1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

a) Conjuntos de Borel

Antes de definir los conjuntos de Borel es necesario recordar dos tipos de conjuntos de un espacio topológico:

- Tipo G_δ : conjuntos formados por una intersección numerable de abiertos $\to]a,b[$
- Tipo F_σ : conjuntos formados por una unión numerable de cerrados $\to [a,b]$

Es claro que estos conjuntos son medibles y que operaciones con ellos ocasionan conjuntos de su misma costa.
es decir son estables por operaciones numerables

Sea $\Omega \neq \emptyset$, sabiendo que la intersección de σ-álgebras es σ-álgebra luego; sea $T \subset P(\Omega)$ un conjunto, vamos a considerar, puesto que $P(\Omega)$ es σ-álgebra, $\mathcal{A} = \bigcap_i \mathcal{A}_i \mid T \subset \mathcal{A}_i \subset \Omega$ por tanto $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra engendrada por T.

El caso más importante surge de tomar Ω un espacio topológico y T su topología, la σ-álgebra engendrada por T recibe el nombre de σ-álgebra de Borel de Ω. Es el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ el que más nos interesa y denotaremos por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^N$

·) $\mathcal{B}$ coincide con la σ-álgebra engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de todos los intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$. ($\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$)

Una propiedad muy interesante de los conjuntos de Borel es la siguiente

·) Si $E \subset \mathcal{B}$ y $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continua $\Rightarrow \varphi^{-1}(\beta) \in \mathcal{B}$ $\forall \beta \in \mathcal{B}$ Por tanto, ser de Borel se conserva por homeomorfismos

b) Conjuntos de Cantor

En $\mathbb{R}$ podemos encontrar conjuntos no numerables de medida nula como el conjunto Ternario de Cantor. Como inicio, llamaremos sucesión admisible a toda sucesión $\{a_n\} = a$, $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $a_0 = 1$ y que cumpla $\boxed{0 < a_n < \frac{a_{n-1}}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ A su vez, tomaremos la sucesión $\{\rho_n\} = \{a_{n-1} - a_n\} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. De esta manera, a cada sucesión admisible vamos a asociar un conjunto numerable de intervalos compactos determinando la construcción iterativa que da lugar a dichos intervalos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ usaremos el conjunto $\mathcal{U}_n = \{0,1\}^n = \{0,1,0,1,\dots,0,0,0,\dots,1,1,\dots,1\}$, es decir, por todas las aplicaciones de Δ_n en $\{0,1\}$. A cada $u \in \mathcal{U}_n$ asociamos el intervalo compacto $J(u)$ dado por:

$J(u) = [m(u), m(u)+a_n]$ donde $\boxed{m_u = \sum_{j=1}^{n} u(j) p_j = \sum_{j=1}^{n} u(j)(a_{j-1} - a_j)}$ $\forall u \in \mathcal{U}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dando lugar a

$K_n(a) = \bigcup_{u \in \mathcal{U}_n} J(u)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{C}(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a)$

donde es clara la dependencia de $\mathcal{C}(a)$ hacia la sucesión admisible. $\mathcal{C}(a)$ es llamado el Conjunto de Cantor asociado a la sucesión a.

Opcional

Algunas propiedades son:

- $\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admisible, $\mathcal{C}(a)$ es compacto $\mathcal{C}(a)^\circ = \emptyset$ $\wedge$ $\lambda(\mathcal{C}(a)) = \lim_{n \to \infty} 2^n a_n$
- $\forall p \in \mathbb{R}$, $0 \le p < 1$ $\exists \mathcal{C}_p \mid \lambda(\mathcal{C}_p) = p$
- El conjunto de Cantor $\mathcal{C}(a)$, a sucesión admisible, es biyectivo con $\mathcal{U}$
- Los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{R}$
- Todos los conjuntos de Cantor son homeomorfos

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Regularidad de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue presenta dos regularidades que nos llevarán al Primer Teorema de Unicidad. La primera de ellas es la regularidad exterior que se deduce del siguiente resultado:

- $\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(G) \mid E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\}$

Lo que nos lleva a pensar que la medida de un conjunto medible se puede obtener "por fuera" mediante abiertos que lo contienen.

- $\forall E \in \mathcal{M}$ se tiene $\lambda(E) = \inf\{\lambda(G) \mid E \subset G^\circ = G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)\}$

A su vez encontramos la regularidad interior que consiste en calcular la medida de un conjunto por compactos contenidos.

- $\forall E \in \mathcal{M}$ se tiene $\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) \mid K \text{ compacto}, K \subset E\}$

b) Caracterizaciones de los conjuntos medibles, usando la topología de $\mathbb{R}^N$

De la regularidad exterior obtenemos la siguiente caracterización de los conjuntos medibles.

·) Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, son equivalentes:

(i) $E \in \mathcal{M}$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G \subset \mathbb{R}^N \mid E \subset G$ y $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists F \subset \mathbb{R}^N \mid F \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$

(iv) $\exists A \subset \mathbb{R}^N$, A tipo $F_\sigma \mid A \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus A) = 0$

(v) $\exists B \subset \mathbb{R}^N$, B tipo $G_\delta \mid E \subset B$ y $\lambda^*(B \setminus E) = 0$

Lo más útil de este resultado es saber que todo conjunto medible cumple las propiedades (ii), (iii), (iv) y (v). Además, podemos aproximar E por conjuntos abiertos que lo contienen o compactos contenidos. De esta manera, usando F_σ o G_δ obtenemos una aproximación mucho más precisa.

Por último, cabe resaltar que el papel de los abiertos y cerrados no se puede intercambiar. Por ejemplo $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \infty$ pero $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no contiene abiertos no vacíos. Por otra parte, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ pero el único cerrado que contiene a $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}$, que cumple que $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$

3. Conocer y comprender los siguientes resultados, incluyendo su demostración:

a) Teoremas de unicidad de la medida de Lebesgue

Primer teorema de unicidad. Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, con $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ y $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ una medida | $\mu(I) = \lambda(I) \ \forall I$ diádico $\Rightarrow \mu(E) = \lambda(E) \ \forall E \in \mathcal{A}$. En particular, λ es la única medida definida en $\mathcal{M}$ que extiende a la medida elemental de los intervalos acotados

Demostración.

Sea $G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N$, $\exists \{I_n\}$ de intervalos diádicos $\mid G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Usando entonces que λ y μ son σ-aditivas, obtenemos:

$$\boxed{\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \lambda(G)}$$

Sea ahora $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, tomamos I que contenga a K y vemos que

$$\mu(K) + \mu(I \setminus K) = \mu(I) \overset{\text{por hip}}{=} \lambda(I) = \lambda(K) + \lambda(I \setminus K) \quad (2)$$

Complementario de cerrado en un abierto

Como $I \setminus K \in T_0^N \Rightarrow \mu(I \setminus K) = \lambda(I \setminus K)$ y de (2) deducimos que $\mu(K) = \lambda(K)$ puesto que $\lambda(I \setminus K) \le \lambda(I) < \infty$

Fijado $E \in \mathcal{A}$, $\forall K \subset E$ compacto y $\forall G \subset \mathbb{R}^N$ abierto con $E \subset G$ tenemos que gracias a las regularidades

$$\boxed{\mu(E) \le \mu(G) = \lambda(G)} \quad \text{y} \quad \boxed{\lambda(K) = \mu(K) \le \mu(E)} \quad (3)$$

$E \subset G$ $\qquad$ $K \subseteq E$

De donde deducimos que

$$\mu(\mathcal{E}) \le \inf\{\lambda(G) \mid \mathcal{E} \subset G^{\circ} = G \subset \mathbb{R}^N\} = \lambda(G)$$

$$\lambda(\mathcal{E}) = \sup\{\lambda(K) \mid K \text{ compacto}, K \subset \mathcal{E}\} \le \mu(\mathcal{E})$$

Así pues, $\mu(\mathcal{E}) = \lambda(\mathcal{E})\ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{A}$. La segunda afirmación es consecuencia obvia de lo ya demostrado

Antes de demostrar el segundo teorema de unicidad es necesario demostrar que la medida de Lebesgue es la única invariante por traslaciones.

·) Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ la σ-álgebra de todos los conjuntos medibles en $\mathbb{R}^N$. Si $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ es una medida invariante por traslaciones $\mid \mu(J) = 1 \Rightarrow \lambda(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E})\ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{A}$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, los intervalos diádicos de orden n forman una partición de $\mathbb{R}^N$, y cada uno de ellos está contenido en otro de orden 0, que será J, o tendrá intersección vacía con J. Por tanto, J es unión de los intervalos diádicos de orden n que contiene. Sea k el número de tales intervalos $\Rightarrow \boxed{J = \biguplus_{j=1}^{k} (a_j + J_n)}$ donde $a_j \in A_n\ \forall j \in \Delta_k$. Como λ y μ son finitamente aditivas e invariantes por traslaciones

$$\underset{\text{por hipótesis}}{1} = \mu(J) = \sum_{j=1}^{k} \mu(a_j + J_n) = k\,\mu(J_n) \quad \wedge \quad \underset{\text{por la med. Lebesgue}}{1} = \lambda(J) = k\,\lambda(J_n)$$

Como $\lambda(J_n) = \frac{1}{2^{nN}} \Rightarrow k = 2^{nN}$. Además, como todo intervalo diádico se obtiene de J_n mediante traslaciones deducimos que $\mu(J) = \lambda(J)\ \forall J$ intervalo diádico de orden n, lo cual es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego μ y λ coinciden en la familia de todos los intervalos diádicos y por el primer teorema de unicidad, coinciden en $\mathcal{A}$ como se quería.

Segundo Teorema de Unicidad Para $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, o bien, $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, sea $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ una medida invariante por traslaciones $\mid \mu(G) < \infty$ para algún $G = G^{\circ}$, $G \subset \mathbb{R}^N \Rightarrow \exists \rho \in \mathbb{R}_0^+ \mid \mu(\mathcal{E}) = \rho\,\lambda(\mathcal{E})\ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{A}$

Demostración

Sea $a \in G$, como las traslaciones son homeomorfismos, vemos que $\forall x \in \mathbb{R}$, $U_x = x - a + G \in \mathcal{T}$, con $x \in U_x$ y

invarianza por traslaciones

$\boxed{\mu(U_x) = \mu(G)} < \infty$. Fijado ahora K compacto de $\mathbb{R}^N$, la familia $\{U_x \mid x \in K\}$ es un recubrimiento de K por abiertos, del que se podría extraer un subrecubrimiento finito. Por tanto, $\exists F \subset K \mid K \subset \bigcup_{x \in F} U_x$, y como μ es finitamente subaditiva, obtenemos claramente que $\boxed{\mu(K) \le \sum_{x \in F} \mu(U_x) < \infty}$. Por ser $\bar{J}$ compacto, tenemos $\mu(J) \le \mu(\bar{J}) < \infty$ y distinguimos casos:

·) Si $\mu(J) = 0$, sería $\mu(a + J) = 0\ \forall a \in \mathbb{R}^N$, pero $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in A_0} (a + J)$ y el conjunto $A_0 = \mathbb{Z}^N$ es numerable luego $\mu(\mathbb{R}^N) = 0 \Rightarrow \mu(\mathcal{E}) = 0\ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{A}$, bastaría tomar $\rho = 0$

·) Si $\mu(J)=p>0$, definimos $\mu_1(E)=\mu(E)/p$ $\forall E\in\mathcal{M}$, obteniendo una medida $\mu_1:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ invariante por traslaciones con $\mu_1(J)=1$. Y por el resultado anterior, $\mu_1(E)=\lambda(E)$ $\forall E\in\mathcal{A}$ o sea que es la misma, $\mu(E)=p\lambda(E)$ $\forall E\in\mathcal{A}$

b) Existencia de conjuntos no medibles

Teorema Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$, con medida exterior estrictamente positiva, contiene un conjunto no medible

Demostración

Sea $A\in P(\mathbb{R}^N)$ | $\lambda^*(A)>0$, podemos escribir $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ | $A_n=A\cap[-n,n]^N$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Usando la σ-aditividad de λ^* se tiene que $\boxed{\lambda^*(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)}$ luego $\exists n\in\mathbb{N}$ | $\lambda^*(A_n)>0$.

Si abreviamos escribiendo $B=A_n\subset A$, tenemos $\lambda^*(B)>0$, con la ventaja de que B está acotado, y bastará probar que B contiene un conjunto no medible, entonces A también lo tendrá.

Usaremos que $\mathbb{Q}^N$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^N$, lo que nos permite considerar el grupo cociente $H=\mathbb{R}^N/\mathbb{Q}^N$

y $q:\mathbb{R}^N\longrightarrow H$ sobreyectiva. Usando el conjunto $q(B)\subset H$, el $\boxed{\text{axioma de elección}}$ nos dice que

$\exists\,\Phi: q(B)\longrightarrow B$ | $q(\Phi(h))=h$ $\forall h\in q(B)$

nota. Lo que hacemos es elegir para cada clase de equivalencia $h\in q(B)$, un elemento $\Phi(h)$ del conjunto $h\cap B$, que no es vacío

Queremos la imagen de Φ, el conjunto $W=\Phi(q(B))$. Observamos que $W\subset B$, y en particular W está acotado y tiene dos propiedades clave

1) $\forall b\in B$, $q(b)=h\in q(B)$, pero también $q(\Phi(h))=h$, luego $b-\Phi(h)=r\in\mathbb{Q}^N$, de donde $b=\Phi(h)+r\in W+\mathbb{Q}^N$
Lo que prueba que $B\subset W+\mathbb{Q}^N$

2) Si $r,s\in\mathbb{Q}^N$ | $(W+r)\cap(W+s)\neq\emptyset$ $\exists\, w_1,w_2\in W$ | $w_1+r=w_2+s$ $\Rightarrow$ $q(w_1)=q(w_2)$. Tomando $w_1=\Phi(h_1)$ y $w_2=\Phi(h_2)$ $h_1,h_2\in q(B)$ $\Rightarrow$ $h_1=q(w_1)=q(w_2)=h_2$ $\wedge$ $w_1=w_2$. Por tanto, $r=s$. Entonces $W+r$ con $r\in\mathbb{Q}^N$ son dos a dos disjuntos.

Fijamos ahora una sucesión acotada $\{r_n\}$ | $r_n\in\mathbb{Q}^N$ $\forall n\in\mathbb{N}$ | $r_n\neq r_m$ $\forall n,m\in\mathbb{N}$ con $n\neq m$. Como W está acotado, el conjunto $\boxed{C=\biguplus_{n=1}^{\infty}(W+r_n)}$ también lo está.

Red. al absurdo

Supongamos que W es medible, $\forall r\in\mathbb{Q}^N$, como λ es invariante por traslaciones $\Rightarrow$ $W+r\in\mathcal{M}$ con $\lambda(W+r)=\lambda(W)$ entonces $C\in\mathcal{M}$, así como $\lambda(C)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(W+r_n)=\lambda(W)\,\infty$. Como C está acotado $\Rightarrow$ $\lambda(C)<\infty$ luego $\lambda(W)=0$.
Pero entonces $\lambda(W+r)=0$ $\forall r\in\mathbb{Q}^N$ y, como $\mathbb{Q}^N$ es numerable, de $B\subset\bigcup_{r\in\mathbb{Q}^N}(W+r)$ deducimos que $\lambda^*(B)=0$!!