1 Estudia puntos fijos y 2 ciclos.

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{3 - x_n^3}.$$

Estudia también su estabilidad.

Puntuación: 3 puntos

Sea $f : [\sqrt[3]{3}, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ la función asociada a la ecuación en diferencias, veamos sus puntos fijos.

$$x = \sqrt[3]{3-x^3} \iff x^3 = 3 - x^3 \iff 2x^3 = 3 \iff x^3 = \frac{3}{2} \iff x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Veamos ahora su estabilidad.

$$f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(3-x^3)^2}}$$

$$f'\left(\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}\right) = \frac{-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(3-\frac{3}{2}\right)^2}} = -\sqrt[3]{\left(\frac{3/2}{\frac{3}{2}}\right)^2} = -\sqrt[3]{1} = -1$$

$$f''(x) = \frac{-6x}{\sqrt[3]{(3-x^3)^5}} = \frac{-6x}{(3-x^3)\sqrt[3]{(3-x^3)^2}}$$

$$f'''(x) = \frac{-24x^3+18}{(3-x^3)^{2}\sqrt[3]{(3-x^3)^2}}$$

Por tanto, $3f''\left(\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}\right)^2 + 2f'''\left(\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}\right) < 0$ por tanto es inestable

Para calcular los dos ciclos tomamos $f^2 : [\sqrt[3]{3}, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ dada por $f^2(x) = f(f(x)) = \sqrt[3]{3 - \left(\sqrt[3]{(3-x^3)}\right)^3} =$

$= \sqrt[3]{3 - 3 + x^3} = x$

Por tanto todos los puntos generan un dos ciclo. Veamos la estabilidad. Sea $x_0 \in [\sqrt[3]{3}, \infty[$ tenemos que

$$\left| f'(x_0)\, x_0 \right| = \left| \frac{-x_0^2}{\sqrt[3]{(3-x_0^3)^2}} \cdot x_0 \right| = \left| \frac{-x_0^3}{\sqrt[3]{(3-x_0^3)^2}} \right| = 1 \iff \frac{-x_0^3}{\sqrt[3]{(3-x^3)^2}} = -1 \iff x_0^3 = \sqrt[3]{(3-x_0^3)^2} \iff x_0^9 = (3-x_0^3)^2 \iff x_0^3\sqrt{x_0} = 3 - x_0^3$$

$$\iff x_0^3\sqrt{x_0} + x_0^3 = 3 \iff x_0^3(\sqrt{x_0}+1) = 3$$

¿?

$\vee$

$$\frac{-x_0^3}{\sqrt[3]{(3-x_0^3)^2}} = 1 \iff -x_0^3 = \sqrt[3]{(3-x_0^3)^2} \iff$$

$$\iff -x_0^9 = (3-x_0^3)^2 \iff -x_0^9 = 9 - 6x_0^3 + x_0^9 \text{ ¿?}$$

$\boxed{2}$ Para cada $a > 0$ estudia la estabilidad de los puntos fijos de

$$x_{n+1} = ax_n - x_n \operatorname{sen} x_n.$$

Estudia también los casos donde la primera derivada no da información de la estabilidad.

Puntuación: 3.5 puntos

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax - x\operatorname{sen}x$ veamos los puntos fijos.

$x = f(x) \iff x = ax - x\operatorname{sen}x \iff x = 0$ v $0 = a - \operatorname{sen}x \iff \operatorname{sen}x = a \iff x = \operatorname{arcsen}(a)$ por tanto $a \in [-1,1]$

Veamos la estabilidad de las soluciones constantes dadas por los puntos fijos

$f'(x) = a - [\operatorname{sen}(x) + x\cos x] = a - \operatorname{sen}x - x\cos x$

•) $x = 0$

$f'(0) = a$ por tanto, si $|a| < 1$ $x \equiv \{0\}$ es AE

Veamos qué ocurre si $|a| = 1$:

•) $a = 1 \Rightarrow f(x) = x(1 - \operatorname{sen}x) \Rightarrow f'(x) = (1 - \operatorname{sen}x) - x\cos x$, $f''(x) = -2\cos x + \operatorname{sen}x$

por tanto $f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ AE? Inestable

•) $a = -1 \Rightarrow f(x) = -x(1 + \operatorname{sen}x) \Rightarrow f'(x) = -1 - \operatorname{sen}x - x\cos x$, $f''(x) = -2\cos x + \operatorname{sen}x$,

$f'''(x) = 2\operatorname{sen}x + \cos x$

$3f''(0)^2 + 2f'''(0) = 12 + 2 = 14 > 0 \Rightarrow$ AE.

•) $x = \operatorname{arcsen}(a)$

$f'(\operatorname{arcsen}(a)) = a - a + \operatorname{arcsen}(a)\cos(\operatorname{arcsen} a) = \operatorname{arcsen}(a)\cos(\operatorname{arcsen}(a))$

$\operatorname{arcsen}(a)\cos(\operatorname{arcsen}(a)) = 1 \iff \cos(\operatorname{arcsen}(a)) = \dfrac{1}{\operatorname{arcsen}(a)}$ ¿?