1 En la integración numérica se obtienen fórmulas simples, con pocos nodos, para aproximar la integral en un intervalo $[a, b]$. Estás fórmulas, al tener pocos nodos, no dan resultados satisfactorios en ocasiones, pero unas tienen un mayor grado de exactitud que otras.

(*a*) Explica cómo podrías obtener fórmulas de tipo interpolatorio clásico con más exactitud de n, cuando puedes elegir libremente los nodos de interpolación: $x_0, \ldots, x_n$.

(*b*) Sea a igual a la suma de los dígitos de tu dni; sea $b = a + 3$. Calcula la fórmula con nodos a, x_1 de mayor grado de exactitud para aproximar la integral entre a y b.

(*c*) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Aplica la fórmula simple obtenida para aproximar, previo cambio de variable si es necesario, el valor de la integral: $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Aplica la fórmula compuesta asociada a la fórmula simple, haciendo dos subintervalos a partir del [-1,1] , para aproximar el mismo valor de la integral anterior.

(*d*) ¿Qué puedes decir del error de la fórmula simple obtenida, de la compuesta asociada a ella y de sus aplicaciones particulares en el apartado anterior?

(a) Teórico tratando de imponer exactitud cada vez mayor.

(b) $a = 34$, $b = 37$.

Primero calculamos los coeficientes:

$$\int_{34}^{37} f(x)dx = \alpha_0 f(34) + \alpha_1 f(x_1)$$

Imponemos exactitud en $\{1, x\}$

$$3 = \int_{34}^{37} dx = \alpha_0 + \alpha_1$$

$$106'5 = \int_{34}^{37} x\,dx = 34\alpha_0 + \alpha_1 x_1$$

$$\begin{cases} 3 = \alpha_0 + \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 3 - \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 = 3 - \dfrac{106'5 - 3x_1}{34 - x_1} = \dfrac{-4'5}{34 - x_1} \\ 106'5 = 34\alpha_0 + \alpha_1 x_1 \quad 106'5 = 34\alpha_0 + 3x_1 - \alpha_0 x_1 = (34 - x_1)\alpha_0 + 3x_1 \end{cases}$$

$$\frac{106'5 - 3x_1}{(34 - x_1)} = \alpha_0$$

Por tanto, $\int_{34}^{37} f(x)dx = \dfrac{106'5 - 3x_1}{(34 - x_1)} f(34) - \dfrac{4'5}{34 - x_1} f(x_1)$. Imponemos ahora exactitud en x^2.

$$37\,83 = \int_{34}^{37} x^2 dx = \frac{106'5 - 3x_1}{(34 - x_1)} 1156 - \frac{4'5}{34 - x_1} x_1^2 \Leftrightarrow x_1 = 36$$

Es decir, los nodos son $\{34, 36\}$ para que sea exacta en $\mathbb{P}_2$. Veamos en $\mathbb{P}_3$

$$134456{,}25 = \int_{34}^{37} x^3 dx = \frac{3}{4}(34)^3 - \frac{9}{4}(36)^3 = -75498$$

Por tanto, es exacta para $\mathbb{P}_2$ y tiene orden de exactitud 2.

(c) Para poder usar la fórmula anterior, debemos buscar $f: [-1,1] \longrightarrow [34,37]$ para trabajar donde ya hemos calculado la fórmula de integración

$$[-1,1] \longrightarrow [34,36] \longrightarrow [34,37]$$

$$x \longmapsto x + 35 \longmapsto \frac{3(x+35)}{2} - 17 = \frac{3x}{2} + 35'5$$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = a + xb \\ \begin{cases} 34 = a + 34b \\ 37 = a + 37b \end{cases} \end{array}}$$

$$x = \frac{2(y - 35'5)}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} x^2 dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{0}^{1} x^2 dx}_{(2)}.$$ Aplicamos la fórmula a cada intervalo $\rightarrow$ proceso compuesto.

$$(1) = \int_{34}^{35'5} \left(\frac{2y - 71}{3}\right)^2 dy \approx \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{2} \qquad (2) = \int_{35'5}^{37} \left(\frac{2y - 71}{3}\right) dy \approx \frac{3}{4} 1 - \frac{9}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Luego $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$ mediante integración compuesta. Para la simple:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{34}^{37} f\left(\frac{2y-71}{3}\right) dx \approx -\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2\cdot 34-71}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2\cdot 36-71}{3}\right)^2 = -0'73765$$

Lo cual se ve que no es lo óptimo.

(d) Obtenemos el error de la fórmula simple

$$R(f) = \int_{34}^{37} \Pi(x)\, f[34,36,x]\, dx = \int_{34}^{37} (x-34)(x-36) f[34,36,x] dx$$ que cambia de signo en $x=36$

$$\underbrace{f[34,36,x]}_{\Delta(x)} = \underbrace{f[34,36,36,x]}_{\Delta_{36}(x)}(x-36) + \underbrace{f[34,36,36]}_{\Delta_{36}}$$

De donde

$$R(f) = \int_{34}^{37} \Delta_{36}(x)(x-34)(x-36)^2 dx + \Delta_{36} \int_{34}^{37} (x-34)(x-36) dx \overset{\text{TVM36}}{=} \Delta_{36}(\mu) \int_{34}^{37} (x-34)(x-36)^2 dx + \Delta_{36} \int_{34}^{37} \Pi(x) dx$$

$$= \frac{9}{4} \frac{f'''(\xi_1)}{3!}$$

Luego, se ve el orden de exactitud para la fórmula compleja con $n=2$:

$$\int_{34}^{37} f(x)dx = \int_{34}^{35'5} f(x)dx + \int_{35'5}^{37} f(x)dx + \underbrace{\frac{9}{2} \frac{f'''(\xi)}{3!}}$$ Este es el error

2 Determina razonadamente si es posible diseñar una fórmula numérica de tipo interpolatorio en el espacio generado por $\langle 1, x, x^2, x^4 \rangle$ para aproximar

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx + \int_{-2}^{2} |x| f(x)\, dx$$

usando para ello los datos $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$, $\int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx$, $f(0)$ y $f'(0)$. En particular determina el peso de $f'(0)$.

Sabiendo ya que $L(f) = \int_{-2}^{2} f(x)(1+|x|)dx$ es un funcional podemos ver que la pregunta planteada es equivalente a probar si existe $p \in V = L(\{1,x,x^2,x^4\})$ interpolante de f para $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, $\int_{-1}^{1} |x| f(x)dx$, $f(0)$, $f'(0)$ de forma que $L(f) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i L_i(f) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i L_i(p)$ donde $L_0(f) = f(0)$, $L_1(f) = f'(0)$, $L_2(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ y $L_3(f) = \int_{-1}^{1} |x| f(x)dx$.

Calculamos ahora $p \in V$ interpolante, usaremos la siguiente notación.

$$A = f(0) \qquad B = f'(0) \qquad C = \int_{-1}^{1} f(x)dx \qquad D = \int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx$$

Sean ahora $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ definimos $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^4 \in V$ y vamos a imponer que $L_i(p) = L_i(f)$ $\forall i \in \{0,1,2,3\}$

$a = p(0) = L_0(p) = L_0(f) = f(0) = A$ $\qquad C = L_2(f) = L_2(p) = \int_{-1}^{1} a+bx+cx^2+dx^4\, dx = 2a + \frac{2}{3}c + \frac{2}{5}d$

$b = p'(0) = L_1(p) = L_1(f) = f'(0) = B$ $\qquad D = L_3(f) = L_3(p) = a + \frac{c}{2} + \frac{d}{3}$ ← divido en $[-1,0]$ $[0,1]$

El sistema queda como sigue:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A} = a \\ \mathcal{B} = b \\ \mathcal{C} = 2\mathcal{A} + \frac{2}{3}c + \frac{2}{5}d \\ D = \mathcal{A} + \frac{c}{2} + \frac{d}{3} \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d = 15\mathcal{A} - \frac{45}{2}\mathcal{C} + 30D \\ c = 15\mathcal{C} - 12\mathcal{A} - 18D \end{array}$$

Como el sistema era compatible determinado tenemos ya el interpolante, ahora debemos calcular los pesos.

$$\mathcal{L}(p) = \overbrace{\int_{-2}^{2} p(x)dx}^{(1)} + \overbrace{\int_{-2}^{2} |x|p(x)\,dx}^{(2)} = 4a + \frac{16}{3}c + \frac{64}{5}d + 4a + 8c + \frac{64}{3}d = 8a + \frac{40}{3}c + \frac{512}{15}d = 360\mathcal{A} - 568\mathcal{C} + 784D$$

$$(1) = \int_{-2}^{2} a + bx + cx^2 + dx^4\,dx = a\left[x\right]_{-2}^{2} + \cancel{b\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2}} + c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} + d\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = 4a + \frac{16}{3}c + \frac{64}{5}d$$

$$(2) = \int_{-2}^{0} (-x)(a + bx + cx^2 + dx^4)dx + \int_{0}^{2} ax + bx^2 + cx^3 + dx^5\,dx = 4a + 8c + \frac{64}{3}d$$

Por tanto, como $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(p)$ obtenemos que $\alpha_0\mathcal{A} + \alpha_1\mathcal{B} + \alpha_2\mathcal{C} + \alpha_3 D = 360\mathcal{A} - 568\mathcal{C} + 784D$ entonces la fórmula de tipo interpolatorio será:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} |x|f(x)dx = 360\,f(0) - 568 \cdot \int_{-1}^{1} f(x)dx + 784\int_{-1}^{1} |x|\,f(x)dx$$

4 Se pretende aproximar una integral del tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx$$

utilizando tres nodos, es decir:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

a) Si fijamos los nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, determina el valor de los parámetros para que sea una fórmula de tipo interpolatorio, así como el orden de exactitud de dicha fórmula.

b) ¿Cuáles serían los nodos si utilizamos una fórmula de Newton-Cotes abierta?

c) Determina la fórmula gaussiana correspondiente así como la expresión del error.

d) Utiliza las fórmulas de los apartados *a*) y *c*) para aproximar

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^2)(1-x^2)dx$$

a) Imponemos exactitud en $\{1, x, x^2\}$ y tratamos de extender sabiendo que el máximo es $\mathbb{P}_5$.

$$\frac{4}{3} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \frac{4}{3} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$0 = \int_{-1}^{1} x - x^3 dx = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

$$\frac{4}{15} = \int_{-1}^{1} x^2 - x^4 dx = \alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 \qquad \frac{4}{15} = \alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$$

Como $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ obtenemos:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x) dx = \frac{2}{15} f(-1) + \frac{16}{15} f(0) + \frac{2}{15} f(1)$$

Continuamos imponiendo exactitud:

$$0 = \int_{-1}^{1} x^3 - x^5 dx = 0$$

$$\frac{4}{35} = \int_{-1}^{1} x^4 - x^6 dx = \frac{4}{15} \quad !!$$

Por tanto, es exacta en $\mathbb{P}_3$, es decir, orden de exactitud

b) Como Newton-Cotes requiere nodos equiespaciados, y al ser abierta no permite que tomemos un extremo como nodo tomaríamos los nodos $\{-0'5, 0, 0'5\}$

c) Buscamos la fórmula gaussiana con $\omega(x) = (1-x^2)$ como función peso para 3 nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$ por tanto si $\pi(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenemos que se debe cumplir:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad c + \frac{a}{3} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad b - \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$c = -\frac{a}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, \cancel{x^6} + ax^5 + bx^4 + cx^3 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad c + \frac{a}{2} = 0 \qquad \frac{a}{3} + \frac{a}{2} = 0 \quad a = 0 \quad c = 0$$

Estamos imponiendo en $\mathbb{P}_6$ pero el máximo grado de exactitud es 5. $2n + 2 - 1 = 2n + 1 = 4 + 1 = 5$

Por lo que $\pi(x) = x^3 + \frac{x}{2} = x(x^2 - \frac{1}{2})$ cuyas raíces son $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-1}{2}$, es decir, la fórmula gausiana se calcula como

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \beta_0 f(-\tfrac{1}{2}) + \beta_1 f(0) + \beta_2 f(1/2)$$

Aparentemente es la fórmula de Newton-Cotes abierta de 3 nodos en $[-1, 1]$

Suponiendo exactitud en $\mathbb{P}_2$ obtenemos:

$$f(x)=1 \quad \Rightarrow \quad 4/3 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$$

$$0 = \int_{-1}^{1} x(1-x^2)dx = -\frac{\beta_0}{2} + \frac{\beta_2}{2}$$

$$4/15 = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \frac{\beta_0}{4} + \frac{\beta_2}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad \beta_0 = \frac{8}{15} \qquad \beta_1 = 4/15 \qquad \beta_2 = 8/15$$

Luego la fórmula gaussiana resultante es $\int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x)dx \approx \frac{8}{15} f(-0'5) + \frac{4}{15} f(0) + \frac{8}{15} f(0'5)$

con término de error

$$R(f) = \frac{f^{(vi)}(\xi)}{6!} L(\pi^2(x)) = \frac{f^{(vi)}(\xi)}{6!} \cdot \frac{11}{210} \approx 0'00007 f^{(vi)}(\xi)$$

d) Hacemos los cálculos:

Newton-Cotes cerrada: $\int_{-1}^{1} \cos(x^2)(1-x^2)\, dx \approx 1'210747282$

Gaussiana: $\int_{-1}^{1} \cos(x^2)(1-x^2)\, dx = 1'30017325$

Valor real: $\int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos(x^2)dx = 1'27784 5793$

3 Considera la fórmula de cuadratura simple del trapecio en la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(a,b) + R(f).$$

a) Obtén la expresión del error $R(f)$ para f suficientemente regular.

b) Obtén la fórmula compuesta asociada y la correspondiente expresión del error.

c) Llama $h = b - a$. De forma similar a la vista en clase para la integración adaptativa con la fórmula de Simpson, obtén un criterio de estimación del error

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T(a,m) - T(m,b)\right|$$

basado en $T(a,b)$, $T(a,m)$ y $T(m,b)$, siendo $m = \frac{a+b}{2}$.

d) Estima el error cometido en la aproximación en dos subintervalos

$$\int_4^8 \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) dx \approx T(4,6) + T(6,8) = 4.0054471$$

sabiendo que $f(4) = 1.0045789$, $f(6) = 1.0004131$ y $f(8) = 1.0000419$.

(a) Sabemos que $T(a,b) = \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b))$ luego los nodos son $\{a,b\}$. Además, sabemos que:

$$R(f) = \int_a^b (x-b)(x-a)\cdot f[a,b,x]\,dx$$

Como $\pi(x)\pi(y) \geq 0 \;\forall x,y \in [a,b]$ vemos que no cambia de signo luego podemos aplicar las propiedades de las dif div así como el TVMIG.

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b x^2 - x(b+a) + ab\,dx = -\frac{f''(\xi)}{2}\frac{(b-a)^2}{6} = \frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi) \text{ con } \xi \in [a,b].$$

(b) Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es el número de subintervalos luego tenemos los nodos $a = x_0 < \dots < b = x_n$ y sabemos que, si $T(a,b)$ es la fórmula simple, la fórmula compuesta es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{i=1}^n R_i \overset{F_i = T(x_{i-1},x_i)}{=} \sum_{i=1}^n T(x_{i-1},x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{12} f''(\xi_i)$$

Si consideramos $h = \frac{b-a}{n}$ tenemos que $(x_i - x_{i-1}) = h \;\forall i \in \{1,\dots,n\}$ luego:

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{props dif div}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})}{2}\cdot(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{nh^2}{12}\cdot f''(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{\cancel{n}h^2}{12} f''(\xi), \; \xi \in [a,b].$$

$nh = (b-a)$

c) $$\int_a^b f(x)dx = T(a,b) + R(f) = T(a,b) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)dx = T(a,m) + T(m,b) - \frac{h^3}{8\cdot 12} f''(\xi_1) - \frac{h^3}{8\cdot 12} f''(\xi_2) = T(a,m) + T(m,b) - \frac{h^3}{48} f''(\bar{\xi})$$

$$T(a,b) - \frac{h^3}{12} f''(\xi) = T(m,b) + T(a,m) - \frac{h^3}{48} f''(\bar{\xi}) \text{ sii } T(a,b) - T(a,m) - T(m,b) = \frac{h^3}{12} f''(\xi) - \frac{h^3}{48} f''(\bar{\xi})$$

Asumiendo que $f''(\xi) \approx f''(\bar{\xi})$ obtenemos que

$$\frac{h^3}{16} f''(\bar{\xi}) \approx T(a,b) - T(a,m) - T(m,b)$$

$$\left|\int_0^b f(x)\,dx - T(a,w) - T(w,b)\right| = \left|T(a,b) - \frac{h^3}{12} f''(\xi) - T(a,w) - T(w,b)\right| = \left|\cancel{T(a,w)} + \cancel{T(w,b)} - \frac{h^3}{48} f''(\xi) - \cancel{T(a,w)} - \cancel{T(w,b)}\right|$$

$$= \left|-\frac{h^3}{48} f''(\xi)\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{-h^3}{16} f''(\xi)\right| \approx \frac{1}{3}\left|T(a,b) - T(a,w) - T(w,b)\right| \lesssim \varepsilon \text{ si } \left|T(a,b) - T(a,w) - T(w,b)\right| \lesssim 3\varepsilon$$

d) $T(4,8) = 2\left(f(4) + f(8)\right) = 4'6092416$

$$\frac{1}{3}\left|T(4,8) - T(4,6) - T(6,8)\right| = 0'0126483333 \rightarrow \text{error}$$

5 Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{2} f(x)x\,dx \sim a_0\,f(0) + a_1\,f(2) + a_2\,f'(0) + a_3 f'(2).$$

a) Determina los coeficientes a_0, a_1, a_2 y a_3 para que la fórmula anterior sea de tipo interpolatorio.

b) Indica el grado de exactitud de la fórmula anterior. ¿Es el grado de exactitud superior al esperado?

c) Si se pretende utilizar una fórmula gaussiana con 2 nodos para aproximar la integral, determina cuáles serían dichos nodos y la expresión del error cometido en la aproximación.

a) Imponemos exactitud en $\{1, x, x^2, x^3\}$:

$$\frac{3}{2} = \int_{-1}^{2} x\,dx = \alpha_0 + \alpha_1 \qquad \alpha_0 = 0'3375$$

$$3 = \int_{-1}^{2} x^2 dx = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_1 = 1'1625$$

$$\frac{15}{4} = \int_{-1}^{2} x^3 dx = 4\alpha_1 + 4\alpha_3 \qquad \alpha_2 = 2'0625$$

$$\frac{33}{5} = \int_{-1}^{2} x^4 dx = 8\alpha_1 + 12\alpha_3 \qquad \alpha_3 = -0'225$$

Luego $\int_{-1}^{2} x f(x) dx = 0'3375\, f(0) + 1'1625\, f(2) + 2'0625\, f'(0) - 0'225\, f'(2)$. Para ver el grado imponemos exactitud en $x^4, x^5 \ldots$

$$\frac{21}{2} = \int_{-1}^{2} x^5 dx = 11'4 \;!!$$

Por tanto, es exacta en $\mathbb{P}_3$.

b) Por el apartado anterior vemos que el grado de exactitud sí es el esperado.

c) Sea $\pi(x) = x^2 + ax + b$, buscamos los nodos. (tiene máximo grado de exactitud 3)

$$\int_{-1}^{2} x^4 + ax^3 + bx^2 dx = \frac{33}{5} + \frac{15a}{4} + 3b = 0$$

$$\int_{-1}^{2} x^5 + ax^4 + bx^3 dx = \frac{21}{2} + \frac{33a}{5} + \frac{15b}{4} = 0$$

$$\left\{ a = \frac{-20}{17},\quad b = \frac{-62}{85} \right.$$

Por tanto, $\pi(x) = x^2 - \frac{20}{17}x - \frac{62}{85} = (x - \underbrace{1.6257265923}_{B})(x + \underbrace{0'4491795335 1}_{A})$ de donde

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx \approx \alpha_0 f(A) + \alpha_1 f(B)$$

Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_1$

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \int_{-1}^{2} x\,dx = \alpha_0 + \alpha_1$$

$$3 = \int_{-1}^{2} x^2 dx = A\alpha_0 + B\alpha_1$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = -0'271014 7125, \quad \alpha_1 = 1'77101 4712$$

Para lo que se pide esto no es necesario

Por tanto la fórmula gaussiana sería $\int_{-1}^{2} x f(x) dx \approx \alpha_0 f(A) + \alpha_1 f(B)$. Como el máximo grado de exactitud es 3 tenemos que

$$R(f) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{24} \cdot L(\pi^2(x)) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{24} 1'722768166 \approx 0'071782\, f^{(iv)}(\xi)$$

8 Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx = \alpha_0\, f(x_0) + \alpha_1\, f(x_1) + R(f).$$

a) Determina los nodos y los coeficientes para que la fórmula anterior tenga grado de exactitud máximo. ¿Cuál es ese grado de exactitud? $\longrightarrow 3$ gaussiana

b) Obtén la expresión del error de dicha fórmula.

c) Utiliza la fórmula anterior para estimar el valor de

$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)(1-x^2)dx\,.$$

a) Como disponemos de dos nodos imponemos exactitud en $\mathbb{P}_1$.

$$\frac{4}{3} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \alpha_0 + \alpha_1 \qquad -\frac{\alpha_0 x_0}{x_1} = \alpha_1$$

$$0 = \int_{-1}^{1} x(1-x^2)dx = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \qquad \frac{4}{3} = \alpha_0 - \frac{\alpha_0 x_0}{x_1} = \frac{x_1\alpha_0 - \alpha_0 x_0}{x_1} = \alpha_0\,\frac{x_1 - x_0}{x_1}$$

$$\boxed{\frac{4x_1}{3(x_1-x_0)} = \alpha_0} \quad \boxed{\alpha_1 = \frac{-4x_1x_0}{3(x_1-x_0)\cancel{x_1}}}$$

Por tanto, $\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \frac{4x_1}{3(x_1-x_0)} f(x_0) - \frac{4x_1 \cdot x_0}{3(x_1-x_0)\cancel{x_1}} f(x_1)$. Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_3$ para obtener x_1, x_0.

$$\frac{4}{15} = \int_{-1}^{1} x^2 - x^4\,dx = \frac{4x_1x_0^2}{3(x_1-x_0)} - \frac{4x_0x_1^2}{3(x_1-x_0)}$$

$$0 = \int_{-1}^{1} x^3 - x^5\,dx = \frac{4x_1x_0^3}{3(x_1-x_0)} - \frac{4x_0x_1^3}{3(x_1-x_0)} \quad \text{sii} \quad \cancel{4}x_0x_1^3 = \cancel{4}x_1x_0^3 \quad \text{sii} \quad 1 = \frac{x_0^2}{x_1^2} \quad \text{sii} \quad x_1^2 = x_0^2 \quad \text{sii}$$

$\cancel{x_0 = +x_1}$

$x_0 = -x_1$

$$\frac{1}{5} = \frac{x_1x_0^2 - x_0x_1^2}{(x_1-x_0)} \qquad (x_1-x_0) = 5x_1x_0^2 - 5x_0x_1^2 \qquad 0 = 5x_1^3 - 5x_1^3 = 0$$

Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_4$ pues con $x_1 = x_0$ tenemos exactitud en $\mathbb{P}_3$. Obtenemos $x_1 = 0'5411$ como valor aproximado de x_1.

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2) \approx \frac{4\cancel{x_1}}{6\cancel{x_1}} f(-x_1) + \frac{4\cancel{x_1}}{6\cancel{x_1}} f(x_1) = \frac{2}{3} f(-x_1) + \frac{2}{3} f(x_1)$$

b) Obtenemos el error con $\Pi(x) = (x-x_1)(x+x_1)$ y $f[-x_1, x_1, x]$ obteniendo el siguiente error; como se anula en x_1 y $-x_1$ deberemos desarrollar las cuentas dos veces, lo cual se deja al lector, deberá usar el TVMIG y que

$$f[-x_1, -x_1, x_1, x] = \frac{f[-x_1, -x_1, x_1] - f[-x_1, x_1, x]}{(x+x_1)}$$

$$f[-x_1, x_1, x_1, x] = \frac{f[x_1, x_1, x] - f[-x_1, x_1, x]}{(x-x_1)}$$

Hacerse polvo ó usar la expresión del error de una gaussiana

9 Considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{3h}{4} f(a) + \frac{h}{4} f(a+2h) + R(f)$$

a) Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

b) Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula incluyendo una expresión del error.

c) Deduce un método multipaso lineal para aproximar la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(f, x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$$

(:

a) Sabemos que $R(f) = \int_a^{a+h} f[a, a+2h, x]\,\pi(x)dx$ con $\pi(x) = (x-a)(x-a-2h)$ que vemos que no cambia de signo en $[a, a+h]$ luego aplicando el TVMIG y las propiedades de las diferencias divididas obtenemos:

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-2h)\,dx = \frac{f''(\xi)}{2} \left[\frac{-2(a+h)^3}{3} - \frac{a^3}{3} - ha^2 - a(a+2h)(a+h) \right]$$

según Metad I

$$= \frac{f''(\xi)}{2} \left[-2a^3 - 6a^2h - 4ah^2 - \frac{2h^3}{3} \right]$$

b) Sea $[a,b]$ un intervalo, tomando n subintervalos con $h=\frac{b-a}{n}$ obtenemos que:

?

$$L(f)=\sum_{i=0}^{n-1} F_i + \sum_{i=0}^{n-1} R_i = \sum_{i=0}^{n-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f''(\xi)}{2}T_i = \sum_{i=0}^{n-2}\frac{3h}{4}f(x_i)+\frac{h}{4}f(x_{i+2}) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f''(\xi)}{2}T_i$$

$$=\frac{3h}{4}\cdot n\sum_{i=0}^{n-2} f(x_i) + \frac{hn}{4}\sum_{i=0}^{n-2} f(x_{i+2}) + \frac{nf''(\xi)}{2}\cancel{\sum_{i=0}^{n-1} T_i}\ 2$$

Debemos agrupar al máximo

7 A veces, para construir fórmulas de integración numérica es posible utilizar nodos que se encuentran fuera del intervalo de integración. Considera la fórmula:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{5h}{12}f(a+h)+\frac{2h}{3}f(a)-\frac{h}{12}f(a-h)+R(f)$$

a) Demuestra que es de tipo interpolatorio y determina el grado de exactitud.

b) Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

c) Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula.

a) Sabemos que las fórmulas de tipo interpolatorio son aquellas de la forma

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f)$$ que sean exactas en $\mathbb{P}_2$

lo cual se cumple en este caso así que es interpolatoria. Para conocer el grado de exactitud basta con ir imponiendo exactitud en x^n con $n\in\mathbb{N}$ hasta encontrar x^i / no se cumpla la exactitud; como máximo será x^5.

b) Como $\pi(x)\pi(y)>0$ $\forall x,y\in[a,a+h]$ obtenemos el siguiente error:

$$R(f)= f[a-h,a,a+h,x_n]\int_a^{a+h}(x-(a-h))(x-a)(x-(a+h))dx$$

$$=\frac{f'''(\xi)}{6}\cdot$$

c) Para deducir la fórmula compuesta, basta hacer lo mismo que en el apartado b del ejercicio 9. Pero agrupando

6 Se pretende aproximar la integral

$$\int_a^b f(x)dx = S_n(f) + R(f) \qquad (1)$$

donde $S_n(f)$ es una fórmula de integración compuesta obtenida al hacer una partición uniforme del intervalo $[a,b]$ de la forma:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad x_i = x_{i-1} + h, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

y $R(f)$ es el error de integración numérica que tiene el siguiente desarrollo:

$$R(f) = a_1 h^3 + a_2 h^6 + \cdots + a_m h^{3m} + \ldots$$

Siguiendo el mismo argumento de la integración de Romberg, combina $S_n(f)$ con $S_{3n}(f)$ para obtener una aproximación más precisa para la integral. Aplica recursivamente el método.

7 A veces, para construir fórmulas de integración numérica es posible utilizar nodos que se encuentran

Sabemos, por un lado, que

$$\int_a^b f(x)dx = S_n(f) + a_1 h^3 + a_2 h^6 + \_\_ + a_m h^{3m} + \_\_ \qquad (1)$$

Tomando ahora $n = 3n$ obtenemos

$$\int_a^b f(x)dx = S_{3n}(f) + a_1 \frac{h^3}{3^3} + a_2 \frac{h^6}{3^6} + \_\_ + a_m \frac{h^{3m}}{3^{3m}} + \_\_ \qquad (2)$$

Por tanto es fácil ver que ganamos un "grado" de exactitud si a (1) le restamos 3^3 veces (2).

$$\int_a^b f(x)dx = \overset{\Delta}{\boxed{\frac{3^3 S_{3n}(f) - S_n(f)}{3^3 - 1}}} + b_2 h^6 + b_3 h^9 + \_\_ + b_m h^{3m} \qquad (3)$$

Si aumentamos de nuevo el número de nodos obtenemos que

$$\int_a^b f(x)dx = \overset{\Delta}{\frac{3^3 S_{9n} - S_{3n}(f)}{3^3 - 1}} + b_2 \frac{h^6}{3^6} + b_3 \frac{h^9}{3^9} + \_\_ + b_m \frac{h^{3m}}{3^{3m}} \qquad (4)$$

de esta forma, multiplicando (4) por 3^6 y restándole a (3) obtenemos

$k=2$ $\quad \frac{3^6\Delta - \Delta}{3^6-1}$

$$(3^6 - 1)\int_a^b f(x)dx = \frac{3^9 S_{9n} - 3^6 S_{3n}(f)}{3^3 - 1} - \frac{3^3 S_{3n}(f) + S_n(f)}{3^3 - 1} + c_3 h^9 + \_\_ + c_m h^{3m}$$

Iteración k:

$k=0 \quad S_n(f) = S^0_{3^k n}(f)$

$k=1 \quad \frac{3^3 S_{3n}(f) - S_n(f)}{3^3 - 1} = \frac{3^{3k} S^0_{3^k n}(f) - S^0_{3^{k-1} n}(f)}{3^{3k} - 1} = S^1_{3n}(f)$

$k=2 \quad \frac{3^6 \Delta - \Delta}{3^6 - 1} = \frac{3^{3k} \cdot S^1_{3n}(f) - S^1_n(f)}{3^6 - 1}$

En general $$S^{k}_{3^k n}(f) = \frac{3^{3k} S^{k-1}_{3^k n}(f) - S^{k-1}_{3^{k-1} n}(f)}{3^{3k} - 1}$$