Demostración del teorema de la función implícita

Usaremos las proyecciones coordenadas $\pi_1 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^N \mid \pi_1(x,y) = x$

$\pi_2 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^M \mid \pi_2(x,y) = y$

y las inyecciones naturales $J_1 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \mid J_1(x) = (x,0)$

$J_2 : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \mid J_2(y) = (0,y)$

Usamos el teorema de la función inversa para $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ con $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\circ}$ dada por $H(x,y) = (x, F(x,y))$

$$H(x,y) = (x, F(x,y)) = (x,0) + (0, F(x,y)) = J_1(\pi_1(x,y)) + J_2(F(x,y)$$

Mi función H es: $\quad H = J_1 \circ \pi_1\big|_{\mathcal{A}} + J_2 \circ F \Rightarrow DH(x,y) = (J_1 \circ \pi_1) + J_2 \circ DF(x,y)$

$DH(a,b) = J_1 \circ \pi_1 + J_2 \circ DF(a,b)$

$F_a(y) = F(a,y) = F(J_1(a) + J_2(y)) \Rightarrow DF_a(y) = DF(a,y) \circ J_2$

Suponiendo que $DH(a,b)(u,v) = 0 \Rightarrow u = v = 0$

$$\overset{\shortparallel}{(u,0) + J_2(DF(a,b)(u,v))} = (u,0) + (0, DF(a,b)(u,v)) = (u, DF(a,b)(u,v)) = 0$$

$\Updownarrow$

$u = 0$

$DF_a(b)(v) = DF(a,b)(0,v) = 0$

$\hookrightarrow$ por hip es iny.

$H(a,b) = (a, F(a,b)) = (a, 0)$

Por tanto tenemos:

- H es diferenciable en A y DH continua en (a,b)
- $DH(a,b)$ es biyectiva.

El teorema nos da dos abiertos W y g de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ tales que:

- $(a,b) \in W \subset A$ y $H(W) = g$
- H es inyectiva en W y $h = (H|_W)^{-1} : g \longrightarrow W$ es diferenciable

Concluimos tomando $\mathcal{U} = J_1^{-1}(g)$ y $\varphi = \pi_2 \circ h \circ J_1$