5. Sea Ω un dominio, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y $1/f$?

Distinguimos posibilidades:

i) Supongamos que f tiene un punto regular en a. Distinguimos casos:

- Si $f(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ tiene un punto regular en a
- Si $f(a) = 0 \Rightarrow$ por la caracterización de los ceros $\exists m \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $h(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m h(z)$ $\forall z \in \Omega$. Entonces $\frac{1}{f}$ tendrá un polo en a pues

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^m h(z)} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

- Supongamos ahora que f tiene un polo de orden $k \in \mathbb{N}$. Entonces, por la caracterización de los polos $\exists \varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\varphi(a) \neq 0$ de manera que $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$ $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$ entonces $\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^k}{\varphi(z)}$ $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$, es decir, $\frac{1}{f}$ tiene un ~~polo~~ cero en a.

- Supongamos que f tiene una singularidad esencial en a. Entonces $f(D(a,\delta) \setminus \{a\})$ es denso en $\mathbb{C}$ $\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists \{z_n\} \to a$ y $\{f(z_n)\} \to 1$ $\wedge$ $\exists \{w_n\} \to a$ y $\{f(w_n)\} \to \infty$ entonces $\{\frac{1}{f(w_n)}\} \to 0$ entonces $\frac{1}{f}$ no diverge en a y tampoco tendrá límite. Entonces $\frac{1}{f}$ no tiene un polo en a ni un punto regular luego tiene una sing. esencial

7. La función f es holomorfa en un entorno del punto a y otra función g tiene un polo de orden m en el punto $f(a)$. ¿Cómo se comporta en a la composición $g \circ f$? ¿Qué ocurre si $f(a)$ es una singularidad esencial en de g?

Distinguimos casos:

i) Si f es constante la composición puede no estar definida

ii) Si f no es constante

$$\lim_{z \to a} g(f(z)) = \infty \Rightarrow g \circ f \text{ tiene un polo en } a$$

Como g tiene un polo en $f(a)$ de orden $m \Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{H}(V)$, V entorno de $f(a)$, con $\varphi(f(a)) \neq 0$ tal que $g(w) = \frac{\varphi(w)}{(w - f(a))^m}$. Sea ahora $k \in \mathbb{N}$ el orden del cero de la función $f(z) - f(a)$ en a. Entonces $\exists h \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ entorno de a, con $h(a) \neq 0$ y $f(z) - f(a) = (z-a)^k h(z)$ $\forall z \in \mathcal{U}$ luego

$$g(f(z)) = \frac{\varphi(f(z))}{(f(z) - f(a))^m} = \frac{(\varphi \circ f)(z)}{(z-a)^{mk} h^m(z)} \Rightarrow g \circ f \text{ tiene un polo de orden } m \cdot k \text{ en } a.$$

Supongamos que g tiene una singularidad esencial en a. Como f no es constante y $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, el teorema de la app abierta nos dice que $\exists r > 0 \mid D(f(a), r) \subset f(\mathcal{U})$.

Dado $\delta > 0 \mid D(a,\delta) \subset \mathcal{U}$ entonces $\exists r_\delta > 0 \mid D(f(a), r_\delta) \setminus \{f(a)\} \subset f(D(a,\delta))$

en los anillos $A(1; 0, 2)$ y $A(1; 2, \infty)$.

3. En cada uno de los siguientes casos, clasificar las singularidades de la función f y determinar la parte singular de f en cada una de sus singularidades.

(a) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^n} \quad \forall, z \in \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Definimos $h: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto 1-\cos z$, $h \in H(\mathbb{C})$. $0 \in Z(h)$ y además, usando el desarrollo de Taylor de h centrado en 0:

$$h(z)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} z^{2k}}{(2k)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

vemos que el cero es de orden 2. De esta forma, sabemos por la caracterización de los ceros que

$$f(z)=\frac{z^2 \cdot g(z)}{z^n} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

donde $g \in H(\mathbb{C})$ y $g(0) \neq 0$

Podemos ya concluir que en 0 hay un polo de orden $n-2$ pues

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^{n-2}\, g(z)}{z^{n-2}} \neq 0$$

y existe por la holomorfía de g.

Para conseguir la parte singular de f basta obtener el desarrollo en serie de h centrado en 0 que conocemos para obtener que

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} z^{2k-n}}{(2k)!} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n/2} \frac{(-1)^{2k+1} z^{2k-n}}{(2k)!}}_{\text{parte singular}} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} z^{2k-n}}{(2k)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(b) $f(z) = z^n \operatorname{sen}(1/z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N})$

Aquí es claro que tenemos una singularidad esencial en 0 y para ello, buscamos probar que no hay un punto regular ni tampoco un polo.

- No hay un polo: Si lo hubiera sería de orden $n \in \mathbb{N}$, entonces por la caracterización de los polos $\lim_{z \to 0} z^n z^n \sin(\frac{1}{z}) \neq 0$ lo cual es falso pues ni siquiera existe ese límite.

  Otra forma de verlo es suponer que $\exists \varphi \in H(\mathbb{C})$ tal que

  $$f(z)=\frac{\varphi(z)}{z^n}$$

  Pero, en ese caso, $\varphi(z)= z^{2n} \sin(\frac{1}{z})$ que no es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, no hay un polo.

- No hay un punto regular: Si hubiera un punto regular tendríamos que $c_{-n}=0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pero vamos a ver que esto no es así:

$$\sin(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

Tomando ahora $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ tenemos que:

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{2n+1}} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{2n+1-n}} = \underbrace{\sum_{n=\frac{n-1}{2}+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{n-2n-1}}_{\text{parte singular.}} + \sum_{n=0}^{n-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{n-2n-1}$$

Por tanto, tenemos una singularidad esencial en 0.

(c) $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\} = \Omega$

En este caso, hay dos puntos problemáticos

$z = 0$

En este caso, tenemos un polo de orden 1 pues es claro que

$$\frac{\log(1+z)}{z^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\log(1+z)}{z} \quad \forall z \in \Omega$$

Entonces, vamos a usar la caracterización de los polos:

$$\lim_{z \to 0} z \cdot \frac{\log(1+z)}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

$z = -1$

En este caso, vamos a probar que hay una singularidad esencial.

- No hay punto regular:

$$\lim_{z \to -1} \frac{z \log(1+z)}{z^{\cancel{2}}} = -\lim_{z \to -1} \log(1+z) = \nexists$$

- No hay polo: si lo hubiera, tendríamos la existencia de $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{-1\})$ de forma que $\varphi(-1) \neq 0$ y

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^n} \quad \forall z \in \Omega \cup \{-1\}$$

como n es el orden del polo tenemos varios casos.

Si $n = 1$:

$$\frac{\log(1+z)}{z} = z f(z) = \varphi(z) \notin \mathcal{H}(\Omega \cup \{-1\}) \,!!$$

Si $n = 2$, $\log(1+z) \notin \mathcal{H}(\Omega \cup \{-1\})$!!

Si $n > 2$ $z^{n-2} \log(1+z) \notin \mathcal{H}(\Omega \cup \{-1\})$!!

Por tanto, hay una singularidad esencial en -1.

Usando el cambio de variable $w = 1+z$ y la serie de Mercator tenemos que

$$f(w-1) = \begin{cases} \text{- Aplicar mercator} \to \text{hay que sabérsela o saber sacarla} \\ \text{- juntar y separar en parte singular y regular.} \end{cases}$$

(d) $f(z) = \dfrac{1}{z\left(1 - e^{2\pi i z}\right)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Para $z=0$ vamos a ver que hay un polo de orden 2.

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^{\cancel{2}}}{\cancel{z}(1-e^{2\pi i z})} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{(1-e^{2\pi i z})} = 1$$

Para $z\neq 0$ vamos a ver que son polos simples

no sé como probarlo

$$\lim_{z\to k} \frac{z-k}{z(1-e^{2\pi i z})} = \lim_{z\to k} \frac{\cancel{z}}{\cancel{z}(1-e^{2\pi i z})} - \lim_{z\to k} \frac{k}{z(1-e^{2\pi i z})} = \frac{-1}{2\pi i k}$$

(e) $f(z) = z \operatorname{tg} \dfrac{2\pi z + \pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

8. Sea U un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{C}$ y supongamos que $f \in \mathcal{H}(U)$ tiene un polo en a. Probar que existe $R > 0$ tal que $\mathbb{C} \setminus D(0, R) \subset f(U)$.

Como f tiene un polo en a de orden $n \in \mathbb{N}$, usando la caracterización de los polos sabemos que:

$$c_{-n} \neq 0 \quad y \quad c_{-k} \text{ con } k > n = 0$$

luego $f(z) = \sum_{k=-n}^{0} c_k (z-a)^k + r(z)$ donde $r(z)$ es la parte regular

Por otro lado, usando que $\mathcal{U}$ es un dominio y $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, por el Teorema de la aplicación abierta $f(\mathcal{U})$ es abierto.

Usando ahora que, como a es un polo la función diverge en a tenemos que $f(\mathcal{U})$ no está acotado obteniendo dos posibles opciones:

- $f(\mathcal{U}) = \mathbb{C} \setminus D(0, R)$ con $R \in \mathbb{R}^+$
- $f(\mathcal{U}) = \mathbb{C}$.

Podríamos caer en que $f(\mathcal{U})$ no fuera conexo, pero la imagen de un dominio por una función holomorfa y abierta es un dominio.