1. *a*) Describir el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$S \to XYX$$
$$X \to aX \mid bX \mid \epsilon$$
$$Y \to bbb$$

$\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(g) \mid$ si $v \in \mathcal{L}$, $v = v_1 bbb v_2$ en tonces $S \to XYX$ (con $X \to v_1$, $X \to v_2$)

Notación $\mathcal{L}(g)$ — def. de g

Para ello, veamos el tipo de palabras que se generan

$S \to xyx \to aXYX \to abXYX \to abYX \to abbbaX \to abbba$

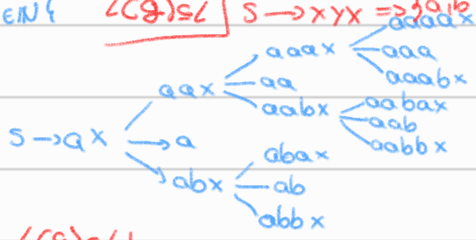
Luego $\mathcal{L}(g) = \{(a^{i} b^{j} a^{k} \ldots) bbb (a^{i_2} b^{j_2} a^{k_2} \ldots) \mid i, j, k, i_2, j_2, k_2 \in \mathbb{N}\}$ — $u, v \in T^*$

$\mathcal{L}(g) \subseteq \mathcal{L} \mid S \to XYX \Rightarrow \{a,b\}^* bbb \{a,b\}^* \in \mathcal{L}$

b) Describir el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$S \to aX$$
$$X \to aX \mid bX \mid \epsilon$$

Si regular



$\mathcal{L}(g) \subset \mathcal{L} \mid$ $S \to aX \Rightarrow a\{a,b\}^*$

Luego $\mathcal{L}_2 = \{a a^{i} b^{k} a^{j} \ldots \mid i, k, j \in \mathbb{N}\}$

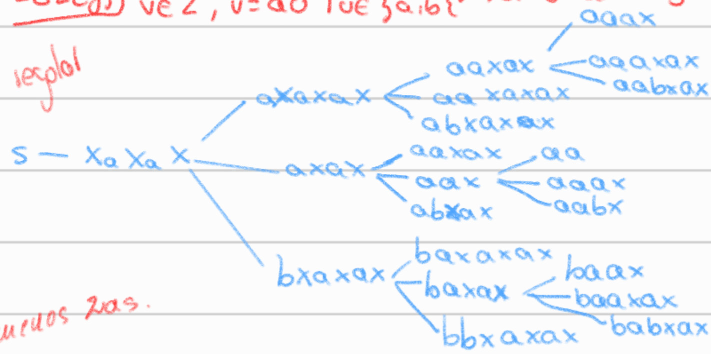
$a\,u \mid u \in \{a,b\}^*$

$\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(g) \mid v \in \mathcal{L}$, $v = au \mid u \in \{a,b\}^* \rightsquigarrow u = aX \leftarrow S$

c) Describir el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$S \to XaXaX$$
$$X \to aX \mid bX \mid \epsilon$$

No regular



→ Contiene al menos 2 a's.

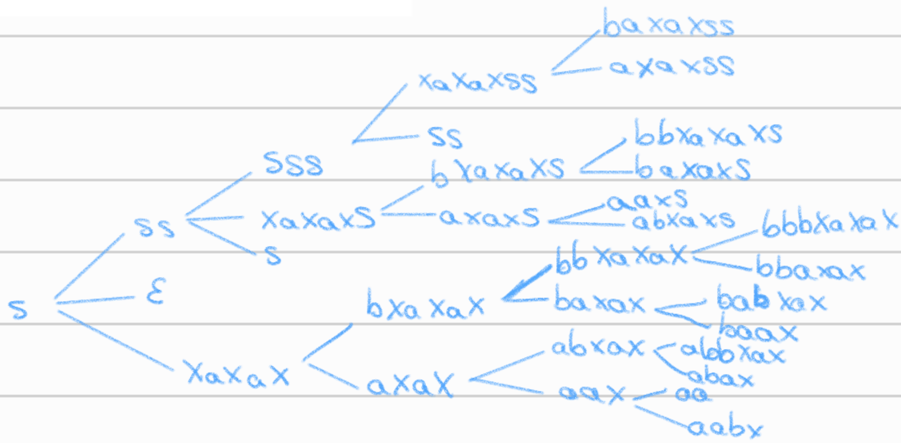
$\mathcal{L}(g) \subset \mathcal{L} \mid$ Sea $v \in \mathcal{L}(g) \Rightarrow v = XaXaX$ donde $\exists\, v_1, v_2, v_3 \in \{a,b\}^* \mid v = v_1 a v_2 a v_3 \in \mathcal{L}$

Luego $\mathcal{L}_3 = \{uavaw \ldots \mid u, v, w \in \{a,b\}^*\}$

$\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(g) \mid$ Sea $v \in \mathcal{L} \Rightarrow v = v_1 a v_2 a v_3 \mid v_i \in \{a,b\}^* \Rightarrow$ $v = xaxax \leftarrow S$ luego $v \in \mathcal{L}(g)$

d) Describir el lenguage generado por la siguiente gramática:

$$S \to SS \mid XaXaX \mid \epsilon$$
$$X \to bX \mid \epsilon$$



Luego ~~$\mathcal{L}_4 = \{u \in A^* ; u = a^{i} b a^{k} b^{l} \mid i+k=2, i, j, k, l \in \mathbb{N}\}$~~ $\Leftrightarrow (b^{i} a b^{j} a b^{k})^{n}$

$\mathcal{L}(g) \subset \mathcal{L} \mid$ Sea $v \in \mathcal{L}(g) \Rightarrow S \to XaXaX \to bxa \ldots$

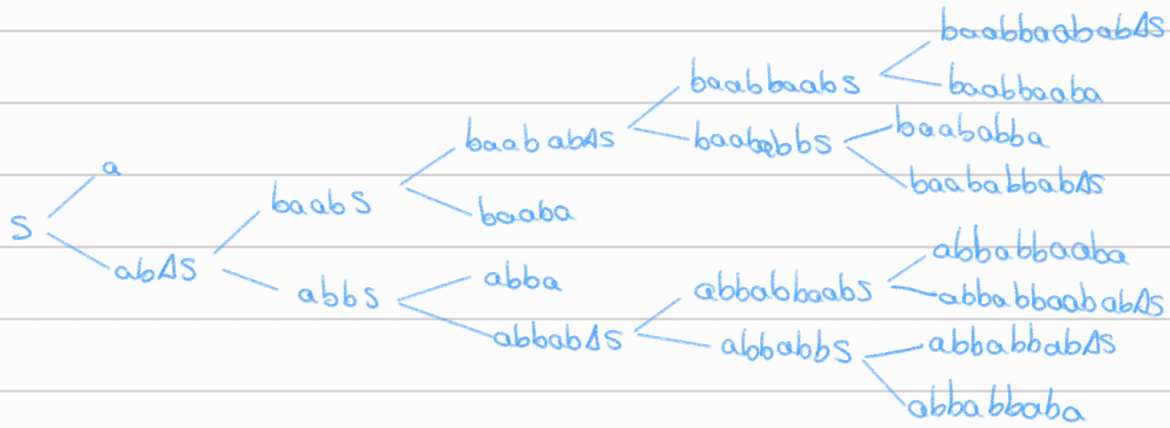
$\hookrightarrow SS \to XaXaXXaXaX$

$\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(g) \mid$ Sea $v \in \mathcal{L} \Rightarrow v \to v_1 a v_2 a v_3$ con $v_i = b^{j}$ luego $v = XaXaX$

2. *a*) Dada la gramática $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ donde

$$P = \{S \to abAS, abA \to baab, S \to a, A \to b\}.$$

Determinar el lenguaje que genera.



$L = \{a, abb^i, abba^k, baab^ja, abba^kbaab^ja, abba^kbbaab^jaabba^l \ldots \mid i, j, k, l \in \mathbb{N}\} = \{ua : u \in \{baab, abb\}^*\}$

b) Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ donde:

- $V = \{< numero >, < digito >\}$
- $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $S =< numero >$
- Las reglas de producción P son:
  - $< numero > \to < numero >< digito >$
  - $< numero > \to < digito >$
  - $< digito > \to 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$ → con 0 a la izquierda.

Determinar el lenguaje que genera.

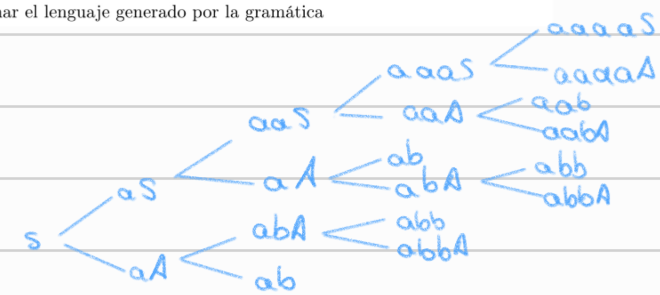
Tomaremos por u → número y d → dígito

Luego claramente $L = \{u \in d^+ \mid u \in \mathbb{N}\}$

c) Sea la gramática $G = (\{A, S\}, \{a, b\}, S, P)$ donde las reglas de producción son:

$$S \to aS$$
$$S \to aA$$
$$A \to bA$$
$$A \to b$$

Determinar el lenguaje generado por la gramática



Luego $L = \{a^ib^k \mid i, k \in \mathbb{N}\}$

3. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

   a) Palabras en las que el numero de b no es tres.

   b) Palabras que tienen 2 ó 3 b.

a) $\mathcal{G} = \{\{S, X\}, \{a, b\}, P, S\}$ y las reglas de producción son:

$S \longrightarrow SS \mid XbXbX \mid \varepsilon$

$X \longrightarrow aX$

Debemos hacer la doble inclusión

$S \longrightarrow aS \mid bX \mid \varepsilon$

$X \longrightarrow aX \mid bY \mid \varepsilon$

⋮

Claramente no es de tipo 3 pues es independiente del contexto

(No existe gramática de tipo 3 para el lenguaje pues no es posible restringir el número de b)

b) $\mathcal{G} = \{\{S, X, A\}, \{a, b\}, P, S\}$ y las reglas de producción son:

$S \longrightarrow SS \mid XbXbA \mid \varepsilon$

$A \longrightarrow b \mid a$

$X \longrightarrow aX$

Claramente es de tipo 2 pero no de tipo 3

De nuevo, se presenta el mismo problema

5. Encontrar una gramática libre de contexto que genere el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b\}$ de las palabras que tienen más a que b (al menos una más).

$\mathcal{G} = \{\{S, X\}, \{a, b\}, P, S\}$ y las reglas de producción son:

$S \longrightarrow aX$

$X \longrightarrow bX \mid aX \mid \varepsilon \mid a$

No permito las palabras que empiezan por b

Debo abarcar la mayor gramática posible

4. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

   a) Palabras que no contienen la subcadena ab

   b) Palabras que no contienen la subcadena baa

a) $S \longrightarrow bX$ Y cumple todo

Pero perdemos palabras

$X \longrightarrow aX \mid a \mid \varepsilon$

b) $S \to aX$ Y cumple todo. Pero perdemos palabras

$X \to bX \mid b \mid \varepsilon$

6. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

   a) $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u no contiene dos símbolos b consecutivos.

   b) $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u contiene dos símbolos b consecutivos.

a) En este caso sí es posible pues podemos tomar

$S \to aX \mid bX$

$X \to a \mid aX$

Pensando de forma más restrictiva, no podría hacerse con una regular pues debemos cambiar la secuencia bb por otra cosa

$S \to aX \mid bX$

$X \to a\Delta X \mid \varepsilon$

$\Delta \to b$

b) Si buscamos algo más restrictivo podemos obtener una regular pues bastaría tomar

$S \to bX$

$X \to b\Delta$

$\Delta \to aX \mid b$

7. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

   a) $u \in L$ si, y solamente si, verifica que contiene un número impar de símbolos a.

   b) $u \in L$ si, y solamente si, verifica que no contiene el mismo número de símbolos a que de símbolos b.

a) Sí podemos con una gramática regular

$S \to a\Delta a$

$\Delta \to a\Delta a \mid a \mid b\Delta$

Tipo 3

$S \to aX \mid bS$

$X \to aS \mid bX \mid \varepsilon$

b)

$S \to S_a a S_a \mid S_b b S_b$

$S_a \to S_a a S_a \mid a S_a b S_a \mid b S_a a S_a \mid \varepsilon$

$S_b \to S_b b S_b \mid a S_b b S_b \mid b S_b a S_b \mid \varepsilon$

9. Determinar si el lenguaje generado por la gramática

$$S \to SS$$
$$S \to XXX$$
$$X \to aX|Xa|b$$

es regular. Justificar la respuesta.

$L(G) = \{ u \in A^* \mid N_b(u) = 3k,\ k \in \mathbb{N} \}$

$S \to bX \mid aX$
$X \to bY \mid aY$
$Y \to b \mid aX \mid bS$

Luego sí es regular.

10. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A, ¿es L^* siempre numerable? ¿nunca lo es? ¿o puede serlo unas veces sí y otras, no? Pon ejemplos en este último caso.

11. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A, caracterizar cuando $L^* = L$. Esto es, dar un conjunto de propiedades sobre L de manera que L cumpla esas propiedades si y sólo si $L^* = L$.

10 Sabemos que $L \subseteq A^*$ pero A^* es numerable luego L es numerable. De la misma manera $L^i \subseteq A^*$ y por definición de L^* (unión numerable de conj. numerables) vemos que L^* es numerable

11 ¿Qué debe ocurrir para que $L = L^*$? Las propiedades son:

i) Si $u, v \in L \Rightarrow uv \in L$

ii) $\varepsilon \in L^*$

$\Rightarrow$]

$\subseteq$] Por definición de $\mathcal{L}^*$ pues $\mathcal{L}^* = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{L}^i$

$\supseteq$] Sea $u \in \alpha^*$ entonces $u = v_1 \cdots v_n$, $n \in \mathbb{N}$ de manera que $v_i \in \alpha_j$ $1 \leq j \in \mathbb{N}$ luego usando la primera propiedad vemos que $u \in \alpha$. Por (i) $\varepsilon \in \alpha$

$\Leftarrow$] 1. $u, v \in \mathcal{L} \Rightarrow uv \in \mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{L}^* = \mathcal{L} \Rightarrow uv \in \mathcal{L}$

2. $\varepsilon \in \mathcal{L}^* = \mathcal{L} \Rightarrow \varepsilon \in \alpha$

12. Dados dos homomorfismos $f : A^* \to B^*$, $g : A^* \to B^*$, se dice que son iguales si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A^*$. ¿Existe un procedimiento algorítmico para comprobar si dos homomorfismos son iguales?

Ver que dan la misma imagen.

13. Sea $L \subseteq A^*$ un lenguaje arbitrario. Sea $C_0 = L$ y definamos los lenguajes S_i y C_i, para todo $i \geq 1$, por $S_i = C_{i-1}^+$ y $C_i = \overline{S_i}$.

a) ¿Es S_1 siempre, nunca o a veces igual a C_2? justifica la respuesta

b) Demostrar que $S_2 = C_3$, cualquiera que sea L. (*Pista:* Demuestra que C_2 es cerrado para la concatenación).

a) $S_1 = \mathcal{C}_0^+ = \mathcal{L}^+ = \bigcup_{n=1} \mathcal{L}^n$; $\mathcal{C}_1 = \overline{\mathcal{L}^+}$

$S_2 = \mathcal{C}_1^+ = (\overline{\mathcal{L}^+})^+$; $\mathcal{C}_2 = \overline{S_2} = \overline{(\overline{\mathcal{L}^+})^+}$

$\mathcal{C}_2 \subseteq S_1$ ya que sabemos que $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_1^+$ es decir $\overline{\mathcal{L}^+} \subseteq (\overline{\mathcal{L}^+})^+ \Rightarrow \overline{(\overline{\mathcal{L}^+})^+} \subseteq (\mathcal{L}^+)$

Luego $\mathcal{C}_2 \subseteq S_1$

Para que $\overline{(\overline{\mathcal{L}^+})^+} = (\mathcal{L}^+) \Rightarrow \mathcal{C}_1^+ = \mathcal{C}_1 \Rightarrow \mathcal{C}_1$ cerrado por la concatenación

Por ejemplo de que no ocurre

b)

8. *a)* Dado el alfabeto $A = \{a, b\}$ determinar si es posible encontrar una gramática libre de contexto que genere las palabras de longitud impar, y mayor o igual que 3, tales que la primera letra coincida con la letra central de la palabra.

$S \longrightarrow aXC \mid bYC$

$C \longrightarrow a \mid b$

$X \longrightarrow CXC \mid a$

$Y \longrightarrow CYC \mid b$

b) Dado el alfabeto $A = \{a, b\}$ determinar si es posible encontrar una gramática libre de contexto que genere las palabras de longitud par, y mayor o igual que 2, tales que las dos letras centrales coincidan.

$S \longrightarrow \Delta S \Delta \mid aa \mid bb$

$\Delta \longrightarrow a \mid b$

14. Demuestra que, para todo alfabeto A, el conjunto de los lenguajes finitos sobre dicho alfabeto es numerable.

$\mathcal{L} \to$ conjunto de lenguajes finitos

$\mathcal{L}_n \to$ conjunto de lenguajes finitos con n palabras, $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$

Veamos que $\mathcal{L}_1$ es numerable, $\mathcal{L}_1 = \{\{u\} \mid u \in A^*\}$ luego como f es biyectiva vemos que $\mathcal{L}_1 \subset A^*$

$\{u\} \xmapsto{f} u \in A^*$

luego $\mathcal{L}_1$ es numerable.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defino $\varphi_n : \mathcal{L}_n \longrightarrow (\mathcal{L}_1)^n$ (Debemos demostrar que es inyectiva)

$\{u_1, \dots, u_n\} \longmapsto (\{u_1\}, \dots, \{u_n\})$

Como $(\mathcal{L}_1)^n$ es numerable y φ_n es inyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\mathcal{L}_n$ es numerable $\forall n \in \mathbb{N}$

Vamos a demostrar que el producto numerable de numerables

$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \exists f_n : A_n \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva

$(n, m) \longmapsto 2^n 3^m$

Defino $f : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a \in A_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a = a_m$ pues $a \in A_n \cap A_m$ para cualquiera (puede ocurrir)

$a_n \longmapsto (n, f_n(a_n))$

Supongamos que $f(a) = f(b)$ tales que $a \neq b$ entonces $(n, f_n(a)) = (m, f_m(b)) \Rightarrow n = m$ y $f_n(a) = f_m(b)$ pero f_n es inyectiva luego $a = b$, contradicción. Por tanto f es inyectiva