1 Responda de forma razonada a las siguientes cuestiones breves:

a) La dinámica que rige el tamaño de muchas especies marinas cumple las siguientes hipótesis:
- La longitud máxima que puede alcanzar es un cierto valor K.
- El crecimiento en cada nueva medición es proporcional a lo que falta para alcanzar su longitud máxima teórica

$$L_{n+1} - L_n = \mu(K - L_n)$$

siendo L_n la longitud medida en el tiempo n-ésimo y $\mu > 0$.

Determine la longitud de equilibrio. ¿Bajo qué condiciones la longitud de equilibrio es asintóticamente estable?

b) Se considera la ecuación en diferencias homogénea $x_{n+2} - ax_{n+1} + x_n = 0$. ¿Para que valores del parámetro a pueden ser periódicas sus soluciones?

c) Encuentre una ecuación en diferencias homogénea de segundo orden $x_{n+2} - ax_{n+1} + x_n = 0$ cuyas soluciones sean periódicas de periodo mínimo 8.

a) Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \mu k + x(1-\mu)$ la función asociada a la ecuación en diferencias, calculamos sus puntos fijos:

$$x = \mu k + x(1-\mu) \iff 0 = \mu k - \mu x \iff x = k.$$

Por tanto el único punto de equilibrio depende del valor k.

Veamos cuándo es estable.

$$f'(x) = 1-\mu, \quad |f'(k)| = 1 \iff |1-\mu| = 1 \iff \begin{matrix} 1-\mu=-1 \iff \mu=2 \\ \vee \\ 1-\mu=1 \iff \mu=0 \end{matrix} \iff 0<\mu<2.$$

Por tanto para $0<\mu<2$ la solución constante $\{k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es AE

Veamos que ocurre para $\mu=0$ y $\mu=2$

·) $\mu=0$ $f(x)=x \Rightarrow$ cualquier solución es estable y además constante, veamos que también es AE:

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x_0 \text{ por inducción y continuidad y ser } C^\infty(\mathbb{R})$$

·) $\mu=2$. $f(x) = 2k - x$, $f'(x) = -1$, $f''(x)=0$, $f'''(x)=0$ Por tanto vamos por la definición

Sea $\varepsilon>0$ $\exists \delta$ dado tal que $|x_0-k|<\delta$, $|x_n - k| = |f^n(x_0) - k| \overset{?}{<} \varepsilon$

Veamos quién es $f^n(x_0)$ con $x_0 \in N$ entorno de k

$$f(x_0) = 2k - x_0$$
$$f(x_1) = 2k - x_1 = 2k - f(x_0) = 2k - 2k + x_0 = x_0$$
$$f(x_2) = 2k - x_0$$
$$\vdots$$
$$f^{2n+1}(x_0) = 2k - x_0$$
$$f^{2n}(x_0) = x_0$$

Por tanto, queda claro por inducción sobre $n\in\mathbb{N}$ que $\{x_n\}$ es un 2-ciclo dado por los valores $\{x_0, 2k-x_0\}$

Veamos su estabilidad

$f(x) = 1$

Entonces $|f'(x) f'(x_1)| = 1 > 0 \Rightarrow$ es $d\varepsilon$.

b) No disponemos conocimiento para su resolución

c) No disponemos conocimiento para su resolución

2 Un hospital recibe cada semana 20 pacientes aquejados de una determinada enfermedad infecciosa. Se ha comprobado que al cabo de una semana una fracción α de los pacientes abandona el hospital (bien porque fallecen o bien porque reciben el alta).

a) Determine en función de α el número mínimo de camas que a largo plazo deberá reservar el hospital para atender a los pacientes de esta enfermedad.

b) Al declararse una epidemia, se observa que el número de nuevos pacientes que ingresan crece semanalmente según la secuencia $\{20, 30, 40, 50, \ldots\}$. ¿Existe algún valor del parámetro α que nos permita fijar el número mínimo de camas que a largo plazo deberá reservar el hospital para atender a todos los pacientes que se reciben?

a) Sea x_n el número de camas a reservar en la semana n-ésima tenemos que:

$$x_n = (1-\alpha) x_{n-1} + 20$$

Buscamos obtener una solución a la ecuación en diferencias según un valor $x_0 \in \mathbb{N}$ dado. Para ello, tomamos $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1-\alpha)x + 20$ como función asociada a la ecuación en diferencias y buscamos sus puntos fijos.

$$x = (1-\alpha)x + 20$$
$$0 = 20 - \alpha x$$
$$x = \frac{20}{\alpha}$$

Tomamos el cambio de variable $Y_n = x_n - \frac{20}{\alpha} = x_n - c$, veamos que $Y_n = u Y_{n-1}$

$$Y_n = x_n - c = (1-\alpha) x_{n-1} + 20 - c = (1-\alpha) x_{n-1} + \cancel{20} - c(1-\alpha) - \cancel{20} = (1-\alpha)(x_{n-1} - c) = (1-\alpha) Y_{n-1}$$

y por tanto se cumple que Y_n es solución de $Y_{n+1} = (1-\alpha) Y_n$. Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$x_n - c = (1-\alpha)^n (x_0 - c) \Leftrightarrow x_n = (1-\alpha)^n (x_0 - c) + c$$

Por tanto, debemos distinguir casos:

·) Si $(1-\alpha) < 1 \Rightarrow \{x_n\} \to c$

·) Si $(1-\alpha) > 1 \Rightarrow \{x_n\}$ diverge

·) Si $(1-\alpha) = 1 \Rightarrow f(x) = x + 20$ y no tiene puntos fijos. Entonces:

Sea $x_0 \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario, tenemos que:

$$x_1 = f(x_0) = x_0 + 20$$
$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = x_1 + 20 = x_0 + 20 + 20 = x_0 + 2 \cdot 20$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_0 + n 20$$

y por tanto $\{x_n\}$ diverge

b) Sabemos que $\{x_{n+1}\} = (1-\alpha)\, x_n + \delta_n$ donde $\delta^n = n \cdot 10$. Por tanto tenemos que

$\{x_{n+1}\} = (1-\alpha) x_n + 10n$

Iteramos:

Sea $x_0 \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario, tenemos que

$$x_1 = f(x_0) = (1-\alpha)x_0 + 10$$

$$x_2 = f(f(x_0)) = (1-\alpha)x_1 + 10 = (1-\alpha)\left[(1-\alpha)x_0 + 10\right] + 10 = (1-\alpha)^2 x_0 + (1-\alpha)10 + 10$$

$$x_3 = f^3(x_0) = (1-\alpha)x_2 + 10 = (1-\alpha)^2 x_1 + (1-\alpha)10 + 10 = (1-\alpha)^2\left[(1-\alpha)x_0 + 10\right] + (1-\alpha)10 + 10 =$$

$$= (1-\alpha)^3 x_0 + 20(1-\alpha) + 10 = (1-\alpha)^3 x_0 + (1-\alpha)(10+10) + 10$$

$\vdots$

$$x_n = (1-\alpha)^n x_0 + 10(1-\alpha)\sum_{i=0}^{n-1} i + 10 = (1-\alpha)^n x_0 + 10(1-\alpha)(n-1) + 10$$

Probando por inducción tenemos lo que buscamos.

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} (1-\alpha)^n x_0 + 10(1-\alpha)(n-1) + 10 \longrightarrow \infty, \text{ si } 1-\alpha \neq 1$$

Si $1-\alpha = 1 \Rightarrow x_n = x_0 + 10(n-1) + 10 \longrightarrow \infty$.

3 Se considera la ecuación en diferencias no lineal

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{\beta + x_n^2} \qquad (1)$$

con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Determine la región del plano de parámetros (α, β) en la que la ecuación en diferencias (1) posee una solución constante positiva que sea localmente asintóticamente estable.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\alpha x}{\beta + x^2}$ vamos a calcular sus puntos fijos y evaluar condiciones de α y β para ver cuándo son AE.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ veamos si es un punto fijo

$$x_0 = f(x_0) \Leftrightarrow \frac{\alpha x_0}{\beta + x_0^2} = x_0 \Leftrightarrow x_0(\beta + x_0^2) = \alpha x_0 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = 0} \vee \beta + x_0^2 = \alpha \Leftrightarrow x_0^2 = \alpha - \beta \Leftrightarrow \boxed{x_0 = \sqrt{\alpha - \beta}}\ \boxed{x_0 = -\sqrt{\alpha - \beta}}$$

Veamos la estabilidad de las soluciones constantes $\{x_0\}$

$$f'(x) = \frac{\alpha(\beta + x^2) - 2\alpha x^2}{(\beta + x^2)^2} = \frac{\alpha\beta + \alpha x^2 - 2\alpha x^2}{(\beta + x^2)^2} = \frac{-\alpha x^2 + \alpha\beta}{(\beta + x^2)^2} = \frac{\alpha(\cancel{x^2+\beta})}{(\beta + x^2)^{\cancel{2}}} = \frac{\alpha}{\beta + x^2}$$

·) $x_0 = 0$ es LAE $\Leftrightarrow |f'(0)| < 1$

$$|f'(0)| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Por tanto es AE si $-\beta < \alpha < \beta$

Veamos que ocurre en los casos extremos

$\cdot$) $\alpha = -\beta \Rightarrow f(x) = \dfrac{-\beta x}{\beta + x^2}$, $f'(x) = \dfrac{-\beta}{\beta + x^2}$ $f''(x) = \dfrac{2\beta x}{(\beta + x^2)^2}$ $f'''(x) = \dfrac{2\beta(\beta+x^2)^2 - 8\beta x^2(\beta+x^2)}{(\beta+x^2)^4}$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = \dfrac{2\beta^3}{\beta^4} = \dfrac{2}{\beta}$

Por tanto $3f''(0)^2 + 2f'''(0) = \dfrac{4}{\beta}$. Si $\dfrac{4}{\beta} < 0$ inestable $\Rightarrow 4 > \beta$

$\cdot$) $\alpha = \beta \Rightarrow f(x) = \dfrac{\beta x}{\beta + x^2}$, $f'(x) = \dfrac{\beta}{\beta + x^2}$, $f''(x) = \dfrac{-2\beta x}{(\beta+x^2)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{-2\beta(\beta+x^2)^2 + 8\beta x^2(\beta+x^2)}{(\beta+x^2)^4}$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = \dfrac{-2\beta^3}{\beta^4} = \dfrac{-2}{\beta} < 0 \Leftrightarrow -2 < \beta$

Por tanto, hasta ahora sabemos $-2 < \beta$

Habría que hacer lo mismo con las demás y sacar las condiciones restantes.

4 Se considera una ecuación en diferencias homogénea de tercer orden

$$x_{n+3} + a_2 x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0. \qquad (2)$$

a) Determine el valor de los parámetros a_0, a_1 y a_2 para que la sucesión $\{n + 2^n\}_{n \geq 0}$ sea solución de la ecuación homogénea (2).

b) Con los valores obtenidos en el apartado anterior determine la solución general de la ecuación en diferencias completa

$$x_{n+3} + a_2 x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 1 \qquad (3)$$

Granada, a 8 de Noviembre de 2018

No hemos recibido conceptos suficientes, en esta asignatura, para resolver dichas ecuaciones.