Práctica 1. Continuidad

Ejercicios propuestos

1. Estudiar la existencia de límite en el origen para los campos escalares definidos, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por

$$\textbf{(a)}\quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\textbf{(b)}\quad g(x,y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2}$$

$$\textbf{(c)}\quad h(x,y) = \frac{\log(1 + x^4)\,\operatorname{sen}^2 y}{y^4 \,+\, x^8}$$

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, como se indica:

$$\textbf{(a)}\quad f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

$$\textbf{(b)}\quad f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si} \quad x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si} \quad x^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\textbf{(c)}\quad f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$$

$$\textbf{(d)}\quad f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x}{y}\operatorname{arc\,tg}(x^2+y^2) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia de límite en el origen para el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) \;=\; \frac{x^n\, y^n}{x^2\, y^2 \,+\, (x-y)^2} \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

4. Dados $\alpha, b \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto $(0,b)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) \;=\; x^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

5. Dado $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, estudiar la existencia de límite en el punto u del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{u\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y,z) \;=\; \frac{xyz}{|x-a| + |y-b| + |z-c|} \qquad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{u\}$$

1. a) $g(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$?

Sea $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x,y) \neq (0,0)\}$ es abierto $\Rightarrow$ como es una función racional, es continua en $\mathcal{U}$. Lo es en $(0,0)$?

$\beta = \{e_1, e_2\} = \{(1,0),(0,1)\}$

Calculemos límites parciales. Consideramos el cambio de variable $g(x,y) = g(a + te_n)$

$\lim_{t \to 0} g(t,0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{t^2}{t^2} = 1$

$\lim_{t \to 0} g(0,t) = \lim_{t \to 0} \dfrac{-t^2}{t^2} = -1$

Luego no tiene límite $\Rightarrow$ no es continua en $(0,0)$

b) $g(x,y) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$

Sea $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ que es abierto por ser complementario de un cerrado

Veamos los límites parciales. Tomamos el cambio de variable $g(x,y) = g(a + te_n) = g(0,0) + te_n)$ $t \in \mathbb{R}, \ n\in\{1,2\}$

$\lim_{t \to 0} g(t,0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{t^2 \operatorname{sen}(0)}{t^2 + 0} = \dfrac{\cancel{t^2} \cdot 0}{\cancel{t^2}} = 0$

$\lim_{t \to 0} g(0,t) = \lim_{t \to 0} \dfrac{0 \cdot \operatorname{sen}(t)}{0 + t^2} = \lim_{t \to 0} \dfrac{0}{t^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{t \to 0} \dfrac{0}{2t} = \dots = 0$

Luego el único valor posible de límite con $(x,y) \to (0,0)$ es 0. Busquemos una acotación:

$x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow$

$|g(x,y)| = \left| \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} \right| = \left| \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \right| |\cancel{\operatorname{sen}}^{1}(y)| \leq \left| \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \right| \Rightarrow$ Si tomamos $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$ deshacemos el cambio de variable

$\Rightarrow \left| \dfrac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta}{\cancel{\rho^2} \cos^2\theta + \cancel{\rho^2}\operatorname{sen}^2\theta} \right| = \left| \dfrac{\cancel{\rho^2}}{\cancel{\rho^2}} \right| |\cos^2\theta| = |\cos^2\theta| \leq |x^2| = 0$

Luego el límite buscado es 0 y por tanto es continua en $(0,0)$

c) $h(x,y) = \dfrac{\log(1+x^4)\operatorname{sen}^2(y)}{y^4 + x^8}$

Sea $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, es fácil ver que es continua puesto que el numerador es producto de dos factores composición de continuas y el denominador es continua.

Tomamos límites parciales, luego $g(x,y)=f((0,0)+te_u)\ \forall u\in\{1,2\}$

$$\lim_{t\to 0} h(t,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t^4)\cdot 0}{t^8+0^4}\ \frac{\lim 0}{t\to t^8}=\dots=\frac{0}{8!}=0$$

$$\lim_{t\to 0} h(0,t)=\lim_{t\to 0}\frac{0\cdot \operatorname{sen}^2(t)}{t^4}=\left[\frac{0}{4}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t^2}\cdot\cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}}\cdot\cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t^2}=\frac{0}{2}=0$$

Como parece que tiene límite, buscamos una acotación:

puedo hacerlo?

$$|h(x,y)|=\left|\frac{\log(1+x^4)\operatorname{sen}^2(y)}{y^4+x^8}\right|=\left|\frac{\log(1+x^4)}{y^4+x^8}\right||\operatorname{sen}^2(y)|\leq\left|\frac{\log(1+x^4)}{y^4+x^8}\right|$$

definimos $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+x^4)}{x^4} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ $\Rightarrow \varphi$ continua $\Rightarrow$ Sabemos que $x^4\varphi(x)=\log(1+x^4)$

$\hookrightarrow$ y $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$

φ continua y $x\varphi(x)=\operatorname{sen}(x)$

cuando $x\to 0$

$$\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\left|\frac{\log(1+x^4)}{y^4+x^8}\right|=\left|\frac{x^4\varphi(x)}{y^4+x^8}\right|=\left|\frac{x^4}{y^4+x^8}\right||\varphi(x)|$$

Tomamos $(x,y)=(t,t^2)\Rightarrow \lim_{t\to 0} h(t,t^2)=\frac{t^4t^4}{t^8+t^8}\cancelto{1}{\varphi(t)}\cdot\cancelto{1}{\varphi(t^2)}=\cancelto{1}{\frac{t^8}{t^8}}\cdot\frac{1}{2}$ y sin embargo debería ser $0\Rightarrow\nexists\lim$ h no es continua.

→ seguramente salga por límites direccionales

2. a) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ 0 & \text{si } x=y\end{cases}$

Sea $\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=y\}$, $\mathbb{R}\setminus\mathcal{U}$ es abierto $\Rightarrow\mathcal{U}$ es cerrado

Luego la continuidad en $\mathbb{R}\setminus\mathcal{U}$ es clara por ser racional

Veamos en $\mathcal{U}$:

•) $x=y=0\Rightarrow$ Tomamos $g(x,y)=f((0,0)+te_u)\ \forall u\in\{1,2\}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to 0} g(t,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1\\ \lim_{t\to 0} g(0,t)&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-t}=-1\end{aligned}\right\}\text{ No tiene límite}$$

NOTACIÓN MAL

$x = y \neq 0 \Rightarrow$ consideramos $f(x,y) = f(x, \lambda x)$ $\lambda \in \mathbb{R}^*$ luego

$\lim_{x \to y} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to y} \frac{x+\lambda x}{x-\lambda x} = \frac{x(\lambda+1)}{x(1-\lambda)} = \frac{\lambda+1}{-\lambda+1}$ como λ no fijo $\Rightarrow$ no tiene límite cuando $x \to y$

Luego la función es continua en $\mathbb{R}\setminus\mathcal{U}$ pero no en $\mathcal{U}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si } x^2 = y^2 \end{cases}$

Sea $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = y^2\}$ $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$

Luego $\mathbb{R}\setminus\mathcal{U}$ es abierto $\Rightarrow$ aplicamos que f es racional para $|x| \neq |y|$ y vemos que es continua.

Veamos que pasa con $x^2 = y^2$.

1) $x^2 = y^2 = 0$
$\Downarrow$
$x = y = 0$

Veamos los límites direccionales con coordenadas cartesianas. Consideramos el cambio de variable $f(x,y) = f(a + tv)$ con $t \in \mathbb{R}^*$ y $v = (v, w) \in \mathbb{R}^2$
$\hookrightarrow f(tv, tw)$

$\lim_{t\to 0} f(tv, tw) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v^3}{t^2 v^2 - t^2 w^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}\, t v^3}{\cancel{t^2}(v^2 - w^2)} = \frac{0}{(v^2-w^2)} \neq 0$

Consideramos el cambio de variable $f(x,y) = (x, \lambda x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^3}\, x^3}{\cancel{x^2}(x^2-\lambda^2)}$ $\to 0$ $\cancel{= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]}$ $\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\lambda x^2}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \dots = \lim_{x \to 0} \frac{6\lambda}{0} =$

indeterminación $\pm\infty \Rightarrow \nexists \lim$

$\nexists$ la función en 0.

2) $|x| = |y| \neq 0$

$\lim_{x \to a} f(x,a) = \lim_{x\to a} \frac{x^3}{x^2-a^2} = \left[\frac{a^3}{a^2-a^2}\right] = \left[\frac{a^3}{0}\right]$ indet $\Rightarrow \nexists$ límite.

$\lim_{x\to -a} f(x,-a) = \lim_{x \to -a} \frac{x^3}{x^2-a^2} = \left[\frac{(-a)^3}{a \cdot a}\right] = \left[\frac{-a^3}{0}\right]$ indet $\Rightarrow \nexists$ límite

f continua en $(0,0)$ y en $\mathbb{R}\setminus\mathcal{U}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

Sea $\mathcal{C} = \{(x,y) / xy = 0 \subset \mathbb{R}^2\} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ es abierto puesto que $\mathcal{C}$ es cerrado por ser preimagen de un conjunto cerrado en la imagen.

Veamos que $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\mathcal{C}} : \mathbb{R}^2\setminus\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Nuestra función es $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{xy}$ como

$xy \neq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\mathcal{C} \Rightarrow$ es continua por ser cociente de funciones continuas:

- $x^3 - y^3 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2\setminus\mathcal{C}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$
- xy es producto de funciones polinómicas

Luego aplicando el carácter local de la continuidad tenemos que f es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\mathcal{C}$.

Veamos qué ocurre en $\mathcal{C}$: Tomemos casos. → primero tomamos parciales y directo

- $(x,y) = (0,0)$. Probamos con el cambio de variable $f(x,y) = f(t, t^2)$ con $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 - t^6}{t^3 t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^6 + t^3}{t^6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{-6t^5 + 3t^2}{6t^5} = \lim_{t\to 0} \frac{-30t^4 + 6t}{-30t^4} =$$

$\hookrightarrow \dfrac{1-t^3}{t^3}$ ¡ $\frac{1}{0}$ indet.

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-30 \cdot 4 \cdot t^3 + 6}{-30 \cdot 4 \cdot t^3} = \frac{6}{0} \text{ indet}$$

Puedo reutilizarlo

- $(x,0)$ con $x \neq 0$. $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{0} = \text{indet.} \ \nexists \lim$
- $(0,y)$ con $y \neq 0$ $\lim_{y\to 0} \dfrac{-y^3}{0} = \text{indet} \ \nexists \lim$

f continua en el abierto.

• $(x,0)$ con $x\neq 0$ pero $x\to 0$ Veamos los límites parciales:

$f(x,y) = f(\alpha + t e_n)$ $= x^3 + 3x^2t + 3xt^2 + t^3$

$$\lim_{t\to 0} f(x+t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^3}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2+6xt+\cancel{3x^2}}{0} = \cancel{\left[\frac{0}{0}\right]} \overset{L'H}{=} \dots = \frac{6}{0} \Rightarrow \nexists \lim.$$

$\frac{3x^2}{0} \to$ Indet.

Luego no es continua en $F = \{(x,y)/y=0\}$ con y mejor bocabajo

Igual con $x=0$ $y\neq 0$ sale lo mismo.

Luego f no es continua en $\mathcal{U}$.

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\operatorname{arctg}(x^2+y^2) & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$

Sea $\mathcal{U} = \{(x,y)/ y=0\}$ es cerrado $\Rightarrow \mathbb{R}^2\setminus\mathcal{U}$ es abierto.

Es un cociente de funciones continuas puesto que en el numerador tenemos un prod. de funciones continuas con una composición como segundo factor de funciones continuas. ...

Veamos en $\mathcal{U}$ y en $(0,0)$ tomamos el cambio de variable si $\alpha=(a,b)$ $f(x,y) = (a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)$

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\operatorname{arctg}(x^2+y^2)}{y} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta \operatorname{arctg}(\rho^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta))}{\rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$ luego no tiene límite $\Rightarrow$ no es continua en $(0,0)$. por θ variable

Veamos el caso de $y\to 0$ pero x no importa:

$$\lim_{y\to 0} \frac{x\operatorname{arctg}(x^2+y^2)}{y} = \left[\frac{x\operatorname{arctg}(x)}{0}\right]$$ lo cual es una indeterminación luego tampoco tiene límite y tampoco es continua.

Por tanto f es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\mathcal{U}$

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia de límite en el origen para el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x^n\, y^n}{x^2\, y^2 + (x-y)^2} \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2\; x^{n-2}y^{n-2}}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

Veamos $n=1$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

$$f(x,\lambda x) = \frac{\lambda x^2}{\lambda^2x^4 + (x-\lambda x)^2} = \frac{\lambda x^2}{\lambda^2x^4 + x^2 - 2\lambda x^2 + \lambda^2x^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2x^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2} \quad \text{cuando } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \frac{\lambda}{\underset{(1-\lambda)^2}{\overset{\shortparallel}{1-2\lambda+\lambda^2}}}$$ luego $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ hay un límite distinto $\Rightarrow$ no tiene límite

$n=2$

$$f(x,\lambda x) = \frac{\lambda^2x^3}{\lambda^2x^4 + (x-\lambda x)^2} = \frac{\lambda^2x^3}{\lambda^2x^4 + x^2 - 2\lambda x^2 + \lambda^2x^2} = \frac{\lambda^2x}{\lambda^2x^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2} \to \text{es } 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2x}{\lambda^2x^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2} = 0 \quad \forall\lambda$$

$$0 \le \left| \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \right| \le 1$$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ ya que $x^2y^2 \le x^2y^2 + (x-y)^2$. Pero su límite es 0 así que

por este motivo no tiene límite

Caso $n \ge 3$

Mal expresado pero me vale

$$0 \le \left| \frac{x^n y^n}{x^2y^2 + (x-y)^2} \right| = \left| \frac{x^2y^2\, x^{(n-2)}\, y^{(n-2)}}{x^2y^2 + (x-y)^2} \right| = \left| x^{(n-2)}\, y^{(n-2)} \right| \left| \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \right| \overset{(1)}{\le} \left| x^{(n-2)} y^{(n-2)} \right| =$$

(1) Sabemos que $x^2y^2 + (x-y)^2 > x^2y^2 \Rightarrow \left| \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \right| < 1 \Rightarrow$

$= 0$ para $n \in \mathbb{N}$ fijo

4. Dados $\alpha, b \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto $(0,b)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \ \forall y \in \mathbb{R}$$

Veamos que ocurre con $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ y $\alpha > 0$ y en cada caso $b \neq 0$, $b = 0$

$\underline{\alpha = 0}$

$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$: 1. $b \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2}$ no produce indeterminación en ningún caso de $(0,b)$ luego es continua y tiene límite que depende del punto $(0,b)$. $\lim\limits_{y \to b} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{b^2}\right)$

2. $b = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ obtenemos $\lim\limits_{\rho \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$ luego indeterm. y no hay límite

$(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$

$\underline{\alpha < 0}$

$f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}}{x^\alpha}$.

Supongamos $b \neq \sqrt{k\pi} \Rightarrow$

Sabemos que $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| < 1$ y $\frac{1}{x^\alpha}$ diverge para $x \to 0$ luego no tiene límite en este caso.

Supongamos $b = \sqrt{k\pi} = \operatorname{sen}\frac{1}{b^2} = 0$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$$\exists\ \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} - \operatorname{sen}\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}} \Big\{ \to \cos\frac{1}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow \left|\cos\frac{1}{b^2}\right| < 1$$

Luego $f(x,y) = x^\alpha \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}\right) \underbrace{\left[\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}}\right]}$ acotado por 1

Estudiamos $g(x,y) = x^\alpha\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}\right) = x^\alpha\left(\frac{b^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2)b^2}\right) = x^{\frac{\alpha}{2}} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{b^2-x^2-y^2}{b^2(x^2+y^2)}$

tomamos $y^2 = b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}$, tenemos que $\exists \delta > 0 : 0 < x < \delta \Rightarrow x^2 - x^{-\alpha/2} < b^2$

$$y = \sqrt{b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}}$$

Finalmente nos queda:

$$\infty \leftarrow x^{\alpha/2} \ \frac{1}{b^2\cancel{(x^2+y^2)}^{\,1/b^4}} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{b^2}\right) - \frac{1}{b^2}}}\right]^{\to 1}$$

luego diverge y no hay límite.

$\underline{\alpha > 0}$ $b \neq 0$

$$g(x,y) = x^{\alpha} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \quad \forall \alpha, b$$

5. Dado $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, estudiar la existencia de límite en el punto u del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{u\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{|x - a| + |y - b| + |z - c|} \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{u\}$$

$a, b, c \neq 0$

Tomamos límites parciales:

$\lim_{(x,y,z) \to (a,b,c)} f(x,y,z) = :$

1. $\lim_{t \to 0} f(a+t, b, c) = \lim_{t\to 0} \frac{(a+t)bc}{|a+t-a| + |y-b| + |z-c|} = \frac{abc + tbc}{|t|}$ si $t<0 \Rightarrow \frac{abc - tbc}{t}$; si $t>0 \Rightarrow \frac{abc + tbc}{t}$

$= \begin{cases} -bc \\ b \end{cases} \Rightarrow$ no tiene límite.

Supongamos $a, b \neq 0$ $c = 0 \Rightarrow u = (a, b, 0) \Rightarrow$ tengo que calcular $\lim_{(x,y,z) \to (a,b,0)} f(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{|x-a| + |y-b| + |z|}$$

tomamos límites parciales

$$f(a+t, b, 0) = \frac{0}{|t|} = 0$$

$$f(a, b+t, 0) = \frac{0}{|t|} = 0$$

$$f(a, b, t) = \frac{t}{|t|}$$

De este último tomamos límites.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = \begin{cases} \lim_{t \to 0^-} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{-t} = \left[\frac{0}{0}\right] = L'H = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{1} = -1 \\ \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] = \dots = 1 \end{cases}$$

$\nexists \lim$ en este caso tampoco

Supongamos $a \neq 0$, $b=c=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y,z)\to(a,0,0)} f(x,y,z)$

$f(a,0,0) = 0$

tomamos límites parciales

$f(a+t,0,0) = 0$

$f(a,t,0) = 0$

$f(a,0,t) = 0$

Sea $\vec{v} = (u,v,w)$ un vector de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ tomamos $f((a,0,0)+t\vec{v})$ con $t\to 0$

$$f((a,0,0)+\vec{v}) = \frac{(a+u)vw}{|a+u-a|+|b+v-b|+|c+w-c|} = \frac{(a+tu)tvtw}{t|u|+t|v|+t|w|} \rightsquigarrow \frac{0}{0} \text{ ind}$$

$$f(a+t\vec{v}) = \frac{(av t + t^2 uv)tw}{|t|\,(|u|+|v|+|w|)} = \frac{avw\,t^2 + t^3 uvw}{|t|\,(|u|+|v|+|w|)} = \frac{t^2\,(awv + tuvw)}{|t|\,(|u|+|v|+|w|)}$$

Sup. $t>0 \Rightarrow f(a+t\vec{v}) = \dfrac{t\,awv + t^2 uvw}{(|u|+|v|+|w|)} \longrightarrow 0$

$t<0 \Rightarrow$ igual sale 0.

Buscamos una acotación: (tengo 0·∞)

$$0 \leq \left| \frac{xyz}{|x-a|+|y-b|+|z-c|} \right| = \frac{|xyz|}{|x-a|+|y-b|+|z-c|} = |xyz| \cdot \frac{1}{|x-a|+|y-b|+|z-c|} \leq \frac{|xyz|}{3} = 0$$

Luego gracias a esta acotación, tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,0,0)} f(x,y,z) = 0$

Supongamos $a=b=c=0$ tomamos parciales

$f(t,0,0) = \dfrac{t}{|t|}$

$f(0,t,0) = \dfrac{t}{|t|}$

$f(0,0,t) = \dfrac{t}{|t|}$

igual que antes tenemos límites parciales distintos, así que no existe el límite

Estudiar la continuidad de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$

Tomamos $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \neq 0, y \neq 0\}$ conjunto cerrado puesto que es preimagen de un cerrado : $f^{-1}(0) = \mathcal{C}$.

Vemos que f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ por ser cociente de una mult. de continuas ....

Vemos qué ocurre en $\mathcal{C} = \{(0,0)\}$

Calculamos los límites direccionales

$$f(x,\lambda x) = \frac{\lambda^2 x^2 \ \operatorname{sen}(\lambda x)}{x^2+\lambda^2 x^2} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda x)}{1+\lambda^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x \to 0} \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda x)}{1+\lambda^2} = 0$$

Luego tomamos una acotación

$$0 \leq \left| \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right| \cdot \left| \operatorname{sen}(\lambda x) \right| \leq \left| \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right| \leq 1$$

Como $1+\lambda^2 > \lambda^2$

$$0 \leq \left| \frac{y^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \left| \operatorname{sen}(y) \right| < \left| \operatorname{sen}(y) \right| = 0$$

$y^2 < x^2+y^2 \quad \forall x,y \neq 0$

$$0 \leq \left| \frac{\cancel{\rho^2} \operatorname{sen}^2(\theta)}{\cancel{\rho^2}} \right| \left| \operatorname{sen}(y) \right| = \left| \operatorname{sen}^2 \theta \right| \left| \operatorname{sen}(y) \right| \leq \left| \operatorname{sen}(y) \right| = 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ a & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

arctg ✓

Estudiamos el caso (0,0)

$f(0,0) = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{0}\right) = $ indeterminado

Tomamos límites parciales:

$f(0,t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t^2}{t}\right) = \operatorname{arctg}(t) \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(0,t) = 0 = \lim_{t\to 0} f(t,0)$

$f(t,0) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t^2}{t}\right) = \operatorname{arctg}(t)$

Probamos con las direccionales:

$f(x,\lambda x) = \operatorname{arctg} \dfrac{(1+\lambda^4)\cdot x^4}{(1+\lambda^2)\cdot x^2} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{(1+\lambda^4)}{(1+\lambda^2)}\cdot x^2\right) \qquad f(0,0)=0$

Buscamos el límite mediante una acotación:

$0 \le \left|\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)\right| = \left|\operatorname{arctg}(\varphi(t))\right| = \left|\operatorname{arctg}(t^2)\right| \le \left|\operatorname{arctg}(t)\right| = 0$ puesto que $t\to 0$

Tomamos $g(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \Leftrightarrow g(t,t) = \dfrac{2t^4}{2t^2} = t^2$ si $t\to 0$ $g(t,t)\to 0$

luego $\varphi(t) = g(t,t) = t^2$;