Trabajo sobre superficies compactas

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Autor:Lucas Hidalgo Herrera

Grado: Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Asignatura: Topología II

Fecha: 3 de enero de 2026

Índice General

1 Introducción

A lo largo de este documento trataremos de demostrar dos resultados bastante significativos en la clasificación de superficies compactas conexas ,como es la **invarianza de la característica de Euler por transformaciones elementales**, que dará lugar a un conjunto de equivalencias que, juanto al concepto de **orientabilidad**, nos permitirá obtener una clasificación consistente de estas superficies.
Para ello, deberemos tratar una serie de conceptos preliminares que nos permitirán obtener estos resultados.

2 Preliminares

2.1 Superficies topológicas

Tal y como se ha comentado en la introducción buscamos, como primer objetivo, obtener la invarianza de la característica de Euler por transformaciones elementales; no obstante, aún no sabemos qué es una **superficie topológica** o, siquiera, un espacio topológico **localmente euclídeo**.

Definicion 1. *Dado un espacio topológico (X, τ), se dice que es* ***localmente euclídeo*** *si, cada punto del espacio admite un entorno abierto que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ para algún natural $n \in \mathbb{N}$.*

Definicion 2. *Dado un espacio topológico (S, τ) cumpliendo el segundo axioma de separabilidad y el segundo axioma de numerabilidad, diremos que es una superficie si para cada punto existe un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.*

Una vez vistos estos conceptos básicos, necesitamos conocer el concepto de **disco regular** pues nos permitirá, tras un lema, definir el concepto de **suma conexa de superficies conexas disjuntas**.

2.2 Presentaciones poligonales y tranformaciones elementales

2.3 Clasificación de las superficies compactas

2.4 Orientabilidad

Con vistas a la demostración del resultado de la sección 4, vamos a tratar el concepto de orientabilidad de una superficie compacta cualquiera. Antes de tratar con superficies compactas, debemos tratar con alguna de sus presentaciones poligonales.

Definicion 3. *Dada una presentación poligonal $P = \{a_1, \ldots, a_n; w_1, \ldots, w_m\}, n, m \in \mathbb{N}$, diremos que es* ***no orientable*** *si, en alguna de sus expresiones, alguno de los símbolos aparece dos veces con el mismo exponente.*
Análogamente, diremos que P es una presentación poligonal ***orientable*** *si en ninguna expresión, una vez aplicado el primer paso del algoritmo de determinación de $|P|$, aparece el mismo símbolo dos veces con el mismo exponente.*

Definicion 4. *Dada una superficie topológica compacta* (S, τ_S), *diremos que es* ***no orientable*** *cuando alguna de sus presentaciones poligonales es no orientada. Análogamente, diremos que* S *es orientable cuando todas sus presentaciones poligonales son orientadas.*

3 Invarianza por transformaciones elementales

Para probar con más facilidad el resultado sobre la invarianza de la característica de Euler por transformaciones elementales, vamos a probar antes que ciertas parejas de transformaciones elementales son inversas entre sí.

Lema 3.1 (Transformaciones inversas)**.** *Sean* $\Delta = \{a_1, \dots, a_n\}$ *una familia finita de símbolos con* $n \in \mathbb{N}$ *y* $w = a_1^{\epsilon_1} \dots a_t^{\epsilon_t}, t \geq 3$, *una expresión con* $a_i \in \Delta \forall i \in \{1, \dots, t\}$. *Se cumple que:*

- ***Consolidar*** *es la transformación inversa de subdividir* ***Subdividir****.*
- ***Pegar*** *es la transformación inversa de* ***Cortar****.*
- ***Doblar*** *es la transformación inversa de* ***Desdoblar****.*

Demostración. Probaremos, en cada uno de los casos, que aplicar ambas tranformaciones elementales a w da lugar a la misma expresión, w:

- Probemos que consolidar tras subdividir produce esta invarianza. Sean b_1, b_2 otros símbolos con $b_1, b_2 \notin \Delta$ y sea $i_0 \in \{1, \dots, t\}$. El proceso obtenido es el siguiente:
$$a_1^{\epsilon_1} \dots a_{i_0}^{\epsilon_{i_0}} \dots a_t^{\epsilon_t} \overset{\text{Subdividir } a_{i_0}}{\rightsquigarrow} a_1^{\epsilon_1} \dots (b_1 b_2)^{\epsilon_{i_0}} \dots a_t^{\epsilon_t}$$
Una vez hemos subdividido a_{i_0}, obtenemos el conjunto de símbolos $\Delta' = \{a_1, \dots, a_{i_0-1}, b_1, b_2, a_{i_0+1}, a_n\}$, podemos consolidar la expresión $b_1 b_2$ en el símbolo $a_{i_0} \notin \Delta$.
$$a_1^{\epsilon_1} \dots (b_1 b_2)^{\epsilon_{i_0}} \dots a_t^{\epsilon_t} \overset{\text{Consolidar } (b_1 b_2)}{\rightsquigarrow} a_1^{\epsilon_1} \dots a_{i_0}^{\epsilon_{i_0}} \dots a_t^{\epsilon_t}$$
Análogamente se consigue la aplicación contraria.

- Veamos ahora que pegar después de cortar produce la invarianza que pedimos. Para ello, consideramos $i_0 \in \{1, \dots, t\}$ y $b \notin \Delta$ otro símbolo cualquiera y obtenemos el siguiente resultado:
$$a_1^{\epsilon_1} \dots a_{i_0}^{\epsilon_{i_0}} \dots a_t^{\epsilon_t} \overset{\text{Cortar}}{\rightsquigarrow} a_1^{\epsilon_1} \dots a_{i_0}^{\epsilon_{i_0}} b, b^{-1} a_{i_0+1}^{\epsilon_{i_0+1}} \dots a_t^{\epsilon_t} \overset{\text{Pegar}}{\rightsquigarrow} a_1^{\epsilon_1} \dots a_{i_0}^{\epsilon_{i_0}} \dots a_t^{\epsilon_t}$$
Análogamente, se consigue el resultado en sentido contrario.

- Por último, demostremos que desdoblar y doblar deja invariante nuestra expresión. Para ello, sea $i_0 \in \{1, \dots, t\}$ y $b \notin \Delta$ otro símbolo cualquiera y obtenemos el siguiente resultado:
$$a_1^{\epsilon_1} \dots a_{i_0}^{\epsilon_{i_0}} \dots a_t^{\epsilon_t} \overset{\text{Desdoblar}}{\rightsquigarrow} a_1^{\epsilon_1} \dots a_{i_0}^{\epsilon_{i_0}} b b^{-1} a_{i_0+1}^{\epsilon_{i_0+1}} \dots a_t^{\epsilon_t} \overset{\text{Doblar}}{\rightsquigarrow} a_1^{\epsilon_1} \dots a_{i_0}^{\epsilon_{i_0}} \dots a_t^{\epsilon_t}$$
Análogamente, se obtiene el caso contrario.

□

Por tanto, ya hemos probado este lema para el caso de una expresión única. Si embargo, este resultado es extensible para el caso de una presentación cualquiera.

Corolario 3.1 (Transformaciones inversas en presentaciones poligonales)**.** *Dada una presentación poligonal* $P = \{a_1 \dots a_n; w_1, \dots, w_m\}$,$n, m \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \geq 1$. *Entonces:*

- ***Consolidar*** *es la transformación inversa de subdividir* ***Subdividir****.*
- ***Pegar*** *es la transformación inversa de* ***Cortar****.*
- ***Doblar*** *es la transformación inversa de* ***Desdoblar****.*

Estamos ya en disposición de enunciar el primero de los objetivos de este documento. Buscamos probar que la característica de Euler es invariante por cualquiera de las transformaciones elementales que hemos citado anteriormente.

Proposición 3.1 (Invarianza de la característica de Euler)**.** *Dada una presentación poligonal* $P = \{a_1 \dots a_n; w_1, \dots, w_m\}$ *y sea* $\chi(P)$ *su característica de Euler, esta es invariante por cualquier transformación elemental.*

Demostración. Veamos que esto es cierto para cualquiera de las transformaciones elementales que hemos visto:

- **Renombrar**: Supongamos que dado $i \in \{1, \dots, n\}$, renombramos a_i por b_i, lo cual no varía el número de caras (número de expresiones), tampoco el número de aristas(número de símbolos), ni el número de vértices. Esto último ocurre porque ninguna de las expresiones cambia, salvo el renombramiento, luego en el cociente todo sigue igual.

- **Subdividir**: Supongamos que subdividimos el símbolo $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ añadiendo los símbolos b_1, b_2; distinguimos casos:
  - $|\{j \in \{1, \dots, m\}\,|a_i \in w_j\}\,| = 1$: En este caso, sea $w_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_1} \dots a_i \dots a_i^{-1} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$, la expresión tras la transformación es $w_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_1} \dots b_1 b_2 \dots b_2^{-1} b_1^{-1} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$. Por tanto, hemos añadido un vértice, consiguiendo así la invarianza.
  - $|\{j \in \{1, \dots, m\}\,|a_i \in w_j\}\,| = 2$: En este caso, sea $w_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_{0_1}} \dots a_i \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_{0_k}}$ y $w_{j_1} = a_{j_{1_1}}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_i^{-1} \dots a_{j_{1_k}}^{\epsilon_{1_k}}$, la expresión tras la transformación es $\bar{w}_{j_0} = a_{j_{0_1}}^{\epsilon_{0_1}} \dots b_1 b_2 \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$ y $\bar{w}_{j_1} = a_{j_{1_1}}^{\epsilon_{1_1}} \dots b_2^{-1} b_1^{-1} \dots a_{j_{0_k}}^{\epsilon_k}$. Por tanto, hemos añadido un vértice, consiguiendo así la invarianza.

- **Reflejar**: Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, reflejamos la expresión $w_j = a_{j_1} \dots a_{j_k}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, dejaría el número de aristas invariante pues no hemos introducido ningún símbolo asícomo el número de caras, pues no hemos introducido ninguna expresión.Por último, el número de vértices queda invariante, ya que invertir el sentido de los lados del polígono no cambia la adyacencia de los vertices del mismo en el cociente.

- **Rotar**: Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, rotamos la expresión $w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$; en ese caso, el número de caras queda invariante, el número de aristas queda invariante al no añadir ningún símbolo más. Por último, el número de vértices no cambia, pues en el cociente no ha cambiado ninguna orientación de los lados.

- **Cortar**: Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, cortamos la expresión $w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ en el símbolo $j_t, t \in \{2, \dots, k-2\}$ añadiendo el símbolo $b \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Obtendríamos el siguiente resultado:

$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}} \overset{\text{Cortar}}{\rightsquigarrow} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} b, b^{-1} a_{j_t+1}^{\epsilon_{j_t+1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$$

  Como podemos ver, hemos añadido un símbolo y una expresión, lo que se reflaja en una arista y una cara, respectivamente. Por tanto, queda invariable la característica de Euler.

- **Desdoblar**: Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, desdoblamos la expresión $w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ en el símbolo $j_t, t \in \{2, \dots, k-2\}$ añadiendo el símbolo $b \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Obtendríamos el siguiente resultado:

$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}} \overset{\text{Desdoblar}}{\rightsquigarrow} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} b b^{-1} a_{j_t+1}^{\epsilon_{j_t+1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$$

  Como podemos ver, hemos añadido un símbolo, lo que se reflaja en una arista y un vertice, respectivamente. Esto último es así porque, en el espacio topológico cociente para obtener la realización geométrica de P, el final de b y b^{-1} no se relacionan con ningún otro vértice. Por tanto, queda invariable la característica de Euler.

- **Consolidar,pegar y doblar**: Gracias al Corolario 3.1 obtenemos de forma sencilla el resultado. Lo veremos para el caso de consolidar, pues el resto es análogo. Ya hemos visto que subdividir mantiene invariante la característica de Euler de la presentación poligonal P. Puesto que, componer subdivir y consolidar dejan invariante a la presentación independientemente del orden de aplicación, deducimos que consolidar deja invariante la característica de Euler; pues en caso contrario llegaríamos a contradicción.

$\square$

4 Equivalencias de orientabilidad

Pasamos ya a enunciar el resultado que nos permitirá, junto a la **característica de Euler**, clasificar cualquier superficie compacta y conexa dada una presentación poligonal suya.

Proposición 4.1 (Equivalencias de orientabilidad). *Sea (S, τ_S) una superficie compacta y conexa. Entonces, equivalen:*

- *S es orientable*

- *S tiene una presentación poligonal de una única expresión que es orientada.*
- *Cualquier presentación poligonal de S de una única expresión es orientada.*

Demostración.

$i) \Longrightarrow iii)$]

Supongamos que se cumple i), en ese caso, por lo visto en la sección 2.4, como S es orientable tenemos que todas sus presentaciones poligonales son orientadas. Además, como por hipótesis S es conexa tenemos que, toda presentación poligonal, tras una serie de transformaciones elementales, puede obtenerse otra equivalente con una única expresión y optenemos iii).

$iii) \Longrightarrow i)$]

Supongamos ahora que se cumple iii), en ese caso, por la definición vista en la sección 2.4 se tiene lo pedido.

$iii) \Longrightarrow ii)$]

Supongamos, de nuevo, que se cumple iii), entonces es trivial que se cumple ii).

□