Topología: Relación de problemas del Tema 2

Grado en Matemáticas, Doble Grado en Física y Matemáticas,
Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Curso 2023-2024

1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Diremos que una aplicación $f : (X, d) \to (Y, d')$ es **lipschitziana** si existe $K > 0$ tal que $d'(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Prueba que toda aplicación lipschitziana es una aplicación continua.

2. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Demuestra que la aplicación $f : (X, \mathcal{T}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ dada por $f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ es continua.

3. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $f, g : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ aplicaciones continuas. Entonces las aplicaciones $f+g : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ definida como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y $f \cdot g : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ definida como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ son continuas.

4. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación. Demuestra que equivalen:

   a) f es continua.
   b) $f^{-1}(\text{int}(B)) \subset \text{int}(f^{-1}(B)), \forall B \subset Y$.
   c) $\partial(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\partial B), \forall B \subset Y$.

5. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$, dos espacios topológicos, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua y sobreyectiva. Demuestra que si $D \subset X$ es un subconjunto denso, entonces $f(D)$ es denso en Y. Demuestra, mediante un contraejemplo, que si $f(D)$ es denso, D no tiene por qué serlo.

6. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$, dos espacios topológicos y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación.

   a) Demuestra que si f es continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a x_0 entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y que converge a $f(x_0)$.
   b) Demuestra que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico 1AN tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x_0 se tiene que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $f(x_0)$, entonces f es continua.
   c) Demuestra que b) no es cierto en general si se elimina la condición 1AN.

7. Se considera en $\mathbb{N}$ la topología $\mathcal{T}$ del ejercicio 10 de la Relación 1. Caracteriza las aplicaciones continuas de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ en sí mismo.

8. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$, dos espacios topológicos, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación. Si $A \subseteq X$, entonces $f_{|A}$ puede ser continua sin que f sea continua en los puntos de A.

9. Sean $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$, dos espacios topológicos y $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ una aplicación. Demuestra que f es continua en x_0 si y solo si existe $U\in\mathcal{T}$ con $x_0\in U$ tal que $f_{|U}:(U,\mathcal{T}_U)\to(Y,\mathcal{T}')$ es continua en x_0. ¿Es cierta la equivalencia anterior si sustituimos U abierto conteniendo a x_0 por C cerrado conteniendo a x_0?

10. Demuestra que una aplicación $f:(X,\mathcal{T}_{x_0})\to(Y,\mathcal{T}_{y_0})$ es continua si y solo si es constante o $f(x_0)=y_0$. Deduce que $(X,\mathcal{T}_{x_0})\cong(X,\mathcal{T}_{x_1})$ para todo par de puntos $x_0,x_1\in X$.

11. Demuestra que todo subespacio afín $S\subset\mathbb{R}^n$ es un cerrado de $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)$.

12. Consideremos el espacio $(X,\mathcal{T})$ donde $X=\{a,b,c,d\}$ y
$$\mathcal{T}=\{\varnothing,X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\}\}.$$
Sea $f:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{T})$ la aplicación dada por $f(a)=b$, $f(b)=d$, $f(c)=b$, $f(d)=c$. Estudia en qué puntos la aplicación f es continua. ¿Es f abierta o cerrada?

13. Se considera $f:(\mathbb{R},\mathcal{T})\to(\mathbb{R},\mathcal{T})$ dada por $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, siendo $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ la recta diseminada (Ejercicio 16 de la Relación 1). Estudia si f es continua, abierta o cerrada.

14. Sea $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}:([0,1],(\mathcal{T}_u)_{[0,1]})\to(\{0,1\},\mathcal{T}_D)$ la función característica del intervalo $[0,\frac{1}{2}]$. Demuestra que $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ es sobreyectiva, abierta, cerrada, pero no es continua.

15. Demuestra que las proyecciones $p_i:(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ dadas por $p_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i$, $i=1,\ldots,n$, son aplicaciones abiertas pero no cerradas.

16. Demuestra que la aplicación $f:(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)\to([0,+\infty),(\mathcal{T}_u)_{[0,+\infty)})$ dada por $f(x)=\|x\|$ es abierta, y que $g:(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ dada por $g(x)=\|x\|$ no lo es.

17. Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$ con $A\in\mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$ y $f:(A,(\mathcal{T}_u)_{|A})\to(\mathbb{R}^m,\mathcal{T}_u)$ continua, y tal que $f^{-1}(B)$ es acotado en $\mathbb{R}^n$ para cada $B\subseteq\mathbb{R}^m$ acotado. Demuestra que entonces f es cerrada. Deduce que la función g del ejercicio anterior y las funciones polinómicas $p:(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ son cerradas.

18. Demuestra que toda afinidad $f:(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)$ es un homeomorfismo. Utiliza este resultado para construir un homeomorfismo:

    a) Entre cualesquiera bolas abiertas, cualesquiera bolas cerradas y cualesquiera esferas de $(\mathbb{R}^n,d_u)$.

    b) El cilindro circular $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ y el cilindro elíptico $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+\frac{y^2}{4}=1\}$ de $\mathbb{R}^3$.

19. Sea X un conjunto. Demuestra que toda aplicación biyectiva $f:(X,\mathcal{T}_{CF})\to(X,\mathcal{T}_{CF})$ es un homeomorfismo.

20. Encuentra un contraejemplo que demuestre que la siguiente afirmación es falsa: Si existen aplicaciones continuas e inyectivas $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ y $g:(Y,\mathcal{T}')\to(X,\mathcal{T})$ entonces $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ son homeomorfos.

21. Demuestra que toda aplicación $f:(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ estrictamente creciente (decreciente) y continua es un embebimiento.

22. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \varnothing$ y $f : (A, (\mathcal{T}_u)_A) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una función continua. Se define el **grafo** de f como el como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por:

$$\mathrm{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} .$$

Demuestra que:

a) $(A, (\mathcal{T}_u)_A)$ es homeomorfo a $(\mathrm{G}(f), (\mathcal{T}_u)_{\mathrm{G}(f)})$.

b) La bola cerrada $\overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^+ = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \mid t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

c) Las cuádricas $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2\}$, $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2-y^2\}$ y $C_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 0, z \geq 0\}$ son homeomorfas a $\mathbb{R}^2$.

23. Demuestra que $f : ([0,1), (\mathcal{T}_u)_{[0,1)}) \to (\mathbb{S}^1, (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^1})$ dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t))$ es continua y biyectiva pero no es un homeomorfismo.

24. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ la recta de Sorgenfrey. Se define la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si} \quad x < 0 , \\ 3 & \text{si} \quad x \geq 0 . \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$, $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ y $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

b) Estudia si las aplicaciones anteriores son abiertas o cerradas.

25. Demuestra que "ser metrizable" es una propiedad topológica.

26. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Demuestra que si $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son dos espacios topológicos metrizables si y solo si $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es un espacio topológico metrizable.

27. Sean $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{u, v\}$, $\mathcal{T}_X = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, $\mathcal{T}_Y = \{\varnothing, Y, \{u\}\}$. Halla la topología producto $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

28. Encuentra tres espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ y $(Z, \mathcal{T}'')$ tales que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') \cong (X \times Z, \mathcal{T} \times \mathcal{T}'')$ pero $(Y, \mathcal{T}') \ncong (Z, \mathcal{T}'')$.

29. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos y sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Demuestra que

a) $\mathrm{int}_{X \times Y}(A \times B) = \mathrm{int}_X(A) \times \mathrm{int}_Y(B)$.

b) $\mathrm{cl}_{X \times Y}(A \times B) = \mathrm{cl}_X(A) \times \mathrm{cl}_Y(B)$.

c) $\partial_{X \times Y}(A \times B) = (\mathrm{cl}_X(A) \times \partial_Y(B)) \cup (\partial_X(A) \times \mathrm{cl}_Y(B))$.

d) $(\mathcal{T} \times \mathcal{T}')_{A \times B} = \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}'_B$.

e) $A \times B \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ si y solo si $A \in \mathcal{T}$ y $B \in \mathcal{T}'$.

f) $A \times B \in \mathcal{C}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'}$ si y solo si $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y $B \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$.

g) $A \times B$ es denso en $X \times Y$ si y solo si A es denso en X y B es denso en Y.

30. Sean $(X, \mathcal{T}_{CF})$ e $(Y, \mathcal{T}_{CF})$ espacios topológicos con la topología cofinita. Demuestra que $\mathcal{T}_{CF} \times \mathcal{T}_{CF}$ no tiene por qué ser la topología cofinita en $X \times Y$.

31. Sean $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ e $(Y, \mathcal{T}_{y_0})$ espacios topológicos con la topología del punto incluido. Demuestra que $\mathcal{T}_{x_0} \times \mathcal{T}_{y_0}$ no tiene por qué ser la topología $\mathcal{T}_{(x_0,y_0)}$ en $X \times Y$.

32. En el espacio topológico producto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_S)$ calcula la clausura, el interior y la frontera del conjunto $[1, 2) \times [1, 2)$. Estudia también si la aplicación $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_S)$ dada por $f(x, y) = (y, x)$ es continua.

33. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua, abierta y sobreyectiva. Entonces, $(Y, \mathcal{T}')$ es T_2 si y sólo si $\Delta_f = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$. Deduce de aquí que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff si y sólo si el conjunto $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ es cerrado en $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$.

34. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos con $(Y, \mathcal{T}')$ Hausdorff y sean $f, g : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ aplicaciones continuas. Si existe un subconjunto $A \subset X$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$ entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A}$. Demuestra que si A es denso en X entonces $f = g$.

35. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_D \times \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

    a) Encuentra una base de entornos, si es posible numerable, de cada punto de $\mathbb{R}^2$.

    b) Encuentra un subconjunto no vacío $A \subsetneq \mathbb{R}^2$ que sea abierto y cerrado a la vez.

    c) Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$. ¿Es cerrado L? ¿Cuál es la topología $(\mathcal{T}_D \times \mathcal{T})_L$?

36. Sea $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una aplicación continua que verifica la siguiente igualdad $f(x + y) = f(x)f(y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Demuestra que $f \equiv 0$ o $f(x) = a^x$ para algún $a > 0$.

37. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua y sobreyectiva tal que para cada $y \in Y$ existe un entorno N verificando que $f|_{f^{-1}(N)} : f^{-1}(N) \to N$ es una identificación. Demuestra que f es una identificación.

38. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Demuestra que si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación continua, sobreyectiva y admite una inversa continua por la derecha (es decir, existe $g : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ tal que $f \circ g = Id_Y$) entonces f es una identificación.

39. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la siguiente relación de equivalencia

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x^2 + y = (x')^2 + y'$$

    Demuestra que $(\mathbb{R}^2/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

40. Demuestra que la proyección $p : X \to X/A$ es una biyección continua de $X \setminus A$ en su imagen. Demuestra también que es un homeomorfismo si A es abierto o cerrado.

41. Da un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subconjunto $A \subset X$ ni abierto ni cerrado tales que $X \setminus A$ no sea homeomorfo a $X/A \setminus \{[A]\}$.

42. Da un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una relación de equivalencia R en X tal que $(X, \mathcal{T})$ sea Hausdorff pero $(X/R, \mathcal{T}/R)$ no lo sea.

43. Da un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una relación de equivalencia R en X tal que $(X, \mathcal{T})$ sea 2AN pero $(X/R, \mathcal{T}/R)$ no lo sea.

44. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $I = [0,1]$. Se denomina *cono de* X al espacio topológico cociente
$$\left(\frac{X \times I}{X \times \{0\}}, \frac{\mathcal{T} \times \mathcal{T}_u}{X \times \{0\}} \right).$$
Demuestra que que el cono de $(\mathbb{S}^n, (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^n})$ es homeomorfo a $(\overline{B^{n+1}}, (\mathcal{T}_u)_{\overline{B^{n+1}}})$ para $n \geq 0$.

45. Sea $X = [0,2]$ y $A = \{0,1,2\}$. Demuestra que $(X/A, (\mathcal{T}_u)_X/A)$ es homeomorfo a $(C_1 \cup C_{-1}, (\mathcal{T}_u)_{C_1 \cup C_{-1}})$, donde C_1 es la circunferencia de radio 1 centrada en $(1,0)$ y C_{-1} es la circunferencia de radio 1 centrada en $(-1,0)$.

46. ¿Qué espacio se obtiene si en una banda de Möbius se identifican todos los puntos de su borde?

47. Demuestra que $\mathbb{RP}^2$ es homeomorfo al cociente $((I \times I)/R, (\mathcal{T} \times \mathcal{T})/R)$ donde R es la menor relación que contiene a $(t,0)R(1-t,1)$ y $(0,s)R(1,1-s)$ y $\mathcal{T}$ es la topología usual de I.

48. Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|(x,y)\| \leq 2\}$. Se define una relación de equivalencia en X de la siguiente forma: $(x,y)R(x',y')$ si y sólo si $(x,y) = (x',y')$ o $\|(x,y)\| - \|(x',y')\| = \pm 1$ y $(x,y) = \lambda(x',y')$, $\lambda > 0$. Demuestra que el espacio cociente es homeomorfo al toro.