

Práctica 2. Diferenciabilidad

Ejercicios resueltos

1. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, de los campos escalares $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidos de la siguiente forma, donde $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \quad \forall (x, y) \in U, \quad f(0, 0) = 0 \\ \text{(b)} \quad g(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \quad \forall (x, y) \in U, \quad g(0, 0) = 0 \\ \text{(c)} \quad h(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in U, \quad h(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Solución

(a.1). Tenemos claramente que $f|_U \in C^1(U)$, por tratarse de una función racional. El conjunto $\{(0, 0)\}$, con un solo punto, es cerrado, así que U es abierto. Por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, vemos que f es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U . De hecho,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2xy(x^2 + y^4) - 2x^3y}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2xy^5}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall (x, y) \in U \quad \text{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^2(x^2 + y^4) - 4x^2y^4}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{x^4 - 3x^2y^4}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall (x, y) \in U \end{aligned}$$

(a.2). Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ es claro que $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, luego f es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad \text{es decir,} \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

(a.3). Con el fin de estudiar la diferenciabilidad de f en el origen, consideramos la función $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \in U$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\varphi(x, x) = \frac{x^3}{(x^2 + x^4)\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + x^2)}$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x, x) = 1/\sqrt{2} \neq 0$. Como uno de los límites radiales de φ en el origen no es 0, no se cumple que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) = 0$, luego f no es diferenciable en el origen.

Puesto que f es parcialmente derivable en \mathbb{R}^2 , si una de sus derivadas parciales fuese continua en el origen, entonces f sería diferenciable en el origen. Por tanto, ninguna de las dos derivadas parciales de f es continua en el origen.

(a.4). Observamos finalmente que f es continua en el origen, como vimos ya en la práctica 1. De hecho, para $(x, y) \in U$, es obvio que $x^2 \leq x^2 + y^4$, luego

$$|f(x, y)| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^4} \leq |y| \quad \forall (x, y) \in U$$

de donde se deduce que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

En resumen, f es continua y parcialmente derivable en \mathbb{R}^2 , es diferenciable en U pero no en el origen. Ambas derivadas parciales de f son continuas en U , pero ninguna de ellas es continua en el origen. ■

(b.1). El mismo razonamiento usado para f prueba que g es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U . Esta vez,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{2xy^2(x^2 + y^4) - 2x^3y^2}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall (x, y) \in U \quad y \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{2x^2y(x^2 + y^4) - 4x^2y^5}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2y(x^2 - y^4)}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall (x, y) \in U \end{aligned}$$

(b.2). Puesto que $g(x, 0) = g(0, y) = 0$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, vemos también que g es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$$

(b.3). Para $(x, y) \in U$, usando que $x^2 \leq x^2 + y^4$, y también $|x^2 - y^4| \leq x^2 + y^4$, obtenemos que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2|y| \frac{x^2|x^2 - y^4|}{(x^2 + y^4)^2} \leq 2|y|$$

Deducimos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$, luego $\frac{\partial g}{\partial y}$ es continua en el origen.

Como g es parcialmente derivable en \mathbb{R}^2 , y su segunda derivada parcial es continua en el origen, deducimos que f es diferenciable, luego continua, en el origen.

(b.4). Estudiemos la continuidad en el origen de la primera derivada parcial de g . Para ello usamos el cambio de variable $(x, y) = (t^2, t) \in \mathbb{R}^2$ con $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $(t^2, t) \neq (0, 0)$ para $t \neq 0$, y que $(t^2, t) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow 0$. Vemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^2, t) = \frac{2t^2 t^6}{(2t^4)^2} = \frac{1}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$$

Por otra parte, es claro que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial x}(x, 0) = 0$, así que la función $\partial g / \partial x$ no tiene límite, luego no es continua, en el origen.

En resumen g es diferenciable, luego también continua, en todo el plano. Su segunda derivada parcial es continua en \mathbb{R}^2 , mientras que la primera es continua en U , pero no en el origen. ■

(c.1). El mismo razonamiento usado para f y g prueba que h es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U . Ahora tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \in U$$

y, por simetría,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \in U$$

(c.2) Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, de nuevo tenemos $h(x, 0) = h(0, y) = 0$, luego h es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x}}$$

(c.2). Veremos que las derivadas parciales de h son continuas en el origen. Basta trabajar con una de ellas, puesto que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Para todo $(x, y) \in U$, se tiene $y^4 \leq (x^2 + y^2)^2$ luego

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right| = 2|x| \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|x| \quad \forall (x, y) \in U$$

de donde claramente deducimos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)$$

es decir, $\frac{\partial h}{\partial x}$ es continua en el origen y, como ya se ha dicho, igual le ocurre a $\frac{\partial h}{\partial y}$. La condición suficiente para la diferenciabilidad nos dice que h es diferenciable en el origen.

En resumen, tenemos $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. ■

2. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x, y) = \frac{x^3(y-1)^2}{x^2 + |y-1|} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}, \quad f(0, 1) = 0$$

Solución

(a). Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$, que es un conjunto cerrado, por ser la imagen inversa de $\{1\}$ por la función continua $(x, y) \mapsto y$, de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} , con lo que el conjunto $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ es abierto. Vemos que $f|_U \in C^1(U)$, por ser el cociente de dos funciones de clase C^1 en U . Concretamente, el numerador es una función polinómica y el denominador es la suma de otra función polinómica con la función $(x, y) \mapsto |y-1|$, de U en \mathbb{R} , que es composición de otra función polinómica, que toma valores en \mathbb{R}^* , con el valor absoluto, una función de clase C^1 en \mathbb{R}^* . Como U es abierto, por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, deducimos que f es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U . Concretamente, para todo $(x, y) \in U$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{3x^2(y-1)^2(x^2 + |y-1|) - 2x^4(y-1)^2}{(x^2 + |y-1|)^2} \\ &= \frac{x^2(y-1)^2(x^2 + 3|y-1|)}{(x^2 + |y-1|)^2} \quad y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2x^3(y-1)(x^2 + |y-1|) - x^3(y-1)^2(|y-1|/(y-1))}{(x^2 + |y-1|)^2} \\ &= \frac{x^3(y-1)(2x^2 + |y-1|)}{(x^2 + |y-1|)^2} \end{aligned}$$

(b). Fijemos ahora un punto del conjunto A , que será de la forma $(a, 1)$ con $a \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos $f(x, 1) = f(a, 1) = 0$ de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, 1) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, 1) - f(a, 1)}{x - a} = 0$$

Por otra parte, para $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se tiene $f(a, y) = \frac{a^3(y-1)^2}{a^2 + |y-1|}$ de donde, si $a \neq 0$, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(a, y) - f(a, 1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{a^3(y-1)}{a^2 + |y-1|} = 0$$

igualdad también válida para $a = 0$, ya que $f(0, y) = f(0, 1) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, f es parcialmente derivable en todo punto de \mathbb{R}^2 y en los puntos de A se tiene $\nabla f(a, 1) = (0, 0)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c). Veamos que las derivadas parciales de f son continuas en todo punto $(a, 1) \in A$ con $a \in \mathbb{R}$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, para la primera derivada parcial podemos usar, por ejemplo, las desigualdades $x^2 \leq x^2 + |y-1|$ y $x^2 + 3|y-1| \leq 3(x^2 + |y-1|)$. Suponiendo $y \neq 1$, tenemos:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| = \frac{x^2(y-1)^2(x^2 + 3|y-1|)}{(x^2 + |y-1|)^2} \leq 3(y-1)^2$$

desigualdad que es evidente cuando $y = 1$, luego es válida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De ella se deduce claramente que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,1)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, 1)$, luego $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en el punto $(a, 1)$.

Para la otra derivada parcial, usamos que $2x^2 + |y-1| \leq 2(x^2 + |y-1|)$ y, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, obtenemos

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = \frac{x^3(y-1)(2x^2 + |y-1|)}{(x^2 + |y-1|)^2} \leq 2|x||y-1|$$

de donde $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,1)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, 1)$, así que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(a, 1)$.

En resumen, hemos probado que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. ■

3. Probar que el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x, y) = \frac{x^6(x^2 + y^2)}{(y - x^2)^2 + x^6} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(0, 0) = 0$$

es diferenciable en \mathbb{R}^2 .

Solución.

(a). Considerando el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es obvio que $f|_U \in C^1(U)$, pues se trata de una función racional. El carácter local de la diferenciabilidad nos dice que f es diferenciable en todo punto de U .

(b). Observamos que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, luego f es parcialmente derivable en el origen con $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

A poco que se piense, el cálculo de las derivadas parciales de f en puntos de U es laborioso, luego el estudio de su continuidad en el origen no parece fácil. Aprovechando que sólo interesa la diferenciabilidad de f en el origen, la abordamos directamente.

Consideramos entonces la función $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \frac{f(x, y) - f(0, 0) - (\nabla f(0, 0) | (x, y))}{\| (x, y) \|} \\ &= \frac{x^6 (x^2 + y^2)}{((y - x^2)^2 + x^6) \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^6 \sqrt{x^2 + y^2}}{(y - x^2)^2 + x^6} \quad \forall x \in U\end{aligned}$$

Usando que $x^6 \leq (y - x^2)^2 + x^6$ obtenemos que

$$0 \leq \varphi(x, y) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in U$$

de donde se deduce evidentemente que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \varphi(x, y) = 0$, luego f es diferenciable en el origen y, en resumen, es diferenciable en \mathbb{R}^2 , como se quería. ■