1. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en el intervalo J y calcular su integral:

a) $J =]0,1[$, $\quad f(x) = x^2 \log x \quad \forall x \in J$

en 0 sale por comparación con e^x y en 1 igual

Claramente $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(J)$ pues es una función continua. Veamos ahora si es integrable, para ello, hacemos uso del teorema de cambio de variable con la función $\varphi: \mathbb{R}^+ \longrightarrow]0,1[$ dada por $\varphi(x) = e^{-x}$ la que sabemos que es integrable en todo intervalo de la forma $]c,\infty[$ con $c \in \mathbb{R}$ luego $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$

$(f \circ \varphi)\varphi' = f(e^x)\cdot e^x = e^{2x} x e^x = e^{3x}x$ $(-\infty, 0)$

Veamos si $(f \circ \varphi)\varphi'$ es integrable en $\mathbb{R}^+$.

$$((f \circ \varphi)\varphi')(x) = \varphi(f(x)) \cdot \varphi'(x) = e^{-2x} \cdot (-x) \cdot (-e^{-x}) = e^{-3x}x \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^+$$

Calculamos una primitiva

Por partes: $\quad u = x \longrightarrow du = dx$

$v' = e^{-3x} \longrightarrow v = \frac{-1}{3}e^{-3x}$

Debe salir $\frac{1}{6}$

$$\int xe^{-3x} = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \int \frac{1}{3}e^{-3}x = \frac{-x}{e^{3x}} - \frac{1}{3}\int e^{-3x} = \frac{-x}{e^{3x}} - \frac{1}{9e^{3x}} = \frac{-e^{-3x}}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Luego una primitiva de esta función es $g(x) = \frac{-e^{-3x}}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Como tiene límite en 0 y en ∞ por el criterio de integrabilidad tenemos que $(f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$. Entonces, el teorema de cambio de variable nos dice que f es integrable en J con

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} x = e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ dx = -e^{-t}dt \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad -e^{-t} < 0 \\ x \to 0 \quad (t \to \infty) \\ x \to 1 \quad (t \to 0) \end{array}\right] = \int_\infty^0 e^{-3t}t\,dt = -\int_0^\infty e^{-3t}t\,dt = \left[\frac{e^{-3t}}{3}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right]_0^\infty =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{3}}{3e^{3x}} - \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{3}}{3e^{3x}} = 0 - \frac{1}{9} = \frac{-1}{9}$$

Da un resultado lógico (comprobado con geogebra) y con una integradora

b) $J = \mathbb{R}^+$, $\quad f(x) = e^{-x}\cos(2x) \quad \forall x \in J$ $\quad$ Acota $\cos(2x)$ por 1

Como es una función continua en $\mathbb{R}^+$ tenemos que es localmente integrable en $\mathbb{R}^+$, veamos su integrabilidad en $\mathbb{R}^+$

Como $|\cos(2x)|\leq 1$ tenemos que $\left|\int_0^\infty f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_0^\infty e^{-x}\,dx\right|$ luego si e^{-x} es integrable en $\mathbb{R}^+$, tendremos también que f lo es como ya sabemos e^{-x} es una función decreciente con límite en 0 y en ∞ luego por el criterio de integrabilidad lo es. De hecho,

$$\int_0^\infty e^{-x} = -\int_\infty^0 e^{-x} = \int_\infty^0 -e^{-x} = \left[e^{-x}\right]_\infty^0 = \lim_{x\to 0} e^{-x} - \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 1-0 = 1 < \infty$$

Luego f es integrable en $\mathbb{R}^+$ Veamos cual es su integral.

Derivación
Arcos
Logaritmos
Potencias
Exponenciales
Senos y cosenos

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x) = \begin{bmatrix} u = e^{-x} \rightarrow du = -e^{-x}\,dx \\ dv = \cos(2x)dx \rightarrow v = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} \end{bmatrix} = \left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2e^x}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \operatorname{sen}(2x)e^{-x}\,dx$$

Integramos de nuevo por partes:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(2x)e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x} \rightarrow du = -e^{-x}dx \\ dv = \operatorname{sen}(2x)dx \rightarrow v = \frac{-\cos(2x)}{2} \end{bmatrix} = \frac{-\cos(2x)}{2e^x} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \cos(2x)e^{-x}\,dx$$

Igualamos y despejamos

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x) = \left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2e^x}\right]_0^\infty - \frac{\cos(2x)}{4e^x} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \cos(2x)e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x) = \frac{4}{3}\left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2e^x} - \frac{\cos(2x)}{4e^x}\right]_0^\infty = \frac{4}{3}\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2e^x} - \frac{\cos(2x)}{4e^x}\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2e^x} - \frac{\cos(2x)}{4e^x}\right)\right)$$

Sabemos que $\left|\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2e^x}\right| < \frac{1}{2e^x}$ y que $\left|\frac{\cos(2x)}{4e^x}\right| < \frac{1}{4e^x}$ luego $\left\{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2e^x} - \frac{\cos(2x)}{4e^x}\right\} \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{4e^x} = 0$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x) = \frac{4}{3}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$$

c) $J =]2, +\infty[$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1} \quad \forall x \in J$

Es claro que f es integrable en $]2,\infty[$ pues es una racional donde $gr(1) - gr(x^4-1) = 4 > 1$
De hecho es integrable en todo $\mathbb{R}$

Calculamos la integral.

Sabemos que $(x^4-1) = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$ luego por el método de los coeficientes indeterminados vemos que $\dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

$$\int_3 \frac{1}{x^4-1}\,dx = A\int_3 \frac{1}{x+1}\,dx + B\int_3 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_3 \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (cx+d)(x-1)(x+1)$

$x=1 \to 1 = 4B \Leftrightarrow B = \frac{1}{4}$ $\qquad x=0 \longrightarrow 1 = -A + B - d = \frac{1}{2} - d \Leftrightarrow d = \frac{-1}{2}$

$x=-1 \longrightarrow 1 = -4A \Leftrightarrow A = \frac{-1}{4}$ $\qquad x = \frac{1}{2} \longrightarrow 1 = \frac{5A}{8} + \frac{15B}{8} + \left(\frac{c}{2}+d\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{32} + \frac{15}{32} - \frac{3}{8}c + \frac{3}{8} = \frac{-3}{8}c + \frac{11}{16}$ $c=0$

Luego $$\int_2^t \frac{1}{x^4-1}\,dx = \frac{-1}{4}\int_2^t \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int_2^t \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int_2^t \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\overbrace{\frac{-1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1|}^{0} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)\right] - \lim_{x\to 2}\left[\frac{-1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)\right] = \frac{-\pi}{4} + \frac{\ln(3)}{4} + \frac{\operatorname{arctg}(2)}{2}$$

d) $J = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in J$ $\longrightarrow \cosh^{-1} \cdot \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}}}{\frac{1}{e^{-x}}} = \left(e^x e^{-x} + 1 = e^{x-x} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}\right)$$

Como e^x sale para $-\infty$

Para probar la integrabilidad de f usaremos el siguiente cambio de variable $\varphi: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \log(x)$. Es claro que $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ y que $\varphi'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Además $\varphi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$.
Por tanto bastará probar que $(f\circ\varphi)\varphi' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\log(x))\frac{1}{x} = \frac{1}{e^{\log x} + e^{-\log x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+1}$$

Esta función es claramente integrable pues la diferencia de grados es mayor que 1

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_1^{e^x} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg}(e^x) - \operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{4}$$

Como f es simétrica tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} f = 2\int_{\mathbb{R}_0^+} f = 2\left[\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{4}\right] = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

e) $J =]0,1[$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}} \quad \forall x \in J$ $\qquad t^2 = x$

f es una función continua en J luego localmente integrable. Además es una función racional con diferencia de grados mayor que 1 luego es integrable en $]0,1[$

Para calcular su integral tomaremos $\varphi :]0,1[\longrightarrow]0,1[$ dada por $\varphi(t) = t^2$ que es $C^1(]0,1[)$ y $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in]0,1[$.

Como ya hemos visto que es integrable, bastará con obtener la integral.

$\forall x \in]0,1[\quad f(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x^2)\,2x = \dfrac{1}{x^4+x}$

$t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{t}{t^4+t}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^3+1}\,dt = \int_0^1 \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{-3}{3}\int_0^1 \frac{2t-4}{t^2-t+1}\,dt$$

$1 = A(t^2-t+1) + (Bt+C)(t+1)$

$t=-1 \rightarrow 1 = 3A \rightarrow A = \frac{1}{3}$

$t=0 \rightarrow 1 = A + C = \frac{1}{3} + C \rightarrow \frac{2}{3} = C$

$t=1 \rightarrow 1 = A + 2B + 2C = \frac{1}{3} + 2B + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} + 2B \rightarrow \frac{-2}{3} = 2B \rightarrow \frac{-1}{3} = B$

¿?

$$\int_0^1 \frac{2t-4}{t^2-t+1}\,dt$$

$\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)=1$

$\sec^2(x)=\boxed{1+tg^2(x)}$

f) $J=]1,+\infty[$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\quad \forall x\in J$

Acotar por 1 y por $\frac{1}{x^2}$

$x=tg(t)$

Es integrable por diferencia de grados si

Tomamos el cambio de variable $x \xrightarrow{\varphi} tg(x)$, $\varphi'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ $\quad \operatorname{sen}(x)'=\cos(x)$

$$\int_J=\int_{arctg(1)}^{\pi/2}\frac{1}{tg^2(t)\sec(t)}\frac{1}{\cos^2(t)}dt=\int_{arctg(1)}^{\pi/2}\frac{1}{tg^2\cos}dt=\int_{arctg(1)}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}^2(t)}dt=\left[-\frac{1}{\operatorname{sen}(t)}\right]_{arctg(1)}^{\pi/2}$$

$$=-1+\frac{1}{\operatorname{sen}(arctg(1))}=-1+\sqrt{2}$$

$2arctg(t)$

$\cos(2arctg(t))=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\operatorname{sen}(2arctg(t))=\frac{2t}{1+t^2}$

$tg(2arctg(t))=\frac{2}{1+t^2}$

g) $J=]0,\pi/2[$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x+\operatorname{sen} x}\quad \forall x\in J$

Es una función continua y acotada en $]0,\frac{\pi}{2}[$ luego es integrable en ese intervalo.

Tomamos el cambio de variable $x=2arctg(t)$, es decir, $\varphi:]0,1[\longrightarrow]0,\frac{\pi}{2}[$ dada por $\varphi(x)=2arctg(x)$

luego:

$$\int_0^{\pi/2}f(x)=\int_0^1\frac{1}{1+\cos(2arctg(t))+\operatorname{sen}(2arctg(t))}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{2}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt=\int_0^1\frac{2}{1+\cancel{t^2}+1-\cancel{t^2}+2t}dt=$$

$$=\int_0^1\frac{2}{2t+2}dt=\int_0^1\frac{1}{t+1}dt=\left[\ln|t+1|\right]_0^1=\left(\lim_{t\to1}\ln|t+1|-\lim_{t\to0}\overset{0}{\cancel{\ln|t+1|}}\right)=\frac{\ln(2)}{2}$$

Aquí había un $\frac{1}{2}$

h) $J =]1, +\infty[$, $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x \in J$

$1+tg^2 = sec^2$

$sec^2 - 1 = tg^2$

De nuevo es una función racional con diferencia de grados > 1

Tomaremos $\varphi:]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]1, \infty[$ dada por $\varphi(x) = sec(x)$ $\quad \varphi'(x) = \left(\frac{1}{cos(x)}\right)' = \frac{sen(x)}{cos^2(x)} = \frac{tg(x)}{cos(x)}$

$$\int_J f = \int_0^{\pi/2} \frac{sen(t)\ dt}{\frac{1}{cos^3(t)}\ tg(t)\ cos^2(t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{sen(t)\cos(t)}{tg(t)}\ dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{sen(t)}\cos(t)dt}{\frac{\cancel{sen(t)}}{cos(t)}} = \int_0^{\pi/2} cos^2(t) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} cos(2t) - sen^2(t)\ dt = \int_0^{\pi/2} cos(2t)\,dt - \int_0^{\pi/2} sen^2(t)\,dt \quad (*)$$

$cos(2t) = cos^2(t) - sen^2(t)$

Resolvemos $\int_0^{\pi/2} sen^2(t)dt$ integrando por partes

$u = sen^2(t) \longrightarrow du = 2sen(t)cos(t)dt = sen(2t)$

$dv = dt \longrightarrow v = t$

$$\int_0^{\pi/2} sen^2(t)dt = sen^2(t)\,t - \int_0^{\pi/2} t\,sen2t\ dt = \left[t\,sen^2(t) + \frac{t\cos(2t)}{2} - \frac{sen(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

Resolvemos $\int_0^{\pi/2} t\,sen(2t)dt$ por partes.

$u = t \qquad du = dt$

$dv = sen(2t) \qquad v = -\frac{cos(2t)}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} t\,sen(2t)\,dt = -\frac{t\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} cos(2t)dt = \left[\frac{-t\cos(2t)}{2} + \frac{1}{4}sen(2t)\right]_0^{\pi/2}$$

$$(*) = \left[\frac{sen(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \left[t\,sen^2(t) + \frac{t\cos(2t)}{2} - \frac{sen(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\cancel{sen(\pi)}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{sen(0)}}{\cancel{2}} - \frac{\pi}{2}sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\cos\pi + \frac{\cancel{sen\pi}}{\cancel{4}} = \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$ ← Se me ha ido un signo

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el intervalo J:

a) $J = \mathbb{R}^+$, $\quad f(x) = \dfrac{x^a}{e^x - 1} \quad \forall x \in J \quad (a \in \mathbb{R})$

Es importante

Sabemos que f es continua y acotada en todo compacto de J luego es localmente integrable en J.

Partimos J en dos partes $J_1 =]0,1]$, $J_2 = [1,\infty[$.

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{\frac{x^a}{e^x-1}}{\frac{1}{x}} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^{a+1}}{e^x-1} \underset{a\neq -1}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(a+1)x^a}{e^x} = (a+1)\lim_{x\to 0} x^a$$

Luego distinguimos casos:

·) Si $a>0$, $\lim \left|\frac{\frac{x^a}{e^x-1}}{\frac{1}{x}}\right| = 0$ no hay info

·) Si $a=0$, $\lim \left|\frac{\frac{x^a}{e^x-1}}{\frac{1}{x}}\right| = 1$ luego no es integrable en $]0,1]$

·) Si $a<0, a\neq -1$, $\left\{\left|\frac{\frac{x^a}{e^x-1}}{\frac{1}{x}}\right|\right\} \to \infty$ luego no es integrable en $]0,1]$

·) Si $a=-1$ $\left\{\left|\frac{\frac{1}{x}}{e^x-1}\right|\right\} \to \infty$ luego no es integrable en $]0,1]$

Ahora bien, si $a>0$

Esto no lo entiendo

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{\frac{x^a}{e^x-1}}{\frac{1}{x^{(1-a)}}} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^{(1-a)}x^a}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} \overset{L'H}{=} \lim \frac{1}{e^x} = 1$$

Como $(1-a)<1$ luego si $s = a-1$, se tiene $x^s = \frac{1}{x^{a-1}}$ con $s<0$

Luego es integrable en $]0,1[$

Veamos qué ocurre en infinito.

·) $a<0$ $\lim_{x\to\infty} \left| \frac{\frac{x^a}{e^x-1}}{\frac{1}{e^x-1}} \right| = \lim_{x\to\infty} x^a = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-a}} = 0$

Como $\frac{1}{e^x-1}$ es integrable en $]1,\infty[$ mi función también lo es.

·) $a=0$ $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$ que no es integrable

idea feliz

·) $a>0$ Sabemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^u}{\sqrt{e^x}} = 0$, y es fácil ver que $e^{-x}\in \mathcal{L}_1([1,\infty[) \Leftrightarrow e^{-x} \in \mathcal{L}_1([1,\infty[)$ por el cambio de variable $y=\frac{x}{2}$ o $y=2x$, con $y'(x)\neq 0$ $\forall x \in [1,\infty[$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^u}{e^x-1}}{\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^u}{e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}} = 0$$

Luego para $a>0$ $f_a \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$

b) $J = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = x^n e^{-x^2} \cos x \quad \forall x \in J \quad (n \in \mathbb{N})$

Como $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|f(x)| = |x^n e^{-x^2} \cos x| \leq |x^n e^{-x^2}|$. Pero $0 \leq e^{-x^2} \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ entonces

$|f(x)| \leq |x^n|$

luego sabemos que x^n es integrable en $]0,c[$ con $c>0$ Entonces

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \to 0} \frac{|x^n e^{-x^2} \cos(x)|}{|x^n|} = \lim_{x\to 0} e^{-x^2} \cos(x) = 1$

luego en el intervalo $]-c,c[$ es integrable tmbn.

Veamos que ocurre en $]c,\infty[$ y obtendremos lo que buscamos. Usar que $e^{-|x|} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, luego

$\lim_{x\to\infty} \frac{|x|^n e^{|x|}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n e^x}{e^{x^2}} = 0 \to$ es integrable

c) $J =]0,\pi[$, $\qquad f(x) = \frac{x^\rho}{1-\cos x} \quad \forall x \in J \quad (\rho \in \mathbb{R})$

d) $J =]0,1[$, $\qquad f(x) = \frac{x^a(1-x)^b \log(1+x^2)}{(\log x)^2} \quad \forall x \in J \quad (a,b \in \mathbb{R})$

$\to 0$

$\to 1$

$\frac{x^p}{(1-\cos(x))}$

$\boxed{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \frac{1+\cos(x)}{1-\cos^2(x)} = \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}$

$\boxed{\frac{1}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\tan(x)\sin(x)}}$

c) Tratamos los problemas por separado: Tenemos $J_1 =]0,1]$ y $J_2 = [1,\pi[$

-) $p>0$ $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^p}{1-\cos(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{p+1}}{1-\cos(x)} \overset{L'H}{=} \lim \frac{(p+1)x^p}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{p(p+1)x^{p-1}}{\cos(x)} = 0 \to$ no info.

-) $p=0$ $\lim_{x\to 0} \left| \frac{\frac{1}{1-\cos(x)}}{\frac{1}{x}} \right| = \lim_{x\to 0} \left| \frac{x}{1-\cos(x)} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)}$

$\left\{ \frac{x}{1-\cos(x)} \right\} \to \infty$ luego no es integrable en $]0,1[$

$x^p \frac{1}{1-\cos(x)} \to \infty$

No integrable en $]0,1[$ si $p \geq 1$

-) $p<0$, $p \neq -1$ $\lim_{x\to 0} \left| \frac{\frac{x^p}{(1-\cos(x))}}{x^p} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}$

Como $p<0, p \neq -1$ tenemos que x^p no es integrable en $]0,1[$. luego f no es integrable en $]0,1[$

-) $p=-1$ $\nexists$ $\lim_{x\to 0} \left| \frac{\frac{1}{x(1-\cos(x))}}{\frac{1}{x}} \right|$ luego como $\frac{1}{x}$ no es integrable en $]0,1[$ tenemos que

f no es integrable en $]0,1[$

si $0<p<1$ tomar $x^{(p-1)} = \frac{1}{x^{1-p}}$

Veamos que ocurre con $p>0$

$\lim_{x\to 0} \left| \frac{\frac{x^p}{1-\cos(x)}}{\frac{1}{x^{(1-p)}}} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos(x)}$ que sabemos como acaba luego es integrable en $]0,1[$

Se ha usado mala notación

Veamos qué ocurre en $]1,\pi[$. En π no hay problemas pues $\exists \lim_{x\to\pi} \frac{x^p}{1-\cos(x)}$ luego tomamos $[\pi,1]$ y obtenemos que es integrable

Observando lo antes estudiado, si $p\geq 2$ está acotada y tiene límite en 0 luego, también es continua, es integrable

¿Qué ocurre en $1<p<2$