Ejercicio 3. Calcular la descomposición cíclica y cíclica primaria de los grupo abelianos $C_{24} \times C_{40} \times C_{35}$ y $C_{14} \times C_{100} \times C_{40}$. ¿Son isomorfos?

Caso $\mathcal{G} = C_{24} \times C_{40} \times C_{35}$, en este caso, $\mathcal{G}$ no es cíclico y $|\mathcal{G}| = 33600$

y como es enorme no es un buen método pero si

$$24 = 2^3 \cdot 3 \ , \ 40 = 2^3 \cdot 5 \ , \ 35 = 7 \cdot 5$$

La descomposición cíclica primaria de cada uno es

$$|\mathcal{G}_1| = 24 = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow \mathcal{G}_1 = C_8 \times C_3$$

$$|\mathcal{G}_2| = 40 = 2^3 \cdot 5 \Rightarrow \mathcal{G}_2 = C_8 \times C_5$$

$$|\mathcal{G}_3| = 35 = 7 \cdot 5 \Rightarrow \mathcal{G}_3 = C_7 \times C_5$$

Es decir, la descomposición cíclica primaria de $\mathcal{G}$ es

$$\mathcal{G} = C_3 \times C_5 \times C_5 \times C_8 \times C_8 \times C_7 \qquad \{2^3, 2^3, 3, 5, 5, 7\}$$

Y la descomposición cíclica es

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G} = C_{840} \times C_{40}$$

Para el segundo caso, que tampoco es cíclico tenemos que

$$|\bar{\mathcal{G}}_1| = 14 = 2 \cdot 7 \Rightarrow \bar{\mathcal{G}}_1 = C_2 \times C_7$$

$$|\bar{\mathcal{G}}_2| = 100 = 2^2 \cdot 5^2 \Rightarrow \bar{\mathcal{G}}_2 = C_4 \times C_{25}$$

$$|\bar{\mathcal{G}}_3| = 40 = 2^3 \cdot 5 \Rightarrow \bar{\mathcal{G}}_3 = C_8 \times C_5$$

Entonces tenemos que la descomposición cíclica primaria es

$$\bar{\mathcal{G}} = C_2 \times C_4 \times C_5 \times C_7 \times C_8 \times C_{25}$$

De donde obtenemos el conjunto $\{2, 2^2, 2^3, 5, 5^2, 7\}$ obteniendo los divisores elementales

$$\begin{pmatrix} 8 & 25 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la descomposición cíclica es $\bar{\mathcal{G}} = C_{1400} \times C_{20} \times C_2$.

Con la información obtenida podemos determinar que $\mathcal{G}$ y $\bar{\mathcal{G}}$ no son isomorfos

Ejercicio 4. Sea G el grupo de las simetrías de un rectángulo (no cuadrado). Probar que G es un grupo abeliano. Calcular sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria

Como es sobre 4 vértices es claro que será un subgrupo de S_4. Sea $\mathcal{A}$ este subgrupo.

$\mathcal{A} = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ Que probando combinaciones claramente es abeliano pues es el grupo de Klein.

Como $|V| = 4 = 2^2$ y es abeliano es fácil ver que su descomposición cíclica y cíclica primaria es $C_2 \times C_2$

Ejercicio 5. Sea G un grupo abeliano de orden n y $l(G)$ su longitud. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(G) = e_1 + \cdots + e_r,$$

y que

$$fact(G) = (C_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, C_{p_1}, \ldots, C_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, C_{p_r}).$$

En particular, todos los grupos abelianos del mismo orden tienen la misma longitud y la misma lista de factores de composición.

Veamos primero el caso $G = C_{p^r}$, por el Teorema 1, como G es un p-grupo abeliano, sabemos que su descomposición cíclica extendida primaria es:

$$\prod_{i=1}^{r} C_p$$, lo que nos lleva a decir que su longitud es r

Esto es así gracias al ejercicio 9 de la relación 5. De esta forma, vemos que, para el caso general

$$G = \prod_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{e_i} C_{p_i} \right)$$

obteniendo la longitud y factores buscados. La particularidad es consecuencia directa de haber tomado la descomposición más extendida y del Teorema 2 de esta forma

Ejercicio 6. Listar todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 10, 16, 20, 30 , 40 , 108 y 360, dando sus factores invariantes, divisores elementales y descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.

Lo haré para dos casos como estudio, el resto serán parecidos salvo salvedades.

$|G| = 10 = 2 \cdot 5$

Partición	Dcp	div elem	Dc
$\{2, 5\}$	$C_2 \times C_5$	10	C_{10}

Como todos son cíclicos serán todos abelianos.

$|G| = 16$

Partición	Dcp	div elem	Dc
$\{16\}$	C_{16}	16	C_{16}
$\{2, 8\}$	$C_2 \times C_8$	2, 8	$C_2 \times C_8$
$\{2, 2, 4\}$	$C_2 \times C_2 \times C_4$	2, 2, 4	$C_2 \times C_2 \times C_4$
$\{2, 2, 2, 2\}$	$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	2, 2, 2, 2	$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$
$\{4, 4\}$	$C_4 \times C_4$	4, 4	$C_4 \times C_4$

Ejercicio 7. Calcular la forma normal, los factores invariantes y los divisores elementales de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -22 & -48 & -267 \\ -4 & -4 & 31 \\ -4 & -24 & 105 \\ 4 & -6 & -6 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

De nuevo, haré sólo uno de ellos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, los divisores elementales son $\{2,2\}$ pues la descomposición cíclica es $C_2 \times C_2$ y los factores invariantes coinciden. El grupo de torsión es el grupo de Klein.

Ejercicio 8. Para los siguientes grupos abelianos calcular sus rangos y sus descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias:

a) $G_1 =< a,b,c;\ \begin{matrix} 3a+9b+9c & =0 \\ 9a-3b+9c & =0 \end{matrix} >$;

b) $G_2 =< a,b,c;\ \begin{matrix} 2a+2b+3c & =0 \\ 5a+2b-3c & =0 \end{matrix} >$;

c) $G_3 =< a,b,c,d;\ \begin{matrix} a+3b+2c & =0 \\ 5a+17b+12c & =0 \\ 6a+4c & =0 \end{matrix} >$;

d) $G_4 =< a,b,c;\ \begin{matrix} 12a+4b+6c & =0 \\ -4a+2b+8c & =0 \\ -2a+16b+34c & =0 \end{matrix} >$;

e) $G_5 = \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{35}$

¿Son algunos de estos grupos isomorfos?

Haré uno o dos para aprender y el resto son análogos, la matriz de G_1 es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 30 & 0 & 36 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ 3 & 0 & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 9 & 9 \\ 0 & 3 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, sabemos que el rango de la parte libre es nº incog $- rg(A) = 1$ luego tenemos que

$$G_1 = \mathbb{Z} \times T(A)$$

Pero los divisores elementales son $\{-3,3\}^{?}$ luego tenemos que

$$T(A) \cong \mathbb{Z}_{-3} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

luego $G_1 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Para el caso de $\mathcal{G}_2$, la matriz es:

$$\delta = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la parte libre es 1 y $\mathcal{G}_2 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$ luego $\mathcal{G}_1 \not\cong \mathcal{G}_2$ pues $\mathcal{G}_2$ es cíclico.

El caso $\mathcal{G}_5$ es distinto y no isomorfo a los demás por no tener parte libre y vamos a proceder exactamente igual que el ejercicio anterior

$|\mathbb{Z}_{24}| = 24 = 2^3 \cdot 3$

$|\mathbb{Z}_{40}| = 40 = 2^3\, 5$

$|\mathbb{Z}_{35}| = 35 = 7 \cdot 5$

Por tanto, los factores invariantes $\{2^3, 2^3, 3, 5, 5, 7\}$ obteniendo los divisores elementales

$$\begin{pmatrix} 2^3 & 3 & 5 & 7 \\ 2^3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la descomposición cíclica es: $\mathcal{G}_5 \cong C_{840} \times C_{40}$

Ejercicio 9. Dados los grupos abelianos:

$$G = < a, b, c, d; \quad \begin{array}{ll} a + 2c - d & = 0 \\ a + 5c + 5d & = 0 \\ 2a + 4c + 2d & = 0 \end{array} > \qquad \text{y} \qquad H = \mathbb{Z}^3/K,$$

donde K es el subgrupo con generadores $\{(1,2,7),(1,4,7),(-1,0,2)\}$. Calcular:

1. El rango, los factores invariantes y los divisores elementales de cada uno de ellos.
2. Sus descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.
3. Las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de $G \oplus H$.

Ejercicio 10. a) Encuentra todos los grupos abelianos distintos, salvo isomorfismo, de orden 500. Da para cada uno de ellos sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria.

$|S| = 500 = 2^2 \cdot 5^3$

Partición	Dcp	divisores elementales	Dc
$\{2^2, 5^3\}$	$C_4 \times C_{125}$	500	C_{500}
$\{2, 2, 5^3\}$	$C_2 \times C_2 \times C_{125}$	$\{2, 250\}$	$C_2 \times C_{250}$
$\{2^2, 5, 5^2\}$	$C_4 \times C_5 \times C_{25}$	$\{5, 100\}$	$C_5 \times C_{100}$
$\{2^2, 5, 5, 5\}$	$C_4 \times C_5 \times C_5 \times C_5$	$\{5, 5, 20\}$	$C_5 \times C_5 \times C_{20}$
$\{2, 2, 5, 5^2\}$	$C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_{25}$	$\{10, 50\}$	$C_{10} \times C_{50}$
$\{2, 2, 5, 5, 5\}$	$C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_5 \times C_5$	$\{5, 10, 10\}$	$C_5 \times C_{10} \times C_{10}$

b) Calcula las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de

$$G = \left\langle a, b, c \,\middle|\, \begin{array}{c} 3a - 3b + 9c = 0 \\ 6a + 12b - 9c = 0 \\ 12b + 9c = 0 \end{array} \right\rangle.$$

¿Cuantos elementos tiene G? ¿Tiene algún elemento de orden seis?

Su matriz es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 6 & 12 & -9 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ 6 & 0 & -9 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ 0 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Como el $rg(A)=3$ tenemos que G no tiene parte libre y que su descomposición cíclica es $G \cong C_3 \times C_6 \times C_9$ y su descomposición cíclica primaria es $G \cong C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3$ y su orden es 162. Para ver si tiene algún elemento de orden 6, usando el T^{ma} de Lagrange podría existir, usaremos la descomposición cíclica:

Los elementos de orden 6 en $\mathbb{Z}_6$ son $\{1,5\}$, en $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow \{0,1,2\}$, en $\mathbb{Z}_9$ tomamos el 3.

El elemento $(1, 2, 3)$ tiene orden 6 en G.