El Instituto de Estadística de una determinada comunidad autónoma convoca unas pruebas selectivas para cubrir vacantes. La puntuación obtenida por cada candidato se calcula mediante el promedio de las calificaciones obtenidas en las pruebas realizadas, y se sabe, de experiencias previas, que dichas puntuaciones tienen media 100, se distribuyen de forma normal y que el 44.04 % de los aspirantes que realizan la prueba supera la puntuación 100.6

a) La convocatoria de las pruebas establece una nota mínima de 105 puntos para superar la oposición. ¿Qué porcentaje de opositores consiguen una plaza?

b) No obstante, se sabe que en ocasiones el tribunal decide, dependiendo de las necesidades de personal, rebajar las condiciones para que un candidato sea admitido. ¿Cuál sería la nota mínima necesaria para que la probabilidad de superar la prueba de selección sea 0.33?

c) El instituto decide crear una bolsa de interinos para cubrir temporalmente posibles eventualidades. A esa bolsa pertenecerán todos los candidatos cuyas puntuaciones estén entre la media de las puntuaciones y la nota establecida en el apartado anterior. ¿Qué porcentaje de candidatos estarán en dicha situación?

a) Sea X la v.a que modela la puntuación obtenida por los candidatos

$X \rightsquigarrow N(100, \sigma^2)$

Sabemos que $P(X > 100.6) = 0'4404 \Rightarrow$

$1 - P[X \leq 100{,}6] = 0'4404 \Leftrightarrow P[X \leq 100{,}6] = 0'5596$

$\Leftrightarrow P[Z \leq \frac{100.6 - 100}{\sigma}] = 0'5596 \Leftrightarrow$

$P[Z \leq \frac{0'6}{\sigma}] = 0'5596$ luego $\frac{0'6}{\sigma} = 0'15 \Leftrightarrow$

$\sigma = 4$

Por tanto, $X \rightsquigarrow N(100, 16)$

Buscamos $P[X \geq 105] = 1 - P[X \leq 105] = 1 - P[Z \leq \frac{5}{4}] = 1 - P[Z \leq 1'25] = 1 - 0'8943 = 0'106$

b) $P[X > a] = 0'33 \ldots P[Z \leq \frac{a-100}{4}] = 0'67$. luego $\frac{a-100}{4} = 0'44 \Leftrightarrow a = 0'44 \cdot 4 + 100 = 101'76$

c) $P[100 \leq x \leq 101'76] = P[0 \leq x \leq 0'44] = P[X \leq 0'44] - 0'5 = 0'17$

7. La probabilidad de que un individuo sufra reacción al inyectarle un determinado suero es 0.1. Usando la aproximación normal adecuada, calcular la probabilidad de que al inyectar el suero a una muestra de 400 personas, sufran reacción entre 33 y 50.

X: nº de individuos que sufren reacción de una muestra de 400 personas

Otra condición:

$X \rightsquigarrow B(400, 0'1)$

$n p \geq 5$

$n(1-p) \geq 5$

Como $n \cdot p = 40 \geq 5$ y $n \cdot (1-p) = 400 \cdot 0'9 \geq 5$ aproximamos por una normal

$X \rightsquigarrow B(400, 0'1) \cong N(np, np(1-p)) = N(40, 6^2)$

33 está dentro

$P[33 \leq X \leq 50] = P[X \leq 50] - P[X < 33] = P[X \leq 50] - P[X \leq 32] = P[X \leq 50'5] - P[X \leq 32'5] =$

$= P[X \leq \frac{10'5}{6}] - P[X \leq \frac{-7'5}{6}] = P[X \leq \frac{10'5}{6}] - (1 - P[X \leq \frac{7'5}{6}]) = P[X \leq \frac{10'5}{6}] + P[X \leq \frac{7'5}{6}] - 1 = 0'8543$

12. En un parking público se ha observado que los coches llegan, aleatoria e independientemente, a razón de 360 coches por hora.

a) Utilizando la distribución exponencial, encontrar la probabilidad de que una vez que llega un coche, el próximo no llegue antes de medio minuto.

b) Utilizando la distribución de Poisson, obtener la misma probabilidad anterior.

a) $X \equiv$ tiempo entre dos llegadas consecutivas de coches (en un minuto)

$$X \rightsquigarrow \exp(6)$$

$$P[X > 0'5] = 1 - P[X \leq 0'5] = e^{-6 \cdot 0'5} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} = 0'04978$$

b) $Y \equiv$ número de coches que llegan en medio minuto

$$Y \rightsquigarrow P(3)$$

$$P[Y=0] = e^{-3} \frac{3^0}{0!} = e^{-3}$$

8. El tiempo de duración de una pieza de un cierto equipo, medido en horas, se distribuye según una ley exponencial de parámetro 0.2. Si el equipo deja de funcionar cuando fallan 3 piezas. Determinar:

a) Probabilidad de que el equipo funcione más de 10 horas.

b) Probabilidad de que el equipo funcione entre 10 y 15 horas.

a) $X \equiv$ tiempo transcurrido hasta que fallan 3 piezas (en horas)

$$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(3, 0'2)$$

$$P[X > 10] = 1 - P[X \leq 10] = 1 - \int_0^{10} \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x} dx = 1 - \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \int_0^{10} x^{u-1} e^{-\lambda x} dx = 1 - \frac{0'2^3}{2!} \int_0^{10} x^2 e^{-0'2x} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = e^{-0'2x} dx & dv = \frac{-1}{0'2} e^{-0'2x} \end{bmatrix} = 1 - \frac{0'2^3}{2!} \cdot 80'8262 = 0'6767.$$

b) $P[10 \leq X \leq 15] = 0'2228$