Análisis Matemático I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 6

1. Conocer y comprender el concepto general de función diferenciable y de diferencial de una tal función

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Diferenciabilidad del producto de dos funciones con valores reales

b) Diferenciabilidad del cociente de dos funciones con valores reales

3. Conocer y comprender la regla de la cadena, sobre la diferenciabilidad de una composición de funciones, incluyendo su demostración

Demostración más importante

1. Sean X, Y dos espacios normados arbitrarios, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ y $a \in A^\circ$. Diremos que $f: A \to Y$ es diferenciable en el punto $a \in A^\circ$ cuando $\exists T \in L(X, Y) \mid \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$ o bien $\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$

Al igual que hacíamos con la derivabilidad podemos tomar $t = x-a$ para ver que f es diferenciable en a sii $\exists T \in L(X, Y) \mid$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a) - T(t)}{\|t\|} = 0 \quad \text{o bien} \quad \lim_{t \to 0} \frac{\|f(t+a) - f(a) - T(t)\|}{\|t\|} = 0$$

Gracias a la definición de límite podemos ver que $T \in L(X, Y)$ es única, es decir:

si f es diferenciable en $a \Rightarrow T \in L(X, Y)$ es única

Es necesario destacar que si $a \notin A^\circ \Rightarrow$ no podríamos asegurar la unicidad de la lineal (cuya necesidad de ser continua no se usa para probar la unicidad) ya que el conjunto que tener al punto a como punto del cierre. Aún así la existencia no se vería manipulada.

Para distinguir esa única función lineal que verifica $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$ $T \in L(X,Y)$, llamamos T a la diferencial de f en el punto a y la denotaremos por $Df(a)$.

- Sea $f: A \to Y$ con $A \subset X$ dos espacios normados. Diremos que f es diferenciable en A o simplemente diferenciable cuando es diferenciable en todo punto de A. Denotamos por $D(A,Y)$ al conjunto de todas las funciones diferenciables de $A \to Y$.

Para $f \in D(A,Y)$ podemos considerar $Df: X \longrightarrow L(X,Y)$, $x \longmapsto Df(x)$, a esta función la denominamos diferencial de f. Se ve fácilmente la correspondencia con la derivada de una función de $\mathbb{R}$.

Como $L(X,Y)$ es un espacio normado, cabe la duda de la continuidad de Df. Decimos que $f \in D(A,Y)$ es una función de clase C^1 cuando Df es continua. Denotamos por $C^1(A,Y)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^1.

2. a) Sea A abierto de un espacio normado X y $f,g: X \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables en un punto $a \in A \Rightarrow f \cdot g$ es diferenciable en a con $D(fg)(a) = Df(a) \cdot g(a) + Dg(a) f(a)$

En un caso más general donde $f,g \in D(A) \Rightarrow fg \in D(A)$ con $D(fg) = g\,Df + f\,Dg$

Luego $fg \in C^1(A)$ siempre que $f,g \in C^1(A)$. Así pues $D(A)$ y $C^1(A)$ son subanillos de $C(A)$.

b) Sea A un abierto de un espacio normado y $f,g: A \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en un punto a | $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A \Rightarrow \frac{f}{g}$ diferenciable en a con:

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{Df(a)g(a) - Dg(a)f(a)}{g(a)^2}$$

De la misma manera si $f,g \in D(A) \Rightarrow \frac{f}{g} \in D(A)$ y $\frac{f}{g} \in C^1(A)$ cuando $f,g \in C^1(A)$

3. Teorema de la regla de la cadena.

Sean X, Y, Z tres espacios normados, $A, \mathcal{U}$ dos abiertos de X e Y respectivamente. Sean $f: A \to \mathcal{U}$ y $g: \mathcal{U} \to Z$ dos funciones. Si f es derivable en $a \in A$ y g es derivable en $b = f(a) \in \mathcal{U} \Rightarrow g \circ f$ es derivable en a con

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Por tanto si f y g son diferenciables $\Rightarrow$ $g \circ f$ es diferenciable

~ Dem ~

a) Traducción de hipótesis:

- Definimos $\Phi : A \to \mathbb{R}_0^+$

$$x \mapsto \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} \quad \forall x \in A \setminus \{a\}$$

$$a \mapsto 0$$

Por ser f diferenciable en $a \Rightarrow \Phi$ es continua en a y verifica

$$\Phi(x)\|x-a\| = \|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| \quad \forall x \in A \quad (1)$$

Análogamente $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_0^+$: $\varphi(y) = \begin{cases} \dfrac{\|g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b)\|}{\|y-b\|} & y \neq b \\ 0 & y = b \end{cases}$

Donde φ continua en b por g diferenciable en b y $\varphi(y)\|y-b\| = \|g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b)\|$ (2)

Por último definimos $\Lambda : A \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$\Lambda(x) = \|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - D(g \circ f)(a)(x-a)\| = \|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (Dg(b) \circ Df(a))(x-a)\| \quad \forall x \in A \quad (3)$$

Puesto que $Dg(b) \circ Df(a) \in L(X, Z)$ bastará comprobar $\lim_{x \to a} \frac{\Lambda(x)}{\|x-a\|} = 0$

b) Obtención desigualdad relación Λ con Φ y φ. Para $x \in A$ tomamos $y = f(x) \in \mathcal{U}$ y usamos en (3) la desigualdad triangular:

$$0 \leq \Lambda(x) \leq \underbrace{\|g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b)\|}_{(i)} + \underbrace{\|Dg(b)[y - b - Df(a)(x-a)]\|}_{(ii)}$$

Trabajamos (ii):

$$\|Dg(b)[y-b-Df(a)(x-a)]\| \leq \|Dg(b)\| \, \|y - b - Df(a)(x-a)\| = \|Dg(b)\| \|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| =$$

$$= \|Dg(b)\| \, \Phi(x) \|x-a\| \quad (4)$$

Trabajamos (i):

$$\|g(y)-g(b)-Dg(b)(y-b)\| = \varphi(y)\|y-b\| = \varphi(f(x))\|f(x)-f(a)\| \quad (5)$$

La desigualdad triangular en Y con (1) y la definición de la norma de aplicaciones lineales, nos da

$$\|f(x)-f(a)\| \le \|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\| + \|Df(a)(x-a)\| \le \Phi(x)\|x-a\| + \|Df(a)\|\,\|x-a\| =$$

$$= (\Phi(x) - \|Df(a)\|)\|x-a\|$$

de donde deducimos que

$$\|g(y)-g(b)-Dg(b)(y-b)\| \le \varphi(y)\|y-b\| \le \varphi(f(x))\,[\Phi(x) - \|Df(a)\|]\,\|x-a\| \quad (6)$$

Usando (4) y (6) deducimos de (3) la desigualdad que buscábamos:

$$0 \le \Lambda(x) \le \varphi(f(x))\,[\Phi(x) + \|Df(a)\|]\,\|x-a\| + \|Dg(b)\|\,\Phi(x)\|x-a\| \quad (7)$$

c) Usando (7) junto con las propiedades de Φ y φ concluimos la demostración. Para $x \neq a$ de (7) deducimos que:

$$0 \le \frac{\Lambda(x)}{\|x-a\|} \le \varphi(f(x))\,[\Phi(x) + \|Df(a)\|] + \|Dg(b)\|\,\Phi(x) \quad (8)$$

luego bastará comprobar que el último miembro tiende a 0 en el punto a.

Como f es diferenciable, luego continua en el punto a, y φ es continua en $b = f(a)$ tenemos que $\varphi \circ f$ es continua. Además, Φ continua en a $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a} \varphi(f(x)) = \varphi(f(a)) = \varphi(b) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \Phi(x) = \Phi(a) = 0$$

Así pues, concluimos claramente que:

$$\lim_{x\to a} \left[\varphi(f(x))\,[\Phi(x) + \|Df(a)\|] + \|Dg(b)\|\,\Phi(x)\right] = 0$$ y (8) nos dice

que $\lim_{x\to a} \frac{\Lambda(x)}{\|x-a\|} = 0$ como se quería ∎