1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = (x+y)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \text{y} \quad f(0,0) = 0$$

Vamos a estudiar el caso $n=1$.

$$f(x,y) = (x+y) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad y \ f(0,0) = 0$$

Tomamos $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow$ tenemos que $\mathcal{U}$ es abierto por ser imagen de un cerrado de $\mathbb{R}^2$. En particular, vemos que $f|_{\mathcal{U}}$ es derivable por ser producto y composición de funciones derivables, además, siendo clase $C^1 \Rightarrow$ Por el carácter local tenemos que f es de clase C^1 en $\mathcal{U}$.

Veamos qué ocurre con $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}$

$$f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + x\overbrace{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}}^{A} + y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right]} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}$$

es una y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xA' + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + yA' = A'(x+y) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \boxed{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right](x+y) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}$$

$f(x,0) = x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $\qquad \nexists \lim_{x \to 0} \dfrac{x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} \to$ Indeterminación

$f(0,y) = y \operatorname{sen}\frac{1}{y}$ $\qquad \nexists \lim_{y \to 0} \dfrac{y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = \lim_{y \to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{y} \to$ Indeterminación

Por tanto f no es diferenciable en $(0,0)$. Veamos si es continua en $(0,0)$

$$0 \leq |(x+y)| \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right| \leq |(x+y)|$$

Luego $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ Por tanto $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$

Derivadas parciales generales.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = n(x+y)^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y)^n \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = n(x+y)^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y)^n \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$f(x,0) = x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(0,y) = y^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$

$n=2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Igual con y.

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

Definimos $$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \frac{(x+y)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 \leq \left|\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq \left|\frac{(x+y)^4}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right| |(x+y)^3| \leq |(x+y)|^3$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$ luego f es diferenciable en $(0,0)$

Veamos si es de clase C^1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x+y)^{n-1}\left[n \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{(x^2+y^2)-x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \rho\,(\cancel{\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta})^{\to 0}\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \underbrace{(\cancel{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho\cos\theta})^{\to 0}\cos\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\cancel{\frac{\rho^2 - \rho\cos\theta}{\rho^3}}\right)^{\to \infty}}_{\sigma}\right]$$

$\underline{n \geq 3}$

Es diferenciable.

$$0 \leq \left|(x+y)^{n-1}\left[n\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{x^2+y^2-x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]\right| \leq$$

$$|(x+y)^{n-1}|\,|n| + |x+y|\left|\cancel{\frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2}}\right|\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |(x+y)^{n-1}|\,|n| + |x+y|$$

WTF

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$, estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \qquad \text{y} \qquad f(0, 0) = 0$$

$\boxed{\text{Casos } 0<\alpha<1 \text{, } \alpha \geq 1}$

Tomamos $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x=0\}$ es de clase C^1 por ser cociente de clase C^1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(\alpha-1)|x|^{\alpha-1} \cdot \frac{x}{|x|}(x^2+y^2) - |x|^\alpha 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(\alpha-1)|x|^{\alpha-1}x}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{|x|^\alpha 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x|x|^\alpha}{(x^2+y^2)^2}$$

Caso $\alpha \geq 1$

Un punto de A: $(0,a)$

Veamos si f es parcialmente derivable con respecto a x: $x \to$ mover, $y \to$ fija

Tomamos un punto $(0,a)$ con $a \neq 0$

$$f(x,a) = \frac{|x|^\alpha}{x^2+a^2}$$

$f(0,a) = 0$!!

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,a) - f(0,a)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{|x|^\alpha}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha}{x(x^2+a^2)} - \frac{1}{a^2 x} =$$

$=$ si $a=0 \Rightarrow 0 \longrightarrow$ es derivable parcialmente $\to$ hay que calcular esta der. parcial

si $a \neq 0 \Rightarrow -\infty \to$ no es derivable parcialmente

Tomamos un punto $(0,y)$ con $y \to a$

$$f(0,y) = \frac{1}{y^2}$$

$$\lim_{y\to a} \frac{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}}{y-a} = \frac{2}{a^3}$$

$\Rightarrow$ si $a=0 \to$ no derivable parcialmente

si $a \neq 0 \to$ si es derivable parcialmente respecto a $y \to$ hay que estudiar esta deriv. parcial

Por tanto como en ambos casos hay una derivada parcial que no existe $\Rightarrow$ no es diferenciable en $(a,0)$.

Veamos si es continua.

$$f(x,x) = \frac{|x|^{\alpha}}{2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha}}{2x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha\, |x|^{\alpha-2} \cancel{\frac{x}{|x|}}}{4\cancel{x}} =$$

$\alpha > 2 \Rightarrow 0$

$\alpha = 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{4}$

$1 < \alpha < 2 \Rightarrow \nexists\,?$

$\alpha = 1 \Rightarrow 0$

no hay demostración simple

$$\text{Sup } \alpha > 2 \Rightarrow 0 \le \frac{|x|^{\alpha}}{x^2+y^2} \le \frac{x^2}{x^2+y^2}\left|x^{\alpha-2}\right| \le \left|x^{\alpha-2}\right| \checkmark$$

$$\text{Sup } \alpha = 2 \Rightarrow 0 \le \left|\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$$

f es continua para $\alpha \ge 2$ y $\alpha = 1$

Caso $0 < \alpha < 1$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt[\alpha]{|x|}}{x^2+y^2} = \frac{|x|^{\alpha}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{x^2+y^2}{\alpha\sqrt[\alpha]{|x|^{\alpha-1}}}\cdot\frac{x}{|x|} - \sqrt[\alpha]{|x|}\,2x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{x^3+xy^2 - \alpha|x|^{?}2x^2}{|x|\alpha\sqrt[\alpha]{|x|^{\alpha-1}}}}{(x^2+y^2)} = \frac{x^3+xy^2-\alpha|x|2x^2}{\alpha\sqrt[\alpha]{|x|^{\alpha-1}}\,(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\sqrt[\alpha]{|x|}\,2y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,a) = \frac{\sqrt[\alpha]{|x|}}{x^2+a^2} \qquad f(0,y) = 0 \qquad \nabla f(0,a) = (\nexists\ ,0)$$

$$f(0,a) = 0$$

cambiamos β.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,a)-f(0,a)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[\alpha]{|x|}}{x(x^2+a^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^{\alpha}(x^2+a^2)^{\alpha}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|\left(\alpha x^{\alpha-1}(x^2+a^2)^{\alpha} + 2x^{\alpha+1}\alpha(x^2+a^2)^{\alpha-1}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|\left(\alpha x^{\alpha-2}(x^2+a^2)^{\alpha} + 2x^{\alpha}\alpha(x^2+a^2)^{\alpha-1}\right)} \nexists$$

Luego no es diferenciable en $(0,a)$ para ningún $a \in \emptyset$.

$$\lim_{y\to a} \frac{0-0}{y-a} = 0$$

¿Es $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ continuo en $(0,a)$?

$g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-\sqrt[\alpha]{|x|}\ 2y}{x^2+y^2}$; $g(y,y) = \frac{-\sqrt[\alpha]{|y|}\ \cancel{2y}}{\cancel{2}y^2} = \frac{-\sqrt[\alpha]{|y|}}{y} = \frac{(-1)^\alpha |y|}{y^\alpha}$

Sup $a=0$

$\nexists \lim_{y\to 0} g(y,y) \Rightarrow$ no es continua en $(0,0)$

$g(0,a) = \frac{0}{a^2} = 0$ Es continua $\forall a\in\mathbb{R} / a\neq 0$

Veamos la continuidad de $f(x,y)$

Tomamos $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, un conjunto abierto por ser complementario de cerrado. Es cociente de funciones continuas $\Rightarrow$ es continua

Veamos qué ocurre en $(0,0)$

$\beta\in\mathbb{R}^+$ $\alpha = \frac{1}{\beta}$ con $\beta > 1$

$f(x,y) = \frac{\sqrt[\beta]{|x|}}{x^2+y^2}$ $f(x,x) = \frac{\sqrt[\beta]{|x|}}{2x^2} = \frac{|x|}{2x^{2\beta}}$

$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{|x|}{2x^{2\beta}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4\beta\ x^{2\beta-2}\ |x|} \nexists$

$0 \leq \frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt[\beta]{|x|}}{x^2+y^2}$

No es continua en $(0,0)$

3. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y,z) = \frac{x\,y\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \quad \text{y} \quad f(0,0,0) = 0$$

Tenemos $A = \{(0,0,0)\} \Rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus A$ abierto y bla bla bla ... Carácter local.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{yz(x^2+y^2+z^2) - x^2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2)} = \frac{yz\,(x^2+y^2+z^2-x^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2)} = \frac{yz\,(y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{xz(x^2+y^2+z^2) - xy^2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2)} = \frac{xz(x^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{xy(x^2+y^2+z^2) - xyz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2)} = \frac{xy\,(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2)}$$

$f(x,0,0) = 0 \qquad \nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$

$f(0,y,0) = 0$

$f(0,0,z) = 0$

Todas las derivadas parciales existen. Veamos la diferenciabilidad de f ya que es parcialmente derivable

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\varphi(x,x,x) = \frac{x^3}{3x^2} = \frac{x}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$$

Buscamos una acotación para ver si es diferenciable en $(0,0,0)$:

$$0 \le \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right| |yz| \le |yz|$$

Luego $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \varphi(x) = 0$ Por tanto f es diferenciable

Veamos si es de clase C^1.

$$0 \leq \left| \frac{yz(y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2)} \right| = \left| \frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \right| \left| \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| \leq \left| \frac{\cancel{y}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| = |y| \left| \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \right| \leq |y| = 0$$

Análogo con las demás y vemos que es claro que es de clase C^1.