y) + y^3 = x(xy+y^2) + y^3 = x^2y + y^2 + y^3$$