1. Sea $\beta = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a<b\} \cup \{(a,b)\setminus K \mid a,b \in \mathbb{R}, a<b\} = \{(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$

$K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

¿β base?

Sea $x \in \mathbb{R}$ $\exists\, \mathcal{U} \in \beta \mid x \in \mathcal{U}$ si $x = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow (x-\delta, x+\delta)\ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \in \beta \Rightarrow \beta$ base

2. Sea T_K la topología generada por β. Probar que $T_U \subset T_K$

Sea $\mathcal{U} \in T_U \Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \mid a_i < b_i$, pero $(a_i, b_i) \in \beta \Rightarrow \mathcal{U} \in T_K$

Sea $V = \emptyset \cup (a,b)\setminus K$, $\forall a,b \in \mathbb{R} \mid a<b \Rightarrow V \notin T_U$

mal

3. $(\mathbb{R}, T_K)$ Hausdorff

¿$\forall x,y \in \mathbb{R}, x \neq y$, $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{U}' \in T_K \mid x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{U}'$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$?

$\boxed{RA}$

Sabemos que $(\mathbb{R}, T_U)$ es T_2, supongamos que $(\mathbb{R}, T_K)$ no lo es, es decir, que $\exists x,y \in \mathbb{R} \mid \forall \mathcal{U}, \mathcal{U}' \in T_K$, $x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{U}'$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$. En particular debe cumplirse para $\mathcal{U} = (x-\delta, x+\delta)$ y $\mathcal{U}' = (y-\delta, y+\delta) \mid \delta \leq d(x,y) \Rightarrow$
$\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in T_U$ y $(x-\delta, x+\delta) \cap (y-\delta, y+\delta) \neq \emptyset \Rightarrow \delta > d(x,y)$!!

$\Rightarrow (\mathbb{R}, T_U)$ no es Hausdorff !!

4. ¿$\overline{(0,1)}$?

$\overline{(0,1)} =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$

$(0,1) \in T_U \Rightarrow (0,1) \in T_K$

5. Sucesión convergente para T_U que no lo sea para T_K

$\{\frac{1}{n}\} \Rightarrow$ si hay entorno del 0 pero tomar $\mathcal{U} = \{(a,b)\setminus K\}$ que es entorno del $0 \Rightarrow$ por def debe haberlo y no lo hay