Ejercicio 1. Para valorar la eficacia de una vacuna contra un virus, se está estudiando la posibilidad de emplear una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

La incógnita x_n representa el número de virus una vez transcurridos n días desde la primera dosis de la vacuna. En los experimentos, se observa que:

- Si pasado un día desde la primera dosis de la vacuna el número de virus se ha dividido por tres, también se divide por tres en los días siguientes.
- Si pasado un día desde la primera dosis de la vacuna el número de virus se ha cuadruplicado, también se cuadruplica los días siguientes.

$\longrightarrow$ Si $x_1 = \frac{x_0}{3} \Rightarrow x_n = \frac{x_{n-1}}{3} \Rightarrow$ por Malthus $x_n = \frac{x_0}{2^n}$

$\longrightarrow$ Si $x_1 = 4x_0 \Rightarrow x_n = 4x_{n-1} \Rightarrow$ por Malthus $x_n = 4^n x_0$

Suponiendo que la evolución del virus se describe con la ecuación dada, y teniendo en cuenta los resultados de los experimentos anteriores, se hace otra prueba y se observa que pasado un día desde la primera dosis de la vacuna, el número de virus es $x_1 = x_0/2$.

- *(1 punto)* ¿Cuántos virus habrá cada día?
- *(0.5 puntos)* ¿Qué ocurrirá con el virus a largo plazo? ¿Es efectiva la vacuna?

Luego de las dos condiciones obtenemos que $\left\{\frac{x_0}{2^n}\right\}$ y $\{4^n x_0\}$ son soluciones de la ecuación, es decir, $x_n = \frac{a x_0}{2^n} + b\, 4^n x_0 = \left(\frac{a}{2^n} + 4^n b\right) x_0$

•) Disponemos del siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x_n = \frac{a x_0}{2^n} + b 4^n x_0 \\ x_1 = \frac{x_0}{2} \end{cases}$$

Luego

$x_0 = a x_0 + b x_0 = x_0(a+b)$, si $x_0 = 0$ no tenemos nada. Si $x_0 \neq 0 \Rightarrow 1 = a+b \Rightarrow a = 1-b$

$\frac{x_0}{2} = \frac{a x_0}{2} + b 4 x_0 = x_0\left(\frac{a}{2} + 4b\right)$, si $x_0 = 0$ no tenemos virus. Si $x_0 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{2} + 4b = \frac{1-b}{2} + 4b = \frac{1-b+8b}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1+7b}{2} \iff 1 = 1+7b \iff b = 0 \wedge a = 1$

Luego $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = \frac{x_0}{2^n}$.

•) A largo plazo, sabemos que nos piden $\lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$ luego $\{x_n\} \to 0$ y vemos que la vacuna es muy efectiva

Ejercicio 2. Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} + x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \qquad a_0 \in \left]0, 1/4\right[,$$

así como una solución $\{x_n\}$ de la misma. Definimos $S_n := \sum_{i=0}^{n} x_i$ la suma de los primeros $n+1$ términos de la sucesión. Se pide:

1. *(1 punto)* Determina la ecuación en diferencias satisfecha por $\{S_n\}$.
2. *(1.5 puntos)* ¿Qué relación hay entre el polinomio característico de la ecuación dada y el de la ecuación encontrada en el apartado anterior? Razona tu respuesta.
3. *(0.5 puntos)* ¿Es la sucesión $\{S_n\}$ convergente? Razona tu respuesta.

1. Es claro que como $S_n := \sum_{i=0}^{n} x_i \Rightarrow S_{n+1} = S_n + x_{n+1} = S_n - x_n - a_0 x_{n-1} = S_{n-1} - a_0 x_{n-1} =$
$= S_{n-2} + (1-a_0) x_{n-1}$

2. Según fuentes externas, pues en clase no se ha comentado nada, el polinomio característico de estas dos ecuaciones no tienen ninguna relación.

3. Veamos que sí es convergente, esto radica simplemente en el término S_{n-2} pues $S_{n+1} - S_{n-2} = x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = (1-a_0)\,x_{n-1} \iff x_{n+1} + x_n = -a_0 x_{n-1} \iff x_{n+1} + x_n + a_0 x_{n-1} = 0$ y se cumple luego converge.

Ejercicio 3. De un sistema no lineal de ecuaciones en diferencias que describe la interacción entre tres especies (a las que llamaremos (x, y, z)) en distintos periodos de tiempo, se sabe que $P = (1, 0, 1)$ es un punto de equilibrio. También se conoce que la matriz jacobiana asociada al modelo viene dada por:

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} x/3 + y & x-1 & \alpha e^{1-z} \\ yz/\alpha & xz/\alpha & xy/\alpha \\ 0 & y/\alpha & -z/2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

1. *(0.5 puntos)* Encuentra de forma razonada una condición suficiente que garantice la estabilidad asintótica del punto de equilibrio P.

Para ello, obtendremos que $\rho(J(P)) < 1$.

$$J(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \text{ luego } \sigma(J(P)) = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{\alpha}, \frac{-1}{2} \right\} \Rightarrow \rho(J(P)) = \max \left\{ \left|\frac{1}{\alpha}\right|, \frac{1}{2} \right\}$$

Luego, si $\frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{2}$ se cumple lo que queremos.

$$\frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{2} \iff \boxed{|\alpha| > 2}$$

Por otra parte, si $\frac{1}{2} < \frac{1}{|\alpha|} < 1$ también se cumple lo que queremos.

- $\frac{1}{2} < \frac{1}{|\alpha|} \iff 2 > |\alpha|$
- $\frac{1}{|\alpha|} < 1 \iff |\alpha| > 1$

$\Big\}\ \boxed{1 < |\alpha| < 2}$

Luego las condiciones son las siguientes:

- $|\alpha| > 2$ ó $1 < |\alpha| < 2$

2. Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{6} \cdot x_n^2 + x_n y_n - y_n - 2e^{1-z_n} + \frac{17}{6}, \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot x_n y_n z_n, \\ z_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot y_n^2 - \frac{1}{4} \cdot z_n^2 + \frac{5}{4} \end{cases}$$

a) *(0.5 puntos)* ¿Responde este sistema a las condiciones expuestas en el enunciado del problema? En caso afirmativo, estudiar para qué valor(es) de α se tiene.

b) *(0.5 puntos)* ¿Existe algún estado de equilibrio de dicho sistema que contemple la extinción simultánea de dos de las tres especies?

c) *(1.5 puntos)* ¿Existe algún estado de equilibrio de dicho sistema, distinto de P, con $y = 0$? ¿Es estable?

a) Debemos ver que P es un punto fijo y que tiene la jacobiana indicada.

$\varphi_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, entonces

$$\varphi_{n+1} = F(\varphi_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} x_n^2 + x_n y_n - y_n - 2e^{1-z_n} + \frac{17}{6} \\ \frac{1}{2} x_n y_n z_n \\ \frac{1}{4} y_n^2 - \frac{1}{4} z_n^2 + \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Luego $F(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - 2 + \frac{17}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P$.

$$JF(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x+y & x-1 & 2e^{1-z} \\ \frac{yz}{2} & \frac{xz}{2} & \frac{xy}{2} \\ 0 & \frac{y}{2} & \frac{-z}{2} \end{pmatrix}, \; JF_2(x,y,z)$$

Por tanto cumple las condiciones del enunciado

b) Calculamos los puntos de equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} x=\frac{x^2}{6}+xy-y-2e^{1-z}+\frac{17}{6} \\ y=\frac{1}{2}xyz \\ z=\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{4}+\frac{5}{4} \end{cases}$$

Suponiendo que $(0,0,0)$ no puede ser la solución buscada, obtenemos:

si $x=y=0,\ z\neq0$:

$$\begin{cases} 0=-2e^{1-z}+\frac{17}{6} \\ z=-\frac{z^2}{4}+\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{z^2}{4}+z-\frac{5}{4}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} z_1=1 \\ z_2=-5 \end{matrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Si } z=1 \Rightarrow 0=-2+\frac{17}{6} \rightarrow \text{Falso} \\ \text{Si } z=-5 \Rightarrow 0=-2e^{-4}+\frac{17}{6} \rightarrow \text{Falso} \end{matrix}$$

Si $x=z=0,\ y\neq0$:

$$\begin{cases} 0=-y-2e+\frac{17}{6} \\ y=0 \\ 0=\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{no tiene solución}$$

si $y=z=0,\ x\neq0$

$$\begin{cases} x=\frac{x^2}{6}-2e+\frac{17}{6} \\ 0=\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{matrix} \text{si } x=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}=\frac{5}{6}-2e+\frac{17}{6} \\ \text{si } x=-\sqrt{5} \Rightarrow -\sqrt{5}=\frac{5}{6}-2e+\frac{17}{6} \end{matrix} \Leftrightarrow \sqrt{5}=-\sqrt{5} \text{ Falso}$$

luego no hay puntos de equilibrio que cumplan las condiciones.

c) Si $y=0,\ x\neq0,\ z\neq0$

$$\begin{cases} x=\frac{x^2}{6}-2e^{1-z}+\frac{17}{6} \\ z=-\frac{z^2}{4}+\frac{5}{4} \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} z_1=1 \\ z_2=-5 \end{matrix}$$

Si $z=1 \Rightarrow \frac{x^2}{6}-x-2+\frac{17}{6}=0$ $\begin{matrix} \nearrow x_1=5 \\ \searrow x_2=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=P \\ P_2=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} \end{matrix}$

Si $z=-5 \Rightarrow \frac{x^2}{6}-x-2e^{-4}+\frac{17}{6}=0 \longrightarrow$ raíces complejas que no considero

$$JF(1,0,5)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 2e^{-4} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}, \text{ luego } \rho(JF(1,0,5))>1 \Rightarrow (1,0,5) \text{ es inestable}$$

El único punto de equilibrio es $(1,0,5)$ distinto de P, pero es inestable.

3. *(0.5 puntos)* ¿Se puede determinar otro sistema distinto al anterior que responda a las condiciones expuestas en el enunciado del problema? Justifica tu respuesta.

De esto, tampoco se ha hablado en clase, pero yo intuyo que no aunque por la teoría de integración pueda parecer que sí!

Ejercicio 4. *(2 puntos)* Se quiere emplear el sistema en diferencias $X_{n+1} = MX_n$ para estudiar la evolución de una población estructurada en tres estados: x, y, z. La matriz M es de probabilidad y X_n es el vector que describe la proporción de población correspondiente a cada estado:

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & b & 1/3 \\ a & c & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+, \qquad 0 \leqslant x_n, y_n, z_n \leqslant 1.$$

¿Pueden determinarse valores de a, b, c sabiendo que a largo plazo la proporción de población asociada al estado x es $5/11$? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, calcúlalos.

Sabemos que M es una matriz de probabilidad luego la suma de sus columnas debe ser 1:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + a = 1 \implies a = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} + b + c = 1 \iff b + c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el sistema:

$$p(\lambda) = \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right)(b - \lambda)\left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right) + \left(\tfrac{1}{24}\right) + \left(\tfrac{c}{12}\right) - \left(\tfrac{b}{12} + \tfrac{c}{6} + \tfrac{1}{24}\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right)(b - \lambda)\left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right) + \cancel{\tfrac{1}{24}} + \tfrac{c}{12} - \tfrac{b}{12} - \tfrac{c}{6} - \cancel{\tfrac{1}{24}} = -\frac{b\lambda}{2} - \frac{\lambda\left(b + \frac{1}{2}\right)}{3} - \lambda^2\left(b + \tfrac{1}{2}\right) + \frac{\lambda^2}{3} - \lambda^3 - \frac{c}{12} + \frac{b}{12} =$$

$$= -\lambda\left(\frac{b}{2} + \frac{b + \frac{1}{2}}{3}\right) + \lambda^2\left(\frac{5}{6} - b\right) - \lambda^3 + \frac{b}{12} - \frac{c}{12} = -\lambda^3 + \lambda^2\left(\frac{5}{6} - b\right) - \lambda\left(\frac{5b+1}{6}\right) + \frac{b-c}{12}$$

$$p(\lambda) = 0 \text{ sii } \quad -\lambda^3 + \lambda^2\left(\frac{5}{6} - b\right) - \lambda\left(\frac{5b+1}{6}\right) + \frac{b-c}{12} = 0$$