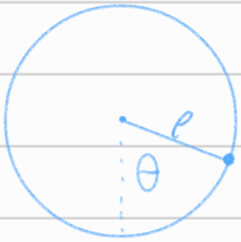
Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones que vamos a ver son ecuaciones como ya se conocen teniendo en cuenta que la incógnita ya no es un número sino una función.

Un ejemplo de ello es la ecuación de un péndulo



$g > 0 \longrightarrow$ La constante gravitatoria es positiva

Tendrá tantas soluciones como posibles movimientos del péndulo

En este caso, la ecuación sería: $\Theta''(t) + \frac{g}{\ell}\,\text{sen}(\Theta(t)) = 0$ donde la incógnita es la función $\Theta(t)$ que representa el ángulo del péndulo en un instante de tiempo.

Cabe recalcar que la variable "t" es la variable independiente y "$\Theta = \Theta(t)$" es la incógnita o variable dependiente. Ambas dependerán del contexto.

Es aquella de la que depende la función (construye la expresión)

En el caso del ejemplo hay muchas soluciones pues habrá tantas soluciones como movimientos del péndulo

Luego, como conclusión a ello vemos que habrá infinitas soluciones.

Algunas soluciones son:

$\Theta(t) = 0 \quad , t \in \mathbb{R}$

$\Theta(t) = \pi \quad , t \in \mathbb{R}$

$\Theta(t) = n\pi , t \in \mathbb{R} , n \in \mathbb{Z}$

En ocasiones las soluciones de una ecuación diferencial pueden existir y no poder escribirlas en una fórmula. No obstante, estas ecuaciones no son nuestro objetivo, por ahora, sino que lo serán aquellas llamadas "de primer orden".

Aquellas de primer orden

Son aquellas que se escriben, todas, de la siguiente forma:

$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$ ⟶ Son iguales sólo que, sólo participa la primera derivada

Donde t es una variable independiente y $x = x(t)$ es la variable dependiente o incógnita

Un ejemplo sería:

$x(t)^2 + x'(t)^2 = 1$ ⤳ $x^2+y^2=1$, $\Phi(t,x,y) = x^2+y^2-1$

↳ En forma normal: $x' = \sqrt{x^2-1}$ $\quad x'(t) = f(t, x(t))$

$x' = -\sqrt{x^2-1}$

donde

$\Phi = \Phi(t, x, y)$ donde y forzaremos a ser $x'(t)$ con $\Phi(t,x,y) = x^2+y^2-1$

↳ Hemos definido la ecuación diferencial que define el problema

teniendo claro que $\Phi(t,x,y)$ representa todas las posibles, es decir, x e y son independientes y

↳ soluciones, al poner $x(t)$ ó $x'(t)$ estamos dando una solución.

$\Phi(t, x(t), y(t))$ representa un instante o una solución concreta

Hasta ahora hemos usado $\Phi = \Phi(t,x,y)$ para introducir una función, la cual es notación física que seguiremos usando. En lenguaje matemático sería $\Phi: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t,x,y) \longmapsto \Phi(t,x,y)$ } Notación conjuntista

En síntesis una ecuación diferencial es una relación entre una variable independiente que suele ser el tiempo, una función y su derivada, dependiendo ambos de dicha variable independiente.

Algunas soluciones a dicha ecuación son:

$x(t) = \cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$ $\qquad x(t) = 1$

$x(t) = \operatorname{sen}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ $\qquad x(t) = -1$

Es decir, no es más que un conjunto de soluciones que dependen de un parámetro

$x(t) = \operatorname{sen}(t+k)$, $k \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ ⟶ Esto se conoce como una familia uniparamétrica de soluciones

$x(t) = \operatorname{sen}(t) + k$ con $k, t \in \mathbb{R}$ no son soluciones, solo buscamos desplazar horizontal no vertical como aquí hacemos

En ocasiones podremos conseguir soluciones de la ecuación combinando soluciones. Como condición es necesario que la función sea derivable pero no más allá de una vez.

La función resultante de la combinación

lo será

Por tanto, una solución sería

$$x(t)=\begin{cases}\cos(t) & , t\geq 0\\ 1 & , t<0\end{cases}$$

→ No es derivable dos veces.

No obstante, no es común que ocurra esto, sobretodo en ecuaciones de primer orden.

Debido a que la derivada no está despejada ocasiona que sea tan general que no nos permite desarrollar una teoría; luego vamos a estudiar aquellas que estén en forma normal.

Ecuaciones Diferenciales de primer orden en forma normal.

Estas ecuaciones son aquellas de la forma:

$$x'(t)=f(t,x(t))$$

Recordatorio

Continuidad $\not\Rightarrow$ Derivabilidad

Derivabilidad $\Rightarrow$ Continuidad

Si continua y límites laterales de la derivada coinciden $\Rightarrow$ derivable

Unos ejemplos son:

Me están diciendo que una función es 7 veces su primitiva

$x'(t)=7x(t) \longrightarrow \Phi(t,x,y)=y-7x$ y $f(t,x)=7x$

$x'(t)=7t \longrightarrow \Phi(t,x,y)=y-7t$ y $f(t,x)=7t$

Ya no queda $x(t)$

↳ Soluciones: $x(t)=\frac{7t^2}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}$

En el primer caso, unas soluciones son $x(t)=e^{7t}$, $x(t)=0$, $x(t)=ce^{7t}$ $c\in\mathbb{R}$.

Más ejemplos son:

$x'(t)=\operatorname{sen} t,\ t\in\mathbb{R} \longrightarrow x(t)=-\cos(t)+c,\ c\in\mathbb{R}$

$x'(t)=\operatorname{sen}(x(t))$

Mal escrito y no hacer

$\int x'(t)=\int 7x(t)$

↳ $x(t)=\frac{7}{2}x(t)^2+c$

Corrección $\int x'(t)dt=\int 7x(t)\,dt$

Definición Hasta que no comprobemos que nuestra función es solución no hemos acabado.

Sea $\Phi: D\subset\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (al menos así lo consideraremos) y D será

$(t,x,y) \longmapsto \Phi(t,x,y)$

un abierto conexo de $\mathbb{R}^3$. Definimos una solución de nuestra ecuación por una función

$$x: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto x(t)$$ ← Es función de la variable independiente

donde I es un intervalo abierto cumpliendo:

i) $x(t)$ es derivable en I

ii) $(t,x(t),x'(t)) \in D$ $\forall t\in I$ — Independientemente de donde se mueva t en D solo consideramos valores de I.

Verificar que se cumple la ecuación → iii) $\Phi(t,x(t),x'(t))=0$ $\forall t\in I$

Pensemos en algunos ejemplos:

Podríamos poner I?

Es importante no descartar ninguna posibilidad antes de tiempo pues podemos estar perdiendo soluciones

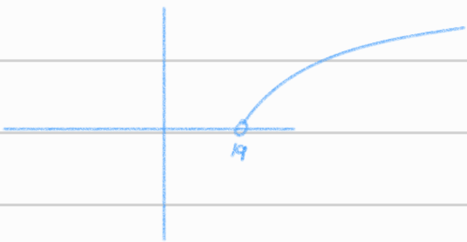
$x(t)=\sqrt{2t-38}$ $\quad x'(t)=\frac{1}{x(t)}$; $\Phi(t,x,y)=y-\frac{1}{x}$, $D=\mathbb{R}\times]0,\infty[\times\mathbb{R}$; $I=]19,\infty[$

Cabe aclarar que tomar $x\in]-\infty,0[$ ocasionaría que $\cancel{x(t)}\notin D$ pues $\sqrt{x}\in\mathbb{R}^+$ tal y como $I\neq[19,\infty[$

$(t,x(t),x'(t))\notin D$
↑
Por esto

pues I debe ser abierto

Donde la gráfica de $x: I\longrightarrow\mathbb{R}$, $t\longmapsto x(t)$ es



Si la tangente en un punto es vertical, perdemos la derivabilidad en ese punto

Por último, vemos que $(t,x(t),x'(t))\in D$ y por tanto, podemos pasar a comprobar que se cumple la ecuación así que veremos esto último.

$$x'(t)=\frac{1}{\sqrt{2t-38}}=\frac{1}{x(t)}$$

Notación que usaremos

La notación estándar de la teoría de ecuaciones diferenciales es:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \longrightarrow \Phi(t, x, x') = 0$$

Unos ejemplos son: Estaría en forma normal

$x' = 3x \iff x'(t) = 3x(t)$ luego una solución es $x = ce^{3t}$ lo que equivale a $x(t) = ce^{3t}$

↳ $\Phi(t, x, y) = y - 3x$

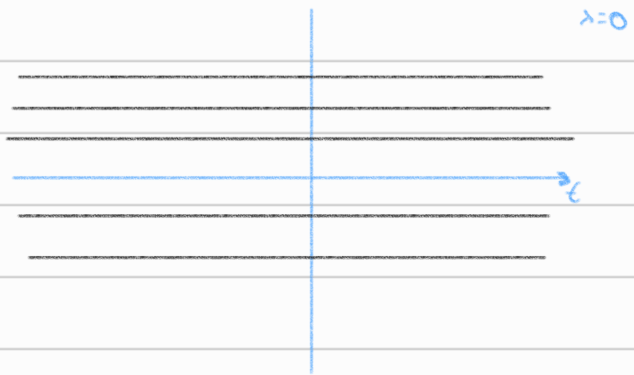
No obstante, al dar una solución sí que pondríamos $x(t)$ pues sí que aparece la t como si tomara un valor concreto.

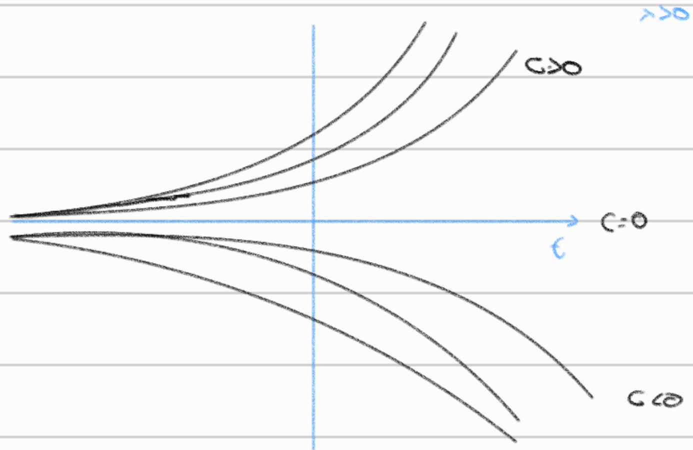
$x' = \lambda x$, $x(t) = ce^{\lambda t}$

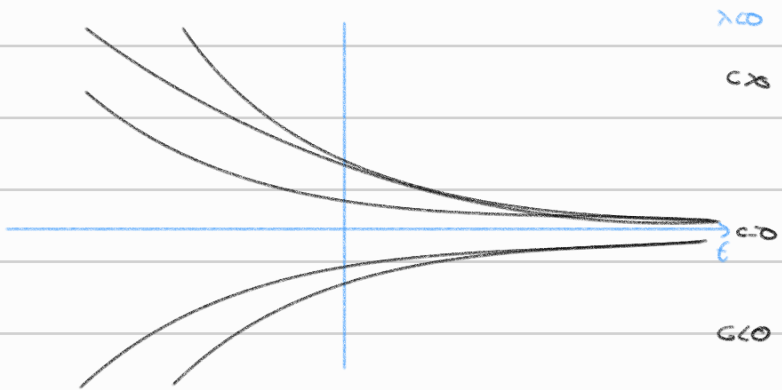
$x' = \lambda t$, $x(t) = \frac{\lambda t^2}{2} + c$

Tratando de nuevo el segundo ejemplo podemos notar que disponemos de una familia de ecuaciones diferenciales dependiendo de λ.

La gráfica de sus soluciones es:







Vamos a demostrar que este ejemplo no dispone de más soluciones que no sean las ya obtenidas.

Proposición

Dada $x(t)$ solución de $x'=\lambda x$ definida en un intervalo abierto I, existe $c\in\mathbb{R}$, $x(t)=ce^{\lambda t}$, $\forall t\in I$

Si $x(t)=ce^{\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda t}x(t)=c$

luego necesariamente

$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t))=0$

Sea $x(t)$ una solución, vemos que $e^{-\lambda t}x(t)$ es derivable y podemos obtener que

Producto de derivables

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t))=-\lambda e^{-\lambda t}x(t)+e^{-\lambda t}\underbrace{x'(t)}_{x'=\lambda x}=-\lambda e^{-\lambda t}x(t)+\lambda e^{-\lambda t}x(t)=0$$

luego necesariamente $\exists c\in\mathbb{R} \mid e^{-\lambda t}x(t)=c \quad \forall t\in I$ luego $x(t)=ce^{\lambda t}$

Interés compuesto

Supongamos que $C_0=100$ € y que el interés es $i=0'02$ luego dado un año tendremos un beneficio de 102€

En caso de pasar sólo 6 meses tenemos que $C_{1/2}=100+\frac{1}{2}\frac{2}{100}100=101$ € luego $C_1=101+\frac{1}{2}\frac{2}{100}101>102$

Con esto pretendemos llegar a que el período de tiempo con el que se recibe un interés tiene una gran importancia.

Interés continuo

Usando la intuición desarrollada anteriormente vemos que, si $C(t)$ es el capital en un instante t obtenemos que, para un tiempo transcurrido $\Delta t>0$ en el que se realiza cada pago, el modelo es:

$$\boxed{C(t+\Delta t)=C(t)+\Delta t\cdot i\cdot C(t) \iff \frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t}=i\,C(t)}$$

Luego en el caso de que $\Delta t\to 0$ obtenemos que por definición

$$C'(t)=i\cdot C(t)$$

Otro ejemplo en el que se usa $x'(t)=cx(t)$ es la radiación donde vemos que la masa del objeto es una función decreciente; luego denotando por $m=m(t)$ vemos que

$$m'(t)=-k\,m(t) \quad , k\in\mathbb{R}^+$$

Estas ecuaciones relacionadas con las sustancias radiactivas suelen determinarse con la vida media del elemento radiactivo.

Definiendo esto último, la vida media de un elemento radiactivo es el tiempo que dicho elemento se reduce a la mitad

Luego en este ejemplo obtenemos que $m(t)=ce^{-kt}$, $c>0$ donde k es la vida media del elemento y se calcula suponiendo

$$m(t_f)=\tfrac{1}{2}m(0)$$

donde t_f es el tiempo que tarda en desintegrarse la masa al completo

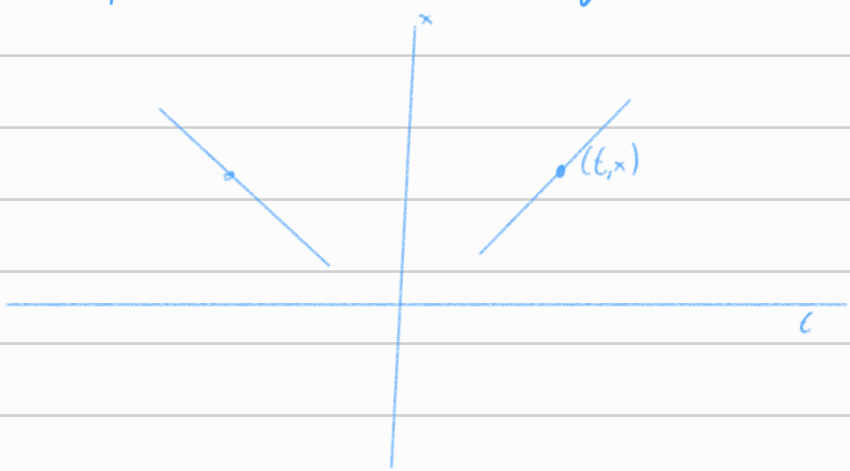
Cabe recalcar que estos modelos tienden a colarse pues no se ajustan 100% a la realidad.

Interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales

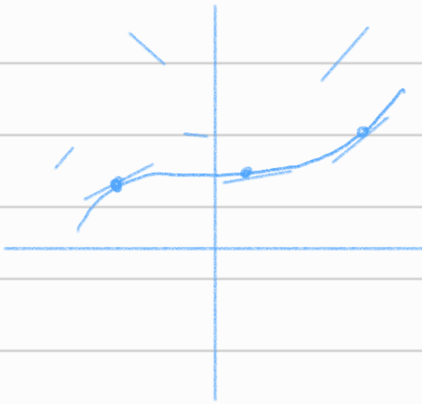
$x'(t)=f(t,x(t))$

Sea una ecuación $x'=f(t,x)$ donde voy a suponer que $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $(t,x)\longmapsto f(t,x)$ es continua.

Buscamos interpretar la ecuación como un campo de direcciones interpretando (t,x) como la pendiente de una recta luego obtenemos una regla que a cada punto le asocia una recta con dicha pendiente.



No obstante, nosotros tenemos que $x'(t)=f(t,x(t))$ luego la parte izquierda nos dice la pendiente de la recta tangente a la curva $f(t,x)$ en el punto $(t, x(t))$ donde esto último es la pendiente del campo de direcciones



Luego tener una solución de la ecuación es obtener una función que cumple que las rectas del campo de direcciones coinciden con las tangentes en la recta $x(t)$.

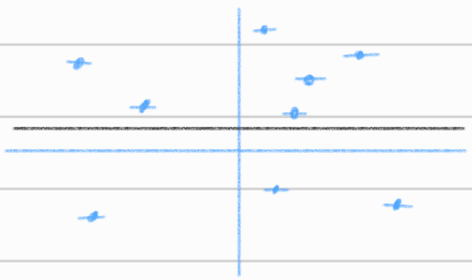
Algunos ejemplos son

Cuando se habla de la ec. diferencial no se hace explícita la dependencia de t

1 $x' = 0$ $(x'(t) = 0)$ luego $x(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$

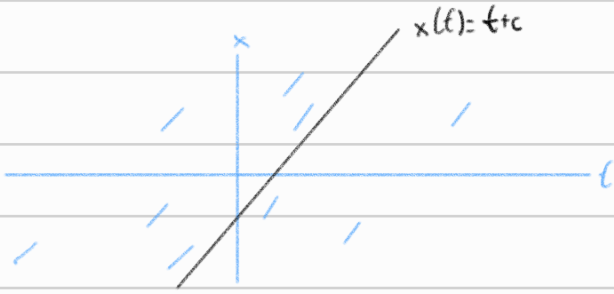
$f(t,x) = 0$

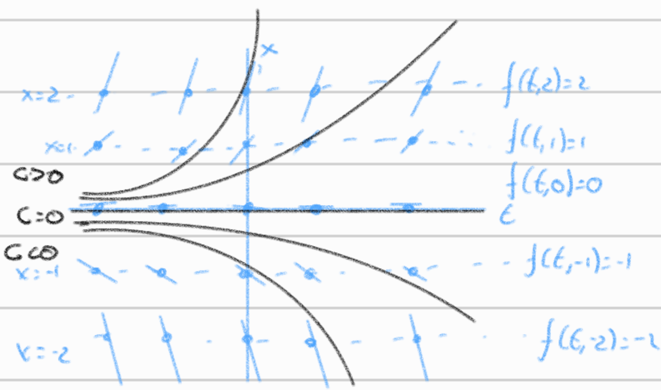
Esto es una demostración gráfica



2. $x' = 1$ $(x'(t) = 1)$ luego $x(t) = t + c$, $c \in \mathbb{R}$

3 $x' = x$ luego $x(t) = ce^{t}$, $c \in \mathbb{R}$

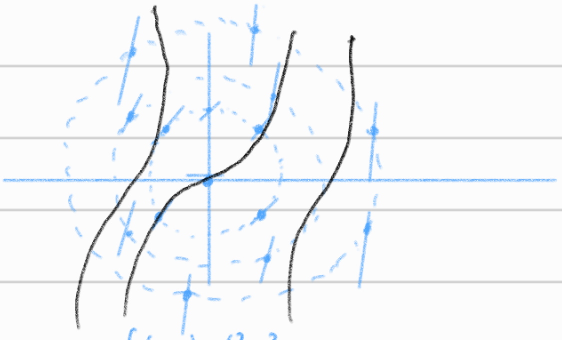




$f(t,x) = x$

↳ Las soluciones no tienen fórmula (func. elem.)

$x' = t^2 + x^2$



Funciones implícitas

Son aquellas funciones de las que no conozco la fórmula pero sí ciertas condiciones

$$x^7 + 3x + t^2 = 0$$

Pero sabemos que define una función

Para definir una función basta cumplir que $\forall t \in \mathbb{R}\ \exists! x \in \mathbb{R} \mid x = x(t)$.

Para probar que existe ese x y es único basta ver que $\forall t \in \mathbb{R}\ p_t(x) = x^7 + 3x + t^2$ luego, como el grado es impar debe tener una raíz obteniendo así la existencia de x para todo t. Veamos ahora su unicidad, sabemos que $p_t'(x) = 7x^6 + 3$ lo cual es siempre positivo luego nunca cortará al eje dos veces obteniendo así la unicidad (Por ser est. creciente)

Es importante saber que cualquier relación no define una función implícita. Además, aunque se defina una función implícita puede no ser única. De hecho los dominios pueden no ser el mismo que la ecuación de partida

ec $\longrightarrow$ implícita(s)

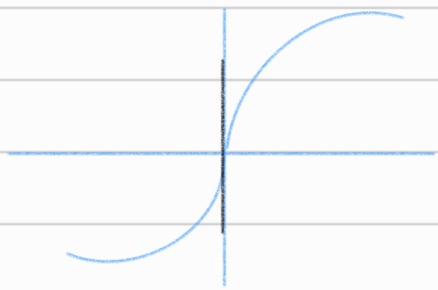
ec(s) $\not\longleftarrow$ implícita

$x^2 + t^2 = 1$

$x_1(t) = \sqrt{1-t^2}$ $x_2(t) = -\sqrt{1-t^2}$

Con respecto a la derivabilidad de esta función vamos a ver que no siempre lo será por muy buena que sea la ecuación de partida.

$x^3 - t^2 = 0 \longrightarrow x(t) = \sqrt[3]{t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ pero no es derivable en 0



El teorema de la función implícita es local y da condiciones para saber que existe dicha función y es única dentro de un entorno suficientemente pequeño

- $F: G \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
  $(t,x) \longmapsto F(t,x)$ } Se suele obtener despejando todo a un lado
- G abierto
- $F \in \mathcal{C}^1(G) \Leftrightarrow \exists \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) \wedge \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)$ y ambas continuas
- $F(t_0,x_0) = 0$, $(t_0,x_0) \in G \wedge \frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) \neq 0$

Entonces $\exists x: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalo abto, $t_0 \in I \mid x(t_0) = x_0$, $x \in \mathcal{C}^1(I)$, se cumple que $(t,x(t)) \in G \; \forall t \in I$ y $F(t,x(t)) = 0 \; \forall t \in I$

En el ejemplo anterior

$F(t,x) = x^2 + t^2 - 1 = 0$

$G = \mathbb{R}^2$, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

Ahora vamos a probar que la función definida por $x^7 + 3x + t^2 = 0$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

$G = \mathbb{R}^2$

$F(t,x) = x^7 + 3x + t^2$

$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 7x^6 + 3 > 0$

Derivación implícita

$F(t,x(t)) = 0$, $t \in I$, $F \in \mathcal{C}^1(G)$ y $x \in \mathcal{C}^1(I)$

$$I \xrightarrow{x} \mathbb{R} \xrightarrow{g} G \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto x(t) \longmapsto (t, x(t)) \longmapsto F(t,x(t))$$

$dt/dt = 1$

Supongamos $\frac{d}{ds}\left[F(t(s),x(s))\right] = \frac{\partial F}{\partial t}(t(s),x(s))\, t'(s) + \frac{\partial F}{\partial x}(t(s),x(s))\, x'(s)$

Luego $F(t,x(t)) = 0$, $t \in I \rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t))\, x'(t) = 0$

otra opción más útil es derivar respecto a t siempre (siendo t la variable indep)

En forma normal bastará con que despejemos $x'(t)$ pues localmente $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t)) \neq 0$.

Veamos cómo construir una ecuación diferencial de primer orden a partir de una familia uniparamétrica de funciones.

Partiendo de una familia, $F(t,x,c)=0$, uniparamétrica con parámetro $c \in \mathbb{R}$. Como disponemos de una función implícita, buscamos obtener $x(t)$ como solución de la ecuación; para ello, buscamos hacer derivación implícita con c un parámetro independiente.

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t),c)+\frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t),c)\,x'(t)=0$$

De hecho, sería un error decir que esto ya es la ecuación diferencial pues tenemos aún el parámetro c ocasionando que haya infinitas ecuaciones; luego, buscamos eliminar c:

Usando las dos ecuaciones que tenemos obtenemos:

$$\Phi(t,x,x')=0$$

Algunos ejemplos son:

(Primero deberíamos comprobar las hipótesis del T. Función Implícita) ↙ Pues lo usaremos en la Derivación Implícita

$\frac{1}{c}e^{cx}-x^2\cdot\operatorname{sen} t=c$ donde $F(t,x,c)=\frac{1}{c}e^{cx}-x^2-\operatorname{sen} t-c$

$\downarrow$ Derivamos sin necesidad de la fórmula usando que $x=x(t)$

$x'e^{cx}-2xx'-\cos t=0$

Mi sistema es:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{c}e^{cx}-x^2\cdot\operatorname{sen} t=c\\ x'e^{cx}-2xx'-\cos t=0\end{array}\right\}$$

$$e^{cx}=\frac{2xx'+\cos t}{x'}\xrightarrow{\text{sup}>0} cx=\ln\left(\frac{2xx'+\cos t}{x'}\right)$$ y sustituyo quitando la c

Nuestra ecuación sería:

$$\frac{x}{\ln\left(\frac{2xx'+\cos t}{x'}\right)}\,\frac{2xx'+\cos t}{x'}-x^2-\sin t-\frac{\ln\left(\frac{2xx'+\cos t}{x'}\right)}{x}=0$$

Recordemos que la x que manejamos es la solución de la ecuación diferencial.

$$x^2+t^2=c \to F(t,x,c)=x^2+t^2-c$$

$$2xx'+2t=0$$

Lo cual ya es la ecuación diferencial que en forma normal es $x'=\frac{-t}{x}$

Para comprobarlo bastaría con derivar todas las soluciones en función de c y comprobar que sale

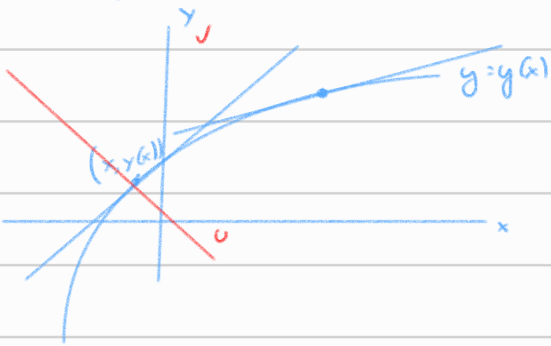
Problemas geométricos relacionados con las ecuaciones diferenciales

Notación geométrica

Consideraremos que x es la variable independiente y la incógnita será la y. Sabemos que todas las curvas se pueden modelar con funciones implícitas. Además, nuestras curvas podrían ponerse como función explícita, es decir:

↳ supuesto para mayor facilidad

$$y=y(x),\ x\in I \text{ intervalo abierto } \mathcal{C}^1$$



Sabemos, de bachillerato, que la recta tangente viene dada por la ecuación:

$$\boxed{y-y(x)=y'(x)(x-x)}$$

lo cual presenta un problema pues debemos usar otros valores cuando nos movemos por la recta tangente pues el punto $(x,y(x))$ está fijado luego:

$$\boxed{v-y(x)=y'(x)(u-x)}$$

v es una función que depende de x (no fijo)

Si movemos x y u al mismo tiempo, estamos recorriendo todo el haz de rectas tangentes.

Con respecto a la normal, basta con ver la relación de ambas pendientes. Como son opuestas e inversas, $m_1\cdot m_2=-1$. Luego la ecuación de la recta normal es

$$\boxed{v-y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(u-x)}$$

Es la misma ecuación cambiando la pendiente

No obstante, la ecuación pierde sentido si $y'(x)=0$ para ese x fijo luego es más correcto escribir

$$\boxed{y'(x)\,(v-y(x)) = x-u}$$

Como ejercicio tipo, vamos a buscar la curva donde todas las rectas normales pasan por el origen.

↳ función derivable

¿ $y=y(x)$?

Como todas las rectas pasan por $(0,0)$, es necesario que $u=v=0$ $\forall x$

$$-y'(x)\,y(x)=x \iff y'y+x=0$$

$$\left[\, y'(x) = \frac{-x}{y(x)} \quad \text{(mala idea pues } y(x)=0) \,\right]$$

Truco: Básicamente integramos en función de x y ya estaría

$y'(x)y(x)+x=0$ Paso escribir la derivada de algo igual a 0

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y(x)^2+\frac{1}{2}x^2\right)=0$ (diferencial exacta)

$$\Downarrow$$

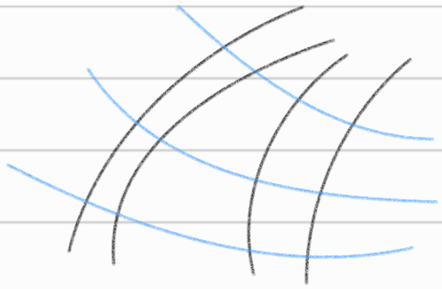
$$\frac{1}{2}y(x)^2+\frac{1}{2}x^2 = c \iff y(x)^2+x^2=k \quad ¿k>0? \text{ Porqué}$$

↳ En caso contrario no ocurriría lo que buscamos

luego $y(x) = \pm\sqrt{k-x^2}$, $x\in\,]-\sqrt{k},\sqrt{k}[$

Trayectorias ortogonales

Disponemos de una familia uniparamétrica de curvas y buscamos construir otra familia cuyos cortes entre las dos familias sean ortogonales:



donde si $F \in \mathcal{F}$ viene determinada por $F(x,y,c)=0$ y $c \in \mathbb{R}$. Luego vamos a construir la función explícita realizando derivación implícita:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,c)\, y' = 0$$

Vamos a eliminar c despejando; encontraremos una ecuación diferencial en forma normal

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

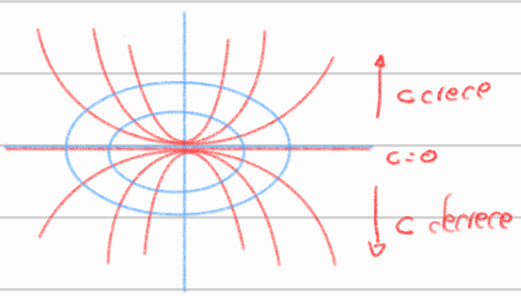
Luego cada caso de la familia $\mathcal{F}^\perp$ deberá cumplir que

$$\boxed{y' = -\frac{1}{f(x,y)}}$$

por la propiedad de ortogonalidad.

De esta forma, resolviendo esta ecuación obtenemos esto $\boxed{G(x,y,c)=0}$ que refleja a las trayectorias ortogonales

Como ejemplo, vamos a trabajar con $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$



En este caso, $F(x,y,c) = y - cx^2$

$$\left.\begin{array}{l} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{array}\right\} \Rightarrow c = \frac{y}{x^2} \qquad \boxed{y' = \frac{2y}{x}}$$

Luego $\mathcal{F}^\perp$: $y' = \frac{-x}{2y}$ y resolviendolo por el truco anterior $2yy' + x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y^2 + \frac{x^2}{2}\right) = 0$

$y^2 + \frac{x^2}{2} = k$, $k > 0$ (en caso contrario no define funciones)

Obtenemos elipses con el problema de tener una singularidad en el origen.

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Escrito en forma normal vendría dado de la siguiente manera:

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_d)$$

$i = 1 \ldots d$

$x_1 = x_1(t) \ldots$

Lo único importante es que el conjunto de soluciones tendrá tantos parámetros como ecuaciones.

Un ejemplo

$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$, las soluciones son $\begin{matrix} x_1(t) = k\operatorname{sen}(t+c) \\ x_2(t) = k\cos(t+c) \end{matrix}$ $\begin{matrix} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \end{matrix}$, $k, c \in \mathbb{R}$

Representación en ecuaciones paramétricas

Consiste en dar $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Luego dadas $x, y: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto x(t), y(t)$. En este caso,

no pensamos las curvas como un lugar geométrico, sino como un movimiento.

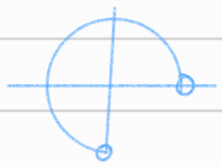
Entonces, dada una curva en paramétricas $x = x(t)$, una órbita es el lugar geométrico correspondiente:

$$\boxed{\{(x(t), y(t)) : t \in I\}}$$

Es decir, buscamos la trayectoria, no el movimiento. Cabe recalcar que hay muchas parametrizaciones para una misma trayectoria. $\left(\begin{matrix} \text{órbita} \to \text{par} \\ \text{par} \to !\text{órbita} \end{matrix}\right)$

Un ejemplo serio

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad t \in I =]0, \tfrac{3\pi}{2}[$$

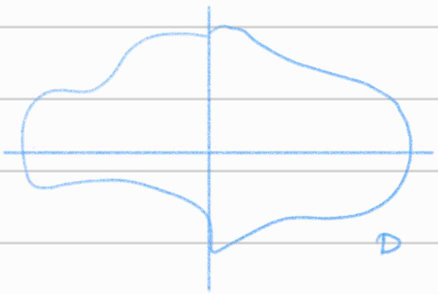


Órbitas de un sistema autónomo plano.

Vamos a suponer que disponemos de un sistema de ecuaciones autónomo:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

donde t es la variable indep. donde $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y), g(x,y)$ con D abto y conexo, f y g continuas.



Se dice que un sistema de ecuaciones es autónomo cuando las ecuaciones no dependen del tiempo explícitamente:

Ejemplos

$$\left.\begin{aligned} x' &= 3x + y^2 \\ y' &= \operatorname{sen} x + e^{ty} \end{aligned}\right\} \text{NO} \qquad \left.\begin{aligned} x' &= y + 2 \\ y' &= -x^3 \end{aligned}\right\} \text{SI}$$

Buscamos calcular las órbitas sin conocer la solución.

Solución (física o no rigurosa)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$ luego como no quiero el tiempo divido ecuaciones con $f(x,y) \neq 0$

$$\frac{\frac{dx}{\cancel{dt}}}{\frac{dy}{\cancel{dt}}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \iff \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}}$$

Doloroso

Solución (matemática y rigurosa)

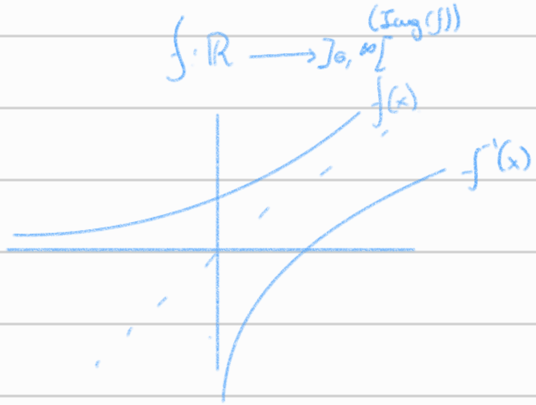
Ejemplo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad \begin{aligned} x(t) &= 2\operatorname{sen}(t) \\ y(t) &= -2\cos(t) \end{aligned}$$ (buscamos que x no se anule) ↳ $t \in]0,\pi[$

Luego, según los físicos, las órbitas son:

$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = -x \Rightarrow \frac{dx}{dx} = -\frac{x}{y}$ luego $y' = -\frac{x}{y}$, $y^2+x^2 = C$ con $C=4$ (parametriza una circunferencia de radio 2)

Vamos a preparar los materiales para poder entender lo que ocurre. Para ello, vamos a hablar de funciones inversas.



De manera conjuntista, si $f: I \longrightarrow J$ es biyectiva tal que $f \circ f^{-1} = Id_J$ y $f^{-1} \circ f = Id_I$.

De manera clásica, diremos que una función $x = f(t)$ tiene inversa cuando $t = g(x)$ obviando problemas como la exponencial, raíces pares...

Luego sólo hablaremos de inversas de funciones inyectivas pues $J = Img(f)$ ocasionando que sea biyectiva. De esta forma, sólo las funciones estrictamente monótonas dispondrán de inversa

Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $I = I^\circ$ derivable tal que $f'(t) > 0$ $\forall t \in I$ (sería análogo para $f'(t) < 0$)

Concretamente buscamos que no cambie de signo

Entonces, considero $f: I \longrightarrow J$, $J = f(I)$ donde $J = J^\circ$ y f es biyectiva luego

$\exists f^{-1}: J \longrightarrow I$ tal que f^{-1} es derivable en J.

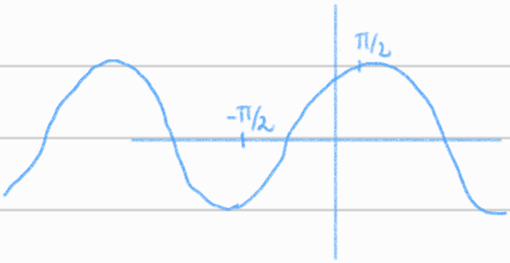
La cuestión ahora es saber la derivada de la inversa; para ello, aplicaremos la regla de la cadena llamando $f^{-1} = g$ y $x = f(t)$, $t = g(x)$.

$$\boxed{f(g(x)) = x \ \forall x \in J \quad \wedge \quad g(f(t)) = t \ \forall t \in I}$$

Luego aplicando la regla de la cadena vemos que

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \iff \boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

Vamos a ver y entender algunas inversas:



Luego, sólo restringimos $\operatorname{sen}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} = f$ rama principal del seno

para obtener la inversa que es $\operatorname{arcsen} = f^{-1}$

pero aclaramos que el dominio no es $\mathbb{R}$

Luego $f: \overbrace{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}^{I} \longrightarrow \overbrace{]-1,1[}^{J} \iff f^{-1}: J \longrightarrow I$. Es decir $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t$

$t \longmapsto \operatorname{sen}(t)$

si $t \in I$, y ocurrirá lo mismo de forma análoga pese a que siempre funciona por definición del arcsen

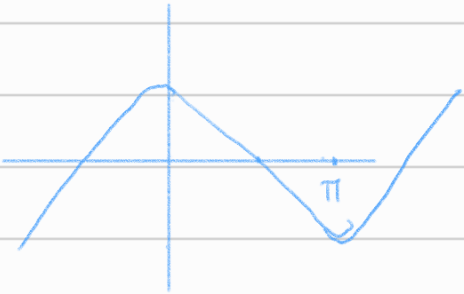
Luego aplicando el teorema de la derivación de la función inversa

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} \qquad x \in]-1,1[$$

Entonces $\theta = \operatorname{arcsen} x$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos(\operatorname{arcsen} x) = \cancel{\pm}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \pm\sqrt{1-x^2}$

↳ Podemos quitar el menos por el dominio de θ

Veamos ahora el coseno.



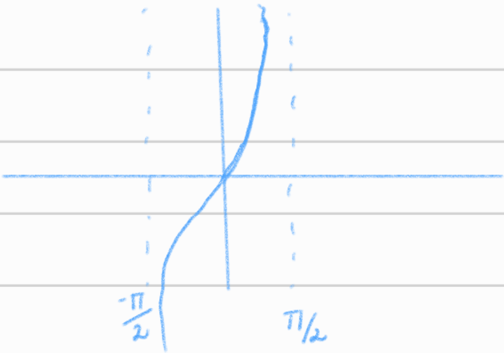
Luego restringimos $\cos|_{]0,\pi[} = f$ para obtener la inversa pues f es biyectiva, denotaremos por

$\arccos :]-1,1[\longrightarrow]0,\pi[$.

Luego $\arccos(\cos(t)) = t$ sii $t \in]0,\pi[$

En caso contrario siempre es cierto pues, si $x \notin]-1,1[\ \nexists \arccos(x)$

Y qué ocurre con la tangente:



Luego restringimos $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\pi/2[} = f$ para obtener la inversa pues f es biyectiva, denotaremos por

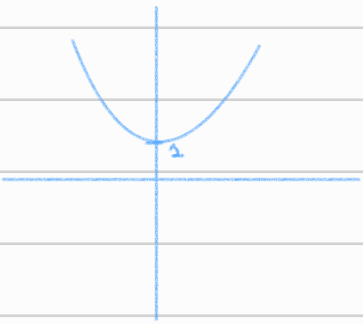
$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$

Luego $\arctan(\tan(t)) = t$ sii $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

No obstante, esto es la teoría y por la cuenta de la vieja, la calculadora sí define

$\tan : \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Haremos el estudio para $\cosh$ y será análogo para senh pues son derivada la una de la otra.



Luego restringimos $\cosh|_{]0,\infty[} = f$ para obtener la inversa pues f es biyectiva, denotaremos por

$\operatorname{arccosh} :]1,\infty[\longrightarrow]0,\infty[$

Luego $\operatorname{arccosh}(\cos(t)) = t$ sii $t \in]0,\infty[$. En el caso contrario es cierto por definición

Vamos, ya sí, a encontrar la ecuación de las órbitas de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo. Damos de nuevo el planteamiento:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ soluciones definidas en I

Recordemos que son las soluciones en paramétricas

Buscamos ahora la órbita $\{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ de forma explícita, es decir, $y = y(x) \mid \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$ donde $f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0 \ \forall t \in I$.

Vamos a centrarnos en la ecuación $x = \varphi(t)$ buscando expresar $t = T(x)$ donde $T = \varphi^{-1}$ donde hemos aplicado el teorema expuesto pues $\varphi'(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$ $\forall t \in I$ luego podemos definir $J^{o} = J = \varphi(I)$ y $\exists T : J \longrightarrow I$, $x \longmapsto T(x) = t$ derivable con $T'(x) = \frac{1}{\varphi'(T(x))}$

Entonces definimos $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \psi(T(x))$ derivable

Realmente lo que hacemos es despejar t y sustituir en y

donde

regla cadena — φ, ψ es solución — $T = \varphi^{-1}$, def y

$$\boxed{y' = \psi'(T(x))T'(x) = g(\varphi(T(x)), \psi(T(x)))T'(x) = g(x, y(x))T'(x) = \frac{g(x,y(x))}{f(x,y(x))}}$$

Definición de φ'

Ejemplo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$, $g(x,y) = -x$

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$\varphi(t) = 2\operatorname{sen} t$

$\psi(t) = 2\cos t$

Como necesitamos que $f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$, $2\cos(t) \neq 0$ luego tomaremos $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ y $J =]-2, 2[$

dominio x

$x = 2\operatorname{sen} t \iff t = \operatorname{arcsen}(\frac{x}{2})$

En caso de I sea otro, puede que tengamos que sumar constantes a t.

Tenemos $T :]-2,2[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $x \longmapsto \operatorname{arcsen}(\frac{x}{2}) + \pi$ y definimos:

$y :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \psi(T(x)) = 2\cos(\operatorname{arcsen}(\frac{x}{2}))$

elimino la otra pues $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) \neq x$ (4° o 1er cuadrante)

$\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{x}{2})$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2} \implies \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \iff \cos\theta = + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

Es decir, $y(x) = 2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}$