1. Introducción

Nos vamos a centrar en estudiar las ecuaciones lineales de la siguiente estructura

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t)$$

$x^{(i)}$ representa a la derivada i-ésima
$x \in \mathcal{C}^n(I)$

donde $b, a_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ con I intervalo abierto

Ejemplo

1. $n=1$ $\quad x' + a_0(t)x = b(t)$

2. $n=2$ Ecuación del oscilador armónico $\quad mx'' + kx = 0$ (típica de mecánica), $m, k > 0$

Es equivalente a la ley de Hook

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \quad ; \quad a_1(t) = 0, \quad a_0(t) = \frac{k}{m}, \quad b(t) = 0 \quad \forall t \in I \qquad F(x) = -kx$$

3. $n=4$

$$x^{(iv)} + e^t x''' - x = \operatorname{sen}(t) \ ; \quad a_0(t) = -1, \ a_1(t) = 0, \ a_2(t) = 0, \ a_3(t) = e^t \qquad b(t) = \operatorname{sen}(t) \quad \forall t \in I \qquad I = \mathbb{R}$$

Diremos que una ecuación es homogénea cuando $b(t) = 0$ $\forall t \in I$; en otro caso, diremos que es completa.

2. Teorema de Existencia y Unicidad de las soluciones

Una condición inicial consistirá en dar el valor de la función y de todas sus derivadas sucesivas hasta el orden de la ecuación menos uno para un punto $t_0 \in I$:

$$x(t_0) = \alpha_0, \ x'(t_0) = \alpha_1, \ \dots, \ x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \ ; \ \alpha_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \Delta_{n-1}$$

Si disponemos de una condición de contorno, es decir, evaluamos de la siguiente manera

$$x(t_0) = \alpha_0, \ x'(t_1) = \alpha_1, \ \dots, \ x^{(n-1)}(t_n) = \alpha_{n-1} \ ; \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ t_i \in I \ \forall i \in \Delta_{n-1}$$

los cuales no siempre determinarán una solución a nuestro problema de valores iniciales

Teorema (de existencia y unicidad)

Dados $t_0 \in I$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \ x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ solución que cumple la condición inicial.

I intervalo de definición de a_i y b $\forall i \in \Delta_{n-1}$

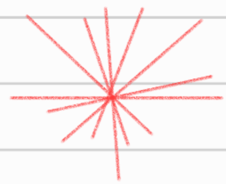
Lo más importante es que este teorema es global, característica típica de ecuaciones lineales.

Observación

Imponer que el coeficiente de $x^{(n)}$ sea distinto de 1 puede provocar que el Teorema sea falso.

$tx' - x = 0$, $x(0)=0$ → No unicidad

$n=1$ $a_1(t)=t$, $a_0(t)=-1$, $b(t)=1$



Solución $x(t)=ct$ $\Rightarrow$ hay infinitas soluciones, no es única.

Si $x(0)=1$ → no existencia

En caso de querer dividir estaríamos perdiendo dominio pues I pierde valores pero debemos hacerlo

↳ podemos suponer una función que sea siempre distinta de cero.

Observación

- Demostración para $n=1$ -

Tenemos que $(\ast_1)$ $x'+a_0(t)x=b(t)$, $x(t_0)=x_0$ como problema de valores iniciales

Existencia

$$x(t)=e^{-A_0(t)}[x_0+F(t)] \quad \text{donde} \quad A_0(t)=\int_{t_0}^{t} a_0(s)\,ds \quad \text{y} \quad F(t)=\int_{t_0}^{t} e^{A_0(s)}\,b(s)\,ds$$

y aplicando TFC:

$$A_0, F \in \mathcal{C}^1(I)$$

luego $x \in \mathcal{C}^1(I)$

Comprobación de solución.

$$x(t_0)=e^0[x_0+0]=x_0$$

$$x'(t)=-a_0(t)e^{-A_0(t)}[x_0+F(t)]+e^{-A_0(t)}\cancel{F'(t)}\,e^{A_0(t)}\,b(t)=-a_0(t)e^{-A_0(t)}[x_0+F(t)]+b(t)=-a_0(t)x(t)+b(t)$$

Unicidad

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones de la ecuación $(\ast_1)$, veamos que $x_1(t)=x_2(t)$ $\forall t\in I$.

Defino $y(t)=x_1(t)-x_2(t)$, $y\in\mathcal{C}^1(I)$ entonces $y'(t)+a_0(t)y(t)=0$, $y(t_0)=0$; buscamos probar que $y\equiv 0$ escribiendo la ecuación diferencial como una diferencial exacta

$$e^{A_0(t)}y'(t)+a_0(t)e^{A_0(t)}y(t)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{A_0(t)}y(t)\right)=0$$

Y por tanto,

$$e^{A_0(t)}y(t)=cte$$

donde usando que $y(t_0)=0 \Rightarrow e^{A_0(t)}y(t)=0 \ \forall t\in I$ y como $e^{A_0(t)}\neq 0 \ \forall t\in I \Rightarrow$
$y(t)=0 \ \forall t\in I$

Esta demostración la podemos hacer porque sabemos una fórmula de la solución;
por tanto, para $n>1$ no podemos demostrarlo, en principio
Veamos el por qué con el ejemplo siguiente

Ejemplo

$n=2 \Rightarrow$ $x''+a_1(t)x'+a_0(t)x=0$ y sea $x(t)$ solución definida en $J\subset I$ con $x(t)\neq 0 \ \forall t\in J$.

Sabemos que $x\in C^2(I)$ luego si tomamos $y(t)=\frac{x'(t)}{x(t)}$, $y\in C^1(J)$
y derivando

$$y'(t)=\frac{x''(t)x(t)-(x'(t))^2}{x^2(t)} \overset{x(t)\text{ solución}}{=} \frac{(-a_1(t)x'(t)-a_0(t)x(t))x(t)-(x'(t))^2}{(x(t))^2}=$$

$$=-a_1(t)y(t)-a_0(t)-(y(t))^2$$

Luego con el cambio de variable vemos que 'y' cumple la ecuación de Riccati

$$y'(t)=-a_1(t)y(t)-a_0(t)-(y(t))^2$$

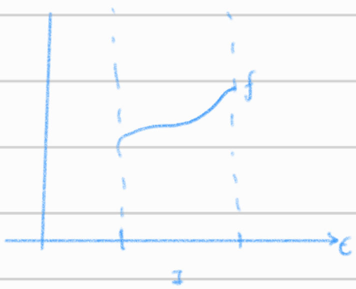
Esto explica que no haya una fórmula para obtener las soluciones de las ecuaciones lineales de orden superior a 1. No se consigue así pero sí se sabe que se cumple

3. Preparatoria para la teoría de ecuaciones lineales de orden superior

Definimos el siguiente espacio vectorial

$$F=F(I,\mathbb{R})$$

donde los elementos del espacio son todas las funciones de un intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, I fijo
$f\in F$



"Son todas las funciones en explícito"

Definimos las siguientes operaciones de un espacio vectorial:

· Suma (+): sean $f,g \in F(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f+g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)+g(t)$ donde gracias a esto F forma un grupo

· Multiplicación por escalar (·) sea $f \in F(I,\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \lambda f(t)$ consiguiendo ahora sí que sea un espacio vectorial

Nosotros no trabajaremos en $F(I,\mathbb{R})$ sino con algún subespacio vectorial (cerrado para suma, cerrado para mult. por esc.) que serán las funciones de clase $\mathcal{C}^n$ o las continuas

Lo que más nos interesará será el comportamiento de la independencia lineal de los vectores

Independencia lineal

De forma abstracta diremos que $v_1, \dots, v_n \in V$ son l.i cuando dados $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tal que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ entonces $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

En nuestro espacio vectorial $F(I,\mathbb{R})$, sean $f_1, \dots, f_n \in F(I,\mathbb{R})$ diremos que son l.i cuando dados $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tal que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = 0$ entonces $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, que realmente significa

$$\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

donde $\boxed{\lambda_i \text{ no dependen de } t}$ luego λ_i es el mismo para todo t de I, $i \in \Delta_n$.

Además, deberemos especificar el intervalo de definición del espacio vectorial, pues para otro intervalo puede no ocurrir

·) $f_1, \dots, f_n$ son l.i en $V \iff f_1, \dots, f_n$ son l.i en F, con $V \subset F$ subespacio vectorial

¿Cómo decidimos si un conjunto de funciones es l.i para un I?

1ª forma → por la definición como último recurso

2ª forma → por derivación; sean $f_1, \dots, f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y tenemos

$$\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

donde aplicaremos la idea de que si dos funciones son iguales sus derivadas también serán iguales

Mientras que podamos derivar

1 vez: $\lambda_1 f_1'(t) + \dots + \lambda_k f_k'(t) = 0$

2 veces: $\lambda_1 f_1''(t) + \dots + \lambda_k f_k''(t) = 0$

donde pensando λ_i como incógnita $\forall i \in \Delta_k$ y sabiendo como hipótesis que $f_i \in \mathcal{D}^{k-1}(I)$ obtenemos el siguiente sistema homogéneo

$$\begin{array}{l} x_1 \\ \\ \\ \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 \overset{a_{11}}{f_1'(t)} + \dots + \lambda_k f_k'(t) = 0 \\ \lambda_1 f_1''(t) + \dots + \lambda_k f_k''(t) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 f_1^{(k-1)}(t) + \dots + \lambda_k f_k^{(k-1)}(t) = 0 \end{array}\right\}$$

Si ahora conocemos que el determinante de las lambdas como incógnitas es distinto de 0 para algún t.

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & \dots & f_k(t) \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ f_1^{(k-1)}(t) & \dots & f_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{para algún } t \in I \rightarrow \text{la única solución es la trivial}$$

pues λ_i es constante

luego será así por lo mismo para todo $t \in I$ pues tendríamos que λ_i depende de t

obtenemos ya la independencia lineal de las f_i, $i \in \Delta_k$ en el intervalo I

Definición

Sean $f_1, \dots, f_k \in F(I, \mathbb{R})$ definimos la función Wronskiana como la función.

$$W(f_1, \dots, f_k)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \dots & f_k(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_k'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(t) & \dots & f_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix} \leftarrow \text{Wronskiano de } t$$

Proposición

Sean $f_1, \dots, f_k \in F(I, \mathbb{R})$ derivables $k-1$ veces en I tal que $\exists t_0 \in I$ $W(f_1, \dots, f_k)(t_0) \neq 0$

entonces $f_1, \dots, f_k$ son l.i en I El recíproco es falso

-La demostración es toda la segunda forma-

Ejemplos

1 Consideramos $f_0,\dots,f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f_k(t)=t^k, k\geq 1$ y $f_0(t)=1$

Veamos que $f_0,\dots,f_n$ son l.i en $\mathbb{R}$.

$$W(f_0,\dots,f_n)(t)=\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & \dots & t^n \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 & \dots & nt^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6t & \dots & n(n-1)t^{n-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n! \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 6\cdot\dots\cdot n!\neq 0,\ \forall t$$

2 $f_1(t)=\cos(t^2)$, $f_2(t)=\operatorname{sen}(t^2)$ y vamos a probar que son l.i en todo $\mathbb{R}$

$$W(f_1,f_2)(t)=\begin{vmatrix} \cos(t^2) & \operatorname{sen}(t^2) \\ -2t\operatorname{sen}(t^2) & 2t\cos(t^2) \end{vmatrix} = 2t\cos^2(t^2)+2t\operatorname{sen}^2(t^2)=2t$$

Tomando $t\neq 0$ vemos que $W(f_1,f_2)(t_0)\neq 0$ luego son l.i en $\mathbb{R}$.

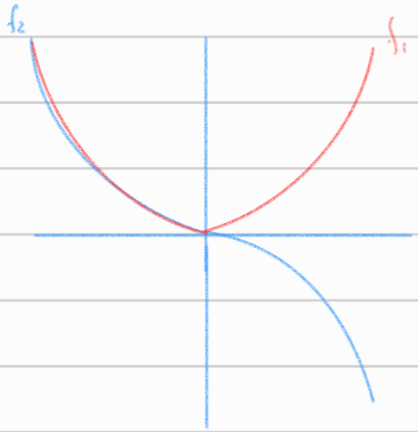
Como aditivo si $f_i\in C^{n-1}(J)$, $J\subset\mathbb{R}$ intervalo y encontramos un $t\in J$ | $W(f_1,\dots,f_n)(t)\neq 0$ entonces $\exists I\subset J$ tal que $f_1,\dots,f_n$ son l.i

3 El recíproco de la proposición es falso, es decir, pese a que $f_1,\dots,f_n$ sean l.i en I pueden ser $W(f_1,\dots,f_n)(t)\neq 0$ $\forall t\in I$

- caso $k=2$ -

$f_1(t)=t^2$ $\quad f_2(t)=-|t|t$, son l.i en $\mathbb{R}$ y $W(f_1,f_2)(t)=0\ \forall t\in\mathbb{R}$

Pensamos en la gráfica de f_2:



Luego $f_2\in C^1(\mathbb{R})$ pues las derivadas parciales en 0 coinciden $\Rightarrow$ es derivable

Además

$$f_2'(t)=\begin{cases} -2t & t\geq 0 \\ 2t & t\leq 0 \end{cases} = -2|t|$$

Entonces $W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & -|t|t \\ 2t & -2|t| \end{vmatrix} = -2|t|t^2 + 2|t|t^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$; sin embargo, a ojo se ve que f_1, f_2 son l.i

Lo probamos por la definición

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = \lambda_1 t^2 - \lambda_2 |t| t = 0$$

Veamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$:

$$\lambda_1 t^2 - \lambda_2 |t| t = (\lambda_1 t - \lambda_2 |t|) t = 0$$

Tomando $t = 1$, $t = -1$ obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Aplicaciones lineales

Sean V, W espacios vectoriales decimos que $L: V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal si y sólo si:

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
2. $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

Definimos el núcleo de L, $\ker(L)$ como:

$$\boxed{\ker(L) = \{ v \in V \mid L(v) = 0 \}}$$

es una abstracción del sistema lineal homogéneo dado por L; de hecho $\ker(L) \subset V$ subespacio vectorial

Ecuaciones lineales como sistemas de ecuaciones.

Para ello, tomamos los siguientes espacios vectoriales junto a una aplicación lineal

Espacio partida $\rightarrow V = \mathcal{C}^k(I)$ $\rightarrow$ funciones de clase k en I

Espacio llegada $\longrightarrow W = \mathcal{C}(I)$ $\rightarrow$ funciones continuas en I

$L[x] = x^{(k)} + a_{k-1} x^{(k-1)} + \dots + a_0 x$, a_i funciones de t vistas como funciones

A la aplicación L la llamaremos operador diferencial, es una ley que transforma una ecuación diferencial en otra.

Ahora podremos ver la ecuación lineal completa donde x ($\in \mathcal{C}_k$) la podremos ver como

$$L[x] = b$$

donde $\ker(L)$ será el conjunto de soluciones de la $EL H_k$

Ejemplo:

$x'' + t^2 x' + x = b(t)$ $\quad I = \mathbb{R}$, $L: \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ que es un operador lineal

$x \longmapsto L[x] = x'' + a_1 x' + a_0 x$

Para ver que L es lineal basta con ver que la ecuación de partida es lineal

- $L[e^t] = e^t + t^2 e^t - e^t = t^2 e^t$

4. Ecuación lineal homogénea de orden k

$x^{(k)} + a_{k-1} x^{(k-1)} + \dots + a_0 x = 0$, $a_1, \dots, a_{k-1} : I \to \mathbb{R}$ continuas donde el conjunto de soluciones es

$$Z = \{ x \in \mathcal{C}^k(I) \mid L[x] = 0 \}$$

donde:

i) Z es un espacio vectorial

La dimensión algebraica se puede entender como el número mínimo de parámetros con el que se puede representar un objeto de ese espacio

Ejemplo

1. Ecuación del muelle

$$x'' + x = 0$$

Algunas soluciones no triviales son

$\varphi_1(t) = \cos(t)$

$\varphi_2(t) = \operatorname{sen}(t)$

Luego $\{ a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t) \mid a, b \in \mathbb{R} \} \subset Z$ son solución, realmente se dará la igualdad ya que sen y cos son l.i.

Proposición

La dimensión de Z debe ser k : $\dim Z = k$

- Demostración

Aplicaremos que, si $V \cong W$ entonces $\dim(V) = \dim(W)$ (teorema de isomorfía). Construiremos un isomorfismo de Z en $\mathbb{R}^k$

Sea $t_0 \in I$ fijo y consideramos la aplicación lineal

$$\phi_{t_0} : Z \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

que es lineal por cumplir las dos propiedades junto con que la derivada es un operador lineal.

Debemos probar ahora que es isomorfismo (inyectiva y sobreyectiva)

· inyectividad: $Ker(\phi)=\{0\}$ lo cual se cumple por el teorema de existencia y unicidad

luego ϕ_{t_0} es un monomorfismo $\Rightarrow dim(Z)\leq k$

· sobreyectiva: dadas unas condiciones iniciales existe alguna solución que la verifica, lo cual es cierto por el teorema de existencia y unicidad

luego ϕ_{t_0} es un epimorfismo

Entonces ϕ_{t_0} es isomorfismo y hemos probado que $dim(Z)=dim(\mathbb{R}^k)=k$.

Ejemplo

$x''-x=0$ donde algunas soluciones son $\varphi_1(t)=e^t$

$\varphi_2(t)=e^{-t}$

Entonces $\{c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t) \mid c_1,c_2\in\mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial de soluciones que es el total de soluciones al ser φ_1 y φ_2 l.i. en $\mathbb{R}$ (calcular Wronskiano)

Realmente estamos dando una base $\Rightarrow$ basta con que demos una.

Por ejemplo $\{\cosh(t), \sinh(t)\}$ es otra base que podemos expresar como combinación lineal de φ_1 y φ_2

Destacamos que realmente, en la demostración, ϕ_{t_0} depende de $t_0\in I$ luego habrá numerosos isomorfismos

Ejemplo

Para el ejemplo anterior:

$$\left.\begin{aligned}\phi_0: Z &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x(0)\\ x'(0)\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\text{ genérico}$$

$c_1\varphi_1+c_2\varphi_2 \longmapsto \begin{pmatrix} c_1+c_2\\ c_1-c_2\end{pmatrix} \longrightarrow$ en términos de la base de exponenciales.

$k_1\varphi_1+k_2\varphi_2 \longmapsto \begin{pmatrix} k_1\\ k_2\end{pmatrix} \longrightarrow$ en términos de la base de hiperbólicas.

No obstante, podríamos tomar otro t_0 como $t_0=1$:

$$\phi_1 : Z \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x(1) \\ x'(1) \end{pmatrix}$$
$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \longmapsto \begin{pmatrix} c_1 e + \frac{c_2}{e} \\ c_1 e - \frac{c_2}{e} \end{pmatrix}$$ → es otro isomorfismo distinto pero también válido

Proposición

Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in Z$ entonces son equivalentes

i) $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ son $l.i$ en I

ii) $W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) \neq 0 \ \forall t \in I$

iii) $\exists t_0 \in I \mid W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) \neq 0$

} O se anula siempre o nunca

↳ Si se cumple esto y no ii) entonces esas funciones no pueden ser soluciones de la misma ecuación diferencial

-Demostración-

ii ⇒ iii) Trivial

iii ⇒ i) Ya demostrado en la presentación del Wronskiano

i ⇒ ii)

Vamos a tener en cuenta que dado un isomorfismo $\phi : V \longrightarrow W$ entonces ϕ lleva bases en bases.

Así como que, en $\mathbb{R}^k$, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}$ son una base sii $\det(v_1 | \dots | v_k) \neq 0$

Fijado $t_0 \in I$, entonces $\phi_{t_0} : Z \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $x \longmapsto \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) \end{pmatrix}$ es isomorfismo. Entonces sabemos que

$\varphi_1, \dots, \varphi_k$ son base sii $\phi_{t_0}(\varphi_1), \dots, \phi_{t_0}(\varphi_k)$ son base de $\mathbb{R}^k$ sii $\det(\phi_{t_0}(\varphi_1) | \dots | \phi_{t_0}(\varphi_k)) \neq 0$

Como $\det(\phi_{t_0}(\varphi_1) | \dots | \phi_{t_0}(\varphi_k)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \cdots & \varphi_k(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}(t_0) \end{vmatrix} = W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0)$

obtenemos que $W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) \neq 0$, y como t_0 es fijo pero arbitrario $\Rightarrow W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) \neq 0 \ \forall t \in I$

□

Normalmente, a las bases de Z las llamaremos sistemas fundamentales

Fórmula de Jacobi-Liouville

Supongamos que disponemos de $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in Z$, $t, t_0 \in I$ entonces:

Es importante que $a_k = 1$

$$\boxed{W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\, ds}}$$

Este resultado explica ii) ⇒ iii)

-Demostración-

Buscamos probar que $f(t)=g(t)$, entonces construimos una ecuación diferencial de la cual sea solución y llegaremos a que cumplen la misma condición inicial. A esto se le llama método de Cauchy

Lema (Derivada del determinante)

Sean $f_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ $1\leq i,j\leq n$ derivables, sea $D: I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto \det(f_{ij}(t))$

entonces D es derivable y su derivada es:

$$\boxed{D'(t)=\begin{vmatrix} f_{11}'(t) & \cdots & f_{1n}'(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}'(t) & \cdots & f_{2n}'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}'(t) & \cdots & f_{nn}'(t)\end{vmatrix}}$$

Volviendo a la demostración vamos a derivar pues $W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in C^1(I)$ pues podemos derivar una vez más

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Para abreviar} \\ \text{notación}}}{\frac{d}{dt}} W(\varphi_1,\dots,\varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-2} & \cdots & \varphi_n^{n-2} \\ \varphi_1^{n} & \cdots & \varphi_n^{n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-2} & \cdots & \varphi_n^{n-2} \\ \varphi_1^{n} & \cdots & \varphi_n^{n}\end{vmatrix}$$

Son derivables n veces

Como φ_i son soluciones de la ecuación diferencial para todo $i\in\{1,\dots,n\}$ entonces notando por $f_i = -a_{n-1}\varphi_i - \dots - a_0\varphi_i$ para todo $i\in\{1,\dots,n\}$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-2} & \cdots & \varphi_n^{n-2} \\ \varphi_1^{n} & \cdots & \varphi_n^{n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-2} & \cdots & \varphi_n^{n-2} \\ f_1 & \cdots & f_n\end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{descompongo} \\ \text{en suma de } n \\ \text{donde todos son } 0 \\ \text{menos el primero}}}{=} -a_{n-1}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-1} & \cdots & \varphi_n^{n-1}\end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Es una fórmula de la} \\ \text{derivada del Wronskiano}}}{-a_{n-1} W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}$$

Obtenemos la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{d}{dt} W(\varphi_1,\dots,\varphi_n) = -a_{n-1} W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}$$

que cumple que $\begin{cases} x' = -a_{n-1}(t)\,x \\ x(t_0) = W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t_0)\end{cases}$

Y como conocemos la solución, vemos que es lo que queríamos demostrar □

Ejemplo

$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$, $\varphi_1(t)$ solución entonces podemos encontrar otra función solución linealmente independiente con $\varphi_1(t)$

$W(x,\varphi_1)(t) = u\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)ds}$ donde $u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, si $u=0$ obtenemos las soluciones dependientes

$x\varphi_1' - x'\varphi_1$

de donde obtenemos una ecuación diferencial sobre x, resolviendo obtenemos x

Ejemplo

$t^2 x'' - 2x = 0 \iff x'' - \frac{2x}{t^2} = 0$ con dominios $]0,\infty[$ ó $]-\infty,0[$, tomamos el primero de ellos.

Una solución de la ecuación es $\varphi(t) = t^2$ luego para tomar otra $\angle I$.

$W(x,\varphi) = 6$

$\begin{vmatrix} x & \varphi \\ x' & \varphi' \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow 2tx - t^2x' = 6 \rightarrow$ Ec. Lineal Completa de 1er orden que ya sabemos resolver

No obstante podemos tomar un factor integrante $\mu(t) = \frac{1}{t^4}$

$$\frac{2}{t^3}x - \frac{1}{t^2}x' = \frac{6}{t^4} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}x\right) = -\frac{6}{t^4} \Rightarrow \frac{x}{t^2} = \frac{2}{t^3} \iff x(t) = \frac{2}{t}$$

Por tanto, $\mathcal{B} = \{ t^2, \frac{1}{t} \}$ como base.

6. Ecuación lineal completa

$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = b$ $\quad b, a_1, \dots, a_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas.

Ahora, el conjunto de soluciones no será un espacio vectorial y todo lo visto será falso.

Propiedades

Sea $L: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales entonces las ecuaciones vienen dadas por:

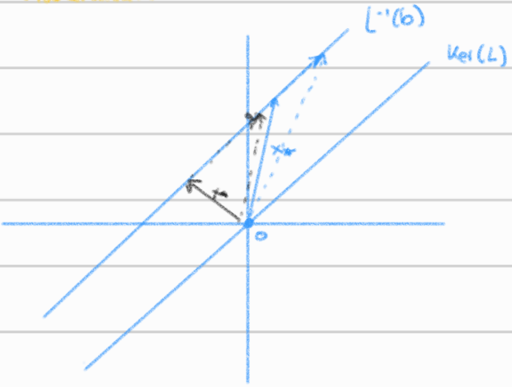
- Homogénea $\quad L[x] = 0$
- Completa $\quad L[x] = b$

luego el conjunto de soluciones es un espacio afín, grosso modo es un espacio vectorial trasladado. De esta manera, la relación es:

$$L^{-1}(b) = x_* + \operatorname{Ker}(L) \quad , x_* \in L^{-1}(b).$$

Es decir, las soluciones son la suma de una solución particular con la fórmula general de la ecuación lineal homogénea

Visualmente



Ejemplo

$x''+x=t^2$

$x(t)=\alpha+\beta t+\gamma t^2$

$2\gamma+\alpha+\beta t+\gamma t^2=t^2 \Rightarrow \begin{cases} 2\gamma+\alpha=0, \ \alpha=-2 \\ \beta=0 \\ \gamma=1 \end{cases}$

· Lo usual que una solución particular será parecida al término $b(t)$

Esto lo podemos hacer porque $\{1,t,t^2\}$ son LI

Por tanto una solución particular es $x(t)=t^2-2$

Las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$x(t)=t^2-2+c_1\cos(t)+c_2\operatorname{sen}(t) \ ; c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Principio de superposición lineal

Sean $Lx_1=b_1$, $Lx_2=b_2$ ecuaciones diferenciales entonces $Lx=c_1b_1+c_2b_2$ es otra ecuación lineal completa donde $c_1x_1+c_2x_2$ es solución.

Ejemplo

$x''+x=t^2+2e^t$

$x''+x=t^2 \longrightarrow x_1(t)=t^2-2$

$x''+x=e^t \longrightarrow x_2(t)=\frac{e^t}{2}$

Por el principio de superposición una solución particular es $x(t)=t^2-2+e^t$

6 Resolución de ecuaciones lineales completas con coeficientes constantes

Disponen de la misma forma que las habituales donde

$$a_i \equiv c_i, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$b \equiv 0$$

es decir, serán homogéneas

Esto podemos verlo como un operador

$$L[x] = 0 \quad | \quad L : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$$
$$x \longmapsto L[x] = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1 x' + c_0 x$$

donde $L[x]$ depende de t y es un operador lineal.

Buscamos encontrar una base de $\operatorname{Ker}(L)$, es decir, un sistema fundamental.

La idea será evaluar L en funciones de tipo exponencial, es decir:

$$L[e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}(\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0)$$

donde $p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ es un polinomio de manera que $L[x]=0$ luego podemos encontrar las raíces que nos darán las soluciones particulares

A $p(\lambda)$ lo llamaremos polinomio característico

Proposición

$$e^{\lambda t} \in \operatorname{Ker}(L) \iff p(\lambda) = 0$$, es decir, λ es raíz del polinomio característico

Ejemplo

$x'' - 5x' + 6x = 0$

$$L : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$$
$$x \longmapsto L[x]$$

$L[e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}(\lambda^2 + 5\lambda + 6)$ donde $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$p(\lambda)=0$ sii $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{cases} \lambda=3 \\ \lambda=2 \end{cases}$ luego e^{2t} y e^{3t} son soluciones

particulares de la ecuación:

$$\varphi_1(t) = e^{2t}, \quad \varphi_2(t) = e^{3t}$$

Por tanto, todas las soluciones vienen dadas por $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ya que φ_1 y φ_2 no son l.i porque $\varphi_1 \neq k\varphi_2$, $k \in \mathbb{R}$; es decir

$$Z = \{ c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

Observación

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \mid \lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i,j \in \{1, \ldots, n\}$ entonces $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}$ son linealmente independientes en $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (o $\mathcal{C}^n(I)$, para cualquier intervalo I no trivial)

-Demostración-

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t} \cdot e^{\lambda_2 t} \cdots e^{\lambda_n t} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{\text{Determinante de Vandermonde}}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$ (esto funciona con complejos resultando raíces complejas l.i) $\square$

Observación

En ocasiones, $p(\lambda)$ tendrá raíces complejas luego tenemos lo siguiente:

$$x'' + x = 0, \quad x'' = -x$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \rightsquigarrow$ soluciones: $\varphi_1(t) = e^{it}$, $\varphi_2(t) = e^{-it}$

pero $\varphi_1(t) = \cos(t) + i\sin(t)$, $\varphi_2(t) = \cos(t) - i\sin(t)$

Todo esto se normaliza si permitimos que tenga soluciones con valores complejos. Pensemos que $a_1 \ldots a_n \in \mathbb{C}$, diremos que $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x(t) = x_1(t) + i x_2(t)$ es $\mathcal{C}^n(I)$ si y solo si
↑ es un punto tanto ver que el tiempo sigue siendo real

ambas partes son $\mathcal{C}^n(I)$; asimismo x será solución compleja de la ecuación si cumple la ecuación y lo anterior.

Siendo $x \in \mathcal{C}^n(I)$, $x^{(n)}(t) = x_1^{(n)}(t) + i\, x_2^{(n)}(t) \; \forall t \in I$

Ejemplo

Sea $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ y $x(t) = e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{at+ibt} = e^{at}(\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt))$

entonces en este caso:

$$x(t) = x_1(t) + i x_2(t) \text{ donde } x_1(t) = e^{at}\cos(bt),\ x_2(t) = e^{at}\operatorname{sen}(bt)$$

donde podemos ver que $x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $x'(t) = \lambda e^{\lambda t} = (a+ib)e^{at+ibt}$

Cuando tenemos una solución compleja podemos definir el conjunto de soluciones complejas:

$$Z_{\mathbb{C}} = \{\text{sol complejas}\}$$

donde $Z_{\mathbb{C}}$ es un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Si los coeficientes a_i son reales $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ disponemos del espacio vectorial de soluciones reales $Z_{\mathbb{R}}$ que tiene dimensión n.

La relación de $Z_{\mathbb{R}}$ y $Z_{\mathbb{C}}$ es la siguiente:

- Toda solución real es compleja.
- Toda solución multiplicada por un número complejo es solución compleja.
- Cualquier combinación lineal $c_1 x_1 + c_2 x_2$ donde $x_1, x_2 \in Z_{\mathbb{R}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ es solución compleja

Pero cualquier solución compleja se escribe como $x_1 + i x_2 = x$, $x \in Z_{\mathbb{C}}$ entonces $x_1, x_2 \in Z_{\mathbb{R}}$.

Esto viene de que $L[x]$ al tomar parte real o parte imaginaria será solución luego el conjugado será solución, de aquí surge que $x_1, x_2 \in Z_{\mathbb{R}}$

Caso práctico

$x'' + x' + x = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$, $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}$

$\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2}$

El sistema fundamental complejo sería $\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \} =$

$$= \left\{ e^{-t/2}\left(\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right), e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \right\}$$

De aquí podemos obtener la base del espacio de soluciones complejas con funciones reales:

Observación

Dado V un espacio vectorial complejo, $v_1, v_2 \in V$ l.i. $\Rightarrow \frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{(v_1 - v_2)}{2i}$ son l.i. como sol complejos

Entonces $e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ sería una función de la base y $e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ es otra luego el sistema fundamental es

$$\left\{ e^{-t/2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right\}$$

y como son reales será un sistema fundamental real

Caso con raíces múltiples

$p(\lambda) = (\lambda - 3)^3$

Luego un sistema fundamental es

$e^{3t}, te^{3t}, t^2 e^{3t}$

la dimensión real es 4.

Si ahora $p(\lambda) = (\lambda-3)^3 (\lambda^2+1)^2$ luego las soluciones son

$\cos t, \mathrm{sen}\, t, t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, e^{3t}, te^{3t}, t^2 e^{3t}$

Definición

Dada una matriz cuadrada de orden n, $A \in M_n$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ definimos $\det : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \det(A)$

donde:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

donde S_n es el conjunto de las permutaciones de orden n y $\varepsilon(\sigma)$ representa la signatura de una permutación:

- Par $= 1$ si necesito aplicar un nº par de permutaciones del mismo tipo para obtener una invarianza
- Impar $= -1$ si necesito aplicar un nº impar de permutaciones del mismo tipo para obtener una invarianza