Esta relación no está nada bien hecha. (no se ha hecho en clase)

2. Sea $\rho : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^+$ una función de clase C^1, con $\rho(-\pi) = \rho(\pi)$, y sea $\sigma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ el arco definido por

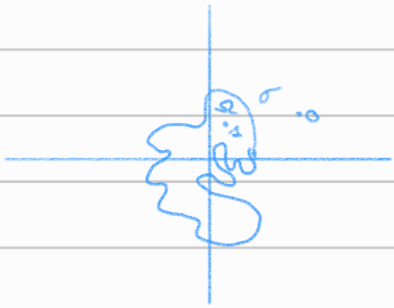
$$\sigma(t) = \rho(t)\, e^{it} \qquad \forall t \in [-\pi,\pi]$$

Calcular $\operatorname{Ind}_\sigma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$.

Sabemos que, si σ es una curva tenemos que

$$\operatorname{Ind}_\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{1}{w-z}\, dw$$

Que por ser σ cerrado cumplirá que $\operatorname{Ind}_\sigma(z) \in \mathbb{Z}$ y dependerá de σ.



$$\int_\sigma \frac{1}{w-z}\, dw = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{w - \rho(t)e^{it}} \cdot \left[\rho'(t)\cdot e^{it} + \rho(t) i e^{it}\right]$$

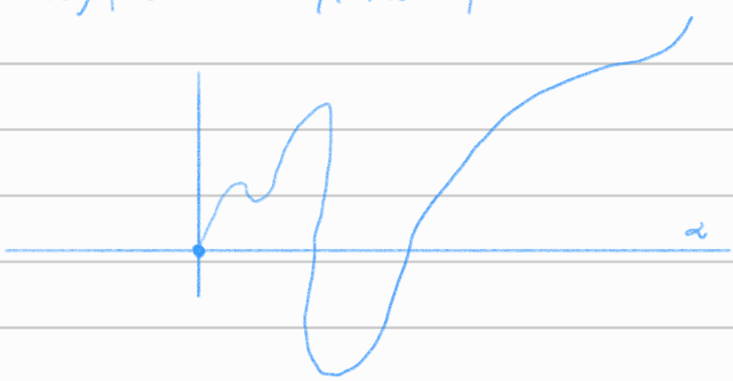
Lo que es claro es que para $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ $\operatorname{Ind}_\sigma(z) = 0$. El problema es para $z \in \Omega$; que dependerá de σ.

4. Sea $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ una función continua, tal que:

$$\alpha(0) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha(t) \to \infty \ \ (t \to +\infty)$$

y sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \alpha(\mathbb{R}_0^+)$. Probar que Ω es abierto y que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

Bastará probar que α es homológicamente conexo. Probaremos que Ω es abierto haciendo uso de que es homeomorfo a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$. Aunque no vamos a construir el homeomorfismo, daremos la idea; pues no es tan fácil como parece



En este caso, es claro que valdrá la proyección canónica pero no ocurrirá siempre eso

No obstante, es claro que $\alpha(\mathbb{R}_0^+)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}_0^+$ luego $\mathbb{C} \setminus \alpha(\mathbb{R}_0^+)$ es abierto pues $\alpha(\mathbb{R}_0^+)$ es cerrado.

Debemos ver que no se puede cruzar el camino; pero no consigo ver cómo probarlo. Supuesto que está probado, vamos a ver que es homológicamente conexo; pero esto es claro pues no tiene agujeros luego, por un teorema visto en clase se tiene lo pedido.

5. Sea Ω un abierto homológicamente conexo del plano tal que $\mathbb{R}^+ \subset \Omega \subset \mathbb{C}^*$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$f(x) = x^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$