ÍNDICE

Tema 7. Vector derivada

1. Definición del vector derivada

1.1 Diferencial de funciones de una variable real

Sea Y un espacio normado, tomamos $\Phi: L(\mathbb{R},Y) \longrightarrow Y$, $T \longmapsto T(1)$ $\forall T \in L(\mathbb{R},Y)$, además, Φ es lineal, biyectiva y preserva la norma: $\|\Phi(T)\| = \|T\|$ $\forall T \in L(\mathbb{R},Y)$ luego $L(\mathbb{R},Y)$ se identifica totalmente con Y

Como notación, tomamos $\emptyset \neq A = A^\circ \subset \mathbb{R}$, Y espacio normado, $f: A \to Y$.

Si tratamos de ver la función diferencial como un vector de Y, podemos ver que:

f es diferenciable en a $\Rightarrow$ $Df(a)(1) = \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$

Conviene desarrollar la hipótesis, que se ve fácil

$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-Df(a)(1)(x-a)\|}{|x-a|} = \left\|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - Df(a)(1)\right\| = 0$

1.2. Vector derivada

Tratando la derivabilidad, podemos ver que f es derivable en $a \in A$ cuando la función $t \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ de $A\setminus\{a\} \to Y$ tiene límite en a, entonces,

$$\boxed{f'(a) = \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}}$$

conocido como vector derivada de f en a.

Nosotros lo veíamos como un escalar para $N=1$

Generalizando, diremos que f es derivable si lo es en todo punto de A y tomamos

$f': A \to Y$, $x \longmapsto f'(x)$ como función derivada de f.

Pero... ¿Cuál es la relación con la diferenciabilidad?

si derivable todo $\Rightarrow$ quita 1

- f diferenciable en $a \in A \iff f$ derivable en a, en cuyo caso, $f'(a) = Df(a)(1)$
- f diferenciable $\iff f$ es derivable
- $f \in C^1(A,Y) \iff f$ derivable y f' continua.

Una propiedad a destacar del vector derivada es:

Podemos tomar dos puntos cercanos que se acerquen

- Si f es derivable en $a \in A$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /$ $\left. \begin{array}{l} t_1,t_2 \in A,\ t_1 \neq t_2 \\ a-\delta < t_1 \leq t_2 < a+\delta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} - f'(a) \right\| < \varepsilon$

Derivable componente a componente.

Si $Y = \mathbb{R}^M$ con $\|\cdot\|$ cualquiera y $\beta = \beta_0$, $\emptyset \neq A = A^\circ \subset \mathbb{R}$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_M): A \to \mathbb{R}^M$ diremos que

f derivable en $a \iff f_j$ derivable en a $\forall j \in \Delta_M \Rightarrow \boxed{f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), \dots, f_M'(a)) =}$

$= g'(a) = \sum_{j=1}^{m} g_j'(a) e_j$ ← Aquí se ve mejor que es un vector por ser combinación lineal de una base

2. Interpretación geométrica y física

2.1. Interpretación geométrica del vector derivada

Fijemos una notación: $\emptyset \neq J \subset \mathbb{R}$, J intervalo abierto, $\gamma: J \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua.

Para los geómetras, lo más importante son las rectas tangentes a curvas paramétricas.

Imagen de γ: $C = \gamma(J) = \{\gamma(t) : t \in J\} \subset \mathbb{R}^M$. En este caso, se dice que C es una curva y que γ es una parametrización de C.

Cuando γ es derivable en $a \in J$, con $\gamma'(a) \neq 0$ tratamos a $\gamma(a)$ como un punto regular; por tanto, la recta tangente a C en $\gamma(a)$ es:

$$\boxed{R = \{\gamma(a) + t\gamma'(a) : t \in \mathbb{R}\}}$$

Es la única recta que pasa por $\gamma(a)$ con esa dirección

En caso contrario, $\gamma'(a) = 0$ ó $\gamma'(a) = \nexists$, diremos que $\gamma(a)$ es un punto singular de la curva.

Diremos que una curva es regular cuando $\gamma'(a) \neq 0 \ \forall a \in J$

Tratemos sin más preámbulo las ecuaciones paramétricas de una curva y sus tangentes.

Sea C una curva paramétrica en $\mathbb{R}^M$, $\{\pi_j : j \in \Delta_M\}$ proyecciones coordenadas, llamamos $x_j = \pi_j \circ \gamma \ \ \forall j \in \Delta_M$, es decir, $\gamma = (x_1, \dots, x_M)$.

Componente j-ésima de la función γ. Es abuso de notación

Ecuaciones paramétricas de C: $x_j = x_j(t) \ \ \forall t \in J$ → parámetro

j-ésima variable ↩ j-ésima componente de γ

γ derivable en $a \in J \iff x_j$ derivable en $a \ \forall j \in \Delta_M \Rightarrow \gamma'(a) = (x_1'(a), \dots, x_M'(a)) \equiv$

↳ Justo, pues es derivable componente a componente

$\equiv \gamma'(a) = \sum_{j=1}^{M} x_j'(a) e_j$

Si $x = \gamma(a)$ es un punto regular de C tenemos como ecs. paramétricas de la recta tangente:

$$x_j = x_j(a) + t x_j'(a) \quad \forall t \in J, \ j \in \Delta_M$$

2.2. Interpretación física del vector derivada = vector velocidad o celeridad

Sea $\gamma: J \to \mathbb{R}^n$ derivable; físicamente, γ describe un movimiento en $\mathbb{R}^n$ en un intervalo de tiempo J. Por tanto $\gamma(j)$ es una posición del móvil en un instante dado; luego $\gamma(J)=C$ es la trayectoria del móvil y sus ecuaciones paramétricas son las ecuaciones del movimiento.

Vamos a considerar $\gamma'(t)$ como el vector velocidad en el instante t y $\|\gamma'(t)\|$ la celeridad del móvil en el instante t.

3. Curvas planas y alabeadas

3.1. Curvas paramétricas en $\mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$ curvas planas

Una curva plana es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ $\gamma(J)$ con $\gamma: J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua.

$x = \pi_1 \circ \gamma$ e $y = \pi_2 \circ \gamma$, es decir, $\gamma(t)=(x(t), y(t))$ $\forall t \in J$

Ecuaciones paramétricas: $\boxed{x = x(t)}$ e $\boxed{y=y(t)}$ $\forall t \in J$ Poner cada componente como imagen de un parámetro.

γ derivable en $a \in J \iff$ x e y derivables en $a \Rightarrow \gamma'(a) = (x'(a), y'(a)) \equiv \gamma'(a) = x'(a)e_1 + y'(a)e_2$

Si $(x(a), y(a))$ es regular $\Rightarrow$ $x = x(a) + t x'(a)$ e $y = y(a) + t y'(a)$ son las ecuaciones paramétricas de la recta tangente en $a \in J$.

son las ecuaciones paramétricas de la recta tangente.

3.2. Elipses

Elipse de centro $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ con semiejes $a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

forma coordenadas polares

Parametrización: $C = \gamma(\mathbb{R})$ donde $\gamma(t) = (\alpha + a\cos t, \beta + b \operatorname{sen} t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $x = \alpha + a\cos t$ e $y = \beta + b \operatorname{sen} t$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$x'(t) = -a \operatorname{sen} t$ e $y'(t) = b\cos t$ $\forall t \in \mathbb{R}$ curva regular.

La recta tangente en $(x_0, y_0) \in C$: $bx = bx_0 - ta(y_0 - \beta)$ y $ay = ay_0 + tb(x_0 - \alpha)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

3.3. Curvas en forma explícita

Concepto intuitivo

$g_r(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in J\} \subset \mathbb{R}^2$ con $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ continua ; se dice que $g_r(\varphi)$ es una curva explícita con ecuación explícita $y = \varphi(x)\ \forall x \in J$

$\{(\psi(y), y) : y \in J\}$ con $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ continua es también una curva explícita $x = \psi(y)\ \forall y \in J$

Toda curva explícita se puede parametrizar con $g_r(\varphi) = \gamma(J)$ donde $\gamma(t) = (t, \gamma(t))\ \forall t \in J$ con ecs. paramétricas : $x = t$ e $y = \varphi(t)\ \forall t \in J$.

Cuando φ es derivable, $g_r(\varphi)$ es una curva regular:

impide la singularidad

$\gamma'(a) = (1, \varphi'(a)) \neq (0,0)\ \forall a \in J$

Recta tangente en $(a, \varphi(a)) \in g_r(\varphi)$

$\boxed{x = a + t}$ e $\boxed{y = \varphi(a) + t\varphi'(a)}\ \forall t \in \mathbb{R}$.

3.4. Ejemplos sobre puntos singulares y regulares

Hay ocasiones donde dos parametrizaciones presentan el mismo punto singular, pero puede haber casos donde una parametrización sí tenga ese punto singular, y otras no.

Las parametrizaciones no conservan singularidades

3.5. Curvas paramétricas en $\mathbb{R}^3$

Consideremos ahora la curva alabeada, que no es más que una curva en $\mathbb{R}^3$, como una hélice

Tomamos

Componentes de γ

$x = \pi_1 \circ \gamma$, $y = \pi_2 \circ \gamma$, $z = \pi_3 \circ \gamma$ $\Rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))\ \forall t \in J$.

Ecuaciones paramétricas : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}\ \forall t \in J$

↳ mismo proceso

γ derivable en $a \in J \iff x, y, z$ derivables en $a \Rightarrow \gamma'(a) = (x'(a), y'(a), z'(a)) \equiv \gamma'(a) = x'(a)e_1 + y'(a)e_2 + z'(a)e_3$

si $\gamma'(a) \neq 0$ tenemos que las ecuaciones paramétricas de la recta tangente son:

$\boxed{x = x(a) + t x'(a)}$, $\boxed{y = y(a) + t y'(a)}$, $\boxed{z = z(a) + t z'(a)}\ \forall t \in \mathbb{R}$

Como ejemplo, la hélice circular:

$x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} t \quad z = t$ es regular con tangente en (x_0, y_0, z_0):

$x = x_0 - t y_0 \quad y = y_0 - t x_0 \quad z = z_0 + t\ \ \forall t \in \mathbb{R}$