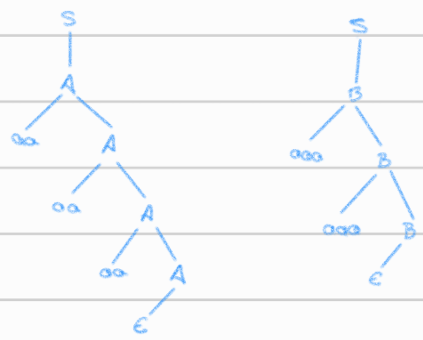
4. Dada la gramática

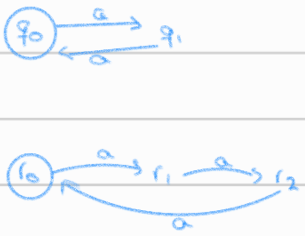
$$S \to A, \quad S \to B, \quad A \to aaA, \quad A \to \epsilon$$
$$B \to aaaB, \quad B \to \epsilon$$

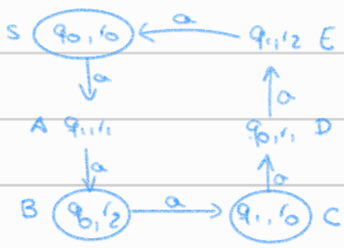
- Demostrar que es ambigua
- Construir un autómata finito determinístico que acepte el mismo lenguaje
- Construir una gramática lineal por la derecha, a partir del autómata determinístico, que genere el mismo lenguaje,
- Demostrar que la gramática resultante no es ambigua.

•) Buscamos aaaaaa



•





•) $S \to \varepsilon \mid aA$

$A \to aB$

$B \to \varepsilon \mid aC$

$C \to \varepsilon \mid aD$

$C \to aD$

$D \to aE$

$E \to aS$

•) No es ambigua ya que sólo podemos añadir a's por la izquierda luego sólo hay una forma de crear cada palabra

5. Dar una gramática libre de contexto no ambigua que genere el lenguaje

$$L = \{a^i b^j a^k b^l \,:\, (i = j) \vee (k = l)\}.$$

$S \to XY \mid YX \mid aXb \mid \varepsilon \mid aXbaXb$

$X \to aXb \mid \varepsilon$

$Y \to aYb \mid W$

$W \to A \mid B$

$A \to aA \mid a$

$B \to bB \mid b$

9. Demostrar que la gramática: $S \to A1B, \quad A \to 0A|\epsilon, \quad B \to 0B|1B|\epsilon$ no es ambigua.

Encontrar una gramática para el mismo lenguaje que sea ambigua y demostrar su ambigüedad.

El lenguaje asociado viene dado por la ER $0^*1(0+1)^*$ y no es ambigua ya que cada parte de la palabra sólo se puede generar con una producción:

$0^* \to$ Sólo con $A \to 0A$

$1 \to$ sólo con $S \to A1B$

$(0+1)^* \rightarrow$ sólo con $B \rightarrow 0B \mid 1B$

Una gramática ambigua puede ser

$S \rightarrow 0A \mid 0B \mid 1C$ 010:

$A \rightarrow 0A \mid 0B \mid 1C$ $S \rightarrow 0A \rightarrow 01C \rightarrow 010C \rightarrow 010$

$B \rightarrow 0A \mid 0B \mid 1C$ $S \rightarrow 0B \rightarrow 01C \rightarrow 010C \rightarrow 010$

$C \rightarrow 0C \mid 1C \mid \varepsilon$

11. Obtener la forma normal de Greibach para la siguiente gramática:

$$< \{S_1, S_2, S_3\}, \{a, b, c, d, e\}, S_1, P >$$

donde

$$P = \{S_1 \rightarrow \boxed{S_1 S_2 \overset{d?}{c}}, S_3, S_3 b S_3; S_2 \rightarrow S_1 S_1, d; S_3 \rightarrow \boxed{S_2 e}\}$$

Antes de nada, vamos a ver que cumple las condiciones para poder ser una gramática en forma normal de greibach

Como todas las producciones son de la siguiente forma:

$A \rightarrow a\alpha$, $\alpha \in V^*$

$A \rightarrow \alpha$, $\alpha \in V^*$ $|\alpha| \geq 2$

Podemos aplicar el algoritmo (Realmente no se cumplen pero lo vamos a aplicar para ver qué pasaría)

Reglas de producción iniciales.

$S_1 \longrightarrow S_1 S_2 c$ $S_2 \longrightarrow S_1 S_1$

$\cancel{S_1 \longrightarrow S_3}$ $S_2 \longrightarrow d$

$S_1 \longrightarrow S_3 b S_3$ $S_3 \longrightarrow S_2 d$

Eliminamos las producciones unitarias.

$S_1 \longrightarrow S_2 d$ $\boxed{\cancel{S_2 \longrightarrow S_1 S_1}}$

$\boxed{\cancel{S_1 \longrightarrow S_1 S_2 c}}$ $S_2 \longrightarrow d$

$S_1 \longrightarrow S_3 b S_3$ $S_3 \longrightarrow S_2 d$

Primera parte

$B_1 \longrightarrow S_2 c$ $B_1 \longrightarrow S_2 c B_1$ $S_1 \longrightarrow S_2 d B_1$ $S_1 \longrightarrow S_3 b S_3 B_1$

$\boxed{\cancel{S_2 \longrightarrow S_2 d S_1}}$ $S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 S_1$ $S_2 \longrightarrow S_2 d B_1 S_1$ $S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 B_1 S_1$

$B_2 \longrightarrow d S_1$ $B_2 \longrightarrow d S_1 B_2$ $S_2 \longrightarrow d B_2$ $S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 S_1 B_2$

$S_2 \longrightarrow S_2 d B_1 S_1 B_2$ $S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 B S_1 B_2$

Recopilación de producciones

$S_1 \longrightarrow S_2 d$

$S_1 \longrightarrow S_3 b S_3$

$S_1 \longrightarrow S_2 d B_1$

$S_1 \longrightarrow S_3 b S_3 B_1$

$S_2 \longrightarrow d$

$S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 S_1$

$\boxed{\cancel{S_2 \longrightarrow S_2 d B_1 S_1}}$

$S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 B_1 S_1$

$S_2 \longrightarrow d B_2$

$S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 S_1 B_2$

$S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 B S_1 B_2$

$S_2 \longrightarrow S_2 d B_1 S_1 B_2$

$S_2 \longrightarrow$

$S_2 \longrightarrow d B_4$

$S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 S_1 B_4$

$S_2 \longrightarrow S_3 b S_3 B_1 S_1 B_4$

$S_3 \longrightarrow S_2 d$

$B_1 \longrightarrow S_2 c$

$B_1 \longrightarrow S_2 c B_1$

$B_2 \longrightarrow d S_1$

$B_2 \longrightarrow d S_1 B_2$

$B_4 \longrightarrow d B_1 S_1$

$B_4 \longrightarrow d B_1 S_1 B_4$

...

13. Determina si los siguientes lenguajes son regulares o independientes del contexto. Encuentra una gramática que los genere.

a) $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j \geq 0, k < i + j\}$.

b) $L_2 = \{(ab)^i c^j d \mid j = i - 1, i \geq 1\}$.

c) $L_3 = \{ab^i cd^j \mid j = 2 * i, 1 \leq i \leq 10\}$.

Elige una de ellas que sea independiente del contexto y pásala a forma normal de Chomsky.

a) Lema de Bombeo no es regular

$S \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aAC \mid aBC \mid a$

$B \rightarrow bBC \mid b$

$C \rightarrow c \mid \varepsilon$

b) Lema de Bombeo, no es regular

$S \rightarrow Ad$

$A \rightarrow cbAc \mid ab$

c) Como es finito es regular

6. Determinar cuales de las siguientes gramáticas son ambiguas y, en su caso, comprobar si los lenguajes generados son inherentemente ambiguos:

   a) $S \to aSb|Sb|aS|a$

   b) $S \to aaS|aaaS|a$

   c) $S \to aS|aSb|X$
      $X \to Xa|a$

a) Es ambigua aaabb. $L = \{a^i b^j \mid i \geq 1, j \geq 0\}$

$S \to aS \mid Ab \mid a$

$A \to Ab \mid a$

Que no es ambigua => el lenguaje no es inherentemente ambiguo.

b) Es ambigua:

$S \to aaS \to aaaaS \to aaaaaaS \to aaaaaaa$

$S \to aaaS \to aaaaaaS \to aaaaaaa$

$L = \{a^i a \mid i = 2k \vee i = 3k\}$

$S \to aaA \mid aaaB \mid a$

$A \to aaA \mid aaaB$

$B \to aaaC$

$C \to a$

Dice que no es ambigua luego el lenguaje no es inherentemente ambiguo

c) Es ambigua

$S \to aSb \to aaSb \to aaXb \to aaab$

$S \to aSb \to aXb \to aaXb \to aaab$

$L = \{a^i b^k \mid i \geq 1, k = 0 \text{ ó } k = 1\}$

$S \to aS \mid B$

$B \to b \mid a$

No es ambigua luego el lenguaje no es inherentemente ambiguo.

7. Dar gramáticas libres de contexto no ambiguas (cuando sea posible) para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$:

   a) $L_1 = \{a^i b^j c^k : i \neq j \vee j \neq k\}$

   b) $L_2 = \{(ab)^i (bc)^j : i, j \geq 0\}$

   c) $L_3 = \{a^i b^{i+j} c^j : i, j \geq 0\}$

   d) L_4 definido como el conjunto de palabras que comienzan por aab y terminan por bbc y tales que estas dos subcadenas no aparecen nunca en el interior de la palabra (sólo están al principio y al final).

a) Este lenguaje hemos visto en clase que es inherentemente ambiguo ya que es imposible controlar las tres desigualdades de forma determinística

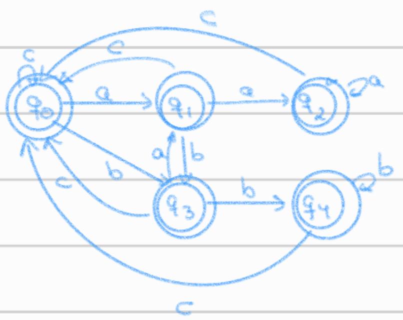
b) $S \longrightarrow abSbc \mid \varepsilon$

c) $S \longrightarrow aSbC \mid \varepsilon$

$C \longrightarrow bCc \mid \varepsilon$

d) Intentamos obtener un autómata

$S \longrightarrow aab q_0 bbc$



$q_0 \longrightarrow a q_1 \mid b q_3 \mid c q_0 \mid \varepsilon$

$q_1 \longrightarrow c q_0 \mid a q_2 \mid b q_3 \mid \varepsilon$

$q_2 \longrightarrow a q_2 \mid c q_0 \mid \varepsilon$

$q_3 \longrightarrow a q_1 \mid c q_0 \mid b q_4 \mid \varepsilon$

$q_4 \longrightarrow b q_4 \mid c q_0 \mid \varepsilon$

8. Dada la gramática:

$$S \to 01S, \quad S \to 010S, \quad S \to 101S, \quad S \to \epsilon,$$

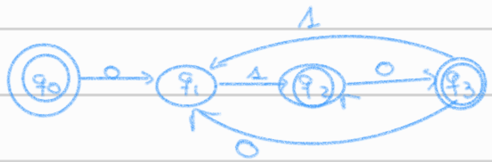
determinar si es ambigua.

Construir un autómata finito determinista asociado y calcular la gramática lineal por la derecha que se obiene a partir del autómata. ¿Es ambigua la gramática resultante?

Sí es ambigua pues 010101 tiene dos árboles de derivación

$S \to 01S \longrightarrow 0101S \longrightarrow 010101S \longrightarrow 010101$

$S \to 010S \longrightarrow 010101S$



$q_0 \longrightarrow 0 q_1 \mid \varepsilon$

$q_1 \longrightarrow 1 q_2$

$q_2 \longrightarrow 0 q_3 \mid \varepsilon$

$q_3 \longrightarrow 1 q_1 \mid 0 q_1 \mid \varepsilon$

No es ambigua pues el lenguaje es regular; además, es lineal por la derecha.

10. Describe el lenguaje generado por la siguiente gramática $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, con

$$P = \{S \to aAa, S \to bAa, A \to aAa, A \to bAa, A \to \epsilon\}$$

- Demuestra que el lenguaje generado por la gramática no es regular, pero si independiente del contexto,
- Normaliza la gramática G en la Forma Normal de Greibach, y determina todas la derivaciones más a la izquierda para la cadena ab^2a^5.

•) Desconozco el lenguaje pues no sigue un patrón, pienso que $L(G) = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| = 2n\}$

Para ver que no es regular aplicamos el lema de Bombeo tomando $z = a^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ dividiéndola en

$$u = a^k \quad v = a^{n-k} \quad w = a^n$$

entonces

1. $|uv| \leq n$ sí pues $k \leq n$

2. $|v| \geq 1$ sí pues $k < n$

Como $z \in L \Rightarrow$ ¿$uv^iw \in L$? usaremos que k será impar entonces $n-k$ es impar, tomando $i=3$ obtenemos

$$z = a^k a^{2n-2k} a^n = a^{2n-k} a^n = a^{3n-k} \qquad 3n-k \text{ no es par.}$$

Luego no es regular

Con esto basta para probar que es independiente del contexto pues la gramática dada ya lo es.

•) Obligamos a que la gramática cumpla las condiciones de Greibach.

$\boxed{\cancel{A_1 \longrightarrow A_3 A_2 A_3}}$ $\boxed{\cancel{A_2 \longrightarrow A_3 A_3}}$ $A_3 \longrightarrow a$

$\boxed{\cancel{A_1 \longrightarrow A_4 A_2 A_3}}$ $\boxed{\cancel{A_2 \longrightarrow A_4 A_3}}$ $A_4 \longrightarrow b$

$\boxed{\cancel{A_2 \longrightarrow A_3 A_2 A_3}}$

$\boxed{\cancel{A_2 \longrightarrow A_4 A_2 A_3}}$

Con esta numeración no es necesario aplicar la primera parte asique pasamos a la segunda

$i = 3$ ✓ $\qquad A_2 \longrightarrow a A_3 \qquad A_1 \longrightarrow a A_2 A_3$

$i = 2$ $\qquad A_2 \longrightarrow a A_2 A_3 \qquad i = 1 \quad A_1 \longrightarrow b A_2 A_3$

$A_2 \longrightarrow b A_2 A_3$

$A_2 \longrightarrow b A_3$

Por tanto la forma normal de Greibach es:

$A_1 \to aA_2A_3 \mid bA_2A_3$

$A_2 \to aA_3 \mid aA_2A_3 \mid bA_2A_3 \mid bA_3$

$A_3 \to a$

$A_4 \to b$

12. Pasar a forma normal de Greibach la gramática

$$S \to AAA, \quad S \to B$$
$$A \to aA, \quad A \to B$$
$$\cancel{B \to \epsilon}$$

Eliminamos las producciones nulas:

$S \to AAA$ $\qquad A \to aA$ $\quad\Big|\quad$ $S \to AAA$ $\qquad S \to aA$ $\quad\vdots\quad$ $S' \to S$

$S \to A$ $\qquad S \to AA$ $\qquad A \to a$ $\quad\Big|\to\quad$ $S \to AA$ $\qquad S \to a$ $\quad\vdots\quad$ $S' \to \epsilon$

$S' \to S$ $\qquad S' \to \epsilon$ $\qquad\qquad A \to a$

Tenemos la gramática cumpliendo las condiciones de Greibach siguiendo la siguiente relación

$A \to S_1 \qquad S \to S_2$

No obstante, podemos darnos cuenta de que la gramática es equivalente a la siguiente

$S' \to S \mid \epsilon$

$S \to aA \mid a$

que ya está en forma normal de Greibach

14. Dadas las siguientes gramáticas determinar si son ambiguas y, en caso de que lo sean, determinar una gramática no ambigua que genere el mismo lenguaje

a) $E \to E+E|E*E|(E)|x|y$ (alfabeto de símbolos terminales $\{x, y, +, *, (,)\}$ y símbolo inicial E).

b) $S \to SS + |SS * |x|y$ (alfabeto de símbolos terminales $\{x, y, +, *\}$ y símbolo inicial S)

a) Es ambigua $x + x * y$

$E \to E+E \to E+E*E \to x+x*y$

$E \to E*E \to E+E*E \to x+x+y$

$S \to ADAS \mid (S)$

$A \to x \mid y \mid \epsilon$

$B \to (\mid) \mid \epsilon$

$D \to + \mid * \mid \epsilon$

b) En este caso no es ambigua pues las variables siempre se añaden a la izquierda y se impone un orden de uso de los operadores

16. Demostrar que los siguientes lenguajes son independientes del contexto:

a) $L_1 = \{u\#w \mid u^{-1}$ es una subcadena de $w,\ u, w \in \{0,1\}^*\}$

b) $L_2 = \{u_1\#u_2\#\ldots\#u_k \mid k \geq 1,$ cada $u_i \in \{0,1\}^*,$ y para algún i y $j, u_i = u_j^{-1}\}$

Para ello bastará dar una gramática regular o independiente del contexto pues por la jerarquía de Chomsky se verifica que los lenguajes independientes del contexto contienen a los lenguajes regulares

a) $S \longrightarrow S'S''$

$S'' \longrightarrow 0S'' \mid 1S'' \mid \varepsilon$ $\qquad S' \longrightarrow 0S'0 \mid 1S'1 \mid \#$

Es más fácil de conseguir con autómatas con pila

b) $S \longrightarrow S''S'S''$

$S' \longrightarrow 0S'0 \mid 1S'1 \mid \#$ $\qquad S'' \longrightarrow 0S'' \mid 1S'' \mid \#S'' \mid \varepsilon$

Luego como ambas gramáticas son independientes del contexto entonces los lenguajes son independientes del contexto

17. Sobre el alfabeto $\{0,1\}$ dar una gramática no ambigua que genere todas las palabras en las que el número de 0s es el doble que el de 1s.

$S \rightarrow 001S \mid 00S1 \mid 0S01 \mid S001 \mid 010S \mid 01S0 \mid 0S10 \mid S010 \mid 100S \mid 10S0 \mid 1S00 \mid S100 \mid \varepsilon$

Como abarca todas las posibilidades supongo que no será ambigua.

20. Dar gramáticas independientes del contexto no ambiguas para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

a) El conjunto de palabras w tal que en todo prefijo de w el número de 0s es mayor o igual que el número de 1s.

b) El conjunto de palabras w en las que el número de 0s es mayor o igual que el número de 1s.

a) $A \rightarrow PS \mid \varepsilon$ $\qquad$ Un prefijo puede ser la palabra al completo

$S \longrightarrow 0S \mid 1S \mid \varepsilon$

$P \longrightarrow 0P1 \mid 01P \mid P01 \mid 10P \mid 1P0 \mid P10 \mid 0P \mid \varepsilon$

b) Suponiendo que la gramática anterior no es ambigua, la siguiente tampoco lo será

$P \longrightarrow 0P1 \mid 01P \mid P01 \mid 10P \mid 1P0 \mid P10 \mid 0P \mid \varepsilon$

21. Sea $L = \{0^i 1^j \parallel i \neq j, 2i \neq j\}$. Demostrar que L es independiente del contexto.

Bastará con dar una gramática que sea independiente del contexto

Veamos los casuísticas.

$i < 2i < j$

$S' \longrightarrow 0S'11 | P'$

$P' \longrightarrow 1P | 1$

$i < j < 2i$

$S'' \longrightarrow 0S''1 \ 1P''$

$P'' \longrightarrow$ ¿?

$j < i < 2i$

$S''' \longrightarrow 0S'''1 | P'''$

$P''' \longrightarrow 0P''' | 0$

En resumen la gramática será

$S \longrightarrow S' | S'' | S''$

y las gramáticas ya vistas