1. Se considera la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si, C está acotado.

$\Rightarrow)$
Supongamos que C no está acotado, veamos que no es uniformemente convergente. Como C no acotado en $\mathbb{R} \Rightarrow$ podemos tomar la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Veamos la convergencia puntual de $\{f_n(x)\}$. Fijado $x \in \mathbb{R}$ $\{\frac{x}{n}\} \longrightarrow 0$. Por tanto $\{f_n\} \longrightarrow 0$ puntualmente.

$$\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{\frac{n}{n}\} \longrightarrow 1 \Rightarrow \text{no converge uniformemente en } C$$

Hemos demostrado que si $\{f_n\}$ converge uniformemente en $C \Rightarrow C$ acotado

$\Leftarrow)$
Supongamos que $C \subset \mathbb{R}$ está acotado $\Rightarrow C \subset [-\delta, \delta] \mid \delta \in \mathbb{R}^+$. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[-\delta, \delta]$, como $C \subset [-\delta, \delta] \Rightarrow \{f_n\}$ converge uniformemente en C.
Sabemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 en $\mathbb{R}$

$$\left|\frac{x}{n}\right| \leq \left|\frac{\delta}{n}\right| = \frac{|\delta|}{n} \Rightarrow \text{Como } \{\frac{\delta}{n}\} \longrightarrow 0 \ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \{\frac{-\delta}{n}\} \longrightarrow 0 \ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$$

Por el primer criterio de la convergencia uniforme tenemos que $\{f_n\}$ converge a 0 en $[-\delta, \delta]$ y por ende en C.

2. Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$g_n(x) = \frac{2\,n\,x^2}{1 + n^2\,x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+ , \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[\,\delta\,,\,+\infty\,[$, pero no en el intervalo $[\,0\,,\,\delta\,]$.

Probemos primero la segunda afirmación. Para ello buscamos una sucesión $\{x_n\} \mid x_n \in [0,\delta]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tomamos $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\} \mid \exists n \in \mathbb{N}$ ✓ $\frac{1}{\sqrt{n}} < \delta \ \forall \delta > 0$

Ahora estudiamos la convergencia puntual de $\{g_n\}$ en $\mathbb{R}$. Fijado $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\left\{ \frac{2n\,x^2}{1+n^2x^2} \right\} \to 0 \quad \text{pues} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n\,x^2}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Por tanto, como x es arbitrario, tenemos que $\{g_n\}$ converge puntualmente a 0 en $\mathbb{R}$.

$$\{g_n(x_n) - g(x_n)\} = \left\{ \frac{2n\,\frac{1}{n}}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right\} = \left\{\frac{2}{2}\right\} = \{1\} \not\to 0$$

Por tanto, por el segundo criterio de la convergencia uniforme $\{g_n\}$ no converge uniformemente en $[0,\delta]$

Estudiemos ahora la primera afirmación

Para ello, veamos que $g_n|_{[\delta,\infty[}$ es decreciente

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, vemos que g_n es derivable $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$g_n'(x) = \frac{4xn(1+n^2x^4) - 2nx^2(4n^2x^3)}{(1+n^2x^4)^2}$$

Como $x > 0 \Rightarrow g_n'(x) \leq 0 \iff 2\,(1+n^2x^4) \leq x\,(4n^2x^3) \iff$

$$2 + 2n^2x^4 \leq 4n^2x^4$$

$$2 \leq 2n^2$$

$1 \leq n^2$ Cierto pues $0 \notin \mathbb{N}$ y $1^2 \geq 1$

Por tanto g_n es decreciente $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{2n\delta^2}{1+n^2\delta^4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Como $\left\{\frac{2n\delta^2}{1+n^2\delta^4}\right\} \to 0 \Rightarrow \{g_n\}$ converge uniformemente a g_0 en $[\delta,\infty[$

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g_n(x) = n (\cos x)^n \operatorname{sen} x \qquad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < \pi/2$, probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en el intervalo $[\rho, \pi/2]$, pero no en $[0, \rho]$.

Antes de nada estudiaremos su convergencia puntual en $[0, \pi/2]$

Fijado $x \in [0, \pi/2]$ $\qquad h_n(x) = n (\cos x)^n \operatorname{sen} x \leq n (\cos x)^n$

Por la escala de infinitos tenemos que $n \gg (\cos x)^n$ $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{h_n(x)\} \to 0$ puntualmente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ pues $h_n(0) = 0$, $h_n(\frac{\pi}{2}) = 0$

Veamos que h_n no converge uniformemente en $[0, \rho]$ $\forall \rho \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Para ello, tomaremos una sucesión que cumple $\{h_n(x_n)\} \not\to 0$. Dicha sucesión será $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ pero tomaremos $\{\frac{1}{n}\} / n \in \mathbb{N} \wedge \frac{1}{n} < \rho$ para algún ρ fijado

$$h_n(x_n) = h_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = n \left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n \operatorname{sen} \tfrac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} n (\cos \frac{1}{n})^n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} (\cos \frac{1}{n})^n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. Por tanto, no converge uniformemente en $[0, \rho]$

Veamos que sí lo hace para $[\rho, \frac{\pi}{2}]$. Para ello ver que es decreciente y tomar $\rho_n = h_n(\rho)$.
Por el criterio 1 tenemos que es unif. convergente en $[\rho, \frac{\pi}{2}]$ $\forall \rho \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

4. Sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1 + n|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Convergencia puntual, es evidente que converge puntualmente 0 en $\mathbb{R}$

Veamos que no converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Basta tomar $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que diverge pero es una sucesión de nºs reales $\Rightarrow$ veamos que $\{\varphi_n(x_n)\} \not\to 0$

$$\varphi_n(x_n) = \varphi_n(n) = \frac{n^2}{1 + n|n|} = \frac{n^2}{1+n^2}$$

Es claro que $\{\frac{n^2}{1+n^2}\} \to 1 \Rightarrow \{\varphi_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado $\Rightarrow \forall x \in \mathcal{C}\ \exists m \in \mathbb{N} \mid |x| < m$. Gracias a esto

$$|\varphi_n(x)| = \frac{|x|\,|x|}{1+n|x|} \leq \frac{|x|^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{m}{n}$$

Para m fijo $\Rightarrow \left\{\frac{m}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ y $|\varphi_n(x)| \leq \frac{m}{n}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\varphi_n\}$ conv. uniformemente a 0 en $\mathcal{C}$

5. Se considera la sucesión $\{\psi_n\}$ de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\psi_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dados $r, \rho \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1 < \rho$, estudiar la convergencia uniforme de $\{\psi_n\}$ en los conjuntos $[0, r]$, $[r, \rho]$ y $[\rho, +\infty[$.

Veamos la convergencia puntual:

Sea $x \in [0,1[\Rightarrow \{\varphi_n\}$ conv. puntualmente a 0

Sea $x = 1 \Rightarrow \{\varphi_n(1)\} \longrightarrow \frac{1}{2}$

Sea $x > 1 \Rightarrow \{\varphi_n\} \longrightarrow 1$ puntualmente

·) Veamos que en $[0,r]$, $0<r<1$ φ_n converge uniformemente a 0.

$$\frac{x^n}{1+x^n} \leq \frac{r^n}{1+x^n} \leq r^n \longrightarrow 0$$

Por tanto $|\varphi_n(x)| \leq |r^n|\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\varphi_n\}$ conv. unif a 0 en $[0,r]$

·) Veamos que ocurre en $[r,\rho]$. Sabemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < \rho \end{cases}$$

función que no es continua en $[r,\rho]$. Entonces como φ_n es continua en $\mathbb{R}_0^+$ tenemos que $\varphi(x)$ debe de ser continua si $\{\varphi_n\}$ convergiera unif a φ en $[r,\rho]$!! Conservación de la continuidad

·) Veamos qué ocurre en $[\rho,\infty[$. Para ello, veamos que $\exists \{\rho_n\} \longrightarrow 0 \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \rho_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

Por ser decreciente

$$\left|\frac{x^n}{1+x^n} - 1\right| = \left|\frac{x^n - 1 - x^n}{1+x^n}\right| = \left|\frac{-1}{1+x^n}\right| = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{\rho^n}$$

Por tanto como $\left\{\frac{1}{\rho^n}\right\} \longrightarrow 0 \Rightarrow \{\varphi_n\}$ converge uniformemente a φ en $[\rho,\infty[$