1. Conocer y comprender las siguientes definiciones, para funciones entre espacios métricos:

a) Continuidad en un punto

b) Límite en un punto

a) Sean E, F espacios métricos y $x \in E$ un punto. Se dice que la función $f: E \longrightarrow F$ es continua en x si $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}(x)$ $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}(f(x))$.

Además, sustituyendo entornos por bolas abiertas en un espacio métrico obtenemos una caracterización. Por último haciendo uso de sucesiones, vemos la siguiente proposición.

Sean E, F espacios métricos, $f: E \longrightarrow F$ y $x \in E$. Son equivalentes.

i) f continua en x

ii) $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ $\forall \delta, \varepsilon > 0$

iii) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$

b) Sea $f: A \longrightarrow F$ con E, F esp. métricos y $\alpha \in A'$ con $A \subset E$ Se tiene que:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}(L)\ \exists V \in \mathcal{U}(\alpha) \mid f(\mathcal{U} \cap (A \setminus \{\alpha\})) \subset V \iff$$

$$\iff [x_n \in A \setminus \{\alpha\}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \rightarrow \alpha \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow L$$

Cabe destacar el carácter local, es decir, basta conocer la función en un subconjunto del dominio que contenga al punto para saber si es continua.

Es decir, $f: A \rightarrow F$ es continua en $x \in A$ si $f|_B : B \longrightarrow F$ es continua en $x \in B \subset A$

Por tanto $\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha} f|_B(x) = L$ con $x \in B' \Rightarrow x \in A'$

Es importante resaltar que cuando α es punto aislado no tiene sentido hablar de límite puesto que $\nexists \{x_n\} \rightarrow x /\ n \geq n_0 / n_0 \in \mathbb{N}\ x_n \in A \setminus \{x\}$

2. Conocer y comprender los siguientes resultados:

a) Caracterizaciones de la continuidad en un punto y de la continuidad global

b) Carácter local de la continuidad

c) Operaciones con funciones continuas

a) CARACTERIZACIÓN EN UN PUNTO → ap. 1a)

Con respecto a la caracterización global de la continuidad. Sean, E, F espacios métricos y Decimos que f es continua en E cuando es continua en todo punto $x \in E$. Como caracterización.

$\forall f: E \to F$ son equivalentes:

(i) f continua

(ii) $\forall V \subset F$ abierto $\Rightarrow f^{-1}(V) \subset E$ abierto

(iii) $\forall C \subset F$ cerrado $\Rightarrow f^{-1}(C) \subset E$ cerrado

(iv) $\forall \{x_n\}$ convergente con $x_n \in E \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{f(x_n)\}$ converge con $f(x_n) \in F \; \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Sean E, F espacios métricos definimos $f: E \to F$ una función. Se tiene

$$f \text{ es continua} \iff \forall x \in E \; \exists \mathcal{U} \in \mathcal{U}(x) \,/\, f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to F \text{ es continua}$$

Por lo tanto una función es continua si sus distintas restricciones a entornos de los puntos son continuas $\Rightarrow$ trivial

$\Leftarrow$ Ver que $\bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}(x)} \mathcal{U} = E$

c) Sean E, Y conjuntos no vacíos, denotamos por $F(E, Y)$ al conjunto de las funciones $f: E \to Y$. Si $Y = \mathbb{R} \Rightarrow F(E, \mathbb{R}) = F(E)$. Tenemos que cuando Y es un espacio vectorial, $F(E, Y)$ tamb lo es, por tanto:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in F(E, Y), \; \forall x \in E$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall f \in F(E, Y), \; \forall x \in E$$

De hecho podemos tener una operación más general en el producto por escalares tomando $\Lambda \in F(E)$. Entonces, para $g \in F(E, Y)$ podemos considerar la función producto $\Lambda g \in F(E, Y)$ dada por

$$(\Lambda g)(x) = \Lambda(x) g(x) \quad \forall x \in E.$$

En particular, cuando $Y=\mathbb{R}$ hemos definido el producto de funciones $f,g \in F(E)$ que nos da una función $(fg) \in F(E)$ $\Rightarrow$ Tenemos definido un producto en $F(E)$ con una suma $\Rightarrow$ $F(E)$ es un anillo conmutativo con unidad (Id). Podemos finalmente definir un cociente de $f,g \in F(E) / g(x) \neq 0 \; \forall x \in E$ definido por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall f,g \in F(E), \forall x \in E$$

Veamos una serie de consecuencias:

- Sea E un espacio métrico e Y un espacio normado. Si $f,g \in F(E,Y)$ y $\lambda \in F(E)$ son continuas en $x \in E$ $\Rightarrow$ $f+g$ y λg son continuas en x. En el caso $Y=\mathbb{R}$ si $g(E) \subset \mathbb{R}^* \Rightarrow$ f/g continua en x

- $C(E,Y)$ es un subespacio vectorial de $F(E,Y)$. Además, es un subanillo de $F(E)$. Si $f,g \in C(E)$ y $g(E) \subset \mathbb{R}^* \Rightarrow f/g \in C(E)$

- Sea E un espacio métrico, $A \subset E$, $\alpha \in A'$. Sea Y un espacio normado y sean $f,g : A \to Y$ y $\lambda : A \to \mathbb{R}$ con límite en α, se tiene:

$$\lim_{x \to \alpha} (f+g)(x) = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x)$$

$$\lim_{x \to \alpha} (\lambda g)(x) = \lim_{x \to \alpha} \lambda(x) \lim_{x \to \alpha} g(x)$$

En particular, si $Y=\mathbb{R}$ y $g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in E \Rightarrow \lim_{x \to \alpha} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to \alpha} f(x)}{\lim_{x \to \alpha} g(x)}$. Si g no tiene restricción $\Rightarrow \lim_{x \to \alpha} (fg)(x) = \lim_{x \to \alpha} f(x) \lim_{x \to \alpha} g(x)$