1. Prueba que la ecuación
$$e^x + x^3 + t = 0$$
define una única función implícita $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$. Además la función $x(t)$ es decreciente.

Para ello deberemos utilizar el teorema de la función implícita para poder conocer la derivada pues si probamos a hacerlo mediante la unicidad-existencia, no obtenemos nada sobre la derivabilidad de x.

Por tanto, sea $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t,x) = e^x + x^3 + t$ vamos a comprobar las hipótesis del teorema:

•) $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ es claro pues es suma de funciones de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

•) F está definida en un abierto, lo cual es cierto

•) $\frac{\partial F}{\partial x} = e^x + 3x^2 \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}$

Luego tomando $(t_0, x_0) \in G$ tales que $F(t_0,x_0) = e^{x_0} + x_0^3 + t_0 = 0$, como por ejemplo $(1,0)$ obtenemos que $\exists x: I \longrightarrow \mathbb{R}$ con I abierto tal que $x \in \mathcal{C}^1(I)$ y además se cumple que:

i) $t_0 \in I \quad (1 \in I)$

ii) $x(t_0) = x_0 \quad (x(1) = 0)$

iii) $(t, x(t)) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in I$

iv) $F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

Luego sabemos que existe, mi problema es saber cuando $I = \mathbb{R}$.

Para que sea decreciente, y suponiendo, $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ comprobaremos, mediante derivación implícita si su derivada es negativa:

$$\frac{dF}{dt} = x' e^x + 3x^2 x' + 1 = 0 \iff x'(e^x + 3x^2) = -1 \iff x'(t) = \frac{-1}{e^x + 3x^2} < 0 \text{ ya que } e^x + 3x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego hemos probado que x es decreciente.

2. Se considera la función

$$F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_0^{\sqrt{t}} e^{s^2} ds.$$

¿Es F de clase C^1? En caso afirmativo calcula la derivada.

Para probar que la función F es de clase $\mathcal{C}^1(]0,\infty[)$ es primordial conocer el Teorema Fundamental del Cálculo así como darse cuenta de que F es composición de dos funciones.

Las funciones que componen a F son:

$g:]0,\infty[\longrightarrow]0,\infty[$ dada por $g(t) = \sqrt{t}$ $\forall t \in]0,\infty[$ que sabemos que $g \in \mathcal{C}^1(]0,\infty[)$

$h:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \int_0^x e^{s^2} ds$ que, gracias a ser continua la exponencial, podemos aplicar TFC para obtener la derivada de h:

$h'(x) = e^{x^2}$ $\forall x \in]0,\infty[$ que sabemos que es continua.

Luego, como $F = h \circ g$, obtenemos que $F \in \mathcal{C}^1(]0,\infty[)$ por ser composición de funciones de clase $\mathcal{C}^1(]0,\infty[)$

Calculamos su derivada:

regla de la cadena

$$F'(t) = (H \circ g)'(t) = H'(g(t))g'(t) = e^{(\sqrt{t})^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{e^t}{2\sqrt{t}} \quad \forall t \in]0,\infty[.$$

3. Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$\dot{x} = (\frac{x}{t})^3 + \frac{x}{t} - 1, \; x(1) = 1.$$

¿En qué intervalo está definida?

Claramente nos encontramos frente a una ecuación $x' = F(t,x)$ donde $F: D \longrightarrow \mathbb{R}$ homogénea dada por $F(t,x) = \left(\frac{x}{t}\right)^3 + \left(\frac{x}{t}\right) - 1$ donde $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$, esto es así por la condición $x(1) = 1$

Para entenderlo mejor tomamos $h(\xi) = \xi^3 + \xi - 1$ | $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Para resolver la ecuación homogénea tomaremos el cambio de variable $\varphi: D \longrightarrow D'$ dado por

$$\varphi \equiv \begin{cases} s = t \\ y = \frac{x}{t} \end{cases}$$

con $D' = \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0\}$. A la vez tomaremos la restricción del problema

$$x(1) = 1 \iff y(1) = 1$$

Aplicando el cambio de variable que sabemos que es admisible porque se ha visto en teoría obtenemos la ecuación

$$x' = y't + y \iff y' = \frac{x' - \frac{y}{t}}{t}$$

Sustituyendo el cambio de variable

$$y's + y = y^3 + y - 1 \iff y' = \frac{y^3 - 1}{s} \rightarrow y = 1$$

donde claramente hemos encontrado una ecuación de la forma $y' = p(s)q(y)$

tales que $p(s) = \frac{1}{s}$ y $q(y) = y^3 - 1$.

Sabemos resolverlas al ser ecuaciones de variables separadas; siguiendo el cálculo formal visto en teoría obtenemos (sabiendo que la única solución constante es $y = 1 \iff x(t) = t$)

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y^3-1}{s} \iff \int \frac{dy}{y^3-1} = \int \frac{ds}{s}$$

Obteniendo el resultado:

·) $\int \frac{1}{s} ds = \ln(s) + c$ pues $s > 0$ según el dominio de la ecuación

·) $\int \frac{1}{y^3-1} dy = \int \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y^2-y+1} dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y+1} dy + \frac{2}{3}\int \frac{1}{y^2-y+1} dy = \frac{1}{3}\ln(y+1) + \frac{2}{3} f(y)$

$a^2+2ab+b^2$ $\quad a^2+b^2+2ab$

$y^2 - y + 1 = y^2 + 1 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$

$-1 = 2ab$

$ab = -\frac{1}{2}$ $\quad y^2 - y + \frac{1}{4}$

Sacando $f(y)$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$\ln(s) + c = \frac{1}{3}\ln(y+1) + \frac{2}{3} f(y)$$

que sabemos que define una ecuación implícita de la solución a la ecuación inicial

y además, con $y(1) = 1$

$$c = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{2}{3} f(1)$$

y sustituyendo en la expresión obtenida como solución y deshaciendo el cambio de variable vemos que estaría definida en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x > -t}_{\text{restricción del logaritmo}} \wedge t > 0\}$

4. Demuestra que las fórmulas

$$s = -e^t, \quad y = (t^2+1)x$$

definen un difeomorfismo que va de $D = \mathbb{R}^2$ a un dominio $\hat{D}$ que se especificará. Prueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación $x' = x + t$ y encuentra la ecuación transformada.

Sea $\varphi: D = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \hat{D}$ una función dada por $\varphi(t,x) = (s,y)$ donde $s = -e^{t} \wedge y = (t^2+1)x$. Veamos que es un difeomorfismo admisible sabiendo que $\hat{D} = \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s<0 \wedge y \in \mathbb{R}\}$. Para ver que sea un difeomorfismo debemos probar que, si $\psi = \varphi^{-1}$ en caso de que exista entonces $\varphi \in \mathcal{C}^1(D) \wedge \psi \in \mathcal{C}^1(\hat{D})$ así como la condición de admisibilidad tomando $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t,x) \longmapsto -e^{t}$, $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t,x) \longmapsto (t^2+1)x$.

- $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$ lo cual es claro sabiendo que $\varphi(t,x) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x))$ y, tanto φ_1 como φ_2 son funciones de clase $\mathcal{C}^1(D)$, φ_2 es producto de funciones de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
- $\psi \in \mathcal{C}^1(\hat{D})$; para ello, debemos conocer ψ, que sabemos que será

$$\psi(s,y) = \left(\ln(-s), \frac{y}{s^2+1} \right)$$

No obstante debemos comprobar que $\varphi \circ \psi = Id_{\hat{D}}$ y $\psi \circ \varphi = Id_D$

→ $\varphi \circ \psi = Id_{\hat{D}}$

Para ello, sea $(s,y) \in \hat{D}$, $s<0$, $y \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$\varphi \circ \psi(s,y) = \varphi(\psi(s,y)) = \varphi\left(\ln(-s), \frac{y}{s^2+1} \right) = \left(-e^{\ln(-s)}, (t^2+1)\frac{y}{s^2+1}\right) =$$

$$= \left(s, ((s)^2+1)\frac{y}{s^2+1} \right) = (s,y)$$

→ $\psi \circ \varphi = Id_D$

Para ello, sea $(t,x) \in D$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$\psi \circ \varphi(t,x) = \psi(\varphi(t,x)) = \psi(-e^t, (t^2+1)x) = \left(\ln(-(-e^t)), \frac{(t^2+1)x}{(\ln(e^t))^2+1} \right) =$$

$$= (t,x)$$

Por tanto sabemos ya que $\psi = \varphi^{-1}$, veamos que es de clase $\mathcal{C}^1(\hat{D})$; esto es cierto porque ambas de sus componentes $\psi_1 :]-\infty,0[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(s,y) \longmapsto \ln(-s)$ y $\psi_2 :]-\infty,0[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(s,y) \longmapsto \frac{y}{s^2+1}$ son de clase $\mathcal{C}^1(\hat{D})$, en el caso ψ_2 es menos trivial, no obstante es producto de funciones de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}^1(]-\infty,0[)$

Veamos ahora que φ es admisible (en consecuente lo será ψ)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)x' \neq 0$$; o lo que es lo mismo ya que $x' = x+t$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)(x+t) \neq 0$$

Sabiendo que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) = -e^t$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) = 0$ obtenemos que se cumple la condición de admisibilidad pues $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) \neq 0 \;\; \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$

La ecuación transformada es la siguiente sabiendo que $y' = 2tx + (t^2+1)x' \iff x' = \frac{y' - 2tx}{t^2+1} = \frac{y - 2\ln(-s)\frac{y}{s^2+1}}{(\ln(-s))^2+1}$ entonces:

$$x' = x + t$$

$$\frac{y - 2\ln(-s)\frac{y}{s^2+1}}{(\ln(-s))^2+1} = \frac{y}{s^2+1} + \ln(-s) \iff y' = \left(\frac{y}{s^2+1} + \ln(-s)\right)(\ln(-s)^2+1) + \frac{2\ln(-s)}{s^2+1}y =$$

$$= \frac{2\ln(-s)y}{s^2+1} + 3\ln(-s) + \frac{y}{s^2+1} + \ln(-s) + \frac{2\ln(-s)y}{s^2+1} = \frac{4\ln(-s)y}{s^2+1} + 4\ln(-s) + \frac{y}{s^2+1} = 4\ln(-s)\left(\frac{y}{s^2+1} + 1\right) + \frac{y}{s^2+1}$$

En resumen, la ecuación transformada es:

$$y' = 4\ln(-s)\left(\frac{y}{s^2+1} + 1\right) + \frac{y}{s^2+1} \quad \text{ó} \quad y' = \frac{y}{s^2+1}(4\ln(-s)+1) + 4\ln(-s)$$

5. Se considera la transformación en el plano

$$\psi(\theta, r) = (t, x), \quad t = r\cos\theta, \; x = r\operatorname{sen}\theta, \quad (\theta, r) \in \hat{\Omega} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, +\infty[.$$

Determina $\Omega = \psi(\hat{\Omega})$ y prueba que ψ es un difeomorfismo de $\hat{\Omega}$ a Ω. Dada una ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ con $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ¿bajo qué condiciones se puede asegurar que el difeomorfismo $\varphi = \psi^{-1}$ es admisible?