Análisis Matemático I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 7

1. Conocer y comprender la definición de vector derivada, así como su relación con la diferencial

2. Conocer y comprender la interpretación geométrica y la interpretación fisica del vector derivada

1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un abierto y $f: A \to Y$ una función diferenciable en $a \in A$. Su diferencial $Df(a) \in L(A, Y)$ se identifica con el vector $y = Df(a)(1) \in Y$ lo cual significa que $Df(a)(t) = ty$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Además, podemos calcular explícitamente el vector y pues

$$0 = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a) - Df(a)(t-a)}{|t-a|} = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a) - (t-a)y}{|t-a|}$$

lo cual nos dice que

$$y = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a}$$

Este límite es el mismo que usamos para definir la derivada de una función real de variable real.

Por tanto, diremos que f es derivable en $a \in A$ cuando la función $t \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$, $t \in A \setminus \{a\}$ tiene límite en a. Dicho límite será el vector derivada de f en a, que se denota por $f'(a)$

Diremos que f es derivable cuando lo sea $\forall a \in A \Rightarrow$ definimos $f': A \longrightarrow Y$ | a cada punto $a \in A$, le asocia su vector derivada.

Ya hemos visto como obtener la derivada a través de la diferencial y que si f es diferenciable en $a \Rightarrow f$ es derivable en a con $f'(a) = Df(a)(1)$

Para el recíproco también es cierto, es decir, si f es derivable en $a \Rightarrow f$ es diferenciable en a con $tf'(a) = Df(a)(t)$

2. Veamos la interpretación geométrica.

Sea $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de la curva $\mathcal{C}$, si γ es derivable en $a \in I$ con $\gamma'(a) \neq 0$ * Inciso punto reg o sing. podemos considerar la recta

$$r = \{\gamma(a) + t\gamma'(a) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es decir, la única recta de $\mathbb{R}^n$ que pasa por el punto $\gamma(a)$ y tiene vector dirección $\gamma'(a)$. Se dice que la recta r es la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\gamma(a)$. y que el vector derivada $\gamma'(a) \neq 0$ es el vector de dirección de dicha recta.

Veamos la utilidad geométrica:

Fijada cualquier norma de $\mathbb{R}^n$ y dado $\varepsilon > 0 \mid \varepsilon < \|\gamma'(a)\|$ encontraremos $\delta > 0$ con $]a-\delta, a+\delta[\subset I$ de forma que

$$a-\delta < t_1 \leq a < t_2 < a+\delta, \; t_1 \neq t_2 \Rightarrow \left\| \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} - \gamma'(a) \right\| < \varepsilon$$

Entonces $\dfrac{f(t_2)-\gamma(t_1)}{t_2-t_1} \neq 0$ es un vector de la recta secante a $\mathcal{C}$ que pasa por $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ que ambos pueden ser distintos de $\gamma(a)$. Si hacemos tender t_1, t_2 el vector a a $\dfrac{\gamma(t_2)-\gamma(t_1)}{t_2-t_1}$ tiende a ser $\gamma'(a)$. Por tanto la recta tangente es el límite de las secantes.