ÍNDICE

Tema 4. Compacidad

1. Acotación

1.1 Conjuntos acotados en un espacio métrico

Sea E un espacio métrico, $A \subset E$; decimos que A está acotado cuando está incluido en una bola (no en un abierto). Por tanto

$$A \text{ acotado} \Rightarrow \forall x \in E \ \exists r \in \mathbb{R}^+ / A \subset B(x,r)$$

Como primeros ejemplos tenemos que:

1. Todo subconjunto finito de E está acotado
2. $x_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\}$ sucesión acotada cuando $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ acotado $\Leftrightarrow \exists x \in E : \{d(x_n, x)\}$ acotada
3. Como consecuencia de (2.), tenemos que toda sucesión convergente está acotada.

Veamos que la acotación no es una noción topológica:

Sea d una distancia en un conjunto no vacío E. $\boxed{\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}}$ $\forall x,y \in E$ es una distancia en E, equivalente a d donde no todo conjunto acotado cumple la definición según la topología usual.

1.2. Teorema de Bolzano - Weierstrass

Sea X un espacio normado, $A \subset X$, tenemos que A acotado $\Leftrightarrow \exists M > 0 : \|x\| < M$ $\forall x \in A$. Por tanto, dos normas equivalentes dan lugar a los mismos conjuntos acotados. En $\mathbb{R}^N$ podemos usar cualquier norma cuya topología sea la usual.

Si ampliamos a que X sea un producto de espacios normados, $A \subset X \Rightarrow A$ acotado $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{x(k) : x \in A\}$ acotado $\forall k \in \Delta_N$.

TEOREMA DE BOLZANO - WEIERSTRASS Generalización de $\mathbb{R}$

Toda sucesión acotada de $\mathbb{R}^N$ admite una parcial convergente

$\underline{N=1}$ Cierto por Teorema Bolzano Wierstrass en $\mathbb{R}$

Supongamos se cumple en $\mathbb{R}^N$, sea $\{x_n\}$ acotada con $x_n \in \mathbb{R}^{N+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Definimos

$y_n(k) = x_n(k)$ $\forall k \in \Delta_N$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$y_n \in \mathbb{R}^N$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{y_n\}$ acotada $\overset{HDI}{\Rightarrow}$ admite una parcial convergente $\{y_{\tau(n)}\}$ parcial de $\{y_n\}$ convergente

Tomamos $\{x_{\tau(n)}(N+1)\}$ sucesión acotada, aplicando $N=1$ admite una parcial convergente $\{x_{\tau(\delta(n))}(N+1)\}$

No tiene xq converger

cambiamos n por una función de n, o sea, una composición

Llamamos $\sigma = \tau \circ \delta$ que por ser estrictamente crecientes ambos es estrictamente creciente

$\{x_{\tau(\delta(n))}(N+1)\} = \{x_{\sigma(n)}(N+1)\}$ converge $\Rightarrow$ La parcial que buscamos es $\{x_{\sigma(n)}\}$

Las primeras n componentes es parcial de $\{y_{\sigma(n)}\}$
y la $n+1$-ésima es $\{x_{\sigma(n)}(N+1)\}$

2. Compacidad

Diremos que un espacio métrico es compacto (secuencialmente) cuando toda sucesión de puntos de E (una cola) admite una parcial convergente (esto implica que el límite pertenece a E)

Si tomamos $A \subset E$, decimos que A es compacto cuando A es un espacio métrico compacto con la distancia inducida, es decir, cuando toda sucesión de puntos de A admite una parcial que converge a un punto de A.

Esta propiedad presenta dos condiciones necesarias. Un conjunto $A \subset E$ espacio métrico, si A es compacto, A debe ser cerrado y acotado.

Por último si tomamos $E = \mathbb{R}^N$, se cumple que si $A \subset \mathbb{R}^N \Rightarrow A$ compacto $\Longleftrightarrow A$ cerrado y acotado.

2.1 Teorema de Weierstrass y Hausdorff

Teorema de Weierstrass

Sean E, F espacios métricos, $f: E \longrightarrow F$ continua. Se tiene:

si E compacto $\Rightarrow f(E)$ compacto

La imagen por una función continua de un compacto es compacto.

La demostración consiste en tomar una sucesión de E y ver que $\lim f(x_n) \in f(E)$ $\forall \{x_n\}$

Como consecuencia de este teorema, si E es un espacio métrico compacto y $f: E \to \mathbb{R}$ continua.

Se cumple que $\exists\, u, v \in E \;/\; f(u) \leq f(x) \leq f(v) \;\forall x \in E$. Es decir, existen máximo y mínimo.

min max

Teorema de Hausdorff

- Todas las normas de $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.
- Todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes. (en particular de $\mathbb{R}^N$)

Parte 1

Sea $\|\cdot\|$ norma cualquiera en $\mathbb{R}^N$. Sea $x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{N} x(k) e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{N} \| x(k) e_k \| = \sum_{k=1}^{N} |x(k)| \, \|e_k\| \leq$

$\leq \rho \|x\|_1$

$\rho = \max \{ \|e_k\| : k \in \Delta_N \}$

Una norma es continua para su topología inducida

$\|\cdot\| \geq \lambda \|\cdot\|_1$?

Esfera $\to S = \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_1 = 1 \}$

$\{ \|x\| : x \in S \}$

S compacto

$x \longrightarrow \|x\|$ es continua

Como $\|x\| \leq \rho \|x\|_1 \Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \leq \rho \|x-y\|_1 \Rightarrow$ como hemos tomado distancias $\Rightarrow$ es continua para la topología normal

Luego $\lambda = \min \{ \|x\| : x \in S \}$ $x \neq \emptyset \Rightarrow \frac{x}{\|x\|_1} \in S \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq \lambda$

$\lambda \neq 0$ porque $\min \neq 0$ por $0 \notin S$

3. Conexión

Sea A un espacio métrico y $f: A \to \mathbb{R}$ una función continua / $f(A)$ no es un intervalo. Tenemos $\alpha, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \lambda < \beta$ y $\alpha, \beta \in f(A)$ pero $\lambda \notin f(A)$. Definimos:

$$\boxed{U = \{x \in A \,/\, f(x) < \lambda\}} \wedge \boxed{V = \{x \in A \,/\, f(x) > \lambda\}}$$

Podemos ver que $A = U \cup V$, $U = U^\circ \wedge V = V^\circ$, $U \neq \emptyset \wedge V \neq \emptyset$ con $U \cap V = \emptyset$

Luego decimos que un espacio es conexo cuando no se puede expresar como unión de dos abiertos no vacíos disjuntos; es decir:

$$A = U \cup V,\ U = U^\circ,\ V = V^\circ,\ U \cap V = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset \text{ ó } V = \emptyset.$$

Si uno es no vacío es el total

En tal caso, $U^\circ = U = \overline{U} \subset A \Rightarrow U = \emptyset$ o $U = A$

Como caracterización tenemos que:

Para un espacio métrico A, son equivalentes:

(i) A es conexo

(ii) $f: A \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f(A)$ intervalo

(iii) $f: A \to \{0,1\}$ continua $\Rightarrow f$ constante → o siempre 0 o siempre 1

3.1 Versión general del teorema del valor medio

Para ello veamos cuando un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo. Si $A \subset \mathbb{R}$ subconjunto, decimos que es conexo sii es un intervalo.

Teorema del valor medio

Sean A, E espacios métricos, $f: A \to E$ continua. Si A conexo $\Rightarrow f(A)$ conexo.

$$f: A \longrightarrow f(A)$$

La imagen de un conexo por una función continua es conexo

Supongamos $f(A) = C \cup D$ con $C \cap D = \emptyset$ con $C, D \neq \emptyset$. Usando $f^{-1}(f(A))$ obtendríamos que $A = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ con $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \emptyset$ pero A es conexo

Luego $\lightning$

Como corolario tenemos que si $\mathcal{A}$ es un espacio métrico compacto y conexo, $f:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ continua.
Se cumple que $f(\mathcal{A})$ es un intervalo cerrado y acotado

3.2. Convexidad

Antes de nada conviene resaltar una caracterización de los espacios métricos conexos.

Un espacio métrico $\mathcal{A}$ es conexo sii $\forall x,y\in\mathcal{A}\ \exists\, C\subset\mathcal{A} \,/\, x,y\in C$,

Por otro lado, como definición de conjunto convexo tenemos que un subconjunto $\mathcal{A}$ de un espacio vectorial X es convexo cuando:

$$\text{si } x,y\in\mathcal{A} \Rightarrow (1-t)x+ty\in\mathcal{A}\quad \forall t\in[0,1]$$

El segmento que une x e y está en $\mathcal{A}$

Es decir, si cojo dos puntos de $\mathcal{A}$, el segmento que los une está en $\mathcal{A}$.

Algunos ejemplos son los siguientes:

1. Todo subconjunto convexo de un espacio normado es conexo.
2. Las bolas de un espacio normado son conjuntos convexos, luego conexos.
3. $\mathcal{A}$ esp. métrico, C,D subconjuntos conexos de $\mathcal{A}$, $C\cap D\neq\emptyset \Rightarrow C\cup D$ conexo.

Si dos subconjuntos intersecan $\Rightarrow$ su unión es conexa.