Análisis Matemático I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 8

1. Conocer y comprender la definición de vector gradiente, así como su relación con la diferencial.

2. Conocer y comprender el significado físico del vector gradiente y su relación con el plano tangente a una superficie explícita.

3. Conocer y comprender la condición suficiente para que un campo escalar sea diferenciable, en términos de sus derivadas parciales.

1. Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$ una función. Definimos el vector gradiente de f en el punto $a \in A$ como el vector cuyas componentes son las derivadas parciales respecto de las variables.

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right)$$

Veamos la clara relación entre la diferencial y el gradiente.
Supongamos que f es diferenciable en $a \in A$, como $Df(a)$ es lineal tenemos que, para $x \in A$

$Df(a)(x) = Df(a) \sum_{k=1}^{N} x_k e_k = \sum_{k=1}^{N} Df(a)(e_k)\, x_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, x_k$ donde esto nos dice que el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right)$ se corresponde con $Df(a)$, a este vector se le llama gradiente. y se cumple la siguiente correspondencia $Df(a)(x) = (\nabla f(a) \mid x)$

Por otra parte si f es parcialmente derivable $\Rightarrow \exists \nabla f(a)$ y como (1) es una f/bs tenemos que $\exists\, T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \mid T(x) = (\nabla f(a) \mid x)$
Si se cumple que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \Rightarrow T = Df(a)$ y por tanto f es diferenciable en $a \in A$.