Ejercicio 1. Calcular el número de polinomios mónicos irreducibles de grado menor o igual que 3 en $\mathbb{F}_5[x]$.

Consideramos el polinomio $x^{125} - x \in \mathbb{F}_5[x]$. Sabemos por el último teorema del temario que este se descompone como el producto de todos los polinomios irreducibles de $\mathbb{F}_5[x]$ de grado 1 o 3. Como hay 5 de grado 1 tenemos que habrá $120/3 = 40$ de grado 3.
Análogamente se consigue que hay 10 de grado 2

Ejercicio 2. ¿Cuántos subcuerpos tiene $\mathbb{F}_{256}$?

Sabemos que $256 = 2^8$ por lo que $[\mathbb{F}_{256} : \mathbb{F}_2] = 8 = |\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{256})| = 8$. Gracias a la conexión de Galois tenemos que la cantidad de subcuerpos de $\mathbb{F}_{256}$ está en biyección con la cantidad de subgrupos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{256})$. Además, sabemos por otro de los teoremas que $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{256})$ es el cíclico de orden 8. De Álgebra II sabremos que habrá un subgrupo por cada divisor de 8, es decir, habrá 2 subgrupos no triviales y por tanto 2 subextensiones no triviales

Ejercicio 3. Sea a un elemento primitivo de $\mathbb{F}_{81}$, exprese los subcuerpos de $\mathbb{F}_{81}$ en función de a.

Como a es un elemento primitivo de $\mathbb{F}_{81}$ tenemos que $\langle a \rangle = \mathbb{F}_{81}^{\times}$ por lo que $O(a) = 80$. Ahora bien, como $\mathbb{F}_{81} = \mathbb{F}_{3^4}$ tenemos que $|\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{81})| = 4$ de donde es el cíclico de orden 4. Usando un razonamiento análogo al ejercicio anterior tenemos que hay un único subgrupo no trivial de orden 2. Equivalentemente, buscamos el subcuerpo de $\mathbb{F}_{81}$ que es $\mathbb{F}_{3^2} = \mathbb{F}_9$.
Ahora bien, como $\mathbb{F}_9^{\times} \leq \mathbb{F}_{81}^{\times}$ es cíclico, buscamos un elemento de $\mathbb{F}_{80}^{\times} = \langle a \rangle$ cuyo orden multiplicativo sea 8; es válido tomar a^{10}. De hecho, se cumple que $\mathbb{F}_3 \leq \mathbb{F}_3(a^{10}) \leq \mathbb{F}_3(a) \cong \mathbb{F}_{81}$ de donde $\mathbb{F}_3(a^{10}) \cong \mathbb{F}_9$ por ser este el único subcuerpo no trivial de $\mathbb{F}_{81}$.