1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

Sabemos, de la relación 1, que $\arg : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dado por

$$\arg z = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$$

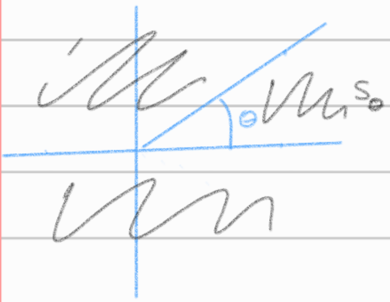
luego $\arg|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-}$ es continua por ser suma, cociente y composición de funciones continuas. Como $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ es abierto relativo de $\mathbb{C}^*$, pues dado $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ $\exists \delta > 0 \mid D(z,\delta) \cap \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, tenemos entonces por el carácter local que arg es continua en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$.

Nota: también se puede ver que $\mathbb{R}^-$ es cerrado haciendo uso de la topología discreta y la densidad de $\mathbb{C}$

Sea ahora $z \in \mathbb{R}^-$ fijo $\mid \arg(z) = \pi$. Tomamos $z_n = |z|(\cos(-\pi+\frac{1}{n}) + i\operatorname{sen}(-\pi+\frac{1}{n}))$. Entonces, es claro que $\{z_n\} \longrightarrow -|z| = z$ pero $\{\arg z_n\} = \{-\pi + \frac{1}{n}\} \longrightarrow -\pi$. Por tanto, arg no es continua en z pues toda función continua cumple que si $\{a_n\} \longrightarrow a$ entonces $\{f(a_n)\} \longrightarrow f(a)$

$|\arg(z) = \pi|$

2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.



Es claro que, fijado $\theta \in \mathbb{R}$ S_θ es todo el plano complejo excepto la recta $\{z \in \mathbb{C} \mid \theta \in \operatorname{Arg} z\}$ y que dicho conjunto es isomorfo a $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ en el cual disponemos de una función continua para determinar el argumento luego

$$S_\theta \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- \xrightarrow{\ \arg\ } \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto z(\cos(\pi-\theta) + i\operatorname{sen}(\theta-\pi)) \longmapsto \arg(z(\cos(\pi-\theta) + i\operatorname{sen}(\pi-\theta))) + \theta - \pi$$

Por tanto, definiendo $\varphi : S_\theta \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(z) = \arg(z(\cos(\pi-\theta) + i\operatorname{sen}(\pi-\theta))) + \theta - \pi$ $\forall z \in S_\theta$ obtenemos la función que buscamos que es continua por ser suma, producto y composición de funciones continuas.

Veamos ahora que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$, como $\theta - \pi \in \operatorname{Arg}(\cos(\theta-\pi) + i\operatorname{sen}(\theta-\pi))$ obtenemos que

$$\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z(\cos(\pi-\theta) + i\operatorname{sen}(\pi-\theta))) + \operatorname{Arg}(\cos(\theta-\pi) + i\operatorname{sen}(\theta-\pi))$$

$$= \operatorname{Arg}(z(\cos(\pi-\theta) + i\operatorname{sen}(\pi-\theta))(\cos(\theta-\pi) + i\operatorname{sen}(\theta-\pi))) = \operatorname{Arg}(z)$$

Por tanto, es la función que buscamos

3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Supongamos que $\exists \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*) \mid \varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)\ \forall z \in \mathbb{C}^*$. Sea ahora $f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto \varphi(z) - \varphi(-z)\ \forall z \in \mathbb{C}^*$ tal que

$f \in \mathcal{C}^*$ y además, como $\mathbb{C}^*$ es conexo $\Rightarrow f(\mathbb{C}^*)$ es un intervalo. Probaremos que $\exists w \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(w) = 0$

Fijado $z \in \mathbb{C}^*$:

- Si $f(z) = 0 \Rightarrow w = z$
- Si $f(z) \neq 0 \Rightarrow f(z) + f(-z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C}^*$. Entonces $f(z) f(-z) < 0$. Como $f(\mathbb{C}^*)$ es un intervalo por ser $\mathbb{C}^*$ conexo y f continua entonces $\exists w \in \mathbb{C}^* \mid f(w) = 0$.

Entonces $\varphi(w) = \varphi(-w)$. Por tanto, si $\alpha \in \operatorname{Arg}(w) \Rightarrow \varphi(w) \in \alpha + 2\pi\mathbb{Z}$ y $\varphi(-w) \in \alpha + (2\pi + 1)\mathbb{Z}$!!!

Probamos ahora lo mismo para $\mathbb{T}$. Sea $f(z) = \varphi\left(\frac{z}{|z|}\right)\ \forall z \in \mathbb{C}^*$ luego si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ entonces $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ que ya hemos visto que no puede ser así.

4. Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos tales que $\{z_n\} \longrightarrow z$, o lo que es lo mismo, si $z_n = a_n + ib_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\{a_n + ib_n\} \longrightarrow a + ib$, donde $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Sea ahora $\{\theta_n\}$ la sucesión de argumentos principales de $\{z_n\}$, es decir, $\theta_n = \operatorname{sgn}(b_n) \arccos\left(\frac{a_n}{|z_n|}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

Si $b \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(b_n) \arccos\left(\frac{a_n}{|z|}\right) = \operatorname{sgn}(b) \arccos\left(\frac{a}{|z|}\right) = \theta = \arg z.$$

Si $b = 0 \rightarrow b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. entonces $z \in \mathbb{R}$

- si $z \in \mathbb{R}^+$, entonces $a > 0$. Entonces $\theta = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(b_n) \underbrace{\arccos\left(\frac{a_n}{|z|}\right)}_{1} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(b_n) \cdot 0 = 0 = \theta$$

- si $z \in \mathbb{R}^-$, entonces $a < 0$ luego $\theta = \pi$

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(b_n) \arccos\left(\underbrace{\frac{a_n}{|z|}}_{-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(b_n) \pi = \pi = \theta$$

Por tanto, tomando $\theta_n = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z_n) \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z_n}{|z_n|}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{\theta_n\} \to \arg z$

5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.

Probaremos por un lado la convergencia y después calcularemos su límite. Consideramos $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$

- Para ver la convergencia usaremos que

$$\{z_n\} \text{ converge} \iff \{|z_n|\} \text{ converge}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ $|z_n| = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\right)^n\right| = \left(\sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}}\right)^n$

$$= \left(\sqrt{1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{n^2}}\right)^n = \left(\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{n^2}+\frac{2a}{n}}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2+2an}{n^2}\right)^n}$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{\frac{a^2+b+2an}{n}}{n}\right)^n}$$

Calculamos ahora este límite.

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(1+\frac{\frac{a^2+b^2+2an}{n}}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{e^{\frac{a^2+b^2}{n}+2a}} = e^a = e^{\operatorname{Re} z}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$

- Para calcular el límite buscaremos probar que e^z es el límite donde podemos usar que $e^z = |e^z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = e^a(\cos(b) + i\operatorname{sen}(b))$

Como $|z_n| \longrightarrow e^{\operatorname{Re} z}$, debemos probar que $\{\arg z_n\} \longrightarrow \arg z = \cos b + i\operatorname{sen} b$.

$$\arg z_n = \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = n\arg\left(1+\frac{a}{n}+i\frac{b}{n}\right)$$

- Si $z=0$, $\arg z_n = \arg 1 = 0 = \operatorname{Im} z$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Si $z \neq 0$, cuando $n \to \infty$ ¿?