Ejercicio 1. Si X es un G-conjunto demostrar que $x^g = {}^{g^{-1}}x$, $x \in X, g \in G$, define una acción por la derecha de G sobre X.

i) $x^1 = {}^1x = x$

ii) $(x^g)^h = {}^{h^{-1}}(x^g) = {}^{h^{-1}}({}^{g^{-1}}x) = {}^{(gh)^{-1}}x = x^{gh}$

Luego es una acción por la derecha de G sobre X.

Ejercicio 2. Sea G un grupo y N un subgrupo normal abeliano de G. Demostrar que G/N actúa sobre N por conjugación y obtener un homomorfismo $G/N \to Aut(N)$.

Definimos una acción $ac: G/N \times N \longrightarrow N$

$gN, n \longmapsto gng^{-1} \in N$ pues $N \trianglelefteq G$

Veamos que es una acción

${}^{N}n = nN = n$

${}^{gN}({}^{hN}n) = {}^{gN}(hnh^{-1}) = ghnh^{-1}g^{-1} = ghn(gh)^{-1} = {}^{gh}n$

Luego es una acción por conjugación. Obtenemos el homomorfismo:

Buena definición

$$\phi: G/N \longrightarrow Aut(N)$$
$$gN \longmapsto \varphi_g : N \longrightarrow N$$
$$n \longmapsto gng^{-1}$$

que claramente es un automorfismo por $N \trianglelefteq G$

Veamos que es un homomorfismo:

$\phi(gh) = \varphi_{gh}$, pero $\varphi_{gh}(n) = ghnh^{-1}g^{-1} = g\,\varphi_h(n)\,g^{-1} = \varphi_g(\varphi_h(n))$ $\forall n \in N$, entonces $\varphi_{gh} = \varphi_g \cdot \varphi_h = \phi(g)\phi(h)$

y tenemos el homomorfismo

Ejercicio 3. Sean S y T dos G–conjuntos. Se define la **acción diagonal** de G sobre el producto cartesiano $S \times T$ mediante ${}^x(s,t) = ({}^xs, {}^xt)$. Demostrar que, para la acción diagonal, el estabilizador de (s,t) es la intersección de los estabilizadores de s y t en las acciones dadas.

Estudiamos el estabilizador de (s,t).

$$Stab_G(s,t) = \{x \in G \mid {}^x(s,t) = (s,t)\} = \{x \in G \mid ({}^xs, {}^xt) = (s,t)\} = \{x \in G \mid {}^xs = s \wedge {}^xt = t\}$$
$$= \{x \in G \mid {}^xs = s\} \cap \{x \in G \mid {}^xt = t\}$$

Por tanto, tenemos lo que buscamos.

Ejercicio 4. Demostrar que si G contiene un elemento x que tiene exactamente dos conjugados, entonces G tiene un subgrupo normal propio. (**Pista:** Considerar el centralizador de x).

↳ Pista confusa.

Estudiamos las clases de conjugación de x:

$$Cl_G(x) = \{z \in G \mid \exists g \in G \; gzg^{-1} = x\} \text{ que por hipótesis } |Cl_G(x)| = 2.$$

Sabemos por la fórmula de las clases de conjugación que

$$2 = |Cl_G(x)| = [G : C_G(x)]$$

Luego $\frac{G}{C_G(x)}$ tiene dos clases de equivalencia, y por tanto $C_G(x)$ es un subgrupo propio pues en otro caso $[G : C_G(x)] = 1$ o $[G : C_G(x)] = |G|$ ¿? tendríamos los subgrupos impropios

Ejercicio 5. Encontrar todos los grupos finitos que tienen exactamente dos clases de conjugación.

G_2 es el único

Ejercicio 6. Describir explícitamente las clases de conjugación del grupo D_4.

$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

$Cl_{D_4}(1) = \{x \in D_4 \mid \exists y \in D_4,\ yxy^{-1} = 1\} = \{x \in D_4 \mid \exists y \in D_4,\ yx = y\} = \{1\}$

$Cl_{D_4}(r) = \{r, r^3\}$ $\qquad$ $Cl_{D_4}(s) = \{r^2 s, s\}$

$Cl_{D_4}(r^2) = \{r^2\}$ $\qquad$ $Cl_{D_4}(sr) = \{sr^3, sr\}$

Ejercicio 7. Se dice que la acción de un grupo finito G sobre un conjunto X es **transitiva** si hay una sola órbita para esta acción (es decir, si para cada $x, y \in X$ existe algún $g \in G$ tal que ${}^g x = y$). Demostrar que si G actúa transitivamente sobre un conjunto X con n elementos, entonces $|G|$ es un múltiplo de n.

Esto se cumple por ser X finito

Como la acción es transitiva tenemos que $|G| = \sum_{i=1}^{n} |Orb(x_i)| = |Orb(x_1)| \sum_{i=1}^{n} 1 = n|Orb(x_1)|$ Se ha tomado x_1 como cualquier otro elemento pues al ser transitiva $Orb(x_i) = Orb(x_j)\ \forall i,j$.

Ejercicio 8. Un subgrupo $G \leq S_n$ se dice **transitivo** si la acción de G sobre $\{1, 2, \cdots, n\}$ es transitiva. Encontrar todos los subgrupos transitivos de S_3 y S_4.

Usaremos la acción $ac: S_n \times X \longrightarrow X$, $\sigma, i \longmapsto \sigma(i)$ para determinar estos subgrupos:

i) $S_3 = \{1, (12), (13), (123), (132), (23)\}$ $\quad X = \{1, 2, 3\}$

En este caso, todo subgrupo es transitivo menos $\langle 1 \rangle$ pues

$Orb(x) = \{y \in X \mid \sigma(y) = x\}$ y los subgrupos son

$\langle (12) \rangle = \{1, (12), (13)\}$

$Orb(1) = \{1, 2, 3\} = Orb(2) = Orb(3)$

Idem $\langle (13) \rangle$ y $\langle (23) \rangle$

$<(123)> = \{ 1, (132), (123) \}$

$Orb(1) = \{1,2,3\} = Orb(2) = Orb(3)$

ii) S_4, en este caso los subgrupos transitivos son:

$S < G \mid \forall i \in X \ \exists \sigma \in S_4$ verificando que $\sigma(j) = i \ \forall j \in X$

luego son

$\{ A_4, V$ y conjugados, $<(1234)>, <(13)(24)>, <(1234)> \dots \}$

Ejercicio 9. Si $n > 0$ es un entero positivo, una partición de n es una sucesión no decreciente de enteros positivos cuya suma es n. Dada una permutación $\sigma \in S_n$, la descomposición en ciclos disjuntos (incluyendo los ciclos de longitud 1) de $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_r$ determina una partición $n_1, n_2, \cdots, n_r$ de n donde cada n_i es la longitud del ciclo γ_i. Dos permutaciones en S_n se dice que son del mismo tipo si determinan la misma partición de n. Demostrar:

1. Dos elementos de S_n son conjugados si y solo si son del mismo tipo.
2. El número de clases de conjugación de S_n e igual l número de particiones de n.

1. $\Rightarrow)$

Si $\sigma, \tau \in S_n$ son conjugados, es decir, $\sigma = \varphi \tau \varphi^{-1}$ para algún φ es claro que son del mismo tipo

$\Leftarrow)$

Si $\sigma, \tau \in S_n$ son del mismo tipo, se cumple que la descomposición en ciclos disjuntos de σ da la misma partición que la de τ. Como para cualquier permutación ella y su conjugada tienen la misma longitud se cumple lo pedido

2. Sabemos que $\bigcup_{x \in S_n} Orb(x) = S_n$ con $Orb(x) \cap Orb(y) = \emptyset \ \forall x, y \in S_n$. Además, sabemos que cada partición de n induce una clase de conjugación distinta. Por tanto, se deduce que el nº de particiones de n es el nº de clases de conjugación de S_n.

Ejercicio 10. Calcular el número de clases de conjugación de S_5. Dar un representante de cada una y encontrar el orden de cada clase. Calcular el estabilizador de $(1\,2\,3)$ bajo la acción de conjugación de S_5 sobre sí mismo.

El nº de clases de conjugaciones es 7:

- $1+1+1+1+1$
- $2+2+1$
- $4+1$
- $3+1+1$
- $2+1+1+1$
- $3+2$
- 5

Damos un representante

- $(1,1,1,1,1) = Cl_{S_5}(1)$
- $(2,2,1) = Cl_{S_5}((12)(34))$
- $(3,1,1) = Cl_{S_5}(123)$
- $(5) = Cl_{S_5}(12345)$
- $(2,1,1,1) = Cl_{S_5}((12))$
- $(3,2) = Cl_{S_5}((123)(45))$
- $(4,1) = Cl_{S_5}(1234)$

Obtenemos los órdenes, es hacer todos los cuentos

$Cl_{S_5}(1)=1$ $\quad$ $Cl_{S_5}((123)(45))=20$

$Cl_{S_5}(12)=10$ $\quad$ $Cl_{S_5}(123)=20$ $\quad$ $Cl_{S_5}(12345)=24$

$Cl_{S_5}((12)(34)) = 15$ $\quad$ $Cl_{S_5}(1234)=30$

Hemos seguido la regla de que, si el tipo de σ es $(1^{m_1}, 2^{m_2}, \_\_\_, k^{m_k})$ donde hay m_i ciclos de longitud i en la descomposición de ciclos disjuntos entonces:

$$|C_{S_n}(\sigma)| = \prod_i (i^{m_i} \cdot m_i!) \Rightarrow |Cl_{S_n}(\sigma)| = \frac{n!}{\prod_i (i^{m_i} m_i!)}$$

Esto se da por demostrado.

Calculamos el estabilizador de (123)

$$C_{S_5}(123) = \{g \in S_5 \mid g(123)g^{-1} = (123)\} \qquad |C_{S_5}(123)| = 3^1 \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 2! = 6$$

$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)(123)(x_5 x_4 x_3 x_2 x_1) = (123)$ $\rightarrow$ puedo cambiar 45 pero no 123

Pertenecen a $C_{S_5}(123)$ algunos elementos como

$x(45)$ con $x=1$ ó $x=(123)$

Además se le añade (123) y (132) como $|C_{S_5}(123)|=6$ es claro que

$$C_{S_5}(123) = \{1, (123), (132), (123)(45), (45)\}$$

Ejercicio 12. Sea G un p–grupo actuando sobre un conjunto finito X. Demostrar que

$$|X| \equiv |Fix_G(X)| \mod p.$$

Sabemos que, en un p-grupo $Fix_G(X) = Z(G)$, usando ahora la fórmula de las órbitas tenemos que

$$|X| = |Z(G)| + \sum_{\substack{h \notin Z(G) \\ h \in M}} |Cl_G(h)| = |Z(G)| + \sum_{\substack{h \notin Z(G) \\ h \in M}} [G : C_G(h)]$$

Si vemos que $[G : C_G(h)] = p$ $\forall h \notin Z(G)$ obtenemos lo que queremos. Lo vemos por las órbitas, como $|orb(h)| \mid |G|$ siendo una órbita no trivial luego será una potencia de p, y en particular

$$|orb(h)| \equiv 0 \mod p \quad \forall h \notin Z(G)$$

Por tanto, $|X| \equiv |Fix(X)| \mod p$.

Ejercicio 13. Sea G un 2–grupo finito que actúa sobre un conjunto finito X cuya cardinalidad es un número impar. ¿Podemos afirmar que existe al menos un punto de X que queda fijo bajo la acción de G? ¿Podemos decir lo mismo si $|X|$ es par?

Sabemos, por el ejercicio anterior que, $|X| \equiv |Fix(X)| \mod 2$, luego $|Fix(X)|$ debe ser 1 al menos pues en caso contrario $|X|$ sería par. No podemos asegurar lo mismo si $|X|$ es par.

Ejercicio 14. Sea $C_n = \langle a |\ a^n = 1\rangle$ un grupo cíclico de orden n. Describir sus subgrupos de Sylow.

$C_n = \langle x | x^n = 1 \rangle$. Si $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$, para cada $i = 1 - k$ $\exists P_i$ p-subgrupo de Sylow de C_n que será cíclico de orden $p_i^{t_i}$, los p_i-subgrupos son $C_{p_i^{t_i}}$

Ejercicio hecho por Aurora.

Ejercicio 15. Sea G un grupo finito y $|G| = pn$ con p primo y $p > n$. Demostrar que G contiene un subgrupo normal de orden p y que todo subgrupo de G de orden p es normal en G

$n_p = 1$ porque $n_p \equiv 1$ mod p y $p > n$ y $n_p | n$

Demostrar que contiene un subgrupo normal es tan simple como probar que $\hookrightarrow$ p es primo.
el p-subgrupo de Sylow es único tomando una descomposición en factores primos de n.
Se puede ver con ejercicios de la relación anterior.
De esta forma, como sólo hay uno, será normal y se tiene el segundo resultado.

Ejercicio 16. Sea H un subgrupo de un grupo finito G con $[G : H] = p$ primo y p el menor primo que divide a $|G|$. Demostrar que entonces H es normal en G.

Podemos probar que $H \trianglelefteq G$ viendo que $Stab_G(h) = G$ $\forall h \in H$, es decir, $H = Z(G)$. Supongamos que $|G| = p^n \cdot m$ con $mcd(p, m) = 1$.

Idea: Probablemente H sea un p-subgrupo de un p-subgrupo de Sylow.

Clases laterales $\qquad H = Ker\,\phi$ normal

$[H : Ker\,\phi]\ \frac{p!}{p} = (p-1)!$ $\qquad G/H \cong$

Ejercicio 17. Sea p un número primo. Demostrar:

1. Todo grupo no abeliano de orden p^3 tiene un centro de orden p.
2. Existen únicamente dos grupos no isomorfos de orden p^2.
3. Todo subgrupo normal de orden p de un p-grupo finito está contenido en el centro.

1\. Sabemos por un corolario del T^a de Burnside que $|Z(G)| / p^{n-1}$ y que $Z(G) \neq 1$. Como G no es abeliano tenemos que $|Z(G)| = p$.

2\. Si $|G| = p^2$ entonces G es abeliano, de la misma manera es H. Como los únicos divisores no triviales de p^2 son p y p^2 tenemos dos posibilidades

$$G \cong C_{p^2} \wedge H \cong C_p \times C_p$$

o viceversa.

3 Sea $H \triangleleft \mathcal{G}$ siendo $\mathcal{G}$ un p-grupo finito $\Rightarrow |\mathcal{G}| = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, sabemos que $|Z(\mathcal{G})| = |\mathcal{G}|$ luego $Z(\mathcal{G})$ es un p-subgrupo de Sylow de $\mathcal{G}$. Como $|H| \triangleleft \mathcal{G}$, de la fórmula de las clases de conjugación

$$p = |H| = |H \cap Z(\mathcal{G})| + \sum_{u \in \Gamma} [\mathcal{G} : C_{\mathcal{G}}(u)] = |H \cap Z(\mathcal{G})| + \overset{?}{\underset{\#}{\overset{\emptyset}{i}}}/n|$$

Sup $H \cap Z(\mathcal{G}) = 1$

$\hookrightarrow$ cont. con la fórmula de las clases

Lo que busco es que H es un p-subgrupo de $\mathcal{G} \Rightarrow H < Z(\mathcal{G})$

Ejercicio 18. Demostrar que si N es un subgrupo normal de G y N y G/N son p-grupos entonces G es un p-grupo.

Como N es un p-grupo entonces $|N| = p^i$ con $i \in \mathbb{N}$; de la misma manera, $|\mathcal{G}/N|$ es un p-grupo luego $|\mathcal{G}/N| = p^j$, $j \in \mathbb{N}$. Pero..

$$p^j = \left|\frac{\mathcal{G}}{N}\right| = \frac{|\mathcal{G}|}{|N|} = \frac{n}{p^i}$$

Luego $|\mathcal{G}| = p^j p^i = p^{i+j}$ luego; para el caso finito $\mathcal{G}$ es un p-grupo.

Para el caso infinito:

$\forall x \in \mathcal{G}$ • si $x \in N \Rightarrow o(x) = p^n$

- si $x \notin N \Rightarrow xN \in \mathcal{G}/N \Rightarrow o(xN) = p^r$ $r \geq 1$. Entonces $N = (xN)^{p^r} = x^{p^r} N = N \Rightarrow x^{p^r} \in N \Rightarrow o(x^{p^r}) = p^s$ para algún $s \Rightarrow (x^{p^r})^{p^s} = x^{p^{r+s}} = 1 \Rightarrow o(x)$ es potencia de p

La idea radica en que $N \times \frac{\mathcal{G}}{N} \cong \mathcal{G}$

Ejercicio 19. Si G es un grupo de orden p^n, p primo, demostrar que para todo k, $0 \leq k \leq n$, existe un subgrupo normal de G de orden p^k.

$n = 1$, $n = 2 \Rightarrow$ Abeliano $\Rightarrow$ Todo subgrupo es normal

Si es cierto para $p^{n-1} < p^n$, por el Tª de Burnside $Z(\mathcal{G}) \neq 1$, entonces por el Tª de Cauchy $\exists N < Z(\mathcal{G})$ con $|N| = p \Rightarrow N \triangleleft \mathcal{G} \Rightarrow |\mathcal{G}/N| = p^{n-1} \Rightarrow$ por la HI $\exists L \triangleleft \mathcal{G}/N$ $|L| = p^k$ $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Tomando $L = \frac{H}{N}$ tenemos $N \triangleleft H \triangleleft \mathcal{G}$ $|H| = \left|\frac{H}{N}\right| \cdot |N| = p^{k+1}$ $0 \leq k+1 \leq n$

Ejercicio 21. Hallar todos los subgrupos de Sylow de los grupos $\mathbb{Z}_{600}$, Q_2, D_5, D_6, A_4, A_5, S_5.

$|\mathbb{Z}_{600}| = 600 = 2^3\, 3\, 5^2$

Como $\mathbb{Z}_{600}$ es abeliano todo subgrupo es normal luego

$\exists! P$ 2-subgrupo de Sylow de orden 8

$\exists! Q$ 3-subgrupo de Sylow de orden 3

$\exists! T$ 5-subgrupo de Sylow de orden 5.

$|Q_2| = 8 = 2^3$

$\exists!\, P \leq Q_2$ 2-subgrupo de Sylow que es Q_2

$|D_5| = 2 \cdot 5$

$$\left.\begin{array}{l} n_2 \mid 5 \\ n_2 \equiv 1 \bmod 2 \end{array}\right\} n_2 = 1 \text{ ó } n_2 = 5$$

Si existe tendrá orden 2, pero $\langle s \rangle$ y $\langle sr \rangle$ son conjugados luego $n_2 = 5$ y son $\langle s \rangle, \langle sr \rangle$, $\langle sr^2 \rangle, \langle sr^3 \rangle, \langle sr^4 \rangle$

$|D_6| = 2 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3$

$$\left.\begin{array}{l} n_2 \mid 3 \\ n_2 \equiv 1 \bmod 2 \end{array}\right\} n_2 = 1 \text{ ó } n_2 = 3$$

Tendrá orden 4, como $Z(D_6) \trianglelefteq D_6$, deberá estar en todos los 2-subgrupos de Sylow, los 2-subgrupos son

$H_1 = \{1, r^3, s, sr^3\}$ $H_2 = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$ $H_3 = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

$n_3 = 1$ o $n_3 = 4$ pero como no hay 4 subgrupos de orden 3 en D_6 es único.

$|A_4| = 12 = 2^2 \cdot 3$

$n_2 = 1$ ó $n_2 = 3$ de orden 4, sabemos que el único subgrupo de orden 4 en A_4 es V que además es normal

$n_3 = 1$ ó $n_3 = 4$ son 4 pues de orden 3 tenemos $\langle (123) \rangle, \langle (124) \rangle, \langle (134) \rangle, \langle (234) \rangle$ son conjugados

Ejercicio 22. Demostrar que D_4 es isomorfo a los 2-subgrupos de Sylow de S_4 (**Pista:** Considerar la representación asociada a la acción de D_4 sobre los vértices del cuadrado.)

Primero vamos a estudiar cuáles son los 2-subgrupos de Sylow de S_4, que tendrán orden 8. Basta considerar un subretículo del retículo de S_4 para conocer los 2-subgrupos de Sylow:

$|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$

$$\left.\begin{array}{l} n_2 \mid 3 \\ n_2 \equiv 1 \bmod 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} n_2 = 1 \\ n_2 = 3 \end{array} \longrightarrow \text{Hay 3 subgrupos de orden 8 en } S_4 \text{ que son conjugados}$$

luego son: $\langle (1234), (13) \rangle$ $\langle (1243), (14) \rangle$ $\langle (1324), (12) \rangle$

Construimos el isomorfismo entre $\langle (1234), (13) \rangle$ y D_4

$$\phi : D_4 \longrightarrow \langle (1234), (13) \rangle$$

dado por

$\phi(1)=1$, $\phi(1)=(1234)$, $\phi(r^2)=(13)(24)$, $\phi(r^3)=(1432)$, $\phi(s)=$

$\phi(sr)=(1432)$ $\phi(sr^2)=1$ $\rightsquigarrow$ $\ker\phi=1 \Rightarrow \phi$ inyectiva

Haciendo esto debería salir un isomorfismo claro

Ejercicio 23. Demostrar que todo grupo de orden 12 con más de un 3–subgrupo de Sylow es isomorfo al grupo alternado A_4. (**Pista:** Considerar la acción por traslación de un tal grupo sobre el conjunto de clases módulo $\mathcal{P}$, siendo $\mathcal{P}$ un 3-subgrupo de Sylow. Probar que dicha acción es fiel.)

Pag 304

Ejercicio 24.

1. Demostrar que no existen grupos simples de orden 12. Más concretamente, demostrar que todo grupo de orden 12 admite un subgrupo normal de orden 3 o de orden 4.
2. Demostrar que no existen grupos simples de orden 28. Más concretamente, probar que todo grupo de orden 28 contiene un subgrupo normal de orden 7.
3. Demostrar que no existen grupos simples de orden 56. Más concretamente, probar que todo grupo de orden 56 contiene un subgrupo normal de orden 7 o de orden 8.
4. Demostrar que no existen grupos simples de orden 148 ni de orden 200 ni de orden 351.

1. Supongamos un grupo G de orden 12

$|G|=12=2^2\,3$

$$\left.\begin{array}{l} n_3 \mid 4 \\ n_3 \equiv 1 \bmod 3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} n_3=1 \\ \text{ó} \\ n_3=4 \end{array}$$

Si $n_3=1 \Rightarrow \exists!\, P$ 3-subgrupo de Sylow $P \trianglelefteq G \Rightarrow G$ no es simple

Si $n_3=4 \Rightarrow \exists P_1,P_2,P_3,P_4$ 3-subgrupos de Sylow de orden 3 tal que $P_i \cap P_j = 1$ $\forall i,j$ entonces 8 elementos distintos en $\cup P_i$. Por tanto, como existen 2-subgrupos de Sylow de orden 4 tendría esos 4 elementos restantes, luego será único y por tanto normal $\Rightarrow G$ no es simple

2. Sea G un grupo de orden 28, $|G| = 28 = 2^2 \cdot 7$.

$$\left.\begin{array}{l} n_7 \mid 4 \\ n_7 \equiv 1 \mod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow n_7 = 1 \Rightarrow G \text{ no es simple}$$

3. Sea G un grupo de orden 56.

$|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$

$$\left.\begin{array}{l} n_7 \mid 8 \\ n_7 \equiv 1 \mod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n_7 = 1 \\ \text{ó} \\ n_7 = 8 \end{array}$$

- Si $n_7 = 1$ No es simple
- Si $n_7 = 8 \Rightarrow$ Hay 8 7-subgrupos de Sylow que aportan 6 elementos distintos cada uno luego quedan $56 - 48 = 8$ elementos por cubrir, los que generan el 2-subgrupo de Sylow de orden 8 único $\Rightarrow G$ no es simple.

4.- $148 = 2^2 \cdot 37$.

$$\left.\begin{array}{l} n_{37} \mid 4 \\ n_{37} \equiv 1 \mod 37 \end{array}\right\} n_{37} = 1 \Rightarrow \text{no es simple}$$

- $200 = 2^3 \cdot 5^2$

$n_5 \mid 8 \rightarrow n_5 \in \{1, 2, 4, 8\}$

$$\left.\begin{array}{l} n_5 \mid 8 \\ n_5 \equiv 1 \mod 5 \end{array}\right\} n_5 = 1 \Rightarrow \text{no es simple}$$

$n_5 \equiv 1 \mod 5 \rightarrow n_5 = 1 + k5$

- $351 = 3^3 \cdot 13$

$n_{13} \mid 27 \rightarrow n_{13} \in \{1, 3, 9\}$

↳ puede salir 27

$$\left.\begin{array}{l} n_{13} \mid 27 \\ n_{13} \equiv 1 \mod 13 \end{array}\right\} n_{13} = 1 \Rightarrow \text{no es simple}$$

$n_{13} \equiv 1 \mod 13 \rightarrow n_{13} = 1 + k13$

Ejercicio 25. Calcular el número de elementos de orden 7 que tiene un grupo simple de orden 168.

- $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$n_7 \mid 24 \rightarrow n_7 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$$\left.\begin{array}{l} n_7 \mid 24 \\ n_7 \equiv 1 \mod 7 \end{array}\right\} n_7 = 1 \text{ ó } n_7 = 8$$

- Si $n_7 = 1$ G no es simple !!
- Si $n_7 = 8$ tenemos 8 7-subgrupos de Sylow de orden 7 con 6 elementos distintos de orden 7 cada uno luego hay 48 elementos de orden 7

¡El orden divide al orden del grupo!