1. Asociadas al experimento aleatorio de lanzar un dado y una moneda no cargados, se define la variable X como el valor del dado y la variable Y, que toma el valor 0 si sale cara en la moneda, y 1 si sale cruz. Calcular la función masa de probabilidad y la función de distribución del vector aleatorio (X,Y).

X = valor del dado

$Y \begin{cases} 0 & \text{cara} \\ 1 & \text{cruz} \end{cases}$

Tomamos P_X dada por

$P[X=1 \wedge Y=0] = \frac{1}{12}$ $\quad$ $P[X=1 \wedge Y=1] = \frac{1}{12}$

$P[X=2 \wedge Y=0] = \frac{1}{12}$ $\quad$ $P[X=2 \wedge Y=1] = \frac{1}{12}$

$P[X=3 \wedge Y=0] = \frac{1}{12}$ $\quad$ $P[X=3 \wedge Y=1] = \frac{1}{12}$

$P[X=4 \wedge Y=0] = \frac{1}{12}$ $\quad$ $P[X=4 \wedge Y=1] = \frac{1}{12}$

$P[X=5 \wedge Y=0] = \frac{1}{12}$ $\quad$ $P[X=5 \wedge Y=1] = \frac{1}{12}$

$P[X=6 \wedge Y=0] = \frac{1}{12}$ $\quad$ $P[X=6 \wedge Y=1] = \frac{1}{12}$

Ahora definimos la función de distribución dada por:

$$F_X(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \text{ y } y<0 \\ \frac{1}{12} & \text{si } 1\le x<2 \text{ y } 0\le y<1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 2\le x<3 \text{ y } 0\le y<1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 3\le x<4 \text{ y } 0\le y<1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 4\le x<5 \text{ y } 0\le y<1 \\ \frac{5}{12} & \text{si } 5\le x<6 \text{ y } 0\le y<1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 6\le x \text{ y } 0\le y<1 \\ 7/12 & \text{si } 1\le x<2 \text{ y } 1\le y \\ 2/3 & \text{si } 2\le x<3 \text{ y } 1\le y \\ 3/4 & \text{si } 3\le x<4 \text{ y } 1\le y \\ 5/6 & \text{si } 4\le x<5 \text{ y } 1\le y \\ 11/12 & \text{si } 5\le x<6 \text{ y } 1\le y \\ 1 & \text{si } 6\le x \text{ y } 1\le y \end{cases}$$

2. El número de automóviles utilitarios, X, y el de automóviles de lujo, Y, que poseen las familias de una población se distribuye de acuerdo a las siguientes probabilidades:

$X \mid Y$	0	1	2
0	1/3	1/12	1/24
1	1/6	1/24	1/48
2	5/22	5/88	5/176

Calcular la función de distribución del vector (X,Y) en los puntos $(0,0)$; $(0,2)$; $(1,1)$ y $(2,1)$, y la probabilidad de que una familia tenga tres o más automóviles.

Para ello, debemos definir primero la función de distribución $F_{(X,Y)}$

$F_{(X,Y)}(0,0) = P[X\le 0, Y\le 0] = \frac{1}{3}$

$F_{(X,Y)}(0,2) = P[X\le 0, Y\le 2] = \frac{11}{24}$

$F_{(X,Y)}(1,1) = P[X \le 1, Y \le 1] = \frac{5}{8}$

$F_{(X,Y)}(2,1) = P[X \le 2, Y \le 1] = \frac{10}{11}$

Por último, $P[X+Y \ge 3] = 1 - P[X+Y<3] = 1 - \left(P[X=0, Y=2] + P[Y=0, X=2] + F_{(X,Y)}(1,1)\right) = 1 - \left(\frac{5}{22} + \frac{1}{24} + \frac{5}{8}\right) =$
$= \frac{7}{66}$

Si lo hacemos calculando directamente $P[X+Y \ge 3]$ obtenemos lo mismo

3. La función de densidad del vector aleatorio (X,Y), donde X denota los Kg. de naranjas, e Y los Kg. de manzanas vendidos al día en una frutería está dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{400}; \quad 0<x<20; 0<y<20.$$

Determinar la función de distribución de (X,Y) y la probabilidad de que en un día se vendan, entre naranjas y manzanas, menos de 20 kilogramos.

$$\int_0^u \int_0^v \frac{1}{400}\,dx\,dy = \frac{1}{400}[x]_0^u [y]_0^v = \frac{uv}{400}$$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \text{ ó } y \le 0 \\ \frac{xy}{400} & \text{si } 0<x<20 \wedge 0<y<20 \\ \int_0^x \int_0^{20} \frac{1}{400}\,dv\,du & \text{si } 0<x<20 \wedge y \ge 20 \\ \int_0^y \int_0^{20} \frac{1}{400}\,dv\,du & \text{si } x \ge 20 \wedge 0<y<20 \\ 1 & \text{si } x \ge 20 \wedge y \ge 20 \end{cases}$$

$P[X+Y<20] = \frac{1}{2}$ por simetría

$$P[X+Y<20] = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{400}\,dy\,dx = \ldots = \frac{1}{2}$$

4. La renta, X, y el consumo, Y, de los habitantes de una población, tienen por funciones de densidad

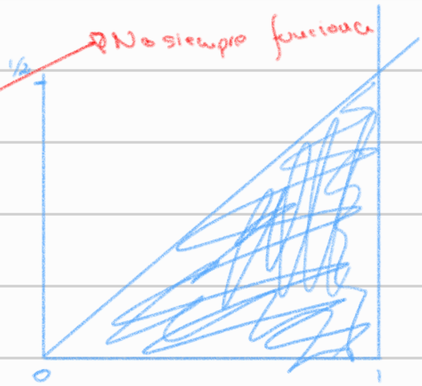
$$f_X(x) = 2-2x; \quad 0<x<1; f(y/x) = \frac{1}{x} \quad 0<y<x.$$

Determinar la función de densidad conjunta del vector aleatorio (X,Y) y la probabilidad de que el consumo sea inferior a la mitad de la renta.

$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$, $f(x,y) = f(y/x)f(x) = \frac{2-2x}{x} = \frac{2}{x} - 2$ si $0<y<x<1$

$P[Y < \frac{X}{2}] = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{x}\,dy\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

No siempre funciona



Es mejor y correcto

$P[Y < \frac{X}{2}] = \int_0^1 \left(\int_0^{x/2} \frac{2}{x} - 2\,dy\right)dx = 2\int_0^1 \left(\int_0^{x/2} \frac{1}{x} - 1\,dy\right)dx$

$= 2\int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\,dx = 2\left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

5. Una gasolinera tiene Y miles de litros en su depósito de gasóleo al comienzo de cada semana. A lo largo de una semana se venden X miles de litros del citado combustible, siendo la función de densidad conjunta de (X,Y) :

$$f(x,y) = \frac{1}{8} \quad 0 < x < y < 4.$$

Se pide:

a) Probar que $f(x,y)$ es función de densidad y obtener la función de distribución.

b) Probabilidad de que en una semana se venda más de la tercera parte de los litros de que se dispone al comienzo de la misma.

c) Si en una semana se han vendido 3.000 litros de gasóleo, ¿cuál es la probabilidad de que al comienzo de la semana hubiese entre 3.500 y 3.750 litros de combustible?

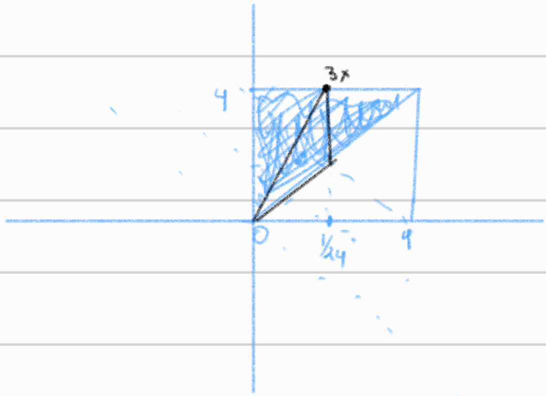
a) Basta probar

$f_{X}(x,y) \geq 0$

$\int_0^4 \left(\int_x^4 f_{X}(x,y)\, dy \right) dx = 1$

Para comprobar la función de densidad

$$F_{X}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \vee y \leq 0 \\ \int_0^x \int_0^y f_{X}(u,v)\, du\, dv & \text{si } 0 < x < y < 4 \\ \int_y^u \int_0^4 f_{X}(u,v)\, du\, dv & \text{si } 0 < x < 4 \wedge y \geq 4 \\ \int_y^4 \int_0^u f_{X}(u,v)\, dv\, du & \text{si } x \geq y \wedge 0 < y < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \wedge y \geq 4 \end{cases}$$



$\frac{1}{8} = 3x$

b) $P\left[X > \frac{Y}{3}\right] = \int_0^{4/3} \left(\int_x^{3x} \frac{1}{8} dy \right) dx + \int_{\frac{4}{3}}^4 \int_x^4 \frac{1}{8}\, dy\, dx = \int_0^{4/3} \frac{x}{4} dx + \int_{\frac{4}{3}}^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8} \right) dx = \frac{2}{3}$

c) Si $x=3$, ¿prob de que $3'5 \leq y \leq 3'75$?

Marginales

$$\begin{cases} f_{(x,y)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy = \int_x^4 \frac{1}{8} dy = \left[\frac{y}{8} \right]_x^4 = \frac{1}{2} - \frac{x}{8} & 0 < x < 4 \\ f_{(x,y)}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(x,y)}(y)\, dx = \int_0^y \frac{1}{8} dx = \frac{y}{8} & 0 < y < 4 \end{cases}$$

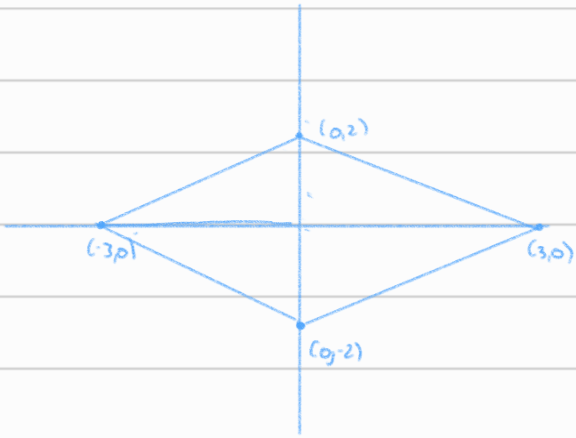
$P\left[3'5 \leq Y/_{X=3} \leq 3'75\right] = \int_{3'5}^{3'75} f_{Y/_{X=3}}(y)\, dy = \int_{3'5}^{3'75} dy = 0'25$

$f_{Y/_{X=3}}(y) = \frac{f_{(x,y)}(3,y)}{f_X(3)} = \frac{1/8}{1/8} = 1 \quad \text{con } 3 < y < 4$

6. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad

$$f(x,y) = k, \quad (x,y) \in R,$$

siendo R el rombo de vértices $(3,0); (0,2); (-3,0); (0,-2)$. Calcular k para que f sea una función de densidad. Hallar las distribuciones marginales y condicionadas.



i) $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$ luego $k \geq 0$

ii) $\int_R \int f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = 1$.

$y = a + bx$, $(-3,0)(0,2)$ $\qquad y = 2 + \frac{2}{3}x$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a - 3b \\ 2 = a \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 2 - 3b \quad b = \frac{2}{3}$$

Entonces $\int_R \int f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 4\int_{-3}^{0}\int_{0}^{2+2/3x} k\, dy\, dx = 4\int_{-3}^{0} k\left(2+\frac{2}{3}x\right)dx = 4k\int_{-3}^{0} 2 + \frac{2}{3}x = 4k\left[2x + \frac{1}{3}x^2\right]_{-3}^{0} =$

$= 4k \cdot (6-3) = 12k = 1 \; ; \; k = \frac{1}{12}$

Distribuciones marginales:

i) $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_{-\frac{2}{3}x-2}^{2/3x+2} \frac{1}{12}\,dy = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3} \quad \forall x \in]-3,0[$

$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}\,dy = \int_{2/3x-2}^{-2/3x+2} \frac{1}{12}\,dy = \frac{-1}{9}x + \frac{1}{3} \quad \forall x \in [0,3[$

$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}\,dx = \int_{-\frac{3}{2}y-3}^{3/2y+3} \frac{1}{12}\,dx = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} \quad \forall y \in]-2,0]$

$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}\,dx = \int_{\frac{3}{2}y-3}^{-\frac{3}{2}y+3} \frac{1}{12}\,dx = \frac{-y}{4} + \frac{1}{2} \quad \forall y \in [0,2[$

Hallemos las probabilidades condicionadas.

$f_{Y/X=x_0}(y) = \dfrac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)}$

- $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{9}x_0+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4x_0+12}$ con $x_0 \in]-3,0[$ $\quad \dfrac{-3y_0+6}{2} \leq x \leq \dfrac{3y_0+6}{2}$
- $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{-1}{9}x_0+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{12-4x_0}$ con $x_0 \in [0,3[$ $\quad \dfrac{3y_0-6}{2} \leq x \leq \dfrac{-3y_0-6}{2}$

Esto es la variable y

Vale 0 para cualquier otro valor de x_0.

$f_{X/Y=y_0}(x) = \dfrac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)}$

- $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{y_0}{4}+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3y_0+6}$ con $y_0 \in]-2,0]$ $\quad -\frac{2}{3}x_0 - 2 \leq y \leq \frac{2}{3}x_0 + 2$
- $\dfrac{\frac{1}{12}}{-\frac{y_0}{4}+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{6-3y_0}$ con $y_0 \in [0,2[$ $\quad \frac{2}{3}x_0 - 2 \leq y \leq -\frac{2}{3}x_0 + 2$

Vale 0 para cualquier otro valor de y_0

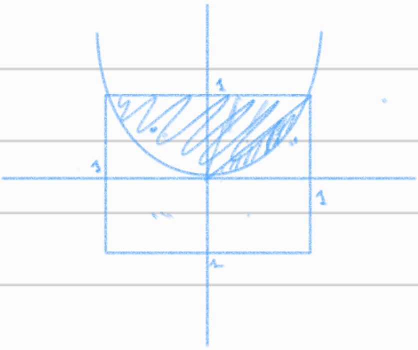
7. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad:

$$f(x,y) = k, \quad x^2 \leq y \leq 1, \quad \text{anulándose fuera del recinto indicado.}$$

Hallar la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad y calcular la función de distribución de probabilidad.

Calcular $P(X \geq Y)$.

Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.



i) $f(x,y) = k \geq 0$

ii) $\int_{\mathbb{R}^2} f_{(x,y)} \, dx\,dy = 1$;

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{(x,y)}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} k\,dy\,dx = k\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} dy\,dx = k\int_{-1}^{1}\left[y\right]_{x^2}^{1} dx =$$

$$= k\int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = k\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = k\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = 2k$$

$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

Cuidado

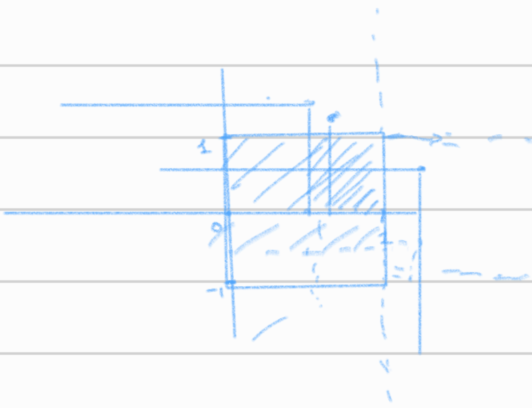
$$F_{(x,y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x^2 \text{ y } x \leq 0 \text{ ó } y > 0 \text{ y } x \leq 0 \text{ ó } x \leq -1 \text{ y } y \leq x^2 \\ \int_{-1}^{x}\int_{x^2}^{y} f_{(x,y)}(a,b)\,dx\,dy & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \wedge y < x^2 \end{cases}$$

$$P[X \geq Y] = \int_0^1\int_{x^2}^{x} \frac{1}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

8. Sea la función de densidad de probabilidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left[\frac{xy}{2} + 1\right] & 0 < x < 1,\ -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular la función de distribución de probabilidad y las marginales.



Veamos cuál es la función de distribución de la distribución

$$F_{(x,y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } y < -1 \\ \int_0^x\int_{-1}^{y} f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx & \text{si } 0 \leq x < 1 \wedge -1 \leq y < 0 \\ \int_0^x\int_0^y f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx & \text{si } 0 \leq x < 1 \wedge 0 \leq y < 1 \\ \int_0^x\int_{-1}^{1} f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx & \text{si } 0 \leq x < 1 \wedge y \geq 1 \\ \int_0^1\int_{-1}^{y} f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx & \text{si } x \geq 1 \wedge -1 \leq y < 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Sabiendo que no se anula

$$\begin{cases} \int_0^1 \int_0^y f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx & \text{si } x \geq 1 \wedge 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \wedge y \geq 1 \end{cases}$$

Veamos primero que f es función de densidad

·) Claramente es positiva siempre que $k \geq 0$ pues

$$\frac{xy}{2} + 1 \leq 0 \qquad 0 < x < 1$$
$$\qquad\qquad\qquad -1 < y < 1$$
$$xy \leq -2$$

$y \leq \frac{-2}{x}$ pero esto no puede ocurrir en el dominio dado

·) $\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y) = 1$; $k \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{2} + 1\, dy \right) dx = k \int_0^1 \frac{x}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^1 + [y]_{-1}^1\, dx = k \int_0^1 2\, dx = k\,[2x]_0^1 = 2k = 1$;

$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

Luego se reduce a

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } y < -1 \\ \int_0^x \int_{-1}^y \frac{xy}{4} + \frac{1}{2}\,dy\,dx & \text{si } 0 < x < 1 \wedge -1 < y < 1 \\ \int_0^x \int_{-1}^1 \frac{xy}{4} + \frac{1}{2}\,dy\,dx & \text{si } 0 < x < 1 \wedge y \geq 1 \\ \int_0^1 \int_{-1}^y \frac{xy}{4} + \frac{1}{2}\,dy\,dx & \text{si } x \geq 1 \wedge -1 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \wedge y \geq 1 \end{cases}$$

Entonces

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } y < -1 \\ \frac{(xy)^2}{16} - \frac{x^2}{16} + \frac{xy}{2} + \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \wedge -1 < y < 1 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \wedge y \geq 1 \\ \frac{y^2}{16} + \frac{y}{2} + \frac{7}{16} & \text{si } x \geq 1 \wedge -1 < y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \wedge y \geq 1 \end{cases}$$

Vamos a calcular ahora las distribuciones marginales

$$f_X(x_0,y) = \int_{-1}^1 f_{(X,Y)}(x_0,y)\,dy = \int_{-1}^1 \frac{x_0 y}{4} + \frac{1}{2}\,dy = \frac{x_0}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^1 + \frac{1}{2}[y]_{-1}^1 = 1 \qquad \forall x_0 \in]0,1[$$

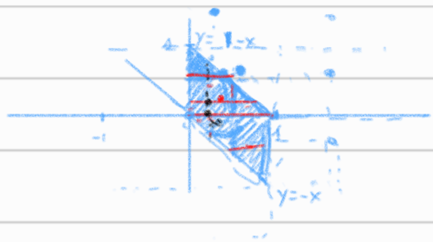
$$f_Y(x,y_0) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(x,y_0)\,dx = \int_0^1 \frac{x y_0}{4} + \frac{1}{2}\,dx = \frac{y_0}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}[x]_0^1 = \frac{y_0}{8} + \frac{1}{2} \qquad \forall y_0 \in]-1,1[$$

9. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional continuo, con función de densidad de probabilidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} k & 0<x+y<1;\ |y|<1; 0<x<1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Hallar la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad y calcular la función de distribución de probabilidad.

Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.



Veamos cual es el valor de k:

•) $f_{(X,Y)}(x,y)\geq 0 \Rightarrow k\geq 0$

•) $\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx = 1$; $\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\left(\int_0^{1-x} k\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{-x}^0 k\,dy\right)dx =$

$= k\int_0^1 [y]_0^{1-x}\,dx + k\int_0^1 [y]_{-x}^0\,dx = k\left(\int_0^1 1-x\,dx + \int_0^1 x\,dx\right) = k\left(\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)=$

$= k\left(\frac12+\frac12\right) = k$; $\boxed{k=1}$

Vamos a calcular ahora la función de distribución sabiendo que:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

$$F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}
0 & \text{si } x\leq 0 \text{ ó } y\leq -x\\
\int_{-y}^{x}\int_{-u}^{y} f_{(X,Y)}\,dv\,du & \text{si } 0<x<1 \wedge -x<y<0\\
\int_0^x\int_{-u}^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & 0<x<1 \wedge 0<y<1-x\\
\int_{-y}^1\int_{-u}^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & x>1 \wedge -x<y<0\\
\int_0^{1-y}\int_0^y f\,dv\,du + \int_{1-y}^x\int_0^{1-u} f\,dv\,du + \int_0^x\int_{-u}^0 f\,dv\,du & \text{si } 0<x<1 \wedge 1-x<y<1\\
\int_0^x\int_0^{1-u} f\,dv\,du + \int_0^x\int_{-u}^0 f\,dv\,du & \text{si } 0<x<1 \quad y>1\\
1-\int_0^{1-y}\int_y^{1-u} f\,dv\,du & \text{si } x\geq 1 \wedge 0<y<1\\
1 & \text{si } x\geq 1 \wedge y\geq 1
\end{cases}$$

← preguntar si se puede hacer

Veamos cuales son las distribuciones marginales

$$f_X(x_0,y) = \int_{-x_0}^{1-x_0} f_X(x_0,y)\,dy = \int_{-x_0}^{1-x_0} 1\,dy = [y]_{-x_0}^{1-x_0} = 1 \qquad \forall x_0\in]0,1[$$

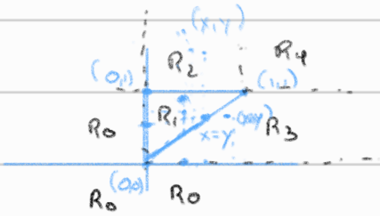
$$f_Y(x,y_0) = \begin{cases} \int_0^{1-y_0} 1\,dx = 1-y_0 & \text{si } 0<y_0<1 \\ \int_{-y_0}^{1} dx = 1+y_0 & \text{si } -1<y_0<0 \end{cases}$$

Y qué ocurre con las condicionadas

$$f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \begin{cases} \frac{1}{1-y_0} & \text{si } y_0 \in]0,1[\wedge x \in]0,1-y_0[\\ \frac{1}{1+y_0} & \text{si } y_0 \in]-1,0[\wedge x \in]-y_0,1[\end{cases}$$

$$f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = 1 \quad \text{con} \quad x_0 \in]0,1[\wedge y \in]-x_0, 1-x_0[$$

10. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional continuo, con distribución de probabilidad uniforme sobre el triángulo de vértices $(0,0);(0,1);(1,1)$. Determinar la función de densidad de probabilidad, la función de distribución de probabilidad y las distribuciones marginales y condicionadas.



Sea $k \in \mathbb{R}^+$ la constante tal que $f_{(X,Y)}(x,y) = k$, $0<x<1$, $0<y<1-x$

•) $k>0$

•) $\int_0^1 \int_x^1 k\,dy\,dx = k\int_0^1 (1-x)\,dx = k\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2}$; $\boxed{k=2}$

Veamos ahora cuál es la función de distribución:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \text{ ó } y \leq 0 \\ \int_0^x \int_u^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & \text{si } 0<x<1,\ x<y<1 \\ \int_0^x \int_u^1 f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & \text{si } 0<x<1,\ y\geq 1 \\ \int_0^y \int_u^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & \text{si } 0<x,\ 0<y<\min(x,1) \\ 1 & \text{si } x\geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

Luego calculando las integrales

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0,\ y \leq 0 \\ 2xy - x^2 & \text{si } 0<x<1,\ x<y<1 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0<x<1,\ y \geq 1 \\ y^2 & \text{si } x \geq 0,\ 0<y<1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1,\ y \geq 1 \end{cases}$$

Calculamos las marginales

$$f_X(x,y) = \int_x^1 2\,dy = 2(1-x) \qquad x \in\,]0,1[$$

$$f_Y(x,y) = \int_0^y 2\,dx = 2y \qquad y \in\,]0,1[$$

Calculamos las condicionadas

$$f_{Y/X=x_0}(x_0,y) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{2}{2-2x_0} = \frac{1}{1-x_0} \qquad x_0 \in\,]0,1[,\ y \in\,]0,x_0[$$

$$f_{X/Y=y_0}(x,y_0) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{2}{2y_0} = \frac{1}{y_0} \qquad y_0 \in\,]0,1[,\ x \in\,]0,y_0[$$

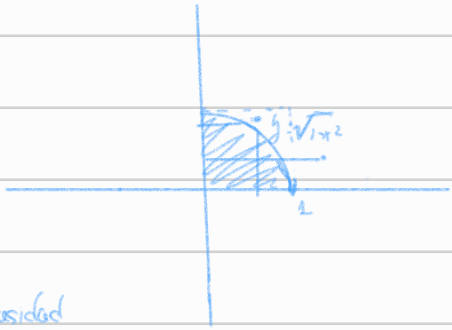
11. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Calcular la función de distribución conjunta.

Calcular las funciones de densidad marginales.

Calcular las funciones de densidad condicionadas.



Igual que antes, suponemos que $f_{(X,Y)}(x,y) = k \in \mathbb{R}$ función de densidad para $(x,y) \in C$

•) $k \geq 0$

•) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} k\,dy\,dx = k \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} k$; $k = \frac{4}{\pi}$

Luego $k = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ que es válido para todo $x \in\,]0,1[$.

Por tanto $f_{(X,Y)}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x,y) \in C$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ó } y \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x \int_0^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & \text{si } (x,y) \in C \\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^x \int_{\sqrt{1-x^2}}^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & \text{si } 0<x<1 \wedge \sqrt{1-x^2}<y<1 \\ \displaystyle\int_0^x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & \text{si } 0<x<1,\ y \geq 1 \\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \int_0^y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du & \text{si } x \geq 1,\ 0<x^2+y^2<1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1,\ y \geq 1 \end{cases}$$

Veamos las distribuciones marginales

$$f_X(x,y) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dy = 1 \qquad \text{si } x \in\,]0,1[$$

$$f_Y(x,y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} x = \operatorname{sen} t & x \to t = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-y^2} \\ dx = \cos t\,dt & x=0 \to t=0 \end{array}\right] = \int_0^{\operatorname{arcsen}\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}} \cos(t)\,dt = \int_0^{\operatorname{arcsen}\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cos(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arcsen}\sqrt{1-y^2}} dt = \Big[t\Big]_0^{\operatorname{arcsen}\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-y^2} \qquad \text{si } y \in\,]0,1[$$

Veamos las distribuciones condicionadas

$$f_{Y/X=x_0}(x_0,y) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \qquad \text{para } x \in\,]0,\sqrt{1-y^2}[$$

$$f_{X/Y=y_0}(x,y_0) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\operatorname{arcsen}\sqrt{1-y_0^2}} \qquad \text{para } y_0 \in\,]0,\sqrt{1-x^2}[$$