1. Distribución multibinomial

Para vectores, una distribución multibinomial es una distribución discreta multivariante, que extiende a la binomial cuando el experimento aleatorio tiene más de dos resultados posibles, no tan solo éxito o fracaso.

Sean $A_1, \dots, A_{n+1}$ los $n+1$ sucesos exhaustivos y mutuamente excluyentes de un experimento, es decir

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \Omega \ , \ A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$$

es fácil ver que constituyen una partición de Ω con probabilidad $p_i = P(A_i) \ \forall i \in \Delta_{n+1}$. Entonces

$$p_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i$$

En el caso de hacer k realizaciones independientes del experimento en las mismas condiciones, p_i constantes. Sean $X_1, \dots, X_{n+1}$ vv.aa. tales que X_i = nº veces que ocurre el suceso A_i en las k repeticiones. Entonces

$$X_{n+1} = k - \sum_{i=1}^{n} X_i$$

En estas condiciones definimos la distribución multinomial como la correspondiente al vector aleatorio $(X_1, \dots, X_{n+1})$ donde X_i cuenta el número de veces que ocurre A_i para todo $i \in \Delta_{n+1}$ de modo que

$$x_{n+1} = k - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces, se dice que $V = (X_1, \dots, X_n)$ sigue una distribución multinomial n-dimensional con parámetros k y $p_1, \dots, p_n$ que denotamos:

$$V \sim M_n(k; p_1, \dots, p_n)$$

si y sólo si su f.m.p n-dimensional viene dada por

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{k!}{x_1! \cdots x_n! \, (k - \sum_{i=1}^{n} x_i)!} p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{k - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

donde $k \in \mathbb{N}$, $0 < p_i < 1 \ \forall i \in \Delta_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i < 1$, $x_i \in \Delta_n$, y $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k$

Función generatriz de momentos

La función generatriz de momentos viene dada por:

$$M_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = E\left[e^{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i}\right] = \left(p_1 e^{t_1} + \dots + p_n e^{t_n} + \left(1-\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\right)^{n}, \; t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}$$

Distribuciones marginales

Sea $V \sim M_n(n; p_1,\dots,p_n)$, para cualquier subvector $V' = (X_{i_1},\dots,X_{i_j})$, con $i_1,\dots,i_j \in \{1,\dots,n\}$ siendo $i_m \neq i_p$, $m \neq p$, $m,p \in \Delta_j$ se cumple

$$V' \sim M_j(n; p_{i_1},\dots,p_{i_j}) \quad , j \in \Delta_{n-1}$$

En particular, para las marginales unidimensionales se cumple:

$$X_i \sim B(n, p_i) \quad , i \in \Delta_n$$

Esto es demostrable mediante funciones generatrices de momentos tal que

$$M_{V'}(t_1,\dots,t_j) = M_V(t_1,\dots,t_j,0,\dots,0)$$

Distribuciones condicionadas

Las distribuciones condicionadas de una multinomial siguen también una distribución multinomial, concretamente si $V \sim M_n(n; p_1,\dots,p_n)$ entonces

$$\left(V / X_{\ell+1}=x_{\ell+1} \dots X_n=x_n\right) \sim M_\ell\left(n - \sum_{i=\ell+1}^{n} x_i, \frac{p_1}{1-\sum_{i=\ell+1}^{n} p_i}, \dots, \frac{p_\ell}{1-\sum_{i=\ell+1}^{n} p_i}\right)$$

En particular, las condicionadas unidimensionales cumplen:

$$X_i / X_j = x_j \sim B\left(n - x_j, \frac{p_i}{1-p_j}\right) \quad , i,j \in \Delta_n$$

Reproductividad

Sean $X_1,\dots,X_p$ vectores aleatorios independientes n-dimensionales, con distribución multinomial con parámetros n_i, $i \in \Delta_p$ y $p_1,\dots,p_n$. Se tiene entonces

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \sim M_n\left(\sum_{i=1}^{p} n_i, p_1,\dots,p_n\right)$$

Vector de medias y covarianzas

Sea $X=(X_1,\dots,X_k)$, vector aleatorio k-dimensional, con distribución multinomial con parámetros n y $p_1,\dots,p_k$. Se tiene entonces

i) $E[X]=(np_1,\dots,np_k)$

ii) $Cov(X_i,X_j)=-np_ip_j \quad \forall i\neq j$

La demostración se basa en cálculos de momentos mediante la función generatriz de momentos.

2. Distribución Normal Bidimensional

Se dice que $V=(X_1,X_2)$ se distribuye según una normal bidimensional con vector de medias $\mu=(\mu_1,\mu_2)$ y con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho\\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

Si $\rho^2=1 \Rightarrow$ no puede ser una normal bivariante.

si su función de densidad de probabilidad viene dada por

$$f_V(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}e^{\left(\frac{-(x-\mu)^T}{2}\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right)}$$

donde $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, σ_i^2 es la varianza de x_i, $i=1,2$ y ρ es el coeficiente de correlación lineal de X_1 y X_2. Lo escribiremos $V\sim N_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

1. Independencia $\Leftrightarrow$ incorrelación $\Leftrightarrow$ Σ Diagonal

Observamos que Σ matriz de covarianzas de una normal bidimensional es no singular ($\rho^2\neq1$) y semidefinida positiva

Es fácil comprobar que bajo el supuesto de normalidad bivariante:

Independencia $\Leftrightarrow$ Incorrelación $\Leftrightarrow$ Σ Diagonal

De hecho, la segunda equivalencia es evidente, y la primera es debida a que

$$\rho=0 \Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

Marginales y condicionadas

Ambas distribuciones, marginales y condicionadas son normales

→ Marginales

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

→ Condicionadas

$$X_1 / X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 (1-\rho^2)\right)$$

$$X_2 / X_1 = x_1 \sim N\left(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 (1-\rho^2)\right)$$

Teorema para la función generatriz de momentos de la normal bivariante

Para $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$M_X(t_1, t_2) = M_X(t) = E[e^{\langle t, X \rangle}] = e^{\langle \mu, t \rangle + \frac{t \Sigma t^T}{2}} = e^{\left(t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{t_1^2\sigma_1^2 + t_2^2\sigma_2^2 + 2t_1t_2\rho\sigma_1\sigma_2}{2}\right)}$$

Normalidad para combinaciones lineales de las componentes

Sea $X \sim N_2(\mu, \Sigma)$. Se considera $A_{2\times q}$ una matriz de rango máximo q, con $q = 1, 2$. Entonces:

$$Y = X A_{2\times q} \sim N_q(\mu A, A^T \Sigma A)$$

–Demostración–

Es directo a partir del teorema anterior.

Sea $t \in \mathbb{R}^q$, entonces

$$E[e^{tY^T}] = E[e^{(tA^T)X^T}] = M_X(tA^T) = e^{(tA^T)\mu^T + \frac{(tA^T)\Sigma(tA^T)^T}{2}} = e^{t(\mu A)^T + \frac{t(A^T\Sigma A)t^T}{2}}$$

Entonces se deduce que $Y = XA \sim N_q(\mu A, A^T \Sigma A)$

Además, se tiene que $Y = XA_{2\times 2} = (a_{11}X_1 + a_{12}X_2, a_{21}X_1 + a_{22}X_2)$. De modo que cualquier vector bidimensional cuyas componentes sean combinación lineal de X_1 y X_2, componentes de un vector normal bidimensional, de modo que la matriz A que define estas combinaciones sea no singular, tiene una distribución normal bidimensional.