1. Sea $R = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Demuestra que existe una aplicación recubridora $p : R \longrightarrow \mathbb{S}^1$. ¿Se puede levantar al recubridor la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(x, y) = (y, x)$?

Sabemos que $\begin{aligned} p_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S} \\ x &\longmapsto (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \end{aligned}$ es recubridora y como $(-1,1) \approx \mathbb{R}$, consideramos

el homeomorfismo $h : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tenemos que $p_0 \circ h : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es recubridora,

podemos tomar $h(t) = tg\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ $\forall t \in (-1,1)$

Por tanto, tenemos ya probada la existencia de dicha aplicación recubridora.

Para comprobar si existe dicho levantamiento vamos a usar el T^{ma} general del levantamiento.

Tomamos por $x_0 = (0,1) \in \mathbb{S}^1$ de forma que $f(x_0) = (1,0) \in \mathbb{S}^1$ y por $r_0 = 0$, donde tenemos que

$$h(r_0) = \frac{\pi}{2} tg(0) = 0$$

$$p_0(h(r_0)) = p_0(0) = (1,0)$$

Por otro lado, tenemos que $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ son simplemente conexos luego $\Pi_1((-1,1),0) = \{[\varepsilon_0]\}$ entonces $(p_0 \circ h)_*(\Pi_1((-1,1),0)) = [\varepsilon_{(1,0)}]$. Sin embargo, $f_*(\Pi_1(\mathbb{S}^1,(0,1))) = f_*(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ pues si tomamos como

$$\Pi_1(\mathbb{S}^1,(0,1)) = \{[\alpha]^u : \alpha(t) = (\cos(2\pi t + \tfrac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(2\pi t + \tfrac{\pi}{2}))\} \approx \mathbb{Z}$$

tenemos que $f_*([\alpha]) = f \circ \alpha$ luego $(f \circ \alpha)(t) = f\left(\cos \frac{4\pi t + \pi}{2}, \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi t + \pi}{2}\right)\right) = \left(\operatorname{sen}(2\pi t + \frac{\pi}{2}), \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})\right)$

$$= (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$$

de donde ya podemos deducir claramente que $f_*(\Pi_1(\mathbb{S}^1,(0,1))) = \{[\beta]^u : \beta(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), u \in \mathbb{Z}\}$

Deducimos entonces que, por el T^{ma} general del levantamiento que no existe el levantamiento pedido.

2. Dada la aplicación recubridora estándar $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)),$$

determina si la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(x, y) = (x, |y|)$ puede ser levantada al recubridor. Y, en tal caso, calcula sus levantamientos.

De nuevo, buscamos usar el teorema general del levantamiento. Antes de nada, debo recalcar que f es continua porque sus componentes lo son y está bien definida pues $\forall (x,y) \in \mathbb{S}^1$ $f(x,y) \in \mathbb{S}^1$, de hecho, $f(x,y) \in \mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

Tomamos ahora $x_0 \in \mathbb{S}^1$ dado por $(1,0)$ y $r_0 \in \mathbb{R}$ dado por $r_0 = 0$; claramente se cumplen las hipótesis del teorema pues $f(x_0) = (1,0) \in \mathbb{S}^1$ y $p(r_0) = (1,0)$

Por tanto, basta y sobra comprobar si $f_*(\Pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0))) \subseteq p_*(\Pi_1(\mathbb{R},0))$. Ahora bien, sabemos que:

$$\Pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0)) = \{[\alpha]^u : \alpha(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

$$\Pi_1(\mathbb{R},0) = \{[\varepsilon_0]\} \cong \{0\}$$

Como $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ tenemos que $(f \circ \alpha)(t) = f(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) = (\cos 2\pi t, |\operatorname{sen} 2\pi t|)$ luego

$$f_*(\Pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0))) = \{[\beta]^u : \beta(t) = (\cos 2\pi t, |\operatorname{sen}(2\pi t)|), t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{Z}\}$$

Veamos que $[\beta]=[\varepsilon_{(1,0)}]$, pero esto es claro porque $f(\mathbb{S}^1)$ es contráctil luego podemos ya deducir que $f_*(\pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0)))\cong\{0\}$.

Ahora bien, como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo y por el T^{ma} de monodromía $p_*:\pi_1(\mathbb{R},0)\longrightarrow\pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0))$ es inyectivo tenemos que $p_*(\pi_1(\mathbb{R},0))\cong\{0\}$.
Tenemos entonces que existe ese levantamiento.

3. ¿Existe una aplicación recubridora desde $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$?

Veamos que no puede existir dicha aplicación $p:\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{S}^1$. Pues si existiera, tendríamos que $(\mathbb{S}_1\times\mathbb{S}_1,p)$ sería recubridor de $\mathbb{S}^1$ y, por otro lado, $(\mathbb{R},p_0)$ donde $p_0(t)=(\cos 2\pi t,\operatorname{sen}2\pi t)$ es otro recubridor de $\mathbb{S}^1$, pero $(\mathbb{R},p_0)$ es el recubridor universal de $\mathbb{S}^1$, entonces $(\mathbb{R},p_0)$ es recubridor de $\mathbb{S}_1\times\mathbb{S}_1$ lo cual no es cierto.
La idea intuitiva es que tendríamos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ tienen que parecerse localmente, pero ya vimos que ningún abierto de $\mathbb{R}^2$ puede ser homeomorfo a ningún abierto de $\mathbb{R}$.

4. Determina, salvo isomorfismos, todos los recubridores del cilindro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$.

Sabemos del tema 1 que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ es $\mathbb{Z}$ que tiene como subgrupos a los siguientes

$$H_0\cong\{0\},\ H_1\cong\mathbb{Z},\ H_n\cong n\mathbb{Z}\ \text{ con } n\in\mathbb{Z}$$

Además, sabemos por una consecuencia de un teorema de este tema que, a lo sumo, existe un único, salvo isomorfismos, recubridor de forma que la imagen p_* del grupo fundamental corresponde a un subgrupo de $\mathbb{Z}$.
Veamos cada caso sabiendo antes que el generador del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ es

$$\alpha(t)=(\cos 2\pi t,\operatorname{sen}2\pi t,0)\longrightarrow\pi_1(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R},(1,0,0))$$

Distinguimos casos:

•) $H_0=\{0\}$, buscamos un recubridor (R,p) de forma que $p_*(\pi_1(R,r))\cong\{0\}$, lo intuitivo es tomar el recubridor universal. Es decir, tomamos $R=\mathbb{R}^2$ y $p:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ como $p(x,y)=(\cos 2\pi x,\operatorname{sen}2\pi x,y)$ de forma que, tomando $r=(0,0)$ tenemos que $p_*(\pi_1(\mathbb{R}^2,(0,0)))=p_*(\{[\varepsilon_{(0,0)}]\})=\{[\varepsilon_{(1,0)}]\}\cong\{0\}$.

•) $H_1=\mathbb{Z}$, buscamos un recubridor (R,p) de forma que $p_*(\pi_1(R,r))\cong\mathbb{Z}$; en este caso, como $id_{\mathbb{S}_1\times\mathbb{R}}$ es homeomorfismo y recubridora tenemos que $(\mathbb{S}_1\times\mathbb{R},id_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}})$ es el recubridor que buscamos.

•) $H_k \cong k\mathbb{Z}$. En este caso, dado $k \in \mathbb{Z}$, lo hacemos para el caso positivo pues para el negativo es análogo entendiéndolo como un cambio de sentido en los arcos. Intuitivamente, parece que lo que hacemos es dar k vueltas a $\mathbb{S}^1$ a la altura $y \in \mathbb{R}$. Por lo que, intuitivamente parece que el espacio recubridor será $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Cabe aclarar que, por una razón análoga al ejercicio anterior no puede serlo $\mathbb{S}^1$.

Formalmente, vamos a ver que el recubridor que buscamos es $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k)$ donde p_k es la aplicación recubridora $p_k(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, y) = (\cos k\theta, \operatorname{sen} k\theta, y)$, por ser producto de recubridoras.

$$[p_k(\alpha(t))] = [p_k(\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x, 0)] = [(\cos 2k\pi x, \operatorname{sen} 2k\pi x, 0)] = [\alpha]^k$$

por tanto, $p_{k_*}(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,0))) = \{[\alpha]^{kn} : \alpha(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t, 0), t \in [0,1], n \in \mathbb{Z}\} \cong k\mathbb{Z}$.

5. Demuestra que si $p : R \longrightarrow B$ es un homeomorfismo local con R compacto y B Hausdorff (y conexo), entonces p es una aplicación recubridora.

Antes de nada, debemos entender el enunciado y por tanto, la definición de homeomorfismo local. Decimos que $p : R \longrightarrow B$ es un homeomorfismo local cuando $\forall r \in R$ $\exists \mathcal{U} \subset R$ entorno abierto de r tal que $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow f(\mathcal{U})$ es homeomorfismo.

Debemos probar que p es continua, sobreyectiva y que cada punto está regularmente recubierto.

•) p es continua; para ello, sea $r \in R$ y $V \subset B$ tal que $f(r) \in V$; por definición de homeomorfismo local $\exists \mathcal{U} \subset R$, con $r \in \mathcal{U}$, abierto tal que $f|_{\mathcal{U}}$ es homeomorfismo, luego $f(r) \in f(\mathcal{U})$ abierto. Considerando $W = f(\mathcal{U}) \cap V$ tenemos W entorno de $f(r)$ que por el homeomorfismo local $(f|_{\mathcal{U}})^{-1}$ tenemos que $(f|_{\mathcal{U}})^{-1}(W) \subset \mathcal{U}$ con $r \in (f|_{\mathcal{U}})^{-1}(W)$ y $(f|_{\mathcal{U}})^{-1}(W)$ abierto.

•) p es sobreyectiva.

Como R es abierto tenemos que $p(R)$ es abierto por ser p abierta; además, $p(R)$ es compacto por ser p continua y R compacto.

Como $p(R)$ es compacto y B es Hausdorff tenemos que $p(R)$ es cerrado. Por tanto, $p(R) \subset B$ es abierto y cerrado dentro de un conjunto conexo, entonces $p(R) = \emptyset$ ó $p(R) = B$, pero $R \neq \emptyset$ por asunción.

•) Veamos ahora que todo punto admite un entorno regularmente recubierto; para ello, veremos que dado $b \in B$ se cumple que $p^{-1}(b)$ es finita.

Sea $b \in B$, supongamos que $p^{-1}(b)$ no fuera finita, en ese caso, $\exists r_0 \in R$ y $\{r_n\} \subset R$ tal que $\{r_n\} \longrightarrow r_0$ de forma que $p(r_n) = b_0$.

Ahora bien, como p es continua tenemos que $p(r_n) \longrightarrow p(r_0)$ de donde $p(r_0)=b$ lo cual es una contradicción pues $\exists O \subset R$ con $r_0 \in O$ y $p|_O : O \longrightarrow p(O)$ homeomorfismo, es decir, inyectivo luego $r_n \notin O$ $\forall n \in \mathbb{N}$!!! porque $r_n \longrightarrow r_0$.
Por tanto, $p^{-1}(b)$ es finito.

Tomamos ahora $b_0 \in B$ y sabemos que $p^{-1}(b_0) = \{r_1, \ldots, r_n\}$ luego $\exists O_{r_1}, \ldots, O_{r_n} \subset R$ entornos abiertos con intersección vacía de forma que $\bigcap_{i=1}^{n} p(O_{r_i}) \neq \emptyset$ y es abierto. $\square$

7. Sea X conexo y localmente arcoconexo con grupo fundamental finito. Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones continuas cumpliendo que $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ para todo $x \in X$, prueba que existe $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\cos(h(x)) = f(x)$ y $\operatorname{sen}(h(x)) = g(x)$ para cada $x \in X$.

Como $f(x)^2+g(x)^2=1$ tenemos que $(f(x), g(x)) \in S^1$; sea ahora $F(x) = (f(x), g(x))$ $\forall x \in X$ nos encontramos en la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "F"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "p"'] & S^1 \end{tikzcd} \qquad p(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$$

Lo que se nos pide probar, de forma camuflada, es que F admite un levantamiento, para ello, basta probar que $F_*(\Pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\Pi_1(\mathbb{R}, r_0))$ con $p(r_0) = F(x_0)$.
Como $\#\Pi_1(X, x_0) < \infty$ tenemos que $F_*(\Pi_1(X, x_0)) \subseteq \Pi_1(S^1, F(x_0)) \cong \mathbb{Z}$ y que $F_*(\Pi_1(X, x_0))$ es finito, pero como el único subgrupo de $\mathbb{Z}$ que tiene cardinal finito es el trivial entonces $F_*(\Pi_1(X, x_0))$ es trivial.
Como $p_*(\{[\varepsilon_{r_0}]\}) \cong \{0\}$ tenemos que existe ese levantamiento. Es trivial comprobar las últimas condiciones.

6. Sea $p:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo local tal que para todo $r>0$ se tiene que $p^{-1}(\overline{B}(0,r))$ es compacto. Demuestra que p es un homeomorfismo.

Como p es homeomorfismo local tenemos que es una aplicación continua y abierta. Debemos ver que es sobreyectiva y que todo punto admite un entorno abto reg recubierto.

Del enunciado tenemos que, $\forall r>0$ $p_r: p^{-1}(\overline{B}(0,r)) \longrightarrow \overline{B}(0,r)$ es una aplicación recubridora pues $\overline{B}(0,r)\subset\mathbb{R}^n$ es Hausdorff $\forall r>0$ y el ejercicio anterior nos da que p_r es recubridora.

Veamos la sobreyectividad de p; para ello, vamos a probar que $p(\mathbb{R}^n)$ es abierto y cerrado, pero como p es abierta tenemos que $p(\mathbb{R}^n)$ es abierto. Sea ahora $x_0\in\overline{p(\mathbb{R}^n)}$, $r>\|x_0\|$ y $\{x_n\}\subset p(\mathbb{R}^n) \mid \{x_n\}\longrightarrow x_0$; como por hipótesis $p^{-1}(\overline{B}(0,r))$ es compacto tenemos que $\exists\{y_n\}\subset p^{-1}(\overline{B}(0,r)) \mid p(y_n)=x_n$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{y_n\}\longrightarrow y_0$ pues es así salvo tomar una parcial al ser $p^{-1}(\overline{B}(0,r))$ compacto e $\{y_n\}$ acotada.

Ahora bien, como p es continua $\{p(y_n)\}\longrightarrow p(y_0)$ y $p(y_n)=x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ luego, por unicidad del límite tenemos que $p(y_0)=x_0 \Rightarrow x_0\in p(\mathbb{R}^n)$ y $\overline{p(\mathbb{R}^n)}\subset p(\mathbb{R}^n)\Rightarrow p(\mathbb{R}^n)$ cerrado.

por tanto p es sobreyectiva.

Supongo que es recubr.

Para ver que es recubridora vamos a ver que, si tomamos $x_0\in\mathbb{R}^n \Rightarrow p^{-1}(x_0)$ es finita. Supongamos que no lo fuera, entonces $\exists\{z_n\}\subseteq\mathbb{R}^n \mid p(z_n)=x_0$ y $\{z_n\}\longrightarrow z_0$. Como p es continua y $p(z_n)=x_0$ tenemos que $p(z_0)=x_0$ lo cual es una contradicción pues $\exists O\subset\mathbb{R}^n$ abierto tal que $z_0\in O$ y $p|_O: O\longrightarrow p(O)$ es homeomorfismo luego es inyectiva. Ahora bien, como $p(z_n)=x_0$ tenemos que $z_n\notin O$ $\forall n\in\mathbb{N}$, pero $\{z_n\}\longrightarrow z_0$!!

Por tanto, $p^{-1}(x_0)=\{z_1,\dots,z_m\}$ con $m\in\mathbb{N}$ y $\exists O_{z_1},\dots,O_{z_m}$ entornos abiertos de $z_1,\dots,z_m$ con $p|_{O_{z_i}}: O_{z_i}\longrightarrow p(O_{z_i})$ homeomorfismo. Claramente $p(O_{z_i}\cap O_{z_j})\neq\emptyset$ pues $x_0\in p(\bigcap_{i=1}^{n} O_{z_i})$ y como es intersección finita es abierto que, por construcción es reg. recubierto.

Usando ahora el ejercicio 10 de la relación anterior tenemos que p es homeomorfismo.

8. Sean $p: X\longrightarrow Y$ y $f: Y\longrightarrow Z$ dos aplicaciones continuas tales que p y $f\circ p$ son aplicaciones recubridoras. Prueba que f es también una aplicación recubridora.

Para ver que f es recubridora debemos probar que es continua, sobreyectiva y que todo punto admite un abierto regularmente recubierto.

Como $f\circ p$ es recubridora entonces es sobreyectiva, de donde deducimos que f es sobreyectiva.

Mirar los del Agüia, es un ej larguísimo.

9. Sean $p_1 : X \longrightarrow Y$ y $p_2 : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones recubridoras. Prueba que si Z tiene recubridor universal, entonces $p_2 \circ p_1 : X \longrightarrow Z$ es una aplicación recubridora.

Supongamos que (R,p) es el recubridor universal de Z, entonces, recubre a (Y,p_2); es decir, existe un homomorfismo de recubridores ϕ_1 de (R,p) en (Y,p_2) y tenemos que R es recubridor universal de Y. De la misma manera existe ϕ_2 de (R,p) en (X,p_1) homomorfismo de recubridores donde R es recubridor universal de X.

Obteniendo que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & & R \arrow[dll, bend right, "\phi_2"'] \arrow[dl, "\phi_1"] \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p_1"'] & Y \arrow[r, "p_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

De donde vemos que $p_2 \circ p_1 \circ \phi_2 = p$. Entonces, por el ejercicio anterior $p_2 \circ p_1$ es recubridora.

10. Sean $p : R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora y $b_0 \in B$. Definimos la aplicación (correspondencia del levantamiento generalizada)

$$\begin{array}{rccl} \phi : & p^{-1}(\{b_0\}) \times \pi_1(B, b_0) & \longrightarrow & p^{-1}(\{b_0\}) \\ & (r, [\alpha]) & \longrightarrow & \hat{\alpha}_r(1) \end{array}$$

donde $\hat{\alpha}_r(s)$ es el levantamiento de $\alpha(s)$ con condición inicial $\alpha(0) = r$. Demuestra que:

a) ϕ está bien definida.

b) $\phi(r, [\varepsilon_{b_0}]) = r$, para cualquier $r \in p^{-1}(\{b_0\})$.

c) $\phi(\phi(r, [\alpha]), [\beta]) = \phi(r, [\alpha] * [\beta])$, para cualesquiera $r \in p^{-1}(\{b_0\})$ y $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B, b_0)$.

d) ϕ es sobreyectiva.

e) $\phi(r, [\alpha]) = r$ si y solo si $[\alpha] \in p_*(\pi_1(R, r))$.

f) El cardinal de $p^{-1}(\{b_0\})$ coincide con el cardinal de $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(R, r))$ (es decir, el índice de $p_*(\pi_1(R, r))$ como subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$).

a) Para ver que está bien definida debemos probar que la imagen no depende del representante, consideramos $r \in p^{-1}(\{b_0\})$ fijo pero arbitrario y sean $[\alpha] = [\beta]$ dos arcos homotópicos basados en r.

Por definición, $\phi(r, [\alpha]) = \hat{\alpha}_r(1)$ y $\phi(r, [\beta]) = \hat{\beta}_r(1)$ donde $\hat{\alpha}_r(s)$ es el levantamiento de α con condición inicial $\hat{\alpha}(0) = r$ y $\hat{\beta}_r(s)$ es el levantamiento de β con condición inicial $\hat{\beta}_r(0) = r$.

Como α y β son homotópicos sabemos que $\exists H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow B$ homotopía y usando que el levantamiento de una homotopía es una homotopía entre los levantamientos llegamos a que $[\hat{\alpha}_r] = [\hat{\beta}_r]$ y $\hat{\beta}_r(1) = \hat{\alpha}_r(1)$.

Otra forma es partiendo del siguiente diagrama, donde por el lema de unicidad del levantamiento, necesariamente son el mismo.

De esto tengo dudas porque $p \circ \hat{\alpha}_r \neq p \circ \hat{\beta}_r$ al ser $\alpha \neq \beta$.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "{\hat{\alpha}_r, \hat{\beta}_r}"] \arrow[r, "{\alpha, \beta}"'] & B \end{tikzcd}$$

b) Por definición de ϕ tenemos que $\phi(r, [\varepsilon_{b_0}]) = \hat{\varepsilon}_{b_0 r}(1)$, pero como por unicidad del levantamiento $\hat{\varepsilon}_{b_0 r} = \varepsilon_r$ tenemos que $\varepsilon_r(1) = r$.

c) Veamos cada parte:

·) Por definición se tiene que $\phi(r, [\alpha]) = \hat{\alpha}_r(1) \in p^{-1}(b_0)$, séase $\hat{\alpha}_r(1) = r_0$ entonces, $\phi(r_0, [\beta]) = \hat{\beta}_{r_0}(1) \in p^{-1}(b_0)$.

·) Basta ver que $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ entonces

$$\phi(r, [\alpha * \beta]) = \widehat{\alpha * \beta}_r(1)$$

pero

$$\widehat{\alpha * \beta}_r(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}_r(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \hat{\beta}_{\hat{\alpha}_r(1)}(s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

por tanto, se tiene lo pedido.

d) Basta considerar, para cada $r \in p^{-1}(b_0)$ el arco $[\varepsilon_{b_0}] \in \pi(B, b_0)$ de donde se deduce que

$$\phi((r_i)_{i\in I}, [\varepsilon_{b_0}]) = \{\hat{\varepsilon}_{r_i}(1) : i \in I\} = p^{-1}(b_0)$$

por lo que

$$p^{-1}(b_0) \subseteq \phi(p^{-1}(b_0) \times \pi_1(B, b_0))$$

de donde se deduce que es sobreyectiva pues por homotopías $\hat{\alpha}_r(1) \in p^{-1}(b_0)$ $\forall [\alpha] \in \pi_1(B, b_0)$ y $\forall r \in p^{-1}(b_0)$

e) Probamos la doble implicación

$\Rightarrow]$ Supongamos que $\phi(r, [\alpha]) = r$ con $[\alpha] \in \pi_1(B, b_0)$; por definición de ϕ se tiene que $r = \phi(r, [\alpha]) = \hat{\alpha}_r(1)$ donde $\hat{\alpha}_r$ es el único levantamiento de α con $\hat{\alpha}_r(0) = r$. Como $p \circ \hat{\alpha}_r = \alpha$ y $[\hat{\alpha}_r] \in \pi_1(R, r)$ luego $p_*([\hat{\alpha}_r]) \in p_*(\pi_1(R, r))$, pero $p_*([\hat{\alpha}_r]) = [p \circ \hat{\alpha}_r] = [\alpha]$.

$\Leftarrow]$ Supongamos ahora que $[\alpha] \in p_*(\pi_1(R, r))$; en particular, por el teorema de monodromía $[\alpha] \in \pi_1(B, b_0)$.

visto con restr. al codominio

Como p es recubridora y $[\alpha] \in p_*(\pi_1(R, r))$, por ser p_* sobreyectiva sabemos que $\exists\, \gamma \in \pi_1(R, r)$ con $p_*([\gamma]) = [\alpha]$; o lo que es lo mismo, $[p \circ \gamma] = [\alpha]$. luego $p \circ \gamma$ y α son iguales; tomando levantamientos tenemos que $\widehat{p \circ \gamma}_r = \hat{\alpha}_r$ con $\hat{\alpha}_r(0) = r$ y $\widehat{p \circ \gamma}_r(0) = r$ pues $\widehat{p \circ \gamma} = \gamma$.

Ahora bien, $\hat{\alpha}_r = \widehat{p \circ \gamma}_r \Rightarrow \phi(r, [\alpha]) = \hat{\alpha}_r(1) = \hat{\gamma}(1) = r$

Creo que la idea es buena pero la narrativa horrible.

f)

11. Sea X un espacio topológico (conexo y localmente arcoconexo), G un grupo de homeomorfismos de X y $X/\mathcal{R}_G$ el espacio topológico cociente dado por la relación de equivalencia:

$$x\,\mathcal{R}_G\,y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\varphi \in G:\ y = \varphi(x),$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Demuestra que la aplicación proyección $\pi : X \longrightarrow X/\mathcal{R}_G$ es recubridora si y solo si para cada $x \in X$ existe un entorno suyo U_x tal que $\varphi(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $\varphi \in G \backslash \{Id_X\}$.

Deduce que, además, $\varphi : (X, \pi) \longrightarrow (X, \pi)$ es un isomorfismo de recubridores si y solo si $\varphi \in G$.

12. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define $f_n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $f_n(x, y) = (x + 2n, (-1)^n y)$. Utiliza el ejercicio anterior para demostrar que:

a) $G = \{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ y para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe un entorno suyo U_x tal que $f_n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) La proyección $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$ es una aplicación recubridora de $\mathbb{R}^2$ en la cinta de Moebius $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$.

a) Veamos que G es un grupo de homeomorfismos:

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n es homeomorfismo

-) Claramente es continua, inyectiva y sobreyectiva, esto último por serlo componente a componente.

-) Por el punto anterior $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists f_n^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (x-2n, (-1)^n y)$

que vuelve a ser continua.

ii) G es un grupo

-) Cerrado para la composición: Sean $n, m \in \mathbb{N}$ $f_n \circ f_m (x,y) = f_n(x+2m, (-1)^m y)$
$= (x + 2(m+n), (-1)^{m+n} y) = f_{n+m}(x,y)$

- Existencia de neutro: $f_0 \circ f_n = f_0(x+2n, (-1)^n y) = (x+2n, (-1)^n y) = f_n$

- Existencia de simétrico; dado $n \in \mathbb{N}$ $f_n \circ f_{-n} = f_0 = id_{\mathbb{R}^2}$

- La asociatividad es evidente.

Veamos ahora que para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe un entorno suyo $\mathcal{U}_x$ tal que $f_n(\mathcal{U}_x) \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Podemos tomar, por ejemplo, $\mathcal{U}_x = B((x,y), n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pues $f_n(B((x,y),n)) = B((x+2n, (-1)^n y), n)$ que cumple lo pedido.

b) Gracias a lo probado en a) este apartado es consecuencia directa del ejercicio 11.

13. Para cada $n, m \in \mathbb{Z}$ se define $f_{n,m} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como:

$$f_{n,m}(x, y) = (x, (-1)^n y) + 2(n, (-1)^n m).$$

Utiliza el ejercicio 11 para demostrar que:

a) $G = \{f_{n,m} \,/\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ y para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe un entorno suyo U_x tal que $f_{n,m}(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ con $(n, m) \neq (0, 0)$.

b) La proyección $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$ es una aplicación recubridora de $\mathbb{R}^2$ en la botella de Klein $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$.

Procedemos como en el ejercicio anterior:

a) Veamos que G es un grupo de homeomorfismos.

i) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $f_{n,m}$ es homeomorfismo

-) Claramente es continua como suma de continuas

-) Es sobreyectiva por serlo ya el primer sumando

-) Es inyectiva pues dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f_{n,m}(x_1, y_1) = f_{n,m}(x_2, y_2)$ entonces $(x_1 + 2n, (-1)^n y_1 + 2m) = (x_2 + 2n, (-1)^n y_2 + 2m)$ si y solo si

$x_1 + 2n = x_2 + 2n \iff x_1 = x_2$

$(-1)^n y_1 + 2m = (-1)^n y_2 + 2m \iff (-1)^n y_1 = (-1)^n y_2 \iff y_1 = y_2$

- $\exists f_{u,m}^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f_{u,m}^{-1}(x,y) = (x, (-1)^u y) - 2(u, (-1)^u m)$ que es claramente continua.

ii) La demostración de ser un grupo es análoga al ejercicio anterior.

Veamos que $U_x = B((x,y), \min\{u,m\})$ $\forall u,m \in \mathbb{N}$ es entorno de (x,y) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $U_x \cap f(U_x) = \emptyset$.

$$f(B((x,y), \min\{u,m\})) = B((x+2u, (-1)^u(y+2m)), \min\{u,m\})$$

que cumple las condiciones.

b) Gracias a lo probado en a) este apartado es consecuencia directa del ejercicio 11.

14. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow [0,1]$.

   b) Existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

   c) El semiplano $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$ es el recubridor universal de la bola cerrada punteada $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   d) Si X es un espacio topológico (conexo y localmente arcoconexo) con grupo fundamental finito y $p : X \longrightarrow X$ es una aplicación recubridora, entonces p es un homeomorfismo.

a) Falso; pues en ese caso, el teorema de monodromía nos dice que $p_*(\mathbb{S}^1) \leq \Pi([0,1]) \cong \{0\}$ y estaríamos diciendo que $\mathbb{Z} \leq \{0\}$!!!

b) Falso; pues si fuese cierto tendríamos que $p_*(\Pi_1(\mathbb{RP}^2)) \leq \Pi_1(\mathbb{S}^1)$ de donde $\mathbb{Z}_2 \leq \mathbb{Z}$; contradicción, pues el único subgrupo finito de $\mathbb{Z}$ es $\{0\}$

c) Cierto; basta tomar la aplicación $p : X \longrightarrow Y$ dada por $p(x,y) = e^{y}(\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ que es recubridora; claramente es continua y sobreyectiva. Para ver la última condición es intuitivo que es cierto (me da pereza escribirlo)

d) Cierto; basta probar que es inyectiva, sean $x, y \in X$ con $p(x) = p(y)$, como X es conexo y localmente arcoconexo es, en particular, arcoconexo; de esta forma $\exists \alpha : [0,1] \longrightarrow X$ arco que une x e y.

Ahora bien, $p \circ \alpha$ es un lazo basado en $p(x)$ en X.

Por otra parte, el teorema de monodromía nos dice que $p_*(\Pi_1(X,x)) \leq \Pi_1(X, p(x))$; de hecho, como $\Pi_1(X,x)$ es finito se tiene la igualdad. En ese caso, ha de existir $\beta \in \Omega(X,x)$ de forma que $p_*(\beta) = p \circ \alpha$ y por tanto β y α son levantamientos de $p \circ \alpha$ con $\beta(0) = \alpha(0)$ luego $\beta = \alpha$ y $x = y$.