1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

a) Integral de una función simple positiva

Cabe recordar que una función simple positiva es aquella cuya descomposición canónica tiene la expresión

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \chi_{A_k} \quad \text{donde } p\in\mathbb{N}, \alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}_0^+, A_1,\dots,A_k \in \mathcal{M}$$

Ahora, si $A\in\mathcal{M}, A\subset\mathbb{R}^N$, es natural pensar que la integral sobre todo $\mathbb{R}^N$ de la función χ_A sea $\lambda(A)$, mientras que la integral sobre E de χ_A sea $\lambda(A\cap E)$. Ahora es natural adivinar cómo debe definirse la integral de una función simple positiva

Para cada $E\subset\Omega$, se define la integral de s sobre E mediante la igualdad

$$\boxed{\int_E s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda(A_k\cap E)}$$

Nótese que, aunque $s(\mathbb{R}^N)\subset\mathbb{R}_0^+$, la suma anterior puede ser ∞. Por otra parte, puede pasar que $\alpha_i=0$ y $\mu(E\cap A_i)=\infty$ lo cual no presenta problema pues $0\cdot\infty=0$ por definición

Denotaremos por S^+ al conjunto de las funciones simples positivas

b) Integral de una función medible positiva

Sea $\Omega\in\mathcal{M}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $f\in\mathcal{L}^+(\Omega)$ $f:\Omega\to[0,\infty]$. Sabemos que el crecimiento de la integral nos dice que, para $t\in S^+$ y $E\in\mathcal{M}\cap\mathcal{P}(\Omega)$, se tiene

$$\boxed{\int_E t = \max\left\{\int_E s \;|\; s\in S^+,\ s(x)\le t(x)\ \forall x\in E\right\}}$$

Si en vez de tener t, tenemos una función medible positiva, bastaría con sustituir el máximo por un supremo

Por tanto, se define la integral de una función medible positiva $f:\Omega\to[0,\infty]$, sobre un conjunto medible $E\subset\Omega$, mediante la igualdad

$$\boxed{\int_E f = \sup\left\{\int_E s \;|\; s\in S^+,\ s(x)\le f(x)\ \forall x\in E\right\}}$$

Es claro que en el caso de $\mathbb{R}^N$ esta definición generaliza a la integral de funciones simples positivas

Por último, esta integral sólo depende de los valores de f en el conjunto E. De hecho, al restringir a un subconjunto de Ω podemos usar la definición anterior, con E haciendo el papel de Ω, y se ve que la integral sobre E de $f_{|E}$ coincide con la de f

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Integración de la suma de una serie

La integral tiene una gran cantidad de propiedades, siendo una de las más relevantes la aditividad respecto al integrando aunque llegaremos más allá. Coloquialmente, se puede permutar la integral con la suma de una serie arbitraria

Conviene aclarar que, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de Ω en $[0,\infty]$, siempre tiene sentido considerar la función $f:\Omega\longrightarrow[0,\infty]$ dada por $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $\forall x\in\Omega$ donde f diremos que es la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

·) Integral de la suma de una serie Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles positivas, se tiene

$$\boxed{\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega f_n}$$

Pone

Este resultado también es cierto para k funciones medibles positivas. Como ventaja, este resultado nos permite no tener que recurrir a la descomposición canónica cuando queramos hallar la integral de una función simple positiva, ya que puede ser cualquier descomposición cuya serie converja puntualmente a la función simple positiva

b) Aditividad de la integral como función del conjunto sobre el que se integra

·) Aditividad Si f es una función medible positiva, definiendo

$$\varphi(E)=\int_E f \qquad \forall E\in\mathcal{M}\cap\mathcal{P}(\Omega)$$

se obtiene una función $\varphi:\mathcal{M}\cap\mathcal{P}(\Omega)\longrightarrow[0,\infty]$, que es σ-aditiva y verifica que $\varphi(\emptyset)=0$ luego es una medida en Ω

Este resultado es consecuencia del resultado sobre la integral de la suma de una serie, el cual se usa sobre la función $\chi_E\cdot f=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}\cdot f$, siendo $E=\biguplus_{n=1}^{\infty}E_n$ con $E_n\in\mathcal{P}(\Omega)$

El significado de este resultado es que si queremos calcular la integral sobre $E\in\mathcal{M}\cap\mathcal{P}(\Omega)$, también podemos hacerlo descomponiendo E en subconjuntos medibles de Ω disjuntos dos a dos (E_n) tales que $\mathcal{E} = \biguplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ y sumando los resultados de aplicar la integral de f sobre cada uno de ellos.

3. Conocer y comprender el teorema de la convergencia monótona, incluyendo su demostración.

Teorema de la convergencia monótona

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas, y sea $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ $\forall x \in \Omega$. Entonces:

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

Demostración. Por el crecimiento de f_n sabemos que $\{\int_\Omega f_n\}$ crece y por tanto converge. Entonces $\exists \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$ denotado por $L \in [0,\infty]$. Además, se tiene que $f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ luego el crecimiento de la integral nos dice que

$$\int_\Omega f_n \leq \int_\Omega f \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{, de donde } L \leq \int_\Omega f$$

Para la otra desigualdad basta probar que, si $s \in S^+ \mid s(x) \leq f(x)$ $\forall x \in \Omega$, la integral de s sobre Ω es menor o igual que L. Fijado $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\boxed{E_n = \{x \in \Omega \mid f_n(x) \geq \rho\, s(x)\}}$$

y comprobamos que $E_n \in \mathcal{M}$. Para ello, escribimos la descomposición canónica de s

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \chi_{A_k} \quad \text{donde } p \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$$

Como f_n es medible, se tiene que

por la caracterización

$$A_k \cap E_n = A_k \cap \{x \in \Omega \mid f_n(x) \geq \rho\alpha_k\} \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \Delta_p \text{, luego } E_n = \biguplus_{k=1}^{p} (A_k \cap E_n) \in \mathcal{M}$$

Como $\{f_n\}$ es creciente, tenemos también que $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y de hecho, vamos a ver que $\{E_n\} \nearrow \Omega$. Si $s(x) = 0$ se tiene que $x \in E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. En otro caso, como $\{f_n(x)\} \nearrow f(x) \geq s(x) > \rho s(x)$, $\exists n \in \mathbb{N}$ con $f_n(x) > \rho s(x)$, luego $x \in E_n$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, como $\rho\, s(x) \leq f_n(x)$ $\forall x \in E_n$, usando la homogeneidad de la integral de s, dos veces el crecimiento de la integral, y la definición de L, obtenemos

$$\rho\int_{E_n} s = \int_{E_n} \rho s \le \int_{E_n} f_n = \int_{\Omega} \chi_{E_n} f_n \le \int_{\Omega} f_n \le L$$

Usamos que la integral es, como función del conjunto sobre el que se integra, es una medida, luego es crecientemente continua, para obtener:

$$\rho\int_{\Omega} s = \rho \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s \le L$$

Pero esta igualdad es válida para todo $\rho \in]0,1[$, luego $\int_{\Omega} s \le L$ $\square$