Ejercicio 1. Calcular $\phi_9 \in \mathbb{Q}[x]$.

Para ello, conociendo un poco de teoría, hay dos formas de hacerlo; por definición o por recursión. Como por definición es tedioso lo haremos por recursión; para ello, sea $f = x^9 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ sabemos que

$$x^9 - 1 = \prod_{d \in Div(9)} \phi_d$$

donde ϕ_d es el d-ésimo polinomio ciclotómico. Como $\phi_1 = x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ tenemos que

$$\phi_9 = \frac{x^9 - 1}{\phi_1 \phi_3} = x^6 + x^3 + 1$$

Donde, por un proceso análogo, $\phi_3 = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 2. Sea $\zeta \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva novena de la unidad, calcular todos los subcuerpos de $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Puesto que $\mathbb{Q}(\eta)$ es el cuerpo de descomposición de $x^9 - 1$ estamos ante la novena extensión ciclotómica; por tanto, tenemos que el grupo de galois de la extensión es un subgrupo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$; de hecho, sabemos por teoría que $|Aut(\mathbb{Q}(\eta))| = \varphi(9) = 6$ de donde $Aut(\mathbb{Q}(\eta)) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_9)$.
Además, vimos que dicho grupo viene dado por los siguientes automorfismos:

$$Aut(\mathbb{Q}(\eta)) = \{\tau_j : j = 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

donde $\tau_j : \mathbb{Q}(\eta) \longrightarrow \mathbb{Q}(\eta)$ tal que $\tau_j(\eta) = \eta^j$ $\forall j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. De hecho, de la teoría del tema 1 deducimos que $\{1, \eta, \eta^2, \eta^3, \eta^4, \eta^5\}$ forman una $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\eta)$. Además, usando un poco más de teoría de extensiones ciclotómicas tenemos que, si $S \subset \mathbb{Q}(\eta)$ es el conjunto de todas las raíces de $x^9 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ tenemos que $S = \langle \eta \rangle < \mathbb{Q}(\eta)^\times$ de orden 9.
Calculemos el orden de cada τ_j sabiendo que $\eta^9 = 1$.

τ_1	τ_2	τ_4	τ_5	τ_7	τ_8
1	6	3	6	3	2

Como τ_2 tiene orden 6 tenemos que $Aut(\mathbb{Q}(\eta))$ es cíclico de orden 6 generado por τ_2. De esta información podemos obtener que habrá un grupo de cada divisor de 6; por tanto el retículo es el siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \tau_2 \rangle \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\langle \tau_4 \rangle \cong \langle \tau_7 \rangle \arrow[dr, no head] & & \langle \tau_8 \rangle \arrow[dl, no head] \\
 & \langle \tau_1 \rangle &
\end{tikzcd}$$

Veamos cuales son los subcuerpos de $\mathbb{Q}(\eta)$ correspondientes a los subgrupos mediante la conexión de Galois.

i) Como τ_1 deja fijo a todos los elementos sabemos que $K^{<\tau_1>} \geq \mathbb{Q}(\eta)$; además, por la conexión de Galois sabemos que $[\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}(\eta)^{<\tau_1>}] = |<\tau_1>| = 1$.

ii) Como $<\tau_2>$ no deja fijo a ningun elemento del conjunto S tenemos que $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\eta)^{<\tau_2>}$ de donde usando la conexión de Galois tenemos que, junto al lema de la torre

$$[\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}(\eta)^{<\tau_2>}][\mathbb{Q}(\eta)^{<\tau_2>} : \mathbb{Q}]$$

entonces, como $[\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}(\eta)^{<\tau_2>}] = |<\tau_2>| = 6$, $[\mathbb{Q}(\eta)^{<\tau_2>} : \mathbb{Q}] = 1$ obteniendo la igualdad

De forma análoga se obtienen los demás subcuerpos.