Análisis Matemático I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 5

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

a) Sucesión de Cauchy y espacio métrico completo

b) Función uniformemente continua

c) Función lipschitziana y constante de Lipschitz

2. Conocer y comprender los siguientes resultados:

a) Complitud de $\mathbb{R}^N$

b) Versión general del teorema de Heine

3. Conocer los siguientes resultados, incluyendo su demostración:

a) Teorema del punto fijo

b) Caracterización de la continuidad de una aplicación lineal

1.a) Decimos que una sucesión de números reales es de Cauchy cuando:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : \text{si } p,q \in \mathbb{N} \mid p,q \geq m \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$, Ser de Cauchy no es topológica

De aquí podemos deducir lo siguiente:

· En todo espacio métrico, una sucesión convergente es de Cauchy.

Sin embargo el recíproco es falso por lo general; de aquí se deduce la complitud de un espacio métrico.

Diremos que un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente
" una distancia es completa   de puntos del espacio.

El teorema de complitud de $\mathbb{R}$, como su nombre indica, afirma que éste es completo o que

$(\mathbb{R}, d_u)$ es completo. Sin embargo, no es una propiedad topológica.

Diremos que una norma es completa cuando su distancia asociada lo es, es decir, $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ es completo o es un espacio de Banach si $(\mathbb{R}, d_{\|\cdot\|})$ es un espacio métrico completo. Diremos a su vez que un espacio prehilbertiano es completo o de Hilbert cuando su norma asociada es completa.

b). Sean E, F espacios métricos, diremos que $f: E \longrightarrow F$ es uniformemente continua cuando

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: si $\underset{x,y \in E}{\|x-y\| < \delta} \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$. Lo que nos indica que también es continua.

Es una propiedad donde δ no depende de ε y x, sino sólo de ε. Además, no es una propiedad local luego estudiándola por entornos no puede darse un resultado global, es decir si $f: E \rightarrow F$ continua y $f|_{\mathcal{U}}$ u.c $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}(x)\ \forall x \Rightarrow f$ no tiene por qué ser continua.

UC $\Rightarrow$ C.

c) Diremos que una función $f: E \rightarrow F$ entre espacios métricos es lipschitziana cuando $\exists M \in \mathbb{R}^+ /$

$$d(f(x), f(y)) \leq M\, d(x,y) \quad \forall x,y \in E.$$

Luego $M \geq \left\{ \dfrac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)}\ \forall x,y \in E \right\}$, es decir, es un mayorante $\Rightarrow \exists$ supremo, sea M_0 ese supremo, vamos a llamar constante de Lipschitz a esa constante M_0

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)}\ x,y \in E \right\}$$

Diremos que f es lipschitziana con constante M_0.

Si una función $f: E \rightarrow F$ es lipschitziana, en particular, es uniformemente continua, luego también es continua.

Diremos que una función lipschitziana es no expansiva cuando su constante de Lipschitz M es menor o igual a 1. Y diremos que es contractiva cuando $M < 1$. Luego contractiva $\Rightarrow$ no expansiva.

2. a) Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. En particular, $\mathbb{R}^N$, el espacio euclídeo n-dimensional es un espacio de Hilbert.

Esto quiere decir que $\mathbb{R}^N$ es un espacio prehilbertiano completo $\Rightarrow (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_{\langle,\rangle})$ es un espacio de Banach $\Rightarrow d_{\|\cdot\|_{\langle,\rangle}}$ es una distancia completa $\Rightarrow$ en $\mathbb{R}^N$ toda sucesión de puntos de $\mathbb{R}^N$ de Cauchy es convergente, el recíproco ya era conocido.

Por tanto, para probar la no convergencia de una sucesión o su recíproco basta con ver que no es de Cauchy.

Además, como es de Hilbert → es de Banach ⇒ da igual la norma a tomar que siempre serán convergentes las mismas sucesiones de Cauchy

b) Sean E, F dos espacios métricos y $f: E \longrightarrow F$ una función continua. Si E es compacto ⇒ f es uniformemente continua.

Gracias al teorema anterior, podemos ver que no es una propiedad local ya que al tomar entornos puede ser uniformemente continua pero esto no implica que lo sea globalmente. Se puede ver fácilmente con distancias equivalentes por no ser topológica.

3. Sea E un espacio métrico completo y $f: E \to E$ una aplicación contractiva ⇒ f tiene un único punto fijo $\exists! \, x \in E / f(x) = x$.

Fijamos $x_0 \in E$ arbitrario y construimos una sucesión inductiva $| f(x_i) = x_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Probaremos que esta sucesión es convergente y que su límite es x_0 el punto fijo que buscamos.

Si $\alpha < 1$ constante de Lipschitz de f y $\rho = d(x_0, x_1)$, comprobamos que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho \quad \forall n \in \mathbb{N}$, (2)
En efecto, tenemos $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha \, d(x_0, x_1)$ y suponiendo que se cumple para n vemos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \alpha \, d(x_n, x_{n+1}) \dots \leq \alpha^{n+1} \rho$$

Ahora $\forall n, k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \rho \, \alpha^n \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{\rho \alpha^n}{1-\alpha} \qquad (3)$$

Dada la desigualdad (3) deduciremos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, como $\{\alpha^n\} \to 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} / n \geq m$ se tiene $\rho \alpha^n \leq \varepsilon (1-\alpha)$ entonces para $p, q \geq m$, $p < q$ tomamos $n = p$ y $k = q - p \Rightarrow$

$$d(x_n, x_{n+k}) = d(x_p, x_q) \leq \frac{\rho \alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon$$

Como por hipótesis E es completo tenemos $\{x_n\} \to x$ pero $\{f(x_n)\} = \{x_{n+1}\} \to x$. Pero f continua luego $\{f(x_n)\} \to f(x) \Rightarrow f(x) = x$. Finalmente si $y \in E$ es otro punto fijo se tiene $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$ luego $(1-\alpha) d(x,y) \leq 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) Sean X, Y dos espacios normados y sea $T: X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) T es continua

ii) $\exists M \in \mathbb{R}_0^+ \mid \|T(x)\| \leq M\|x\| \; \forall x \in X$

ii) $\Rightarrow$ i) Esto es tanto como decir que es lipschitziana si $u, v \in X \Rightarrow \|T(u) - T(v)\| = \|T(u-v)\| \leq M\|u-v\|$ luego es lipschitziana y continua.

i) $\Rightarrow$ ii) Teniendo en cuenta que $T(0) = 0$, la continuidad en 0 nos dice que

$$\exists \delta > 0 : \text{si } z \in X,\ \|z\| < \delta \Rightarrow \|T(z)\| < 1$$

Dado $x \in X \setminus \{0\}$, tomando $z = \frac{\delta x}{2\|x\|}$ tenemos $\|z\| = \frac{\delta}{2}$ luego $\|T(x)\| = \frac{2\|x\|}{\delta} \|T(z)\| \leq \frac{2}{\delta} \|x\|$

Como esta desigualdad es obvia para $x=0$ hemos probado (ii) con $M = \frac{2}{\delta}$