1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$ (b) $\sum_{n\geqslant 0} z^{2n}$ (c) $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{n!}$ (d) $\sum_{n\geqslant 0} \left(3+(-1)^n\right)^n z^n$

(e) $\sum_{n\geqslant 0} (n+a^n) z^n$ $(a\in\mathbb{R}^+)$ (f) $\sum_{n\geqslant 0} a^{n^2} z^n$ $(a\in\mathbb{C})$

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$. Para ello, identificamos $\alpha_n = \frac{n!}{n^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y aplicamos el criterio del cociente para $\{\alpha_n\}$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)!\; n^n}{n!\;(n+1)^{n+1}} = (n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{\cancel{(n+1)}\;(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Donde sabemos que $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\} \longrightarrow \frac{1}{e}$. Luego $R=e$

b) En este caso, $\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ donde $\alpha_n = 1$ si y solo si n es par de donde vemos que, por la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\} = \left\{\sqrt[n]{1^n}\right\} \longrightarrow 1$$

el radio de convergencia es $R=1$.

c) En este caso, es fácil ver que $\sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!} = \sum_{k\geq 0} \alpha_k z^k$ donde $\alpha_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq n! \text{ para algún } n\in\mathbb{N} \\ 2^n & \text{si } k = n! \text{ para algún } n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Podemos ahora estudiar el radio de convergencia usando la Fórmula de Cauchy-Hadamard.

$$\left\{\sqrt[k]{|\alpha_k|}\right\} = \left\{\sqrt[n!]{2^n}\right\} \longrightarrow \limsup\; 2^{\frac{n}{n!}} = 1$$

Luego $R=1$.

d) Tomamos $\alpha_n = (3+(-1)^n)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ luego $\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \limsup \sqrt[n]{(3+1^n)^n} = \limsup\; 3+1^n = 4$

Luego $R=\frac{1}{4}$.

e) Tomando $\alpha_n = n+a^n$ aplicamos el criterio del cociente.

$$\left\{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right\} = \left\{\frac{n+1+a^{n+1}}{n+a^n}\right\} = \left\{\frac{1}{n+a^n} + \frac{n+a^{n+1}}{n+a^n}\right\} \longrightarrow \lim\left\{\frac{1}{n+a^n}\right\}^{0} + \lim\left\{\frac{n+a^{n+1}}{n+a^n}\right\}$$

Pero $\lim \frac{n+a^{n+1}}{n+a^n} = \lim \frac{n}{n+a^n} + \frac{a^{n+1}}{n+a^n}$

- Si $a\leq 1$

$$\left.\begin{aligned} &\lim \frac{n}{n+a^n} = 1 \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &\lim \frac{a^{n+1}}{n+a^n} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right\} \longrightarrow 1$$

Luego $R=1$

· Si $a>1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim \frac{n}{n+a^n}=0 \\ \lim \frac{a^{n+1}}{n+a^n}=a\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right\} \longrightarrow a$$

Luego $R=\cancel{a}\ \frac{1}{a}$

f) Distinguimos casos en función de a tomando $\alpha_n=a^{n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

· Si $|a|<1$ por la fórmula de Cauchy-Hadamard.

$$\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}=\left\{\sqrt[n]{|a^{n^2}|}\right\}=\left\{\sqrt[n]{|a|^{n^2}}\right\}=\left\{|a|^n\right\}\longrightarrow 0$$

Luego $R=\infty$

· Si $|a|>1$, por la fórmula de Cauchy-Hadamard, $R=0$

· Si $|a|=1$ usamos el criterio del cociente.

$$\left\{\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\right\}=\left\{\left|\frac{a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}}\right|\right\}=\left\{\left|\frac{a^{n^2+2n+1}}{a^{n^2}}\right|\right\}=\left\{\left|\frac{\cancel{a^{n^2}}\cdot a^{2n}\cdot a}{\cancel{a^{n^2}}}\right|\right\}=\left\{|a^{2n}\cdot a|\right\}=\left\{|a^{2n}|\cdot|a|\right\}\longrightarrow 1$$

Luego $R=1$

2. Conocido el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

(a) $\sum_{n\geqslant 0} n^k\alpha_n z^n$ $(k\in\mathbb{N}$ fijo$)$ (b) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\alpha_n}{n!}z^n$

a) Como k es fijo, usaremos $\beta_n=n^k\alpha_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y aplicaremos el criterio del cociente sabiendo que $R=\frac{1}{\lambda}$ es el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0}\alpha_n z^n$

Es mejor el criterio de la raíz

$$\left\{\frac{(n+1)^k\alpha_{n+1}}{n^k\alpha_n}\right\}\longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\cdot\frac{(n+1)^k}{n^k}=\lambda\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k=\lambda$$

Luego $R=R'$ donde R' es el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} n^k\alpha_n z^n$

b) Esta vez $\beta_n=\frac{\alpha_n}{n!}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ donde aplicando el criterio del cociente.

¡Criterio de la raíz!

$$\left\{\frac{\alpha_{n+1}\ n!}{(n+1)!\ \alpha_n}\right\}=\left\{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\cdot\frac{1}{n+1}\right\}$$

Donde estudiamos casos.

· Si $\lambda<\infty \Rightarrow \limsup\left\{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right\}=0$

· Si "$\lambda=\infty$" $\Rightarrow$ no podemos determinarlo ¿?

Por tanto, la serie tiene radio de convergencia $R'=\infty$ si $R>0$

3. Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

Sea $\sum_{n\geq 0} \alpha_n (z-a)^n$ una serie de potencias y $\Delta = \{n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \mid \alpha_n \neq 0\}$. Desarrollamos por casos.

·) Si Δ es infinito, vamos a ver que $\alpha_n(z-a)^n = f_n(z)$ no converge uniformemente en $\mathbb{C}$, para ello, basta encontrar $\{z_n\}$ sucesión de números complejos tal que $\{f_n(z_n)-f(z_n)\}$ no converja a 0 pues en ese caso, $\{f_n\}$ no convergerá uniformemente a la función nula en $\mathbb{C}$.

Por ejemplo, basta tomar $z_n = a + \frac{1}{\sqrt[n]{|\alpha_n|}}$ pues de esta forma sabemos que para cada $n\in\mathbb{N}$ $\{f_n(z_n)\} = \{\frac{\alpha_n}{|\alpha_n|}\} = \{1\}$. luego $\{f_n(z_n)-f(z_n)\} \not\longrightarrow 0$ entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a 0; y de esta manera $\sum_{n\geq 0}\alpha_n(z-a)^n$ no converge uniformemente en todo el plano

· Si Δ es finito $\exists m\in\mathbb{N} \mid \sup\Delta\leq m$ luego $\sum_{n\geq 0} \alpha_n(z-a)^n$ converge a $\sum_{n=0}^{m}\alpha_n(z-a)^n$ que es un polinomio que está perfectamente definido en $\mathbb{C}$

4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \qquad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$$

Estudiamos la convergencia absoluta, es decir, fijado $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, $f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ de donde buscamos probar que $|f_n(z)|$ converge. Como $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ es fijo estamos ante una serie geométrica que sabemos que converge si y solo si $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$ y esto se cumple si y solo si $\operatorname{Re} z>0$ (desarrollando la desigualdad).

Por tanto, la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolutamente en $\Delta = \{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z>0\}$. Veamos que no converge absolutamente en $\mathbb{C}\setminus\Delta\cup\{-1\}$, lo cual es trivial por ser, fijado $z\in\mathbb{C}\setminus\Delta\cup\{-1\}$ una geométrica luego no converge absolutamente en $\mathbb{C}\setminus\Delta\cup\{-1\}$

Veamos ahora la convergencia uniforme; para ello, sea $K\subset\Delta$ compacto, como $\varphi: \mathbb{C}\setminus\{-1\}\longrightarrow\mathbb{C}$ es continua y la imagen por una función continua de un compacto es un compacto entonces $\varphi(K)$ es compacto y $\varphi(K)\subset\varphi(\Delta) = D(0,1)$. Como ya hemos estudiado la serie geométrica y sabemos que presenta convergencia uniforme en cada compacto contenido, entonces $\sum_{n\geq 0}\varphi(z)^n$ conv unif en $\varphi(K)$ de donde $\sum_{n\geq 0} f_n$ conv. unif en K.

Por último, veamos que no hay convergencia uniforme en todo Δ. Para ello, basta encontrar $\{z_n\}$ sucesión de números complejos tq $z_n \in \Delta$ $\forall n \in \mathbb{N}$ cumpliendo que $\{f_n(z_n) - f(z_n)\} \not\to 0$ sabiendo que, en este caso, $f(z) = 0$ $\forall z \in \Delta$. Tenemos que ver que $|f_n(z_n)| \not\to 0$

Tomando $z_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f_n(z_n) = \left(\frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1}\right)^n = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n = \left(\frac{1}{1+n} - \frac{n}{1+n}\right)^n$

que sabemos que $\lim |f_n(z_n)| = 1$ luego no converge uniformemente a 0

¡Pensar en la geométrica!

Sea $A \subset H$, A no necesariamente compacto

Sabemos:

i) Dado $B \subset D(0,1)$ $\sum_{n \geq 0} w^n$ c. unif en $B \iff \sup\{|z| : z \in B\} = r < 1$

$\sum_{n \geq 0} (\varphi(z))^n$ conv unif en $A \iff \sup\{|\varphi(z)| : z \in A\} < 1$ y esto está contenido en un compacto

$\hookrightarrow \varphi(A) \subset \bar{D}(0,r)$ y al tomar la imagen inversa $A \subset \varphi^{-1}(\bar{D}(0,r)) = \bar{D}(0, n) \subset H$