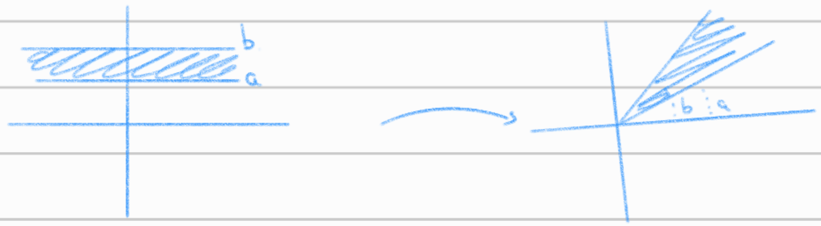
2. Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

Recta horizontal

$R^\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + i\lambda\}$ para λ fijo luego $e^z = e^{x+i\lambda} = e^x e^{i\lambda} = e^x(\cos\lambda + i\operatorname{sen}\lambda)$ que no es más que la recta real girada λ grado pues $\arg(e^{i\lambda}) = \lambda$. De aquí podemos escalar, por continuidad, a una franja horizontal que será, para $[a,b] \in \mathbb{R}$, $\Delta_H = \bigcup_{\lambda\in[a,b]} R^\lambda$ luego $e^{\Delta_H} = \bigcap_{\lambda\in[a,b]} e^{R^\lambda} = \bigcap_{\lambda\in[a,b]} e^{\operatorname{Re} R^\lambda} \cdot \lambda$

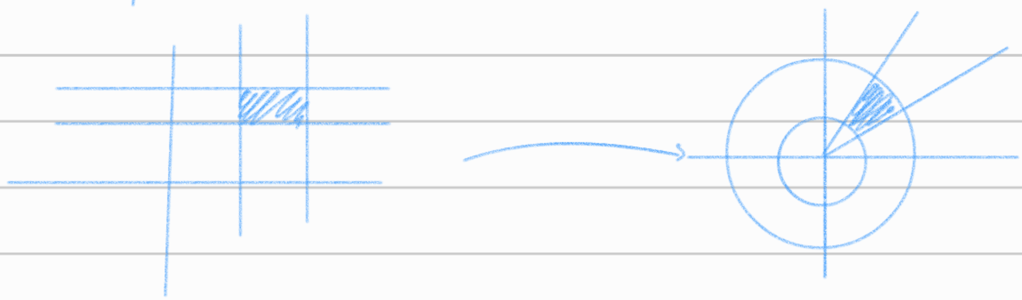


Recta vertical

Se haría análogo a la recta horizontal solo que ahora se obtiene una circunferencia de radio e^λ con λ fijo. Luego extendiendo es un toro.

Rectángulo

Queda ya claro que no es más que la intersección de ambas gracias a las propiedades de la exponencial



3. Dado $\theta \in]-\pi,\pi]$, estudiar la existencia del límite en $+\infty$ de la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(r) = \exp(re^{i\theta})$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

Sabemos que, para $\theta \in]-\pi,\pi]$ fijo tenemos que $\varphi(r) = \exp(r\cdot(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta))$ luego, en caso de que exista límite, dependerá de $\cos\theta$ pues

módulo de todo

módulo 1

$$\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = \lim_{r\to\infty} \exp(r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta) = \lim_{r\to\infty} \exp(r\cos\theta)\exp(ir\operatorname{sen}\theta)$$

En este caso, simplemente estamos tomando la exponencial de la semirrecta $\mathbb{R}e^{i\theta}$ que no es más que la semirrecta indicada con vector director $re^{i\theta}$ y ángulo θ

Distinguimos casos:

- Si $\cos\theta > 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \exp(r\cos\theta) = \infty$ → Diverge
- Si $\cos\theta < 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \varphi(r) = 0$
- Si $\cos\theta = 0 \Rightarrow e^{i\theta} = e^{-i\theta}$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{2}$ luego $\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = \lim_{r\to\infty} \exp(ri) = \lim_{r\to\infty} e^{ir} = \lim_{r\to\infty} (\cos r + i\operatorname{sen} r)$ $\pm$

  usando que el coseno solo tiene los ceros reales

  lo cual no tiene límite pues es una circunferencia

4. Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to 1$, entonces

$$\{w_n(z_n - 1)\} \to \lambda \in \mathbb{C} \implies \{z_n^{w_n}\} \to e^{\lambda}$$

?(uniforme)

Distinguimos casos:

- Si $\{w_n\} \longrightarrow L \in \mathbb{C}$, en este caso, $\{w_n(z_n-1)\} \longrightarrow 0 = \lambda$ luego $\{z_n^{w_n}\} \longrightarrow 1^L = 1 = e^0 = e^\lambda$
- Si $\{w_n\} \longrightarrow \infty$ entonces tenemos una indeterminación luego, en caso de que $\exists \lim \{w_n \log(z_n)\}$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} z_n^{w_n} = \lim_{n\to\infty} e^{w_n\log(z_n)} = e^{\lim_{n\to\infty} w_n\log(z_n)}$$

- Si $z_n \neq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$, en ese caso, $\lim_{n\to\infty} w_n\log(z_n) = \lim_{n\to\infty} w_n(z_n-1)\frac{\log(z_n)}{z_n-1}$.

  De donde

  L'Hôpital por indeterminación

$$\lim_{n\to\infty} w_n(z_n-1)\cdot\frac{\log(z_n)}{z_n-1} = \lim_{n\to\infty} w_n(z_n-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\log(z_n)}{z_n-1} = \lambda$$

- Si $z_n = 1$ en algún caso, sea $A = \{n\in\mathbb{N} \mid z_n = 1\}$ y $B = \mathbb{N}\setminus A$. Distinguimos casos:
  - Si A finito, podemos eliminarlo y el caso $z_n \neq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ sería válido
  - Si A y B son infinitos, tomamos $\sigma: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ la parcial tal que $\{z_{\sigma(n)}\} = \{1\}$ y $\tau: \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$. Veamos que, en ambos casos se cumple
    - $\sigma(n)$: $\{w_n(z_{\sigma(n)}-1)\} = \{0\}$, $\{z_n^{w_n}\} = \{1^{w_n}\} \to 1 = e^0 = e^\lambda$
    - $\tau(n)$: basta aplicar el punto de $z_n \neq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ para el caso $z_{\tau(n)} \neq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} e^{-nz^2}$.

Sabemos que $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $z^w = e^{w \log z}$ donde $\log(z)$ es el logaritmo principal de z. De esta forma, podemos ver que

$$e^{-nz^2} = (e^{-z^2})^n$$

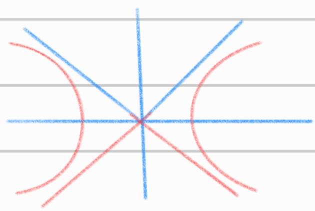
Por tanto, tomando $\varphi(z) = e^{-z^2}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ obtenemos que $\sum_{n\geq 0} e^{-nz^2} = \sum_{n\geq 0} \varphi(z)^n$. Como conocemos la convergencia de $\sum_{n\geq 0} w^n$:

- Absoluta en $D(0,1) \Rightarrow$ puntual
- Uniforme en cada compacto $K \subset D(0,1)$

Buscamos ahora $\Delta \subset \mathbb{C} \mid \varphi(\Delta) = D(0,1)$, es decir, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |\varphi(z)| < 1\}$; tomando $z \in \mathbb{C}$ fijo, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$|e^{-z^2}| < 1 \Leftrightarrow |e^{y^2-x^2} \cdot \underbrace{(\cos(-2xy) + i\,\text{sen}(-2xy))}_{\hookrightarrow \text{ módulo } 1}| = |e^{y^2-x^2}| < 1 \Leftrightarrow y^2 - x^2 < 0 \Leftrightarrow y^2 < x^2 \cancel{\Leftrightarrow |y| < |x|}$$

Es decir, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}\,z^2 > \text{Im}\,z^2\}$, gráficamente:



Por tanto, $\sum_{n\geq 0} \varphi(z)^n$ converge absoluta y puntualmente en Δ. Así como converge uniformemente en cada compacto de Δ y no converge en $\mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$.

Veamos qué ocurre en $\bar{\Delta} \setminus \Delta$, es decir, en los puntos tales que $|\text{Re}\,z| = |\text{Im}\,z|$, sea $z \in \bar{\Delta} \setminus \Delta$ tenemos que $|\varphi(z)| = |e^{-z^2}| = |e^{\text{Im}\,z^2 - \text{Re}\,z^2}| = |e^0| = 1$ de donde deducimos que $\{\varphi(z)\}$ no converge uniformemente a 0 en $\bar{\Delta} \setminus \Delta$ luego $\sum_{n\geq 0} (\varphi(z))^n$ no converge uniformemente en $\bar{\Delta} \setminus \Delta$, ni siquiera de forma puntual.

8. Probar que, para todo $z \in D(0,1)$ se tiene:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$ $\rightarrow$ Primitiva y serie de potencias geom

Sea la serie $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} z^{n-1}$, sabemos que es una serie de potencias con radio de convergencia 1 y centrada en el origen; además:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+2} z^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n = \sum_{n\geq 0} (-z)^n$$

Es una geométrica que converge puntualmente en $D(0,1)$ con suma $\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z}$ luego, por ser una serie de potencias, usando el Teorema de funciones dadas como series de potencias y sabiendo que $\varphi(z) = \frac{1}{1+z}$ es holomorfa en $D(0,1)$ obtenemos que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ tiene el mismo radio de convergencia y la suma de la serie es $\Psi(z) = \underset{\hookrightarrow +C?}{\log(1+z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ $\forall z \in D(0,1)$.

12. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\text{sen}(nz)}{2^n}$

Sabemos que $\forall z\in\mathbb{C}$ $\text{sen}\, z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ luego $\text{sen}(nz) = \frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2i}$ de donde deducimos que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\text{sen}(nz)}{2^n} = \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2^n} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{e^{inz}}{2^n} - \sum_{n\geq 0}\frac{e^{-inz}}{2^n}\right]$$ donde definiendo $\varphi(z) = \frac{e^{iz}}{2}$

vemos que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\text{sen}(nz)}{2^n} = \frac{1}{2i}\Big[\underbrace{\sum_{n\geq 0}\varphi(z)^n}_{\sigma} - \underbrace{\sum_{n\geq 0}\varphi(-z)^n}_{\tau}\Big]$$

Luego vamos a estudiar las series σ y τ usando lo que sabemos de la serie geométrica:

$$\sum_{n\geq 0}\varphi(z)^n: \ |\varphi(z)|<1 \iff \left|\frac{e^{iz}}{2}\right|<1 \iff |e^{iz}|<2 \iff e^{\text{Re}(iz)}<2 \iff e^{-\text{Im}(z)}<2 \iff \text{Im}\, z < -\ln(2)$$

$$\sum_{n\geq 0}\varphi(-z)^n: \ |\varphi(-z)|<1 \iff \left|\frac{e^{-iz}}{2}\right|<1 \iff |e^{-iz}|<2 \iff e^{\text{Re}(-iz)}<2 \iff e^{\text{Im}(z)}<2 \iff \text{Im}\, z<\ln(2)$$

Por tanto, concluimos que $\sum_{n\geq 0}\frac{\text{sen}(nz)}{2^n}$ converge absolutamente en $\Omega = \{z\in\mathbb{C} \mid |\text{Im}\, z|<\ln(2)\}$ y por lo tanto puntualmente. Además, converge uniformemente en cada compacto $K\subset\Omega$. No converge en ningún punto de $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$.

↳ esto hay que estudiar que sólo una de las dos converge

↳ ver que no hay conv. unif. con $\{f(n)\}\not\to 0$

Deberíamos estudiar la convergencia en los puntos de $\overline{\Omega}\setminus\Omega$. Se copiará en clase.

14. Para $z\in D(0,1)$ con $\text{Re}\, z\neq 0$, probar que

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \text{Re}\, z>0 \\ -\pi/2 & \text{si } \text{Re}\, z<0\end{cases}$$

$\text{arctg}\,\frac{1}{z}$ holomorfa? $\to \text{arctg}\,\frac{1}{z}\notin \begin{array}{c} i \\ -i \end{array}$ $\to$ con esto tenemos la holomorfía