Ejercicio 1. Demostrar que si $G \leq S_n$, entonces $G \subseteq A_n$ o bien se tiene que $[G : G \cap A_n] = 2$. Concluir que un subgrupo de S_n consiste sólo en permutaciones pares, o bien contiene el mismo número de permutaciones pares que de impares.

Si $\mathcal{G} < S_n$ tiene una permutación impar $\Rightarrow [\mathcal{G} : \mathcal{G} \cap A_n] = 2$, es decir, $\mathcal{G}$ tiene el mismo número de permutaciones pares que impares. $\langle (12)(12 \ldots n) \rangle \hookrightarrow \mathcal{G}/A_n$ tiene dos clases de equivalencia

Como tiene perm. impar $\mathcal{G} \not\subset A_n$ y $\mathcal{G}A_n = S_n$. Aplicando el segundo teorema de isomorfía tenemos que $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G} \cap A_n} = \frac{S_n}{A_n} \cong \mathbb{Z}_2$ luego tiene índice 2 como se quería. $\square$

Ejercicio 2. Dado un cuerpo K, el grupo lineal especial de orden n sobre K, $SL_n(K)$, (también llamado el grupo unimodular de orden n sobre K) es

$$SL_n(K) = \{G \in GL_n(K) |\ \det(G) = 1\}$$

1. Se considera la aplicación $\det : GL_n(K) \to \overset{?}{F^\times}$ que aplica cada matriz en su determinante. Demostrar que dicha aplicación es un epimorfismo de grupos. ¿Cuál es el núcleo de este homomorfismo?
2. Si K es un cuerpo finito con q elementos, determinar el orden del grupo $SL_n(K)$.

1. Es claro que $Ker(\det) = \{A \in GL_n(K) | \det(A) = 1\} = SL_n(K)$. Para ver que es un epimorfismo basta ver que $Im(\det) = F^*$, pero esto es cierto pues $\forall u \in F^*\ \exists A \in GL_n(K) | \det(A) = u$; habría que ver por qué, pero es algo sencillo.

2. Para determinar el orden del grupo, basta saber que $|GL_n(K)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$ y $|K| = q$. Por el primer T^a de isomorfía, sabemos que $\frac{GL_n(K)}{Ker(\det)} = \frac{GL_n(K)}{SL_n(K)} \cong Im(\det) = K^*$

Como $GL_n(K)$ y $SL_n(K)$ son finitos tenemos que

$$\frac{|GL_n(K)|}{|SL_n(K)|} = |K^*| = q - 1 \Rightarrow |SL_n(K)| = \frac{|GL_n(K)|}{q-1} = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})}{(q-1)}$$

Ejercicio 3. Sea $n > 1$ un número natural, y sea G un grupo verificando que para todo par de elementos $x, y \in G$ se tiene que $(xy)^n = x^n y^n$. Se definen $H = \{x \in G |\ x^n = 1\}$, y $K = \{x^n |\ x \in G\}$. Demostrar que H y K son subgrupos normales de G, y que $|K| = [G : H]$.

Demostramos que $K \trianglelefteq \mathcal{G}$ y $H \trianglelefteq \mathcal{G}$:

1. $H \trianglelefteq \mathcal{G}$:

   Sea $h \in H$, $g \in \mathcal{G}$, vamos a ver que $ghg^{-1} \in H$, para ello, debemos ver que $(ghg^{-1})^n = 1$

   $(ghg^{-1})^n = g^n h^n (g^{-1})^n = g^n (g^{-1})^n = 1$

   Luego $H \trianglelefteq \mathcal{G}$ pues h, g son arbitrarios

2. Sabemos que $K \trianglelefteq \mathcal{G}$ sii $\forall u \in K, g \in \mathcal{G}$ $gug^{-1} \in K$ sii $\exists h \in \mathcal{G} | h^n = gug^{-1}$, pero $u \in K$ entonces $\exists h \in \mathcal{G} | h^n = u \Rightarrow gug^{-1} = gh^n g^{-1} = (ghg^{-1})^n$.

Debemos probar ahora que $|K| = [G:H]$, lo cual conseguimos por el primer Tª de isomorfía. Definimos

$$f: G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto x^u$$

Veamos que la aplicación está bien definida y que es un homomorfismo. Primero de todo, está claro que $\mathrm{Im}(f) = K$ y $\mathrm{Ker}\, f = H$

Sean $x, y \in G$ | $f(x) = f(y)$ sii $x^u = y^u$ sii $x = y$, luego está bien definida.

Si $x, y \in G$ $f(xy) = (xy)^u = x^u y^u = f(x) f(y)$, luego es un homomorfismo

Por tanto, aplicando el primer Tª de isomorfía tenemos que $\frac{G}{H} \cong K$ de donde deducimos que $[G:H] = |K|$, si G finito $\Rightarrow |G| = |K||H|$

Ejercicio 4. Para un grupo G se define su **centro** como

$$Z(G) = \{a \in G | \; \forall x \in G \; xa = ax\}.$$

1. Demostrar que $Z(G)$ es un subgrupo de G.
2. Demostrar que $Z(G)$ es normal en G.
3. Demostrar que G es abeliano si, y sólo si, $G = Z(G)$.
4. Demostrar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

1\. Probaremos la caracterización vista en el Tema 3:

a) Sean $x, y \in Z(G) \Rightarrow \begin{cases} xa = ax & \forall a \in G \\ ya = ay & \forall a \in G \end{cases} \Rightarrow xya = xay = axy \Rightarrow xy \in Z(G)$

b) Trivialmente $1 \in Z(G)$

c) Si $x \in Z(G) \Rightarrow xa = ax$, veamos que $x^{-1} \in Z(G)$ $x^{-1}a = x^{-1}axx^{-1} = x^{-1}xax^{-1} = ax^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in Z(G)$

Por tanto, $Z(G) < G$

2\. Para ver que es normal basta probar que, si $x \in G, y \in Z(G) \Rightarrow xyx^{-1} \in Z(G)$

$$xyx^{-1}a = xy(x^{-1}a) = x(x^{-1}a)y = ay = ya = xx^{-1}ya = xyx^{-1}a$$

Luego $Z(G) \triangleleft G$.

3\. $\Rightarrow)$ Si G abeliano $\Rightarrow \forall x, y \in G$ $xy = yx \Rightarrow Z(G) = G$

$\Leftarrow)$ Si $Z(G) = G \Rightarrow \forall x \in Z(G), \forall y \in G$ $xy = yx$, pero $Z(G) = G \Rightarrow x \in G$ $\Rightarrow G$ abeliano.

4 Si $G/Z(G)$ es cíclico $\Rightarrow G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$, si $y, z \in G$ $\begin{matrix} yZ(G) = x^u Z(G) \\ zZ(G) = x^w Z(G) \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \begin{matrix} y = x^u a \\ z = x^w b \end{matrix}$ $a, b \in Z(G) \Rightarrow yz = x^{u+w} \cdot a \cdot b = zy$

luego G es abeliano.

Ejercicio 5. Determinar el centro del grupo diédrico D_4. Observar que el cociente $D_4/Z(D_4)$ es abeliano, aunque D_4 no lo sea (compárese este hecho con el tercer apartado del ejercicio anterior).

$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$, $Z(D_4) = \{x \in D_4 | \; xa = ax \; \forall a \in D_4\} = \{1, r^2\}$

Usando el apartado 4 del ejercicio anterior vemos que $\frac{D_4}{Z(D_4)}$ es abeliano pues $Z(D_4) = \langle r^2 \rangle$ y por tanto es cíclico.

Esto mal aplicado

Ejercicio 6. Determinar el centro de los grupos S_n y A_n para $n \geq 2$.

Vamos a ver que $Z(S_n)=1$ si $n\geq 3$ y $Z(A_n)=1$ si $n\geq 4$

- Si $n\geq 3$ y $\sigma\in S_n$ $\sigma\neq 1 \Rightarrow \exists\, i,j\in\{1,\dots,n\}, i\neq j \mid \sigma(i)=j \Rightarrow \exists\, k\neq i, k\neq j$ $k\in\{1,\dots,n\}$

  considero la trasposición $\tau=(j\,k)$.

  Vamos a ver que $\underset{j}{\underset{\parallel}{\sigma(\tau(i))}}\neq \underset{k}{\underset{\parallel}{\tau(\sigma(i))}}$ luego $\sigma\tau\neq\tau\sigma$ y tenemos que $\sigma=1$.

- Si $n\geq 4$ y $\sigma\in A_n \Rightarrow \exists\, i\neq j\in\{1,\dots,n\} \mid \sigma(i)=j \Rightarrow \exists\, k\in\{1,\dots,n\}$ $k\neq i, k\neq j$ tomamos $\tau=(j\,k\,l)\in A_n$

  $\sigma(\tau(i))\neq\tau(\sigma(i))$ luego $Z(A_n)=\{1\}$

Estudiamos el centro para S_2 y para A_2, A_3:

$S_2=\{1,(12)\}=Z(S_2)$ por ser abeliano

$A_2=\{1\}=Z(A_2)$

$A_3=\{1,(123),(132)\}=Z(A_3)$ por ser abeliano

Ejercicio 7. Determinar el centro del grupo D_n para $n \geq 3$-

Sabemos que $D_n=\langle s,r \mid sr^i=r^{-i}s\rangle$; por tanto, partimos que $r^ir^j=r^jr^i$ $\forall i,j=1,\dots,n-1$, bastará encontrar los elementos de $\{sr^i \mid i=1,\dots,n\}$ tales que $sr^i=r^is$. Distinguimos casos:

i) Si n es impar $Z(D_n)=1$ pues $sr^i\neq r^is$ entonces $sr^jr^i=sr^ir^j=r^{-i}sr^j\neq r^isr^j$.

ii) Si n es par, es claro que $Z(D_n)=\{1,r^{n/2}\}$, pues en ese caso, procedemos por inducción sobre el exponente de sr^i:

$i=0$ trivial.

Sup. para i, lo vemos para $i+1$

$sr^{i+1}r^{n/2}=sr^{n/2+(i+1)}=sr^{n/2}r^{i+1}=r^{n/2}sr^{i+1}$

luego $r^{n/2}\in Z(D_n)$.

Ejercicio 8. Sean H y K dos subgrupos finitos de un grupo G, uno de ellos normal. Demostrar que

$$|H||K| = |HK||H \cap K|.$$

Este ejercicio es aplicación directa del segundo teorema de isomorfía. Supongamos que $K\trianglelefteq G$ entonces $\frac{H}{H\cap K}\cong\frac{HK}{K}$, de donde deducimos que $[H:H\cap K]=[HK:K]$, como H y K son finitos tenemos que HK es finito y $H\cap K$ también. Entonces $|H|/|H\cap K|=|HK|/|K| \Leftrightarrow |H||K|=|HK||H\cap K|$

Ejercicio 9. Sea G finito y $N \trianglelefteq G$. Probar que $G/N \cong G$ si, y sólo si, $N = \{1\}$, y que $G/N \cong \{1\}$ si, y sólo si, $N = G$.

$\Rightarrow$] Supongamos que $\frac{G}{N}\cong G \Rightarrow [G:N]=|G|$, como G finito $\Rightarrow [G:N]=\frac{|G|}{|N|}=|G| \Leftrightarrow |N|=1 \Rightarrow N=\{1\}$ por ser $N\trianglelefteq G$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $N=\{1\}$, como $N\trianglelefteq G$ podemos definir $\frac{G}{N}=\{xN \mid x\in G\}$ pero $xN=\{y\in G \mid y=xa$ para algún $a\in N\}$

$= \{y \in G \mid y = x\{1\}x\}$. Entonces $\frac{G}{N} = G$, se puede ver por órdenes.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\frac{G}{N} \cong \{1\} \Rightarrow [G : N] = 1 \Rightarrow$ solo hay una clase de equivalencia pues es $N \Rightarrow G = N$.

$\Leftarrow$) Trivial.

Ejercicio 10. Sean G y H dos grupos cuyos órdenes sean primos relativos. Probar que si $f : G \to H$ es un homomorfismo, entonces necesariamente $f(x) = 1$ para todo $x \in G$, es decir, que el único homomorfismo entre ellos es el trivial.

Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Entonces

i) $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = 1\}$

ii) $\operatorname{Im} f \leq H$

Por el primer T^a de isomorfía $\frac{G}{\operatorname{Ker} f} \cong \operatorname{Im} f \Rightarrow$ por ser finitos $\frac{|G|}{|\operatorname{Ker} f|} = |\operatorname{Im} f| \Rightarrow |\operatorname{Im} f| \mid |G|$, pero también $\operatorname{Im} f \leq H \Rightarrow |\operatorname{Im} f| \mid |H|$. Por tanto $\exists \delta \in \operatorname{Div}(|G|) \mid \delta \in \operatorname{Div}(|H|) \Rightarrow |\operatorname{Im} f| \leq \operatorname{mcd}(|G|, |H|) = 1$. Por tanto hemos demostrado que $|\operatorname{Im} f| = 1 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \{1\}$ para cualquier homomorfismo que exista entre ambos.

Ejercicio 11. Sean H y K subgrupos de G, y sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal de G tal que $HN = KN$. Demostrar que

$$\frac{H}{H \cap N} \cong \frac{K}{K \cap N}.$$

Por un lado, tenemos que $\frac{H}{H \cap N} \cong \frac{HN}{N}$; por otro lado, $\frac{K}{K \cap N} \cong \frac{KN}{N}$ gracias al segundo T^a de isomorfía. Como $HN = KN$ tenemos que $\frac{H}{H \cap N} \cong \frac{K}{K \cap N}$.

Ejercicio 12. Sea N un subgrupo normal de G tal que N y G/N son abelianos. Sea H un subgrupo cualquiera de G. Demostrar que existe un subgrupo normal $K \trianglelefteq H$ tal que K y H/K son abelianos.

Aplicando el Segundo Teorema de Isomorfía vemos que $K = H \cap N \trianglelefteq H$ de donde obtenemos que $K \leq N$ y por tanto abeliano. Además:

$$\frac{H}{K} \cong \frac{HN}{N}$$

Como $HN \subset G$, por definición de grupo cociente se tiene que $\frac{HN}{N} \subset \frac{G}{N}$. Ahora bien, $\frac{HN}{N}$ es un grupo luego $\frac{HN}{N} \leq \frac{G}{N}$ abeliano por serlo $\frac{G}{N}$. Por tanto, por el isomorfismo anterior se tiene que $\frac{H}{K}$ es abeliano.

Ejercicio 13. Sea G un grupo finito, y sean H, K subgrupos de G, con K normal y tales que $|H|$ y $[G : K]$ son primos relativos. Demostrar que H está contenido en K.

Por el Segundo Teorema de Isomorfía se tiene que:

$$\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H\cap K}$$

Como $HK < G$ se tiene que $\frac{HK}{K} < \frac{G}{K}$. Por tanto, $|\frac{HK}{K}| \mid [G:K]$. Por otro lado, al tratar con grupos finitos se tiene que

$$\left|\frac{H}{H\cap K}\right| = \frac{|H|}{|H\cap K|} \Rightarrow |H| = \left|\frac{H}{H\cap K}\right| |H\cap K| \Rightarrow \frac{|H|}{|H\cap K|} \mid |H|$$

Pero como $mcd(|H|,[G:K])=1$ tenemos que $\left|\frac{H}{H\cap K}\right|=1$, es decir, $H\subset H\cap K$ y por tanto se deduce que $H\subset K$.

Ejercicio 14. Sea G un grupo

1. Demostrar que para cada $a \in G$ la aplicación $\varphi_a : G \to G$ definida por $\varphi_a(x) = axa^{-1}$, es un automorfismo de G. φ_a se llama automorfismo interno o de conjugación de G definido por a.
2. Demostrar que la aplicación $G \to Aut(G)$, $a \mapsto \varphi_a$ es un homomorfismo.
3. Demostrar que el conjunto de automorfismos internos de G, que se denota $Int(G)$, es un subgrupo normal de $Aut(G)$.
4. Demostrar que $G/Z(G) \cong Int(G)$.
5. Demostrar que Int(G)=1 si y sólo si G es abeliano.

1. Debemos ver que es un homomorfismo, lo cual es claro y biyectiva, pero es fácil ver que $\varphi_{a^{-1}}$ es su inversa luego será biyectiva.

2. Sean $x,y\in G$ y $f: G \longrightarrow Aut(G)$, $a \longmapsto \varphi_a$ tenemos que $\forall a\in G$ $f(xy)=\varphi_{xy}$, si aplicamos $\varphi_{xy}(a)=$

$xya(xy)^{-1} = xyay^{-1}x^{-1} = x\varphi_y(a)x = \varphi_x(\varphi_y(a)) = f(x)f(y)(a)$ Luego $f(xy)=\varphi_{xy}=\varphi_x\varphi_y=f(x)f(y)$. Por tanto f es un homomorfismo de grupos.

3 Para ver que $Int(G) \trianglelefteq Aut(G)$ supondremos que $Int(G) < Aut(G)$ y solo probaremos la normalidad:

$f\circ\varphi_a\circ f^{-1} \in Int(G)$, aplicado a un x tenemos $f(\varphi_a(f^{-1}(x))) = f(af^{-1}(x)a^{-1}) = f(a)f(f^{-1}(x))f(a) = f(a)xf(a)^{-1}$

$= \varphi_{f(a)} \in Int(G)$

4 Definimos $\varphi: G \longrightarrow Aut(G)$, $g \longmapsto \varphi_g$, que ya hemos visto que es un homomorfismo.

$Ker(\varphi) = \{g\in G \mid \varphi_g = 1\} = \{g\in G \mid \varphi_g(x)=x\ \forall x\in G\} = \{g\in G \mid gxg^{-1}=x\} = \{g\in G \mid gx=xg\ \forall x\in G\} = Z(G)$

$Im(\varphi) = \{\varphi_g \in Aut(G) \mid g\in G\} = Int(G)$.

Por tanto, por el primer T^a de Isomorfía $\frac{G}{Z(G)} \cong Int(G)$

5. Supongamos que $Int(G) = \{1\} \Rightarrow \frac{G}{Z(G)} \cong \{1\} \Rightarrow$ por el ejercicio 9 tenemos que $G = Z(G) \Rightarrow G$ es abeliano

Supongamos ahora que G es abeliano $\Rightarrow G = Z(G) \Rightarrow$ por el ejercicio 9 $\frac{G}{Z(G)} \cong \{1\}$, como $\frac{G}{Z(G)} \cong Int(G)$

tenemos que $Int(G) \cong \{1\}$.

Ejercicio 15. Demostrar que el grupo de automorfismos de un grupo no abeliano no puede ser cíclico.

Como G no es abeliano, del ejercicio anterior deducimos que $\frac{G}{Z(G)} \cong Int(G)$ y $Int(G) \neq 1$. !! G abelia

Supongamos que $Aut(G)$ fuera cíclico, entonces $Int(G)$ es cíclico por ser subgrupo, entonces $\frac{G}{Z(G)}$ es cíclico.

es decir, $\frac{G}{Z(G)} = \langle g\,Z(G) \rangle$ para algún $g \in G$, entonces $\forall x \in G$ $x = g^k z$ con $z \in Z(G) \Rightarrow x = g^k z = z g^k$ y por tanto todos los elementos conmutan entre sí, es decir, G es abeliano.

Por tanto, hemos demostrado dos cosas:

i) Si $\frac{G}{Z(G)}$ es cíclico $\Rightarrow G$ es abeliano

ii) Si $Aut(G)$ es cíclico $\Rightarrow G$ es abeliano

y tenemos lo que queríamos

Ejercicio 16. Demostrar que el grupo $Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ es isomorfo a S_3.

Para trabajar con $Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ vamos a usar dos cosas:

i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong V^{abs}$; basta dar el isomorfismo

$$\varphi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow V^{abs} = \langle x, y \mid x^2 = 1, y^2 = 1, (xy)^2 = 1 \rangle = \{1, x, y, xy\}$$

$$(1,0) \longmapsto x$$

$$(0,1) \longmapsto y$$

Esto es claro por el Tª de Dyck pues $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = |V^{abs}|$ y se cumplen las relaciones

ii) Todo grupo de orden 6 es cíclico o isomorfo a $D_3 \cong S_3$

Construimos los automorfismos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(1,0)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(0,1)

Por tanto, es de orden 6; como no es cíclico pues ningún elemento genera a todos mediante multiplicaciones. Por tanto, $Aut\, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong S_3$.

Ejercicio 17. Demostrar que los grupos S_3, $\mathbb{Z}_{p^n}$ (con p primo) y $\mathbb{Z}$ no son producto directo internos de subgrupos propios.

Idea. Suponer que sí y conocer cómo son los subgrupos → Producto de cíclicos no siempre es cíclico.

Veamos S_3.

Si S_3 fuera producto directo interno, lo sería de subgrupos cíclicos, todo subgrupo de S_3 es cíclico o S_3. En ese caso, si $H \times K \cong S_3$ tenemos que, sin perder generalidad, $|H| = 2 \wedge |K| = 3$, de donde podemos ver que S_3 sería un cíclico de orden 6 !!

Veamos $\mathbb{Z}_{p^n}$

Si $\mathbb{Z}_{p^n} \cong H \times K$, como $H, K < \mathbb{Z}_{p^n}$ entonces $H = \mathbb{Z}_{p^r} \wedge K = \mathbb{Z}_{p^s}$ de donde vemos que $\mathbb{Z}_{p^n}$ no sería cíclico pues $mcd(p^r, p^s) = p^k$ para algún $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Veamos $\mathbb{Z}$

Como $\mathbb{Z}$ es cíclico, todos sus subgrupos son cíclicos. Además, si hubiera $H, K < \mathbb{Z}$ | $H \oplus K = \mathbb{Z}$ debería cumplirse que $mcd(|H|, |K|) = 1$, entonces $H \cap K \neq \{0\}$ pues si $H = n\mathbb{Z}$, $K = m\mathbb{Z}$ tenemos que $H \cap K = mn\mathbb{Z}$ de donde llegamos a que $H \oplus K \neq \mathbb{Z}$ pues no cumple la caracterización.

Ejercicio 18. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el grupo G es o no producto directo de los subgrupos H y K.

1. $G = \mathbb{R}^\times$, $H = \{\pm 1\}$, $K = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.
2. $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})\right\}$, $H = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})\}$, $K = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})\right\}$.
3. $G = \mathbb{C}^\times$, $H = z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$, $K = x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

Aunque sea trivial, veremos la caracterización en todos los casos

1. Es claro que $HK = G$ pues H aporta signo y $K = \mathbb{R}^+$. Además, $H \cap K = \{1\}$. Falta ver que $H, K \trianglelefteq G$.

$\forall h \in H, x \in G \quad xhx^{-1} = xx^{-1}h = h \in H$.

$\forall k \in K, x \in G \quad xkx^{-1} = k \cdot xx^{-1} = k \in K$

Por ser G abeliano. Entonces $\mathbb{R}^\times \cong HK$.

2 Usaremos el iv de la caracterización. Sea $h \in H, k \in K$ tenemos:

$h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$k = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad hk = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ab \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$

$kh = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & bc \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$

Pero $hk \neq kh$ luego $G \not\cong H \times K$.

3 Geométricamente se ve que sí se cumple pues H aporta el argumento y K aporta el módulo, no obstante, es claro que $HK = G$, $H \cap K = \{1\}$, veamos la normalidad de H y K.

$\forall h \in H, g \in G \quad ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H$

$\forall k \in K, g \in G \quad gkg^{-1} = gg^{-1}k = k \in H$

Por ser $\mathbb{C}^\times$ abeliano. Por tanto, tenemos que $\mathbb{C}^\times \cong H \times K$.

Ejercicio 19. Sean G, H y K grupos. Demostrar que:

1. $H \times K \cong K \times H$,
2. $G \times (H \times K) \cong (G \times H) \times K$.

1 Procedemos a dar el isomorfismo; sabemos que $H \times K$ dispondrá de una presentación $\langle (h,1),(1,k) \mid h \in H, k \in K \rangle$ y que $K \times H$ dispondrá de otra $\langle (k,1),(1,h) \mid k \in K, h \in H \rangle$

Ahora, es claro que se cumplen las condiciones del T^a de Dyck pues $|H \times K| = |K \times H|$ entonces $H \times K \cong K \times H$.

Cabe aclarar que se puede dar el isomorfismo siguiente
$$\varphi : K \times H \longrightarrow H \times K, \quad (k,h) \longmapsto (h,k)$$

2 Construimos el isomorfismo:

$$\begin{array}{ccccc} G \times (H \times K) & \xrightarrow{\varphi_1} & G \times H \times K & \xrightarrow{\varphi_2} & (G \times H) \times K \\ (g,(h,k)) & \longmapsto & (g,h,k) & \longmapsto & ((g,h),k) \end{array}$$

Es claro que es un isomorfismo pues preserva la operación y es composición de isomorfismos. Veamos que φ_1 y φ_2 son homomorfismos pues el resto es obvio:

$$\varphi_1((g,(h,k))(g_1,(h_1,k_1))) = \varphi_1((gg_1,(h,k)(h_1,k_1))) = \varphi_1((gg_1, hh_1, kk_1)) = (gg_1, hh_1, kk_1)$$
$$= (gg_1,(h,k)(h_1,k_1)) = (g,(h,k))(g_1,(h_1,k_1)) = \varphi_1((g,(h,k)))\,\varphi_1((g_1,(h_1,k_1)))$$

Análogo para φ_2.

Ejercicio 20. Dados isomorfismos de grupos $H \cong J$ y $K \cong L$, demostrar que $H \times K \cong J \times L$.

Basta construir $\varphi : H \times K \longrightarrow J \times L$ dado por $\varphi(h,k) = (\varphi_1(h), \varphi_2(k))$ que es isomorfismo pues $\varphi_1 : H \longrightarrow J$, $\varphi_2 : J \longrightarrow L$ son isomorfismos. Aquí hemos usado un teorema del producto directo externo

Ejercicio 21. Sean H, K, L y M grupos tales que $H \times K \cong L \times M$. ¿Se verifica necesariamente que $H \cong L$ y $K \cong M$?

No tiene porqué, buscamos un contraejemplo; pensamos en grupos cíclicos. Bastará encontrar dos formas distintas de obtener $\mathbb{Z}_n$ con $n \in \mathbb{N}$. He pensado en $\mathbb{Z}_{110}$.

- $110 = 22 \times 5$, $\operatorname{mcd}(22,5) = 1$
- $110 = 11 \times 10$, $\operatorname{mcd}(11,10) = 1$

Además, sabemos que $\mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{110} \wedge \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_{110}$. Por tanto, $\mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{10}$ pero $\mathbb{Z}_{22} \not\cong \mathbb{Z}_{11}$.

Ejercicio 22. Demostrar que no todo subgrupo de un producto directo $H \times K$ es de la forma $H_1 \times K_1$, con H_1 subgrupo de H y K_1 subgrupo de K.

En $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, como $\mathbb{Z}_2$ no tiene subgrupos propios tenemos que los subgrupos que son producto directo son $\{(0,0)\}$, $0 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1)\}$, $\mathbb{Z}_2 \times 0 = \{(0,0),(1,0)\}$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pero $\langle (1,1) \rangle = \{(0,0),(1,1)\}$ es un subgrupo propio que no es de la forma $H_1 \times K_1$ con $H_1 < \mathbb{Z}_2$, $K_1 < \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 23. Sean H, K dos grupos y sean $H_1 \lhd H$, $K_1 \lhd K$. Demostrar que $H_1 \times K_1 \lhd H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{H_1 \times K_1} \cong \frac{H}{H_1} \times \frac{K}{K_1}.$$

$H_1 \times K_1 < H \times K$ por un lema visto en clase

Veamos que $H_1 \times K_1 \lhd H \times K$, para ello si $(h,k) \in H \times K$, $(h_1, k_1) \in H_1 \times K_1$ entonces, como $(h,k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$ tenemos

$$(h,k)(h_1,k_1)(h^{-1}k^{-1}) = (hh_1h^{-1}, kk_1k^{-1}) \in H_1 \times K_1 \text{ pues } K_1 \lhd K, H_1 \lhd H.$$

Veamos ahora quién es el isomorfismo φ.

$$\frac{H \times K}{H_1 \times K_1} = \{(h,k)H_1 \times K_1 \mid (h,k) \in H \times K\} = \{(h,k)H_1 \times K_1 \mid h \in H, k \in K\}$$

$$(h,k)H_1 \times K_1 = \{(h',k') \in H \times K \mid h' \sim h, k' \sim k\} = \{(h',k') \in H \times K \mid h' \in hH_1, k' \in kK_1\}$$

Por tanto, definimos $\varphi : \frac{H \times K}{H_1 \times K_1} \longrightarrow \frac{H}{H_1} \times \frac{K}{K_1}$, $(h,k)H_1 \times K_1 \longmapsto (hH_1, kK_1)$ y vamos a ver que está bien definida y es un isomorfismo; de hecho es claro pues $\operatorname{Im} \varphi = \frac{H}{H_1} \times \frac{K}{K_1}$ y $[H \times K : H_1 \times K_1] = [H:H_1][K:K_1]$. Solo debemos probar que está bien definido y que es un homomorfismo.

Supongamos $\varphi((h,k)H_1 \times K_1) = \varphi((h',k')H_1 \times K_1) \Rightarrow (hH_1, kK_1) = (h'H_1, k'K_1) \Rightarrow hH_1 = h'H_1 \wedge kK_1 = k'K_1 \Rightarrow$ $h \sim h' \wedge k \sim k' \Rightarrow h' \in hH_1$, $k' \in kK_1$ y por tanto está bien definido.

Sean $(h,k)H_1 \times K_1, (h',k')H_1 \times K_1 \in \frac{H \times K}{H_1 \times K_1}$, comprobamos que es homomorfismo:

$$\varphi((h,k)H_1 \times K_1 \, (h',k')H_1 \times K_1) = \varphi((hh', kk')H_1 \times K_1) = (hh'H_1, kk'K_1) = (hH_1, kK_1)(h'H_1, k'K_1)$$
$$= \varphi((h,k)H_1 \times K_1)\varphi((h',k')H_1 \times K_1)$$

Luego, hemos probado el isomorfismo. Otra forma de hacer esto último es por el Primer T^a de isomorfía

$$\varphi : H \times K \longrightarrow \frac{H}{H_1} \times \frac{K}{K_1}, \quad (h,k) \longmapsto (hH_1, kK_1)$$

Ejercicio 24. Sean $H, K \lhd G$ tales que $H \cap K = 1$. Demostrar que G es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/K$.

Buscamos aplicar el primer Teorema de isomorfía; para ello, construimos el homomorfismo

$$\varphi : G \longrightarrow \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}, \quad g \longmapsto (gH, gK)$$

Veamos que es un homomorfismo; si $x, y \in G$ $\varphi(xy) = (xyH, xyK) = (xH, xK)(yH, yK) = \varphi(x)\varphi(y)$ por tanto, es un homomorfismo y por el Primer T^a de isomorfía

$$\frac{G}{\operatorname{Ker} \varphi} \cong \operatorname{Im} \varphi$$

Por un lado $\operatorname{Ker} \varphi = \{g \in G \mid gH = H, gK = K\} = \{g \in H, g \in K\} = H \cap K = 1$ por hipótesis. Como $\operatorname{Ker} \varphi = 1$ tenemos que φ es inyectiva y por tanto $\operatorname{Im} \varphi < \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$. Entonces $\frac{G}{1} = G \cong \operatorname{Im} \varphi < \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$

Ejercicio 25. Sean H y K subgrupos normales de G tales que $HK = G$. Demostrar que

$$G/(H \cap K) \cong H/(H \cap K) \times K/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

Demostramos el primer isomorfismo:

$$\mathcal{G}/_{H\cap K} \cong H/_{H\cap K} \times K/_{H\cap K}$$

Por el segundo Teorema de isomorfía tenemos que $H\cap K \trianglelefteq H$, $H\cap K \trianglelefteq K$. Debemos probar ahora que $H\cap K \trianglelefteq \mathcal{G}$

$$gxg^{-1} = hkx(hk)^{-1} = \underbrace{h\underbrace{kxk^{-1}}_{\in H\cap K \trianglelefteq K}h^{-1}}_{\in H\cap K \trianglelefteq H} \in H\cap K$$

Por tanto, podemos definir $\frac{\mathcal{G}}{H\cap K}$, tomamos ahora $\varphi: \mathcal{G} \longrightarrow \frac{H}{H\cap K} \times \frac{K}{H\cap K}$ y vemos que

$$(hk) \longmapsto (hH\cap K, kH\cap K)$$

está bien definida pues, sean $k_1, k_2 \in K$, $h_1, h_2 \in H$ tales que $h_1k_1 = h_2k_2$ veamos que $\varphi(h_1k_1) = \varphi(h_2k_2)$

$\varphi(h_1k_1) = (h_1 H\cap K, k_1 H\cap K) = ??$

En ese caso debemos probar que es homomorfismo pero es claro por las propiedades del grupo cociente. Tratamos de usar el Primer Teorema de isomorfía

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{hk \in \mathcal{G} \mid (hH\cap K, kH\cap K) = (H\cap K, H\cap K)\} = \{hk \in H\cap K\} = H\cap K$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \{(hH\cap K, kH\cap K) \mid h \in H, k \in K\} = \frac{H}{H\cap K} \times \frac{K}{K\cap H}$$

Por tanto $\quad \frac{\mathcal{G}}{H\cap K} \cong \frac{H}{H\cap K} \times \frac{K}{H\cap K}$

En definitiva, si no sabes qué hacer piensa en usar el Primer T^a de isomorfía

Probamos ahora el segundo isomorf; para ello, aplicamos dos veces el segundo T^a de isomorfía.

- $H, K < \mathcal{G}$, $K \trianglelefteq \mathcal{G} \Rightarrow \frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H\cap K}$, pero $HK = \mathcal{G} \Rightarrow \frac{\mathcal{G}}{K} \cong \frac{H}{H\cap K}$
- $H, K < \mathcal{G}$, $H \trianglelefteq \mathcal{G} \Rightarrow \frac{HK}{H} \cong \frac{K}{H\cap K} \Rightarrow \frac{\mathcal{G}}{H} \cong \frac{K}{H\cap K}$

De aquí, aplicando el ejercicio 20 obtenemos que $\frac{\mathcal{G}}{K} \times \frac{\mathcal{G}}{H} \cong \frac{H}{H\cap K} \times \frac{K}{H\cap K}$, $H\cap K \trianglelefteq H$, $H\cap K \trianglelefteq K$ por el segundo teorema de isomorfía.

Ejercicio 26. Demostrar que si G es un grupo que es producto directo interno de subgrupos H y K, y $N \trianglelefteq G$ tal que $N \cap H = \{1\} = N \cap K$, entonces N es abeliano.

Sabemos que $G = HK$, buscamos probar que N conmuta con H y con K. Probamos que N conmuta con H y con K es análogo. Sea $h \in H$, $n \in N$ tenemos que, como $N \trianglelefteq G$, N es un grupo y $h \in G$ por ser $H < G$ tenemos que $nhn^{-1} \in N$ y ahora como N es un grupo es cerrado para el producto luego $nhn^{-1}h^{-1} \in N$

Veamos ahora que tiene que ser 1, pues $nhn^{-1}h^{-1} \in H$ por la misma razón que $N \Rightarrow nhn^{-1}h^{-1} \in N \cap H = \{1\}$
Análogamente N conmuta con H.
Sea ahora $g \in G$, sabemos que $G = HK \Rightarrow \exists h \in H, k \in K \mid hk = g$ entonces.

$$ng = nhk = hnk = hkn = gn$$

luego $\forall g \in G$ $ng = gn$ y como $N \trianglelefteq G$ tenemos que N es abeliano.

Ejercicio 27. Dar un ejemplo de un grupo G que sea producto directo interno de dos subgrupos propios H y K, y que contenga a un subgrupo normal no trivial N tal que $N \cap H = \{1\} = N \cap K$. Concluir que para $N \trianglelefteq H \times K$ es posible que se tenga

$$N \neq (N \cap (H \times 1)) \times (N \cap (1 \times K)).$$

$G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z} = K$, tomamos $N = \langle (1,1) \rangle \trianglelefteq G$ pues $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es abeliano $\Rightarrow$ todo subgrupo es normal.

$N \cap H = \{(1,0) \mid (1,1) = (1,0)\} = \{(0,0)\}$

$N \cap K = \{(0,0)\}$

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $H = \langle (1,0) \rangle$, $K = \langle (0,1) \rangle$, $N = \langle (1,1) \rangle$

$\varphi(N) \trianglelefteq H \times K$, $\varphi(N) = \{((0,0),(0,0)), ((1,0),(0,1))\}$

$N \cap (H \times (0,0)) = \langle (1,1) \rangle \cap \langle (1,0) \rangle = \{(0,0)\}$

$N \cap (K \times (0,0)) = \{(0,0)\}$

Luego $N \neq \{(0,0)\}$.

Ejercicio 28. Sea G un grupo finito que sea producto directo interno de dos subgrupos H y K tales que $mcd(|H|, |K|) = 1$. Demostrar que para todo subgrupo $N \leq G$ verifica que $N = (N \cap H) \times (N \cap K)$.

Como G es finito, $G \cong H \times K$ y $mcd(|H|,|K|) = 1$ tenemos que, si $N < G$, en particular $N < H \times K$ entonces $\exists!\, H_1 < H, K_1 < K \mid N = H_1 \times K_1$. Por tanto:

$H_1 < H$, $K_1 < K$, $K \cap H = \{1\}$

$(N \cap H) \times (N \cap K) = (H_1 \times K_1 \cap H \times \{1\}) \times (H_1 \times K_1 \cap \{1\} \times K) = (H_1 \times \{1\}) \times (\{1\} \times K_1) = H_1 \times K_1 = N$

$N = H_1 \times K_1$

$H \times \{1\} = H$

producto interno

Ejercicio 29. Sea G un grupo y sea $f: G \to G$ un endomorfismo idempotente (esto es, verificando que $f^2 = f$) y tal que $Im(f) \trianglelefteq G$. Demostrar que $G \cong Im(f) \times Ker(f)$.

¿inyectiva?

Debemos ver alguna de las condiciones de caracterización del producto interno. Dados los dados, es claro que $Ker(f) \trianglelefteq G$.

Veamos que $Im f \cap Ker f = \{1\}$.

Sea $x \in Im f \cap Ker f \Rightarrow \exists y \in G \mid f(y) = x \wedge f(x) = 1$ pero $f(f(g)) = f(g)\ \forall g \in G$ entonces $f(f(g)) = f(x) = 1 \Rightarrow f(g) = 1 \Rightarrow x = 1$. Por tanto, $Im f \cap Ker f \subset \{1\}$

Como $1 \in Ker f \wedge 1 \in Im f \Rightarrow \{1\} \subseteq Im f \cap Ker f$.

otra forma es probar ahora que $G = Im f\, Ker f$

Veamos que $\phi(h,k) = hk$, $h \in Im f$, $k \in Ker f$. Falta probar que $f(x) = x$ con $x \in Im f$

si $x \in Im f$ $\exists y \in G \mid f(y) = x$

- $\phi((h,k)(h',k')) = \phi(hh', kk') = hh'kk' = h'hk'k = \phi((h'h, k'k)) = \phi((h',k')(h,k))$ $\Rightarrow f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$

- Inyectividad. $Ker \phi = \{(h,k) \in Im f \times Ker f \mid hk = 1\} = \{(h,k) \in Im f \times Ker f \mid h = k^{-1}\} = Ker f \cap Im f = \{1\}$

- Sobreyectividad. Sea $x \in G$, sabemos que $f(x) \in Im f \wedge f(x)^{-1} x \in Ker f$ pues $f(f(x^{-1})x) = f(f(x)^{-1}) f(x) = f(x)^{-1} f(x) = 1$. Entonces $x = f(x) f(x)^{-1} x = \phi(f(x), f(x)^{-1} x)$.

Por tanto ϕ es un isomorfismo, es decir, $\mathcal{G} \cong \mathrm{Im} f \times \mathrm{Ker} f$

Ejercicio 30. Sea S un subconjunto de un grupo G. Se llama *centralizador* de S en G al conjunto

$$C_G(S) = \{x \in G \,|\, xs = sx \ \forall s \in S\} = \{x \in \mathcal{G} \,|\, sxs^{-1} = x \ \forall s \in S\} =$$

y se llama *normalizador* de S en G al conjunto

$$N_G(S) = \{x \in G \,|\, xS = Sx\}$$

1. Demostrar que el normalizador $N_G(S)$ es un subgrupo de G.
2. Demostrar que el centralizador $C_G(S)$ es un subgrupo normal de $N_G(S)$.
3. Demostrar que si S es un subgrupo de G entonces S es un subgrupo normal de $N_G(S)$.

1. Sean $x, y \in N_{\mathcal{G}}(S) \Rightarrow xS = Sx \wedge yS = Sy$, veamos que $xyS = Sxy$

$$xyS = xSy = Sxy$$

Como $S = S$, tenemos que $1 \in N_{\mathcal{G}}(S)$

Sea $x \in N_{\mathcal{G}}(S)$, ¿$x^{-1} \in N_{\mathcal{G}}(S)$?, bastaría ver que $x^{-1}S = Sx^{-1}$

$$x^{-1}S = (Sx)^{-1} = (xS)^{-1} = Sx^{-1}$$

Luego $N_{\mathcal{G}}(S) < \mathcal{G}$

2. Sea $x \in N_{\mathcal{G}}(S)$, $y \in C_{\mathcal{G}}(S)$, debemos ver que $xyx^{-1} \in C_{\mathcal{G}}(S)$, para ello, vamos a ver que, si $s \in S$

$$xyx^{-1}s = xysx^{-1} = xsyx^{-1} = sxyx^{-1}$$

Esto es así porque $x \in N_{\mathcal{G}}(S)$ luego $xS = Sx$.

3. Sea $x \in N_{\mathcal{G}}(S)$, $y \in S$, $xyx^{-1} \overset{?}{\in} S$, como $xS = Sx$ tenemos que $\exists s \in S \mid yx^{-1} = x^{-1}s$ luego

$$xyx^{-1} = xx^{-1}s = s \in S$$

Luego $S \trianglelefteq N_{\mathcal{G}}(S)$

Ejercicio 31. Sea G un grupo y H y K subgrupos suyos con $H \subset K$. Entonces demostrar que H es normal en K si y sólo si $K < N_G(H)$. (Así, el normalizador $N_G(H)$ queda caracterizado como el mayor subgrupo de G en el que H es normal.)

$\Leftarrow$) Como $K < N_{\mathcal{G}}(H)$ se tiene que $kH = Hk \ \forall k \in K$ luego $H \trianglelefteq K$.

$\Rightarrow$) Sabemos que $H \trianglelefteq K \Rightarrow \forall k \in K \ kH = Hk \Rightarrow k \in N_{\mathcal{G}}(H) \Rightarrow K \subset N_{\mathcal{G}}(H)$. Como $K, N_{\mathcal{G}}(H) < \mathcal{G}$ tenemos $K < N_{\mathcal{G}}(H)$.

Ejercicio 32. 1. Demostrar que $C_G(Z(G)) = G$ y que $N_G(Z(G)) = G$.

2. Si G es un grupo y $H < G$ ¿Cuando es $G = N_G(H)$? ¿Y cuando es $G = C_G(H)$?

3. Si H es un subgrupo de orden 2 de un grupo G, demostrar que $N_G(H) = C_G(H)$. Deducir que H es normal en G si y solo si está contenido en $Z(G)$.

1. $C_G(Z(G)) = \{x \in G \mid xz = zx \ \forall z \in Z(G)\} = G$.

$N_G(Z(G)) = \{x \in G \mid xZ(G) = Z(G)x\} = G$ pues $xZ(G) = \{y \in G \mid ya = x,\ a \in Z(G)\} = \{y \in G \mid ay = ya = x,\ a \in Z(G)\} = Z(G)x$

$\hookrightarrow Z(G) \trianglelefteq G$.

2. $N_G(H) = \{x \in G \mid xH = Hx\} = G$ sii $H \trianglelefteq G$

$C_G(H) = \{x \in G \mid xs = sx \ \forall s \in H\} = G$ sii $H \subset Z(G)$

3. $N_G(H) = \{x \in G \mid xH = Hx\} = \{x \in G \mid xh = h'x,\ h, h' \in H\} = \{x \in G \mid xh = hx \ \forall h \in H\} = C_G(H)$

$xh' = h'x$, $xh = hx$, $xh' = hx$

$\Rightarrow)$ Como $H \trianglelefteq G$ tenemos por el apartado anterior que $G = N_G(H) = C_G(H) \Rightarrow H \subset Z(G)$

$\Leftarrow)$ Si $H \subset Z(G)$, por el apartado anterior $G = C_G(H) = N_G(H) \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Ejercicio 33. Sea G un grupo arbitrario. Para dos elementos $x, y \in G$ se define su conmutador como el elemento $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. (El conmutador recibe tal nombre porque $[x, y]yx = xy$.)

Como $[x, y]^{-1} = [y, x]$, el inverso de un conmutador es un conmutador. Sin embargo el producto de dos conmutadores no tiene porqué ser un conmutador. Entonces se define el *subgrupo conmutador o (primer) subgrupo derivado* de G, denotado $[G, G]$, como el subgrupo generado por todos los conmutadores de G.

1. Demostrar que, $\forall a, x, y \in G$, se tiene que $a[x, y]a^{-1} = [axa^{-1}, aya^{-1}]$.
2. Demostrar que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G.
3. demostrar que el grupo cociente $G/[G, G]$, que se representa por G^{ab}, es un grupo abeliano (que se llama el abelianizado de G).
4. Demostrar que G es abeliano si y sólo si $[G, G] = 1$.
5. Sea N un subgrupo normal de G. Demostrar que el grupo cociente G/N es abeliano si y sólo si $N > [G, G]$ (así que el grupo $[G, G]$ es el menor subgrupo normal de G tal que el cociente es abeliano).

El conmutador cumple $[x,y]yx = xy$. Define el subgrupo conmutador o primer grupo derivado $[g,g]$, el subgrupo generado por los conmutadores de g.

$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$

i) $a[x,y]a^{-1} = [axa^{-1}, aya^{-1}] = axa^{-1}aya^{-1}ax^{-1}a^{-1}ay^{-1}a^{-1}$

$||$

$axyx^{-1}y^{-1}a^{-1} = axya^{-1}ax^{-1}y^{-1}a^{-1} = axa^{-1}aya^{-1}ax^{-1}a^{-1}ay^{-1}a$

ii) $[g,g] \triangleleft g$, $\forall z \in [g,g]$, $z = [x_1,y_1][x_2,y_2] \dots [x_n,y_n]$, sea $a \in g$,

$aza^{-1} = a[x_1,y_1]a^{-1} \_\_\_ a[x_n,y_n]a^{-1} = [ax_1a^{-1}, ay_1a^{-1}] \_\_\_ [ax_na^{-1}, ay_na^{-1}] \in [g,g]$

iii) $\forall x,y \in g$, $xy = [x,y]yx$

$xy[g,g] = yx[g,g]$

iv) $g/[g,g]$ es abeliano y $[g,g] \triangleleft g$

$\Leftarrow)$ g es abeliano

$\Rightarrow)$ Como g abeliano $\Rightarrow [x,y] = 1 \Rightarrow [g,g] = 1$

v) $\Rightarrow)$ Sea $p : g \longrightarrow g/N$, como $N \triangleleft g \Rightarrow \ker p = N$

$\forall [x,y] \in [g,g]$, $p([x,y]) = [x,y]N \overset{?}{=} N \Rightarrow [g,g] < N$

$\Leftarrow)$ $xN, yN \in g/N$, $xNyN = xyN = [x,y]yxN = yxN = yNxN$

Ejercicio 34.
1. Calcular el subgrupo conmutador de los grupos S_3, A_4, D_4 y Q_2.
2. Demostrar que, para $n \geq 3$, el subgrupo conmutador de S_n es A_n y que éste es el único subgrupo de S_n de orden $n!/2$.

Mis compañeros de clase van grupo por grupo usando def. anterior.