Definición de continuidad

Continuidad de funciones reales de variable real

$E \subset \mathbb{R}$, $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \in E$

f es continua en un punto $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ [\, y \in E, \ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon \,]$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \ \exists \mathcal{U} \in \mathcal{U}(x) \ / \ f(\mathcal{U}) \subset V$$

$$\Updownarrow$$

$$V \subset \mathcal{U}(f(x)) \implies f^{-1}(V) \subset \mathcal{U}(x)$$

No es inversa de f, sino la imagen inversa.

Donde E y F son espacios métricos cuyas distancias se denotan ambas por d
↳ pero son distintas

Continuidad en un punto

Función continua en un punto

Se dice que $f: E \to F$ es continua en un punto $x \in E$ cuando

$$V \in \mathcal{U}(f(x)) \implies f^{-1}(V) \subset \mathcal{U}(x)$$

En $\mathbb{R}^N$ puedo usar la distancia que quiera.

Caracterizaciones

Para $f: E \to F$ y $x \in E$, son equivalentes:

(i) f continua en el punto x.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ y \in E, \ d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

(iii) $x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\{x_n\} \longrightarrow x \implies \{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$

(i) $\implies$ (ii)

sea $\varepsilon > 0$, $B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{U}(f(x)) \implies f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subset \mathcal{U}(x) \implies \exists \delta > 0 \ / \ B(x, \delta) \subset$

$\subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Sea $y \in E$ / $d(x, y) < \delta \implies d(f(y), f(x)) < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea $V \in \mathcal{U}(f(x)) \,/\, f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x)$

Fijado $n \in \mathbb{N}$ $B(x, \frac{1}{n}) \not\subset f^{-1}(V) \Rightarrow \exists\, x_n \in E \,/\, d(x_n, x) < \frac{1}{n} \wedge f(x_n) \notin V$. Luego

$\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ ↯

Carácter local

Sea $f: E \longrightarrow F$ $\emptyset \neq A \subset E$, $x \in A$

- f es continua en x $\Rightarrow$ $f|_A$ es continua en A — No sería en x?
- $f|_A$ continua en x, $A \in \mathcal{U}(x)$ $\Rightarrow$ f es continua en x.

La función es secuencialmente continua

Continuidad global

Se dice que una función es continua en $A \subset E$ cuando f es continua en todos los puntos $x \in A$. Si f es continua en su dominio se dice que f es continua

Caracterizaciones

Sea $f: E \longrightarrow F$ son equivalentes:

(i) f es continua

(ii) $\forall\, \mathcal{U} \subset F$ abierto, $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto

(iii) $\forall\, C \subset F$ cerrado, $f^{-1}(C)$ es cerrado

(iv) f preserva la convergencia de sucesiones: para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de E, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.

Conjuntos definidos por funciones continuas

$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

$\{x \in E \,/\, f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^+) \wedge \{x \in E / f(x) < 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ abiertos

cualquier abierto

$\{x \in E \,/\, 0 \leq f(x) \leq 1\} = f^{-1}([0,1])$ cerrado

Carácter local

- $\emptyset \neq A = A^\circ \subset E$

  f es continua en $A \Leftrightarrow f|_A$ es continua

- $E = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ donde $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ$ y $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\circ$

  f es continua $\Leftrightarrow f|_{\mathcal{U}}$ y $f|_{\mathcal{V}}$ son continuas

- f es continua $\Leftrightarrow \forall x \in E \; \exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{U}(x) \,/\, f|_{\mathcal{U}}$ es continua.

Límite funcional

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in A'$, $L \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,/\, x \in A,\; 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Límite de una función en un punto

Sean E, F espacios métricos $\emptyset \neq A \subset E$, $f: A \longrightarrow F$, $\alpha \in A'$

se dice que f tiene límite en el punto α cuando $\exists L \in F$ verificando:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,/\, x \in A,\; 0 < d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(x), L) < \varepsilon$.

Entonces L es único, decimos que L es límite de f en α y escribimos $L = \lim_{x \to \alpha} f(x)$

Caracterización

$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \mathcal{V} \in \mathcal{U}(L) \; \exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{U}(\alpha) \,/\, f(\mathcal{U} \cap (A \setminus \{\alpha\})) \subset \mathcal{V}$

$\Leftrightarrow x_n \in A \setminus \{\alpha\} \; \forall n \in \mathbb{N},\; \{x_n\} \to \alpha \Rightarrow \{f(x_n)\} \longrightarrow L$

Carácter local y relación con la continuidad

Carácter local

$B = \{x \in A \,/\, \overbrace{0 < d(x,\alpha) < r}^{B(\alpha,r)}\}$ que verifica $\alpha \in B'$. Entonces:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \iff \lim_{x\to\alpha} f|_B(x) = L$$

Relación con la continuidad

Límite no tiene sentido

- Si $\alpha \in A \setminus A'$ $\Rightarrow$ f es continua en α
- Si $\alpha \in A \cap A'$ $\Rightarrow$ f continua en $\alpha \iff \lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$
- Si $\alpha \in A' \setminus A$ $\Rightarrow$ f tiene límite en $\alpha \iff \exists g : A \cup \{\alpha\} \to F$ continua en α con $g(x) = f(x)$ $\forall x \in A$ $\Rightarrow$ g es única $g(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f(x)$

Composición de funciones y cambio de variable

Continuidad de la composición

Sean $\mathcal{G}, E, F$ espacios métricos, $\varphi : \mathcal{G} \to E$, $f : E \to F$, $f\circ\varphi : \mathcal{G} \to F$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ continua en } z \in \mathcal{G} \\ f \text{ continua en } x = \varphi(z) \end{array}\right\} \Rightarrow f\circ\varphi \text{ es continua en } z.$$

Si φ y f continuas $\Rightarrow$ $f\circ\varphi$ continua

Cambio de variable para calcular un límite

E, F espacios métricos, $\emptyset \neq A \subset E$, $f : \boxed{A} \to F$, $\alpha \in E$

$\mathcal{G}$ espacio métrico, $T \subset \mathcal{G}$ / $\varphi : \boxed{T} \to E$, $z \in T'$ cumpliendo:

$$\lim_{t\to z} \varphi(t) = \alpha \in E \text{ y } \underbrace{\varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall t \in T \setminus \{z\}}_{\text{Automático cuando } \varphi \text{ es inyectiva}}$$

Entonces $\alpha \in A'$ y:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \in F \Rightarrow \lim_{t\to z} f(\varphi(t)) = L$$

Si no existe

Tampoco tiene límite

El recíproco sirve para determinar la no existencia de límite.

(*) Si hago el cambio de variable en dos q distintos y hay límites distintos $\Rightarrow$ f no tiene límite.

Ejemplos de funciones continuas

Mirar presentación

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Sea $M \in \mathbb{N}$, $F = F_1 \times \dots \times F_M$.

Con $k \in \Delta_M$ definimos $\pi_k : F \longrightarrow F_k$ / $\pi_k(y) = y(k) \in F_k$ — Proyección coordenada

$\emptyset \neq E \xrightarrow{f} F$ consideramos $f_k = \pi_k \circ f : E \longrightarrow F_k$ y se le dice que es la k-ésima componente de f.

Por tanto $x \in E$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x))$ $\forall x \in E$. De donde se obtiene que $f = (f_1, \dots, f_M)$ pero f no pertenece a un producto cartesiano porque simplemente es una abreviatura.

Supongamos $E, E_1, \dots, E_M$ son espacios métricos y $F = F_1 \times \dots \times F_M$ esp. métrico producto.

Entonces $\pi_k : F \longrightarrow F_k$ es continua $\forall k \in \Delta_M$

$d(\pi_k(y), \pi_k(z)) \leq d_\infty(y,z)$. Cumple la definición ε-δ con $d_\infty(x,y) < \delta$

Consideramos $f : E \longrightarrow F$ continua en $x \in E \iff f_k$ continua en $x \in E$ $\forall k \in \Delta_M$

Definimos la composición y vemos la continuidad (composición de funciones continuas)

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\{x_n\} \longrightarrow x$

$\{f_k(x_n)\} \longrightarrow f_k(x)$ $\forall k \in \Delta_M$

Usar la convergencia del producto

$\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$

Operaciones con funciones

Sean $E, Y \neq \emptyset$ conjuntos. $\mathcal{F}(E,Y) = \{$aplicaciones de E en $Y\}$

$$\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$$

Las operaciones con funciones, vamos a poder hacer las mismas que haya en el codominio.

Como caso particular, es importante estudiar el caso en el que Y es un espacio vectorial $\Rightarrow \mathcal{F}(E,Y)$ espacio vectorial. Por tanto:

Suma en Y

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in E \quad \forall f,g \in \mathcal{F}(E,Y)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Producto por escalares en Y

$$\Lambda \in \mathcal{F}(E) \qquad (\Lambda g)(x) = \Lambda(x) g(x)$$

Función con valores escalares

En particular, si tomo $f, g \in \mathcal{F}(E)$ basta con tomar f como Λ.

Este conjunto $\mathcal{F}(E)$ tiene estructura de anillo.

Veamos que al ser anillo, se permite la división cuando $g(E) \subset \mathbb{R}^*$, es decir, $g(x) \neq 0 \ \forall x \in E$

Por tanto,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

¿Esas operaciones conservan la continuidad?

Sea E un espacio métrico, Y espacio normado. Sean $f,g: E \longrightarrow Y$, $\Lambda: E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Veamos que si f,g,Λ son continuas en $x \in E \Rightarrow f+g, \Lambda f(x)$ son continuas en x

Tenemos $\underset{\Phi}{\overset{(f,g)}{\shortparallel}}: E \longrightarrow Y \times Y \xrightarrow{\ \sigma\ } Y$ donde σ va a consistir en sumar las componentes

$(\Lambda, g) = \varphi: E \longrightarrow \mathbb{R} \times Y \xrightarrow{\ \tau\ } Y$ donde τ va a consistir en λv donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y v vector

Por tanto $\sigma \circ \Phi = f+g$ puesto que σ es continua en $Y \times Y$ y Φ es continua en $x \in E$ ya que f y g lo son. Y $\tau \circ \varphi = \Lambda g$ que es continua por ser composición de continuas.

En el caso de que $\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tenemos que $\tau \circ \varphi$ es el producto escalar.

Veamos qué ocurre con el cociente:

Tomamos $(f,g)=\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \xrightarrow{\Omega} \mathbb{R}$ donde $\Omega(x,y)=\frac{x}{y}$

por tanto $\Omega\circ\varphi$ consiste en la división de funciones que es continua por ser composición de continuas.

Como conclusión, es necesario que la operación en el espacio normado sea continua.

Tomamos $C(E,Y)\subset \mathcal{F}(E,Y)$ donde $C(E,Y)$ forman un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E,Y)$. En particular, tomamos $Y=\mathbb{R} \Rightarrow C(E)\subset\mathcal{F}(E)$ es subanillo de $\mathcal{F}(E)$, concretamente es un subanillo pleno, es decir, si $\boxed{\left.\begin{matrix} f,g\in C(E) \\ g(E)\subset\mathbb{R}^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f}{g}\in C(E).}$

Caso $\mathbb{R}^N$

Sea $E=A\subset\mathbb{R}^N$ un espacio métrico con la $d_{|A}: A\times A\longrightarrow\mathbb{R}$ y sea $Y=\mathbb{R}$ ó $Y=\mathbb{R}^M$ con $M>1$. Definimos $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ una función a la que llamamos campo escalar, concretamente es una función real de varias variables reales.

En el caso de $M>1$ $f: A\longrightarrow\mathbb{R}^M$ es un campo vectorial

Al tener $C(A,\mathbb{R}^M)\subset\mathcal{F}(A,\mathbb{R}^M)$ espacio vectorial $\Rightarrow C(A,\mathbb{R}^M)$ subesp. vect., en el caso $M=1$ tenemos un subanillo de $\mathcal{F}(A)$.

Como ejemplos de funciones de $C(A)$ tenemos las funciones constantes, las proyecciones coordenadas. Si hacemos sumas y productos obtenemos monomios y al sumar monomios polinómicos $\Rightarrow$ podemos considerar funciones polinómicas $P(A)$ que es el subanillo engendrado por dichas operaciones. Haciendo cocientes de polinomios conseguimos las funciones racionales. Por tanto:

Nuestro interés

$$\boxed{P(A)\subset R(A)\subset C(A)\subset\mathcal{F}(A)}$$

Las componentes de campos vectoriales son campos escalares, por tanto su estudio se reduce al estudio de sus componentes.