Tema 3. Espacios recubridores

A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. (Son arcoconexos en un entorno de cada punto).

En particular, estos espacios siempre son arcoconexos.

1. Levantamientos de aplicaciones

Observación

Vamos a tener en cuenta que, si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

- Demostración.

Si $\mathcal{U}$ es abierto y A es una componente arcoconexa de $\mathcal{U}$ entonces dado $a \in A$ como X es localmente arcoconexo $\exists V$ entorno arcoconexo de a tal que $V \subset \mathcal{U}$. Como A es el mayor arcoconexo en $\mathcal{U}$ que contiene al punto $a \Rightarrow V \subset A \Rightarrow A$ es abierto. $\square$

Básicamente que hay un entorno contenido en A para cada punto.

Nota: Esto lo vamos a usar para, dada una aplicación recubridora $p: R \longrightarrow B$ y dado $b_0 \in B$ entonces $\exists \mathcal{U}$ abierto regularmente recubierto que contiene a b_0. Entonces, restringiéndonos a la componente arcoconexa de $\mathcal{U}$ que contiene a b_0 podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo. Simplemente nos sirve para tomar entornos reg. rec. que sean abiertos y arcoconexos.

Lema de unicidad del levantamiento

Sean $p: R \longrightarrow B$ recubridora, $f_1, f_2: X \longrightarrow R$ dos aplicaciones continuas tales que $p \circ f_1 = p \circ f_2$. Si $\exists x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0) \Rightarrow f_1 \equiv f_2$ Si dan la misma proyección y coinciden son la misma

(Observación: En la demostración solamente se necesita que X sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.)

- Demostración-

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "f_1, f_2"] \arrow[r, "f = p\circ f_1 = p\circ f_2"'] \arrow[ur, phantom, "//"] & B \end{tikzcd}$$

Vamos a ver que $Y = X$

Sea $Y = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$. Como X es conexo y tenemos que $Y \neq \emptyset$ ya que $\exists x_0 \in X \mid f_1(x_0) = f_2(x_0) \Rightarrow x_0 \in Y$. Si probamos que Y es abto y cerrado $\Rightarrow Y = X$ y $f_1 \equiv f_2$

por hipótesis.

Veamos que Y es abierto:

Tomamos $y \in Y \Rightarrow f_1(y) = f_2(y)$ y elegimos $b = p \circ f_1(y) \overset{\text{hipótesis}}{=} p \circ f_2(y) \in B$. Sea $O \subset B$ un abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a $b \Rightarrow p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$ con A_i abierto, tales que $(A_i)_{i \in I}$ son abiertos disjuntos de R cumpliendo que $p|_{A_i}: A_i \longrightarrow O$ es un homeomorfismo (por la p. inicial)

Sea $i_0 \in I$ de forma que $f_1(y)=f_2(y)\in A_{i_0}$ tomamos $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$ y vamos a ver que $V \subset Y$. Sea $x \in V$ tenemos que $f_1(x)\in A_{i_0}$ y $f_2(x)\in A_{i_0} \Rightarrow p|_{A_{i_0}}(f_1(x)) = p|_{A_{i_0}}(f_2(x)) \Rightarrow f_1(x)=f_2(x)$ por ser $p|_{A_{i_0}}$ inyectiva al ser homeomorfismo. Por tanto, Y es abierto.

abierto por intersec. de abiertos

$p|_{A_{i_0}}$ homeomo

hipótesis

↳ No veo por qué porque no sé si $y \in V$

es claro por definición

Veamos que Y es cerrado:

Para eso, vamos a probar que $X\setminus Y$ es abierto. Entonces, sea $x \in X\setminus Y$, tenemos que $f_1(x)\neq f_2(x)$, pero $p\circ f_1(x) = p\circ f_2(x) = b$. Sea ahora $O\subset B$ abierto regularmente recubierto de b $\exists (A_i)_{i\in I}$ abiertos disjuntos con $p(\bigcup_{i\in I} A_i) = O$ entonces $\exists i_1, i_2 \in I$ tal que $f_1(x)\in A_{i_1}$ y $f_2(x)\in A_{i_2}$. Basta tomar $V = f^{-1}(A_{i_1}) \cap f^{-1}(A_{i_2})$ como abierto y vamos a ver que $V\subset X\setminus Y$, pero si $y\in V$ entonces $f_1(y)\in A_{i_1}$ y $f_2(y)\in A_{i_2}$ y supong. $p|_{A_{i_1}}(f_1(y)) = p|_{A_{i_2}}(f_2(y)) \Rightarrow f_1(y)=f_2(y)$ lo que contradice que $A_{i_1}\cap A_{i_2}=\emptyset$.

por ser disjuntos

contradicción $\Rightarrow y\notin V$

Y como X es conexo, necesariamente $Y = X$. □

Teorema de monodromía

Sean $p: R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0\in B$ y $r_0\in p^{-1}(b_0)$. Entonces, el homomorfismo inducido $p_*: \pi_1(R, r_0)\longrightarrow \pi_1(B,b_0)$ es inyectivo.

En particular, $\pi_1(R,r_0)\cong p_*(\pi_1(R,r_0)) \leq \pi_1(B,b_0)$

-Demostración-

Necesitamos probar que $\ker(p_*)=\{0\}$; para ello, tomamos un lazo basado en r_0 tal que $p_*(\alpha)=[\varepsilon_{b_0}]$ pero $p_*(\alpha) = p\circ\alpha$. Entonces $\exists H:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow B$ de ε_{b_0} en $p\circ\alpha$. Como toda homotopía por lazos se puede levantar $\Rightarrow$ existe una homotopía por arcos en R entre $\hat{\varepsilon}_{b_0}$ y $\widehat{p\circ\alpha}$.

levantamientos por arcos

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \widehat{p\circ\alpha} = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow [\alpha]=[\varepsilon_{r_0}]$$

□

Recordatorio

Dados dos subgrupos $H_1,H_2 < G$, se dice que son conjugados si $\exists g\in G \mid H_2 = g^{-1}H_1 g$.

Corolario

Sean $p:R\longrightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0\in B$ y $r_1,r_2\in p^{-1}(b_0)$. Elegimos un arco $\alpha:[0,1]\longrightarrow R$ tal que $\alpha(0)=r_1$ y $\alpha(1)=r_2$, entonces

$$p_*(\pi_1(R,r_2)) = [p\circ\alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R,r_1)) * [p\circ\alpha]$$

En particular, se tiene que $p_*(\pi_1(R,r_1))$ y $p_*(\pi_1(R,r_2))$ son conjugados en $\pi_1(B,b_0)$.

- Demostración -

Es claro, por la definición de p, $p\circ\alpha$ es un lazo basado en b_0, es decir, $[p\circ\alpha] \in \Pi_1(B,b_0)$. Ya sabemos que

$$\begin{aligned} \varphi: \Pi_1(R,r_2) &\longrightarrow \Pi_1(R,r_1) \\ [\beta] &\longmapsto [\alpha * \beta * \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Mi intuición me dice que viene de un resultado del tema 1

es un isomorfismo y $\Pi_1(R,r_1) = [\alpha] * \Pi_1(R,r_2) * [\tilde{\alpha}]$ y proyectando tenemos que

$$p_*(\Pi_1(R,r_1)) = [p\circ\alpha] * p_*(\Pi_1(R,r_2)) * [\underbrace{p\circ\tilde{\alpha}}_{[(p\circ\alpha)]^{-1}}]$$ □

Corolario

Sea $p: R \longrightarrow B$, supongo que es recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1 \in p^{-1}(b_0)$. Sea H un subgrupo conjugado de $p_*(\Pi_1(R,r_1))$ dentro de $\Pi_1(B,b_0)$. Entonces existe un punto $r_2 \in R$ tal que $H = p_*(\Pi_1(R,r_2))$ ↪ Es como un recíproco.

↪ no sería $\in p^{-1}(b_0)$?

- Demostración -

Sabemos que:

- $p(r_1) = b_0$
- $p_*(\Pi(R,r_1))$ es conjugado con H en $\Pi_1(B,b_0)$, es decir, $H = g^{-1} * p_*(\Pi_1(R,r_1)) * g$ con $g \in \Pi_1(B,b_0)$, esto es, $g = [\gamma]$.

Sea ahora $\hat{\gamma}$ el levantamiento de γ en R con $\hat{\gamma}(0) = r_1$. Llamamos $r_2 = \hat{\gamma}(1)$ que puede ocurrir $r_1 = r_2$, pero cumple que $p\circ\hat{\gamma} = \gamma$ que es un lazo $\Rightarrow (p\circ\hat{\gamma})(1) = b_0$. Entonces, por el corolario anterior

$$p_*(\Pi_1(R,r_2)) = [p\circ\hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\Pi_1(R,r_1)) * [p\circ\hat{\gamma}] = [\gamma]^{-1} * p_*(\Pi_1(R,r_1)) * [\gamma] = H.$$ □

Teorema general del levantamiento

Consideramos una aplicación recubridora $p: R \longrightarrow B$, una aplicación continua $f: X \longrightarrow B$, $x_0 \in X$, $b_0 = f(x_0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$. Entonces, son equivalentes:

i) $\exists \hat{f}: X \longrightarrow R$ un levantamiento de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$

ii) $f_*(\Pi_1(X,x_0)) \subset p_*(\Pi_1(R,r_0))$

Además, si se cumple i) o ii) el levantamiento con la condición $\hat{f}(x_0) = r_0$ es único.

Nota

Una consecuencia importante es que, si X es simplemente conexo toda $f: X \longrightarrow B$ continua admite un levantamiento.

- Demostración -

i) ⟹ ii) Como $\hat{f}$ existe por hipótesis, tenemos que $f = p \circ \hat{f}$ entonces

$$f_*(\Pi_1(X,x_0)) = p_*(\underbrace{\hat{f}_*(\Pi_1(X,x_0))}_{\overset{\cap}{\Pi_1(R,r_0)}}) \subset p_*(\Pi_1(R,r_0))$$

por definición de homomorfismo inducido.

ii) ⟹ i) Empezamos definiendo $\hat{f}$; dado $x \in X$, elegimos $\alpha_x : [0,1] \longrightarrow X$ arco que une x_0 con x. Entonces, $f \circ \alpha_x$ es un arco en B que une b_0 y $f(x)$. Ahora bien, considerando su levantamiento $\widehat{f\circ\alpha_x}$ como el único arco en R tal que $\widehat{f\circ\alpha_x}(0) = r_0$. Por tanto, definimos $\boxed{\hat{f}(x) = \widehat{f\circ\alpha_x}(1)}$

$\omega f(x_0) = b_0$

↳ de un arco

Debemos probar que $\hat{f}$ está bien definida, es decir, no depende del α_x elegido:

Sea $\beta_x : [0,1] \longrightarrow X$ otro arco que une x_0 y x, y queremos ver que $\widehat{f\circ\alpha_x}(1) = \widehat{f\circ\beta_x}(1)$.

Tomamos $\gamma = \alpha_x * \tilde{\beta}_x$, que es un lazo en X basado en x_0, y usando f, tenemos que $f\circ\gamma$ es un arco en B basado en b_0.

Usando (ii) tenemos que $[f\circ\gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\Pi_1(R,r_0)) \Rightarrow \exists\, \delta : [0,1] \longrightarrow R$ lazo basado en r_0 de forma que $[f\circ\gamma] = [p\circ\delta]$. Entonces, sea $\widehat{f\circ\gamma}$ el único levantamiento de $f\circ\gamma$ con $\widehat{f\circ\gamma}(0) = r_0$.

$f\circ\gamma$ es homotópico por arcos con $p\circ\delta \xrightarrow{P_* \text{ inyectiva}} \widehat{f\circ\gamma}$ es homotópico con δ

¿Por qué necesito inyectividad? → Es lo que te permite

⟹ ambos acaban en el mismo punto, es decir, $\widehat{f\circ\gamma}(1) = \delta(1)$ y δ sí es un lazo ⟹ $\widehat{f\circ\gamma}(1) = r_0$.

Deshaciendo la construcción de $f\circ\gamma$ tenemos que

$$\widehat{f\circ\gamma} = \widehat{(f\circ\alpha_x) * (f\circ\tilde{\beta}_x)} = \widehat{f\circ\alpha_x} * \omega$$

donde $\widehat{f\circ\alpha_x}$ es el levantamiento de $f\circ\alpha_x$ empezando en r_0 y $\hat{\omega}$ es el levantamiento de $\widehat{f\circ\beta_x}$ empezando en $\widehat{f\circ\alpha_x}(1)$.

Cuando tengas que mirar unicidad

Pero $p\circ\omega = f\circ\tilde{\beta}_x$, $\omega(0) = r_0$ y $\omega(0) = \widehat{f\circ\alpha_x}(1)$. Entonces, $p\circ\tilde{\omega} = f\circ\beta_x$, $\tilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0$ y $\tilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f\circ\alpha_x}(1)$. Es decir, $\tilde{\omega}$ es el único levantamiento de $f\circ\beta_x$ comenzando en r_0; equivalentemente, $\tilde{\omega} = \widehat{f\circ\beta_x}$.

Por tanto, $\widehat{f\circ\beta_x}(1) = \tilde{\omega}(1) = \widehat{f\circ\alpha_x}(1)$, lo que demuestra que $\hat{f}(x)$ está bien definida.

Veamos que $p\circ\hat{f} = f$. Dado $x \in X$ tenemos que, por definición, $\hat{f}(x) = \widehat{f\circ\alpha_x}(1)$ y $p\circ\hat{f}(x) = p(\widehat{f\circ\alpha_x})(1) = f\circ\alpha_x(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)$.

Es claro que $\hat{f}(x_0) = r_0$ pues tomando $\alpha_x = \varepsilon_{x_0}$ obtenemos lo pedido sustituyendo.

Queda por ver que $\hat{f}$ es continua.

Sea $x \in X$ vamos a probar que $\hat{f}$ es continua en x. Sea U un entorno de $\hat{f}(x)$ y tomamos O abierto arcoconexo de $f(x)$ que está regularmente recubierto.

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I} A_i \quad , A_i \text{ disjuntos y abiertos } \mid p|_{A_i} : A_i \longrightarrow O \text{ homeomorfismo } \forall i \in I$$

Sea Δ_0 aquel que contiene a $\hat{f}(x)$ y podemos suponer que $\Delta_{i_0} \subset \mathcal{U}$ (si no fuese así consideraríamos $\mathcal{U} \cap \Delta_{i_0}$). Como f es continua existe un abierto V que contiene a x tal que $f(V) \subseteq O$. Podemos suponer que V es arcoconexo (si no lo fuese, tomamos la componente arcoconexa de V que tiene a x).

Si probamos que $\hat{f}(V) \subset \Delta_{i_0} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \hat{f}$ sería continua en x. Sea $y \in V$, elegimos $\gamma: [0,1] \longrightarrow V$ de forma que γ une x con y. $\Rightarrow \alpha_x * \gamma$ es un arco que une x_0 con y.

$$\boxed{\hat{f}(y) = \widehat{f \circ (\alpha_x * \gamma)}(1) = \widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}(1)}$$

Está volviendo a usar el lema de unicidad

Pero $\widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}$ es la única curva que se proyecta por p en $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$ y comienza en r_0. Es decir, $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$ se puede ver como $\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{f \circ \gamma}'$ donde $\widehat{f \circ \gamma}'$ es el levantamiento de $f \circ \gamma$ pero comenzando en $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$.

$$\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq V \Rightarrow \mathrm{Im}(f \circ \gamma) \subset O \Rightarrow \mathrm{Im}(\widehat{f \circ \gamma}') \subseteq \Delta_{i_0}$$

pues $p|_{\Delta_{i_0}}: \Delta_{i_0} \longrightarrow O$ es un homeomorfismo. Entonces

$$\hat{f}(y) = \widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}(1) = \widehat{(f \circ \gamma)}'(1) \in \Delta_{i_0}$$

$\square$

Ejemplo:

•) Consideramos $p: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ recubridora y las aplicaciones:

$$(x, y, z) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy, z)$$

$f_1, f_2: \mathbb{S}_1 \longrightarrow \mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x,y) = (x, y, x)$ y $f_2(x,y) = (-2xy, x^2 - y^2, x^2)$

Nos preguntamos si existen levantamientos de esas aplicaciones

Aplicamos el teorema para f_1.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}_1 \times \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
\underset{(1,0)}{\mathbb{S}^1} \arrow[ur, "\hat{f}?"] \arrow[r, "f_1"'] & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

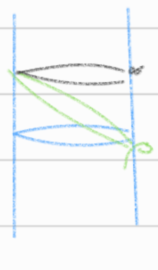
$f_1(1,0) = (1,0,1)$ $\qquad x_0 = (1,0)$

$p(1,0,1) = (1,0,1)$ $\qquad r_0 = (1,0,1)$

Sabemos que $\Pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) = \{[\alpha]^n : \alpha(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)\ t \in [0,1]\ \text{y } n \in \mathbb{Z}\}$ y que $\Pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1)) = \{[\beta]^n : \beta(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t, 1)\ t \in [0,1]\ n \in \mathbb{Z}\}$. Por otro lado:

$$f_{1*}[\alpha] = [f_1 \circ \alpha] = [\beta]$$

Entonces $f_{1*}(\Pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))) = \Pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1))$



Ahora calculamos $p_*(\pi_1(S^1\times\mathbb{R},(1,0,1)))$, pero $\pi_1(S^1\times\mathbb{R},r_0)=\{[\beta]^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$

$$(p\circ\beta)(t)=(\cos^2(2\pi t)-\operatorname{sen}^2(2\pi t),\ 2\cos(2\pi t)\operatorname{sen}(2\pi t),\ 1)=(\cos 4\pi t,\operatorname{sen}4\pi t,1)=\beta*\beta$$

Entonces $p_*([\beta])=[p\circ\beta]=[\beta]^2$ y vemos que $p_*(\pi_1(S^1\times\mathbb{R},(1,0,1)))=\{[\beta]^{2n}\mid n\in\mathbb{Z}\}$

y por el T^{ma} no existe levantamiento de f_1.

En particular, si tomamos otro punto r_1 cualquiera tal que $p(r_1)=(1,0,1)$ (r_1 sólo puede ser $(-1,0,1)$)

entonces sabemos por corolario al T^{ma} de monodromía que $p_*(\pi_1(S^1\times\mathbb{R},r_1))$ es conjugado

a $p_*(\pi_1(S^1\times\mathbb{R},(1,0,1)))$ y como el grupo total es abeliano $\Rightarrow$ deben coincidir.

Si el grupo total no es abeliano el razonamiento no sirve.

Vamos a ver que f_2 sí se puede levantar

$f_2(1,0)=(0,1,1)$, $[\alpha]$ genera $\pi_1(S_1,(1,0))$

$[\gamma]$ genera $\pi_1(S_1\times\mathbb{R},(0,1,1))\Rightarrow \gamma(t)=(\cos(2\pi t+\frac{\pi}{2}),\operatorname{sen}(2\pi t+\pi/2),1)$

$$(f_2\circ\alpha)(t)=(-2\cos(2\pi t)\operatorname{sen}(2\pi t),\ \cos^2(2\pi t)-\operatorname{sen}^2(2\pi t),\ \cos^2(2\pi t))$$

$$=(\operatorname{sen}(4\pi t),\cos(4\pi t),\cos^2(2\pi t))=(\cos(\tfrac{\pi}{2}+4\pi t),\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}+4\pi t),\cos^2(2\pi t))$$

$$[f_2\circ\alpha]=[\gamma*\gamma]=[\gamma]^2\Rightarrow f_{2*}(\pi_1(S^1\times\mathbb{R},(1,0)))=\{[\gamma]^{2n}\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

Y aplicando el teorema sale lo que buscamos considerando $r_0=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},1)$ y es único.

2. Transformación de recubridores

Para lo que resta de tema, la idea es clasificar los espacios recubridores y aplicaciones recubridoras hasta un espacio topológico dado.

Para simplificar vamos a usar la notación siguiente. Diremos que (R,p) es un recubridor de B si $p: R\longrightarrow B$ es una aplicación recubridora

Definición

Sean $(R_1,p_1),(R_2,p_2)$ dos recubridores de un mismo espacio B base.

(i) Decimos que un homomorfismo de recubridores de (R_1,p_1) en (R_2,p_2) es una aplicación continua $\phi: R_1\longrightarrow R_2$ tal que $p_2\circ\phi=p_1$

Lo que estamos diciendo es que ϕ es el levantamiento de p_1 usando como aplicación recubridora a p_2.

(ii) Un isomorfismo de recubridores ϕ de (R_1,p_1) en (R_2,p_2) es un homeomorfismo $\phi: R_1\longrightarrow R_2$ tal que $p_2\circ\phi=p_1$.

En ese caso, se dice que (R_1,p_1) y (R_2,p_2) son isomorfos.

(iii) Un isomorfismo ϕ de (R_1,p_1) en sí mismo se le llama automorfismo. Al conjunto de todos los automorfismos lo denotaremos $A(R_1,p_1)$.

Observación

(i) Si (R,p) es un recubridor de una base B y $\phi: \hat{R} \longrightarrow R$ es un homeomorfismo entonces $(\hat{R}, p\circ\phi)$ es un recubridor de B.

Además, ϕ es un isomorfismo de recubridores, de hecho todos son así por definición.

(ii) La composición de homomorfismos de recubridores es homomorfismo de recubridores, pues la composición de aplicaciones continuas es continua.

(iii) Si φ es un isomorfismo de recubridores entonces φ^{-1} también lo es. Ya vimos que la inversa de un homeomorfismo es un homeomorfismo.

De aquí se deduce que $(A(R,p),\circ)$ es un grupo.

Corolario

Sean φ_1, φ_2 dos homomorfismos de recubridores desde (R_1,p_1) en (R_2,p_2). Entonces $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si y solo si $\exists r_1 \in R_1 / \varphi_1(r_1)=\varphi_2(r_1)$.

En particular si φ es un homomorfismo de un recubridor (R,p) en sí mismo $\Rightarrow \varphi \equiv id_R$ si y sólo si $\exists x_0 \in R : \varphi(x_0)=x_0$

↳ Podemos saber que φ es isom de recubridores.

-Demostración-

$\Rightarrow$] Trivial

$\Leftarrow$] Como, en particular, φ_1 y φ_2 son levantamientos de p_1, por el lema de unicidad del levantamiento se tiene el resultado.

Basta tomar $\varphi_1=\varphi$ y $\varphi_2=id_R$ para obtener el resultado.

Corolario

Sean $(R_1,p_1),(R_2,p_2)$ dos recubridores de B y tomamos $b_0\in B$, $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Entonces:

(i) Existe un homomorfismo de recubridores ϕ de (R_1,p_1) en (R_2,p_2) con $\phi(r_1)=r_2$ si y solo si $p_{1*}(\Pi(R_1,r_1)) \subset p_{2*}(\Pi(R_2,r_2))$

(ii) Existe un isomorfismo de recubridores ϕ de (R_1,p_1) en (R_2,p_2) con $\phi(r_1)=r_2$ si y solo si $p_{1*}(\Pi(R_1,r_1)) = p_{2*}(\Pi(R_2,r_2))$

-Demostración-

(i) Está probado en el teorema de existencia del levantamiento.

(ii) $\Rightarrow$] Como ϕ es isomorfismo tenemos que, en particular, es homomorfismo de recubridores obteniendo (5). Considerando ahora ϕ^{-1} que es un isomorfismo de recubridores y haciendo un resultado análogo tenemos (2)

$\Leftarrow$] Por (i) tenemos que ϕ y ϕ^{-1} son homomorfismos de recubridores, pero $\varphi \circ \phi = Id_{R_1}$ porque tiene un punto fijo luego es un homeomorfismo.

Teorema

Sean $(R_1, p_1), (R_2, p_2)$ dos recubridores de un e.t. B. Entonces existe un isomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) si y solo si dado $b_0 \in B$ $\exists r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$ con $p_1(r_1) = b_0 = p_2(r_2)$ tales que $p_{1*}(\Pi_1(R_1, r_1))$ y $p_{2*}(\Pi_1(R_2, r_2))$ son conjugados

-Demostración-

$\Rightarrow$] Supongamos que $\exists \phi$ isomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_2, p_2), sea $b_0 \in B$ y $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ que existe pues p_1 es sobreyectiva y consideramos $r_2 = \phi(r_1)$ y por el corolario anterior, como $p_2 \circ \phi = p_1 \Rightarrow p_{1*}(\Pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\phi_*(\Pi_1(R_1 r_1)) \underset{\phi \text{ homeom.}}{=} p_{2*}(\Pi_1(R_2, \underbrace{\phi(r_1)}_{r_2}))$

$\Leftarrow$] Corolario anterior.

Corolario 15 *Salvo isomorfismos de recubridores, el número máximo de recubridores que puede tener un espacio topológico B viene determinado por las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$, para $b_0 \in B$.*

Consecuencias:

Sean B un esp. topológico y $b_0 \in B$. Si consideramos H un subgrupo de $\Pi_1(B, b_0)$ entonces:

(i) Existe, salvo isomorfismos de recubridores, a lo sumo un recubridor (R, p) cumpliendo que existe un punto $r \in R$ tal que $p_*(\Pi_1(R, r)) = H$.

(ii) Además, si H y H' son conjugados en $\Pi_1(B, b_0)$ entonces, a lo sumo existe, salvo isomorfismos, un solo recubridor (R, p). Es decir, si (R, p) es un recubridor con $r_0 \in R$: $p_*(\Pi_1(R, r_0)) = H$ $\Rightarrow$ también existe un r_0': $p_*(\Pi_1(R, r_0')) = H'$

Ejemplos

(i) $B = \mathbb{R}$. ¿Cuáles son los recubridores de $\mathbb{R}$?

$\Pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\}$

Solo hay un subgrupo, entonces salvo isomorfismos de recubridores $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ solo tiene un recubridor, que es $(\mathbb{R}, id)$

De aquí podemos deducir que, si B es simplemente conexo entonces su único recubridor es (B, id), salvo isomorfismos de recubridores.

(ii) $B = \mathbb{RP}^n$ $n \geq 3$.

$\Pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ con $x_0 \in \mathbb{RP}^n$ cualquiera

Los subgrupos son $H_1 = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$ ó $H_2 \cong \mathbb{Z}_2 \longrightarrow$ Recubridor asociado es $(\mathbb{RP}^n, id)$

$\downarrow$

Recubridor asociado $(\mathbb{S}^n, p(x) = [x])$

(iii) $B = \mathbb{S}^1$

$\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$

Sus subgrupos son $H_n = n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}$ y $H_0 \cong \{0\}$. Uno de los recubridores que tenemos es $(\mathbb{R}, p(x) = \cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$

$(\mathbb{R}, p)$ es el recubridor asociado a H_0

$(\mathbb{S}^1, id)$ es el recubridor asociado a H_1

$(\mathbb{S}^1, p(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta))$ es el recubridor asociado a H_n.

Las aplicaciones recubridores son distintas aunque el espacio sea el mismo.

(iv) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$

$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,0)) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow H_n = n\mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$(\mathbb{R}^2, p_0(x,y) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), y))$ es el recubridor de H_0

$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_n(x,y) = (\cos(2n\pi x), \operatorname{sen}(2n\pi x), y)$ $n \geq 1$ es el recubridor de H_n

$p_n(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, y) = (\cos(n\theta), \operatorname{sen}(n\theta), y)$ con $n \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, id)$ es el recubridor asociado a H_1

Nota: No se ha comprobado que p_n lleve el generador de π_1(recubridor) a un generador de H_n.

(v) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

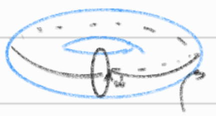
$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1,0,1,0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, id)$ es recubridor asociado a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, p_0 \times p_0(x,y) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x, \cos 2\pi y, \operatorname{sen} 2\pi y))$ es recubridor asociado al subgrupo trivial

$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_n \times p_0(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, y) = (\cos(n\theta), \operatorname{sen}(n\theta), \cos(2\pi y), \operatorname{sen} 2\pi(y))$ es recub. asociado a $n\mathbb{Z} \times \{0\}$

$(p_n \times p_0)_*([\gamma]) = [\alpha]^*$



Y de esta forma se obtienen todos

Debemos estudiar siempre cuáles son las imágenes por la aplicación recubridora de los generadores del grupo fundamental del recubridor. Además de elegir el punto correcto.

Estos no son todos pues $<(1,1)> \leq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Los subgrupos son con 1 o 2 generadores:

- Con 1 son $<(u,u)>: u\in\mathbb{Z}$ → Recubridor = cilindro
- con 2 son los que hemos visto junto a $<(k,1)\cdot(1,2): k\in\mathbb{Z}, s\in\mathbb{Z}>\ldots$ → Recubridor = toro

Consideramos $p: S^1\times\mathbb{R} \longrightarrow S^1\times S^1$

$$(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,y)\longmapsto(\cos(\theta),\operatorname{sen}\theta,\cos(\theta+y),\operatorname{sen}(\theta+y))$$

Habría que probar que es recubridora.

$p_*([\gamma]) = [\alpha]*[\beta]$ → habría que probarlo.

$p(\gamma(t)) = p(\cos 2\pi t,\operatorname{sen}2\pi t,0) = (\cos(2\pi t),\operatorname{sen}(2\pi t),\cos(2\pi t),\operatorname{sen}(2\pi t))$

Proposición

Sea ϕ un homomorfismo de recubridores desde (R_1,p_1) en (R_2,p_2). Entonces $\phi: R_1\longrightarrow R_2$ es una aplicación recubridora. dos recubridores de B se recubren entre sí

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & R_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

-Demostración-

Debemos ver que ϕ es sobreyectiva pues es continua por definición.

Sea $r_2\in R_2$, tomamos $r_0\in R_1$ y elegimos $\alpha:[0,1]\longrightarrow R_2$ que una $\phi(r_0)$ con r_2.

Si proyectamos con p_2 obtenemos $p_2\circ\alpha:[0,1]\longrightarrow B$ un arco que une $p_2(\phi(r_0))$ con $p_2(r_2)$. Ahora bien, como $p_2\circ\phi = p_1$ tenemos que $p_2(\phi(r_0)) = p_1(r_0)$ y por el lema de unicidad del levantamiento (al ser p_1 recubridora) $\exists!\ \widehat{p_2\circ\alpha}:[0,1]\longrightarrow R_1$ tal que $\widehat{p_2\circ\alpha}(0) = r_0$ y $p_1\circ\widehat{p_2\circ\alpha} = p_2\circ\alpha$

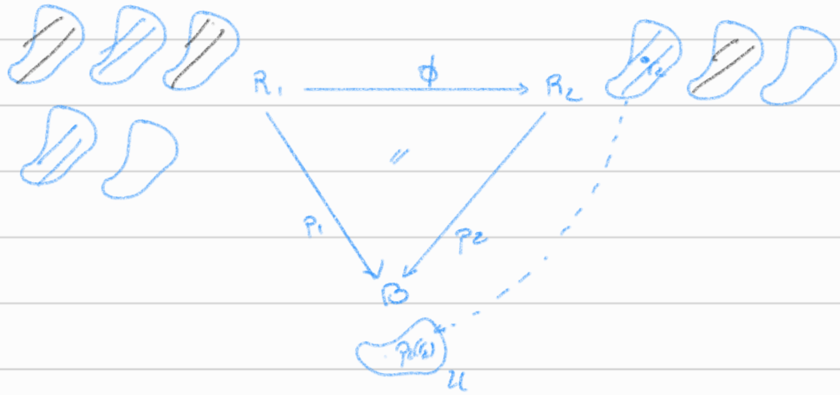
Si aplicamos ϕ a $\widehat{p_2\circ\alpha}$ tenemos que $\phi\circ(\widehat{p_2\circ\alpha})$ es un arco en R_2 que comienza en $\phi(r_0)$; es decir, α y $\phi\circ\widehat{p_2\circ\alpha}$ son dos arcos que comienzan en $\phi(r_0)$ y, además,

$p_2\circ\alpha = p_2\circ(\phi\circ(\widehat{p_2\circ\alpha})) = p_1\circ(\widehat{p_2\circ\alpha}) = p_2\circ\alpha$. Esto es p_2

Entonces, por unicidad del levantamiento de p_1 tenemos que $\alpha = \phi\circ\widehat{p_2\circ\alpha}$

entonces $r_2 = \alpha(1) = \phi(\underbrace{p_2 \circ \alpha(1)}_{\in R_1})$

Nos falta probar que todo punto de R_2 está regularmente recubierto:



Sea $r_2 \in R_2 \Rightarrow p_2(r_2) \in B$ y podemos elegir $\mathcal{U} \subset B$ abierto y arcoconexo con $p_2(r_2) \in \mathcal{U}$ regularmente recubierto por p_1 y p_2, es decir:

$\exists \{A_i\}_{i \in I} \subset R_1$, A_i abto, $A_i \cap A_t = \emptyset \ \forall i \neq t$, $p_2^{-1}(\mathcal{U}) = \biguplus_{i \in I} A_i$ y $p_2|_{A_i} : A_i \longrightarrow \mathcal{U}$ homeom

$\exists \{B_j\}_{j \in J} \subset R_2$, B_j abto, $B_j \cap B_t = \emptyset \ \forall j \neq t$, $p_2^{-1}(\mathcal{U}) = \biguplus_{j \in J} B_j$ y $p_2|_{B_j} : B_j \longrightarrow \mathcal{U}$ homeom

Observamos primero que $\phi^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \phi^{-1}(p_2^{-1}(\mathcal{U})) = (p_2 \circ \phi)^{-1}(\mathcal{U}) = p_1^{-1}(\mathcal{U}) = \biguplus_{i \in I} A_i$

Elijamos un A_{i_0} y veamos que $\phi(A_{i_0}) \subseteq B_{j_0}$ con $j_0 \in J$. Sabemos por la observación que

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j$$

y como $\mathcal{U}$ es arcoconexo y $p_1|_{A_{i_0}}$ es homeomorfismo A_{i_0} debe ser arcoconexo. Además:

$$\phi(A_{i_0}) = \phi(A_{i_0}) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} (\phi(A_{i_0}) \cap B_j)$$

que es, en particular, conexo, entonces $\phi(A_i) \cap B_j = \emptyset \ \forall j \in J \setminus \{j_0\} \Rightarrow \phi(A_{i_0}) \subset B_{j_0}$.

Así, si tomamos B_{j_0} como el abierto que contiene a r_2 entonces

$$\phi^{-1}(B_{j_0}) = \bigcup_{i \in I'} A_i$$

con $I' \subset I$. Además, $\phi|_{A_i} : A_i \to B_{j_0}$ es homeomorfismo por ser composición de dos homeomorfismos $\square$

Corolario

Sean (R_1, p_1), (R_2, p_2) dos recubridores de un espacio topológico B, $b_0 \in B$, $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ y $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$.

Si $p_{1*}(\Pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\Pi_1(R_2, r_2))$ entonces existe una aplicación recubridora de R_1 en R_2 $\phi : R_1 \longrightarrow R_2$ tal que $\phi(r_1) = r_2$

Definición

Decimos que (R, p) es un recubridor universal de un espacio topológico B si (R, p) es recubridor y simplemente conexo

Dos recubridores universales tienen que ser, necesariamente, isomorfos; es decir, son el mismo salvo homeomorfismos. Por esto, se suele llamar "el" recubridor universal.

El adjetivo universal es porque, si (R_2, p_2) es otro recubridor de B entonces (R, p) es recubridor de R_2.

Ejemplo

·) $\mathbb{R}$ es el recubridor universal de S^1

·) S^n es el recubridor universal de $\mathbb{R}P^n$

·) $\mathbb{R}^2$ es el recubridor universal de $S^1 \times S^1$

3. Existencia de espacios recubridores

Definición:

Sea B un espacio topológico entonces:

Para cada punto y cada entorno sup. hay un entorno más pequeño que es simp. conexo

i) Decimos que B es localmente simplemente conexo si todo punto $b \in B$ admite una base de entornos formada por simplemente conexos. Equivalentemente, si para cada abierto $O \subset B$ y $b \in O$ $\exists V \subset O$ un entorno de b simplemente conexo

Aquí no tengo que mirarlo en el total

Para cada punto existe un entorno que al mirarlo en el total es simp. conexo

ii) Se dice que B es semilocalmente simplemente conexo si todo punto $b \in B$ tiene un entorno $\mathcal{U}$ de b tal que

$$(i_{\mathcal{U}})_* : \pi_1(\mathcal{U}, b) \longrightarrow \pi_1(B, b)$$

es trivial.

Observación

i) Si B es localmente simplemente conexo $\Rightarrow$ B es semilocalmente simplemente conexo.

ii) Si B es simplemente conexo $\Rightarrow$ B es semilocalmente simplemente conexo

(iii) Si $\mathcal{U}$ es un entorno de $b \in B$ tal que $(i_{\mathcal{U}})_* : \pi_1(\mathcal{U}, b) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ es trivial entonces también es cierto que, si V es entorno de $b \in B$ y $V \subset \mathcal{U} \Rightarrow (i_V)_* : \pi_1(V, b) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ es trivial.

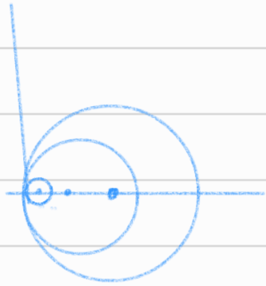
Ejemplos

i) Si B es un abierto de $\mathbb{R}^n$ entonces B es localmente simplemente conexo. Ejercicio Tuyo

ii) S^1 es localmente simplemente conexa. Ejercicio Tuyo

iii) S_n = circunferencia de $\mathbb{R}^2$ centrada en $(1/n, 0)$ de radio $\frac{1}{n}$ y vamos a estudiar

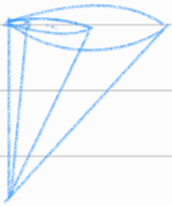
$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$



No cumple ninguna de las tres, pues no es semilocalmente simplemente conexo. Hecho.

(iv) Tomamos el conjunto de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \lambda, (x,y) = \lambda(a,b), (a,b) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n, \lambda \geq 0\}$$



Es simplemente conexo por ser contráctil pero no es localmente simplemente conexo.

Teorema

Sea B un espacio topológico (conexo y localmente arcoconexo, suposición en todo el tema). Fijado $b_0 \in B$ entonces equivalen:

(i) Para cada clase de conjugación de un subgrupo $H \leq \pi_1(B, b_0)$ existe un único recubridor (R, p), salvo isomorfismos de recubridores, y un punto $r_0 \in R$ tal que $p(r_0) = b_0$ y $H = p_*(\pi_1(R, r_0))$

(ii) B tiene un recubridor universal

(iii) B es semilocalmente simplemente conexo

Para que haya recubridor universal es necesario y suficiente que el espacio sea semilocalmente simplemente conexo.