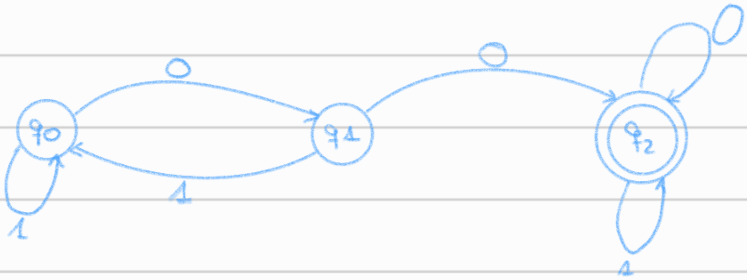
1. Considera el siguiente Autómata Finito Determinista (AFD) $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$, donde

   - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,
   - $A = \{0, 1\}$
   - La función de transición viene dada por:

$$\delta(q_0, 0) = q_1, \quad \delta(q_0, 1) = q_0$$
$$\delta(q_1, 0) = q_2, \quad \delta(q_1, 1) = q_0$$
$$\delta(q_2, 0) = q_2, \quad \delta(q_2, 1) = q_2$$

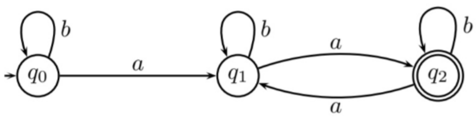
   - $F = \{q_2\}$

   Describe informalmente el lenguaje aceptado.



$L(M) \equiv$ al menos dos ceros consecutivos

2. Dado el AFD



   describir el lenguaje aceptado por dicho autómata.

$L(M) = \{u \in \{a,b\}^+ \mid N_a(u) = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. Claramente es así por la distribución necesaria para finalizar una palabra

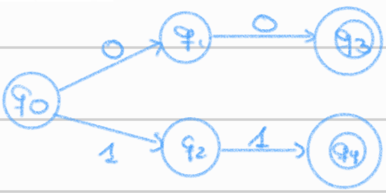
3. Dibujar AFDs que acepten los siguientes lenguajes con alfabeto $\{0, 1\}$:

   a) El lenguaje vacío,

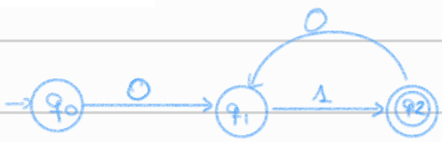
   b) El lenguaje formado por la palabra vacía, o sea, $\{\epsilon\}$,

   c) El lenguaje formado por la palabra 01, o sea, $\{01\}$,

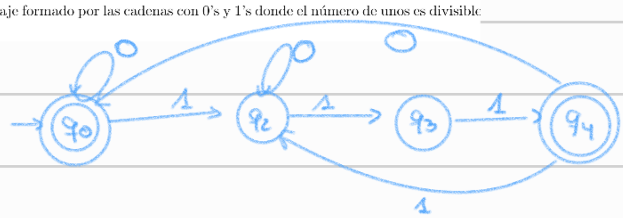
   d) El lenguaje $\{11, 00\}$,



   e) El lenguaje $\{(01)^i \mid i \geq 0\}$



   f) El lenguaje formado por las cadenas con 0's y 1's donde el número de unos es divisibl por 3.



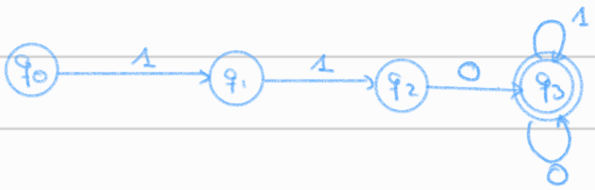
4. Obtener a partir de la gramática regular $G = (\{S, B\}, \{1, 0\}, P, S)$, con

$$P = \{S \to 110B, B \to 1B, B \to 0B, B \to \epsilon\},$$

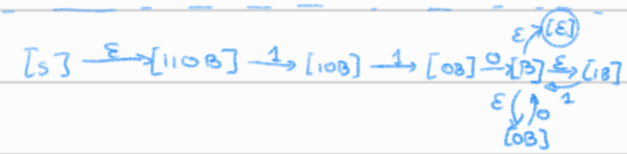
un AFND que reconozca el lenguaje generado por esa gramática.

$S \to 110B$
$B \to 1B$
$B \to 0B$
$B \to \varepsilon$

$\mathcal{L}(G) = \{uv \in \{0,1\}^+ \mid u = 110\}$



Según la teoría



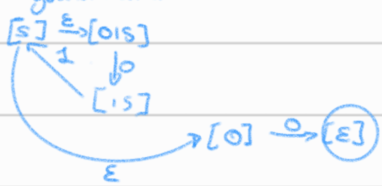
Es un AFD pero como AFD ⊆ AFND obtenemos que es AFD

5. Dada la gramática regular $G = (\{S\}, \{1, 0\}, P, S)$, con

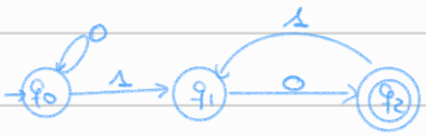
$$P = \{S \to S10, S \to 0\},$$

obtener un AFD que reconozca el lenguaje generado por esa gramática.

Según la teoría

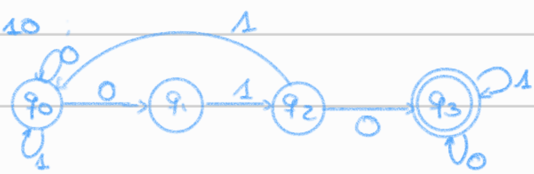


$\mathcal{L}(G) = \{uv \in \{0,1\}^+ \mid u = 0^i, v = (10)^j\}$



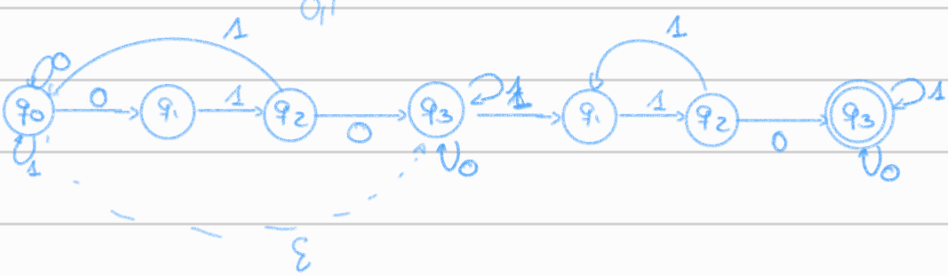
6. Construir un Autómata Finito No Determinista (AFND) que acepte las cadenas $u \in \{0, 1\}^*$ que contengan la subcadena 010. Construir un Autómata Finito No Determinista que acepte las cadenas $u \in \{0, 1\}^*$ que contengan la subcadena 110. Obtener un AFD que acepte las cadenas $u \in \{0, 1\}^*$ que contengan simultaneamente las subcadenas 010 y 110.

Contenga 010



Contenga 110.

Conjunto

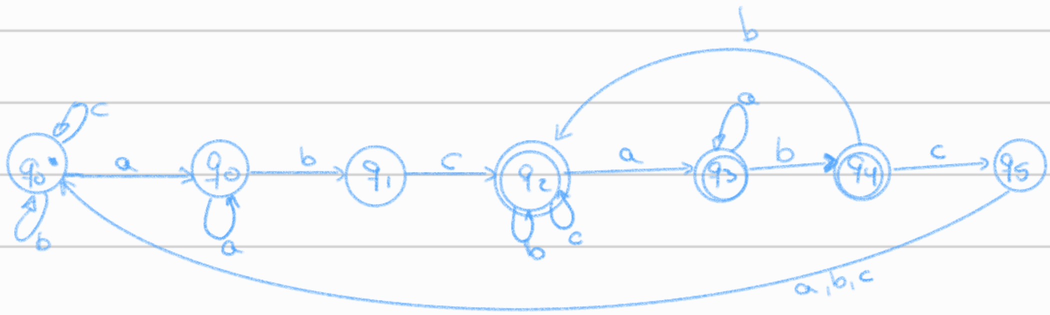


7. Construir un AFD que acepte el lenguaje generado por la siguiente gramática:

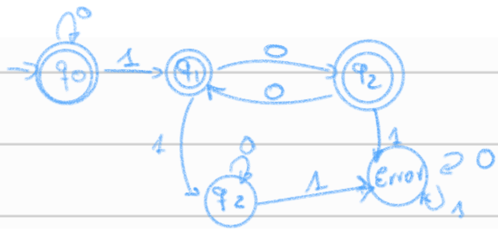
$$S \to AB, \quad A \to aA, \quad A \to c$$

$$B \to bBb, \quad B \to b$$

8. Construir un AFD que acepte el lenguaje $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ de todas las palabras con un número impar de ocurrencias de la subcadena abc.

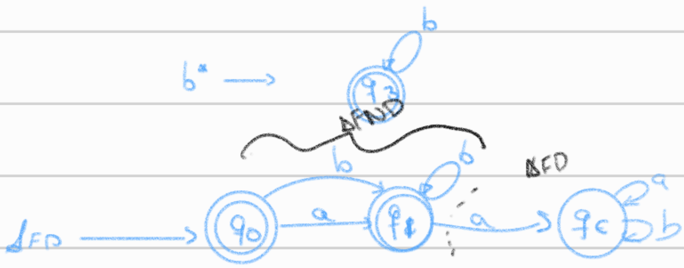


9. Sea L el lenguaje de todas las palabras sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ que no contienen dos 1s que estén separados por un número impar de símbolos. Describir un AFD que acepte este lenguaje.



10. Dada la expresión regular $(a + \epsilon)b^*$ encontrar un AFND asociado y, a partir de este, calcular un AFD que acepte el lenguaje

$ab^* + b^*$



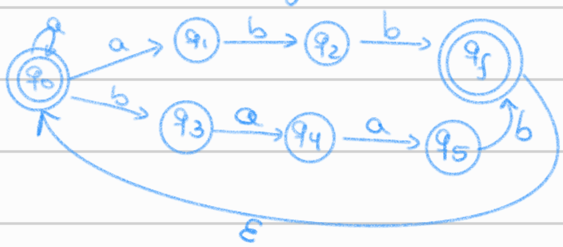
11. Obtener una expresión regular para el lenguaje complementario al aceptado por la gramática

$$S \to abA|B|baB|\epsilon$$

$$A \to bS|b$$

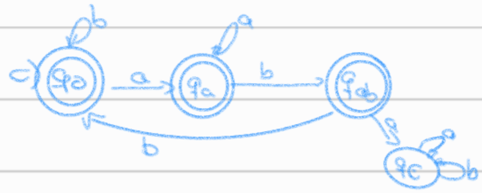
$$B \to aS$$

Autómata ε-AFND de la gramática



1. Sacar AFD
2. Sacar complementario invirtiendo finales y no finales
3. Sacar expresión regular (gramática primero)

Resultado: ¿?



12. Dar expresiones regulares para los lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$ dados por las siguientes condiciones:

   a) Palabras que no contienen la subcadena a — b^*

   b) Palabras que no contienen la subcadena ab — $a^* + b^*a^* = (\varepsilon + b^*)a^* = b^*a^*$

   c) Palabras que no contienen la subcadena aba — $(a^*bb+b)^*(a^*b+a^*+\varepsilon)$

Para aplicar el lema de Arden, el estado no debe incluir la palabra vacía.

14. Sobre el alfabeto $A = \{0, 1\}$ realizar las siguientes tareas:

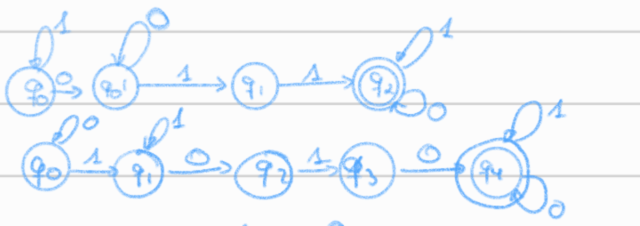
   a) Describir un autómata finito determinista que acepte todas las palabras que contengan a 011 o a 010 (o las dos) como subcadenas.

   b) Describir un autómata finito determinista que acepte todas las palabras que empiecen o terminen (o ambas cosas) por 01.

   c) Dar una expresión regular para el conjunto de las palabras en las que hay dos ceros separados por un número de símbolos que es multiplo de 4 (los símbolos que separan los ceros pueden ser ceros y puede haber otros símbolos delante o detrás de estos dos ceros).

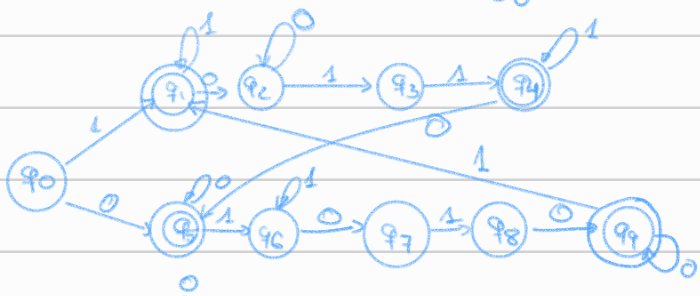
   d) Dar una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es divisible por 4.

a) 011:

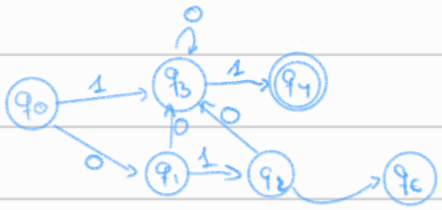


010:

Conjunto



b)



c) $(0+1)^* 0 (dddd)^* 0 (0+1)^*$ 3

d) $1^*(0\,1^*0\,1^*0\,1^*0\,1^*)^*$ 3

VAS MEJORANDO

16. Encuentra una expresión regular que represente el siguiente lenguaje:

$$L_2 = \{0^n 1^m \mid n \geq 1, m \geq 0, n \text{ múltiplo de 3 y } m \text{ es par}\}$$

Gramática lineal derecha

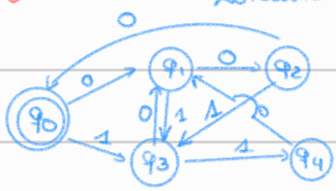
$S \to 0A \mid 1B$

$A \to 0C \mid 1B$ $\quad B \to 1D \mid 0A$

$C \to 0S \mid 1B$ $\quad D \to 1S \mid 0A$

Expresión regular $(000)^+(11)^*$ ↳ Explicación

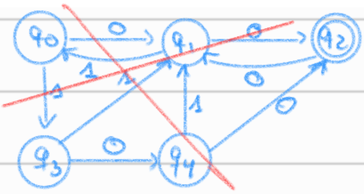
Autómata finito determinista



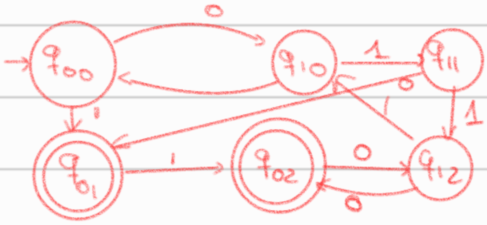
=> obtención por lema de Arden

17. Diseña un autómata finito determinista que reconozca el siguiente lenguaje:

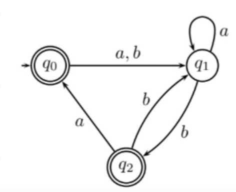
$$L_3 = \{u \in \{0,1\}^* \mid \text{ el número de 1's no es múltiplo de 3 y el número de 0's es par}\}$$



# 0 mod(2)	# 1 mod(3)	¿Válido?
0	0	X
0	1	Sí
0	2	Sí
1	0	X
1	1	X
1	2	X



18. Dar una expresión regular para el lenguaje aceptado por el siguiente autómata:



Definimos el sistema de ecuaciones:

$q_0 : \varepsilon + a q_1 + b q_1 = \varepsilon + (a+b) q_1$

$q_1 = a q_1 + b q_2$

$q_2 = \varepsilon + b q_1 + a q_0$

$\longrightarrow q_1 = a q_1 + b(\varepsilon + b q_1 + a q_0) = a q_1 + b + bb q_1 + ba q_0 = \underbrace{b + ba q_0}_{\alpha} + \underbrace{(a+bb)}_{\beta} q_1;$

$\hookrightarrow$ Arden $\longrightarrow q_1 = (a+bb)^* (b + ba q_0)$

Sustituyendo en q_0, $q_1 = (b+abq_0)(a+bb)^*$ obtenemos

$$q_0 : \varepsilon + (a+b)(a+bb)^* (b + ba q_0) = \underbrace{\varepsilon + (a+b)(a+bb)^* b}_{\alpha} \ \underbrace{(a+b)(a+bb)^* ba}_{\beta} q_0$$

$\Downarrow$ Arden

$$q_0 = ((a+b)(a+bb)^* ba)^* (\varepsilon + (a+b)(a+bb)^* b)$$

19. Dado el lenguaje

$$L = \{u110 \mid u \in \{1,0\}^*\},$$

encontrar la expresión regular, la gramática lineal por la derecha, la gramática lineal por la izquierda y el AFD asociado.

Expresión regular: $(0+1)^* 110$

Gramática lineal por la derecha:

$S \longrightarrow 0S \mid 1S \mid 1B$

$B \longrightarrow 10$

Gramática lineal por la izquierda

$S \longrightarrow A0$

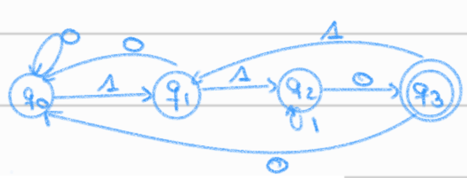
$A \longrightarrow B1$

$B \longrightarrow C1$

$C \longrightarrow C0 \mid C1 \mid \varepsilon$

$\boxed{\begin{array}{l} S \to A110 \\ A \to A1 \mid A0 \mid \varepsilon \end{array}}$

AFD asociado:



13. Determinar si el lenguaje generado por la siguiente gramática es regular:

$$S \to AabB,$$
$$A \to aA, \quad A \to bA, \quad A \to \epsilon,$$
$$B \to Bab, \quad B \to Bb, \quad B \to ab, \quad B \to b$$

En caso de que lo sea, encontrar una expresión regular asociada.

Se ve fácil que la expresión regular del lenguaje asociado es $(a+b)^*(ab)(ab+b)^+$ luego, al disponer de expresión regular, será una gramática regular.

Vamos a dar la gramática regular de todas formas:

$S \longrightarrow aS \mid bS \mid abA$

$A \longrightarrow abB \mid bB$

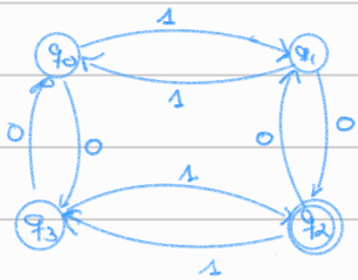
$B \longrightarrow \varepsilon$

ya que es regular por la derecha.

15. Construye una gramática regular que genere el siguiente lenguaje:

$$L_1 = \{u \in \{0,1\}^* \mid \text{ el número de 1's y de 0's es impar}\}$$

Para ello crearemos un autómata finito determinado:



q_0 = nº par de 0s y 1s

q_1 = nº par de 0s y nº impar 1s

q_2 = nº impar de 0s y nº impar 1s

q_3 = nº par de 1s y nº impar 0s

Luego la gramática viene dada por:

$S \longrightarrow 1A \mid 0C$

$A \longrightarrow 0B \mid 1A$

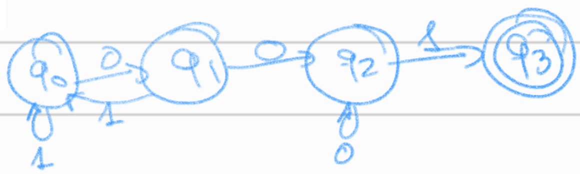
$B \longrightarrow 0A \mid 1C \mid \varepsilon$

$C \longrightarrow 0A \mid 1B$

21. Construir un autómata finito determinista que acepte el lenguaje de todas las palabras sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ que no contengan la subcadena 001.

Construir una gramática regular por la izquierda a partir de dicho autómata.

AFD



Luego la gramática regular por la izquierda viene dada por:

$S \longrightarrow S1 \mid A0 \mid \varepsilon$

$A \longrightarrow S1 \mid B0 \mid \varepsilon$

$B \longrightarrow B0 \mid \varepsilon$

22. Sea $B_n = \{a^k \mid k \text{ es multiplo de } n\}$. Demostrar que B_n es regular para todo n.

Podemos definir un autómata finito determinista genérico?

Escribir por inducción la demostración

Para $n=1$

Para $n>1$

Como es un autómata finito determinista obtenemos que B_n es regular $\forall n \in \mathbb{N}$

23. Decimos que u es un prefijo de v si existe w tal que $uw = v$. Decimos que u es un prefijo propio de v si además $u \neq v$ y $u \neq \epsilon$. Demostrar que si L es regular, también lo son los lenguajes

a) $NOPREFIJO(L) = \{u \in L \mid$ ningún prefijo propio de u pertenece a $L\}$

b) $NOEXTENSION(L) = \{u \in L \mid u$ no es un prefijo propio de ninguna palabra de $L\}$

24. Si $L \subseteq A^*$, define la relación $\equiv$ en A^* como sigue: si $u, v \in A^*$, entonces $u \equiv v$ si y solo si para toda $z \in A^*$, tenemos que $(uz \in L \Leftrightarrow vz \in L)$.

a) Demostrar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

b) Calcular las clases de equivalencia de $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$

c) Calcular las clases de equivalencia de $L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$

d) Demostrar que L es aceptado por un autómata finito determinístico si y solo si el número de clases de equivalencia es finito.

e) ¿Qué relación existe entre el número de clases de equivalencia y el autómata finito minimal que acepta L?

25. Dada una palabra $u = a_1 \ldots a_n \in A^*$, se llama $Per(u)$ al conjunto

$$\{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)} \, : \, \sigma \text{ es una permutación de } \{1, \ldots, n\}\}$$

.

Dado un lenguaje L, se llama $Per(L) = \bigcup_{u \in L} Per(u)$.

Dar expresiones regulares y autómatas minimales para $Per(L)$ en los siguientes casos:

a) $L = (00 + 1)^*$ $\Rightarrow$ $Per(L) = 1^*(01^*01^*)^*$

b) $L = (0 + 1)^*0$ $\Rightarrow$ $Per(L) = (0+1)^*0(0+1)^*$

c) $L = (01)^*$ $\Rightarrow$ $Per(L)$ no es regular ↳ lema de bombeo $N(0) = N(1)$, $Per(L) = \{u \in A^* \mid N_0(u) = N_1(u)\}$

¿Es posible que, siendo L regular, $Per(L)$ no lo sea?