1. Introducción

Buscamos dar una solución aproximada al problema de encontrar la distribución de probabilidad de las sumas parciales de una sucesión de variables aleatorias

Convergencia de sucesiones de variables aleatorias

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con funciones de distribución $\{F_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y F_X, respectivamente.

- $\{X_n\} \xrightarrow{cs} X \iff P[\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = 1$
- $\{X_n\} \xrightarrow{P} X \iff \forall \varepsilon > 0 \ \lim\limits_{n\to\infty} P[\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon] = 1$
- $\{X_n\} \xrightarrow{L} X \iff \lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, $\forall x \in \mathcal{C}(F_X)$ conjunto de puntos de continuidad de F_X

Proposición

$$\{X_n\} \xrightarrow{cs} X \Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{P} X \Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{L} X$$

Condición necesaria y suficiente para la convergencia en ley

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v.a sobre el mismo espacio de probabilidad para las que existan sus funciones generatrices de momentos $M_n(t) = E[e^{tX_n}]$, y una variable aleatoria X para la que existe también su función generatriz de momentos $M(t) = E[e^{tX}]$

$$\text{Si } \{M_n(t)\} \xrightarrow{punt.} M(t) \quad \forall t \in (-a, b) \Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{L} X$$

Leyes de los grandes números

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v.a sobre el mismo espacio de probabilidad independientes y S_n la variable aleatoria definida como sigue:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k \quad , n \ge 1$$

Si consideramos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, tal que $\{b_n\} \uparrow \infty$

Ley débil de los grandes números respecto a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Se dice que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley si:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$$

Ley fuerte de los grandes números respecto a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Se dice que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley si

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

Condiciones (necesarias) y suficientes para la satisfacción de las leyes

Ley débil de Bernoulli

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro p. Entonces:

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0 \text{, y en consecuencia } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

Ley débil de Khintchine

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y existe $E[X_n]=\mu \ \forall n\in\mathbb{N}$ entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0 \text{, y en consecuencia } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

Ley fuerte de Borel

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ \forall n\in\mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{cs} 0, \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{cs} p$$

Ley fuerte de Kolmogorov

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ \forall n\in\mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{cs} 0 \iff E[|X_n|] < \infty$$

2. Problema central del límite clásico

Teorema límite de Bernoulli

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro p. Entonces:

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{L} 0$$

Teorema límite de Moivre y Laplace

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro p. Entonces:

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{L} Z \sim N(0,1)$$

Teorema límite de Lévy

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Se tienen los siguientes límites en ley:

$$i)\ \text{Si } \exists E[X_n]\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{L} 0$$

$$ii)\ \text{Si } \exists E[X_n^2]\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{L} Z \sim N(0,1)$$

-Demostración-

i) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de var. aleatorias independientes igualmente distribuidas

$$\Rightarrow M_{X_i} = M_{X_j}\ \forall i,j \in \Delta_n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow E[S_n] = E[\Sigma X_i] = n\mu$$

Entonces probar $\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{L} 0$ basta probar $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L} \mu$

$$M_{\frac{S_n}{n}}(t) = E[e^{\frac{S_n}{n}\cdot t}] = E[e^{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}] = E[\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t}{n}x}] \overset{indep}{=} \prod_{i=1}^{n} E[e^{\frac{t}{n}x_i}] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(\tfrac{t}{n}) = (M_{X_i}(\tfrac{t}{n}))^n \quad \forall i \in \Delta_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (M_X(\tfrac{t}{n}))^n = \lim_{n\to\infty} (E[e^{\frac{t}{n}x}])^n = 1^\infty$$

se trabaja con el desarrollo en potencias de $M_x(\frac{t}{n}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{t}{n})^k \frac{E[X^k]}{k!}$

$$M_{\frac{S_n}{n}}(t) = (M_X(\tfrac{t}{n}))^n = (1 + \tfrac{t}{n}\mu + f(\tfrac{1}{n}))^n$$

desarrollo en series de potencias a partir de $k=2$ $\wedge$ $\lim_{n\to\infty} n\, f(\frac{1}{n}) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{t}{n}\mu + f(\tfrac{1}{n}))^n = 1^\infty = \{\lim_{x\to A} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to A} \exp\{g(x)[f(x)-1]\}\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n(1+\frac{t}{n}\mu + f(\frac{1}{n}) - 1)} = \lim_{n\to\infty} e^{t\mu + f(\frac{1}{n})n} = e^{t\mu} \quad \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{L} \mu$$

fgm de la distribución degenerada