1. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida como se indica:

(a) $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

(b) $f(x+iy) = x^3 - y + i\left(y^3 + \frac{x^2}{2}\right) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

(c) $f(x+iy) = \frac{x^3+i\,y^3}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \quad f(0)=0$

En este ejercicio, usaremos mucho el teorema de Cauchy-Riemann, las ecuaciones obtenidas del teorema son:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

a) Dado $z\in\mathbb{C}$, supuesto que f es derivable en z, es claro que, por el Teorema de Cauchy-Riemann

$u:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$, $z\longmapsto \operatorname{Re}f(z)$ y $v:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$, $z\longmapsto \operatorname{Im}f(z)$ deben ser derivables en z y cumplir las ecuaciones

Para $z=(x+iy)$, $\operatorname{Re}f(z) = \operatorname{Re}((x+iy)x^2) = \operatorname{Re}((x^3+ix^2y)) = x^3$ $\wedge$ $\operatorname{Im}f(z) = \operatorname{Im}((x+iy)x^2) = x^2y$; estas funciones son perfectamente derivables en $\mathbb{C}$, pero veamos si se cumplen las ecuaciones

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial \operatorname{Im}f}{\partial y} = x^2 \quad \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad \frac{\partial \operatorname{Re}f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \operatorname{Im}f}{\partial x} = 2xy$$

Como $\frac{\partial \operatorname{Re}f}{\partial x} \neq \frac{\partial \operatorname{Im}f}{\partial y}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$, podemos concluir que no es derivable en ningún punto de $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

En los complejos puros, es decir, $x=0$; podemos decir que f es derivable

b) Tratamos de seguir el mismo procedimiento. Dado $z=x+iy\in\mathbb{C}$

$\operatorname{Re}f(z) = x^3 - y$ $\wedge$ $\operatorname{Im}f(z) = y^3 + \frac{x^2}{2}$

Claramente $\operatorname{Re}f$ y $\operatorname{Im}f$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ por ser suma de funciones de clase $C^1(\mathbb{R})$.

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f}{\partial x}(x_0,y_0) = 3x_0^2 \qquad \frac{\partial \operatorname{Im}f}{\partial y}(x_0,y_0) = 3y_0^2 \quad \forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f}{\partial y}(x_0,y_0) = -1 \qquad \frac{\partial \operatorname{Im}f}{\partial x}(x_0,y_0) = x$$

De donde deducimos que f es derivable en los puntos de $\mathbb{R}^2$ que cumplan

$$x=1 \quad \text{y} \quad x_0^2 = y_0^2$$

Es decir, sólo es derivable en los puntos $\{1-i, 1+i\}$.

c) Dado $z\in\mathbb{C}$. $\operatorname{Re}f(z) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ y $\operatorname{Im}f(z) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{x_0^4 + 3x_0^2y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}, \qquad \frac{\partial \operatorname{Im}f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{-2x_0y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

$\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{y_0^4+3y_0^2x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}$, $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{-2y_0x_0^3}{(x_0^2+y_0^2)^2}$

Veamos cuándo se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Claramente, f es derivable en $\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Im} z^2\}\setminus\{0\}$,

No obstante, no hemos estudiado el punto (0,0); para ello, vamos a estudiar la diferenciabilidad de sus componentes en el punto (0,0).

En el caso de $\operatorname{Re} f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ estudiamos su gradiente.

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{Re} f(x,0) - \operatorname{Re} f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Re} f(x,0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to0}\frac{\operatorname{Re} f(0,y)}{y} = 0$$

Luego $D(0,0)\binom{x}{y} = \nabla \operatorname{Re} f(0,0)\binom{x}{y} = (1\ \ 0)\binom{x}{y} = x$. Veamos ahora si se cumple la definición

$$\lim_{z\to0}\frac{|\operatorname{Re} f(z) - (\operatorname{Re} f(0) + D(0)(z-0))|}{\|z\|} = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \nexists$$

pues alguno de sus límites radiales (la recta x=y) no existe. Por tanto, f no es derivable en (0,0)

2. Probar que existe una función entera f tal que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Si se exige además que $f(0)=0$, entonces f es única. Cauchy-Riemann

Para ello, bastará obtenerla usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = 4a^3 - 12ab^2 = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = 4b^3 - 12a^2b = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \qquad 12x^2y - 4y^3$$

Como ambas son perfectamente integrables, obtenemos que, podemos determinar la parte imaginaria de f

$$\int \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dy = \int\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dx$$

C y D deben depender de y y x

$v(x,y) = 4x^3 - 4xy^3 + \varphi(x)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = 12x^2 - 4y^3$

$\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)$ ↳ sacamos que $\varphi'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=\lambda\ \forall x\in$

$$4x^3y - 4xy^3 + C = 4x^3y - 4xy^3 + D$$

Por tanto, $C=D\in\mathbb{R}$. Es decir, como $f(x+iy) = \operatorname{Re} f(x+iy) + i\operatorname{Im} f(x+iy) = x^4-6x^2y^2+y^4 + i(4x^3y-4xy^3+D)$ y, claramente, si $f(0)=0$ la función queda determinada de forma única pues es un PVI pues $C=0$

Es mejor expresar sobre $\varphi(x)$ y λ

3. Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a,b,c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tal que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Para ello, seguimos un procedimiento parecido al ejercicio anterior.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2ax + by = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bx + 2cy = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -2cy - bx$$

Buscamos determinar la parte imaginaria:

(i) $\int \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dy = 2axy + \frac{by^2}{2}$ $\qquad v(x,y) = 2axy + \frac{by^2}{2} + \varphi(x)$ derivable

(ii) $\int \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dx = -2cxy - \frac{bx^2}{2}$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2ay + \varphi'(x)$

Como $\frac{\partial v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial y \partial x}$ igualando obtenemos que.

$$2\cancel{axy} + \cancel{\frac{by^2}{2}} = -2cxy - \cancel{\frac{bx^2}{2}} \iff 2axy = -2cxy \iff a = -c$$

$$\wedge$$

~~$\frac{by^2}{2} = \frac{-bx^2}{2} \iff \frac{b}{2}(x^2+y^2) = 0$ sii $x,y=0$ ó $b=0$~~

Entonces ambos miembros son 0 por depender de distintas variables y ser polinomios en un abto. $\varphi(x) = -bx \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{bx^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$ por eso no hay condición

Por tanto, las condiciones necesarias y suficientes son $a = -c \wedge b = 0$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$.

Ω convexo $\wedge$ u armónica en Ω $\Big\} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \operatorname{Re} f = u$

Ser armónica $\Delta u(x,y)$: $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \ \forall (x,y) \in \Omega \\ u \in C^2(\Omega) \end{cases}$

4. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que

$$a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \forall z \in \Omega$$

Probar que f es constante. Probablemente tenga que trabajar con el módulo

Como $a^2+b^2 > 0$ entonces no puede ocurrir simultáneamente que $a=b=0$. Procedamos por casos:

$\underline{a=0}$ $b \operatorname{Im} f(z) = c$ entonces $\operatorname{Im} f(z) = \frac{c}{b}$ pues $b \neq 0$ entonces usando un resultado visto en clase, como z arbitrario y c,b constantes entonces $\operatorname{Im} f$ es constante luego f es constante.

$\underline{b=0}$ Es análogo a lo anterior.

$\underline{a\neq 0,\ b\neq 0}$ Sabemos que $u(x,y) = \frac{c - bv(x,y)}{a}$ y $v(x,y) = \frac{c - au(x,y)}{b}$ de donde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-b}{a}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{-b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{-a}{b}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-a}{b}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

Veamos cuáles son las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-a}{b}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{-\partial v}{\partial x}(x,y) \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{a}{b}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

Sin embargo, para que dichas igualdades se cumplan:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-a}{b}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{b}{a}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$ (obtenemos un sistema homogéneo compatible determinado)

Por tanto, $\frac{-a}{b} = \frac{b}{a}$ de donde deducimos que $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$; y por lo tanto también $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$, es decir, f es constante

supuesto

$\text{Re} f = \frac{f+\bar f}{2} \in \mathcal{H}(\Omega)$

↳ const. $\Rightarrow$ como $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow f$ cte

5. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

Sea $f(z) = \text{Re} f(z) + i\,\text{Im} f(z)$ entonces, por definición, $\bar f(z) = \text{Re} f(z) - i\,\text{Im} f(z) = \text{Re} f(z) + i(-\text{Im} f(z))$

Por un lado, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, en particular es derivable en Ω y por tanto cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Por otro lado, como $\bar f \in \mathcal{H}(\Omega)$, en particular es derivable en Ω y por tanto $\text{Re}\bar f(z) = \bar u(x,y) = \text{Re} f(z) = u(x,y)$ y $\text{Im} \bar f(z) = \bar v(x,y) = -\text{Im} f(z) = -v(x,y)$ cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \bar u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \bar v}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \bar u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial \bar v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Por tanto, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{-\partial v}{\partial x}(x,y)$$

De donde se deduce que f debe ser constante

6. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad \forall z \in \Omega^*$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

Este ejercicio tiene fácil comprobación sabiendo que $\text{Re} f^*(z) = \text{Re} f(\bar z) = u(x,-y)$ y que $\text{Im} f^*(z) = -\text{Im} f(\bar z) = -v(x,-y)$

Basta comprobar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para ver que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$

Opción 2.

Fijado $a \in \Omega^*$, para probar la derivabilidad buscamos probar $\lim_{z\to a}\frac{f^*(z)-f^*(a)}{z-a} = \lim_{z\to a}\frac{\overline{f(\bar z)} - \overline{f(\bar a)}}{z-a} = \lim_{z\to a}\overline{\frac{f(\bar z)-f(\bar a)}{\bar z - \bar a}}$

$z \in \Omega^* \Rightarrow w \in \Omega$

$a \in \Omega^* \Rightarrow \bar a \in \Omega$

$$= \lim_{w\to \bar a}\frac{\overline{f(w) - f(\bar a)}}{\overline{w-\bar a}} = \overline{\lim_{w\to\bar a}\frac{f(w)-f(\bar a)}{w-\bar a}}$$

$$= \overline{f'(\bar a)} = f^{*\prime}(\bar a) \quad \forall a \in \Omega^*$$

El conjugado
- parte sumas
- parte productos
- Es involutiva
- Es continua

7. Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

Sea $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función exponencial $\mid f'(z)=f(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$. Sea $\Omega\subset\mathbb{C} \mid \Omega=\Omega^{\circ}$

sabemos que $f_{|\Omega}'(z)=f_{|\Omega}(z)\ \forall z\in\Omega$.

Supongamos que f es racional en Ω, es decir, $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\ \forall z\in\Omega$, $gr(P)=n$ y $gr(Q)=m$
$\hookrightarrow Q(z)\neq 0$

entonces $f'(z)=\frac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}=?$, sea $R=P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)$

Como $f=f'$ $\Rightarrow$ $Q(P'Q-PQ')=PQ^2$; si $Q\neq 0$ tenemos que $gr(PQ)=n+m$ y $gr(R)\leq max\{(n-1)+m,(n-1)+q\}$

Ojo que es porque p y q no tienen grado 0 ; en ese caso tenemos una constante.

Supongamos $\cdot\ m=0 \Rightarrow f(z)=P(z) \Rightarrow$ derivando n veces obtenemos lo buscado

$\cdot\ n=0 \Rightarrow f(z)=\frac{1}{Q(z)} \Rightarrow f'(z)=n\frac{Q'(z)}{Q(z)^2}=f(z)=\frac{k}{Q(z)} \Rightarrow Q'(z)=Q(z)\cdot k$