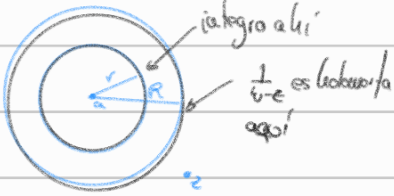


1. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que para $z \in \mathbb{C}$ con $|z-a| > r$ se tiene

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

La idea que subyace es saber el dominio de integración!

Bastará con probar que $D(a,R)$ es estrellado con $r<R<|z-a|$ para aplicar el Tª de Cauchy para dominios estrellados. Evidentemente $D(a,R)$ es estrellado y la función $f(w)=\frac{1}{w-z}$ es una función holomorfa en $D(a,R)$ pues $|w-z|>0$ $\forall w \in D(a,R)$. Además, $C(a,r) \subset D(a,R)$ siendo una trayectoria cerrada, luego $\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$.

3. Dados $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $b,c \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$, calcular todos los posibles valores de la integral

$$\int_{\sigma} \frac{dz}{(z-b)(z-c)}$$

dependiendo de la posición relativa de b,c respecto de la circunferencia $C(a,r)^*$.

¡Cuidado con cuál es f!
· En estrellados $\int_\sigma f = 0$
· En Fórmula $f(z) = \int \frac{g(w)}{w-z}dw \cdot \frac{1}{2\pi i}$
El punto debe estar en Ω

Vamos a distinguir dos casos:

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{b\})$ $\wedge$ $C(a,r) \subset \mathbb{C}\setminus\{b\}$

i) Si $b=c$, entonces $f(z)=\frac{1}{(z-b)^2}$ que tiene como primitiva a $F(z) = -\frac{1}{z-b}$, aplicando ahora el Tª de caracterización de existencia de primitiva tenemos que $\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)^2} = 0$

ii) Si $b \neq c$ descomponemos en dos fracciones

$$\frac{1}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c}\cdot\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c}\right)$$

Luego $\int_\sigma \frac{dz}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c}\left(\int_\sigma \frac{dz}{z-b} - \int_\sigma \frac{dz}{z-c}\right)$ y trabajamos los siguientes casos:

a) Si $b,c \in D(a,r)$, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia tenemos que

$$\int_\sigma \frac{dz}{z-b} = 2\pi i f(b) = 2\pi i$$

$$\int_\sigma \frac{dz}{z-c} = 2\pi i f(c) = 2\pi i$$

luego $\int_\sigma \frac{dz}{(z-b)(z-c)} = 0$.

b) Si $b \notin \overline{D}(a,r)$ $\wedge$ $c \in D(a,r)$, en este caso, siguiendo la idea del apartado anterior

$$\int_\sigma \frac{dz}{z-c} = 2\pi i$$

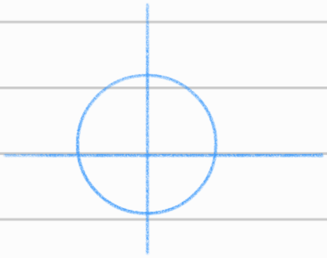
Tomando ahora $R \in \mathbb{R}^+ \mid b \in D(a,R)$, como $D(a,R)$ es estrellado, aplicando el Tª de Cauchy para dominios estrellados obtenemos que la otra integral se anula

4. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{C(0,r)}^{\sigma} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz \qquad (r\in\mathbb{R}^+,\ r\neq 2)$

(b) $\displaystyle\int_{C(0,1)}^{\varphi} \frac{\cos z\ dz}{(a^2+1)z-a(z^2+1)} \qquad (a\in\mathbb{C},\ |a|\neq 1)$

a) $\displaystyle\int_\sigma \overbrace{\frac{z+1}{z(z^2+4)}}^{f(z)}\,dz$. En todos los casos descompondremos de la siguiente forma:



$$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{(z^2+4)} + \frac{1}{z\cdot(z^2+4)}$$

Luego $\displaystyle\int_\sigma f(z)\,dz = \int_\sigma \overset{(1)}{\frac{1}{z^2+4}}\,dz + \int_\sigma \overset{(2)}{\frac{1}{z(z^2+4)}}\,dz$ y descomponiendo cada una:

(1) $\displaystyle\frac{1}{z^2+4} = \frac{A}{z+2i} + \frac{B}{z-2i}$ de donde $A=\frac{-1}{4i}$ y $B=\frac{1}{4i}$

$$(1) = \int_\sigma \frac{-1}{4i}\cdot\frac{1}{z+2i}\,dz + \int_\sigma \frac{1}{4i}\cdot\frac{1}{z-2i}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i}$ de donde $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{-1}{8}$ y $C=\frac{-1}{8}$

Por tanto $\displaystyle\int_\sigma f(z)\,dz = \left(\frac{-1}{4i}-\frac{1}{8}\right)\int_\sigma \frac{1}{z+2i}\,dz + \left(\frac{1}{4i}-\frac{1}{8}\right)\int_\sigma \frac{1}{z-2i}\,dz + \frac{1}{4}\int_\sigma \frac{1}{z}\,dz$

i) Si $r<2$, sabemos que tanto $g(z)=\frac{1}{z-2i}$ como $h(z)=\frac{1}{z+2i}$ son holomorfas en $\overline{D}(0,r)$, que es estrellado. Entonces, como σ es cerrada tenemos que $\int_\sigma g(z)\,dz = \int_\sigma h(z)\,dz = 0$.

ii) Si $r>2$, sabemos que $D(0,r)$ es abierto y que tanto g como h son holomorfas en el $D(0,r)$? . Luego aplicamos la fórmula de Cauchy para la circunferencia

$$\int_\sigma \frac{1}{z+2i}\,dz = \int \frac{1}{z-2i}\,dz = 2\pi i$$

Nos queda estudiar la función $k(z)=\frac{1}{z}$ que sabemos que es holomorfa en $D(0,r)\setminus\{0\}$ (lo es en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$) , luego aplicando la fórmula de Cauchy para la circunferencia obtenemos que $\int_\sigma k(z)\,dz = 2\pi i$.

Por tanto : si $r<2$ $\int_\sigma f(z)\,dz = \frac{\pi i}{2}$

si $r>2$ $\int_\sigma f(z)\,dz = 0$

b) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\,dz$ $|a| \neq 1$. Volvemos a descomponer en fracciones simples.

$$(a^2+1)z - a(z^2+1) = -az^2 + (a^2+1)z - a = 0 \Rightarrow z = \frac{-a^2-1 \pm \sqrt{a^4-2a^2+1}}{-2a} = \frac{-a^2-1 \pm (a^2+1)}{2a} \begin{cases} \frac{1}{a} \\ a \end{cases}$$

Luego $-az^2+(a^2+1)z-a = -a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)$

$$\frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)} = \frac{\cos z}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} = \frac{-1}{a} \cdot \cos z\left(\frac{1}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}\right)$$

$$\frac{1}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-\frac{1}{a}} \Rightarrow A = \frac{a}{a^2-1}, \quad B = \frac{a}{1-a^2}$$

Entonces $\displaystyle\int_\varphi \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\,dz = \frac{-1}{1-a^2}\left(\int_\varphi \frac{\cos z}{z-\frac{1}{a}}\,dz - \int_\varphi \frac{\cos z}{z-a}\,dz\right)$

Estudiamos por casos:

Que se queda dentro → FCC

Qué se queda fuera → TCDE

Si $|a|<1$, $\left|\frac{1}{a}\right|>1$. En este caso, para $\displaystyle\int_\varphi \frac{\overset{f(z)}{\cos z}}{z-a}\,dz$, sabemos que $f \in H(D(0,1))$ por lo que, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia $\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i \cos(a)$

Por su parte, sabemos que $\exists R \in \mathbb{R}^+ \mid 1 < R < \left|\frac{1}{a}\right|$ de manera que $D(0,1) \subset D(0,R) \wedge \frac{1}{a} \notin D(0,R)$ entonces, como $\frac{\cos z}{z-\frac{1}{a}} \in H(D(0,R)) \wedge D(0,R)$ es estrellado $\int_\varphi \frac{\cos z}{z-\frac{1}{a}}\,dz = 0$

Si $|a|>1$, $\left|\frac{1}{a}\right|<1$ haciendo un razonamiento análogo.

$$\int_\varphi \frac{\cos z}{z-a}\,dz = 0 \quad \wedge \quad \int_\varphi \frac{\cos z}{z-\frac{1}{a}}\,dz = 2\pi i \cos\frac{1}{a}$$

¡Hay que ver $a=0$!

5. Dados $a,b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$, sea $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \text{máx}\{|a|,|b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)} = 2\pi i \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante.

$r := \max\{|a|, |b|\}$

Nos dan el caso idílico del T^a de Cauchy para la circunferencia $C(0,R)$ pues $\bar{D}(0,R) \supset C(0,R)$ y $f(z) \in H(\mathbb{C})$, además $\frac{1}{(z-a)(z-b)} \in H(\bar{D}(0,R))$ entonces

$$\frac{2\pi i f(b) - 2\pi i f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot\left(\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b}\,dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\right) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} - \frac{f(z)}{z-a}\,dz =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{C(0,R)} \frac{f(z)(z-a) - f(z)(z-b)}{(z-b)(z-a)}\,dz = \frac{1}{\cancel{b-a}}\int_{C(0,R)} \frac{f(z)\cancel{(b-a)}}{(z-b)(z-a)}\,dz = \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}\,dz$$

Ejercicio 2.

Fijado z, sea $\{r_n\} \longrightarrow R$ | $z \in D(a, r_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$f(z)2\pi i = \int_{C(a,r_n)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Por la fórmula de Cauchy podemos calcular la integral $\forall n\in\mathbb{N}$. Buscamos probar que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(a+r_ne^{it})}{a+r_ne^{it}-z}(ir_ne^{it})\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(a+Re^{it})}{a+Re^{it}-z}(iRe^{it})\,dt$$

Definimos por $f_n(t)=\frac{f(a+r_ne^{it})}{a+r_ne^{it}-z}ir_ne^{it}$ y $g(t)=\frac{f(a+Re^{it})}{a+Re^{it}-z}iRe^{it}$ $\forall t\in[-\pi,\pi]$. La convergencia puntual la tenemos por la continuidad de f y la convergencia de r_n.

$$|f_n(t)-g(t)| = \left|\frac{f(a+r_ne^{it})}{a+r_ne^{it}-z}r_n - \frac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-z}R\right| \le |r_n-R|\left|\frac{f(a+r_ne^{it})}{a+r_ne^{it}-z}\right| + R\left|\frac{f(a+r_ne^{it})}{a+r_ne^{it}-z}-\frac{f(a+re^{it})}{a+r_ne^{it}-z}\right|$$

$\pm\frac{f(a+r_ne^{it})}{a+re^{it}}r$

Definiendo ahora $w_n = a+r_ne^{it}$, $w=a+Re^{it}$ obtenemos que; sumando y restando $\frac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-z}$:

$$|r_n-R|\left|\frac{f(a+r_ne^{it})}{a+r_ne^{it}-z}\right| + R\left|\frac{f(a+r_ne^{it})}{a+r_ne^{it}-z}-\frac{f(a+re^{it})}{a+r_ne^{it}-z}\right| \le |r_n-r|\left|\frac{f(w_n)}{w_n-z}\right| + R\left[|f(w_n)|\left|\frac{1}{w_n-z}-\frac{1}{w-z}\right| + \frac{1}{|w-z|}|f(w_n)-f(w)|\right]$$

Fijado $\varepsilon>0$ $\exists n_1\in\mathbb{N}$ | $n\ge n_1 \Rightarrow |r_n-R|<\varepsilon/\alpha$ $M=\max\{|f(w)| : w\in\bar{D}(a,r)\}$.

$|w_n-z| \ge |r_ne^{it}+a-z| \ge |r_n-|a-z||$

$|w-z|\ge r-|a-z| = D>0$

Como $|r_n-|a-z||$ converge a D obtenemos que $\exists n_2\in\mathbb{N}$ | $n\ge n_2 \Rightarrow |r_n-|a-z||\ge \frac{D}{2}$. Por otro lado.

$$\left|\frac{1}{w_n-z}-\frac{1}{w-z}\right| = \frac{|w-w_n|}{|(w_n-z)(w-z)|} = \frac{|r_n-r|}{(w_n-z)(w-z)}$$

Como trabajamos en un compacto y converge unif. entonces f es unif. continua luego $\exists\delta>0$: $v_1,v_2\in D(a,r)$, $|v_1-v_2|<\delta \Rightarrow |f(v_1)-f(v_2)|<\varepsilon$. Ahora $\exists n_3\in\mathbb{N}$ | $n\ge n_3 \Rightarrow |f(w_n)-f(w)|<\varepsilon/\alpha$

Tomando $n=\max\{n_1,n_2,n_3\}$

$$|r_n-r|\left|\frac{f(w_n)}{w_n-z}\right| + R\left[|f(w_n)|\left|\frac{1}{w_n-z}-\frac{1}{w-z}\right| + \frac{1}{|w-z|}|f(w_n)-f(w)|\right] \le \varepsilon\frac{2M}{D} + R\left[M\frac{2\varepsilon}{D^2}+\frac{\varepsilon}{D}\right] = \frac{\varepsilon\alpha}{\alpha} = \varepsilon \quad \forall t\in[-\pi,\pi]$$

Otra forma es usar el T^a de Heine con $h(r,t) = \dfrac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-z}$, que es continua definida en un compacto $\Rightarrow$ h es unif. continua. $h: [\delta', R] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$|f_n(t) - g(t)| = |h(r_n,t) - h(R,t)|$$

como solo depende de r y r_n; como $\{r_n\} \to r$ usando la continuidad uniforme tenemos $< \varepsilon$.

$$\left|\int\right| \le 2\pi \frac{R}{(R-|a|)(R-|b|)} \quad \forall R > r$$

$$r = \max\{|a|, |b|\}$$