Índice

Tema 10. TVM

1. Teorema del valor medio escalar

1.1. Motivación

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces

$$\exists c \in]a,b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Por tanto:

si $\exists M \in \mathbb{R}_0^+ \mid |f'(x)| \leq M \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$

1.2. Teorema del valor medio escalar

Denotaremos por $[a,b] = \{a + t(b-a) \mid t \in [0,1]\}$ y $]a,b[= \{a + t(b-a) \mid t \in]0,1[\}$

Por tanto:

Teorema del valor medio escalar

Sea X un espacio normado, $A = A^\circ \subset X$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a, b \in A$ tales que $[a,b] \subset A$.

Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, entonces:

$$\exists c \in]a,b[\mid f(b) - f(a) = Df(c)(b-a)$$

Si existe $M \in \mathbb{R}_0^+ \mid \|Df(x)\| \leq M \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M\|b-a\|$

1.3. Teorema del valor medio para campos escalares

Sea $A = A^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a, b \in A \mid [a,b] \subset A$. Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[\Rightarrow \exists c \in]a,b[\mid f(b) - f(a) = (\nabla f(c) \mid b-a)$.

Usando en $\mathbb{R}^N$ la norma euclídea, si existe $M \in \mathbb{R}_0^+ \mid \|\nabla f(x)\| \leq M \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M\|b-a\|$

Este teorema no es cierto para campos vectoriales.

2. Desigualdad del valor medio

2.1. Desigualdad del valor medio

Lema clave

Sea Y un espacio normado, $g:[0,1]\longrightarrow Y$, $\alpha:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que g y α son continuas en $[0,1]$ y derivables en $]0,1[$ verificando que: $\|g'(t)\|\leq \alpha'(t)$ $\forall t\in]0,1[$

Entonces: $\|g(1)-g(0)\|\leq \alpha(1)-\alpha(0)$

Desigualdad del valor medio

Sean X, Y dos espacios normados, $A=A^\circ\subset X$, $f: A\longrightarrow Y$, $a,b\in A$, $[a,b]\subset A$. Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, y que existe $M\in\mathbb{R}_0^+$ | $\|Df(x)\|\leq M$ $\forall x\in]a,b[$

Entonces:

$$\|f(b)-f(a)\|\leq M\|b-a\|$$

Consiste en tomar $g:[0,1]\longrightarrow Y$, $t\longmapsto f(a+t(b-a))$ continua en $[0,1]$ y derivable en $]0,1[$

$\Rightarrow g'(t)=[Df(a+t(b-a))](b-a)$ $\forall t\in]0,1[$ y $\alpha'(t)=M\|b-a\|$ $\forall t\in[0,1]$

Por tanto $\|g'(t)\|\leq \|Df(a+t(b-a))\|\,\|b-a\|\leq M\|b-a\|$ Tomando que $g(0)=f(a)$ y $g(1)=f(b)$

2.2. Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

Sean X, Y espacios normados, $A=A^\circ\subset X$, A convexo, $f\in D(A,Y)$. Supongamos $\exists M\in\mathbb{R}_0^+$ | $\|Df(x)\|\leq M$ $\forall x\in A$. Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:

$$\|f(b)-f(a)\|\leq M\|b-a\| \quad \forall a,b\in X.$$

Si $M=0 \Rightarrow f$ constante

Corolario 2

Sea X, Y dos esp. normados, $A=A^\circ\subset X$, A convexo, $f\in D(A,Y)$. Supongamos que $Df(x)=0$ $\forall x\in A \Rightarrow f$ constante

Esta hipótesis es suficiente y necesaria.

↳ Es global

Sacar una propiedad global a partir de local necesita conexión.

¿Cuáles se usa?

Fijado $a \in \mathcal{A}$, tomamos $B = \{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = f(a)\}$

Idea: Probar que todos los puntos lo verifican.

1. Considera el conjunto de los puntos que cumplen la propiedad.
2. Probar que dicho conjunto es abto y cerrado para ver que es el total o el $\emptyset$ (normalmente no lo será).
3. Típicamente suele ser cerrado
4. La propiedad local nos permitirá probar que es abierto.

¿$\mathcal{A} = B$?

(Como $\mathcal{A}$ es conexo, tendré que probar que B es abto y cerrado $\Rightarrow$
$\Rightarrow B = \emptyset$ ó $B = \mathcal{A}$

Imp. pues $a \in \mathcal{A}$

B es cerrado en $\mathcal{A}$ pues $B = f^{-1}(\{f(a)\})$

Sea $x_0 \in B \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B(x_0, r) \subset \mathcal{A} \Rightarrow f|_{B(x_0,r)}$ es constante. Es decir,

Es abierto conexo $\quad \forall x_0 \in B$

$\forall x \in B(x_0, r)$, $f(x) = f(x_0) = f(a) \Rightarrow B(x_0, r) \subset B \Rightarrow B$ es abierto.

3. Aplicaciones

3.1. Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas.

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ \subset \mathbb{R}^N$ con $\mathcal{A}$ conexo y $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, parcialmente derivable $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{A}$, $\forall k \in \Delta_N \Rightarrow f$ constante.

Tomamos la siguiente notación:

Si $N \geq 2$, fijado $k \in \Delta_N$, para $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ escribiremos:

$$\hat{x} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

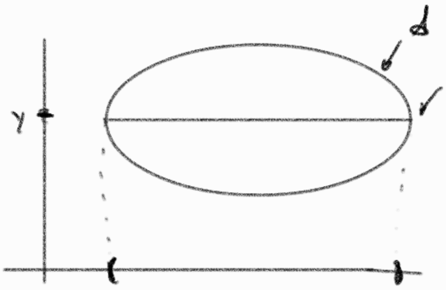
Una parcial idénticamente nula

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{A}$ convexo, $k \in \Delta_N$, $\mathcal{U} = \{\hat{x} : x \in \mathcal{A}\}$, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^M$, derivable con respecto a la k-ésima variable $\equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}$.

Entonces f no depende de la k-ésima variable, es decir, $\exists g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^M \mid f(x) = g(\hat{x}) \ \forall x \in \mathcal{A}$

Sea $\hat{x} \in \mathcal{U}$ ¿$g(\hat{x})$? Tomamos $h(t) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_N)$ definida en $\{t \in \mathbb{R} :$
$(x_1, \dots, x_{k-1}, t, \dots, x_N) \in \mathcal{A}\}$ por ser convexo de $\mathbb{R}$, un intervalo. Entonces $g(\hat{x}) = h(t) \ \forall t \in \mathcal{A}$

Interpretación

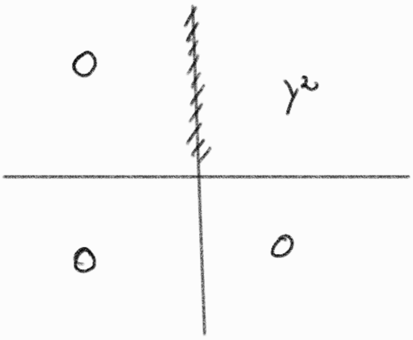


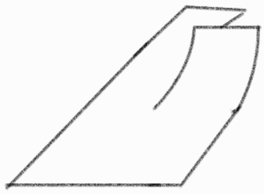
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \ \forall x \in \mathcal{A}$

$f(x,y)=g(y)$ No depende de x.

3.2. Un ejemplo referente al último resultado

Veamos que no basta con que $\mathcal{A}$ sea conexo. Tomamos $\mathcal{A}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y): y\geq 0\}$ abierto y conexo, $f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:





$f(-1,1)=0$, $f(1,1)=1$

Es de clase C^1, $f\in C^1(\mathcal{A})$ con $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \ \forall (x,y)\in\mathcal{A}$ pero depende de la primera variable.