Siempre suponemos que f es lipschitziana aunque ϕ puede no serlo

1 Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+1} = x_n + h\,(\alpha f(t_n, x_n) + (1-\alpha) f(t_{n+1}, x_{n+1})) \qquad \alpha \in [0,1] \tag{1}$$

(*a*) ¿Podemos asegurar que el método es estable? Estudia su consistencia y su convergencia.

(*b*) Si sabemos que la función f es lipschitziana respecto a la segunda variable con constante de Lipschitz L ¿Cuánto debe valer h como máximo para que la ecuación (2) tenga solución para cualquier valor de n?

(*c*) Determina el valor de α para que el método tenga orden 2. ¿Cuál es en este caso el error de truncatura local? ¿De que orden es el error global de discretización?

(*d*) Para el valor obtenido en el apartado anterior, estudia si el método es A-estable. ¿Es el método A-estable para cualquier valor de α?

(*e*) ¿De qué orden sería un método predictor-corrector en el que el predictor es el método de Euler y el corrector es el correspondiente al apartado (*c*)?

(*f*) Aplicamos todo lo anterior al problema:

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0.3 \end{cases}$$

para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones haciendo en cada una una predicción con el método de Euler y una corrección con el método descrito en (*c*). Muestra todas las iteraciones.

a) Como tenemos la hipótesis de que ϕ es lipschitziana y es un MML tenemos la estabilidad, de hecho

$p(\lambda) = \lambda - 1$ cumple la condición de estabilidad.

Para la consistencia

$p(1) = 0$ ✓

$p'(1) = q(1)$ con $q(\lambda) = (1-\alpha)\lambda + \alpha \quad p'(1) = 1 = q(1) = 1 - \alpha + \alpha$

Como es consistente y estable tenemos que es convergente.

b) Para obtener lo pedido, basta aplicar un teorema del tema 3 parte 4 que nos dice que para que exista solución $|\beta_k| \neq 0$ y f lipschitziana, entonces si $h < \frac{1}{|\beta_k| L}$ existe solución. Luego, h deberá cumplir

$$h < \frac{1}{|(1-\alpha)|\, L} \quad \text{con } \alpha \in [0,1]$$

c) Sabemos que el método tiene orden, al menos 2, si $C_0 = C_1 = C_2 = 0$

$$C_0 = 1 - \sum_{j=0}^{0} \alpha_j = 1 - 1 = 0 \qquad C_m: \frac{k^m}{m!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j^m}{m!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \frac{j^{(m-1)}}{(m-1)!}\beta_j$$

$$C_1 = 1 - \beta_0 - \beta_1 = 1 - \alpha - (1-\alpha) = 1 - 1 - \alpha + \alpha = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2} - (1-\alpha) = -\frac{1}{2} + \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$C_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{12}$$

Según el resultado obtenido vemos que $R_{n+1} = \frac{-1}{12} \cdot h^3 \cdot x'''(\mu_n)$ con μ_n un pto. intermedio

Usando el 1º de Dahlquist tenemos que el orden máximo del método es 2, luego el error global de discretización es $O(h^2)$ ↳ que es el obtenido.

d) Para estudiar la A-estabilidad tomamos el PVI: $\begin{cases} x' = \lambda x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ con $Re(\lambda) < 0$.

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\alpha f(t_n, x_n) + (1-\alpha) f(t_{n+1}, x_{n+1})\right) = x_n + h\left(\alpha \lambda x_n + (1-\alpha)\lambda x_{n+1}\right) = x_n + h\alpha\lambda x_n + h(1-\alpha)\lambda x_{n+1}$$

En este caso nos es útil el renombramiento.

$$x_{n+1}\left(1 - h(1-\alpha)\lambda\right) = x_n\left(1 + h\alpha\lambda\right) \text{ sii } x_{n+1} = x_0 \left(\frac{1 + h\alpha\lambda}{1 - h(1-\alpha)\lambda}\right)^{n+1}$$

Si llamamos $\omega = \lambda h$ obtenemos $x_{n+1} = x_0 \left(\frac{1+\omega\alpha}{1-(1-\alpha)\omega}\right)^{n+1}$ que cumplirá $\{x_{n+1}\} \longrightarrow 0$ sii $\left|\frac{1+\omega\alpha}{1-(1-\alpha)\omega}\right| < 1$

por tanto, $|1+\omega\alpha| < |1-(1-\alpha)\omega|$

Tomando $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos $\left|\frac{1+\frac{\omega}{2}}{1-\frac{\omega}{2}}\right|$ y vamos a estudiar este conjunto. Como $\omega \in \mathbb{C}$ tiene parte real e imaginaria entonces

$$1 > \left|\frac{1+\frac{x}{2}+i\frac{y}{2}}{1-\frac{x}{2}-i\frac{y}{2}}\right|^2 = \frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}} \text{ sii } \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{y^2}{4}} < \left(1-\frac{x}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{y^2}{4}} \text{ sii } \cancel{\frac{x^2}{4}} + x + \cancel{1} < \cancel{\frac{x^2}{4}} - x + \cancel{1}$$

sii $2x < 0$ pero como $Re(\omega) < 0$ por hipótesis tenemos que es A-estable.

Para ver que no se cumple en general buscamos un $\alpha \in [0,1]$ tal que, para ω con $Re(\omega) < 0$ $\left|\frac{1+\omega\alpha}{1-(1-\alpha)\omega}\right| > 1$, por ejemplo, con $\alpha = 1$ $|1+\omega| < 1$ sii $\omega \in D(-1,1)$ luego el método no será A-estable

e) El método predictor corrector que se nos define es

$$P: \quad x_{n+1}^{(0)} = x_n + h f(t_n, x_n)$$

$$C: \quad x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{f(t_n, x_n)}{2} + \frac{f(t_{n+1}, x_{n+1}^{(0)})}{2}\right)$$

Sabemos que el orden del método de Euler explícito tiene orden 1 y el método del apartado c) tiene orden 2 luego sabemos que el orden será $\min\{1+m, 2\}$ con $m \equiv$ nº correcciones, es decir, como máximo será 2.

f) Hacemos las 4 iteraciones con $h = 0'25$ de manera que la cuarta iteración será $x(1)$

$$x_1^{(1)} = 0'3 + 0'25\, f(0, 0'3) = 0'3 + 0'25(-3 \cdot 0'3) = 0'075$$

$$x_1 = 0'3 + 0'25\left(\frac{f(0,0'3)}{2} + \frac{f(0'25, 0'075)}{2}\right) = 0'3 + 0'25\left(\frac{-3 \cdot 0'3}{2} + \frac{-3(0'075) + 0'25}{2}\right) = 0'190625$$

$$x_2^{(1)} = 0'190625 + 0'25\, f(0'25, 0'190625) = 0'11015625$$

$$x_2 = 0'190625 + 0'25\left(\frac{f(0'25, 0'190625)}{2} + \frac{f(0'5, 0'11015625)}{2}\right) = 0'1715820313$$

$$x_3^{(1)} = 0'1715820313 + 0'25\, f(0'5, 0'1715820313) = 0'1697387695$$

$$x_3 = 0'1715820313 + 0'25\left(\frac{f(0'5, 0'1715820313)}{2} + \frac{f(0'75, 0'1697387695)}{2}\right) = 0'199836731$$

$$x_4^{(1)} = 0'2186479569$$

$$x(1) = x_4 = 0'261654973$$

2 Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+2} = x_n + h\left(\beta_0 f(t_n, x_n) + \beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_2 f(t_{n+2}, x_{n+2})\right) \tag{2}$$

(*a*) ¿Podemos asegurar que el método es estable? Estudia su consistencia y su convergencia.

(*b*) Determina el valor de los parámetros para que el método tenga orden al menos 3 ¿Es algún método conocido? ¿Cuál es en este caso el error de truncatura local? ¿De que orden es el error global de discretización?

(*c*) ¿De qué orden sería un método predictor-corrector en el que el predictor es el método de Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones y el corrector es el correspondiente al apartado (*b*)?

(*d*) Aplicamos todo lo anterior al problema:

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0.3 \end{cases}$$

para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones haciendo en cada una predicción con el método de Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones y una corrección con el método descrito en (*b*). Si necesitas algún valor inicial para empezar el método predictor-corrector, utiliza también Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones para estimarlo. Muestra los resultados de todas las iteraciones que realices.

a) Es idéntico al apartado anterior sobre la estabilidad, vemos la consistencia

$\rho(1) = 0$, $\rho'(1) = \sigma(1)$? $\sigma(1) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$, $\rho'(1) = 2$ luego será consistente sólo si $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2$

De donde vemos la convergencia.

b)

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= 1 - 1 = 0 \\ C_1 &= 2 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ C_2 &= 2 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ C_3 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\beta_1 - \beta_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\beta_0 = 0,\ \beta_1 = \frac{4}{3},\ \beta_2 = \frac{2}{3}} \qquad C_m = \frac{k^m}{m!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j^m}{m!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \frac{j^{m-1}}{(m-1)!}\beta_j$$

$$C_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{4}{3}\beta_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} - \frac{8}{9} = \frac{2}{3} - \frac{12}{9} = \frac{-2}{3}$$

Por tanto, el método es de tipo Milne-Simpson generalizado.

$$x_{n+2} = x_n + \frac{h}{3}\left(4 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + 2 f(t_{n+2}, x_{n+2})\right)$$

Con error de truncatura local:

$$R_{n+2} = \frac{-2}{3} x^{(iv)}(\xi) h^4$$

Luego el orden de error global es de $O(h^3)$.

c) Tenemos que el orden de RK2 óptimo es 2, como sabemos que el orden es el $\min\{p^* + m, p\}$ siendo $p^* = 2$ y $p = 3$, como $m = 1$ como mínimo obtenemos que el orden será 3.

d) Como realizamos 4 iteraciones tenemos que $h = 0'25$. Como necesito 2 semillas para empezar a aplicar el corrector, las calculamos inicialmente con el RK2 siguiente

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = \mu,\ t_0 = a, \\ \text{para } n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ \quad t_{n+1} = t_n + h \\ \quad x_{n+1} = x_n + \dfrac{h}{4}\left(f(t_n, x_n) + 3f\left(t_n + \dfrac{2}{3}h, x_n + \dfrac{2}{3}hf(t_n, x_n)\right)\right) \end{array}}$$

Por tanto, procedemos a iterar:

$$x_1^{(0)} = x_0 + \frac{0'25}{4}\left((-3\cdot x_0 + 0) + 3\cdot f\left(\frac{2}{3}\cdot 0'25,\ x_0 + \frac{2}{3} 0'25\cdot(-3x_0)\right)\right)$$

$$= 0'3 + \frac{0'25}{4}\cdot\left(-0'9 + 3\cdot f\left(\frac{1}{6}, -0'015\right)\right) 0'3003125$$

$$x_2^{(0)} = x_1^{(0)} + \frac{0'25}{4}\cdot\left((-3x_1^{(0)} + 0'25) + 3\cdot f\left(0'25 + \frac{2}{3}0'25,\ x_1^{(0)} + \frac{2}{3}\cdot 0'25\left(-3\cdot x_1^{(0)} + 0'25\right)\right)\right)$$

$$= 0'301 + \frac{0'25}{4}\cdot\left((-0'653) + 3\cdot f\left(\frac{5}{12}, 0'19217\right)\right) = 0'230216875$$

$$x_2 = x_0 + \frac{0'25}{3}\cdot\left(4 f(t_1, x_1^{(0)}) + 2 f(t_2, x_2^{(0)})\right) = 0'05056$$

$x_3^{(0)} = RK$ $\qquad$ $x_4^{(0)} = RK$

$x_3 = C$ $\qquad$ $x(1) = x_4 = C$

3 Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+2} = \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n + h\left(\beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_0 f(t_n, x_n)\right)$$

(*a*) Determina el valor de los parámetros (en función del parámetro α_1) para que el método tenga orden al menos 2. ¿Sería consistente en ese caso?

(*b*) Estima el error de truncatura local (también en función de α_1). ¿De que orden es el error global de discretización?

(*c*) Estudia la estabilidad y la convergencia en función del parámetro α_1.

(*d*) Si $\alpha_1 = 0$ ¿encuentras relación con algún método conocido? ¿Y en el caso $\alpha_1 = 1$?

(*e*) Utiliza este método con $\alpha_1 = 1/2$ en el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0.3 \end{cases}$$

para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones del método haciendo uso del método de Euler para calcular los datos iniciales que necesites. Muestra todas las iteraciones.

a) Hacer lo de los C_i, $C_0 = C_1 = 0 \Rightarrow$ consistencia

$$C_0 = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j$$

$$C_1 = k - \sum_{j=0}^{k-1} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \beta_j$$

$$C_m = \frac{k^m}{m!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j^m}{m!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \frac{j^{m-1}}{(m-1)!}\beta_j$$

b) Puedo sacar $C_{p+1} \neq 0$ y obtener la const. principal del error pero no sé sacar el func. local

c) Estabilidad

Raíces en $D(0,1)$ y las de módulo 1 son unitarias.

d) Saberse métodos lo cual no entiendo para qué sirve.

e) Hacer cuentas (soy malo)

4 a) Para el PVI $x' = x - |t-2|$, $x(0) = 1$, $t \in [0,1]$ con $h = 0.1$ calcula x_1 con el MML asociado al arreglo de Butcher

Runge-Kutta

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}$$

b) Estudia las propiedades (estabilidad, consistencia, convergencia, orden, parte principal del error de truncatura local) del método

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{h}{3}(5f_n - f_{n-1}).$$

b) Estamos ante un método MML; que podemos escribir como:

$$x_{n+2} = \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n + \frac{h}{3}(5f_{n+1} - f_n)$$

Estudiamos su estabilidad, consistencia, convergencia, orden y parte principal del error.

$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}$ $\quad p(1) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$ $\quad q(\lambda) = \frac{5}{3}\lambda - \frac{1}{3}$

$p'(\lambda) = 2\lambda - \frac{2}{3} = 2(\lambda - \frac{1}{3})$ $\quad p'(1) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ $\quad q(1) = \frac{4}{3}$

Luego el método es consistente.

$p(\lambda) = 0$ sii $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{-1}{3}$

Por tanto, es estable y por consiguiente es convergente.

Procedemos a estudiar el orden.

$$C_m = \frac{k^m}{m!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j^m}{m!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \frac{j^{m-1}}{(m-1)!}\beta_j$$

$$C_0 = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$C_1 = k - \sum_{j=0}^{k-1} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \beta_j = 2 - \frac{2}{3} - \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$C_2 = 2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3} - \frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = 0$$

$$C_3 = \frac{2^3}{3!} - \cancel{\frac{0^3}{3!}\alpha_0} - \frac{1^3}{3!}\frac{2}{3} - \cancel{\frac{0^2}{2!}\beta_0} - \frac{1^2}{2!}\frac{5}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{9} - \frac{5}{6} = \frac{7}{18}$$

Luego el orden es 2. Y el término principal del error de truncatura local es $R_{n+2} = \frac{7}{18}h^3 x'''(t_n) + \dots$

a) Lo que sabemos para $m=2$:

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \longrightarrow$$

$x_{n+1} = x_n + h\left(b_1 k_1(t_n, x_n) + b_2 k_2(t_n, x_n)\right)$

$k_1(t_n, x_n) = f(t_n + c_1 h, x_n + a_{11} h k_1(t_n, x_n) + a_{12} h k_2(t_n, x_n))$

$k_2(t_n, x_n) = f(t_n + c_2 h, x_n + a_{21} h k_1(t_n, x_n) + a_{22} h k_2(t_n, x_n))$

En nuestro caso:

$$x_{n+1} = x_n + 0'1\left(\frac{1}{2}k_1(t_n, x_n) + \frac{1}{6}k_2(t_n, x_n) + \frac{1}{3}k_3(t_n, x_n)\right)$$

con k_i:

$k_1(t_n,x_n) = f(t_n+h,\ x_n + h\,k_1(t_n,x_n)) = f(t_n+0'1,\ x_n+0'1\,k(t_n,x_n)) = x_n+0'1\,k_1 - |t_n+0'1-2|$

$k_2(t_n,x_n) = f(t_n+h,\ x_n + h\,k_1(t_n,x_n)) = k_1(t_n,x_n)$

$k_3(t_n,x_n) = f(t_n+h,\ x_n + h\,k_2(t_n,x_n)) = f(t_n+0'1,\ x_n+0'1\cdot k_1(t_n,x_n)) = x_n+0'1\,k_1 - |t_n+0'1-2|$

Luego con $x_0=1, t_0=0$ tenemos que:

$k_1(0,1) = 1+0'1\,k(0,1) - |-1'9| = 1+0'1\,k_1 - 1'9 = 0'1k_1 - 0'9$

$0'9\,k_1 = -0'9$ sii $k_1(0,1) = -1$

$k_2(0,1) = -1$

$k_3(0,1) = 1+0'1(-1) - |0'1-2| = 1-0'1 - 1'9 = -1$

Podemos calcular ya x_1:

$x_1 = 1+0'1\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) = 1+0'1(-1) = 1-0'1 = 0'9$

5 Utiliza la fórmula de cuadratura del trapecio para deducir la fórmula del trapecio para resolución de PVI así como el error de truncatura local. Estudia también la A-estabilidad del método.

Sea $[a,b]$ un intervalo no trivial, sabemos que, para un PVI del formato

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x_0 = \mu \end{cases}$$

usando la fórmula de cuadratura $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ se cumple que $\mu_n \in (t_{n-1}, t_{n+1})$

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,x(t))\,dt \approx \frac{h}{2}\left(f(t_n,x(t_n)) + f(t_{n+1},x(t_{n+1}))\right),\ h = |t_i - t_j|\ \forall i,j$$

De donde obtenemos que

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,x_n) + f(t_{n+1},x_{n+1})\right)$$

Estudiamos la A-estabilidad del método. Sea ahora la consuética

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ x_0 = \mu \end{cases} \quad \text{con } Re(\lambda) \leq 0$$

obtenemos que

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(\lambda x_n + \lambda x_{n+1}\right) = x_n + \frac{h}{2}\lambda x_n + \frac{\lambda h}{2} x_{n+1}$$

de donde

$$x_{n+1} = x_n \left(\frac{1+\lambda\frac{h}{2}}{1-\lambda\frac{h}{2}}\right) = \ldots = x_0 \left(\frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\lambda\frac{h}{2}}\right)^{n+1}$$

Tomando ahora $\omega = \lambda h$, $Re(\lambda)<0$ pues $h>0$; buscamos que $\{x_n\} \longrightarrow 0$ luego

$$\left|\frac{1+\frac{\omega}{2}}{1-\frac{\omega}{2}}\right| < 1 \iff \frac{|1+\frac{\omega}{2}|^2}{|1-\frac{\omega}{2}|^2} < 1$$

Pero $\omega = x+iy$ con $x<0$, $y \in \mathbb{R}$ luego

$$|1+\tfrac{\omega}{2}|^2 = |1+\tfrac{x}{2}+i\tfrac{y}{2}|^2 = (1+\tfrac{x}{2})^2 + \tfrac{y^2}{4} = \tfrac{x^2}{4} + x+1+\tfrac{y^2}{4}$$

$$|1-\tfrac{\omega}{2}|^2 = |1-\tfrac{x}{2}-i\tfrac{y}{2}|^2 = (1-\tfrac{x}{2})^2 + \tfrac{y^2}{4} = \tfrac{x^2}{4} - x+1+\tfrac{y^2}{4}$$

Obteniendo ya la región de A-estabilidad

$$\cancel{\tfrac{x^2}{4}} + x + \cancel{1} + \cancel{\tfrac{y^2}{4}} < \cancel{\tfrac{x^2}{4}} - x + \cancel{1} + \cancel{\tfrac{y^2}{4}} \quad \text{sii } 2x<0$$ lo cual se cumple si $x<0$, es decir $Re(\omega)<0$

Por tanto, el método es A-estable.

Cuando tenemos un método no lineal (salvo los ULS) hay que probar que Φ es lipschitziana y que $\Phi(\_\_, t_n, 0) = f(t_n, x_n)$

6 Dado el método multipaso lineal

$$x_{n+2} = \frac{2a+1}{2}\,x_{n+1} - \frac{a}{2}\,x_n + h\Big(\beta_0 f(t_n, x_n) + \beta_2 f(t_{n+2}, x_{n+2})\Big)$$

a) Estudia la convergencia del método.

b) Determina el valor de los parámetros para que el método sea convergente y tenga el mayor orden posible ¿Cuál es ese orden? Indica el término principal del error de truncatura local en este caso.

c) Para el PVI

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

toma $h = 0.1$ y utiliza el método de Euler para aproximar $x(0.1)$. Realiza a continuación dos iteraciones del método que has obtenido en *b*) para aproximar $x(0.3)$.

a) Estudiar consistencia y estabilidad en función de a, sacar lo necesario y luego distinguir casos.

b) El mayor orden posible es 4 por el T^a de Dahlquist $\longrightarrow$ tomar a convergente y obtener $(C_0, C_1, C_2, C_3) = (0,0,0,0)$ para sacar los β_i

Cuando tengamos eso pasamos a obtener $C_4 \Rightarrow ETPL = C_4\, x^{IV}(\xi)\, h^4$

c) $h = 0{,}1$ aplicar Euler

$$x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n)$$

luego aplicar b) 2 veces para sacar $x(0{,}2)$ $x(0{,}3)$

7 Para aproximar la solución del p.v.i.

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$$

se considera el método multipaso

$$x_{n+3} = x_n + h\Big(\beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_2 f(t_{n+2}, x_{n+2})\Big)$$

a) ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros β_1 y β_2 para que el método anterior sea convergente?

b) Calcula los coeficentes β_1 y β_2 para que el método sea convergente y tenga orden máximo. Indica el error de convergencia local en este caso.

c) Dado el PVI:

$$\begin{cases} x' = -5x + t^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Realiza dos iteraciones del método de Euler y a continuación, usando esos valores como semilla, realiza otras dos iteraciones del método propuesto con $h = 0.1$

a) $p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1) = (\lambda-1)(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

	1	0	0	1
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	0

Luego el método es estable. Vamos a buscar que sea consistente.

$p(1) = 0 \qquad p'(\lambda) = 3\lambda^2$

$q(\lambda) = \lambda(\beta_1 + \beta_2\lambda) \qquad q(1) = \beta_1 + \beta_2 = p'(1) = 3$

La relación que se debe cumplir para que haya convergencia es $\beta_1 + \beta_2 = 3$

b) Aplicando el Teorema de Dahlquist llego a la conclusión de que el orden máximo es 4 pues $K=3$ impar.

$$C_m = \frac{k^m}{m!} - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{m-1}}{(m-1)!}\beta_j$$

$C_0 = 0$

$C_1 = 3 - \beta_1 - \beta_2 = 0$

$C_2 = \frac{3^2}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = \frac{9}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = 0$

$C_3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\beta_1 - \frac{2^2}{2}\beta_2 = \frac{9}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \frac{4\beta_2}{2} = 0$ sii $9 - \beta_1 - 4\beta_2 = 0$

$C_4 = 0$ tamb pero no cumple $C_3 \Rightarrow$ orden 2.

$3 - \beta_1 = \beta_2 \qquad \beta_1 = \frac{9}{2} - 2\cdot(3-\beta_1) = \frac{9}{2} - 6 + 2\beta_1 = -\frac{3}{2} + 2\beta_1$

$-\beta_1 = -\frac{3}{2} \qquad \beta_1 = \frac{3}{2} \qquad \beta_2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{4} = \frac{9}{2} - \frac{3}{4} - 4 \neq 0$

Luego es de orden 2, lo cual concuerda con que el método no sea implícito.

Por tanto, el método resultante es:

$$\boxed{x_{n+3}=x_n+h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1},x_{n+1})+\frac{3}{2}f(t_{n+2},x_{n+2})\right)}$$

c) El método de Euler explícito es:

$$x_{n+1}=x_n+hf(t_n,x_n)=x_n+0'1\,(-5x_n+t_n^2)$$

$$x_0=1$$

$x_1=1+0'1\,(-5\cdot 1+0)=1-0'5=0'5 \rightarrow t_1=0'1$

$x_2=0'5+0'1(-5\cdot 0'5+0'1^2)=0'251 \rightarrow t_2=0'2$

Usamos el método obtenido en el apartado b)

$x_3=x_0+0'1\left(\frac{3}{2}(-5x_1+t_1^2)+\frac{3}{2}(-5x_2+t_2^2)\right)=1+0'1\left(\frac{3}{2}(-5\cdot 0'5+0'1^2)+\frac{3}{2}(-5\cdot 0'251+0'2^2)\right)$

$=0'56875\ ,\ t_3=0'3$

$x_4=x_1+0'1\left(\frac{3}{2}(-5x_2+t_2^2)+\frac{3}{2}(-5x_3+t_3^2)\right)=0'5+0'1\left(\frac{3}{2}(-5\cdot 0'251+0'2^2)+\frac{3}{2}(-5\cdot 0'56875+0'3^2)\right)$

$=-0'0953125$

8 Dado el PVI
$$\begin{cases} x'=f(t,x)\\ x(t_0)=\mu,\end{cases} \tag{3}$$
utiliza la fórmula
$$\int_a^{a+h} f(x)dx=\frac{5h}{12}f(a+h)+\frac{2h}{3}f(a)-\frac{h}{12}f(a-h)+R(f)$$
para construir razonadamente un método lineal multipaso de la forma
$$x_{n+2}=x_{n+1}+h(\beta_2 f_{n+2}+\beta_1 f_{n+1}+\beta_0 f_n)$$
y contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Es el método convergente?

b) ¿Cuál es el orden de convergencia local del método?

c) Si queremos utilizar el método de Euler como predictor y este método como corrector para resolver el problema, ¿cuál es el número óptimo de correcciones que se deberían aplicar?

d) Se pretende aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del PVI
$$\begin{cases} x'=3x-2\\ x(0)=1,\end{cases}$$
Para ello, tomando $h=1/3$, utiliza el método de Euler para la primera iteración. A continuación utiliza un método predictor-corrector donde el predictor es el método de Euler y el corrector es el método anterior con una única corrección en cada paso.

Obtenemos el método pedido; sabiendo la correspondencia $t_{n+1}=a,\ t_{n+2}=a+h,\ t_n=a-h$ entonces.

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}}x'(t)\,dt=\int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}}f(t,x(t))\,dt=\frac{5h}{12}f(t_{n+2},x_{n+2})+\frac{2h}{3}f(t_{n+1},x_{n+1})-\frac{h}{12}f(t_n,x_n)+R(f)$$

Prefiero que el desarrollo sea con $x(t_n)$

luego el método obtenido, ya expresado de la forma que se pide.

$$x_{n+2}=x_{n+1}+h\left(\frac{5f(t_{n+2},x_{n+2})}{12}+\frac{2f(t_{n+1},x_{n+1})}{3}-\frac{f(t_n,x_n)}{12}\right)$$

2 1 0

a) Veamos la estabilidad y consistencia

$\rho(\lambda)=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$ luego es estable el método $\quad \rho'(\lambda)=2\lambda-1\ ,\ \rho'(1)=1$

$\sigma(\lambda)=\frac{5}{12}\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{12}\ ,\ \sigma(1)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=1 \quad \rho(1)=0.$

Por tanto, es estable y consistente, es decir, convergente

b) Obtenemos los C_i

$$C_m = \frac{k^m}{m!} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^m}{m!}\alpha_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{m-1}}{(m-1)!}\beta_j$$

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = 0 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\} \text{Consistente}$$

$$C_2 = 2 - \sum_{j=1}^{1} \frac{j^2}{2}\alpha_j - \sum_{j=1}^{2} j\beta_j$$

$$C_2 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{5}{12} = 0$$

$$C_3 = \frac{2^3}{3!} - \sum_{j=1}^{2} \frac{j^3}{3!}\alpha_j - \sum_{j=1}^{3} \frac{j^2}{2}\beta_j$$

$$C_3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{5}{12} = 0$$

$$C_4 = \frac{2^4}{4!} - \sum_{j=1}^{3} \frac{j^4}{4!}\alpha_j - \sum_{j=1}^{4} \frac{j^3}{3!}\beta_j$$

$$C_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{3!}\frac{2}{3} - \frac{2^3}{3!}\frac{5}{12} = \frac{-1}{24}$$

Por tanto, el orden del método es 3 y la constante principal del error de truncatura local es $-\frac{1}{24}$ con parte principal del error de truncatura local $-\frac{h^4}{24}x^{(iv)}(\mu_n)$

c) Sabiendo que el orden del método de Euler es 1 y que nuestro método es de orden 3 el número óptimo de correcciones es $2 \longrightarrow$ sale de que el orden del predictor-corrector es $\min\{p^*+m, p\}$

d) $x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n) \longrightarrow x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3} \cdot (3x_n - 2)$

$x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2^{(0)} = 2$, $x_2 = x(\frac{2}{3}) = 2'31$, $x_3^{(0)} = 3'94$, $x_3 = x(1) = 4'7139$

¡Poner decimales!

Lo suyo es ir guardando $f(t_n, x_n)$ pues los voy a ir usando

Poner 5 o 6 decimales

Estudia su A-estabilidad.

10 Para resolver numéricamente el PVI (3) se propone el método de Runge-Kutta Radau dado por el arreglo de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Estudia la convergencia del método.

Nota: No es necesario que compruebes que Φ es Lipschitziana.

Como $\sum b_j = 1$ tenemos ya que es consistente, para ver la estabilidad vamos al primer polinomio característico, para lo que necesitamos obtener el método:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j k_j\right)$$

Por lo que hay estabilidad y por ende convergencia.

11 Para aproximar la solución del PVI (3) se considera el método multipaso

$$x_{n+3} = x_n + h(\beta_2\, f_{n+2} + \beta_1\, f_{n+1})$$

a) ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros β_1 y β_2 para que el método anterior sea convergente? Justifica tu respuesta.

b) Calcula los coeficentes β_1 y β_2 para que el orden de convergencia sea máximo. Indica el orden de convergencia y el término principal del error de curvatura local. es truncatura

c) Se pretende aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = x + t \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

Para ello, tomando $h = 1/4$, utiliza el método de Euler para obtener las condiciones iniciales que necesites. A continuación utiliza un método anterior hasta aproximar $x(1)$.

a) $p(\lambda) = \lambda^3 - 1$ que sabemos que cumple la condición de estabilidad.

$q(\lambda) = \beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda = \lambda(\beta_2\lambda + \beta_1)$

$p(1) = 0$

$q(1) = \beta_2 + \beta_1 = 3 = p'(1)$

luego $\boxed{\beta_2 + \beta_1 = 3}$

b) Máximo orden es 4 → 1ª Dahlquist pero puede no alcanzarse

$C_0 = 0$

$C_1 = 3 - \beta_1 - \beta_2 = 0$

$C_2 = \frac{3^2}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = \frac{9}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = 0$

$C_3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\beta_1 - 2\beta_2 = 0$

$C_4 = \frac{3^3}{8} - \frac{1}{6}\beta_1 - \frac{4}{3}\beta_2 = 0$

$C_2 = \frac{k^2}{2} - \sum_{j=1}^{k} j \cdot \beta_j$

$C_3 = \frac{k^3}{3!} - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^2}{2} \beta_j$

$C_4 = \frac{k^4}{4!} - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^3}{3!} \beta_j$

$3 - \beta_1 = \beta_2 \qquad \frac{9}{2} = \beta_1 + 2(3-\beta_1) = 6 - \beta_1 \Rightarrow \frac{9}{2} - 6 = -\frac{3}{2} = -\beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \frac{3}{2} = \beta_2$

$C_3 \neq 0$

luego el orden es 2 con constante principal $\frac{3}{4} x'''(\xi) h^3$.

c)

$x_{n+3} = x_n + 0'25\left(\frac{3}{2}(x_{n+1} + t_{n+1}) + \frac{3}{2}(x_{n+2} + t_{n+2})\right)$

$x_{n+1} = x_n + 0'25(x_n + t_n)$

$x_0 = 1$

$t_0 = 0$

$x_1 = 1 + 0'25(1) = 1'25, \quad t_1 = 0'25$

$x_2 = 1'25 + 0'25(1'25 + 0'25) = 1'625, \quad t_2 = 0'5$

$x(t_3) = x_3 = 1 + 0'25\left(\frac{3}{2}(1'25 + 0'25) + \frac{3}{2}(1'625 + 0'5)\right) = 2'359375, \quad t_3 = 0'75$

$x_4 = 1'25 + 0'25\left(\frac{3}{2}(1'625 + 0'5) + \frac{3}{2}(2'359375 + 0'75)\right)$
$= 3'212890625$

9 Para resolver el PVI (3) se propone el método:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, x_n)$$

Estudia su A-estabilidad.

Para estudiar la A-estabilidad hacemos uso de los problemas stiff, es decir, si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda) < 0$ definimos el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$$

De manera que, aplicado al problema nuestro método queda como:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(3\lambda x_{n+1} - \lambda x_n) = x_n + \frac{3h\lambda}{2}x_{n+1} - \frac{\lambda h}{2}x_n = x_n\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) + \frac{3h\lambda}{2}x_{n+1}$$

$$x_{n+1}\left(1 - \frac{3h\lambda}{2}\right) = x_n\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right); \quad x_{n+1} = x_0\left(\frac{1 - \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{3\lambda h}{2}}\right)^{n+1}$$

De esta forma, vamos a estudiar cuándo $\{x_n\} \longrightarrow 0$, tomando $w = \lambda h$ tenemos que estudiar para qué valores $w \in \mathbb{C}$ $\left|\frac{2-w}{2-3w}\right| < 1$ sii $\frac{|2-w|^2}{|2-3w|^2} < 1$. Si $w = x + iy$ se tiene que

$$|2 - x - iy|^2 = (2-x)^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$
$$|2 - 3x - 3iy|^2 = (2-3x)^2 + 9y^2 = 9x^2 - 12x + 4 + 9y^2$$

Entonces:

$$x^2 - 4x + \cancel{4} + y^2 < 9x^2 - 12x + \cancel{4} + 9y^2$$
$$0 < 8x^2 - 8x + 8y^2 \text{ sii } 0 < x^2 - x + y^2 \text{ sii } y^2 > x - x^2 \quad \left.\begin{matrix} y^2 > 0 \\ x - x^2 < 0 \ \forall x < 0 \end{matrix}\right\} \mathbb{C}_- \text{ contiene } \mathbb{C}^-$$

Pero este conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > x(1-x)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}(0'5, 0'5)$, por tanto, el método es A-estable