4. Probar que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$$

Supondremos que $a \neq b$, pues si $a=b$ tenemos salida por partes.

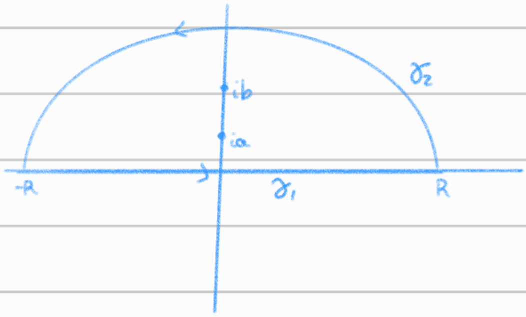
i) Elegir con gracia la función a integrar

ii) Elegir un buen camino

La idea es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$$

Fijamos $R>0$ suficientemente grande con nuestro ciclo.



$\Gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$

Si llamamos $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$ e integramos $\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

pero $\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \leq \overset{\pi R}{\overset{\shortparallel}{l(\gamma_2)}} \sup\{|f(z)| : z \in \gamma_2^*\} \leq \frac{\pi R}{\text{polinomio en } R \text{ de grado } 6}$

Escribimos ahora la idea de forma formal.

Definimos $f: \mathbb{C}\setminus\{\pm ia, \pm ib\} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$.

$\Omega = \mathbb{C}$, $A = \{\pm ia, \pm ib\} \Rightarrow A' = \emptyset$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$.

Γ_R es un ciclo en $\mathbb{C}\setminus A$ con $R > \max\{a,b\}$ que es nul-homólogo con respecto a $\Omega = \mathbb{C}$

Por el Tª de los Residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\overset{1}{\cancel{\operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(ia)}} \operatorname{Res}(f,ia) + \overset{1}{\cancel{\operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(ib)}} \operatorname{Res}(f,ib) \right) = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,ia) + \operatorname{Res}(f,ib) \right)$$

Pero el miembro de la derecha no depende de R luego podremos tomar límite, es decir.

$$\underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{(1)} + \underbrace{\int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{(2)} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,ia) + \operatorname{Res}(f,ib) \right)$$

$\gamma_1 : [-R,R] \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto x$ $\quad \gamma_1'(x) = 1 \quad \Rightarrow (1) = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \Rightarrow$ tomando límite en $R\to\infty$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + \cancelto{0?}{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,ia) + \operatorname{Res}(f,ib) \right)$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \ ; \quad \left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \leq \overset{\pi R}{\ell(\gamma_2)} \sup \{ |f(z)| : z \in \gamma_2^* \} = \pi R \cdot \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

• Si $z \in \gamma_2 \Rightarrow |z| = R \Rightarrow |z^2+a^2| \geq |z^2| - a^2 = R^2 - a^2$

$|z^2+b^2|^2 \geq (R^2-b^2)^2 \quad \Rightarrow |f(z)| \leq \dfrac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)^2}$

Esto vale siempre que el polinomio del denominador no se anule en $\mathbb{R}$ y la diferencia de grados a favor del denominador es mayor o igual a 2

Quedaría calcular los residuos:

- Como ia es un polo de orden 1

Si aplicamos l'Hôpital no poner factores que no son 0 en a

$$\lim_{z \to ia} (z-ia) f(z) = \lim_{z \to ia} (z-ia) \cdot \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} = \lim_{z \to ia} \frac{\cancel{(z-ia)}}{\cancel{(z-ia)}(z+ia)(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{2ia} \frac{1}{(b^2-a^2)^2}$$

No aplicamos lópital

luego $\operatorname{Res}(f, ia) = \dfrac{1}{2ia \cdot (b^2-a^2)^2}$

1. Probar que, para $a \in]\,0, 1\,[$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3t)\;dt}{1 + a^2 - 2a\cos(2t)} = \pi \frac{a^2 - a + 1}{1 - a}$$

Nos encontramos ante una integral del tipo $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$ donde R es una función racional de dos variables continua en la circunferencia unidad. Ayudándonos del libro de J. Pérez sabemos que el cambio de variable que debemos aplicar es:

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = \int_{C(0,1)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz}\,dz$$

Luego por el Teorema de los Residuos, como $f(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}$ es una función racional sabemos que sus singularidades son polos. Para calcular la integral sólo nos interesan los polos del disco unidad. Como será un número finito, denotaremos por A al conjunto de las singularidades.

Recogiendo cuerda y aplicando ahora el Teorema de los residuos tenemos que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}(f(z), a)\,dz.$$

Aplicando el cambio de variable obtenemos (ya que me quedo)

5. Probar que, para $a \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6 \; dx}{\left(x^4 + a^4\right)^2} = \frac{3\,\pi\,\sqrt{2}}{8\,a}$$

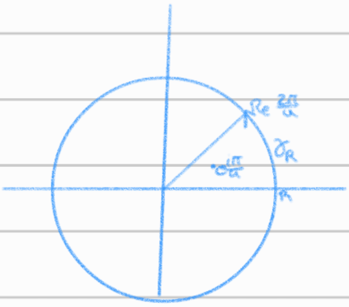
6. Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, integrar una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del sector $D(0,R) \cap \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, 0 < \arg z < 2\pi/n\}$ con $R \in \mathbb{R}^+$, para probar que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}$$

Definimos $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ y tratamos de obtener sus singularidades.

$$1+z^n = 0 \iff z \in \{ e^{\frac{i\pi}{n} + \frac{2\pi k i}{n}} \,;\, k=0,\dots,n-1\}$$

Como A es finito no tiene puntos de acumulación en Ω. Buscamos calcular quién es Γ para tratar de tomar un buen ciclo.



Consideramos $\Gamma_R = [0,R] + \gamma_R + [Re^{2\pi i/n}, 0]$ que es un ciclo en $\Omega \setminus A$ nul-homólogo en Ω por ser este homológicamente convexo.

Como $f \in H(\Omega \setminus A)$ podemos aplicar el Teorema de los residuos obteniendo así que

$$\int_{\Gamma_R} f(z) = 2\pi i \, \mathrm{Ind}_{\Gamma_R}(e^{\frac{i\pi}{n}}) \operatorname{Res}(f(z), e^{\frac{i\pi}{n}})$$

Pero $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \overset{(0)}{\int_{[0,R]} f(z)dz} + \overset{(1)}{\int_{\gamma_R} f(z)dz} - \overset{(2)}{\int_{[0,Re^{\frac{2\pi i}{n}}]} f(z)dz}$ buscamos hacer R tender a infinito para obtener el resultado deseado.

Tratamos de acotar cada integral por separado:

(1) $\longrightarrow$ $\gamma_R : [0, \frac{2\pi}{n}] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma_R(t) = Re^{it}$, $\gamma_R'(t) = iRe^{it}$

Luego $\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(Re^{it})\, iRe^{it}\, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+(Re^{it})^n}\,dt$, acotando la integral vemos que

$$\left|\int_0^{2\pi/n} \frac{iRe^{it}}{1+(Re^{it})^n}\,dt\right| \le \ell([0,\tfrac{2\pi}{n}]) \left|\frac{iRe^{it}}{1+(Re^{it})^n}\right| \le \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{1}{R^{n-1}} \quad (n>2)$$

que tomando límite cuando $R \longrightarrow \infty$ obtenemos que $\left|\int_0^{2\pi/n}\frac{iRe^{it}}{1+(Re^{it})^n}\,dt\right| \longrightarrow 0$

(2) $\longrightarrow$ $\sigma : [0,R] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad \sigma'(t) = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ Por tanto, (2) queda como

$t \longmapsto te^{\frac{2\pi i}{n}}$

$$\int_0^R f(te^{2\pi i/n})\cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}\,dt = \int_0^R \frac{e^{2\pi i/n}}{1+(te^{2\pi i/n})^n}\,dt = \int_0^R \frac{e^{2\pi i/n}}{1+t^n \underbrace{\cancel{e^{2\pi i}}}_{1}}\,dt = e^{2\pi i/n}\int_0^R\frac{1}{1+t^n}\,dt$$

Por tanto, tomando de nuevo la expresión inicial y tomando límite vemos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,dt - e^{2\pi i/n}\int_0^\infty\frac{1}{1+t^n}\,dt = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), e^{i\pi/n})$$

Como tenemos un polo de orden 1, es decir, simple (ahora lo comprobamos) obtenemos:

$$\operatorname{Res}(f(z), e^{i\pi/n}) = \lim_{z\to e^{i\pi/n}} (z - e^{i\pi/n}) \cdot \frac{1}{1+z^n} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{z\to e^{i\pi/n}} \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{n\cdot e^{\frac{i\pi}{n}(n-1)}} = \frac{1}{n e^{i(\pi - \frac{\pi}{n})}} = -\frac{e^{i\pi/n}}{n}$$

$$\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

En conclusión, si $I = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,dt$ tenemos que

$$(1 - e^{2\pi i/n})\, I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{i\pi/n}}{n}\right) \Rightarrow I = -2\pi i \left(\frac{+e^{i\pi/n}}{n\cdot(1-e^{2\pi i/n})}\right) = \frac{-2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{e^{-i\pi/n} - e^{+i\frac{\pi}{n}}} = \frac{-2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{2i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}$$

$$= \frac{\pi}{n}\frac{1}{\operatorname{sen}\pi/n} = \frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

7. Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t\,x)\;dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}(1 + a\,t)\,e^{-a\,t}$$

Defino $f(x) = \frac{e^{itx}}{(x^2+a^2)^2}$ $\forall x \in \mathbb{C}$ para después quedarnos sólo con la parte real. Como, en este caso $\Omega = \mathbb{C}$ tenemos que todo ciclo considerado será nul-homólogo respecto a $\mathbb{C}$. Por su parte, f tiene como polos de orden 2 a los elementos del conjunto $A = \{\pm ia\}$; como $A' \cap \Omega = \emptyset$ y $f \in H(\Omega \setminus A)$ podremos aplicar el teorema de los residuos

Consideramos $\forall r > a$ el ciclo $\Gamma_r = \gamma_r + \sigma_r$ donde $\gamma_r : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto t$ y $\sigma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto re^{it}$ luego

$$\int_{\Gamma_r} f(z)dz = \underset{(1)}{\int_{\gamma_r} f(z)dz} + \underset{(2)}{\int_{\sigma_r} f(z)\,dz}$$

Y por el Teorema de los residuos, como sólo rodea ai tenemos que

$$\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ai)$$

(2) Acotamos la integral; como $|f(z)| = \left|\frac{e^{itx}}{(x^2+a^2)^2}\right| \leq \frac{1}{|x^2+a^2|^2} \leq \frac{1}{(r^2-a^2)^2}$ obtenemos que

$$\left|\int_{\sigma_r} f(z)dz\right| \leq l(\sigma_r)\frac{1}{(r^2-a^2)^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Como buscamos hacer $r \to \infty$ obtenemos en ese caso que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ai) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \operatorname{Re}(2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ai))$$

Solo queda lo más difícil, calcular el residuo.

$$\operatorname{Res}(f(z), ai) = \lim_{z\to ai} \frac{df}{dz}(z) = \lim_{z\to ai} \frac{ite^{itz}(z+ai)^2 - 2e^{itz}(z+ai)}{(z+ai)^4} = \lim_{z\to ai} \frac{e^{itz}(it(z+ai)-2)}{(z+ai)^3} =$$

$$= \frac{e^{-at}(at+1)}{4a^3 i}$$

Luego obtenemos que:

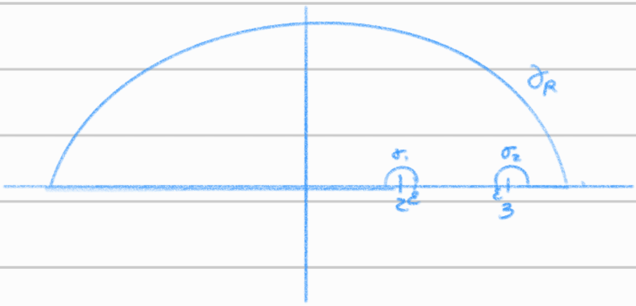
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\, dz = \frac{e^{-at}(at+1)\pi}{2a^3}$$

8. Probar que: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ \mathrm{sen}\,(\pi\, x)}{x^2\,-\,5\,x\,+\,6}\, dx \;=\; -5\,\pi$

funciones reales con ceros simples reales en el den.

Evitar los ceros reales.

Definimos $f(z) = \frac{ze^{i\pi z}}{z^2-5z+6}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ y trataremos de hacer lo mismo que en el ejercicio anterior pero con la parte imaginaria. Sabemos que $(z^2-5z+6) = (z-2)(z-3)$ luego considerando $A = \{2,3\}$ vemos que podremos aplicar el Teorema de los residuos sobre el siguiente ciclo:



$\Gamma_R = [-r, 2-\varepsilon] + \sigma_1 + [2+\varepsilon, 3-\varepsilon] + \sigma_2 + [3+\varepsilon, r] + \gamma_r$ nul-homólogo respecto a $\mathbb{C}$. No obstante, como las singularidades no son rodeadas por el ciclo tenemos que trabajar más.

Tomaremos límite:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = \int_{[-r,r]} f(z)dz + \underbrace{\int_{\sigma_1} f(z)dz}_{(1)} + \underbrace{\int_{\sigma_2} f(z)dz}_{(2)} + \int_{\gamma_r} f(z)dz$$

Mirando apuntes de otros años se usa la siguiente proposición

Proposición Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ que tiene un polo de orden 1 en a. Dado $\varepsilon > 0$ consideramos $\sigma_\varepsilon : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\sigma_\varepsilon(t) = a + \varepsilon e^{it}$. Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\sigma_\varepsilon} f(t)dt = i(t_2 - t_1)\operatorname{Res}(f(z), a)$$

Por tanto, para (1) y (2) tenemos que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\sigma_1} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{-\sigma_1} f(z)dz = -i\pi \operatorname{Res}(f(z), 2) \overset{-i\pi}{=} \lim_{z\to 2} \cancel{(z-2)} \frac{ze^{i\pi z}}{\cancel{(z-2)}(z-3)} = \frac{ze^{i\pi z}}{-1} = -ze^{i\pi z}(-i\pi)$$

$$= 2\pi i e^{2i\pi} = 2\pi i$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\sigma_2} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{-\sigma_2} f(z)dz = -\pi i \operatorname{Res}(f(z), 3) = +\pi i\, 3 = 3\pi i$$

Nos queda solo por calcular la integral sobre γ_r, buscamos acotarla, para ello aplicamos lo que sabemos:

$$|f(z)| = \left| \frac{ze^{i\pi z}}{(z-2)(z-3)} \right| = \frac{|z|}{|(z-2)(z-3)|}$$

Luego tenemos que

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)dz\right| \leq \int_{\gamma_r} \frac{|z e^{i\pi z}|}{|(z-2)(z-3)|}dz = \int_{\gamma_r} \frac{r e^{i\pi z}}{(r-2)(r-3)}dz = \frac{r}{(r-2)(r-3)}\int_{\gamma_r} e^{i\pi z} = \frac{r^2}{(r-2)(r-3)}\int_0^{\pi}\left|e^{i\pi r e^{it}}\cdot i e^{it}\right| \longrightarrow 0$$

$$e^{i\pi r e^{it}} i e^{it} = e^{-\pi r \operatorname{sen} t}$$

$\operatorname{sen} t > 0 \ [0,\pi]$

Luego, volviendo al caso que nos ocupa tenemos que hacemos polos haciendo cuenta de acuerdo.

9. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, probar que:

$$\int_0^{+\infty}\frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Para cada $0<\varepsilon<r$ consideramos el ciclo nul-homólogo respecto a $\mathbb{C}$

$$\Gamma_{\varepsilon,r} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \gamma_r$$

dados por $\sigma_1 : [-r,-\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\sigma_2 : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\sigma_3 : [\varepsilon, r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$

$t \longmapsto t$, $\quad t \longmapsto \varepsilon e^{it}$, $\quad t \longmapsto t$, $\quad t \longmapsto re^{it}$

Aplicando ahora el Teorema de los residuos vemos que $\displaystyle\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} f(z)dz = 0$, pero por otra parte

$$\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} f(z)dz = \int_{\sigma_1} f(z)dz + \int_{\sigma_2} f(z)dz + \int_{\sigma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz$$

Usando la proposición del ejercicio anterior tenemos que

aquí hay algún fallete.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_2} f(z)dz = -\pi i \operatorname{Res}(f(z),0) = -\pi i \lim_{z\to 0}\frac{d\, f(z)}{dz} = -\pi i \lim_{z\to 0}\frac{e^{2iz}(1-2z)-1}{z} \overset{0}{=} -\pi i\, 2(i-1) = -2\pi$$

donde

$$\frac{d\,f(z)}{dz} = \frac{-2ie^{2iz}z^4 - \cancel{z}(1-e^{2iz})}{z^4} = \frac{\cancel{z}(-2ie^{2iz}z - 1 + e^{2iz})}{z^{4}} = \frac{e^{2iz}(1-2z)-1}{z}$$

Por su parte tenemos que

$$\int_{\sigma_1} f(z)dz = \int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx = \int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{(1-\cos(2x)) - i\operatorname{sen}(2x)}{x^2}dx$$

$$\int_{\sigma_3} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx = \int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-(\cos 2x + i\operatorname{sen}(2x))}{x^2}dx$$

Usando ahora la paridad del seno y del coseno se tiene que

$$\int_{\sigma_1} f(z)dz + \int_{\sigma_3} f(z)dz = 2\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}dx = 4\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}$$

$1-\cos(2x) = 2\operatorname{sen}^2 x$

Entonces, tomando límite en $\varepsilon\to 0, r\to\infty$ tenemos que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}}\int_{\sigma_1} f(z)dz + \int_{\sigma_3} f(z)dz = 4\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}$$

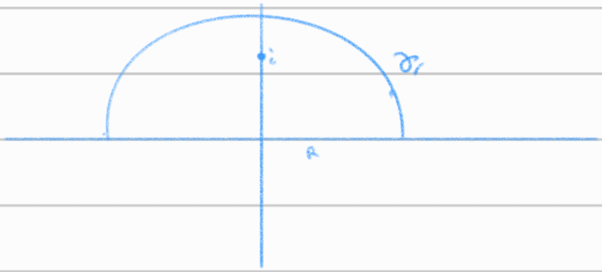
Acotando ahora $\int_{\gamma_r} f(z)dz$ buscando que tienda a 0 podemos ya concluir que

$$4\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} - 2\pi = 0 \implies \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

13. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

Antes de nada vamos a comprender el conjunto que se nos define.



Consideramos $\Omega \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z+i \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}\}$ y obtenemos las singularidades en Ω, es decir, $A = \{\pm i\}$. Considerando ahora $\Gamma_r = [-r,r] \cup \gamma_r$ un ciclo claramente nul-homólogo respecto a Ω por no tener componentes conexas acotadas. Podemos aplicar el teorema de los residuos para determinar que

$$\underbrace{\int_{[-r,r]} f(z)dz}_{(1)} + \underbrace{\int_{\gamma_r} f(z)dz}_{(2)} = \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i)$$

(2) Sabemos que $\log(z+i) = \ln|z+i| + i\arg(z+i) \leq \ln(|z|+1) + i\pi$ y por su parte $|1+z^2| \geq r^2 - 1$ obteniendo así que

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right| \leq \pi r \frac{\ln(r+1) + i\pi}{r^2-1} \longrightarrow 0$$

(1) Tomando límite cuando $r \to \infty$ obtenemos que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\log(z+i)}{1+z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(z+i)}{1+z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|z+i| + i\arg(z+i)}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(z^2+1)}{z^2+1}\,dz + i\cancelto{0}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arg(z+i)}{z^2+1}\,dz}$$

Por tanto, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(t^2+1)}{t^2+1}\,dt = 2\operatorname{Re}\big(2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i)\big)$$

Como i es un polo de orden 1 tenemos que calcular su residuo:

$$\lim_{z\to i} (z-i)\frac{\log(z+i)}{(z^2+1)} = \lim_{z\to i} \frac{\log(z+i)}{z+i} = \frac{\log(2i)}{2i} = \frac{\ln|2i| + i\overset{\pi/2}{\arg(2i)}}{2i} = \frac{\ln 2}{2i} + \frac{i\pi/2}{2i} = \frac{\ln 2}{2i} + \frac{\pi}{4}$$

Por tanto: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(t^2+1)}{t^2+1}\,dt = 2\operatorname{Re}\left(2\pi i\left(\frac{\ln(2)}{2i} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\operatorname{Re}\left(\pi\log(2) + \frac{\pi^2 i}{4}\right) = 2\pi\log(2)$

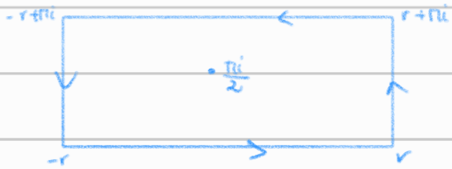
14. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R,\, R,\, R+\pi i,\, -R+\pi i,\, -R] = \Gamma_r$ con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \; dx}{e^x + e^{-x}}$$

Tomamos $f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$ como función definida en $\mathbb{C}$ salvo su conjunto de singularidades que son:

$$e^z + e^{-z} = \frac{e^z \cdot e^z + 1}{e^z} = 0 \text{ sii } e^{2z} = -1 \text{ sii } 2z = \pi i \text{ sii } z = \frac{\pi i}{2}$$

Usando ahora la periodicidad de la exponencial tenemos que $A = \frac{\pi i}{2} + 2\pi i \mathbb{Z}$ es el conjunto de singularidades



Por tanto, como podemos aplicar el teorema de los residuos vemos que

$$\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(f(z), \frac{\pi i}{2}\right)$$

Pero $\displaystyle\int_{\Gamma_r} f(z)dz = \int_{[-r,r]} f(z)dz + \underbrace{\int_{[r,r+\pi i]} f(z)dz}_{(1)} - \underbrace{\int_{[-r+\pi i,\, r+\pi i]} f(z)dz}_{(2)} - \underbrace{\int_{[-r,\,-r+\pi i]} f(z)dz}_{(3)}$

Calculamos cada integral:

(1) $\sigma : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \sigma'(t) = i$

$\quad t \longmapsto r+it$

$$\left| \int_{[r,r+\pi i]} f(z)dz \right| = \left| i \int_0^\pi \frac{e^{ir-t}}{e^{r+it} + e^{-r-it}} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{|e^{ir-t}|}{|e^{r+it} + e^{-r-it}|} dt \leq \pi \cdot \frac{r}{e^r - e^{-r}} \longrightarrow 0$$

(3) Ocurre lo mismo de forma análoga

(2) $\sigma : [-r,r] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \sigma'(t) = 1$

$\quad t \longmapsto t+\pi i$

$$\int_{[-r+\pi i,\, r+\pi i]} f(z)dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{it-\pi}}{e^{t+i\pi} + e^{-t-i\pi}} dt = \int_{-r}^{r} \frac{e^{it} e^{-\pi}}{e^t e^{i\pi} + e^{-t} e^{-i\pi}} dt = -\int_{-r}^{r} \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt \; e^{-\pi}$$

Por tanto, tenemos ya que

$$\int_{[r,r]} f(z)dz + e^{-\pi} \int_{-r}^{r} \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(f(z), \frac{\pi i}{2}\right)$$

Calculamos ahora el residuo:

$$\mathrm{Res}\left(f(z), \frac{\pi i}{2}\right) = \lim_{z \to \frac{\pi i}{2}} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \left(z - \frac{\pi i}{2}\right) = \frac{e^{-\pi/2}}{2i}$$

Luego tomando límite tenemos que

$$(1+e^{-\pi})\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \cancel{2}\pi i\,\frac{e^{-\pi/2}}{\cancel{2i}} = \pi e^{-\pi/2}$$

así $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi}}$ y tomando la parte real (que coincide) obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^{x}+e^{-x}}\,dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi}}$$

15. Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg z < \pi/2\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^4}\,dx$$