Definición de $\mathbb{R}^N$

$N \in \mathbb{N}$ fijo $\quad \Delta_N = \{k \in \mathbb{N} / k \leq N\} = \{1, \dots, N\}$

$\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \overset{N \text{ veces}}{\dots} \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_N) / x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}\}$

Para cada $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ y cada $k \in \Delta_N$, el número real x_k es la k-ésima componente de x

Definición de n-upla

Es una función $x : \Delta_N \to \mathbb{R} \,/\, x(k) = x_k$ donde

$x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_N)$

Estructura de espacio vectorial (En concreto $\mathbb{R}^N$)

- Suma de n-uplas $\boxed{\checkmark}$
- Producto por escalares $\boxed{\checkmark}$

$\mathbb{R}^N$ no es un cuerpo cuando $N > 1$

Es un esp. vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$

Producto escalar de $\mathbb{R}^N$

$x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$

El producto escalar de x por y es $(x|y)$ dado por:

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k)$$

Propiedades

Bilinealidad
1. $(\lambda u + \mu v | y) = \lambda (u|y) + \mu (v|y) \quad \forall u, v, y \in \mathbb{R}^N, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Simetría
2. $(x|y) = (y|x)$

Cuadrados
3. $(x|x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

Espacios pre-hilbertianos

Producto escalar en espacios vectoriales

X es un espacio vectorial, $\varphi : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ forma en dos variables.

- φ es bilineal cuando es lineal para cada variable, es decir, $\forall z_0 \in X$, tanto $x \longrightarrow \varphi(x, z_0)$ como $y \longrightarrow \varphi(z_0, y)$ sean aplicaciones lineales de X

- φ es simétrica cuando: $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ $\forall x,y \in X$

- Cada φ lleva asociada una forma cuadrática
  $Q: X \longrightarrow \mathbb{R}$
  $Q(x) \longmapsto \varphi(x,x)$ $\forall x \in X$ ← Devuelve cuadrados

- Un producto escalar en X es una forma bilineal simétrica $\varphi: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya Q_φ es def. pos.

- Un esp. prehilbertiano es un esp. vect con prod. escalar

Ejemplos

- $\mathbb{R}^N, (\cdot|\cdot)$ es un espacio pre-hilbertiano

$$\varphi(x,y) = (x|y) = \sum_{k=1}^{N} x(k)y(k) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N$$

Dim finita

- $C[0,1]$ espacio vectorial de todas las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ ← Dim infinita

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt \quad \forall x,y \in C[0,1]$$

Norma de un espacio pre-hilbertiano

X espacio prehilbertiano, con producto escalar $(x,y) \mapsto (x|y)$

Norma de $x \in X$: $\|x\| = +\sqrt{(x|x)}$

La aplicación $x \longmapsto \|x\|$ es la norma del esp. prehilb.

Propiedades de la norma

○ $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{X}$ (Desigualdad triangular)

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x)+2(x|y)+(y|y) =$$

$$= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y^2\| \le \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\,\|y\| =$$

Cauchy-Schwartz

$$= (\|x\|+\|y\|)^2$$

○ $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{X}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (Homogeneidad por homotecias)

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda^2 (x|x) = \lambda^2 \|x\|^2$$

$$\sqrt{\ } \longrightarrow \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

○ $x \in \mathbb{X}$, $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ (no degeneración)

$\Rightarrow]$ Sea $\|x\|=0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$0 = (x|x) = \sum_{i=0}^{2} x_i x_i = \sum_{i=0}^{2} x_i^2 = \sum_{i=0}^{2} 0 = 0$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Importante

$$|(x|y)| \le \|x\|\,\|y\| \quad \forall x,y \in X$$

Se verifica la igualdad sii x e y son LI

- Sean $x,y \in X$ LD

$$y = \lambda x \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$|(x|y)| = |(x|\lambda x)| = |\lambda|\,|(x|x)| = \underbrace{|\lambda|\,\|x\|}_{\|y\|}\,\|x\|$$

- Sean $x,y \in X$ LI, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(y \neq 0)$

No es 0

$$0 < (x-\lambda y \mid x-\lambda y) = (x|x) - (\lambda y|x) - (x|\lambda y) +$$
$$+ (y|y)\lambda^2 = \|x\|^2 - 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2$$

Donde $\lambda = \dfrac{(x|y)}{\|y\|^2}$ ← Es el mínimo de la parábola

Por tanto $0 < \|x\|^2 - \dfrac{(x|y)}{\|y\|^2}$

Despejando y $\sqrt{\ }$ $\Rightarrow |(x|y)| < \|x\|\,\|y\|$

Ejemplo en $\mathbb{R}^N$ (norma euclídea)

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{N} x(k)^2\right)^{1/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\|$ es la longitud del vector x:

Desigualdad Cauchy-Schwartz

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x(k)y(k)\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} x(k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{N} y(k)^2\right)^{1/2}$$

$$|ab+cd| = |((a,c)|(b,d))| \leq$$

$$\leq \sqrt{a^2+c^2}\ \sqrt{b^2+d^2}$$

Espacio normado

La norma de un esp. vectorial $x \longmapsto \|x\|$, aplic. $\|\cdot\|$ que cumple la desig. triang., la homogeneidad por homotecias y la no degeneración.

Por tanto un espacio normado es un espacio vectorial con una norma.

Propiedades

En todo espacio normado X se tiene:

- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$, siendo $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftarrow]$ $0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$

$\Rightarrow]$ $\|x\|^2 = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x(k)^2 = x(1)^2 + \dots + x(n)^2 \geq 0$ $\square$

- $$\underbrace{\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \leq \overbrace{\|x\pm y\|}_{}}_{\text{Acotar por abajo}} \overbrace{\leq \|x\|+\|y\|}^{\text{Acotar por arriba}}$$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

$$\left.\begin{aligned} \|x\| - \|y\| &\leq \|x-y\| \\ \|y\| - \|x\| &\leq \|x-y\| \end{aligned}\right\} \big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \leq \|x-y\|$$

- Si $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|\lambda_k x_k\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|x_k\|$$

INDUCCIÓN

Espacios pre-hilbertianos

Todo espacio pre-hilbertiano es un espacio normado, con la norma asociada a su producto escalar

Normas en $\mathbb{R}$

Todas las normas son proporcionales a $|\cdot|$

$$\|a\| = \|a\cdot 1\| = |a|\cdot\|1\|$$

Espacios métricos

Distancia en un espacio normado

Sea X un esp. normado. Definimos la distancia entre dos puntos como:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$d(x,y) \longmapsto \|y-x\| \quad \forall x,y \in X$$

A partir de esta distancia obtenemos, a su vez, la norma $||x|| = d(0,x) \ \forall x \in X$

Propiedades

- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \forall x,y,z \in X$
- $d(x,y) = d(y,x) \ \forall x,y \in X$
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$

Distancia en un conjunto

Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto y $d : E \times E \longmapsto \mathbb{R}$ una función. Se verifica

- Desigualdad triangular:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \forall x,y,z \in E$$

- Simetría:

$$d(x,y) = d(y,x) \ \forall x,y \in E$$

- No degeneración: $\forall x,y \in E$ se tiene que $d(x,y) = 0 \iff x = y$

Al tener definida una distancia, decimos que E es un espacio métrico

Propiedades generales

En todo espacio métrico E, con distancia d, se tiene:

- $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in E$
- $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y,z \in E$
- Sea $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n \in E \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(x_0, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1}, x_k)$$

Ejemplos

Espacio normado $\Rightarrow$ Espacio métrico con $d(x,y) = \|y-x\| \quad \forall x,y \in X$. Tomamos $\mathbb{R}$

- Distancia Euclídea: $d_2(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{N} (y(k) - x(k))^2 \right)^{1/2}$
- Distancia de la suma: $d_1(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k) - x(k)| \right)$
- Distancia del máximo: $d_\infty(x,y) = \max \{ |y(k) - x(k)| / k \in \mathbb{N} \}$

Con $N=1$. Distancia usual: $d(x,y) = |y-x| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Norma y distancias inducidas

- Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado con $\|\cdot\|: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Y un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. La restricción de $\|\cdot\|$ a Y es una norma $\|\cdot\|_Y$ es la norma inducida $\|\cdot\|$ en Y.

  Con $\|\cdot\|_Y$ se dice que Y es un subespacio normado de $\mathbb{X}$.

- Sea E un espacio métrico con $d: E \times E \to \mathbb{R}$. $\emptyset \neq A \subset E$. Al restringir $d|_{A}$ se obtiene $d_A: A \times A \to \mathbb{R}$. Por tanto d_A es la distancia inducida por d en A, el cual pasaría a ser un subespacio métrico.

- Un espacio normado $\mathbb{X} \neq \{0\}$ tiene multitud de subespacios métricos que no son subespacios normados de $\mathbb{X}$

Distancia discreta

Sea E un conjunto no vacío arbitrario. La distancia discreta en E:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x\neq y \end{cases}$$