1. Conocer y comprender la definición de función integrable y de integral de una tal función:

Trabajamos en un conjunto $\Omega \in \mathcal{M}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Sea $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ y $E \subset \Omega$ medible sabemos que f^+ y f^- son funciones medibles positivas cuyas integrales ya conocemos, y su definición no debería cambiar. Además, buscamos que la integral a definirse comporte linealmente luego será la diferencia entre f^+ y f^-, pero debemos exigir que $\boxed{\int_E f^+ \text{ y } \int_E f^-}$ sean finitas y por consiguiente $\int_E |f| < \infty$ Además, el recíproco es cierto.

Por tanto, diremos que una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable sobre un conjunto medible $E \subset \Omega$, cuando verifica que

$$\int_E |f| < \infty$$

En tal caso tenemos que $f^+, f^- \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ y el crecimiento de la integral ya definida en $\mathcal{L}^+(\Omega)$ nos dice que

$$\int_E f^+ \leq \int_E |f| < \infty \quad \wedge \quad \int_E f^- \leq \int_E |f| < \infty$$

Por tanto, podemos definir la integral de f una función integrable sobre E medible como el número real dado por

$$\boxed{\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-}$$

Esta definición es coherente con lo hecho hasta ahora, pues si f verifica que $f(\Omega) \subset \mathbb{R}_0^+$ entonces $f^+ = f$ y $f^- = 0$ de forma que la integral recién definida coincide con la integral de f como función medible positiva.

Denotaremos por $\mathcal{L}^1(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones integrables en Ω, $\mathcal{L}^1(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Teorema de la convergencia absoluta

Naturalmente, el Teorema de la convergencia dominada puede usarse para sucesiones de funciones que vengan dadas como series. No obstante, a la hora de trabajar con series de funciones integrables suele ser más útil el siguiente resultado que nos asegura la convergencia absoluta de una serie de funciones, salvo en un conjunto de medida nula, para después elegimos conmutar la integral con la suma de la serie

·) Teorema de la convergencia absoluta: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega}|f_n|<\infty$. Entonces, la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en un conjunto $E\subset\Omega$ con $\lambda(\Omega\setminus E)=0$. Además, definiendo $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\chi_E(x)$ $\forall x\in\Omega$ se tiene que $f\in\mathcal{L}_1(\Omega)$ con $\int_{\Omega} f=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} f_n$

b) Continuidad absoluta de la integral

Hay un tipo de continuidad más importante que la creciente y decreciente. Concretamente, la integral tiende a 0 cuando la medida del conjunto sobre el que se integra tiende a 0.

·) Continuidad absoluta: Dada una función $f\in\mathcal{L}_1(\Omega)$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \mid$ si $E\subset\Omega$, $E\in\mathcal{M}$ con $\lambda(E)<\delta \Rightarrow \int_E|f|<\varepsilon$. Por tanto, $\left|\int_E f\right|<\varepsilon$

Esta propiedad caracterizada con sucesiones de conjuntos se expresa

·) Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos medibles de Ω y E otro conjunto medible de Ω, verificando que $\{\lambda(E_n\setminus E)+\lambda(E\setminus E_n)\}\to 0$. Entonces

$$\int_E f=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f \qquad \forall f\in\mathcal{L}_1(\Omega)$$

El principal interés es que $\{E_n\}$ no debe tener una monotonía. Sin embargo, este resultado no implica continuidad creciente o decreciente de la integral pues si $\{E_n\}\nearrow E$ no podemos deducir que $\{\lambda(E\setminus E_n)\}\to 0$ salvo que $\lambda(E)<\infty$. Lo mismo ocurre con $\{E_n\}\searrow E$ solo que $\lambda(E_n)<\infty$ para algún $n\in\mathbb{N}$

3. Conocer y comprender el teorema de la convergencia dominada, incluyendo su demostración.

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles que converge puntualmente en Ω a una función $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

Supongamos que $\exists g:\Omega\to\mathbb{R}_0^+$ integrable tal que

$$|f_n(x)|\leq g(x) \qquad \forall x\in\Omega \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Entonces f es integrable y $\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|f_n-f|=0$, de donde, $\int_{\Omega} f=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n$ (1)

Demostración Para cada $n\in\mathbb{N}$, como $|f_n|\leq g$ y $g\in \mathcal{L}_1(\Omega)$ entonces $f_n\in\mathcal{L}_1(\Omega)$. Por otra parte, para cada $x\in\Omega$, $|f(x)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|\leq g(x)$. Por tanto $|f|\leq g$ de donde $f\in\mathcal{L}_1(\Omega)$.

Tenemos que probar la primera afirmación de (1)

Sea $\rho_n=\int_\Omega |f_n-f|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, entonces $\{\rho_n\}$ es una sucesión de nºs reales no negativos, buscamos probar $\{\rho_n\}\to 0$. Para abreviar notación, $\rho=\int_\Omega (2g)$. La idea clave será usar el lema de Fatou para una conveniente sucesión de funciones. Concretamente tomamos $g_n=2g-|f_n-f|$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Como $|f_n-f|\leq |f_n|+|f|\leq 2g$ $\forall n\in\mathbb{N}$, vemos que $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas que converge puntualmente en Ω a la función $2g$. De paso vemos que $\rho_n\leq\rho$ $\forall n\in\mathbb{N}$. El lema de Fatou y la linealidad de la integral nos dicen que

$$\rho=\int_\Omega (2g)=\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega g_n=\liminf_{n\to\infty}(\rho-\rho_n) \qquad (2)$$

lo que nos llevará a lo que buscamos

Ahora, para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $\inf\{\rho-\rho_k : k\geq n\}=\rho-\sup\{\rho_k : k\geq n\}$ de donde, al tomar límites obtenemos que $\liminf_{n\to\infty}(\rho-\rho_n)=\rho-\limsup_{n\to\infty}\rho_n$. Por tanto en (2) tenemos

$$\rho\leq\rho-\limsup_{n\to\infty}\rho_n, \text{ es decir, } \limsup_{n\to\infty}\rho_n\leq 0$$

pero siendo $\rho_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, esto significa que $\{\rho_n\}\to 0$

La segunda afirmación de (1) se deduce claramente de la primera, usando la linealidad y positividad de la integral, que nos permiten escribir.

$$\left|\int_\Omega f_n-\int_\Omega f\right|=\left|\int_\Omega (f_n-f)\right|\leq\int_\Omega |f_n-f| \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\square$