1. Sea un experimento aleatorio que consiste en lanzar un tetraedro regular cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y se definen los sucesos:

$$A = \{1 \text{ ó } 2\} \quad B = \{2 \text{ ó } 3\} \quad C = \{2 \text{ ó } 4\}.$$

Calcular las siguientes probabilidades:

- $P(A), P(B), P(C)$.
- Probabilidad de obtener un dos.

Indicar:

- Si los sucesos A, B y C son independientes dos a dos.
- Si los sucesos A, B y C son mutuamente independientes.

Definimos X v.a que determina el resultado al lanzar el dado

$P(A) = P[X=1] + P[X=2] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(B) = P[X=2] + P[X=3] = \frac{1}{2}$

$P(C) = P[X=2] + P[X=4] = \frac{1}{2}$

$P[X=2] = P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$

Veamos ahora si los sucesos son 2 a 2 disjuntos usando que $P(A \cap B) = P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$; $P(A)P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$; $P(A)P(C) = \frac{1}{4}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$; $P(B)P(C) = \frac{1}{4}$

luego son sucesos dos a dos independientes

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$; $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$

luego no son sucesos mutuamente independientes

2. Sea (X_1, X_2, X_3) un vector aleatorio con función masa de probabilidad

$$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3)) = 1/4,$$

siendo $(x_1, x_2, x_3) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$

1/4 1/4 1/4 1/4

- Indicar si son X_1, X_2, X_3 independientes dos a dos.
- Indicar si son X_1, X_2, X_3 mutuamente independientes.
- Indicar si $X_1 + X_2$ y X_3 son independientes.

·) Debemos obtener las funciones $P_i[X_i = x_i]$ y $P_{ij}[X_i = x_i, X_j = x_j]$ buscando que

$P_{ij}[X_i = x_i, X_j = x_j] = P_i[X_i = x_i] \, P_j[X_j = x_j]$

$P_{ij}[X_i = x_i, X_j = x_j] = \frac{1}{4} \quad \forall i,j,\ i \neq j$

$P_i[X_i = x_i] = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x_i \in \{1,0\} \\ 0 & \text{si } x_i \notin \{1,0\} \end{cases}$

luego es fácil ver que son independientes dos a dos pero no son mutuamente independientes

·) Buscamos calcular $P_{1+2}[\bar{X} = x_1 + x_2]$ y $P[X_3 = x_3]$

$$P_{1+2}[\bar{X} = x] = \begin{cases} 1/4 & x=0 \\ 1/2 & x=1 \\ 1/4 & x=2 \end{cases}$$

¿$P[\bar{X} = x, X_3 = x_3] = P[\bar{X} = x]P[X_3 = x_3]$?

$P[\bar{X} = 0, X_3 = 1] = \frac{1}{4}$; $P[\bar{X} = 0]P[X_3 = 1] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

luego no son independientes.

3. Definimos sobre el experimento de lanzar diez veces una moneda las variables aleatorias X como el número de lanzamientos hasta que aparece la primera cara (si no aparece cara $X = 0$), e Y como el número de lanzamientos hasta que aparece la primera cruz (con $Y = 0$ si no aparece cruz). Indicar si X e Y son independientes.

Experimento → lanzar 10 veces una moneda

X → nº lanzamientos hasta la primera cara

$x = 0$ si no aparece cara

Y → nº lanzamientos hasta que aparece la primera cruz

$Y = 0$ si no aparece cruz.

$P[X = 1, Y = 1] = 0$, pero $P[X = 1]P[Y = 1] \neq 0$ luego son dependientes.

si X e Y son independientes.

4. El número de automóviles utilitarios, X, y el de automóviles de lujo, Y, que poseen las familias de una población se distribuye de acuerdo a las siguientes probabilidades:

$X \mid Y$	0	1	2
0	$1/3$	$1/12$	$1/24$
1	$1/6$	$1/24$	$1/48$
2	$5/22$	$5/88$	$5/176$

Comprobar que las variables X e Y son independientes.

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	1/3	1/12	1/24	11/24
1	1/6	1/24	1/48	11/48
2	6/22	5/88	5/176	5/16
	8/11	2/11	1/11	

Vamos a hacer todas las combinaciones

	$P[X = i, Y = j]$	$P[X = i]$	$P[Y = j]$
✓	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{8}{11}$
✓	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{2}{11}$
✓	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{11}$
	⋮		

Como cada columna es linealmente de las demás, se da la independencia

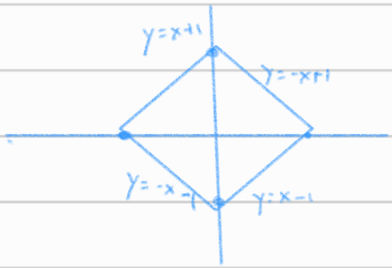
Se cumple

5. En los siguientes dos apartados, estudiar la independencia de las variables aleatorias X e Y, cuando su densidad de probabilidad conjunta se define como sigue:

a) $f(x,y) = 1/2$, si (x,y) pertenece al cuadrado de vértices $(1,0);(0,1);(-1,0);(0,-1)$.

b) $f(x,y) = 1$, si (x,y) pertenece al cuadrado de vértices $(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)$.

a) $f(x,y) = \frac{1}{2}$



Sacamos las funciones de densidad marginales:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2}\,dy = x+1 & \text{si } x \in]-1,0[\\ \int_{x-1}^{-x+1} \frac{1}{2}\,dy = -x+1 & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

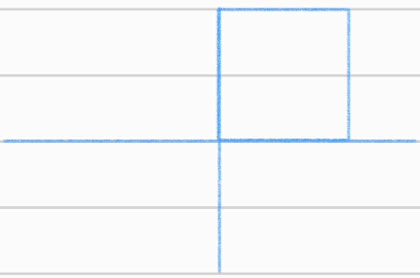
$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-y-1}^{y+1} \frac{1}{2}\,dx = y+1 & \text{si } y \in]-1,0[\\ \int_{y-1}^{-y+1} \frac{1}{2}\,dx = -y+1 & \text{si } y \in]0,1[\end{cases}$$

Luego $f(x,y) = \frac{1}{2} \neq f_X(x) f_Y(y)$

•) Si $x \in]-1,0[$, $y \in]-1,0[\Rightarrow f_X(x) f_Y(y) = (x+1)(y+1) \neq \frac{1}{2} = f(x,y)$

Por tanto, hay dependencia.

b) $f(x,y) = 1$



$f_X(x) = \int_0^1 dy = 1 \qquad x \in]0,1[$

$f_Y(y) = \int_0^1 dx = 1 \qquad y \in]0,1[$

Luego son independientes

6. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución Binomial con parámetros n_i, $i = 1,2$, y $p = 1/2$. Calcular la distribución de $X_1 - X_2 + n_2$.

Vamos a usar que la Binomial es reproductiva

$$M_{X_1 - X_2 + n_2}(t) = \mathcal{E}[e^{t(x_1 - x_2 + n_2)}] = \mathcal{E}[e^{tx_1 - tx_2 + tn_2}] = \mathcal{E}[e^{tx_1} \cdot e^{-tx_2} \cdot e^{tn_2}] = e^{tn_2}\,\mathcal{E}[e^{tx_1} \cdot e^{-tx_2}] =$$

$$= e^{tn_2}\,\mathcal{E}[e^{tx_1}]\,\mathcal{E}[e^{-tx_2}] = e^{tn_2} M_{X_1}(t) M_{X_2}(-t) = (e^t)^{n_2} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^t\right)^{n_1} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t}\right)^{n_2} = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^t\right)^{n_1} \left(\tfrac{e^t}{2} + \tfrac{1}{2}\right)^{n_2}$$

$$= \left(\tfrac{e^t}{2} + \tfrac{1}{2}\right)^{n_1 + n_2}$$

Luego $X_1 - X_2 + n_2 \rightsquigarrow B(n_1 + n_2, p)$

7. La demanda en miles de toneladas de un producto, X, y su precio por kilogramo en euros, Y, tienen por función de densidad conjunta

$$f(x,y) = kx^2(1-x)^3y^3(1-y)^2, \quad x,y \in (0,1).$$

Calcular la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad, y determinar si X e Y son independientes.

Obtener la función de densidad de probabilidad del precio para una demanda fija.

Como $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$ obtenemos la constante k:

$$1 = \int_0^1\int_0^1 k x^2(1-x)^3 y^3(1-y^2)\, dy\, dx = k\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx \int_0^1 y^3(1-y)^2\, dy$$

$$= k\int_0^1 x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5\, dx \cdot \int_0^1 y^3 - 2y^4 + y^5\, dy = k\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 \left[\frac{y^4}{4} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= k\left(\frac{1}{60}\right)\left(\frac{1}{60}\right) = \frac{k}{3600} \qquad \boxed{k = 3600}$$

Para ver que son independientes, pues $f(x,y) = k\, h_1(x)\, h_2(y)$ donde

$$h_1(x) = x^2(1-x)^3 \quad \wedge \quad h_2(y) = y^3(1-y)^2$$

Nos piden ahora que, fijado $x = x_0 \in [0,1]$ obtengamos

$$f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = f_Y(y) = k\, y^3(1-y)^2 \int_0^1 (-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2)dx = 60y^3 \cdot (1-y)^2 \text{ si } 0 < y < 1$$