Tema 4. Principio de acotación uniforme

Principio de acotación uniforme

Caso particular de espacio normado.

Aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{E}$ en F

Sea $\mathcal{E}$ un espacio de Banach, F un espacio normado, $\mathcal{F}$ una familia de operadores $T \in L(\mathcal{E}, F)$

$$\text{Si } \sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty \quad \forall x \in \mathcal{E} \Rightarrow \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty$$

donde $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Tx\| = \inf\{M \ge 0 : \|Tx\| \le M\|x\|, \forall x \in \mathcal{E}\}$

- Demostración.

Lema

aplicaciones lineales y continuas

¿No acotado?

Sean $\mathcal{E}, F$ espacios normados, $T \in L(\mathcal{E}, F) \Rightarrow \sup\limits_{\|x-x_0\|<r} \|Tx\| \ge r\|T\| \quad \forall x_0 \in \mathcal{E} \quad \forall r > 0$

↳ Puntos dentro de $B(x,r)$

- Demostración.

pone y de otra forma

Dado $y \in \mathcal{E}$ sabemos que $\|T(y)\| = \|T(\frac{1}{2}[x_0 + y - (x_0 - y)])\| \quad \forall x_0 \in \mathcal{E}$

x_0 es el punto medio

y como T es lineal $\|T(y)\| = \frac{1}{2}\|T(x_0 + y - (x_0 - y))\| \le \frac{1}{2}\|T(x_0+y)\| + \|T(x_0-y)\| \quad \forall x_0 \in \mathcal{E}$

desig. triangular

$$\le \max\{\|T(x_0+y)\|, \|T(x_0-y)\|\}$$

normaliza

$\sup\limits_{\|y\|\le r} \|Ty\| = r\sup\limits_{\|y\|\le 1} \|Ty\| = r\|T\|$, pero por otra parte

Por conjuntos será menor o igual al de todo el conjunto (la bola)

$$\sup_{\|y\|\le r} \|Ty\| \le \sup_{\|y\|\le r} \max\{\|T(x_0+y)\|, \|T(x_0-y)\|\} \le \sup_{\|z-x_0\|\le r} \|Tz\|$$

Entonces tenemos que $r\|T\| \le \sup\limits_{\|z-x_0\|\le r} \|Tz\|$

Procedemos ahora con la demostración del principio de acotación uniforme. Vamos a razonar por contrarrecíproco.

Por ser el más grande de todos infinito puedo construir esa $\{T_n\}$

Supongamos que $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty \Rightarrow \exists \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \mid \|T_n\| \ge 4^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y definimos la siguiente sucesión de $\mathcal{E}$:

$$x_0 = 0$$

Aplicamos el lema para $r = 1/3$ y sobre T_1 → $(r = 1/3)$ Construcción para x_1 y aplicando el lema tenemos que

$$\sup_{\|x-x_0\|<\frac{1}{3}} \|T_1 x\| \ge \frac{1}{3}\|T_1\| > \frac{2}{3}\frac{1}{3}\|T_1\| \Rightarrow \exists x_1 \in B(x_0, \tfrac{1}{3}) \text{ tal que}$$

↳ porque sup lo cumple estrictamente luego hay un elemento donde también se cumple

$$\|T_1 x_1\| > \frac{2}{3}\frac{1}{3}\|T_1\|$$

La construcción que hacemos es achicar el radio lo más posible.

$(r = \frac{1}{3^n})$ Construcción para x_n y aplicando el lema tenemos que

Ínfimo de las cotas superiores $\longrightarrow$ $\sup\limits_{\|x - x_{n-1}\| < \frac{1}{3^n}} \|Tx\| \geq \frac{1}{3^n}\|T_n\| > \frac{2}{3}\frac{1}{3^n}\|T_n\| \Rightarrow \exists x_n \in B(x_{n-1}, \frac{1}{3^n})$ tal que

$$\|T_n x_n\| > \frac{2}{3}\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

Vamos a probar que la sucesión es de Cauchy, sea $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$ tenemos que

Por definición de la sucesión es menor que $\frac{1}{3^m}$

Desig. triang.

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \_\_\_ + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{m-1}} + \_\_\_ + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3^{m-n}} + \_\_\_ + \frac{1}{3}\right)$$

$$\leq \frac{1}{3^n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{2}$$

Por tanto: $\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \_\_\_ + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$

y tenemos ya que $\{x_n\}$ es de Cauchy en $\mathcal{E}$ y como $\mathcal{E}$ es un espacio de Banach tenemos que $\{x_n\}$ converge a un $x \in \mathcal{E}$

Además, $\lim\limits_{m\to\infty}\|x_m - x_n\| = \|\lim\limits_{m\to\infty}(x_m - x_n)\| = \|\lim\limits_{m\to\infty} x_m - x_n\| = \|x - x_n\| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$

Continuidad de la norma

Desigualdad Triangular

Vamos ahora a estimar $\|T_n x\|$, pero $\|T_n x\| = \|T_n(x - x_n + x_n)\| \geq \|T_n x_n\| - \|T(x - x_n)\|$

$$\geq \frac{2}{3}\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\,\|x - x_n\| \geq \frac{2}{3}\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{1}{3^n}\|T_n\|\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{3^n}\|T_n\|\frac{1}{6} \geq \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n \longleftarrow \|T_n\| \geq 4^n$$

Tomando ahora $n \to \infty$ tenemos que $\|T_n x\| \geq \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n \longrightarrow \infty$ luego $\boxed{\sup\limits_{T \in \mathcal{F}}\|Tx\| \geq \sup\limits_{n \in \mathbb{N}}\|T_n x\| = \infty}$ □

La idea principal es acotar por abajo.

Lema de Baire

Sea X un espacio métrico completo y sea $\{X_n\} \subset X$ numerable, todos cerrados con interior vacío. Entonces:

$$\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \emptyset$$

No es trivial porque es una unión no numerable de cerrados. No podemos trabajar dos a dos por eso.

Lo que usaremos es el contrarrecíproco

$$\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \neq \emptyset \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathrm{Int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$$

-Demostración-

Tomamos $O_n = X \setminus X_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ que es abierto pues X_n es cerrado $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\mathrm{Int}(X_n) = \emptyset$ y $\partial(O_n) = \partial(X_n)$ tenemos que $\overline{X \setminus X_n} = \overline{O_n} = X$ luego O_n es denso $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $\forall A \subset X$ abierto $A \cap O_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sea $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, buscamos probar que es denso pues en ese caso $\mathrm{Int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \emptyset$. Dado $A \subset X$ abierto, tomamos $x_0 \in A$, $r_0 > 0$ tal que $\overline{B(x_0, r_0)} \subset A$ y elegimos $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1 \neq \emptyset$ pues O_1 es denso (abierto)

y $r_1 > 0$ tal que

$$\begin{cases} \overline{B(x_1,r_1)} \subset B(x_0,r_0) \cap O_1 \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

Por inducción ahora, defino las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{r_n\}$ tales que

$$\begin{cases} \overline{B(x_{n+1},r_{n+1})} \subset B(x_n,r_n) \cap O_{n+1} \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \leq \frac{r_0}{2^{n+1}} \end{cases}$$

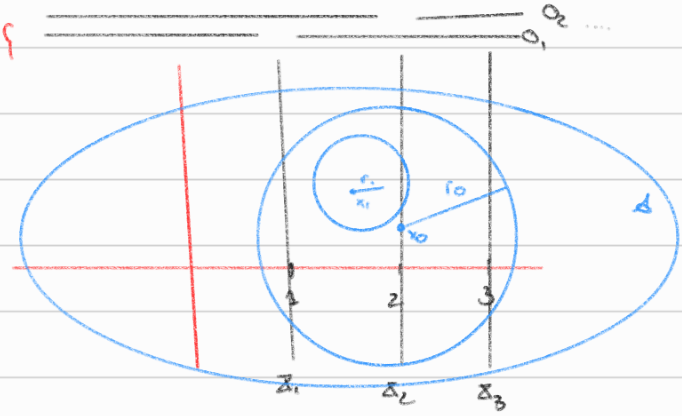
Vamos a ver que $\{x_n\}$ es de Cauchy, dados $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \geq n$

por ser esp. métrico $\longrightarrow$ $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \text{———} + d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{r_0}{2^m} + \frac{r_0}{2^{m-1}} + \text{———} + \frac{r_0}{2^{n+1}}$

$$= \frac{r_0}{2^n}\left[\frac{1}{2^{m-n}} + \frac{1}{2^{m-n-1}} + \text{———} + \frac{1}{2}\right] = \frac{r_0}{2^n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{r_0}{2^n}\cdot\frac{1/2}{1-1/2} = \frac{r_0}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Y tenemos ya que $\{x_n\}$ es de Cauchy, y de hecho, convergente por ser $\mathcal{E}$ completo. Sea $x := \lim_{n\to\infty} \{x_n\} \in \mathcal{E}$. Como $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ $\forall n \geq 0$ $\forall p \geq 0$ por construcción de la $\{x_n\}$.
Tomando paso al límite con $p \to \infty$ tenemos que $x \in \overline{B(x_n,r_n)}$ $\forall n \geq 0$ por el mismo motivo de antes, entonces, está claro que $x \in G$ pues por construcción $x \in \mathcal{E} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ (en cada paso evito un X_n más) y como $\overline{B(x_0,r_0)} \subset A$ tenemos que $x \in A \cap G$ y $A \cap G \neq \emptyset$ con A arbitrario $\Rightarrow$ G es denso y $\mathrm{Int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \emptyset$. □

$\mathbb{R}^2$ y $X_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = n\}$



Corolario 2.3

Sean E, F dos espacios de Banach y sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $T_n : E \longrightarrow F$ operador lineal. Si $\forall x \in E$ $\{T_n x\}$ converge a Tx, se tiene que:

(i) $\sup \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$

(ii) $T \in \mathcal{L}(E,F)$

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

- Demostración -

(i) Por hipótesis, tenemos que, dado $x \in \mathcal{E}$, $\{T_n x\}$ converge a Tx luego por definición de convergencia $T_n x \in B(Tx, 1)$ $\forall n \geq m$ [Sabemos que se encuentra en una bola y que puedo elegir uno arbitrario que lo cumplirá]

Entonces, $\{T_n x : n \geq m\}$ es acotado y por tanto $\{T_n x : n\in\mathbb{N}\}$ también lo es [Es unión de un acotado y un finito]

Esto nos permite deducir que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty$ $\forall x\in E$, lo que nos permite deducir que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$, aplicando el principio de acotación uniforme.

(ii) Veamos que $T\in L(E,F)$, consideramos $x,y\in E$ y $\lambda>0$:

$$T(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n x + \lambda T_n y = \lim_{n\to\infty} T_n x + \lambda \lim_{n\to\infty} T_n y = Tx + \lambda Ty$$

Para ver que T es continua usaremos el apartado (i). Sabemos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$$

Además, $\|T_n x\| \leq \|T_n\|\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \|x\|$ $\forall x\in E$. Como $\{\|T_n x\|\} \longrightarrow \|Tx\|$ por ser la norma continua, tenemos que $\|Tx\| \leq \boxed{\sup_{n\to\infty} \|T_n\|} \|x\|$ $\forall x \in E$. Y tenemos la continuidad

↳ Es una constante por (i).

(iii) Para ver este resultado, fijado $x\in E$ tenemos que

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| \overset{\|x\|>0}{=} \|x\| \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$$

Como x era fijo pero arbitrario tenemos que $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$

Corolario 2.4

Sea G un espacio de Banach y $B\subset G$. Si $\forall f\in G^*$ $f(B) = \{\langle f,x\rangle ; x\in B\}$ está acotado entonces $\boxed{B \text{ está acotado.}}$ Esto quiere decir que una forma útil de ver si un conjunto está acotado es estudiar si la imagen de toda aplicación del dual es un conjunto acotado

· Demostración-

Lo que buscamos demostrar es que $B\subset B(0,r)$ con $r>0$, es decir, $\|b\|\leq r$ $\forall b\in B$. Para llegar a ello, defino, para cada $b\in B$ el operador $T_b : G^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \langle f,b\rangle$ que obviamente es lineal y continua por serlo $f\in G^*$ [$f\in G^*$ es clave]

Buscamos ahora usar el principio de acotación con los operadores T_b, para ello, debemos comprobar que, para cada $f\in G^*$, $\sup_{b\in B} |T_b(f)| < \infty$. Pero $T_b(f) = f(b)$ y $f(B)$ es acotado por tanto

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < \infty \quad \forall f\in G^*$$

Aplicando ahora el principio de acotación uniforme tenemos que

$$\sup_{b\in B} \|T_b\| < \infty$$

Tomada ahora $f\in G^*$ tal que $\|f\|\leq 1$, por un corolario del tema anterior, sabemos que

$$\|b\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |f(b)| = \sup_{b\in B} |T_b(f)| \leq \sup_{b\in B} \|T_b\|\|f\| \underset{\|f\|\leq 1}{\leq} \sup_{b\in B} \|T_b\| < \infty \quad \forall b\in B$$

Por tanto, B está acotado □

Corolario 2.5 (Comparable con el 2.4)

Sea G un espacio de Banach y $B^* \subset G^*$. Supongamos que $\forall x \in G$, $\langle B^*, x\rangle = \{\langle f, x\rangle : f \in B^*\}$ $(G^*)^*$

está acotado en $\mathbb{R}$. Entonces: Es el mismo resultado que el Corolario 2.4 pero

B^* está acotado aplicado al dual.

-Demostración-

La idea es similar al corolario anterior, $\forall f \in B^*$, defino $T_f : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \langle f, x\rangle$ y es claro que $T_f \in \mathcal{L}(G, \mathbb{R})$ pues f es lineal y continua.

Debemos ahora ver que $\sup_{f \in B^*} |T_f x| < \infty$ $\forall x \in G$, pero esto es claro ya que $T_f x = \langle f, x\rangle$ y como $f \in B^*(x)$ que está acotado, tenemos que

$$\sup_{f \in B^*} |T_f x| = \sup_{f \in B^*} |f(x)| < \infty$$

Aplicando ahora el principio de acotación uniforme obtenemos que

$$\sup_{f \in B^*} \|T_f\| < \infty$$

Tomando ahora $x \in G$ con $\|x\| \le 1$ y aplicando la misma idea que en la demostración anterior

$$|f(x)| = |T_f(x)| \le \|T_f\| \, \|x\| \le \|T_f\| \le \sup_{f \in B^*} \|T_f\| \quad \forall f \in B^*$$

de donde

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} |T_f x| \le \sup_{f \in B^*} \|T_f\| \, \|x\| \le \sup_{f \in B^*} \|T_f\| < \infty \quad \forall f \in B^*$$

de donde deducimos que B^* está acotado. □

Teorema de la gráfica cerrada

Sean E, F espacios de Banach y $T : E \longrightarrow F$ es un operador lineal. Entonces:

T es continua $\iff$ $Gr(T) = \{(x, Tx) : x \in E\}$ es cerrado en $E \times F$

Nota: gráfica cerrada $\iff$ app. abierta $\iff$ acotación uniforme

- Demostración -

$\Rightarrow$) Ejercicio

$\Leftarrow$) Definimos $\|\cdot\|_T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|x\|_T := \|x\|_E + \|Tx\|_F$ $\forall x \in E$. Probamos que es una norma.

i) $\|x\|_T \ge 0$

ii) $\|\lambda x\|_T = \|\lambda x\|_E + \|T(\lambda x)\|_F = |\lambda| \, \|x\|_E + |\lambda| \, \|Tx\|_F = |\lambda| \, \|x\|_T$.

iii) $\|x\|_T = 0 \iff \|x\|_E + \|Tx\|_F = 0 \iff \|x\|_E = 0 \wedge \|Tx\|_F = 0$ pues ambos son positivos $\iff x = 0$.

iv) $\|x+y\|_T = \|x+y\|_E + \|T(x+y)\|_F \le \|x\|_E + \|y\|_E + \|Tx\|_F + \|Ty\|_F = \|x\|_T + \|y\|_T$

Además, vamos a ver que $\|\cdot\|_T$ es completa, si $\{x_n\}_T \subset E$ sucesión de Cauchy para $\|\cdot\|_T$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : p,q \geq m \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\|x_p - x_q\|_E}_{\geq 0} + \underbrace{\|Tx_p - Tx_q\|_F}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \\ \|Tx_p - Tx_q\| \leq \varepsilon \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \{x_n\}_E \text{ Cauchy} \\ \{Tx_n\}_F \text{ Cauchy} \end{array} \overset{E,F \text{ Banach}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \{x_n\} \longrightarrow x \ (\exists x \in E : \|x_n - x\|_E \to 0) \\ \{Tx_n\} \longrightarrow y \ (\exists y \in E : \|Tx_n - y\|_E \to 0) \end{array}$$

Buscamos probar que $Tx_n \longrightarrow Tx$. Dado $n \in \mathbb{N}$ sabemos que

$$\{(x_n, Tx_n)\} \subset g_r(T)$$

que es cerrado en $E \times F$. Como $\{x_n\} \to x$, $\{Tx_n\} \to y$ entonces $\{(x_n, Tx_n)\} \longrightarrow (x,y) \in g_r(T)$

por condición de cerrado $\Rightarrow y = Tx$.

Ahora, vamos a estudiar qué le pasa a $\{\|x_n - x\|_T\} = \{\|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F\} \longrightarrow 0$ luego

$\{x_n\} \longrightarrow x$ para $\|\cdot\|_T$ y tenemos que $(E, \|\cdot\|_T)$ es completo

Como $\|x\|_E \leq \|x\|_T \ \forall x \in E$, entonces usando el corolario 2.8. tenemos que $\|\cdot\|_E \equiv \|\cdot\|_T$.

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \leq k\|x\|_E \quad \forall x \in E \quad k \geq 1 \Rightarrow \|Tx\|_F \leq (k-1)\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

y tenemos que T es lipschitziana $\Rightarrow T$ es continua □