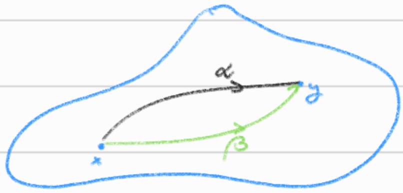
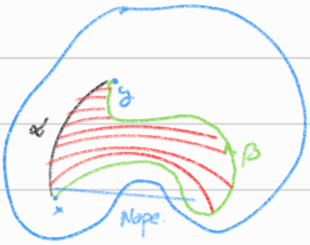
1. Prueba que en un espacio topológico simplemente conexo X, dos arcos cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$ son homotópicos por arcos.

Lo que sabemos es que, como X es simplemente conexo, en particular, X es arcoconexo y $\pi_1(X,x)=[\varepsilon_x]$ $\forall_{x\in X}$.

Debemos probar que $\exists H:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow X$ continua de forma que $H(0,t)=\alpha(0)=\beta(0)=x$
$H(1,t)=\alpha(1)=\beta(1)=y$, $H(s,0)=\alpha(s)$, $H(s,1)=\beta(s)$. Y la situación es la siguiente.



Como X es simplemente conexo, tenemos que $[\alpha*\tilde{\beta}]=[\varepsilon_x]$ entonces $[\alpha]*[\tilde{\beta}]=[\varepsilon_x]$
$\Rightarrow [\alpha]=[\beta]$. Como curiosidad, para construir la homotopía basta considerar los segmentos $(1-t)\alpha(s)+t\beta(s)$ de la topología.



2. Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Demuestra que si f se puede extender a una aplicación continua $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$, entonces f_* es el homomorfismo trivial, es decir, el homomorfismo que lleva todo elemento en el neutro.

Lo que pretendemos probar es que, $f_*: \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x))$ cumple que

$$[\alpha] \longmapsto [f\circ\alpha]$$

$[f\circ\alpha]=[\varepsilon_{f(x)}]$ $\forall \alpha\in\Omega(X,x)$.

Nosotros sabemos que $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n)=[\varepsilon_y]$ $\forall_{y\in\mathbb{R}^n}$ entonces
$F_*:\pi_1(\mathbb{R}^n,y)=\{[\varepsilon_x]\} \longrightarrow \pi_1(Y,f(y))$. Considerando ahora el homomorfismo inclusión,

$$[\alpha]=[\varepsilon_x] \longmapsto [f\circ\varepsilon_x]$$

tenemos claramente que $F_*\circ i_*=f_*$ entonces $f_*([\alpha])=F_*(i_*[\alpha])=F_*([\alpha])=F_*([\varepsilon_{f(x)}])=[\varepsilon_{f(x)}]$
y tenemos que f_* es el homomorfismo trivial.

3. Se dice que un grupo G con operación $\cdot$ es un *grupo topológico* si G tiene una topología de forma que las aplicaciones producto e inversión

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longrightarrow & x.y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longrightarrow & x^{-1} \end{array}$$

son continuas. Sea e el elemento neutro en G.

a) Dados $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$, se define $\alpha \cdot \beta : [0, 1] \to G$ como $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$. Demuestra que $\alpha \cdot \beta \in \Omega(G, e)$.

b) Comprueba que $(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta) = \alpha * \beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$.

c) Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$. Prueba que la operación $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$ está bien definida.

d) Muestra que $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha] * [\beta]$, para cada $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$.

e) Demuestra que $\pi_1(G, e)$ es abeliano.

a) Para ello, debemos probar que, para $\gamma:[0,1]\longrightarrow G$ dada por $\gamma(t)=\alpha(t)\cdot\beta(t)$ $\forall t\in[0,1]$ cumple
sea continua y $\gamma(0)=\gamma(1)=e$.

Claramente es continua pues α y β lo son; veamos las condiciones.

$$\gamma(0) = \alpha(0)\cdot\beta(0) = e\cdot e = e$$

$$\gamma(1) = \alpha(1)\cdot\beta(1) = e\cdot e = e$$

Por tanto, $\gamma \in \Omega(G,e)$.

b) Sean $\alpha, \beta \in \Omega(G,e)$ entonces:

$$(\alpha * \varepsilon_e)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ e & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases} \qquad (\varepsilon_e * \beta) = \begin{cases} e & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Entonces, es claro que

$$(\alpha*\varepsilon_e)\cdot(\varepsilon_e*\beta)(t) = \left\{\begin{array}{ll} \alpha(2t)e = \alpha(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ e\cdot\beta(2t-1) = \beta(2t-1) & t\in[\frac{1}{2},1] \end{array}\right\} = (\alpha*\beta)(t)$$

c) Para probar que está bien definida, debemos ver que no depende del representante elegido, sean $[\alpha_1]=[\alpha_2]$ y $[\beta_1]=[\beta_2]$ tenemos que

$$[\alpha_1\cdot\beta_1] = [\alpha_1]\cdot[\beta_1] = [\alpha_2]\cdot[\beta_2] = [\alpha_2\cdot\beta_2]$$

donde he usado constantemente que α_1 es homotópico a α_2 y que β_1 es homotópico a β_2. Implícitamente he usado que la aplicación $H: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow G$ dada por $H(s,t) = H_1(s,t)\cdot H_2(s,t)$ $\forall (s,t)\in[0,1]\times[0,1]$ es una homotopía por arcos, pero debo probarlo; claramente es continua y:

$$H(0,t) = H_1(0,t)\cdot H_2(0,t) = \alpha_1(0)\cdot\beta_1(0) = e = H_1(1,t)\cdot H_2(1,t) = H(1,t)$$

$$H(s,0) = H_1(s,0)\cdot H_2(s,0) = \alpha_1(s)\cdot\beta_1(s) = (\alpha_1\cdot\beta_1)(s)$$

$$H(s,1) = H_1(s,1)\cdot H_2(s,1) = \alpha_2(s)\cdot\beta_2(s) = (\alpha_2\cdot\beta_2)(s)$$

d) Nos apoyaremos en el apartado b) y c); sean $[\alpha],[\beta]\in\Pi_1(G,e)$ tenemos que:

$$[\alpha]\cdot[\beta] = [\alpha*\varepsilon_e]\cdot[\varepsilon_e*\beta] = [(\alpha*\varepsilon_e)\cdot(\varepsilon_e*\beta)] = [\alpha*\beta]$$

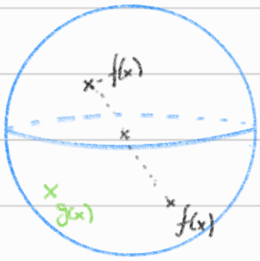
e) Para ver que es abeliano, tomados $[\alpha],[\beta]\in\Pi_1(G,e)$ podemos comprobar que

$$[\alpha]*[\beta] = [\alpha*\beta] = [(\alpha*\varepsilon_e)\cdot(\varepsilon_e*\beta)] = [\varepsilon_e*\alpha]\cdot[\beta*\varepsilon_e]$$

$$= \left[\left\{\begin{array}{ll} e\,\beta(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ \alpha(2t-1)e & t\in[\frac{1}{2},1] \end{array}\right\}\right] = [\beta*\alpha] = [\beta]*[\alpha]$$

4. Sean X un espacio topológico y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^n$ aplicaciones continuas con $g(x) \neq -f(x)$ para cada $x \in X$. Prueba que f y g son homotópicas. Deduce que si $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y carece de puntos fijos, entonces f es homotópica a $-Id_{\mathbb{S}^n}$.

Nos encontramos en la siguiente situación, representada para $n=2$. Si nos fijamos, como el segmento $(1-t)f(x)+tg(x)$ $\forall t\in[0,1]$ no pasa por el centro, podemos considerar su proyección sobre $\mathbb{S}^n$ como homotopía, construyendo así la geodésica que une $f(x)$ y $g(x)$.



Por tanto, definimos $H(x,t)=\dfrac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}\in\mathbb{S}^n$ $\forall t,x\in[0,1]\times[0,1]$ debemos ver que es homotopía, claramente es continua por serlo f y g y porque $g(x)\neq -f(x)$. Además:

$$H(x,0)=\frac{f(x)}{\|f(x)\|}=f(x) \text{ pues } f(x)\in\mathbb{S}^n$$

$$H(x,1)=\frac{g(x)}{\|g(x)\|}=g(x) \text{ pues } g(x)\in\mathbb{S}^n$$

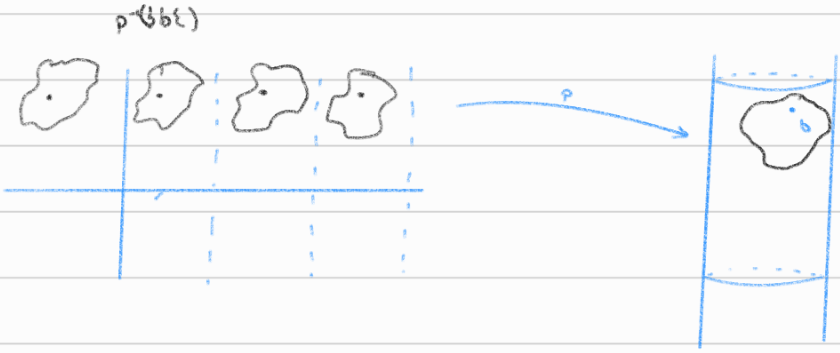
Veamos ahora la segunda pregunta; como $f(x)\neq x$ $\forall x\in\mathbb{S}^n$ entonces

$$f(x)\neq -(-x) = -(-Id_{\mathbb{S}^n}(x))$$

luego $-Id_{\mathbb{S}^n}$ y f son homotópicas por lo probado justo antes.

5. Sea $p : R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora y $b \in B$. Demuestra que el subespacio topológico $p^{-1}(\{b\}) \subset R$ tiene la topología discreta.

La situación en la que nos sitúa el problema es la siguiente; modelada sobre el cilindro de radio 1∞:



Consideramos $X = p^{-1}(\{b\})$, como p es una aplicación recubridora sabemos que existe $b\in O_b\subseteq B$ abierto en B y regularmente recubierto, es decir, $\exists \{A_i\}_{i\in I}$ tal que $p(A_i)=B$ cumpliendo que

$$p^{-1}(O_b)=\biguplus_{i\in I} A_i$$

Sea ahora $x\in p^{-1}(O_b)$, sabemos que existe $j\in I$ con $x\in A_j$. Veamos que no puede haber otro elemento de X en A_j. Si lo hubiera, sease $x'\in A_j$, se tendría que $p|_{A_j}(x)=p|_{A_j}(x')=b$, pero $p|_{A_j}$ es un homeomorfismo pues p es recubridora y entonces $p|_{A_j}$ es biyectiva!!

Por tanto, $\nexists x'\in A_j\cap X$ y $T_{p^{-1}\{b\}}=T_{disc}$.

6. Demuestra que toda aplicación recubridora es una aplicación abierta.

Debemos probar que, si $p: R \longrightarrow B$ es recubridora entonces $p(\mathcal{U})$ es abierto $\forall \mathcal{U} \subset R$ abierto.

Sea $\mathcal{U} \in R$ abierto fijo pero arbitrario y sea $x \in \mathcal{U}$, como $x \in \mathcal{U}$ tenemos que $\exists y \in B$ tal que $p(x) = y \in B$.

Ahora bien, como p es recubridora, existe O_y abierto regularmente recubierto con $y \in O_y$. Como p es continua, tenemos que $p^{-1}(O_y)$ es abierto. Además, sabemos que $\exists \{\Delta_i\}_{i \in I}$ tal que

$$p^{-1}(O_y) = \biguplus_{i \in I} \Delta_i$$

y que $\exists j \in I$ con $x \in \Delta_j \Rightarrow y \in p|_{\Delta_j}(\Delta_j) = O_y$ y como $\mathcal{U} \cap \Delta_j$ es abierto tenemos que, gracias a que $p|_{\Delta_i}$ es homeomorfismo $\forall i \in I$, luego es abierta, tenemos que $p(\mathcal{U} \cap \Delta_j)$ es abierto.

Por último, como podemos repetir el argumento para $y \in p(\mathcal{U}) \cap O_y$ de forma recursiva para obtener que $p(\mathcal{U})$ es abierto.

7. Sea $p: R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, con B conexo. Demuestra que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En tal caso, se dice que R es un recubridor de k hojas de B.

Para probar este ejercicio, definimos $\Delta = \{b \in B : \# p^{-1}(b) = k\}$, y buscamos probar que Δ es abierto y cerrado. Como Δ es no vacío pues $b_0 \in \Delta$.

$\subset$) Veamos ahora que Δ es abierto.

Sea $x \in \Delta$, como p es recubridora sabemos que existe $O_x \subset B$ abierto regularmente recubierto de forma que $p^{-1}(O_x) = \biguplus_{i \in I} \Delta_i$ con $p|_{\Delta_i}$ un homeomorfismo $\forall i \in I$.

Definimos, $\forall z \in O_x$ la aplicación $\phi_z : I \longrightarrow p^{-1}(z)$ y vamos a ver que es biyectiva:

- Bien definida: Si $i \in I$, sabemos que $p|_{\Delta_i}$ es un homeomorfismo luego $\exists! y \in \Delta_i$ tal que $p(y) = z$.
- Inyectiva: Si $i, j \in I$ cumplen que $\phi_z(i) = \phi_z(j) \Rightarrow \Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$!!
- Sobreyectiva: Sea $i \in I$, veamos que $\exists y \in \biguplus_{i \in I} \Delta_i$ tal que $p(y) = z$. Si $y \in p^{-1}(z) \subseteq p^{-1}(O_x) = \biguplus_{i \in I} \Delta_i$ debe $\exists i \in I$ tal que $y \in \Delta_i$.

Luego ϕ_z es biyectiva y obtenemos que $O_x \subset \Delta$ y por tanto, $x \in \mathring{\Delta}$.

$\supset$) Veamos ahora que Δ es cerrado. Es claro que $\Delta \subset \bar{\Delta}$, debemos ver que $\bar{\Delta} = \Delta$.

Sea $x \in \bar{\Delta}$, como p es recubridora sabemos que existe $O_x \subset B$ abierto regularmente recubierto de forma que $p^{-1}(O_x) = \biguplus_{i \in I} \Delta_i$ con $p|_{\Delta_i}$ un homeomorfismo $\forall i \in I$.

Consideramos de nuevo la aplicación ϕ_x definida anteriormente. Debemos ver que $x \in \Delta$. Sea $a \in O_x \cap \Delta$ que existe pues $x \in \bar{\Delta}$ tenemos que $p^{-1}(a)$ tiene k elementos y como ϕ_x es biyectiva tenemos que $p^{-1}(y)$ tiene k elementos $\forall y \in O_x$ luego $x \in \Delta$.

8. Sean $p_1 : X \longrightarrow Y$ y $p_2 : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones recubridoras. Prueba que si $p_2^{-1}(z)$ es finito para todo $z \in Z$, entonces $p_2 \circ p_1 : X \longrightarrow Z$ es una aplicación recubridora.

Debemos probar varias cosas; la primera es que $p_2 \circ p_1$ es continua, pero eso es trivial pues p_1 y p_2 lo son por ser aplicaciones recubridoras.

Veamos que $p = p_2 \circ p_1$ es sobreyectiva. Sea $z \in Z$, como p_2 es sobreyectiva, sabemos que $\exists y \in Y$ con $p_2(y) = z$ y como $y \in Y$ y p_1 es sobreyectiva sabemos que $\exists x \in X$ con $p_1(x) = y$ entonces $p_2(p_1(x)) = p_2(y) = z$ luego p es sobreyectiva.

Veamos que, para cada $z \in Z$ existe un abierto regularmente recubierto. Como p_2 es recubridora, sabemos que $\exists O_z \subset Z$ con $z \in O_z$ reg. recubierto de manera que $\exists \{A_i\}_{i \in I}$ tal que $p^{-1}(O_z) = \biguplus_{i \in I} A_i = \biguplus_{i=1}^{n} A_i$ con $n \in \mathbb{N}$, es decir, una cantidad finita; pues en el ejercicio anterior probamos, sin necesidad de conexión que si tengo un abierto formado por elementos con preimagen finita entonces I era finito, de hecho, el mismo cardinal que cualquiera de esos elementos.

Como es finito, podemos aplicar que p_1 es recubridora a cada $y \in A_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ y obtener que $p^{-1}(O_y) = \biguplus_{j \in I_i} A_j$ $\forall y \in A_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ obteniendo así lo que se buscaba.

9. Consideremos una aplicación recubridora $p : R \longrightarrow B$ y la relación de equivalencia $\mathcal{R}_p$ en R dada por

$$r_1 \, \mathcal{R}_p \, r_2 \Leftrightarrow p(r_1) = p(r_2).$$

Demuestra que $R/\mathcal{R}_p$ es homeomorfo a B.

Antes de nada vamos a estudiar el conjunto cociente para definir el homeomorfismo; sea $a \in R$, su clase de equivalencia, que notaremos por $[a]$ viene dada por

$$[a] := \{ r \in R : p(r) = p(a) \}$$

Construimos el homeomorfismo

$$\varphi : R/_{R_p} \longrightarrow B$$
$$[a] \longmapsto p(a)$$

veamos que está bien definida y que es homeomorfismo.

i) Bien definida: sean $a, b \in R/_{R_p}$ con $[a] = [b]$, claramente $p(a) = p(b)$ luego la imagen por φ no depende del representante.

ii) Como p es recubridora, sabemos que φ es continua y sobreyectiva luego sólo queda por ver que φ es inyectiva.

Sean $a, b \in R$ con $\varphi([a]) = \varphi([b])$, veamos que $[a] = [b]$. Como $p(a) = \varphi([a]) = \varphi([b]) = p(b)$ es claro ya que $[a] = [b]$.

Entonces tenemos ya el homeomorfismo. Falta por ver que es abierta, pero p lo es por el ej. 6.

10. Sea $p : R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, con R arcoconexo y B simplemente conexo. Prueba que p es un homeomorfismo.

Sabemos que p es continua, sobreyectiva y abierta por el ejercicio 6, nos quedaría ver que p es inyectiva. Es decir, supuesto que $a,b \in R$ cumplen que $p(a)=p(b)=z$ entonces $a=b$.

Supongamos que $a,b \in R$ tienen $p(a)=p(b)$, como R es arcoconexo sabemos que $\exists \alpha : [0,1] \longrightarrow R$ arco que une a con b de manera que $p\circ\alpha$ es un arco de B que une $p(a)$ con $p(b)$, es decir, es $[\varepsilon_z]=[p\circ\alpha]$ por ser B simplemente conexo.

Considerando ahora $\beta : [0,1] \longrightarrow R$ el levantamiento de ε_z, sabemos que cumple ser continua y que $p\circ\beta = \varepsilon_z$.

Supongamos que $\exists t \in [0,1]$ tal que $\beta(t) \notin p^{-1}(z) \Rightarrow p(\beta(t)) \neq z = \varepsilon_z(t) \Rightarrow \beta$ no es levantamiento y por tanto $\beta([0,1]) \subseteq p^{-1}(z)$.

Usando el ejercicio 5, sabemos que $p^{-1}(z)$ sigue la topología discreta entonces, necesariamente β debe ser constante.

Si fijamos a como preimagen de z, sabemos que existen únicos levantamientos de $p\circ\alpha$ y ε_z que empiezan en x. Como $\alpha(0)=x$ y α es un levantamiento de $p\circ\alpha$, entonces α es el levantamiento buscado. Para ε_z, podemos considerar β definido anteriormente con $\beta(0)=x$ que debe ser constante, es decir, $\beta=\varepsilon_a$.

Como $[p\circ\alpha]=[\varepsilon_z]$ tenemos entonces que $\beta=\alpha$ y por tanto, $b=\alpha(1)=\beta(1)=a$ y por tanto, p es inyectiva como se quería.

11. Dado un espacio topológico Y, prueba que estas afirmaciones son equivalentes:

a) Y es contráctil.

b) Para cualesquiera $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas se tiene que f y g son homotópicas.

c) Cada aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es nulhomótopa.

d) La identidad Id_Y es nulhomótopa.

e) Cada conjunto $\{y_0\}$ con $y_0 \in Y$ es un retracto de deformación de Y.

a => b)

Si Y es contráctil entonces $\exists x_0 \in Y$ tal que $\{y_0\}$ es retracto de deformación de X. En particular, como es contráctil, por un teorema visto en clase tenemos que Y es simplemente conexo luego $\Pi_1(Y)=[\varepsilon_{x_0}]$. Entonces todo arco es homotópico a ε_{y_0}.

Por tanto, al ser $\{y_0\}$ retracto de deformación sabemos que $\exists H : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ continua de forma que

$$H(y,0)=y \quad \wedge \quad H(y,1)=y_0 \quad \forall y \in Y$$

Sean $f,g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, vamos a definir su homotopía $H' : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ dada por

$$H'(s,t)=\begin{cases} H(f(s),2t) & \text{si } t\in[0,\tfrac{1}{2}] \\ H(g(s),2(1-t)) & \text{si } t\in[\tfrac{1}{2},1] \end{cases}$$

Claramente es continua por el lema de pegado y cumple las condiciones de homotopía.

__b=>c)__ Si cualesquiera dos aplicaciones de $X \xrightarrow{f,g} Y$ son homotópicas entonces, basta tomar $g: X \longrightarrow \{y_0\} \subset Y$ para ver que f es nulhomótopa, pues g es cte.

__c=>d)__ Como la $Id_Y: Y \longrightarrow Y$ es continua, por c) es nulhomótopa.

__d=>e)__ Como Id_Y es nulhomótopa entonces tenemos que $\exists H: Y\times[0,1] \longrightarrow Y$, $\exists c\in Y$ tal que

$$H(y,0)=y \quad \wedge H(y,1)=c$$

Entonces, si $c'\in Y$ es otro elemento, basta considerar la homotopía

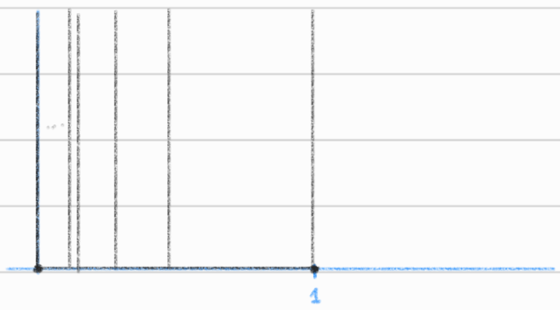
$$H'(s,t)=\begin{cases} H(s,2t) & \text{si } t\in[0,\tfrac{1}{2}] \\ (\tfrac{1}{2}-\tfrac{t}{2})c+tc' & \text{si } t\in[\tfrac{1}{2},1] \end{cases}$$

que es homotopía y cumple que $H'(s,0)=s$ $\forall s\in Y$ y $H'(s,1)=c'$. Por tanto, $\{c'\}$ es retracto de deformación de Y. Realmente, lo que acabamos de probar es que $r: Y \longrightarrow \{c'\}$, $y \longmapsto c'$ continua es una retracción homotópica a la identidad en Y.

__e=>a)__ Si $\{y_0\}\subset Y$ es retracto de deformación $\Rightarrow$ Y contráctil por definición.

12. Prueba que $X=([0,1]\times\{0\})\cup((K\cup\{0\})\times[0,1])\subset\mathbb{R}^2$ es contráctil, donde $K=\{\frac{1}{m}:\ m\in\mathbb{N}\}$.

Para entender el problema es mejor representar gráficamente nuestro conjunto X.



Buscaremos usar alguno de los resultados del ejercicio 12. Pero, es claro que, si tomamos

$$K_m=\{\tfrac{1}{m}\}\times[0,1] \qquad \forall m\in\mathbb{N} \qquad K_0=\{0\}\times[0,1]$$

obtenemos que $H_m: K_m\times[0,1] \longrightarrow K_m$ dada por $H_m((x,y),t)=(x,(1-t)y)=(\frac{1}{m},(1-t)y)$

es una homotopía entre $c_m: K_m \longrightarrow \{(\frac{1}{m},0)\}$ y Id_{K_m}.

Para el caso K_0, definimos $H_0: K_0 \times [0,1] \longrightarrow K_0$ dada por $H_0((x,y),t) = (x,(1-t)y) = (0,(1-t)y)$.
Por tanto, $\forall m \in \mathbb{N}$ $\{(\frac{1}{m},0)\}$ es retracto de deformación de K_m y $\{(0,0)\}$ de K_0.

De esta forma, tenemos que $A = \{(\frac{1}{m},0) : m \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$ es retracto de deformación de $K \times [0,1]$ considerando la siguiente retracción:

$$\begin{aligned} r: X &\longrightarrow A \\ (x,y) &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

continua y homotópica a la identidad mediante la homotopía

$$\begin{aligned} H: X \times [0,1] &\longrightarrow X \\ ((x,y),t) &\longmapsto (x,y(1-t)) \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\{(0,0)\}$ es un retracto de deformación de X, consideramos la retracción

$$\begin{aligned} \bar{r}: X &\longrightarrow \{(0,0)\} \\ x &\longmapsto (0,0) \end{aligned}$$

claramente continua y construimos la homotopía a partir de la siguiente: Otra forma es ver que

$$\begin{aligned} \bar{H}: ([0,1] \times \{0\}) \times [0,1] &\longrightarrow ([0,1] \times \{0\}) \\ ((x,y),t) &\longmapsto ((1-t)x, y) = ((1-t)x, 0) \end{aligned}$$

como $[0,1] \times \{0\}$ es convexo entonces $(0,0)$ es retracto de deformación.

y nuestra homotopía es:

$$\hat{H}: X \times [0,1] \longrightarrow X$$
$$((x,y),t) \longmapsto \begin{cases} H((x,y),2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}] \text{ y } (x,y) \in K_m \\ \bar{H}((x,y),2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1] \text{ y } y=0 \end{cases}$$

que claramente es homotopía, cumple que $\hat{H}(s,0) = s$ $\forall s \in X$ y $\hat{H}(s,1) = (0,0)$ $\forall s \in X$.

Por tanto, $\{(0,0)\}$ es retracto de deformación de X y tenemos que X es contráctil.

13. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua. Definimos el conjunto:

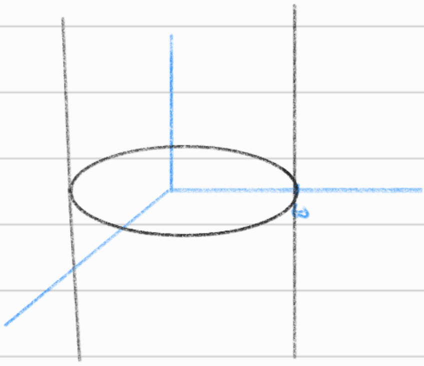
$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = f(z)^2\}.$$

a) Estudia el conjunto $S_f \cap \{z = z_0\}$ con $z_0 \in \mathbb{R}$.

b) Demuestra que cualesquiera dos conjuntos S_f son homeomorfos entre sí.

c) Calcula el grupo fundamental de S_f.

a) $S_f \cap \{z = z_0\}$ no es más que el cilindro de $\mathbb{R}^3$ con radio z_0.



b) Para ello, consideramos las aplicaciones, para cada $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continua:

$$g: S_f \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$$

$$h: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S_f$$
$$(x,y,z) \longmapsto (f(z)x, f(z)y, z)$$

Ambas es claro que son continuas. Además, basta comprobar que una es inversa de la otra para comprobar que g y h son homeomorfismos.

$$(g \circ h)(x,y,z) = g(f(z)x, f(z)y, z) = \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{f(z)^2(x^2+y^2)}}, \frac{f(z)(y)}{\sqrt{f(z)^2(x^2+y^2)}}, z\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$$

$(x,y) \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \|(x,y)\| = 1$

$\hookrightarrow = (x,y,z)$

$$(h \circ g)(x,y,z) = h\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right) = \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right) \overset{x^2+y^2=f(z)}{=} (x,y,z)$$

Luego, dadas $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, se tiene que $S_{f_1} \approx \mathbb{S}_1 \times \mathbb{R} \approx S_{f_2}$ luego tenemos lo buscado.

c) Como $S_f \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y sabemos que $\Pi_1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z} \Rightarrow \Pi_1(S_f) = \mathbb{Z}$ $\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continua.

14. Prueba que $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. ¿Son del mismo tipo de homotopía?

Si lo fuera existiría un homeomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times [0,\infty)$ de forma que

$$f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow (\mathbb{R} \times [0,\infty)) \setminus \{(0,0)\}$$

sería homeomorfismo, pero $(\mathbb{R} \times [0,\infty)) \setminus \{(0,0)\}$ es simplemente conexo y $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no lo es!!

Luego no son homeomorfos.

Para ver que son homotópicamente equivalentes basta probar que $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^2$:

Defino la siguiente retracción $r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times [0,\infty)$ dada por $r(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } y \geq 0 \\ (x,0) & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Claramente es continua en virtud del lema de pegado pues en cada cerrado es continua y coincide en la frontera común.

Ahora, defino la siguiente homotopía $H: \mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H((x,y),t) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } y \geq 0 \\ (x,(1-t)y) & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

igualmente es continua, $H((x,y),0)=(x,y)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ y $H((x,y),1)=(x,0)=r(x,y)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Por tanto, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ son del mismo tipo de homotopía.

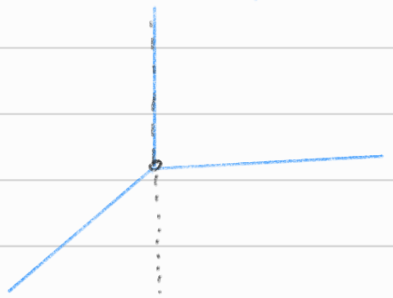
15. Sea S un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k \le n-2$. Calcula $\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus S)$.

Es mejor pensar en que $\mathbb{R}^3\setminus$ recta $=(\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\})\times\mathbb{R}$

Necesariamente sólo será no trivial si el subespacio tiene exactamente dimensión $n-2$.

Inducción como un paso

Veamos el problema para $\mathbb{R}^3$, es decir, tenemos la siguiente situación:



En $\mathbb{R}^2$:

Es claro que, para $n=0$ tiene grupo fundam. $\mathbb{Z}$.

Parece claro ya que, lo que estamos haciendo es crear un agujero que no se puede esquivar.

Vamos a tratar de demostrar que $\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus S)=\mathbb{Z}$. Estudiamos el caso $n\ge 2$, vamos a demostrar que $\mathbb{R}^n\setminus S\approx \mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$ que, voy a dar por sabido que es $\mathbb{Z}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $x\in S$ si $x=(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ pues simplemente habría que realizar una traslación y una rotación, es decir, isometrías.

Construimos el homeomorfismo $\phi:\mathbb{R}^n\setminus S\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$ dado por $\phi(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},1+x_n)$ que es un homeomorfismo pues es continua y $\psi(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},x_n-1)$ es su inversa que también es continua.

Luego, podemos concluir que $\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus S)=\mathbb{Z}$.

16. Prueba que si X es de Hausdorff y $A\subseteq X$ es un retracto de X, entonces A es cerrado en X. Deduce que una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ no es un retracto de $\mathbb{R}^n$. ¿Lo es una bola cerrada?

La pregunta es cierta, pues, de hecho, es un retracto de deformación, basta tomar

$$r:\mathbb{R}^n\longrightarrow \overline{B(0,1)} \qquad x\longmapsto \begin{cases}\frac{x}{\|x\|} & \text{si } x\notin\overline{B(0,1)}\\ x & \text{si } x\in\overline{B(0,1)}\end{cases}$$

$$H:\mathbb{R}^n\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n \qquad (x,t)\longmapsto H(x,t)=\begin{cases}(1-t)x+t\frac{x}{\|x\|} & t\in[0,1]\wedge x\in\overline{B(0,1)}\\ x & \text{si } x\in\overline{B(0,1)}\end{cases}$$

y H es homotopía entre $Id_{\mathbb{R}^n}$ y r pues $H(x,0)=x\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ y $H(x,1)=\begin{cases}\frac{x}{\|x\|} & \text{si } x\notin\overline{B(0,1)}\\ x & \text{si } x\in\overline{B(0,1)}\end{cases}$.

No es trivial que H es continua pero con ayuda del lema de pegado el lector debe poder hacerlo.

Vamos a probar ahora la implicación:

Si (X,T) es un esp topológico de Hausdorff y $A\subset X$ un retracto $\Rightarrow$ A es cerrado en X

Supongamos que X es Hausdorff, es decir, dados $x,y\in X$ $\exists V_x, V_y\subset X$ entornos tales que $V_x\cap V_y=\emptyset$. Sea, además, $A\subset X$ un retracto de X, es decir:

$$\exists r: X \longrightarrow A \quad \text{continua} \mid r(a)=a \ \forall a\in A.$$

Ahora bien, sea $x\in X\setminus A$, buscamos $U_x \subset X$ un abierto que contenga a x y no interseque a A. Como X es Hausdorff, para cada $a\in A$ $\exists\, \mathcal{U}_a$ abierto de X con $a\in \mathcal{U}_a$ y $\mathcal{U}_x$ con $x\in \mathcal{U}_x$ disjuntos. Ahora bien, como r es continua y sobreyectiva tenemos que $r(x)\in A$ y $a_0 = r(x)\neq x$ pues $x\notin A$. Como X es Hausdorff puedo encontrar $\mathcal{U}_{a_0}\subset A\subset X$ con $a_0\in A$ y $\mathcal{U}_{a_0}\cap \mathcal{U}_x=\emptyset$.

Entonces, basta usar que r es continua para obtener que $x\in r^{-1}(\mathcal{U}_{a_0})\cap \mathcal{U}_x \in X\setminus A$. Veamos esto último, supongamos que $(r^{-1}(\mathcal{U}_{a_0})\cap \mathcal{U}_x)\cap A\neq\emptyset \Rightarrow \mathcal{U}_x\cap A\neq 0$ pues $(r^{-1}(\mathcal{U}_{a_0})\cap\mathcal{U}_x)\subset \mathcal{U}_x$ lo cual es una contradicción con la elección de los entornos al principio de la demostración.

Podemos ya realizar la deducción, y es fácil deducir ya que $B(0,1)$ no puede ser un retracto de $\mathbb{R}^4$.

17. En este ejercicio demostraremos que *un abierto de* $\mathbb{R}^2$ *no puede ser homeomorfo a un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *si* $n\geq 3$. Supongamos que $f: U\longrightarrow V$ es un homeomorfismo entre abiertos no vacíos $U\subset\mathbb{R}^n$ y $V\subset\mathbb{R}^2$ con $n\geq 3$.

   a) Prueba que existen bolas abiertas $B_1\subset U$ y $B_2, B_2'\subset V$ (estas últimas con el mismo centro $y_0\in\mathbb{R}^2$) tales que $\overline{B_2'}\subset f(\overline{B_1})\subset \overline{B_2}$.

   b) Si $i: \overline{B_2'}-\{y_0\}\longrightarrow \overline{B_2}-\{y_0\}$ es la inclusión, deduce de *a*) que el homomorfismo inducido en cualquier punto i_* es trivial.

   c) Prueba que $\overline{B_2'}-\{y_0\}$ es un retracto de deformación de $\overline{B_2}-\{y_0\}$. Concluye que i_* es un isomorfismo no trivial, lo que contradice *b*).

a) Como V es abierto, $\exists B_2\subset V$ bola abierta con $\overline{B_2}\subset V$. Como f es continua sabemos que $f^{-1}(B_2)$ es abierto en $\mathcal{U} \Rightarrow \exists B_1\subset \mathcal{U}$ bola abierta con $B_1\subset f^{-1}(B_2)\subset\mathcal{U}$ centrada en $f^{-1}(c)$ centro de B_2. Ahora bien, como f es abierta y $f^{-1}(c)\in B_1 \Rightarrow f(B_1)$ es un abierto en U contenido en B_2 que contiene a c luego $\exists B_2'\subset f(B_1)$ bola abierta centrada en c de forma que ya tenemos lo que queremos.

b) Supuesto que a) está demostrado, sabemos que $\overline{B_2'}$ y $\overline{B_2}$ son conjuntos simplemente conexos y que podemos extender i de la siguiente forma

$$g: \overline{B_2'} \longrightarrow \overline{B_2}-\{y\} \quad \text{con } y\notin \overline{B_2'}$$
$$x \longmapsto x$$

sigue siendo continua. Ahora bien, como $\overline{B_2'}$ es simplemente conexo y $\overline{B_2}$ es también simplemente conexo, tenemos que $g_*(\alpha)=[\varepsilon_x]$ para algún $x\in\overline{B_2'}$ por $\overline{B_2'}\subset\overline{B_2}$. Ahora bien, es claro que

$$\begin{tikzcd}
\Pi(\overline{B_2'}-\{y_0\}) \arrow[rrr, "i_*"] \arrow[dr, "\hat{i}_*"'] & & & \Pi(\overline{B_2}-\{y_0\}) \\
& \Pi(\overline{B_2'}) \arrow[r, "g_*"'] & \Pi(\overline{B_2}-\{y\}) \arrow[ur, "h \text{ homeom.}"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego como $\Pi(B_2')=[\varepsilon_{y_0}]$ tenemos que $i_*(\alpha)=(g_*\circ\hat{i}_*)(\alpha)=g_*(\hat{i}[\alpha])=g_*[\varepsilon_{y_0}]=[\varepsilon_{y_0}]$

Profesor:

Sea α un lazo basado en $x_0\in\overline{B_2'}\setminus\{c\}$, queremos demostrar que $i_*([\alpha])=[\varepsilon_{x_0}]$. Tomamos la curva continua $f^{-1}\circ\alpha$ que es un arco con base en $f^{-1}(x_0)$ y $\mathrm{Im}(f^{-1}\circ\alpha)\subset f^{-1}(\overline{B_2'}-\{c\})\subset\overline{B_1}-\{f^{-1}(c)\}$.

Como $f^{-1}\circ\alpha$ es un lazo en $\overline{B}_1\setminus\{f^{-1}(c)\}$ y $\pi_1(\overline{B}_1\setminus\{f^{-1}(c)\})$ es trivial $\Rightarrow [f^{-1}\circ\alpha]=[\varepsilon_{f^{-1}(x_0)}]$. Entonces usando f, tenemos que $[\alpha]=[\varepsilon_{x_0}]$ donde la homotopía se mueve en $f(\overline{B}_1\setminus\{f^{-1}(c)\})\subset\overline{B_2}\setminus\{c\}$

c) Para probar que $\overline{B_2'}-\{y_0\}$ es retracto de deformación de $\overline{B_2}-\{y_0\}$ basta considerar, si δ_1 es el radio de $\overline{B_2'}$ y δ_2 el de $\overline{B_2}$, la retracción:

$$r:\overline{B_2}-\{y_0\}\longrightarrow\overline{B_2'}-\{y_0\}$$
$$x\longmapsto r(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\overline{B_2'}-\{y_0\}\\ x-(\delta_2-\delta_1)(x-y_0) & \text{si } x\notin\overline{B_2'}-\{y_0\}\end{cases}$$

que está bien definida gracias a que ambas bolas están centradas en y_0 y es continua por el lema de pegado ya que coinciden en las fronteras de los conjuntos cerrados de cada parte.
Ahora bien, la homotopía pedida es la siguiente.

$$H(x,t)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\overline{B_2'}-\{y_0\}\\ (1-t)x+t\,[x-(\delta_2-\delta_1)(x-y_0)] & \text{si } x\notin\overline{B_2'}-\{y_0\}\end{cases}$$

que es continua por serlo r, ya que, si $x\notin\overline{B_2'}-\{y_0\}\Rightarrow H(x,t)=(1-t)x+t\,r(x)$ $\forall t\in[0,1]$. De nuevo, el lema de pegado nos da la continuidad. Entonces hemos probado que $\overline{B_2'}-\{y_0\}$ es un retracto de deformación de $\overline{B_2}-\{y_0\}$ lo cual, por un teorema de clase, nos permite deducir que la inclusión

$$i:\overline{B_2'}-\{y_0\}\longrightarrow\overline{B_2}-\{y_0\}$$

induce un isomorfismo de grupos //.

18. Demuestra que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - \operatorname{arctg}(x^2 - y^3) = 2, \\ \cos(x) + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2} + \dfrac{1}{y} = -5. \end{cases}$$

tiene al menos una solución en $\mathbb{R}^2$.

Vamos a verlo usando el teorema del punto fijo de Brouwer. El sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x \\ f_2(x,y) = y \end{cases}$$

donde $f_1(x,y) = 2 + \operatorname{arctg}(x^2 - y^3)$ y $f_2(x,y) = \dfrac{-1}{5 + \cos x + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2}}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.

Veamos si se cumplen las condiciones para $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \longmapsto (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

(i) $f: \bar{D} \longrightarrow \bar{D}$, no se cumple pero $\|f(x,y)\|$ está acotado, es decir, $\exists R > 0 \mid \|f(x,y)\| \leq R$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$.

entonces $f_{|\bar{B}(0,R_0)} : \bar{B}(0,R_0) \longrightarrow \bar{B}(0,R_0)$ continua que sí cumple la condición.

Luego $\exists (x_0,y_0) \in \bar{B}(0,R_0) \subset \mathbb{R}^2$ de forma que $f(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$. Ahora bien, si $y_0 \neq 0$ resuelve el primer sistema, pero por definición de f tenemos que $y_0 < 0$.

19. Sean M una matriz cuadrada real de orden 3 por 3 cuyas entradas son números reales positivos y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(v) = Mv$. Demuéstrese que:

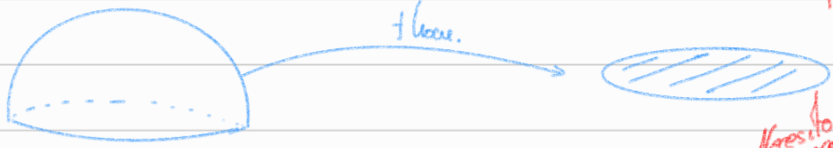
   a) El conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ es homeomorfo al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$.

   b) La aplicación $g : A \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $g(v) = f(v)/|f(v)|$ está bien definida y $g(A) \subset A$.

   c) f tiene un valor propio real y positivo.

a) La situación que nos plantea el ejercicio es la siguiente:

Hemos considerado un conjunto malo pero la idea es la misma



La idea para el otro homeomorfismo

Necesitamos un homeom del borde $\to$  $\to$ convexos.

El homeomorfismo es claro, basta tomar f como la proyección al plano; por lo general no es homeomorfismo, pero $f(x,y,z)=(x,y,0)$ $\forall (x,y,z) \in A$ en este caso es biyectiva, como añadido, las proyecciones son abiertas luego, en este caso, es un homeomorfismo.

y que $\|f(v)\| \neq 0$. $\Leftrightarrow v=0$ $\downarrow$ falso, sea de la esfera.

b) Para ver que la aplicación está bien definida, debemos probar que, para $v \in A$ $g(v) \in \mathbb{S}^2$. Asumiendo que f lo está por ser lineal, sólo debemos probar que $\|g(v)\|=1$ y que si $v=(x,y,0)$ con $x,y \geq 0$ entonces $g(v)$ tiene coordenadas no negativas.

Esto último es claro, pues en virtud del producto de matriz por vector, si $M=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ con $a_i \geq 0, b_i \geq 0, c_i \geq 0$ $\forall i \in \{1,2,3\}$ entonces $Mv=(w_1,w_2,w_3)$ con $w_i \geq 0$ $\forall i \in \{1,2,3\}$

Por último, debemos probar que $\|g(v)\|=1$, pero tenemos que $\|g(v)\|=\frac{\|Mv\|}{\|Mv\|}=1$.

Por tanto, ya hemos probado lo que se pedía.

c) Del teorema del punto fijo de Brouwer deducimos que debe haber, al menos, un punto fijo; pues hemos probado que $g: A \longrightarrow A$ y $A \approx \overline{D}$ luego hay, al menos, un punto fijo luego $\exists v \in A \mid g(v)=v$ luego $\lambda=1$ es un valor propio real y positivo de g

Entonces $v=\frac{Mv}{\|Mv\|} \Rightarrow \|Mv\| v = Mv = f(v)$ luego, $\|Mv\| > 0$ es valor propio de f.

Duda: ¿Realmente estoy usando bien la definición de valor propio?

20. Teorema de Lusternik-Schnirelmann. Demuestra que si $\mathbb{S}^2$ es la unión de tres subconjuntos cerrados C_1, C_2, C_3, entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas. Para ello prueba que la función $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x) = (\text{dist}(x, C_1), \text{dist}(x, C_2))$$

tiene un punto $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, donde $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ denota la función distancia en $\mathbb{R}^3$.

Claramente f es continua pues lo es componente a componente, ya que las funciones distancia lo son en $\mathbb{R}^n$ $n \geq 3$ (para no pillarme los dedos). Luego aplicando el Teorema de Borsuk-Ulam sabemos que $\exists x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, esto quiere decir:

$$\begin{cases} dist(x_0, C_1) = dist(-x_0, C_1) \\ dist(x_0, C_2) = dist(-x_0, C_2) \end{cases}$$

Distinguimos tres casos:

·) Si $dist(x_0, C_1), dist(x_0, C_2) > 0 \Rightarrow x_0, -x_0 \in C_3$

·) Si $dist(x_0, C_1) = 0 \Rightarrow x_0, -x_0 \in C_1$

·) Si $dist(x_0, C_2) = 0 \Rightarrow x_0, -x_0 \in C_2$

22. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \Omega(X, x_0)$ con $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$. Entonces $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$.

b) Sea $f : A \longrightarrow Y$ una aplicación continua con $A \subset X$ y X simplemente conexo. Si existe $F : X \longrightarrow Y$ continua con $F_{|A} = f$, entonces f_* es trivial.

c) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y nulhomótopa, entonces f_* es trivial.

d) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y no sobreyectiva, entonces es nulhomótopa.

e) Si X es simplemente conexo y $A \subset X$ un retracto de X, entonces A es simplemente conexo.

f) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e inyectiva con $f(x_0) = y_0$ entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un monomorfismo.

g) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una equivalencia homotópica y $A \subset X$. La restricción $f_{|A} : A \longrightarrow f(A)$ es una equivalencia homotópica.

h) $\mathbb{S}^1$ no tiene ningún retracto de deformación $A \neq \mathbb{S}^1$.

i) Existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que intercambia las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{S}^1$.

j) Si A es un retracto del disco unidad cerrado de $\mathbb{R}^2$, entonces toda aplicación continua $f : A \longrightarrow A$ tiene al menos un punto fijo.

g) La afirmación es falsa, podemos tomar $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $Y = \mathbb{S}^2$, $f: X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto \frac{x}{|x|}$ equiv. homotópica

$A = X \setminus \{(2,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(2,0)\}$

$\pi_1(A) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ y $f(A) = \mathbb{S}^1 \Rightarrow \pi_1(f(A)) \cong \mathbb{Z}$

Recuerda que para que sean homotóp. equivalentes necesitamos que A y $f(A)$ tengan mismo grupo fundamental.

d) Es cierta (porque deformamos en $\mathbb{S}^n$ menos $f(X)$). componiendo con la proyección estereográfica y paso a $\mathbb{R}^n$ que es simplemente conexo.

Otra forma es hacer la homotopía para el retracto de deformación y lo importante es que el punto que quito de la esfera no está en la imagen.

21. Calcula $\pi_1(X)$ en los siguientes casos:

a) $X = \mathbb{S}^2 \cup (\mathbb{D} \times \{0\})$.

b) $X = (\mathbb{S}^1 \times [-1,1]) \cup (\mathbb{D} \times \{-1,1\})$.

c) $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = (z+1)^2,\ -1 \le z \le 0\} \cup (\mathbb{S}^2 \cap \{z \ge 0\})$.

d) $X = S_1 \cup S_2 \cup L$, donde S_1, S_2 son cerrados disjuntos simplemente conexos de $\mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^n$ es un segmento tal que $L \cap S_i = \{x_i\}$, $i = 1,2$.

e) $X \subset \mathbb{R}^3$ es la unión de una circunferencia y de una esfera que se tocan en un único punto.

f) $X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2+(z-2)^2 = 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2+(z+2)^2 = 1\}$.

g) $X = S_1 \cup (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son, respectivamente, las esferas de radio 1 centradas en el $(0,-2,0)$ y en el $(0,2,0)$.

h) $X \subset \mathbb{R}^2$ es la unión de las tres circunferencias de radio 1 centradas en los puntos $(-2,0)$, $(0,0)$ y $(2,0)$.

i) $X = \mathbb{S}^1 \cup [(-1,0),(1,0)]$.

En este ejercicio buscamos usar dos resultados clave para el cálculo de grupos fundamentales

1. X e.t, $U, V \subset X$ abtos.

i) $U \cup V = X$

ii) U, V simp. conexos $\Rightarrow X$ simplemente conexo

iii) $U \cap V$ arcoconexo no vacío

2. Seifert-van Kampen:

X e.t, $U, V \subset X$ abtos $\qquad j : \pi_1(U,x_0) * \pi_1(V,x_0) \longrightarrow \pi_1(U \cup V, x_0)$

i) $U \cup V = X$ $\qquad$ sobrey.

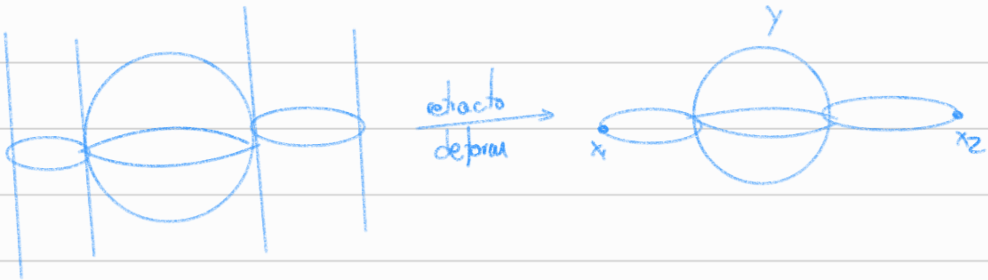
ii) $U, V, U \cap V$ arcoconexos $\Rightarrow$ $\ker(j) = \langle R \rangle_N = \langle \{ i_{1*}(g)^{-1} i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0) \} \rangle_N$

$$\pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(U,x_0) * \pi_1(V,x_0)}{\langle R \rangle_N}$$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "j_1"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & U \cup V = X \\ & V \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

$x_0 \in U \cap V$

f) X:



$U = Y \setminus \{x_1\}$
$V = Y \setminus \{x_2\}$ son abtos, $U \cup V = Y$, $U, V, U \cap V$ son arcoconexos, de hecho $U \cap V$ es simplemente conexo tenemos que $\pi_1(Y, x_1) \cong \pi(U) * \pi(V)$

$\pi_1(U)$?

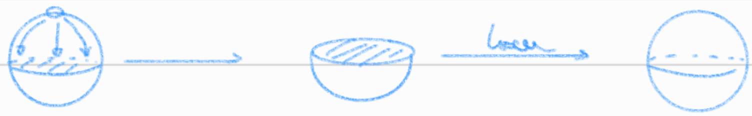
$\Rightarrow \pi_1(U) \cong \mathbb{Z} \cong \pi(V)$

son homeomorfos

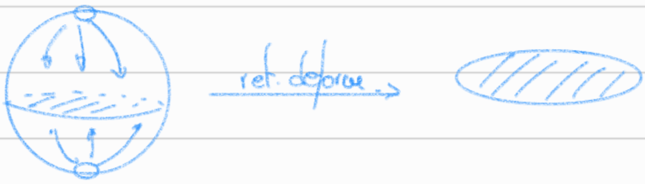
a) $X = S^2 \cup (D \times \{0\})$

Sea $x_0=(0,0,1)$, $x_1=(0,0,-1)$ consideramos $\mathcal{U} = X \setminus \{x_0\}$, $V = X \setminus \{x_1\}$ que claramente son abiertos, con $\mathcal{U} \cup V = X$, $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$. Claramente $\mathcal{U} \approx V$ por tanto, solo estudiaremos $\mathcal{U}$.

i) $\mathcal{U}$ simplemente conexo pues es del mismo tipo de homotopía que S^2 pues es homeomorfo al siguiente retracto de deformación.

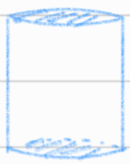


ii) $\mathcal{U} \cap V$ es arcoconexo. De hecho es simplemente conexo pues $\bar{D} \times \{0\}$ es retracto de deformación



Por tanto, por el teorema antes enunciado (o por SvK) $\pi_1(X, (0,0,0)) \cong \{0\}$

b) $X \approx S^2$ luego es simplemente conexo



Se puede hacer también por SvK y por el teorema.

c) El conjunto es un cono elíptico con vértice en $(0,0,1)$ de forma que se une con la mitad superior de la esfera.

$V = X \setminus \{x_2\}$

Tomamos $\mathcal{U} = X \setminus \{x_1\}$, se cumple todo y basta con calcular su grupo fundamental. Un retracto de deformación es el punto x_2

Aplicando el teoremilla tenemos que es simplemente conexo

d)

$\mathcal{U} = X \setminus \{y_1\} \longrightarrow$ ret. def. es $S_2 \Rightarrow \mathcal{U}$ sc

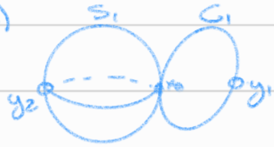
$V = X \setminus \{y_2\} \longrightarrow$ ret def es $S_1 \Rightarrow V$ sc

$\mathcal{U} \cap V = X \setminus \{y_1, y_2\} \longrightarrow$ ret def es $L \Rightarrow \mathcal{U} \cap V$ sc

$\mathcal{U} \cup V = X$

Por el teoremilla sale sc.

e)



Consideramos $\mathcal{U} = X \setminus \{y_1\} \to$ ret. def $S_1 \Rightarrow \mathcal{U}$ sc

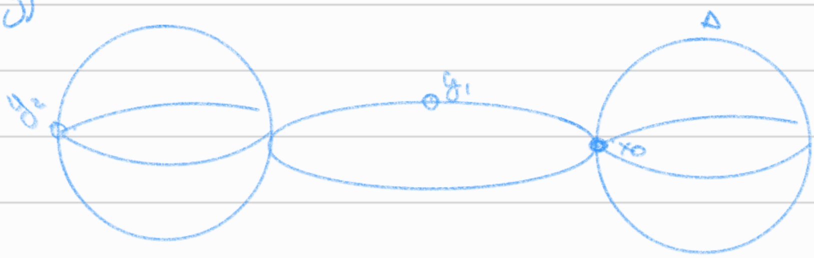
$V = X \setminus \{y_2\} \to$ ret def $C_1 \Rightarrow \pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$

$\mathcal{U} \cap V = X \setminus \{y_1, y_2\} \Rightarrow$ ret def $\{x_0\} \Rightarrow \mathcal{U} \cap V$ sc

$\mathcal{U} \cup V = X$

$S_vK \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$

g)



$\mathcal{U} = X \setminus \{y_1\}$ sc por d)

$U = X \setminus \{y_2\} \to \mathbb{Z}$ por e)

$\mathcal{U} \cap U = X \setminus \{y_1, y_2\} \to$ sc A rcld

$\mathcal{U} \cup U = X$

$S_vK \to \pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$