

Ejercicio 1. Calcular $\phi_9 \in \mathbb{Q}[x]$.

Para ello, conociendo un poco de teoría, hay dos formas de hacerlo; por definición o por recursión. Como por definición es tedioso lo haremos por recursión; para ello, sea $f = x^9 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ sabemos que

$$x^9 - 1 = \prod_{d|9} \phi_d$$

donde ϕ_d es el d -ésimo polinomio ciclotómico. Como $\phi_1 = x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ tenemos que

$$\phi_9 = \frac{x^9 - 1}{\phi_1 \phi_3} = x^6 + x^3 + 1$$

De hecho, por un proceso análogo, $\phi_3 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 2. Sea $\zeta \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva novena de la unidad, calcular todos los subcuerpos de $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Puesto que $\mathbb{Q}(\zeta)$ es el cuerpo de descomposición de $x^9 - 1$ estamos ante la novena extensión ciclotómica; por tanto, tenemos que el grupo de Galois de la extensión es un subgrupo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_9)$; de hecho, sabemos por teoría que $|\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))| = \varphi(9) = 6$ de donde $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta)) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_9)$.

Además, vemos que dicho grupo viene dado por los siguientes automorfismos:

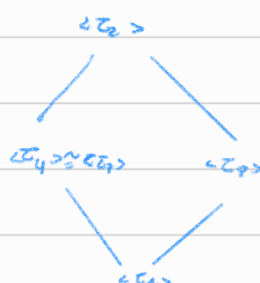
$$\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta)) = \{ \tau_j : j = 1, 2, 4, 5, 7, 8 \}$$

donde $\tau_j : \mathbb{Q}(\zeta) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$ tal que $\tau_j(\zeta) = \zeta^j$ $\forall j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. De hecho, de la teoría del tema 1 deducimos que $\{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5\}$ forman una \mathbb{Q} -base de $\mathbb{Q}(\zeta)$. Además, usando un poco más de teoría de extensiones ciclotómicas tenemos que, si $S \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ es el cuerpo de todos los raíces de $x^9 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ tenemos que $S = \langle \zeta \rangle \subset \mathbb{Q}(\zeta)^*$ de orden 9.

Calculamos el orden de cada τ_j sabiendo que $\zeta^9 = 1$.

$$\begin{array}{cccccc} \tau_1 & \tau_2 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_7 & \tau_8 \\ 1 & 6 & 3 & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

Como τ_2 tiene orden 6 tenemos que $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))$ es cíclico de orden 6 generado por τ_2 . De esta información podemos obtener que habrá un grupo de cada divisor de 6; por tanto el retículo es el siguiente



Veamos cuáles son los subcuerpos de $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ correspondientes a los subgrupos mediante la correspondencia de Galois.

i) Como ζ_7 deja fijo a todos los elementos sabemos que $K^{\langle \tau_1 \rangle} = \mathbb{Q}(\zeta_7)$; además, por la correspondencia de Galois sabemos que $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(\zeta_7)^{\langle \tau_1 \rangle}] = |\langle \tau_1 \rangle| = 1$.

ii) Como $\langle \tau_2 \rangle$ no deja fijo a ningún elemento del cuerpo \mathbb{Q} sabemos que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}(\zeta_7)^{\langle \tau_2 \rangle}$ de donde usando la correspondencia de Galois tenemos que, junto al lema de la Torre

$$[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(\zeta_7)^{\langle \tau_2 \rangle}] [\mathbb{Q}(\zeta_7)^{\langle \tau_2 \rangle} : \mathbb{Q}]$$

entonces, como $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(\zeta_7)^{\langle \tau_2 \rangle}] = |\langle \tau_2 \rangle| = 6$, $[\mathbb{Q}(\zeta_7)^{\langle \tau_2 \rangle} : \mathbb{Q}] = 1$ obteniendo la igualdad

De forma análoga se obtienen los demás subcuerpos.