Ejercicio 1 (1.5 puntos)**.** Sea X el espacio normado de las funciones continuas en $[0,1]$ que se anulan en cero con la norma del máximo:

$$X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}, \qquad \|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

En X se considera el funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\, dt \qquad \forall f \in X$$

a) **[1 punto]** Calcula $\|\varphi\|$.

b) **[0.5 puntos]** Prueba que φ no alcanza su norma.

a) Para ello, probaremos que $\varphi \in X^*$; como φ es lineal bastará probar que φ es continuo. Por tanto, dado $f \in X$ se tiene que

$$|\langle \varphi, f \rangle| = \left| \int_0^1 t f(t)\, dt \right| \leq \int_0^1 |t||f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |t|\, dt = \|f\|_\infty \int_0^1 t\, dt = \frac{\|f\|_\infty}{2}$$

por lo que φ es continua y $\|\varphi\| \leq \frac{1}{2}$. Buscamos ahora encontrar una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ de forma que $\varphi(f_n) \longrightarrow \frac{1}{2}$. Para ello, consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$ el siguiente funcional

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } 0 \leq t \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

como $f_n(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y por construcción (o lema de pegado) tenemos que f_n es continua $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que $\varphi(f_n) \longrightarrow 1/2$; para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(f_n) = \int_0^1 t f(t)\, dt = \int_0^{1/n} t^2 n + \int_{1/n}^1 t\, dt = \frac{1}{3n^2} \cdot \frac{1}{2}$$

donde tomando límite se obtiene que $\|\varphi\| = 1/2$.

b) Supongamos que sí lo hiciera, en ese caso $\exists f \in X$ tal que $\varphi(f) = 1/2$, es decir, $\int_0^1 t f(t) = 1/2$ en cuyo caso, tendríamos que $f(t) = 1$ $\forall t \in [0,1]$ provocando que $f \notin X$.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea $T : c_0 \to l_2$ el operador lineal definido para todo $x \in c_0$ por

$$[Tx](n) = \frac{x(n)}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) **[1 punto]** Calcula su norma y prueba que T no la alcanza.

b) **[0.5 punos]** Prueba que $Y = T(c_0)$ es un subespacio denso en l_2 y que T es una biyección lineal de c_0 sobre Y.

c) **[0.5 puntos]** ¿Es continua la aplicación $T^{-1} : Y \to c_0$? ¿Es Y cerrado en l_2?

a) Para ello, busquemos probar que T es un operador lineal y continuo; sea $\{\overset{x}{\overset{\shortparallel}{x_n}}\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ en ese caso tenemos que

$$\|Tx\| = \left(\sum_{n=1}^\infty Tx^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{x(n)}{n}\right)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\sup\{|x(n)| : n\in\mathbb{N}\}^2}{n^2}\right) \leq \|x\| \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \|x\| \frac{\sqrt{6}\,\pi}{6}$$

buscamos ahora una sucesión $\{\phi_n\} \subset c_0$ con $\|\phi_n\| = 1$ tal que $T\phi_n$ converja a $\frac{\sqrt{6}\,\pi}{6}$. Definimos para ello la sucesión tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = \{1, \overset{(n)}{\text{—}}, 1, 0, \text{—}\}$; claramente $x_n \in c_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Además, se tiene que

$$\|Tx_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x(k)}{k}\right)\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$$

Tomando ahora límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el resultado pedido.

Veamos ahora que T no alcanza su norma. Supongamos que lo hiciera, en ese caso $\exists x \in c_0$ tal que $Tx = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ de donde tendríamos que $x(n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ de donde $x \notin c_0$ pues $\{x(n)\} \not\longrightarrow 0$.

b) Veamos primero que $T(c_0)$ es denso en ℓ_2; para ello, veamos que para cada elemento de ℓ^2 existe una sucesión de elementos de Y tal que tenemos convergencia. Para ello, consideramos $z \in \ell^2$ y consideramos la sucesión $\{z^{(n)}\}$ tal que $z^{(n)} = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, claramente $\{z^{(n)}\} \xrightarrow{\ell^2} z$, es de fácil comprobación. Debemos ahora probar que $z^{(n)} \in T(c_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Es claro que $\{z^{(n)}\} \longrightarrow 0$, debemos ahora probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x \in c_0$ tal que $T(x) = z^{(n)}$, es decir, buscamos que

$$\frac{x(n)}{n} = z^k(n)$$

por lo que podremos tomar $x(n) = n \cdot z^k(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y como $z^n \longrightarrow 0$ tenemos que $x \in c_0$. Por tanto, tenemos ya que $T(c_0)$ es denso en ℓ^2

Para probar lo otro, bastará probar que T es inyectiva; para ello, supongamos que $\exists x, z \in c_0$ tales que $Tx = Tz$, en ese caso, tenemos que

$$\frac{x(n)}{n} = \frac{z(n)}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

consiguiendo así que $x(n) = z(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Buscamos probar que no es continua, como T es lineal tenemos que T^{-1} es lineal de donde buscamos probar que no es continua en 0; es decir, buscamos una sucesión de Y convergente a 0 tal que la sucesión de las imágenes no converja a 0_n.

Consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$ $z_n = (0, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$ con $1/n$ en la posición n-ésima. Se tiene que $Tz_n = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in c_0$. Sin embargo, se tiene que $\{Tz_n\} \not\longrightarrow 0_n$ puesto que $\{\|Tz_n\|\} \longrightarrow 1$.

Ahora bien, veamos que Y no es cerrado en ℓ^2; si lo fuera, como Y es denso en ℓ^2 tendríamos que c_0 y ℓ^2 serían bigectivos. Además, tendríamos que Y es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach por lo que sería un espacio de Banach entonces tendríamos que $T \in L(Z, Y)$ bigectiva con Z e Y Banach dando lugar a que T^{-1} sea continua; lo que contradice lo probado anteriormente.

Ejercicio 3 (1.5 puntos)**.** Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(X,Y)$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ está acotado.

b) Para cada $x \in X$ y cada $g \in Y^*$ el conjunto $\{g(T(x)) : T \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

Procedemos por doble implicación:

a) ⟹ b)| Supongamos que F está acotado en ese caso $\exists M > 0$ tal que $\|T\| \leq M$ $\forall T \in F$ de donde se deduce que $\sup_{T \in F} \|T\| \leq M$; además, en ese caso $\forall x \in X$ se tiene que $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \leq M\|x\|$ de donde dado $g \in Y^*$ y dado $x \in X$ se tiene que $|g(Tx)| \leq \|g\| \|T\| \|x\|$ de donde $C := \|g\| M \|x\|$ es una cota.

b) ⟹ a)| La idea será probar que

$$\forall x \in X \quad \sup_{T \in F} \|Tx\| < \infty$$

pues en ese caso el principio de acotación uniforme nos da el resultado. Por hipótesis sabemos lo siguiente

$$\forall x \in X \ \forall g \in Y^* \quad \{g(T(x)) : T \in F\} \text{ está acotado} \iff \forall x \in X, \forall g \in Y^* \ \exists M > 0 : |g(T(x))| \leq M \quad \forall T \in F$$

Ahora bien, para poder conseguir lo que buscamos consideramos la inyección canónica de Y en su bidual de forma que $\forall x \in X$ se tiene que $J_{Tx} \in Y^{**}$. Definimos ahora para cada $x \in X$ la aplicación

$$\Lambda_{Tx} : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g \longmapsto \langle g, Tx \rangle$$

claramente $\Lambda_{Tx} \in Y^{**}$ pues $J_{Tx} = \Lambda_{Tx}$. Si nos fijamos, la hipótesis nos dice que $\{\Lambda_{Tx}(g) : T \in F\}$ está acotado por lo que, usando el principio de acotación uniforme sobre $\{\Lambda_{Tx}(g)\}$ obtenemos que

$$\sup_{T \in F} \Lambda_{Tx} < \infty$$

de donde, como la inyección canónica es una isometría tenemos que $\sup_{T \in F} \|Tx\| < \infty$ $\forall x \in X$ de donde podemos deducir, aplicando de nuevo el principio de acotación uniforme que F está acotado.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Responde a las sigueintes cuestiones indicando en cada caso, según proceda, un resultado de teoría que justifique tu respuesta o un contraejemplo, o bien dando una prueba.

a) **[0.5 puntos]** ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial c_0 de las sucesiones casi nulas? → Ejercicio 2, es afirmativa

b) **[0.5 puntos]** Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio de H verificando que $M^\perp = \{0\}$, entonces $M = H$. → Creo que es cierta.

c) **[0.5 puntos]** Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funciones lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un operador lineal continuo de X en t_∞.

d) **[0.5 puntos]** Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. ENtonces la aplicación identidad $I_X : (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ no es continua. → Falsa