

Trabajo sobre superficies compactas



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Autor: Lucas Hidalgo Herrera

Grado: Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Asignatura: Topología II

Fecha: 11 de enero de 2026

Índice General

1	Introducción	2
2	Preliminares	2
2.1	Elementos básicos	2
2.2	Clasificación de las superficies compactas	3
2.3	Característica de Euler y orientabilidad	3
3	Invarianza por transformaciones elementales	4
4	Equivalencias de orientabilidad	7
5	Bibliografía	10

1 Introducción

A lo largo de este documento trataremos de demostrar dos resultados bastante significativos en la clasificación de superficies compactas y conexas, como es la **invarianza de la característica de Euler por transformaciones elementales** y un conjunto de equivalencias sobre el concepto **orientabilidad** de una superficie conexa y compacta que nos permitirá clasificar de forma sencilla cualquier superficie compacta y conexa.

Para ello, deberemos tratar una serie de conceptos preliminares que nos permitirán obtener estos resultados.

2 Preliminares

Cabe destacar que, daremos por conocidos ciertos conceptos básicos que se han visto en clase y que son la base de este trabajo; ejemplos de esto son: espacios topológicos **localmente euclídeos**, **disco regular**, **triángulo topológico**... Incluso, uno de los resultados que conocemos y es fundamental para poder tratar con superficies, el **Teorema de Radó**, que nos permite triangularizar las superficies en cuestión. Por último, no daremos la definición de cada una de las transformaciones elementales aplicables a una presentación poligonal debido a su extensión.

2.1 Elementos básicos

Aunque hayamos dejado atrás algunos conceptos básicos, es imprescindible citar el concepto de superficie pues es el elemento central de este tema.

Definicion 1. *Dado un espacio topológico (S, τ) Hausdorff y cumpliendo el segundo axioma de numerabilidad, diremos que es una superficie si para cada punto existe un entorno abierto que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 . Por facilidad de escritura, obviaremos el espacio topológico en la notación.*

Como última definición estrictamente necesaria, hablaremos del concepto de **presentación poligonal**, pues la usaremos en innumerables ocasiones.

Definicion 2. *Llamaremos presentación poligonal de una superficie compacta S a una expresión de la forma:*

$$P = \{a_1, \dots, a_n, w_1, \dots, w_m\}, n, m \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

donde a_i son símbolos y w_j son expresiones del siguiente tipo:

$$w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Además, $\epsilon_{ji} \in \{-1, 1\} \forall l \in \{1, \dots, k\}$ y el número de veces que aparece cada símbolo en el global de las expresiones es exactamente 2.

Como añadido, daremos por conocido el siguiente resultado, que nos permitira escoger una presentación poligonal dada una superficie compacta.

Corolario 2.1. *Toda superficie compacta tiene una presentación poligonal; recíprocamente, toda presentación poligonal da una superficie compacta.*

2.2 Clasificación de las superficies compactas

Debido a la longitud del mismo, daremos por conocido el **algoritmo de determinación de $|P|$** para una presentación poligonal P cualquiera. Este algoritmo nos permite conocer los siguientes corolarios.

Corolario 2.2. *Sea S una superficie compacta y conexa, entonces S es homeomorfa a alguna de las siguientes superficies:*

- \mathbb{S}^2
- *Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, \mathbb{T}_n*
- *Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, \mathbb{RP}_n^2*

Demostración. Durante el desarrollo del algoritmo se obtiene esta clasificación. \square

El siguiente corolario, lo daremos por demostrado, pues se vió en clase y es consecuencia del **primer grupo de homología** de cada una de las superficies compactas y conexas anteriores, el cual se obtiene como el abelianizado del grupo fundamental de las mismas.

Corolario 2.3. *Sea S una superficie compacta y conexa, entonces S es homeomorfa a una, y solo una, de las siguientes superficies:*

- \mathbb{S}^2
- *Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, \mathbb{T}_n*
- *Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, \mathbb{RP}_n^2*

2.3 Característica de Euler y orientabilidad

Debido a que lo usaremos a lo largo del trabajo, debemos conocer qué es la **característica de Euler**. Primero lo vemos para el caso de una presentación poligonal y, en la sección 4, lo trataremos para el caso de una superficie compacta cualquiera.

Definicion 3. *Dada una presentación poligonal P , denotamos por V, A y C al número de vértices, aristas y caras de la presentación poligonal, respectivamente. Cabe destacar que V y A están vistos en la realización geométrica de $P, |P|$. Se define, la **característica de Euler de P** como:*

$$\chi(P) = V - A - C$$

Para facilidad práctica, es fácil ver que A es el número de símbolos que usamos en la presentación poligonal y C es el número de expresiones.

Con vistas a la demostración del resultado de la sección 4, vamos a tratar el concepto de orientabilidad de una superficie compacta cualquiera. Antes de tratar con superficies compactas, debemos tratar con alguna de sus presentaciones poligonales.

Definicion 4. Dada una presentación poligonal $P = \{a_1, \dots, a_n; w_1, \dots, w_m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, diremos que es **no orientada** si, en alguna de sus expresiones, alguno de los símbolos aparece dos veces con el mismo exponente.

Análogamente, diremos que P es una presentación poligonal **orientada** si, siguiendo la definición de la bibliografía, no tiene pares de aristas retorcidos; intuitivamente, si $|P|$ no incluye ninguna Cinta de Möbius. Visto ahora desde las expresiones, si las dos apariciones de los símbolos de la presentación poligonal tras aplicar el primer paso del algoritmo de determinación de $|P|$ (estarían en una única expresión) disponen del mismo exponente.

Podríamos preguntarnos por qué necesitamos aplicar el primer paso del algoritmo de determinación de $|P|$. El motivo es porque, si consideramos una presentación poligonal cualquiera podría darse el caso de que, obviando la aplicación del primer paso, fuera orientada. Sin embargo, podría haber dos símbolos con distinto exponente en expresiones distintas tal que al reflejar una de esas expresiones se inviertiera la orientación de la presentación poligonal, pasando a ser no orientada.

En adición, tendríamos que dos presentaciones poligonales que deben ser equivalentes no lo serían al tener, una de ellas, una cinta de Möbius en su realización geométrica.

Además, más adelante, veremos que aplicar el algoritmo de determinación de $|P|$ a una presentación poligonal orientada, P , no se invierte la orientabilidad de la misma.

Definicion 5. Dada una superficie topológica compacta S , diremos que es **no orientable** cuando alguna de sus presentaciones poligonales es no orientada.

Análogamente, diremos que S es **orientable** si admite alguna presentación poligonal orientada.

3 Invarianza por transformaciones elementales

Estamos ya en disposición de enunciar y probar el primero de los objetivos de este documento. Buscamos probar que la característica de Euler es invariante por cualquiera de las transformaciones elementales aplicables a una presentación poligonal.

Proposición 3.1 (Invarianza de la característica de Euler). *Dada una presentación poligonal $P = \{a_1 \dots a_n; w_1, \dots, w_m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $m \geq 1$ y sea $\chi(P)$ su característica de Euler, esta es invariante por cualquier transformación elemental.*

Demostración. Veamos que esto es cierto para cualquiera de las transformaciones elementales:

- **Renombrar:** Supongamos que dado $i \in \{1, \dots, n\}$, renombramos a_i por $b_i \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, esta transformación no varía el número de caras (número de expresiones), tampoco el número de aristas (número de símbolos), ni el número de vértices. Esto último ocurre porque ninguna de las expresiones cambia, salvo el símbolo por su renombrado, luego en el cociente todo sigue igual.
- **Subdividir:** Supongamos que subdividimos el símbolo a_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ añadiendo los símbolos $b_1, b_2 \notin \{a_1, \dots, a_n\}$; distinguimos casos:

- $|\{j \in \{1, \dots, m\} | a_i \in w_j\}| = 1$: En este caso, sin pérdida de generalidad, sea

$$w_{j_0} = a_{j_0_1}^{\epsilon_1} \dots a_i \dots a_i^{-1} \dots a_{j_0_k}^{\epsilon_k}$$

dicha expresión, tras aplicar la transformación obtenemos

$$\bar{w}_{j_0} = a_{j_0_1}^{\epsilon_1} \dots b_1 b_2 \dots b_2^{-1} b_1^{-1} \dots a_{j_0_k}^{\epsilon_k}$$

Por tanto, hemos añadido un vértice entre b_1 y b_2 , y una arista; por tanto, se obtiene la invarianza de $\chi(P)$.

- $|\{j \in \{1, \dots, m\} | a_i \in w_j\}| = 2$: En este caso, sin pérdida de generalidad, sean

$$w_{j_0} = a_{j_0_1}^{\epsilon_{01}} \dots a_i \dots a_{j_0_k}^{\epsilon_{0k}}$$

$$w_{j_1} = a_{j_1_1}^{\epsilon_{11}} \dots a_i^{-1} \dots a_{j_1_k}^{\epsilon_{1k}}$$

dichas expresiones, tras aplicar la transformación obtenemos

$$\bar{w}_{j_0} = a_{j_0_1}^{\epsilon_{01}} \dots b_1 b_2 \dots a_{j_0_k}^{\epsilon_k}$$

$$\bar{w}_{j_1} = a_{j_1_1}^{\epsilon_{11}} \dots b_2^{-1} b_1^{-1} \dots a_{j_0_k}^{\epsilon_k}$$

Por tanto, hemos añadido un vértice entre b_1 y b_2 , y una arista; consiguiendo así la invarianza.

- **Consolidar** Supongamos que los símbolos $a_{i_0}, a_{i_1} \in \{a_1, \dots, a_n\}$ aparecen de alguna de las siguientes formas en todas sus apariciones:

$$a_{i_0} a_{i_1} \text{ ó } (a_{i_0} a_{i_1})^{-1}$$

En ese caso, buscamos consolidar la combinación $a_{i_0} a_{i_1}$ en el símbolo $b \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Debemos distinguir casos, al igual que en el caso anterior:

- $|\{j \in \{1, \dots, m\} | a_{i_0} a_{i_1} \in w_j\}| = 1$: En ese caso, sin pérdida de generalidad, sea

$$w_{j_0} = a_{j_0_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_0} a_{i_1} \dots (a_{i_0} a_{i_1})^{-1} \dots a_{j_0_k}^{\epsilon_k}$$

dicha expresión; tras aplicar la transformación obtenemos:

$$\bar{w}_{j_0} = a_{j_0_1}^{\epsilon_1} \dots b \dots b^{-1} \dots a_{j_0_k}^{\epsilon_k}$$

Como podemos observar hemos reducido en una unidad el número de aristas y, también, en una unidad el número de vértices eliminando el vértice entre a_{i_0} y a_{i_1} ; manteniendo así la invarianza.

- $|\{j \in \{1, \dots, m\} | a_{i_0} a_{i_1} \in w_j\}| = 2$: En ese caso, sin pérdida de generalidad, sean

$$w_{j_0} = a_{j_0_1}^{\epsilon_{01}} \dots a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{j_0_k}^{\epsilon_{0k}}$$

$$w_{j_1} = a_{j_1_1}^{\epsilon_{11}} \dots (a_{i_0} a_{i_1})^{-1} \dots a_{j_1_k}^{\epsilon_{1k}}$$

dichas expresiones; tras aplicar la transformación obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{w}_{j_0} &= a_{j_{01}}^{\epsilon_{01}} \dots b \dots a_{j_{0k}}^{\epsilon_{0k}} \\ \bar{w}_{j_1} &= a_{j_{11}}^{\epsilon_{11}} \dots b^{-1} \dots a_{j_{1k}}^{\epsilon_{1k}}\end{aligned}$$

Como podemos observar hemos reducido en una unidad el número de aristas y, también, en una unidad el número de vértices eliminando el vértice entre a_{i_0} y a_{i_1} ; manteniendo así la invarianza.

- **Reflejar:** Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, reflejamos la expresión

$$w_j = a_{j_1} \dots a_{j_k}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$$

Esto dejaría el número de aristas invariante pues no hemos introducido ningún símbolo así como el número de caras, pues no hemos introducido ninguna expresión. Por último, el número de vértices queda invariante, ya que invertir el sentido de los lados del polígono no cambia la adyacencia de los vértices del mismo en el cociente.

Por tanto, se preserva la invarianza.

- **Rotar:** Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, rotamos la expresión

$$w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$$

En ese caso, el número de caras queda invariante, el número de aristas queda invariante al no añadir ningún símbolo más. Por último, es claro que el número de vértices queda invariante dando así la invarianza que buscábamos.

- **Cortar:** Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, cortamos la expresión

$$w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$$

Concretamente en el símbolo $j_t, t \in \{2, \dots, k-2\}$ añadiendo el símbolo $b \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Obtendríamos el siguiente resultado:

$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}} \xrightarrow{\text{Cortar}} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} b, b^{-1} a_{j_{t+1}}^{\epsilon_{j_{t+1}}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$$

Como podemos ver, hemos añadido un símbolo y una expresión, lo que se refleja en una arista y una cara, respectivamente; pero no en un vértice. Por tanto, queda invariante la característica de Euler de P .

- **Pegar:** Supongamos que existen $j_0, j_1 \in \{1, \dots, m\}$ tales que las expresiones correspondientes son de la forma

$$w_{j_0} = a_{j_{01}}^{\epsilon_{01}} \dots a_{j_{0k}}^{\epsilon_{0k}} b$$

$$w_{j_1} = b^{-1} a_{j_{11}}^{\epsilon_{11}} \dots a_{j_{1k}}^{\epsilon_{1k}}$$

con $b \in \{a_1, \dots, a_n\}$; entonces podemos aplicar la transformación de pegar; tras la transformación obtenemos la expresión siguiente:

$$w = a_{j_{01}}^{\epsilon_{01}} \dots a_{j_{0k}}^{\epsilon_{0k}} a_{j_{11}}^{\epsilon_{11}} \dots a_{j_{1k}}^{\epsilon_{1k}}$$

Como podemos ver, hemos perdido un símbolo y una expresión, lo que se refleja en una arista y una cara, respectivamente; pero no en un vértice. Por tanto, queda invariante la característica de Euler.

- **Desdoblar:** Supongamos que dado $j \in \{1, \dots, m\}$, desdoblamos la expresión

$$w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$$

Concretamente en el símbolo $j_t, t \in \{2, \dots, k-2\}$ añadiendo el símbolo $b \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Obtendríamos el siguiente resultado:

$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}} \xrightarrow{\text{Desdoblar}} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_t}^{\epsilon_{j_t}} b b^{-1} a_{j_t+1}^{\epsilon_{j_{t+1}}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$$

Como podemos ver, no hemos añadido ninguna cara pero sí hemos añadido un símbolo, lo que se refleja en una arista, y un vértice. Esto último es así porque, en el espacio topológico cociente para obtener la realización geométrica de P , el final de b y b^{-1} no se relacionan con ningún otro vértice. Por tanto, queda invariable la característica de Euler.

- **Doblar:** Supongamos que existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que la expresión w_j permite doblar el símbolo $b \in \{a_1, \dots, a_n\}$ (estamos suponiendo que la longitud de la expresión lo permite), entonces:

$$w_j = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots b b^{-1} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}} \xrightarrow{\text{Doblar}} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$$

De forma análoga al caso anterior, podemos ver que hemos eliminado el símbolo b , perdiendo una arista, y hemos eliminado el vértice entre b y b^{-1} . Por tanto, la característica de Euler se mantiene invariante.

□

4 Equivalencias de orientabilidad

Ya hemos probado que la característica de Euler es invariante por transformaciones elementales; lo que, junto al **algoritmo de determinación de la realización geométrica** nos permite deducir una buena definición de **característica de Euler de una superficie compacta** cualquiera.

Definición 6. Dada una superficie compacta cualquiera, S , se define la **característica de Euler de S** como la característica de Euler de cualquiera de sus presentaciones poligonales.

El siguiente resultado nos resultará útil para probar el último resultado.

Teorema 4.1 (Superficies orientables). *Sea S una superficie compacta y conexa, se tiene que*

$$S \text{ es orientable} \iff S \text{ es homeomorfa a } \mathbb{S}^2 \text{ o a } \mathbb{T}_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Demostración. Si consideramos las presentaciones estándar P_1 y P_2 de la esfera y el toro, respectivamente, sabemos que son las siguientes:

- $P_1 = \{a, b; aa^{-1}bb^{-1}\}$

- $P_2 = \{a, b; aba^{-1}b^{-1}\}$

Que son claramente orientadas; por tanto, por definición de superficie orientable estas son orientables. Además, puesto que la presentación poligonal de la suma conexa de dos superficies compactas y conexas se caracteriza por concatenar ambas expresiones y tomar como conjunto de símbolos todos los símbolos de las expresiones, podemos asegurar que la presentación poligonal de \mathbb{T}_n , $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ sigue siendo orientada. Sea ahora M una superficie que admite, al menos, una presentación orientable y veamos que deben ser alguna de ellas. Para ello, sea P dicha presentación, debemos aplicar el algoritmo de determinación de $|P|$, en él vimos que, tras agrupar las componentes conexas que pudiéramos en el paso 1, debíamos doblar tantas veces como se pudiera. Tras esto, pudimos clasificar $|P|$ en dos posibilidades:

- $|P|$ es homeomorfa a \mathbb{S}^2
- $|P|$ es homeomorfa a \mathbb{RP}^2

Sin embargo, puesto que **doblar** no influye en la orientabilidad de la presentación poligonal al no cambiar ningún exponente de la misma, es imposible el segundo caso. Si obtenemos el primero de ellos hemos acabado; en caso contrario, debemos seguir aplicando el algoritmo para obtener alguna de los siguientes resultados:

- $|P|$ es homeomorfa a \mathbb{T}_n con $n \geq 1$
- $|P|$ es homeomorfa a \mathbb{RP}_n^2 , $n \geq 2$

No obstante, como la única transformación elemental que altera el exponente de los símbolos de una expresión es **reflectar**, que, en el algoritmo, sólo se usa si había apariciones de símbolos con el mismo exponente en la presentación de partida como por ejemplo el paso 3 (si seguimos el teorema de clasificación de las superficies compactas de la bibliografía serían los pasos 4 y 7 también); podemos ver que no necesitamos aplicar esos pasos obteniendo así que la presentación poligonal resultante no altera su orientabilidad, es decir, sigue siendo orientada consiguiendo así que $|P|$ es homeomorfa a \mathbb{T}_n , $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. \square

Por tanto, sabemos ya que, gracias al corolario 2.3, las únicas superficies compactas, conexas y orientables, salvo homeomorfismos, son:

- La esfera, \mathbb{S}^2 .
- La suma conexa de n toros con $n \geq 1$, \mathbb{T}_n .

Pasamos ya a enunciar y demostrar el resultado que nos permitirá, junto a la **característica de Euler**, clasificar cualquier superficie compacta y conexa dada una presentación poligonal suya.

Proposición 4.1 (Equivalencias de orientabilidad). *Sea S una superficie compacta y conexa. Entonces, equivalen:*

- S es orientable

- S tiene una presentación poligonal de una única expresión que es orientada.
- Cualquier presentación poligonal de S de una única expresión es orientada.

Demostración.

i) \implies ii)] Puesto que S es orientable, por definición, se tiene que S admite una presentación poligonal orientada.

Además, como S es conexa entonces, basta aplicar el primero de los pasos del algoritmo de determinación de $|P|$ para obtener dicha presentación poligonal con una única expresión.

ii) \implies iii)] Supongamos que S admite una presentación poligonal de una única expresión que es orientada, séase P_0 . Sea P otra presentación poligonal de S , puesto que la superficie es conexa, podemos suponer, salvo aplicación del primer paso del algoritmo de determinación de $|P|$, que P tiene una única expresión.

Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que P es **no** orientada; puesto que, el algoritmo de determinación de $|P|$ nos dice que todas las presentaciones de S se pueden derivar de una dada mediante transformaciones elementales, tenemos que P se obtiene de P_0 en una secuencia finita de transformaciones elementales.

Ahora bien, solo nos queda por ver que P debe ser orientada; puesto que P_0 sí es orientada y hemos visto en la demostración del teorema 4.1 que el algoritmo de determinación de $|P_0|$ deja invariante la orientabilidad de una presentación poligonal orientada llegando a que, necesariamente, P es orientada al ser equivalente a P_0 , lo cual es una contradicción con nuestra suposición.

Otra forma de demostrarlo es, en caso de que P no fuera orientada, se tendría por el teorema 4.1 que S no sería homeomorfa ni a la esfera de \mathbb{R}^3 ni a la suma de n toros, para ningún $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, sino a \mathbb{RP}_n^2 para algún $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ por el algoritmo de determinación aplicado a P . Sin embargo, S sí es orientable por hipótesis, estaríamos obteniendo varias contradicciones:

- S es homeomorfa a dos de las superficies compactas y conexas del corolario 2.3 gracias al teorema 4.1, lo que contradice a ese corolario.
- \mathbb{RP}_n^2 para algún $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ sería homeomorfo a \mathbb{S}^2 o a \mathbb{T}_m para algún $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$. Hemos vuelto a usar el teorema 4.1 y el algoritmo de determinación aplicado a P ; y obtenemos la contradicción con los grupos de homología.

Por tanto, toda presentación poligonal de S de una única expresión es orientada.

iii) \implies i)] Puesto que, por hipótesis, cualquier presentación poligonal de una única expresión de S es orientada entonces S admite, al menos, una presentación poligonal orientada; y por tanto, es orientable. □

5 Bibliografía

Para realizar el trabajo, la bibliografía utilizada ha sido la siguiente:

- [Dep26] Departamento de Geometría y Topología. *Apuntes de la asignatura Topología II*. Universidad de Granada. Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas. 2026.
- [Lee11] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. 2^a ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2011.