1. Probar que dos normas definidas en un mismo espacio vectorial, que den lugar a los mismos conjuntos acotados, han de ser equivalentes.

Sea $A \subset X$ con $X \neq \emptyset$. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre X.

Sabemos que A es acotado por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ $\Rightarrow$ $\forall x \in X \; \exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 /$ $A \subset B(x, \varepsilon_1)$ (*)
$A \subset B(x, \varepsilon_2)$ (**)

(*): $\forall a \in A, \|x-a\|_1 < \varepsilon_1$
(**): $\forall a \in A, \|x-a\|_2 < \varepsilon_2$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ si tomamos el máx. ε_i $\Rightarrow$ $\boxed{\|x-a\|_1 < \|x-a\|_2} < \varepsilon_2$.

Como todo conjunto acotado por $\|\cdot\|_2$ es acotado por $\|\cdot\|_1$ $\Rightarrow$ $\|x-a\|_2 < \|x-a\|_1$ $\forall a \in A$ / $x \in X$ centro

Esta la idea

2. Dado un subconjunto A de un espacio normado, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) A está acotado
(ii) Si $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales tal que $\{\lambda_n\} \to 0$, entonces $\{\lambda_n a_n\} \to 0$.
(iii) Para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A se tiene que $\{a_n / n\} \to 0$.

¿Significa esto que si $\{a_n / n\} \to 0$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ está acotada? $\longrightarrow$ No. Tomamos $\{n-1\}$ no acotada

$A \subset X$ $(X, \|\cdot\|)$ esp. normado

$i) \Rightarrow ii)$

Sup. A acotado $\Rightarrow$ $\forall x \in X \; \exists \varepsilon > 0 / A \subset B(x, \varepsilon) \equiv \|x-a\| < \varepsilon \; \forall a \in A$, $x \in X$. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $a_n \in A$ y $\{\lambda_n\} \in \mathbb{R} \longrightarrow 0$.

$\{a_n\}$ acotada por A acotado $\Rightarrow$ $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ acotado $\quad$ $\{\lambda_n a_n\} \longrightarrow 0$?

$\{\|\lambda_n a_n - 0\|\} \longrightarrow 0$? . Como $0 \in X \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 /$ $A \subset B(0, \varepsilon) \equiv \|a\| < \varepsilon \; \forall a \in A$

Tomamos $B = \{\lambda a / \lambda \in \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}, a \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}\}$ $\Rightarrow$ Como A acotado $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \varepsilon_n > 0 /$

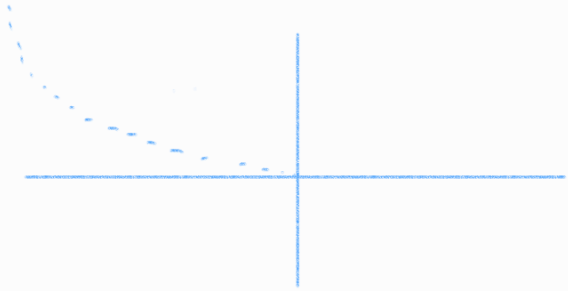
$\lambda_n a_n \subset B(0, \varepsilon_n)$ $\Rightarrow$ Tomamos $\max\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\Rightarrow$ $\{\lambda_n a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B(0, \varepsilon_n)$.

ii) $\Rightarrow$ iii)

$\{a_n\} \in A$

$\{\lambda_n\} \to 0$ $\quad \{\lambda_n a_n\} \to 0$

iii) $\Rightarrow$ i)



3. Probar que todo espacio métrico finito es compacto. Probar también que, en un conjunto no vacío E con la distancia discreta, todo subconjunto compacto de E es finito.

ii) Sea $A \subset E$ / A compacto $:$ $\forall \{a_n\}$ $\exists \Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ | $\{a_{\Phi(n)}\} \to a$. Como A compacto $\Rightarrow$ A acotado y $A \in C_{T_d}$ $\Rightarrow$ $A = \emptyset \Rightarrow$ cardinalidad 0 o $A = E$ finito por hipótesis.

i) Supongamos que no es compacto $\Rightarrow$ para algún (pero si finito) $\{x_n\} / x_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\nexists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ | $\{x_{\varphi(n)}\}$ converge. Luego $\{x_n\}$ no converge. como E es finito $\Rightarrow$ está acotado $\Rightarrow$ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ acotado $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ está acotada $\Rightarrow$ por Bolzano-Weierstrass $\exists \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ | $\{x_{\tau(n)}\}$ converge !!

Luego E es compacto.

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente de puntos de un espacio métrico y $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Probar que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

Supongamos que A no es compacto $\Rightarrow$ para alguna $\{x_n\}$ $\nexists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ / $\{x_{\varphi(n)}\}$ converja. Sea $\{y_n\}$ esa sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\Rightarrow$ "$\{y_n\} \subset \{x_n\}$" $\Rightarrow$ y_n es parcial de x_n sin parcial convergente, pero y_n acotada !! Luego A compacto.

5. Probar que, si E es un espacio métrico compacto, y A es un subconjunto infinito de E, entonces $A' \neq \emptyset$.

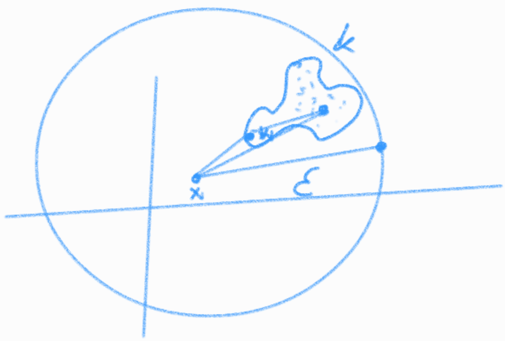
Si E compacto $\Rightarrow \forall \{x_n\}\ \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid \{x_{\varphi(n)}\}$ converge.

Sea $A \subset E$ infinito

Sea $\{x_n\}$ sucesión de puntos de E / $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap A \neq \emptyset$, tomamos $\{x_n\}_A$ una sucesión de puntos de $A \subset E \Rightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid \{x_{\varphi(n)}\}_A$ converge a un punto de $\bar{A} \Rightarrow A \neq \emptyset$

6. Sea E un espacio métrico con distancia d y K un subconjunto compacto de E. Probar que, para cada $x \in E$, existe un punto $k_x \in K$ tal que $d(x, k_x) \leqslant d(x,k)$ para todo $k \in K$.

(E, d) $\quad K \subset E$ compacto $\Rightarrow$ cerrado y acotado

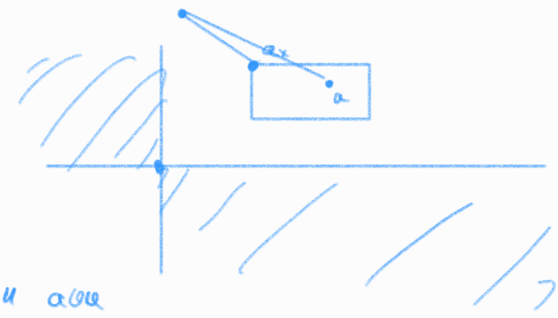


K compacto $\Rightarrow$ acotado $\Rightarrow \forall x \in E\ \exists \varepsilon > 0 /$
$K \subset B(x, \varepsilon) \equiv d(x,k) < \varepsilon\ \ \forall k \in K$

Definimos $d_i : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, A) \longmapsto \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$

Como $k \in K$ tenemos que $d_i(x, K) < d(x,k) < \varepsilon \Rightarrow \exists k_x \in K \mid d(x,k_x) \leq d(x,k)$
$\forall k \in K$.

7. Sea A un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$ y consideremos en $\mathbb{R}^N$ cualquier distancia d que genere la topología usual. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, se puede encontrar un $a_x \in A$, tal que $d(x, a_x) \leqslant d(x,a)$ para todo $a \in A$.



Supongamos $A \subset \mathbb{R}^N \mid A = \bar{A}$:

- A acotado $\Rightarrow A$ compacto (ej. 6)
- A no acotado $\Rightarrow$ Usamos la distancia a un conjunto.

8. Sea F un conjunto no vacío con la distancia discreta. Probar que si E es un espacio métrico conexo, toda función continua de E en F es constante.

Sea $\mathcal{E}$ conexo $\Rightarrow \nexists\, \mathcal{U}, V \in T \,/\, \mathcal{U} \cap V = \emptyset$ y $\mathcal{E} = \mathcal{U} \cup V$.

Sea $f: \mathcal{E} \to F$ continua.

Supongamos que no es constante pero $\mathcal{E}$ conexo y sin perder generalidad, $f(\mathcal{E}) = \{a, b\} \Rightarrow f^{-1}\{a\} = \mathcal{U}$ y $f^{-1}\{b\} = V$. Como $\mathcal{E}$ conexo $\Rightarrow \mathcal{U} \cup V = \mathcal{E}$ con $\mathcal{U} \cup V = \emptyset$.

Sean $x \in \mathcal{U}, y \in V$ con $x \neq y \Rightarrow \exists\, C \in \mathcal{E} \,/\, x, y \in C$ con C conexo. Pero $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y $C \cap V \neq 0 \Rightarrow$

$(C \cap \mathcal{U}) \cap (C \cap V) = \emptyset$ y $\exists x \,/\, x \in \mathcal{U}, y \in V$ No se expresarme !!

9. Probar que, en todo espacio métrico, el cierre de un conjunto conexo es conexo.

Supongamos $(\mathcal{E}, d)$ un espacio métrico y A un subconjunto conexo suyo $\Rightarrow$

$(A, d|_A)$ es un subespacio métrico conexo.

· Si $A \in T_d$

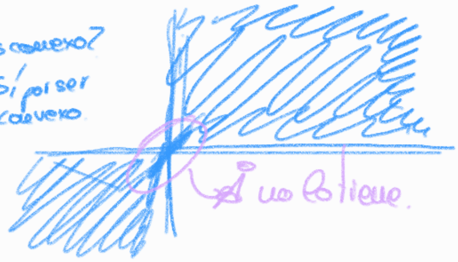
Supongamos $\bar{A}$ no es conexo $\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}, V \in T_d$ con $\mathcal{U} \cap V = \emptyset \mid \mathcal{U} \cup V = \bar{A}$. Entonces $\bar{A}$ es unión de abiertos $\Rightarrow$ es abierto. Luego contradicción puesto que $\bar{A} \in C_T$ $\forall A \in T_d$

· Si $A \in C_T \Rightarrow$ como $\bar{A} = A$ y A conexo $\Rightarrow \bar{A}$ conexo.

10. Probar que el conjunto $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\,\}$ es conexo pero A° no lo es.

$A = \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy>0\}}_{C} \cup \underbrace{\{(x,y) \mid x=0 \wedge y=0\}}_{D}$ ← Es conexo? Sí, por ser convexo

Abierto (C) Cerrado (D)



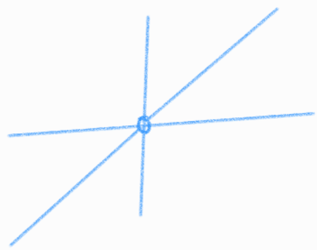
$\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy>0\}$

Veamos que A conexo. Supongamos que no lo es $\Rightarrow \exists\, U, V \in T_d \mid U\cap V=\emptyset \wedge U\cup V = A$ pero $A \subset C_T$ puesto que es unión de un cerrado y un abierto $\wedge\ A = U\cup V \in T_d$!! $\Rightarrow A$ conexo.

Veamos ahora que $\mathring{A}$ no es conexo

Sea $f: \mathring{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x$



Luego $f(\mathring{A})$ no es un intervalo $\Rightarrow$ no es conexo.

11. Sea X un espacio normado. Probar que para cualesquiera $x,y \in X\setminus\{0\}$ se tiene

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2\,\|x-y\|}{\|x\|}$$

Deducir que la función $\varphi : X\setminus\{0\} \to X$, dada por $\varphi(x) = x/\|x\|$ para todo $x \in X\setminus\{0\}$, es continua.

composición de continuas, la id., la norma y el cociente.

$\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x\pm y\| \le \|x\|+\|y\|$

$$\frac{2\|x-y\|}{\|x\|} \geq \frac{2(\|x\|-\|y\|)}{\|x\|} = \frac{2\|x\| - 2\|y\|}{\|x\|} = \frac{2\cancel{\|x\|}}{\cancel{\|x\|}} - \frac{2\|y\|}{\|x\|} \geq \frac{x}{\|x\|} - \frac{2\|y\|}{\|x\|} =$$

$$= \frac{x}{\|x\|} - \frac{2\|y\|\,\|y\|}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{x}{\|x\|} - \frac{2}{\|x\|}\|y\| \geq \frac{x}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} = \frac{x-\|y\|}{\|x\|}$$

12. Probar que, si X es un espacio normado de dimensión mayor que 1, el conjunto $X \setminus \{0\}$ es conexo. Deducir que la *esfera unidad* $S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es un conjunto conexo.

Ver que es convexo $\forall u, v \in Z \Rightarrow \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\} \subset Z$.

Sea $Z = S(0,1) \cup \{0\} \Rightarrow S(0,1)$ conexo.