Tema 3 Teoremas de Hahn-Banach

Problema

Sea $\mathcal{E}$ un e.n de Banach, $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ subespacio y $g: \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. ¿Puedo garantizar que $\exists f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f|_{\mathcal{G}} = g$? Es decir, ¿puedo extender g a todo el espacio?

La Extensión

Pero decir que g es lineal y continua equivale a que $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \leq k\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{G}$, análogamente buscamos probar que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq \lambda\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{E}$.

Ejercicio

Si llamo $p(x) = k\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{E}$, se cumple que

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in \mathcal{E}$

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in \mathcal{E}$

Teorema de Hahn-Banach (versión analítica) (Es equivalente al axioma de elección)

Supongamos que $\mathcal{E}$ es un e.v, $p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in \mathcal{E}$

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall x \in \mathcal{E}$ $\forall \lambda > 0$

Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ subespacio vectorial y $g: \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal verificando $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in \mathcal{G}$.

Entonces $\exists f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal verificando

(a) $|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in \mathcal{E}$

(b) $f|_{\mathcal{G}} = g$

- Preparatorios -

Definición

Sea $\emptyset \neq P$ con una relación de orden $(\leq)$

- Un subconj. $Q \subset P$ es totalmente ordenado si $\forall a, b \in Q$ se tiene o $a \leq b$ o $b \leq a$ (no excluyente)
- Si $Q \subset P$ y $x \in P$, diré que x es cota superior de Q sii $a \leq x$ $\forall a \in Q$
- Si $m \in P$, m será un elemento maximal de P sii $\nexists x \in P : m \leq x$ $\{= b m\}$
- P es inductivo si todo subconjunto $Q \subset P$ que sea totalmente ordenado posee una cota superior

Lema de Zorn

Si $\emptyset \neq P$ con una relación de orden, si P es inductivo $\Rightarrow$ tiene un elemento maximal

- Demostración -

Defino $P = \left\{ h: D(h) \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{array}{l} g \subset D(h) \\ h \text{ lineal}, h(x) \leq p(x)\ \forall x \in D(h) \\ h(x) = g(x)\ \forall x \in g \end{array} \right.$ { (conjunto de extensiones de g)

Como $g \in P$ tenemos que $\emptyset \neq P$ y definimos:

$$h_1 \leq h_2 \iff \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2|_{D(h_1)} = h_1 \end{cases}$$ { Ejercicio (es una rel. orden) } - ref. - antisim - trans

Para ver que P es inductivo tomamos $Q \subset P$ totalmente ordenado. Tomando $V_0 = \bigcup_{h \in Q} D(h)$ y definiendo $h_0 : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto h(x)$ si $x \in D(h)$ y está bien definida por ser Q totalmente ordenado luego en intersecciones $h_1 \neq h_2$ donde $D(h_1) \cap D(h_2)$. Además es lineal pues $h \in Q \subset P$ $\forall h \in Q$ luego h_0 es lineal; además, $h_0(x) \leq p(x)$ $\forall x \in V$. Podemos deducir que $h_0 \in P$ y $\forall h \in Q$ $h \leq h_0$ luego h_0 es cota superior y por tanto P es inductivo.

Aplicando ahora el Lema de Zorn podemos asegurar que $\exists f \in P$ elemento maximal; $f: D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

1 - $g \subset D(f) \subset \mathcal{E}$

2 - f lineal

3 - $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in D(f)$

4 - $f|_g = g$

Queda por demostrar que f maximal $\Rightarrow D(f) = \mathcal{E}$.

Supongamos que $\exists x_0 \in \mathcal{E} \mid x_0 \notin D(f)$. Usando que $\mathcal{E}$ es e.v sabemos que $\mathbb{R}x_0$ es subespacio y podemos considerar $D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$ como $D(h)$ para $h: D(h) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$ $\forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ que es lineal y $h \in P$ luego

$$h(x+tx_0) = f(x) + t\alpha \leq p(x+tx_0) \iff h(tz+tx_0) \leq p(tz+tx_0)\ \forall z \in D(f)\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$\iff t\,h(z+x_0) \leq p(t(z+x_0))$ $\forall z \in D(f)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Y distinguimos casos

- Si $t > 0$ entonces $t\,h(z+x_0) \leq t\,p(z+x_0)$
- Si $t < 0$ entonces $-t\,h(z+x_0) \leq -t\,p(-z-x_0)$

Entonces disponemos de las siguientes condiciones

$$\begin{cases} f(x)+\alpha \leq p(x+x_0) \ \forall x\in D(f) \\ f(x)-\alpha \leq p(-x-x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \sup_{y\in D(f)} \{ p(y+x_0)-f(y) \} \leq \alpha \leq \inf \{ f(x)+p(x-x_0) \}$$

Y basta probar que ese intervalo existe pero es claro que

$$f(y+x)= f(y)+f(x) \leq p(x+y) = p(x-x_0+y-x_0) \leq p(x-x_0)+p(y-x_0) \Rightarrow f(y)-p(y-x_0) \leq p(x-x_0)-f(x) \ \forall x,y\in D(f)$$

Luego tenemos que $f\in L$!! por tanto $D(f)=\mathcal{E}$ □

Notación

Sea $\mathcal{E}$ un e.v, $f:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Si f es lineal notamos por

$$[f=\alpha] = \{x\in\mathcal{E} : f(x)=\alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

En caso de que f sea continua es necesario que $\mathcal{E}$ sea normado y entonces

$[f=\alpha]$ es un hiperplano cerrado

Es importante que $f\neq 0$

Definición

Si $A,B\subset\mathcal{E}$ un e.v decimos que el hiperplano $H=[f=\alpha]$, $\alpha\in\mathbb{R}$, separa A y B si $\exists\alpha\in\mathbb{R}$ $f(x)\leq\alpha\leq f(y)$ $\forall x\in A, \forall y\in B$. Y diremos que H separa estrictamente A y B si $\exists\varepsilon>0 \mid f(x)\leq\alpha-\varepsilon<\alpha+\varepsilon\leq f(y)$ $\forall x\in A$ $\forall y\in B$

Funcional de Minkowsky de un conjunto

Dado $\mathcal{E}$ e.v y $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{E}$ convexo, abierto y $0\in\mathcal{C}$. Definimos el siguiente funcional:

$$p:\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longmapsto\begin{cases} \inf\{\alpha>0 : \frac{x}{\alpha}\in\mathcal{C}\} & \forall x\in\mathcal{E}\setminus\{0\} \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Equivalentemente (pensar en rayo y comp conv.) $\to [\beta,\infty)$

Veamos sus propiedades

i) $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ $\forall x\in\mathcal{E}$ $\forall\lambda>0$

ii) $\exists m>0 \mid 0\leq p(x)\leq m\|x\|$ $\forall x\in\mathcal{E}$

iii) $\mathcal{C}=\{x\in\mathcal{E} \mid p(x)<1\}$

iv) $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$ $\forall x\in\mathcal{E}$ $\forall y\in\mathcal{E}$?

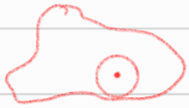
• Demostración -

i) $p(\lambda x)=\inf\{\alpha>0 : \frac{x}{\alpha/\lambda}=\frac{\lambda x}{\alpha}\in\mathcal{C}\} \overset{\lambda>0}{=} \lambda\inf\{\alpha>0 : \frac{x}{\alpha}\in\mathcal{C}\}=\lambda p(x)$

ii) Como $\mathcal{C}$ es abierto y $0\in\mathcal{C} \Rightarrow \exists r>0 \mid B(0,r)\subset\mathcal{C}$. Eso significa que dado $\underbrace{\alpha>\frac{\|x\|}{r} \Rightarrow \left\|\frac{x}{\alpha}\right\|<r}_{\alpha\text{ elegido!}}$ $x\in\mathcal{E}$ cualq.

$\Rightarrow \frac{x}{\alpha}\in B(0,r)\subset\mathcal{C}$

Ya sabemos que $\overbrace{\left(\frac{\|x\|}{r},\infty\right)}^{\alpha>\frac{\|x\|}{r}}\subset\{\alpha>0 : \frac{x}{\alpha}\in\mathcal{C}\} \Rightarrow \inf\left(\frac{\|x\|}{r},\infty\right)\geq\inf\{\alpha>0 : \frac{x}{\alpha}\in\mathcal{C}\}$



es decir, $p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$ $\forall x \in \mathcal{E}$.

iii) Vamos a probar que $p(x) < 1$ $\forall x \in \mathcal{C}$. Si $x \in \mathcal{C}$ abto $\Rightarrow \exists r > 0 \mid B(x,r) \subset \mathcal{C}$.

Sea $\varepsilon > 0$, $\|(1+\varepsilon)x - x\| = \|\varepsilon x\| = \varepsilon\|x\|$. Elijo $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < \frac{r}{\|x\|+1}$

$\Rightarrow \|(1+\varepsilon)x - x\| < r$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \Rightarrow \frac{x}{(1+\varepsilon)} \in B(x,r) \subset \mathcal{C}$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

Luego $\boxed{p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}}$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

Probarlos geométricamente

Para ver la otra inclusión, tomado $x \in \mathcal{E}$, $p(x) < 1$.

cotas inf.

Dig. sencillo

$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid \frac{x}{\alpha} \in \mathcal{C}\} < 1 \Rightarrow \exists \alpha_0 < 1 \mid \frac{x}{\alpha_0} \in \mathcal{C}$. Como $0 \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ convexo

tenemos que $\alpha_0 \frac{x}{\alpha_0} + (1-\alpha_0)0 = x \in \mathcal{C}$

Por def $p(x)$

iv) Sabemos que $\boxed{\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in \mathcal{C}}$ $\forall \varepsilon > 0$; aplicando el apartado (iii) $p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) < 1$. Como $\mathcal{C}$ es convexo

dado otro punto de $\mathcal{C}$ $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in \mathcal{C}$ entonces cualquier comb. convexa de ellos pertenece a $\mathcal{C}$

para t mágico

$$0 < t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C} \ni t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in \mathcal{C} \quad < 1$$

Por (iii) $\Rightarrow p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow p(x+y) \leq p(x)+p(y)$

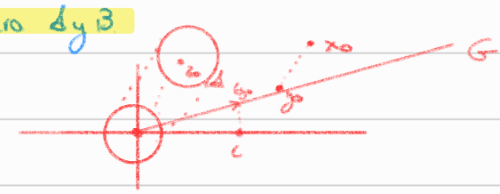
Ejemplo

Si $\mathcal{C} = B(0,1) \Rightarrow p(x) = \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{E}$. ¿Qué debe verificar $\mathcal{C}$ para conseguir que p defina una norma?

Teorema de Hahn-Banach (versión geométrica 1)

Sea $\mathcal{E}$ un e.n, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, ninguno de ellos vacíos con $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, convexos y $\mathcal{A}$ abierto. Entonces $\exists H \subset \mathcal{E}$ hiperplano cerrado tal que $H = [f, \alpha]$ $\alpha \in \mathbb{R}$ y que separa $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

- Demostración-



Paso 1

Supongamos que $\mathcal{B} = \{x_0\}$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ convexo y abierto. Elijo $z_0 \in \mathcal{A}$ y defino $\mathcal{C} = \mathcal{A} - z_0$, que es convexo, abierto y $0 \in \mathcal{C}$. Por último es claro que $y_0 = x_0 - z_0 \notin \mathcal{C}$ pues $x_0 \notin \mathcal{A}$

Es como una proyección

Sea ahora $G = \mathbb{R}y_0$ subesp. vectorial de $\mathcal{E}$ y definimos $g: G \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(ty_0) = t$ $\forall t \in \mathbb{R}$

En qué momento sabemos que $\mathcal{A}$ es un e.n para poder usar la p de Minkowsky? Indef

Consideramos p el funcional de Minkowsky del conjunto $\mathcal{C}$. Observemos:

i) $t \geq 0 \Rightarrow g(ty_0) = t$. Como $y_0 \notin \mathcal{C} \Rightarrow p(y_0) \geq 1$ y $g(ty_0) = t \leq t\,p(y_0) \overset{(i)}{=} p(ty_0)$
$t \geq 0$ la caract. de $\mathcal{C}$ por (iii)

(ii) $t < 0 \Rightarrow g(ty_0) = t < 0 \leq p(ty_0)$

Entonces $g(ty_0) \leq p(ty_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Es decir, g es una aplicación lineal y continua por como es p.

y cumple las hipótesis de Hahn-Banach en su versión analítica y por tanto

$\exists f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal $\mid f|_G = g$ y $f(y) \leq p(y)$ $\forall y \in \mathcal{E}$ y por (ii) de p entonces $\exists M > 0$

$$f(y) \leq p(y) \leq M \|y\| \quad \forall y \in \mathcal{E}$$

Aplicado a $-y$ obtenemos que f está acotada y por tanto continua.

Ahora queda por demostrar que separa lo que queremos, es decir, $f(y) \leq 1$ $\forall y \in \mathcal{C}$

O lo que es lo mismo $f(y) \leq f(y_0)$ $\forall y \in \mathcal{C}$. Como $f(y) \leq p(y)$ $\forall y \in \mathcal{E}$ entonces, por (iii) de p tenemos que $f(y) \leq p(y) < 1$. Ahora, como $f(y_0) = g(y_0) = 1$ tenemos ya que $f(y) \leq f(y_0)$ $\forall y \in \mathcal{C}$ y por tanto, tenemos que $\mathcal{C}$ e $\{y_0\}$ están separados por el hiperplano $[f, 1]$.

Por último, deshaciendo la traslación del z_0 tenemos que $\mathcal{A}$ y B están separados por el hiperplano $[f + x_0, \|x_0\|]$.
?

Paso 2

Vamos a suponer que $\left\{\begin{array}{l} \emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{E} \\ \emptyset \neq B \subset \mathcal{E} \\ \mathcal{A} \cap B = \emptyset \\ \mathcal{A} \text{ abto} \end{array}\right.$ convexos $\Big\}$ y tomamos $\mathcal{A} - B = \{a - b : a \in \mathcal{A}, b \in B\}$, $0 \notin \mathcal{A} - B$

Pero $\mathcal{A} - B = \bigcup_{b \in B} \mathcal{A} - b$ y $\mathcal{A} - b$ es abto $\forall b \in B$ luego $\mathcal{A} - B$ es abto. Debemos probar ahora que $\mathcal{A} - B$ es convexo, si tomamos $x, y \in \mathcal{A} - B$ veamos que cualquier combinación convexa está en $\mathcal{A} - B$.

Como $x, y \in \mathcal{A} - B$ entonces $\exists a_1, a_2 \in \mathcal{A}, b_1, b_2 \in B$ tales que $x = a_1 - b_1$, $y = a_2 - b_2$. Dado $t \in [0,1]$ veamos que $tx + (1-t)y \in \mathcal{A} - B$, pero:

$$z = tx + (1-t)y = t(a_1 - b_1) + (1-t)(a_2 - b_2) = ta_1 - tb_1 + (1-t)a_2 - (1-t)b_2 = ta_1 + (1-t)a_2 - [tb_1 + (1-t)b_2]$$

Como $\mathcal{A}$ es convexo tenemos que $ta_1 + (1-t)a_2 \in \mathcal{A}$ y de la misma manera $tb_1 + (1-t)b_2 \in B$ luego $z \in \mathcal{A} - B$ y por tanto es convexo.

Aplicando el paso 1 con $\{0\}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{A} - B$ obtenemos que $\exists H \subset \mathcal{E}$ hiperplano cerrado tal que H separa $\mathcal{A}$ y B

Teorema de Hahn-Banach (versión geométrica 2)

Sea $A, B \subset E$ no vacíos y convexos, $A \cap B = \emptyset$, A es cerrado y B es compacto. Entonces $\exists H \subset E$ hiperplano que separa estrictamente A y B. Es decir $\exists f: E \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $\exists \varepsilon > 0$ $f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leq f(b)$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

↳ Esto induce que H sea cerrado y que E deba ser normado.

-Demostración-

Como A y B son convexos entonces $C = A - B$ es convexo. Como A es cerrado y B es compacto

↳ fácil de probar

entonces C es cerrado. Entonces $E \setminus C$ es abierto y $0 \in E \setminus C$ luego $\exists r > 0 : B(0,r) \cap C = \emptyset$

↳ $0 \notin C$ pues $A \cap B = \emptyset$

Usando ahora la primera versión geométrica para $B(0,r)$ y C tenemos que podemos separarlos, es decir, $\exists f: E \to \mathbb{R}$ lineal y continua de forma que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$ $\forall x \in B(0,r)$, $\forall y \in A - B$. y $[f = \alpha]$ es cerrado

No obstante, sabemos que $\alpha = f(\bar{z})$ con $\bar{z}$ en la frontera de $B(0,r)$ luego

$$f(c) \leq f(\bar{z}) \quad \forall c \in A - B$$

Pero $c = x - y$ para algún $x \in A, y \in B$ entonces tenemos que, como $\bar{z} = rz$ con $z \in B(0,1)$

$$f(x-y) \leq f(rz) \quad \forall x \in A, y \in B$$

Como f es lineal y trabajamos en la bola unidad $f(-rz) = -r f(z) \leq -r\|f\|$ y $f(rz) \leq r\|f\|$

$$f(x-y) \leq -r\|f\| \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Tomando ahora $\varepsilon = \frac{1}{2} r \|f\| > 0$ obtenemos que

$$f(x) - f(y) = f(x-y) \leq -2\varepsilon \implies f(x) + \varepsilon \leq f(y) - \varepsilon \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Entonces, es claro ya que

$$\sup_{x \in A} f(x) + \varepsilon \leq \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon$$

y podemos tomar $\alpha \in [\sup_{x \in A} f(x) + \varepsilon, \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon]$ cumpliendo la separación

Nota

Dado E un e.n, consideramos $h \in E^*$ lineal. Entonces, como h es lipschitziana tenemos que

$$h(x) \leq \|h\| \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Coef. de Lipschitz

Ejercicio

Probar que cualquier espacio de Hilbert es estrictamente convexo

Corolario 1.2

Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial. Si $g: G \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo entonces $\exists f \in E^*$ tal que $f|_G = g$ y $\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)| = \|g\|_{G^*}$

- Demostración -

Vamos a probar la existencia, para lo cual buscamos aplicar la primera versión del Teorema de Hahn-Banach.

Para ello, definimos $p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $p(x) = \|g\|\,\|x\|$ y vamos a ver que cumple las condiciones del teorema

(i) Dado $\lambda > 0$, $x \in \mathcal{E}$ fijos pero arbitrarios; como p es lineal tenemos que $p(\lambda x) = \|g\|\|\lambda x\| = \|g\|\|x\|\lambda = \lambda p(x)$

(ii) Dados $x, y \in \mathcal{E}$, $p(x+y) = \|g\|\|x+y\| \le \|g\|(\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y)$.

Por último, como g es lineal y continua, tenemos que $|g(x)| \le \|g\|\|x\|\ \forall x \in \mathcal{E}$ donde $\|g\|$ es la constante de Lipschitz por definición. Por tanto, aplicando el Teorema de Hahn-Banach en versión analítica

$$\boxed{\exists f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f|_G = g \ \wedge\ f(x) \le p(x)\ \forall x \in \mathcal{E}}$$

$\in \mathcal{E} \Rightarrow |f(x)|$

$-f(x) = f(-x)$

Queda por ver que $\|f\| \le \|g\|$, pero $f(x) \le p(x)\ \forall x \in \mathcal{E}$ y $p(x) = \|g\|\|x\|$ luego $|f(x)| \le |p(x)| = \|g\|\|x\|$ entonces, tomando $x \in \mathcal{E}$ con $\|x\| \le 1$ tenemos que $\|f\| \le \|g\|$ y por tanto $\|f\| = \|g\| = \sup\{|g(x)| \mid x \in G, \|x\| \le 1\}$.

$$\|f\|_{\mathcal{E}^*} = \sup_{\substack{\|x\| \le 1 \\ x \in \mathcal{E}}} |f(x)| \ge \sup_{x \in G} |g(x)| = \|g\|$$ $\longrightarrow$ Por conjuntos de definición, es lo que teníamos puesto.

Corolario 1.3

Para cada $x_0 \in \mathcal{E}$ $\exists f_0 \in \mathcal{E}^*$ tal que $\|f_0\| = \|x_0\|$ y $\langle f_0, x_0 \rangle = f_0(x_0) = \|x_0\|^2$

- Demostración -

Consideramos $G = \mathbb{R}x_0$, es decir, $G = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ y tomamos $g: G \longrightarrow \mathbb{R}$, $tx_0 \longmapsto g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ que claramente es lineal. Por último definimos $\boxed{p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto p(y) = \|y\|\|x\|}$ y por la demostración del corolario anterior se cumplen las propiedades.

Por tanto $\exists f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_G = g$ y $f(x) \le p(x)\ \forall x \in \mathcal{E}$. Veamos ahora que $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$.

Como $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$, tomando $t = 1$ tenemos que $g(x_0) = \|x_0\|^2$ y como f extiende a g tenemos que $\langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$

Como $|g(x_0)| \le \|g\|\|x_0\|$ tenemos que $\|x_0\|^2 \le \|g\|\|x_0\| \Rightarrow \|x_0\| \le \|g\| = \|f\|$ por el corolario anterior.

Ahora, como $|f(y)| \le |p(y)| = \|y\|\|x_0\|\ \forall y \in \mathcal{E}$ tenemos que, como $\|f\|$ es la menor constante que cumple esto tenemos que $\|f\| = \|x_0\|$.

Corolario 1.4

Para cada $x\in\mathcal{E}$ se cumple que

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{E}^* \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f,x\rangle| = \max_{\substack{f\in\mathcal{E}^* \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f,x\rangle|$$

-Demostración-

Suponiendo que $x\neq 0$ pues en ese caso $\|x\|=0=|\langle f,x\rangle|$ por ser f lineal. Entonces vamos a probar la primera igualdad.

- $\|x\|\geq \sup_{\substack{f\in\mathcal{E}^* \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f,x\rangle|$. Dado $f\in\mathcal{E}^*$, $|\langle f,x\rangle| \leq \|f\|_{\mathcal{E}^*}\|x\| \leq \|x\|$
- $\sup_{\substack{f\in\mathcal{E}^* \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f,x\rangle| \geq \|x\|$. Dado $x\in\mathcal{E}$ obtenido por el corolario anterior

  y defino $f_1 = \frac{f_0}{\|x\|} \in \mathcal{E}^* \Rightarrow \|f_1\|=1 \Rightarrow f\in\{f\in\mathcal{E}^* : \|f\|\leq 1\} \wedge |\langle f_1,x\rangle| = \|x\|$

  entonces tenemos que $\|f_1\| = \frac{\|f_0\|}{\|x\|} = 1$ y que $\langle f_1,x\rangle = \|x\|$. Por tanto, el supremo obtenido se alcanza y tenemos un máximo.

Corolario 1.5

Sea $F\subset\mathcal{E}$ un subespacio vectorial no denso, es decir, $\overline{F}\neq\mathcal{E}$. Entonces:

$$\exists\ f\in\mathcal{E}^*,\ f\neq 0 \mid \langle f,x\rangle = 0 \quad \forall x\in F$$

- Demostración-

Como $\overline{F}\neq\mathcal{E}$ sabemos que podemos tomar $x_0\in\mathcal{E}\setminus\overline{F}$. Tomando ahora $A=\overline{F}$ y $B=\{x_0\}$, como B es compacto y A es convexo por ser $\overline{F}$ espacio vectorial y cerrado por definición, podemos aplicar el T^{ma} de Hahn-Banach en su segunda versión geométrica de manera que $\exists\alpha\in\mathbb{R}$ tal que, para $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{R}$ lineal $[f=\alpha]$ separa estrictamente $\{x_0\}$ y $\overline{F}$, es decir, $\exists\varepsilon>0$ tal que

$$f(x)\leq\alpha-\varepsilon<\alpha<\alpha+\varepsilon\leq f(x_0) \quad \forall x\in F \iff f(x)-\varepsilon<f(x_0)+\varepsilon$$

En particular, dado $\lambda\in\mathbb{R}$ tenemos que $\lambda\langle f,x\rangle<\alpha$ luego:

- Si $\lambda<0$

$$\lambda\langle f,x\rangle<\alpha \Rightarrow \langle f,x\rangle > \frac{\alpha}{\lambda}$$

Algo no cuadra

- Si $\lambda\geq 0$

$$\lambda\langle f,x\rangle<\alpha \Rightarrow \langle f,x\rangle \leq \frac{\alpha}{\lambda}$$

Haciendo tender $\lambda\rightarrow\infty$ tenemos que $\langle f,x\rangle = 0$ $\forall x\in F$

Para espacios de Hilbert, los resultados son los siguientes, estamos recuperando el T^ma^ de Riesz-Frechet, basta con usar la caracterización de un funcional de un espacio de Hilbert.

Para el corolario 1.8 lo más útil es su contrarrecíproco:

Sea $F \leq E$ subespacio. Entonces:

$$\text{Si } \forall f \in E^* \setminus \{0\} \; \exists x \in F \mid \langle f, x \rangle \neq 0 \Rightarrow \overline{F} = E$$