7 Clasificación de grupos abelianos finitos

7.1. Teoremas de estructura

Teorema 1 (Estructura de los p-grupos abelianos finitos)

Sea A un p-grupo abeliano finito con orden p^n, $n \geq 1$. Entonces, existen $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_t \geq 1$ naturales tales que $\beta_1 + \dots + \beta_t = n$ y además $A \cong C_{p^{\beta_1}} \oplus \dots \oplus C_{p^{\beta_t}}$

Además, esta expresión es única, esto es, si existen $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_s \geq 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = n$ y $A \cong C_{p^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus C_{p^{\alpha_s}}$ entonces $s = t$ y $\alpha_i = \beta_i$ $\forall i$. O de otra forma es que para cada partición de n tengo una forma única de expresar A.

Solución

El teorema nos dice que para cada partición de n puedo escribir de forma única salvo isomorfismos un p-grupo abeliano finito, es decir, hay tantos p-grupos abelianos de orden p^n como particiones de n

Demostración

Ejemplos

- Grupos abelianos de orden 8, $8=2^3$

Particiones de 3

$3 \quad A \cong C_8$

$1\,2 \quad A \cong C_4 \oplus C_2$

$1\,1\,1 \quad A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$

A será una de estos grupos

- Grupos abelianos de orden 81, $81=3^4$

Particiones de 4

$4 \quad A \cong C_{81}$

$1\,3 \quad A \cong C_{27} \oplus C_3$

$1\,1\,2 \quad A \cong C_3 \oplus C_3 \oplus C_9$

$1\,1\,1\,1 \quad A \cong C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$

$2\,2 \quad A \cong C_9 \oplus C_9$

Teorema 2 (estructura de los grupos abelianos finitos)

Sea A un grupo abeliano finito con $|A| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, p_i primos.

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \left(\bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i^{u_{ij}}} \right) \text{ donde } \forall i=1,\dots,k \quad u_{i1} \geq u_{i2} \geq \dots \geq u_{it_i} \geq 1 \text{ y } u_{i1} + \dots + u_{it_i} = r_i$$

y la descomposición es única salvo el orden.

A esta descomposición se le llama descomposición cíclica primaria y a los $\{p_i^{u_{ij}} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq t_i\}$ se les llama divisores elementales de A. A los P_i se les llama componente p_i-primaria de A.

-Demostración-

Si A es abeliano finito $\Rightarrow$ todos sus subgrupos de Sylow son normales y por tanto puedo escribir

$$A = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k \quad |P_i| = p_i^{r_i} \quad \forall i=1,\dots,k$$

Como P_i es un p_i-grupo abeliano finito y por el Teorema 1

$$P_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i^{u_{ij}}}$$

$\square$

Ejemplo

- $|A| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$C_n \oplus C_m \cong C_{n \cdot m}$ $\text{mcd}(n,m)=1$

¿Cuál es la cíclica primaria?

Div. elem	Descomposición cíclica primaria (dcp)	Descomposición cíclica (Teorema 3)
$2^3, 3^2, 5$	$C_8 \oplus C_9 \oplus C_5 \cong C_{360}$	
$2^2, 2, 3^2, 5$	$C_4 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5 \cong C_{180} \oplus C_2$	
$2, 2, 2, 3^2, 5$	$C_2, C_2, C_2, C_9, C_5 \cong C_{90} \oplus C_2 \oplus C_2$	
$2^3, 3, 3, 5$	$C_8, C_3, C_3, C_5 \cong C_{120} \oplus C_3$	
$2^2, 2, 3, 3, 5$	$C_4, C_2, C_3, C_3, C_5 \cong C_{60} \oplus C_6$	
$2, 2, 2, 3, 3, 5$	$C_2, C_2, C_2, C_3, C_3, C_5 \cong C_{30} \oplus C_2$	

Primaria ? ? Esta es la cíclica

Teorema 3 (descomposición cíclica de un grupo abeliano finito)

Si A es un grupo abeliano finito, entonces

$$A \cong C_{d_1} \oplus C_{d_2} \oplus \dots \oplus C_{d_t}$$

donde d_i $i=1,\dots,t$ enteros positivos tales que

$d_1 \cdots d_t = |A|$ y $d_i \mid d_j$ para cada $j \le i$.

Además la descomposición es única para cada partición de (los exponentes de los primos)
↳ mirar ej anterior

Intuición

Una vez tenemos la descomposición cíclica primaria es ir agrupando potencias de la descomposición de factores primos del orden de A de manera que se cumpla la relación de orden

$|A| = 360 = 2^3\, 3^2 \cdot 5$

$P_1 = \{2^3, 3^2, 5\} \longrightarrow 2^3 \cdot 3^2\, 5 \Rightarrow C_8 \oplus C_9 \oplus C_5 \cong C_{360}$

$P_2 = \{2,2,2,3,3,5\} \longrightarrow$ (Tiene otra distinta)

Demostración

Si $|A| = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$, por el Teorema 2, $A = \bigoplus_{i=1}^{k} \left(\bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i^{u_{ij}}} \right)$ con $u_{i1} \ge u_{i2} \ge \dots \ge u_{it_i} \ge 1$
$u_{i1} + \dots + u_{it_i} = r_i$

Definimos $t = \max\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, es decir, el máximo de los elementos de cada partición de cada factor primo de la descomposición obtenida.

Ejemplo: $360 = 2^3 3^2 5$ $\quad P_1 = \{2^3, 3^2, 5\}$ $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$

$P_2 = \{2, 2^2, 3^2, 5\}$ $t_1 = 2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$

Y los a_{ij} son, poniendo en orden las particiones, como en el ejemplo:

$P_2 \longrightarrow u_{11} = 2 \quad u_{12} = 1$

$u_{21} = 2 \quad \boxed{u_{22} = 0}$

$u_{31} = 1 \quad \boxed{u_{32} = 0}$

Rellenamos con 0 los elementos que hagan falta para obtener una matriz rectangular?

$$\begin{pmatrix} 2^2 & 3^2 & 5 \\ 2^1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, podemos conseguir la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} p_1^{u_{11}} & p_2^{u_{21}} & \cdots & p_k^{u_{k1}} \\ p_1^{u_{12}} & p_2^{u_{22}} & \cdots & p_k^{u_{k2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1^{u_{1t}} & p_2^{u_{2t}} & \cdots & p_k^{u_{kt}} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to d_1 \\ \to d_2 \\ \\ \to d_t \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ C_{p_1} & C_{p_2} & \cdots & C_{p_k} \end{array} & \end{array}$$

A es la suma directa de los cíclicos con órdenes los resultados de las columnas.

$d_1 = p_1^{u_{11}} p_2^{u_{21}} \cdots p_k^{u_{k1}}$

$d_t = p_1^{u_{1t}} p_2^{u_{2t}} \cdots p_k^{u_{kt}}$
↳ factores invariantes

$C_{p_1} \; C_{p_2} \; \cdots \; C_{p_k} \longrightarrow$ Obtenemos la descomposición cíclica primaria.

Además, como, por construcción $u_{ij} \geq u_{ij+1}$ tenemos que $d_i | d_j$ $j \leq i$ de forma que el agrupamiento queda

$$\left.\begin{array}{l} G_{d_1} \cong C_{p_1^{u_{11}}} \oplus C_{p_2^{u_{21}}} \oplus \cdots \oplus C_{p_k^{u_{k1}}} \\ \quad\vdots \\ G_{d_t} \cong C_{p_1^{u_{1t}}} \oplus C_{p_2^{u_{2t}}} \oplus \cdots \oplus C_{p_k^{u_{kt}}} \end{array}\right\} \Rightarrow G \cong G_{d_1} \oplus G_{d_2} \oplus \cdots \oplus G_{d_t}$$

Por su parte, la unicidad se obtiene de los resultados anteriores $\square$

Ejemplo

$|G| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Primaria

- $\{2^3, 3^2, 5\} \Rightarrow \underline{d_1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} \Rightarrow \underline{G = C_{360}} \cong C_8 \oplus C_9 \oplus C_5$
- $\{2^2, 2, 3^2, 5\} \Rightarrow t_2 = \max\{2,1,1\} = 2 \Rightarrow t_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \begin{pmatrix} 2^2 & 3^2 & 5 \end{pmatrix} = 180 \\ d_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$ y $2 | 180 \Rightarrow G = C_2 \oplus C_{180}$

Elementos de la partición del 2

2 doses
1 tres
1 cinco

- $\{2, 2, 2, 3^2, 5\} \Rightarrow t_3 = 3 \Rightarrow \begin{array}{l} d_1 = \\ d_2 = \\ d_3 = \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3^2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = 90 \\ = 2 \\ = 2 \end{array}$ $\quad G = C_2 \oplus C_2 \oplus C_{90} \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$

- $\{2^3, 3, 3, 5\} \Rightarrow t_2 = 2$ $\quad \begin{array}{l} d_1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ d_2 = 3 \end{array} \Rightarrow G = C_{120} \oplus C_3$

Faltan descomposiciones

Corolario

Si $|G| = p_1 \cdots p_k$, G es un grupo abeliano finito, entonces $G \cong C_{p_1 \cdots p_k}$ y es el único de orden $p_1 \cdots p_k$ salvo isomorfismo.

-Demostración-

Por el Teorema 2 $G \cong C_{p_1} \oplus \cdots \oplus C_{p_k}$ pues $\mathrm{mcd}(p_i, p_j) = 1$ $\forall i,j$ tenemos que

$$C_{p_1} \oplus \cdots \oplus C_{p_k} \cong C_{p_1 \cdots p_k}$$

por el Teorema 3.

Ejemplo

- $|\mathcal{A}| = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Partición	Dcp		Dc isomorfa
$\{2^2, 3^2, 5\}$	$C_4 \oplus C_9 \oplus C_5$		C_{180}
$\{2, 2, 3^2, 5\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$	$d_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $d_2 = 2$	$C_{90} \oplus C_2$
$\{2^2, 3, 3, 5\}$	$C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$	$d_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $d_2 = 3$	$C_{60} \oplus C_3$
$\{2, 2, 3, 3, 5\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$	$d_1 = 30$, $d_2 = 6$	$C_{30} \oplus C_6$

¡Para que sea descomposición cíclica debe cumplirse lo de lo ¡divisible! de los factores invariantes!

$d_i | d_j$ con $i<j \rightarrow$ orden creciente

Ejemplo (Ejercicio 1)

- $|\mathcal{A}| = 8 = 2^3$, será abeliano sii es C_8 ó $C_2 \oplus C_4$ ó $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$

En $\mathbb{Z}_8$: son los coprimos

$\{1, 3, 5, 7\}$ tienen orden 8

$o(0) = 1$, $o(2) = \frac{8}{mcd(8,2)}$, $o(4) = \frac{8}{mcd(8,4)}$, $o(6) = \frac{8}{mcd(6,8)} = 4$

En $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$:

$o(a,b) = mcm\{o(a), o(b)\} = mcm\{(\frac{1}{4}), (\frac{1}{2})\} = \{\frac{1}{\frac{2}{4}}\}$

$o(0,0) = 1$ $\quad o((1,b)) = 4 = o((3,b))$

$o(0,1) = 2$ $\quad o((2,b)) = 2$

En $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

$o(a,b,c) = 2$ $\quad a \neq \overset{c}{\overset{\neq}{0}} \neq b$

$o(0,0,0) = 1$

- $|\mathcal{A}| = 12 = 2^2 \cdot 3$, tenemos $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$

- En $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12}) = \{1, 5, 7, 11\}$ tendrán orden 12.

$o(2) = 6$ $\quad o(6) = 2$ $\quad o(9) = 4$

$o(4) = 3$ $\quad o(3) = 4$ $\quad o(8) = 3$

- En $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$

$o(a,b) = mcm\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}$ luego $mcm = \{1, 2, 3, 6\}$

- $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_6) = \{1, 5\}$ orden 6

$o(2) = 3$ $\quad o(3) = 2$

$o(4) = 3$ $\quad o(0) = 1$

$o(0,0) = 1$, $o(1,a) = o(5,a) = 6$ $\forall a \in \{0,1\}$ $\quad o(3,a) = 2$ $\forall a \in \{0,1\}$

$o(2,0)=o(4,0)=3 \qquad o(2,1)=o(4,1)=6$

Ejercicio 2

- $\mathcal{G}_1=\{1,8,12,14,18,21,27,31,34,38,44,47,51,53,57,64\}$ producto módulo 65

La clave es obtener las unidades:

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{65})\cong\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{13})\times\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$$

con $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{13})\cong C_{12}$ y $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)\cong C_4$.

¡Habría que comprobar que es un grupo!

Por el Tª chino del Resto, en general es verdad para cualquier producto de órdenes primos.

$\mathcal{G}_1 < C_{12}\times C_4 \cong C_3\times \boxed{C_4\times C_4}$ ¡No decimos que haya isomorfismos!

$|\mathcal{G}_1|=16 \Rightarrow \mathcal{G}_1=C_4\times C_4$ → Debemos encontrar un elemento de orden 4 y uno de orden sup. a 4 (que no sea múltiplo de factores de 4).

- $\mathcal{G}_3=\{1,7,17,23,49,55,65,71\}$ mod 96

$96=2^5\cdot 3$

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{96})\cong\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{2^5})\times\mathcal{U}(\mathbb{Z}_3)\cong C_{16}\times C_2$$

$\varphi(2^5)=2^4$

$|\mathcal{G}_3|=8=2^3$ $\begin{cases} - C_4\times C_2 \\ - C_2\times C_2\times C_2 \\ - C_8\end{cases}$

$\begin{cases} C_{16}\times C_2 \\ C_2\times C_8\times C_2 \\ C_4\times C_4\times C_2 \\ C_2\times C_2\times C_2\times C_2\times C_2 \\ C_2\times C_2\times C_4\times C_2\end{cases}$

Los posibles órdenes son $\begin{cases}1\\2\\4\\8\end{cases}$

$o(7)=4,\ o(17)=2,\ o(23)=4,\ o(65)=2\ \ o(71)=4$

$o(49)=2,\ o(55)=5$ $55\cdot 55 \bmod (96)=49 \Rightarrow o(55)=4$

$\nexists$ elementos de orden 8 $\Rightarrow \mathcal{G}_3\cong C_4\oplus C_2$

7.2. Descomposición cíclica y cíclica primaria de grupos abelianos cualesquiera

Definición

Un grupo abeliano A se dice finitamente generado si $\exists X=\{x_1,\dots,x_r\}\subset A$ tal que $\forall a\in A\ \exists\ \lambda_i$, $i=1,\dots,r$ tal que $a=\sum_{i=1}\lambda_i x_i$

Al conjunto X lo llamamos sistema de generadores, luego $A=\langle x_1,\dots,x_r\rangle$

Definición

Un conjunto de generadores $X=\{x_1,\dots,x_r\}\subset A$ es una base si son $\mathbb{Z}$-linealmente independientes.

En ese caso A es un grupo abeliano libre de rango r. De esta manera, estamos diciendo que $A\cong\mathbb{Z}^r$ (Esto no es $\mathbb{Z}_r$)

y además, si $H<A$ entonces $H\cong\mathbb{Z}^s$ $s\le r$

Por su parte, si A es un grupo abeliano finito, será finitamente generado y podemos obtener su descomposición estándar que será

$$A \cong F \oplus T(A)$$

donde F va a ser la parte libre de rango finito y $T(A) = \{a \in A \mid o(a) < \infty\}$ conocido como el subgrupo de torsión, que será un grupo abeliano finito.

Por tanto, $\exists\, r \geq 0, d_1, \ldots, d_s, d_i \mid d_j\ j \leq i, d_1 \cdots d_s = |T(A)|$ de manera que

↳ Tengo que buscar el orden del grupo de torsión para tener las descomposiciones

$$\boxed{A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_s}}$$

A lo llamaremos rango de A y a los d_i factores invariantes de A.

Ejemplo

$A = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4, x^2 z = z^{-1} y, xy = yx, xz = zx, yz = zy \rangle$

En notación aditiva:

$A = \langle x, y, z \mid 3x = 4y, 2x + z = -z + y, x + y = y + x, x + z = z + x, y + z = z + y \rangle$

↳ $x = x$ ↳ $z = z$ ↳ $y = y$

Como ecuaciones

$A = \langle x, y, z \mid \begin{matrix} 3x - 4y = 0 \\ 2x + 2z - y = 0 \end{matrix} \rangle \quad M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ s.c.i. 1 parám. libre

rango$(M) = 2$
nº incog $= 3$

$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ forma normal de Smith

Luego $A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

Parte libre de rango 1

Formalización del ejemplo

Sea $A = \langle \underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{n \text{ generadores}} \mid \underbrace{\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = 0 \end{matrix}}_{m \text{ relaciones}} \rangle$ buscamos obtener la descomposición estándar

$$\boxed{A \cong F + T(A)}$$

Consideramos $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y F un grupo abeliano libre generado por X, es decir, X es base de F. Definimos (tiene n elementos)

$\varphi: F \longrightarrow A$ $\quad$ $i:1 \ldots n$ sobreyectiva que por el Tº de Dyck será una presentación. Tenemos que $F \cong \mathbb{Z}^n$ y sabemos
$e_i \longmapsto x_i$

que $\ker \varphi \subset F$, $\ker \varphi \cong \mathbb{Z}^m$ con $\{y_1, \ldots, y_m\}$ base de $\ker \varphi$ de manera que, como $\{y_1, \ldots, y_m\}$ es base de $\ker \varphi$ obtenemos

$$\left.\begin{matrix} a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + \cdots + a_{nm}e_n = y_m \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \text{Es fácil de hacer } \varphi(\sum_j e_i a_{ij}) = \sum_j x_i a_{ij} = 0$$

Luego el diagrama es el siguiente

$$\ker\varphi \xhookrightarrow{i} F \longrightarrow \boxed{\Delta \cong F/\ker\varphi} \text{ por el 1TI}$$

Esto es lo que buscamos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\text{matrices de relaciones del grupo.}} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & d_s \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \to \text{factores invariantes.}$$

forma normal de Smith

Forma normal de Smith

Empezamos entendiendo la forma normal de Hermite, consideremos por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si es cuadrada $\to I$
- Las filas de ceros están abajo del todo
- Todos los pivotes son 1, es decir, solo hay 1 abajo y derecha del anterior.

La forma normal de Smith es similar a la anterior sin distinción de filas o columnas de manera que ahora cada pivote divide al anterior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos conseguirla aplicando las operaciones elementales.

- intercambiar filas
- multiplicar por un escalar entero
- a una fila sumarle un múltiplo de la otra.

Idem con columnas.

Cuando obtenemos esta forma podemos encontrar dos matrices P, Q regulares tal que

$$\boxed{P\Delta Q = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s \end{pmatrix} \quad d_1 | d_2 | \cdots | d_s}$$

de manera que P almacena las transformaciones por filas y Q por columnas. El primer pivote será el mcd(a_{ij}), aislamos de 0 y repetimos con los restantes.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \underset{4+2^a \text{ fila}}{\overset{\text{no hacer ceros hasta colo}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{4^a(-3)+1^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & \boxed{-6} \\ 0 & \boxed{6} & \boxed{6} \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

mcd( ) = 1 ↳ hacer todos los 0

↳ mcd( ) = 2

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la parte libre es nº incog $= 3 - rg(\Delta) = 3 = 0$

luego no hay parte libre.

Ejemplo

$$A = \left\langle x,y,z,t \;\middle|\; \begin{array}{l} 14x+4y+4z+14t=0 \\ -6x+4y+4z+10t=0 \\ -16x-4y-4z-20t=0 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 & 14 \\ -6 & 4 & 4 & 10 \\ -16 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 & 4 & 4 & 14 \\ -2 & 4 & 4 & 10 \\ -20 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 10 \\ 18 & 4 & 4 & 14 \\ -20 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 10 \\ 0 & 40 & 40 & 104 \\ 0 & -44 & -44 & -120 \end{pmatrix} \sim \cdots \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 56 & 0 \end{pmatrix}$$

3 ecs y 4 incogs.

↳ nos da la descomposición cíclica

Luego, el rango de A es 1, 4 incógnitas menos nº de divisores elementales.

nº incógnitas − rango

$$T(A) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{56} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_7$$

$56 = 2^3 \cdot 7$

descomponemos para abajo $\begin{pmatrix} 2^3 & 7 \\ 2^2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ d elem: $2, 2^2, 2^3, 7$

$$A \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{56}}_{\text{d.c.}} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_7}_{\text{dcp}}$$

¿g.a. no isomorfos a $T(A)$?

$|g| = 448 = 2^6 \cdot 7$

primaria — descomposición cíclica

div el	dcp	fact. inv	d.c.
$2^6, 7$		448	
$2, 2^5, 7$		2, 224	
$2, 2, 2^4, 7$		2, 2, 112	
$2, 2, 2, 2^3, 7$		2, 2, 2, 56	
$2, 2, 2, 2, 2^2, 7$		2, 2, 2, 2, 28	
$2, 2, 2, 2, 2, 2, 7$		2, 2, 2, 2, 2, 14	
$2, 2^2, 2^3, 7$		2, 4, 56	Esta es la torsión luego son los demás
$2^2, 2^2, 2^2, 7$		4, 4, 28	
$2^3, 2^3, 7$		8, 56	
$2^2, 2^4, 7$		4, 112	
$2, 2, 2^2, 2^2, 7$		2, 2, 4, 28	

¿Hay algún elemento no finito? Para esto usamos siempre la cíclica

$$(1,0,0,0)$$

Orden 56 : $(0,0,0,1)$

Orden 8 : $(0,0,0,7)$ ó $(0,1,1,7)$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{2} & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Ejercicio 5)

$$G \cong (\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_{11}}} \oplus \_\_ \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_{1u_1}}}) \oplus \_\_ \oplus (\mathbb{Z}_{p_r^{\alpha_{r1}}} \oplus \_\_ \oplus \mathbb{Z}_{p_r^{\alpha_{ru_r}}})$$

$\alpha_{11} \geq \_\_ \geq \alpha_{1u_1}$ $\qquad$ $\alpha_{r1} \geq \_\_ \geq \alpha_{ru_r}$

$\alpha_{11} + \_\_ + \alpha_{1u_1} = e_1$ $\qquad$ $\alpha_{r1} + \_\_ + \alpha_{ru_r} = e_r$

Como G abeliano los fact. composición cíclicos (Pensado pero escrir quitando potencias) . . . .