

Ejercicio 1. Calcular  $\phi_9 \in \mathbb{Q}[x]$ .

Para ello, conociendo un poco de teoría, hay dos formas de hacerlo; por definición o por recursión.  
Como por definición es tedioso lo haremos por recursión; para ello, sea  $f = x^9 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$  sabemos que

$$x^9 - 1 = \prod_{d|9} \phi_d$$

donde  $\phi_d$  es el divisor polinomio ciclotómico. Como  $\phi_1 = x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$  tenemos que

$$\phi_9 = \frac{x^9 - 1}{\phi_1 \phi_3} = x^6 + x^3 + 1$$

Donde, por un proceso análogo,  $\phi_3 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ .

Ejercicio 2. Sea  $\zeta \in \mathbb{C}$  una raíz primitiva novena de la unidad, calcular todos los subcuerpos de  $\mathbb{Q}(\zeta)$ .

Puesto que  $\mathbb{Q}(\zeta)$  es el cuerpo de descomposición de  $x^9 - 1$  estaremos ante la menor extensión ciclotómica; por tanto, tenemos que el grupo de galos de la extensión es un subgrupo  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ ; de hecho, sabemos por teoría que  $|\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))| = \varphi(9) = 6$  de donde  $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta)) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}_9)$ .

A continuación veremos que dicho grupo viene dado por los siguientes automorfismos:

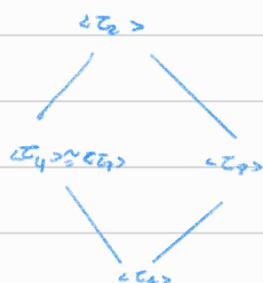
$$\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta)) = \{ \zeta_j : j = 1, 2, 4, 5, 7, 8 \}$$

donde  $\zeta_j : \mathbb{Q}(\zeta) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$  tal que  $\zeta_j(\zeta) = \zeta^j$ . De hecho, de la teoría del tema se deducen que  $\{\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^7, \zeta^8\}$  forman una  $\mathbb{Q}$ -base de  $\mathbb{Q}(\zeta)$ . Además, usando un poco más de teoría de extensiones ciclotómicas tenemos que, si  $S \subset \mathbb{Q}(\zeta)$  es el reynto de todas las raíces de  $x^9 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$  tenemos que  $S = \langle \zeta \rangle \subset \mathbb{Q}(\zeta)^G$  de orden 9.

Calculamos el orden de cada  $\zeta_j$  sabiendo que  $\zeta^9 = 1$ .

$$\begin{array}{cccccc} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_4 & \zeta_5 & \zeta_7 & \zeta_8 \\ 1 & 6 & 3 & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

Como  $\zeta_2$  tiene orden 6 tenemos que  $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))$  es cíclico de orden 6 generado por  $\zeta_2$ . De esta información podemos obtener que habrá un grupo de cada divisor de 6; por tanto el retículo es el siguiente



Veamos cuáles son los subcuerpos de  $\mathbb{Q}(\gamma)$  correspondientes a los subgrupos mediante la covariada de Galois.

i) Caso  $\tau_1$  dejó fijo a todos los elementos sabemos que  $K^{<\tau_1>} \supseteq \mathbb{Q}(\gamma)$ ; además, por la covariada de Galois sabemos que  $[\mathbb{Q}(\gamma):\mathbb{Q}(\gamma)^{<\tau_1>}]=|\text{C}_{\text{Gal}}(\gamma)|=1$ .

ii) Caso  $\tau_2$  no dejó fijo a ningún elemento del conjugado generado que  $\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{Q}(\gamma))^{<\tau_2>}$  de donde usando la covariada de Galois tenemos que, juntando la torre

$$[\mathbb{Q}(\gamma):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\gamma):\mathbb{Q}(\gamma)^{<\tau_2>}][\mathbb{Q}(\gamma)^{<\tau_2>}:\mathbb{Q}]$$

entonces, como  $[\mathbb{Q}(\gamma):\mathbb{Q}(\gamma)^{<\tau_2>}]=|\text{C}_{\tau_2}|=6$ ,  $[\mathbb{Q}(\gamma)^{<\tau_2>}:\mathbb{Q}]=1$  obteniendo igualdad

De forma análoga se obtienen los demás subcuerpos.