8 Clasificación de grupos de orden bajo

8.1 Grupos abelianos

Orden menor o igual que 15

Orden	Desc. cíclica
1	$\langle 1 \rangle$
2	C_2
3	C_3
4	$C_2 \oplus C_2, V$
5	C_5
6	$C_6 \cong C_2 \oplus C_3$
7	C_7
8	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$, $C_2 \oplus C_4$, C_8
9	C_9, $C_3 \oplus C_3$
10	$C_{10} \cong C_2 \oplus C_5$
11	C_{11}
12	C_{12}, $C_6 \oplus C_2 \hookrightarrow \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_3$
13	C_{13}
14	$C_{14} \cong C_2 \oplus C_7$
15	$C_{15} \cong C_3 \oplus C_5$

En general, si $|G|=p$ primo tendremos C_p y si p no es primo tendremos la cíclica primaria.

Podemos hacerlo de cualquier grupo abeliano

8.2. Grupos no abelianos

8.2.1. Producto semidirecto

Nos permitirá escribir muchos grupos no abelianos; para ello, usaremos las presentaciones.

Ejemplo

$Q_2 = \{\pm 1, \pm j, \pm i, \pm k\}$

$Q_2^{abs} = \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, yxy = x \rangle$

$f: Q_2^{abs} \longrightarrow Q_2$ que es un isomorfismo.

$x \longmapsto i$

$y \longmapsto j$

$|Q_2^{abs}| = 8$, como $x^4 = 1 \Rightarrow H = \langle x \rangle$ $|H| = 4$. Como $yxy = x^{-1} \in H$ tenemos normalidad en H

Consideramos el cociente $\frac{Q_2^{abs}}{H} \cong \langle yH \rangle$ con $y \notin H$. Como $(yH)^2 = y^2H$ e $y^2 = x^2 \Rightarrow y^2H = x^2H = H$
luego $\left|\frac{Q_2^{abs}}{H}\right| \le 2$. Por tanto, $|Q_2^{abs}| \le 8$

Por el 1TI $\frac{Q_2^{abs}}{\ker f} \cong Q_2 \Rightarrow |Q_2^{abs}| = |Q_2||\ker f| \ge 8 \Rightarrow Q_2^{abs} \cong Q_2$

Generalización de Q_2

Definición

Para cada $k \ge 1$ se define el k-ésimo grupo dicíclico como el grupo dado por la siguiente presentación

$$Q_k = \langle x, y \mid x^{2k} = 1, y^2 = x^k, yx = x^{-1}y \rangle$$

Acotación del orden

$k = 2 \to Q_2$

$k = 1 \to Q_1 = \langle x, y \mid \underbrace{x^2 = 1, y^2 = x}_{y^4 = 1}, \underbrace{yx = xy}_{\text{Abeliano}} \rangle = C_4$

$1, x, y, xy$
$x = y^2$, $xy = y^3$
$1, y^2, y, y^3$

$k \ge 3 \to Q_k$, tiene un cociente isomorfo a D_k y por tanto no será abeliano pero tendrá un orden $\boxed{2k \le |Q_k| \le 4k}$ y si k es impar $\Rightarrow |Q_k| = 4k$.

$D_k = \langle r, s \mid r^k = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s \rangle$; $\underset{1^a \text{ relación}}{r^{2k} = (r^k)^2 = 1}$, $\underset{2^a \text{ relación}}{s^2 = 1 = r^k}$, $\underset{3^a \text{ relación}}{sr = r^{-1}s}$

aplicando el Tª de Dyck obtenemos un homomorfismo $f: Q_k \longrightarrow D_k$, $x \longmapsto r$, $y \longmapsto s$ que es

epimorfismo porque $D_k = \langle r, s \rangle$ luego por el 1TI $\frac{Q_k}{\ker f} \cong D_k$

$|D_k| = 2k$ y gracias al isomorfismo $2k \mid |Q_k| \Rightarrow 2k \le |Q_k|$.

Como $x^{2k} = 1 \Rightarrow \langle x \rangle = H$ $\quad |H| = |\langle x \rangle| \le 2k$, como $yxy^{-1} = x \in H \Rightarrow H \trianglelefteq Q_k$ luego $\frac{Q_k}{H} \cong \langle yH \rangle$
entonces, como $(yH)^2 = (y^2H) = x^kH = H \Rightarrow \left|\frac{Q_k}{H}\right| \le 2$. Y como antes se hizo

$$|Q_k| = \left|Q_k/H\right| |H| \le 4k$$

En el caso impar, $k = 2t+1$, consideramos $C_4 = \langle a \mid a^4 = 1 \rangle$

$(a^2)^{2k} = 1$

$(a^2)^k = a^{2k} = a^{4t+2} = a^{4t} a^2 = a^2$

$aa^2 = a^3 = a^2 a = (a^2)^{-1} a$ lo que cumple la 3ª relación

Por el T.ª de Dyck podemos construir $f: Q_k \longrightarrow C_4$ epimorfismo $\frac{Q_k}{\ker f} \simeq C_4 \Rightarrow 4 \mid |Q_k|$

$$x \longmapsto a^2$$
$$y \longmapsto a$$

$2k \mid |Q_k| \wedge 4 \mid |Q_k| \Rightarrow \text{mcm}(2k,4) \mid |Q_k|$, como k es impar $\text{mcm}(2k,4) = 4k \Rightarrow 4k \leq |Q_n|$

$\Rightarrow |Q_k| = 4K$.

Por ejemplo $|Q_3| = 12$

Definición

Dados dos grupos K y H y una acción $\theta: H \longrightarrow \text{Aut}(K)$, $h \longmapsto \theta(h)(k) = {}^{h}k$ consideramos el conjunto producto cartesiano

$$G = H \times K = \{(h,k),\ k \in K, h \in H\}$$

definimos la siguiente operación

$$\boxed{(k_1,h_1)(k_2,h_2) = (k_1\,{}^{h_1}k_2, h_1 h_2)}$$

$(k_1,h_1)(k_2,h_2) = (k_1({}^{h_1}k_2), h_1 h_2)$

Teorema

$K \times H$ con esa operación tiene estructura de grupo

-Demostración-

Asociativa: muy larga

Neutro: $(1,1)$ $\quad (k,h)(1,1) = (k\,{}^{h}1, h1) = (k,h)$

$(1,1)(k,h) = (1 \cdot {}^{1}k, 1h) = (k,h)$

Inverso: $(k,h)^{-1} = ({}^{h^{-1}}k^{-1}, h^{-1})$

$(k,h)({}^{h^{-1}}k^{-1}, h^{-1}) = (k\,{}^{h}({}^{h^{-1}}k^{-1}), hh^{-1}) = (k\,{}^{hh^{-1}}k^{-1}, 1) = (k^{-1}k^{-1},1) = (1,1)$

Por tanto, es un grupo y se le llama producto semidirecto de K por H relativo a θ y lo denotamos por $K \rtimes_\theta H$.

Ejemplos

i) $\theta = 1 \longrightarrow$ Obtenemos el producto directo de $H \times K$

ii) $S_3 \cong C_3 \rtimes_\theta C_2 \longrightarrow$ Es único no abeliano

$C_3 \times C_2 = \{(x,y) \mid x \in C_3, y \in C_2\}$

$\theta: C_2 \longrightarrow Aut(C_3)$ → De hecho $C_{q-1} \cong Aut(C_q)$

$y \longmapsto \theta(y)(x) = x^{-1}$ pues $Aut(C_3) \cong C_2 = \{1, x\}$

$C_3 \rtimes_\theta C_2 = \langle x, y \mid x^3=1, y^2=1, xy=yx^{-1} \rangle \cong \begin{cases} S_3 \cong D_3 \to \text{no abeliano} \\ C_6 \to \text{abeliano} \end{cases}$

$|C_3 \rtimes_\theta C_2| = 6$

$$\begin{array}{ccc} (x^2,y)(1,y) & \neq & (1,y)(x^2,y) \\ \parallel & & \parallel \\ (x^{2^y} 1, y^2) & & (1\, {}^y x^2, y^2) \\ \parallel & & \parallel \\ (x^2, 1) & & ({}^y x^2, 1) \\ & & \parallel \\ & & (x^{-2}, 1) \\ & & \parallel \\ & & (x, 1) \end{array}$$

(iii) $Q_3 \cong C_3 \rtimes_\theta C_4$

El único homomorfismo no trivial es θ $y \longmapsto y^{-1}$

$C_3 \rtimes_\theta C_4 = \langle x, y \mid x^3=1, y^4=1, {}^y x = x^{-1} \rangle$

$Q_3 = \langle x, y \mid x^6=1, y^2=x^3, yx=x^{-1}y \rangle$

$\varphi: Q_3 \longrightarrow C_3 \rtimes_\theta C_4$ $c^6=1$, $d^4=1 \to d^2c^3=1$; $\to dc=c^{-1}d$

$c = x \longmapsto (x, y^2)$

$d = y \longmapsto (1, y)$

$2 \mid |Aut(C_n)|$ → sea único

(iv) $n \geq 3$ $\theta: C_2 \longrightarrow Aut(C_n)$ $\phi(y)(x) = x^{-1}$

$C_n \rtimes_\theta C_2 \cong D_n$

Definición

Nos encontramos en la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\lambda_1} & K \rtimes_\theta H & \xleftarrow{\lambda_2} & H \\ & & \downarrow \pi & & \\ & & H & & \end{array}$$

$\lambda_1(k) = (k, 1)$

$\lambda_2(h) = (1, h)$

$\pi(k, h) = h$

Dados por lo análogo al producto directo

Lema

i) $\lambda_1, \lambda_2, \pi$ son homomorfismos de grupos

ii) $\pi\lambda_1$ es trivial

iii) $\pi\lambda_2 = 1_H$

Teorema

Sean $K, H \leq G$, $K \trianglelefteq G$, $KH = G$, $K \cap H = 1$ y sea $\theta: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ $\theta(h)(k) = hkh^{-1}$. Entonces $K \rtimes_\theta H \cong G$

↳ la normalidad se usa aquí pues tiene que estar en K.

-Demostración-

$$f: K \rtimes_\theta H \longrightarrow G$$
$$(k, h) \longmapsto kh$$

i) f es sobreyectiva porque $G = KH$

ii) f es inyectiva. Supongamos que $f(k_1, h_1) = f(k_2, h_2)$ entonces $k_1 h_1 = k_2 h_2 \Rightarrow \underbrace{k_2^{-1} k_1}_{\in K} = \underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\in H}$

$\Rightarrow k_2^{-1} k_1 \in K \cap H = \{1\} \Rightarrow k_1 = k_2,\ h_1 = h_2$

iii) f es homomorfismo

$$f((k_1,h_1)(k_2,h_2)) = f(k_1\, {}^{h_1}k_2,\ h_1 h_2) = f(k_1 h_1 k_2 h_1^{-1},\ h_1 h_2) = k_1 h_1 k_2 \cancel{h_1^{-1}} \cancel{h_1} h_2 = k_1 h_1\, k_2 h_2$$
$$= f(k_1 h_1) f(k_2 h_2)$$

∆ G se le dice que es producto semidirecto de K y H

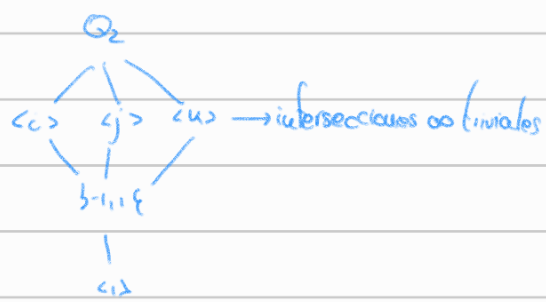
Definición

Si $K \trianglelefteq G$, un subgrupo $H \leq G$ se llama complemento para K en G si ocurre que $G = KH$ y $H \cap K = \{1\}$. Por lo que G será un producto semidirecto interno de dos subgrupos propios si y sólo si algún subgrupo normal propio tiene un complemento.

Ejemplo

i) Si G es simple, no tiene subgrupos normales propios, FIN

ii) Q_2 no es un producto semidirecto interno



iii) $\forall K$, $H=Aut(K)$ y como $\theta = 1_{Aut(K)}: Aut(K) \longrightarrow Aut(K)$

$K \rtimes_\theta H = K \rtimes_\theta Aut(K) = Hol(K)$ Holomorfo de K

$Hol(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_4$

iv) $G = S_n$, $K = A_n \trianglelefteq S_n$, $H = \langle (12) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. $A_n H = S_n$, $A_n \cap H = 1 \Rightarrow S_n = A_n \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ con θ la acción por conjugación.

v) $G = S_4$, $K = V \trianglelefteq S_4$, $H = S_3 = Stab_{S_4}(V) \Rightarrow VH = S_4$, $V \cap H = 1 \Rightarrow S_4 = V \rtimes_\theta S_3$

vi) $G = A_4$, $K = V \trianglelefteq A_4$, $H = \langle (123) \rangle \Rightarrow A_4 = V \rtimes_\theta H$

8.3 Clasificación de grupos $|G| = pq$, $p<q$ primos

Estudiamos los p-grupos y q-grupos de Sylow:

- $n_q | p$
- $n_q \equiv 1 \mod q$

$\Rightarrow$ $n_q = 1$ ó $n_q = p \to$ no es posible pues $p<q \Rightarrow p \not\equiv 1 \mod q$

Entonces $\exists! Q$ q-grupo de Sylow y tendrá un complemento que será un p-grupo de Sylow $\mathbb{Q}$.

$\hookrightarrow$ El complemento será un p-grupo de Sylow $\to$ lo asegura el orden de G

Luego $G \cong P \rtimes_\theta Q$. Por el Teorema anterior

$Q \trianglelefteq G$ $\hookrightarrow$ es la acc por conjugación

- $|Q| = q \Rightarrow Q = C_q$
- $|P| = p \Rightarrow P = C_p$

Cíclicos de orden primo

Veamos qué opciones hay de p.

- $n_p | q$
- $n_p \equiv 1 \mod p$

$\Rightarrow$ $n_p = 1$ ó $n_p = q$

- Si $n_p = 1 \Rightarrow P \trianglelefteq G$, $Q \trianglelefteq G \Rightarrow P \rtimes Q \cong P \times Q$ y como son cíclicos $P \times Q \cong C_q \times C_p \cong C_{pq}$

($n_q=1$; Siempre que ambos sean normales)

que son la descomp. cíclica y cíclica primaria.

- Si $n_p = q \Rightarrow$ consideramos las acciones: (es el homomorfismo)

$C_p \longrightarrow Aut(C_q) = \mathcal{U}(C_q) \cong C_{q-1}$

pero $p | q-1$ pues $q \equiv 1 \mod p \Rightarrow \exists! \langle \alpha \rangle \subseteq Aut(C_q) \cong C_{q-1}$ de orden p

Entonces una acción $\theta: C_p \longrightarrow Aut(C_q)$ podemos definir

$y \longmapsto \alpha^j$

$\theta_i(y^i) = \alpha^i$ con $i = 0, \dots, p-1$.

Linealmente $i=0$ $\theta_0 = 1 \Rightarrow G \cong C_{pq}$

Entonces tomamos la acción $\theta(y_i) = \alpha$. En general, tenemos que

$G \cong C_q \rtimes_\theta C_p = \langle x, y \mid x^q = 1, y^p = 1, yxy^{-1} = \alpha(x) \rangle$

De esta forma se describen todos los no abelianos de orden $p \cdot q$.

Ejemplo

- $|G| = 2q$. En el caso final tenemos $C_q \rtimes C_2 = \langle x, y \mid x^q = 1, y^2 = 1, yxy^{-1} = \alpha(x) \rangle$ donde $\alpha \in Aut(C_q)$ de orden 2:

$$\begin{aligned} C_q &\longrightarrow C_q \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

Luego $C_q \rtimes C_2 = \langle x, y \mid x^q = 1, y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle \cong D_q$

Es decir, o es abeliano o es D_q.

Orden	Posibilidad
6	C_6, $D_3 \cong S_3$
10	C_{10}, D_5
14	C_{14}, D_7
15	C_{15} ↳ clasificar con Sylow.

Caso $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$

Abelianos: $C_2 \times C_2 \times C_3$, $C_4 \times C_3$, $C_2 \times C_6$, C_{12}

No abelianos.

$n_2 \mid 3$, $n_2 \equiv 1 \bmod 2$ $\begin{cases} n_2 = 1 \\ n_2 = 3 \end{cases}$

$n_3 \mid 4$, $n_3 \equiv 1 \bmod 3$ $\begin{cases} n_3 = 1 \\ n_3 = 4 \end{cases}$

- $n_2 = 3$ y $n_3 = 4$ ⇒ Hay más elementos de los que tenemos
- $n_2 = 1$ ó $n_3 = 1$ ⇒ uno de ellos es normal K y el otro su complemento H ⇒ $G \cong K \rtimes_\theta H$. Por fijo notación.

$K \in Syl_3(G)$ $H \in Syl_2(G)$

$K \cong C_3$ y $|H| = 4$ ⇒ $H \cong C_4$ ó $H \cong C_2 \times C_2$

- Si $n_2 = n_3 = 1$ ⇒ $G \cong C_2 \times C_6$ ó $G \cong C_{12}$
  ↳ $H = C_2 \times C_2$ ↳ $H = C_4$

- Si $n_3 = 1$, $n_2 = 3$ ⇒ $G \cong K \rtimes H = \begin{cases} C_3 \rtimes C_4 \\ \text{ó} \\ C_3 \rtimes C_2 \times C_2 \end{cases}$ Hay dos posibles acciones:

$\theta: C_4 \longrightarrow Aut(C_3) \cong C_2 = \{1, x^{-1}\}$

$\theta: C_2 \times C_2 \longrightarrow Aut(C_3) \cong C_2$

$$\begin{aligned} (y,1) &\longmapsto \alpha \\ (1,x) &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$C_3 \rtimes C_4 = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^4 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle \cong Q_3$

$\underbrace{D_3}_{} \times C_2 \cong C_3 \rtimes (C_2 \times C_2) = \langle x, y, z \mid x^3 = 1, y^2 = 1, z^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1}, zxz^{-1} = x, yzy^{-1} = zy \rangle \cong D_6$.

· $n_3=4$, $n_2=1$; por un ejercicio de la relación se cumple que $G \cong \mathcal{A}_4$

$$G = H \rtimes K \cong \begin{cases} C_4 \rtimes C_3 \\ (C_2\times C_2)\rtimes C_3 \end{cases}$$

· $C_4 \rtimes C_3 = C_4 \times C_3 = C_{12}$ No será este producto semidirecto

$C_3 \longrightarrow Aut(C_4) \cong C_2$ Es $C_{\varphi(4)}$ ↳ φ de Euler

$y \longmapsto y^{-1}$ $\boxed{\text{único no trivial de orden } 2 \nmid 3 \Rightarrow \text{no vale}}$

· $(C_2\times C_2)\rtimes C_3$

$C_3 \longrightarrow Aut(C_2\times C_2) \cong S_3 \Rightarrow 2$ automorfismos de orden 3.

$\theta_1 \quad x \longmapsto \alpha \qquad \theta_2 \quad x \longmapsto \alpha_2$

$$\alpha \begin{cases} y \to z \\ z \to yz \end{cases} \qquad \alpha_2 \begin{cases} y \to yz \\ z \to y \end{cases}$$

Con θ_1 $\quad (C_2\times C_2)\rtimes C_3 = \langle x,y,z \mid x^3=1, y^2=z^2=1, yxy^{-1}=z, zxz^{-1}=zy, yz=zy \rangle \cong \mathcal{A}_4$

Grupos de orden 8

Con estos grupos no vamos a poder usar los subgrupos de Sylow.

Abelianos: $C_2\times C_2\times C_2$, $C_2\times C_4$, C_8 Son cíclicos primarios

No abelianos:

$\nexists a\in G \mid o(a)=8$ pues si lo hubiera sería el cíclico de orden 8 que es abeliano. Luego el orden de los elementos de G es 2 o 4 pero no todos serán de orden 2 pues tendríamos un abeliano. Es decir:

$\exists a \in G \mid o(a)=4$ y construimos $H \triangleleft G$, $H=\langle a\rangle=\{1,a,a^2,a^3\}$ $|G:H|=2$ luego $H \triangleleft G$. Dado $b\in G \mid b\notin H$, tendremos dos clases $H \cup Hb = G$, de manera que los elementos de G serán $G=\{a,a^2,a^3,a^4,b,ab,a^2b,a^3b\}$

Buscamos estudiar dónde está b^2.

- Supongamos que $b^2\in Hb$, puede ser de la forma

$b^2=b \Rightarrow b=1$!!

$b^2=ab \Rightarrow b=a$

$b^2=a b^2 \Rightarrow b=a^2$ $\quad \Rightarrow b^2\in H$!!

$b^2=ab^3 \Rightarrow b=a^3$

Luego $b^2\in H$ y será $b^2=a, b^2=a^2, b^2=a^3, b^2=a^4$

- Si $b^2=a \Rightarrow o(b^2)=o(a)=4 \Rightarrow o(b)=8$!!

- Si $b^2=a^3 \Rightarrow o(b^2)=o(a^3)=4 \Rightarrow o(b)=8$!!

- Si $b^2=1 \Rightarrow ba=a^3b \to$ descartar D_r

Como $H \triangleleft \mathcal{G} \Rightarrow bab^{-1} \in H$, como $o(b)=2 \Rightarrow bab \in H$. Pero

$o(bab) = o(a) = 4 \Rightarrow bab = a$ ó $bab = a^3$

- Si $bab = a \Rightarrow$ el grupo es abeliano!!
- Si $bab = a^3 \Rightarrow ba = a^3 b \Rightarrow$ tenemos $\mathcal{G} \cong D_4$

- Si $b^2 = a^2 \overset{?}{\Rightarrow} ba = a^3 b$

  $H \triangleleft \mathcal{G}$, $bab^{-1} \in H \Rightarrow o(bab^{-1}) = o(a) = 4 \Rightarrow \cancel{bab^{-1} = a}$ abeliano ó $bab^{-1} = a^3$

  luego $bab^{-1} = a^3$ y $b^2 = a^2 \Rightarrow \mathcal{G} \cong Q_2$

Estas estrategias bab se pueden usar para grupos de orden 12.