Ejercicio 1 (3 puntos). Sean:

$$F = \{f \in C([-1,1],\mathbb{R}) : f(1) = 0\}, \qquad G = \{f \in C^1([-1,1],\mathbb{R}) : f(1) = 0\}.$$
$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}, \qquad \forall f \in X$$

a) ¿Es $(F, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

b) ¿Es $(G, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

b) Probemos que este espacio no es Banach; he aquí un contraejemplo. Definimos

$$f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1/n} - \sqrt{1 - 1/n}$$

claramente $f_n \in G$ $\forall n \in \mathbb{N}$; de hecho, es fácil probar que $\{f_n\}$ es de Cauchy en G. Sin embargo, se tiene que $\{f_n\} \longrightarrow f$ donde $f(x) = |x| - 1 \notin G$.

a) A diferencia del anterior este sí es Banach; para ello, usaremos que $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ es Banach y en consecuencia tenemos que $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es Banach $\forall K \subset \mathbb{R}$ compacto. Como $F \subseteq C([-1,1])$ bastará probar que F es un subespacio vectorial cerrado de $C([-1,1])$. Como la estructura de espacio vectorial no depende de la norma bastará ver que es cerrado. Para ello, sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ una sucesión convergente a $f \in C[-1,1]$ veamos que $f \in F$.
Para esto último bastará probar que $f(1) = 0$; ahora bien, como f_n converge puntualmente a f tenemos que $\{\langle f_n, x\rangle\} \longrightarrow \langle f, x\rangle$ de donde $\{\langle f_n, 1\rangle\} \longrightarrow \langle f, 1\rangle$ como $\langle f_n, 1\rangle = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que, si $\langle f, 1\rangle \neq 0$ $\{0\}_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 1$!!! por lo que $\langle f, 1\rangle = 0$ y $f \in F$.
Por tanto, $(F, \|\ \|_\infty)$ es Banach.

Ejercicio 2 (3 puntos). Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas en el espacio vectorial E. Prueba que si se verifica la propiedad

$$\text{“toda sucesión } \{x_n\} \subset E \text{ verificando } \left\{ \begin{array}{l} \{x_n\} \overset{(E,\|\cdot\|_1)}{\longrightarrow} x \\ \{x_n\} \overset{(E,\|\cdot\|_2)}{\longrightarrow} y \end{array} \right. \text{ comple } x = y\text{”}$$

entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

La idea será probar que $\exists c \in \mathbb{R}^+_0$ tal que $\|x\|_1 \le c\|x\|_2$ $\forall x \in E$ ó $\|x\|_2 \le c\|x\|_1$, $\forall x \in E$; pues en ese caso un corolario del teorema de la aplicación abierta nos asegura que las normas son equivalentes.
Para ello, definimos $T : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ dada por $T(x) = x$ $\forall x \in E$, buscamos probar que es continua y lineal.

i) Linealidad; sean $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que

$$\langle T, \lambda x + y\rangle = \lambda x + y = \lambda\langle T, x\rangle + \langle T, y\rangle$$

ii) Continuidad; para ver esto, trataremos de probar que $Gr(T) = \{(x, Tx) : x \in E\}$ es un conjunto cerrado; para ello, sea $\{(Tx_n, x_n)\}_{n \in E} \subset Gr(T)$ convergente a $(x,y) \in E \times E$; debemos probar que $(x,y) \in Gr(T)$.
Ahora bien, como $Tx_n = x_n$ tenemos que $\{(x_n, x_n)\} \longrightarrow (x,y)$ de donde se tiene que

$$\{x_n\} \longrightarrow_1 x \quad \wedge \quad \{x_n\} \longrightarrow_2 y$$

donde por hipótesis se tiene que $x = y$ y por tanto la gráfica es cerrado y T es continua.

Entonces, como T es continua tenemos que

$$\|x\|_2 = \|Tx\|_2 \leq \|T\| \, \|x\|_1 \quad \forall x \in E$$

Por tanto, hemos probado que $\|x\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1$ de donde se obtiene la equivalencia.

Ejercicio 3. Sea E un espacio de Banach.

a) [**1.5 puntos**] Si C es un subconjunto convexo de E, prueba que

C es cerrado en la topología de la norma $\Longleftrightarrow$ C es cerrado en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

b) [**0.75 puntos**] Sea una sucesión $\{f_n\} \subset E^*$ verificando

$\{\langle f_n, x\rangle\}$ es convergente para todo $x \in E$.

Prueba que existe $f \in E^*$ tal que

$$\{f_n\} \xrightarrow{*} f \text{ en } \sigma(E^*, E)$$

c) [**0.75 puntos**] Supongamos que E es reflexivo y sea $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que

$\{\langle f, x_n\rangle\}$ es convergente para cada $f \in E^*$.

Prueba que existe $x \in E$ tal que

$$\{x_n\} \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E, E^*)$$

d) [**1 punto**] Da un ejemplo de una sucesión $\{x_n\} \subset E = C_0$ tal que $\{\langle f, x_n\rangle\}$ es convergente para cada $f \in E^*$, pero no sea convergente débilmente en $\sigma(E, E^*)$.

a) Es una demostración de teoría

b) Para este apartado, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ tal que

$$\{\langle f_n, x\rangle\} \text{ converge } \forall x \in E$$

Veamos que la aplicación $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle \;\; \forall x \in E$ es la función que buscamos. Para ello, habrá que probar la linealidad y continuidad de f.

i) Linealidad; es consecuencia de la linealidad del límite.

ii) Continuidad; para esto, lo que vamos a probar es que $|\langle f, x\rangle| \leq M \|x\|$ para $M>0$ y $\forall x \in E$. Para ello, puesto que $f_n \in E^*$ y $\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \;\; \forall x \in E$ un corolario del principio de acotación uniforme nos asegura que $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\| < \infty$ de donde tenemos la continuidad.

Ahora bien, como $\{f_n\}$ converge puntualmente a f tenemos la convergencia débil.

c) Consideremos ahora que E es reflexivo y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E tal que $\{\langle f, x_n\rangle\}$ sea convergente para cada $f \in E$.

Como E es reflexivo tenemos que $J: E \longrightarrow E^{**}$ es sobreyectiva. Ahora bien, consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$ $\langle f, x_n\rangle = \langle Jx_n, f\rangle \;\; \forall f \in E^*$ luego, por hipótesis tenemos que, como $\{\langle f, x_n\rangle\}$ es convergente tenemos que $\{\langle Jx_n, f\rangle\}$ convergerá $\forall f \in E^*$ de donde, aplicando el apartado anterior $\exists \xi \in E^{**}$ tal que

$$\{Jx_n\} \xrightarrow{*} \xi$$

Ahora bien, como E es reflexivo tenemos que E^* es reflexivo de donde se deduce que

$$\sigma(E^{**}, E^*) = \sigma(E^{**}, E^{***})$$

lo que nos permite asegurar, por una parte como E es reflexivo $\exists x \in E \mid Jx = \xi$ y que la convergencia débil* es débil. Obteniendo así que

$$\{Jx_n\} \longrightarrow Jx$$

y como J es una isometría sobreyectiva tenemos que

$$\{x_n\} \longrightarrow x$$