2. [30] Dados números $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se considera la transformación de $\Omega =]0,\infty[\times]0,\infty[$ a $\mathbb{R}^2$

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad (t,x) \in \Omega \mapsto (s,y), \quad s = \lambda x, \quad y = \mu t.$$

a) Determina $\Omega_1 = \varphi(\Omega)$ y prueba que φ define un difeomorfismo entre Ω y Ω_1.
b) Dada la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x}{t}$$

¿es admisible este difeomorfismo?
c) Se supone ahora que λ y μ son positivos, ¿Para qué valores de λ y μ se puede asegurar que la ecuación es invariante por el cambio de variable?

a) $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ dado por $\varphi(t,x) = (\lambda x, \mu t) = (s,y)$ donde $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Como $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ obtenemos que el codominio depende de estas constantes, luego

- si $\lambda > 0, \mu > 0 \Rightarrow \Omega_1 = \Omega$
- si $\lambda < 0, \mu > 0 \Rightarrow \Omega_1 = \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s<0, y>0\} = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$
- si $\lambda > 0, \mu < 0 \Rightarrow \Omega_1 = \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s>0, y<0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$
- si $\lambda < 0, \mu < 0 \Rightarrow \Omega_1 = \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s<0, y<0\} = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$

Veamos ahora que φ es un difeomorfismo (Ω_1 varía tal y como se dice, y π_i es la proyección canónica sobre la coordenada i)

- φ es de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ pues es fácil ver que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ donde

$$\varphi_1 : \Omega \longrightarrow \pi_1(\Omega_1) \qquad \varphi_2 : \Omega \longrightarrow \pi_2(\Omega_1)$$
$$(t,x) \longmapsto \lambda x \qquad (t,x) \longmapsto \mu t$$

y ambas de estas funciones son de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ luego $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ por ser producto de funciones clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$

- Definimos $\psi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$ dada por $\psi(s,y) = \left(\frac{y}{\mu}, \frac{s}{\lambda}\right) = (t,x)$ sabemos que, por la misma razón (sabiendo que $\mu \neq 0$ y $\lambda \neq 0$) que antes, $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_1)$

Veamos que $\psi = \varphi^{-1}$; para ello, bastará ver que

$$\varphi \circ \psi = Id_{\Omega_1} \quad \wedge \quad \psi \circ \varphi = Id_{\Omega}$$

i) $\varphi \circ \psi = Id_{\Omega_1}$; sea $(s,y) \in \Omega_1$ cualquiera entonces

$$(\varphi \circ \psi)(s,y) = \varphi(\psi(s,y)) = \varphi\left(\frac{y}{\mu}, \frac{s}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda s}{\lambda}, \frac{\mu y}{\mu}\right) = (s,y)$$

Como se quería demostrar.

ii) $\psi \circ \varphi = Id_{\Omega}$; sea $(t_0, x_0) \in \Omega$ cualquiera entonces

$$(\psi \circ \varphi)(t_0,x_0) = \psi(\varphi(t_0,x_0)) = \psi(\lambda x_0, \mu t_0) = \left(\frac{\mu t_0}{\mu}, \frac{\lambda x_0}{\lambda}\right) = (t_0, x_0)$$

Como se quería demostrar

Entonces obtenemos que $\psi = \varphi^{-1}$ y como $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_1)$ entonces hemos comprobado que φ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$

b) Recordando el difeomorfismo disponíamos de:

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega_1 \qquad\qquad \psi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$$
$$(t,x) \longmapsto (\lambda x, \mu t) \qquad\qquad (s,y) \longmapsto \left(\frac{y}{\mu}, \frac{s}{\lambda}\right)$$

donde Ω_1 depende de los valores de λ y μ, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $\psi = \varphi^{-1}$ difeomorfismo

Para ver que es admisible para la ecuación $x' = \frac{x}{t}$ bastará suponer que, si $x(t)$ es una solución de la ecuación entonces se cumple la condición de admisibilidad

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, x' \neq 0$$

Pero $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, x' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\frac{x}{t}$ ya que $x'(t) = \frac{x(t)}{t}$ al ser solución. Entonces

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) = \lambda x'$$

Luego $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\frac{x}{t} = \lambda x' \frac{x}{t} = \lambda \frac{x^2}{t^2} \neq 0$ pues $\lambda \neq 0$, $x > 0$, $t > 0$ por definición del dominio. En definitiva, el difeomorfismo φ es admisible para la ecuación $x' = \frac{x}{t}$.

c) Este ejercicio se puede realizar de dos formas:

i) Apoyarse en la teoría sabemos que la ecuación proporcionada es una ecuación homogénea dada por la función $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\xi \longmapsto \xi$ que es homogénea

Gracias a lo visto en teoría sobre los grupos de difeomorfismos invariantes de Sophus Lie sabemos que son invariantes por homotecias donde $\lambda = \mu \wedge \lambda > 0$, es decir, sólo nos movemos por la recta $y = x$

ii) Deducirlo mediante los pasos dados en teoría: mirar página 24 del apartado de Temario del repositorio suponiendo λ y μ en lugar de $\lambda > 0$ para llegar a $\lambda = \mu$ con $\lambda > 0$.