Índice

Tema 5. Completitud y continuidad uniforme

1. Completitud — 2
   1.1. Sucesiones de Cauchy — 2
   1.2. Completitud — 2
   1.3. Subconjuntos completos de $\mathbb{R}^n$ — 2
2. Continuidad uniforme — 3
   2.1 Lipschitzianas — 4
3. Teorema del punto fijo — 4
4. Aplicaciones lineales continuas — 5
   4.1. Continuidad de una aplicación lineal — 5
   4.2. Norma de una aplicación lineal continua — 5

1. Completitud

1.1 Sucesiones de Cauchy

Sea A un espacio métrico y d su distancia, tomamos $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ / $\{x_n\}$ es una sucesión. Decimos que $\{x_n\}$ es de Cauchy cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N}: p, q \geq m \quad p, q \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

De manera que es fácil ver que toda sucesión convergente es de Cauchy pero no toda sucesión de Cauchy es convergente, basta tomar $\{\frac{1}{n}\}$ con $\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\{\frac{1}{n}\}$ es de Cauchy pero no es convergente en $\mathbb{R}^*$.

Es fácil de ver, también, que no es una propiedad topológica ya que si tomamos $\rho(x,y) = |e^x - e^y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ podemos ver que ρ es equivalente a d_0 pero hay sucesiones convergentes de Cauchy para ρ que no lo son para d_0 como $\{-n\}$ $n \in \mathbb{N}$

1.2. Completitud

Se dice que un espacio métrico A es completo, o que su distancia d es completa, cuando toda sucesión de Cauchy de elementos de A es convergente. Es decir se cumple el recíproco que en la definición decíamos que no es cierto en general.

Hay dos espacios completos por excelencia:

- Espacio de Banach = espacio normado completo
- Espacio de Hilbert = espacio pre-Hilbertiano completo $\Rightarrow$ ser de Banach.

Por último, destacar que hay una correspondencia clara entre completitud y normas equivalentes:

"Dos normas equivalentes en un mismo espacio vectorial dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy"

"Toda norma equivalente a una norma completa es completa"

1.3. Subconjuntos completos de $\mathbb{R}^N$

Teorema de completitud de $\mathbb{R}^N$

- Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach
- El espacio euclídeo N-dimensional es de Hilbert.

•) Sea $x_n \in \mathbb{R}^N$ $\forall n \in \mathbb{N}$ — se identifica con él.

$$|x_p(k) - x_q(k)| \leq \|x_p - x_q\|_\infty$$

Luego si $\{x_n\}$ es de Cauchy $\Rightarrow \{x_n(k)\}$ es de Cauchy $\forall k \in \Delta_N \overset{\text{Teor. completitud } \mathbb{R}}{\Rightarrow} \{x_n(k)\}$ es convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ converge.

•) Particularidad.

Algunas consecuencias de este teorema son que si A subespacio métrico de un espacio métrico E entonces:

- Si A completo $\Rightarrow A \in C_T$ de E
- Si E completo y A cerrado en E $\Rightarrow A$ es completo
- Si E completo, los subconjuntos completos de E son los cerrados.
- Un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es completo sii es cerrado.

2. Continuidad uniforme

Se dice que una función $f: A \to E$ es uniformemente continua cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \text{si } x, y \in A \Rightarrow 0 \leq d(x,y) < \delta \Rightarrow 0 \leq d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Como caracterización tenemos que:

- Si f es uniformemente continua $\Rightarrow x_n, y_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\{d(x_n, y_n)\} \to 0 \Rightarrow \{d(f(x_n), f(y_n))\} \to 0$
- Si no lo es $\Rightarrow \exists \{x_n\}, \{y_n\}$ de puntos de E y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tq $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ pero $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema de Heine

Sean A, E espacios métricos y $f: A \to E$ continua. Si E es compacto $\Rightarrow f$ es uniformemente continua.

Supongamos f no uc $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ y $\{x_n\}, \{y_n\}$ $x_n, y_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N} \ / \ d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ pero $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x$

$d(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \leq \frac{1}{\sigma(n)} < \frac{1}{n} \Rightarrow \{d(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})\} \to 0$

$\{d(x_{\sigma(n)}, x)\}$ $\Rightarrow \{d(y_{\sigma(n)}, x)\} \to x$

Pero por continuidad $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, $\{f(y_{\sigma(n)})\} \to f(x)$ $\Rightarrow$ distancia entre ellas tiende a 0

Algunas observaciones sobre la continuidad uniforme son las siguientes:

- No es local
- No es topológica
- Se conserva en espacios normados al cambiar sus normas por otras equivalentes.
- Para campos escalares y vectoriales hablamos sin ambigüedad sobre continuidad uniforme.

2.1. Lipschitzianas

Se dice que una función $f: E \to F$ es lipschitziana cuando $\exists M \in \mathbb{R}_0^+ \,/\, d(f(x), f(y)) \leq M d(x,y)$ $\forall x, y \in E$.

Por tanto, es fácil ver, que toda función lipschitziana es uniformemente continua. Sin embargo, el recíproco es falso.

3. Teorema del punto fijo

Antes de nada, conviene hablar de funciones contractivas, como situación, debemos tener $f: E \to F$ lipschitziana con constante de lipschitz

$$M_0 = \sup\left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} \quad \forall x, y \in E,\ x \neq y \right\}$$

Definimos:

- f no expansiva $\Leftrightarrow M_0 \leq 1$
- f contractiva $\Leftrightarrow M_0 < 1$

Teorema del punto fijo

Sea E un espacio métrico completo y $f: E \to E$ contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo, es decir, $\exists!\, x \in E \,/\, f(x) = x$.

~~Continuidad de una aplicación lineal~~ tomamos f lipschitziana con constante $\alpha<1$

Sea $x_0 \in E$ $\Rightarrow$ tomamos $\{x_{n+1}\} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Inducción

$d(x_1, x_0) = \rho$

$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha\, d(x_1, x_0) = \alpha\rho$

$\vdots$

$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n \rho \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \alpha\, d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n+1}\rho$

¿$d(x_n, x_{n+k})$ $k, n \in \mathbb{N}$?

$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \rho \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{n+j} \leq \rho\alpha^n \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \rho\alpha^n \frac{1}{1-\alpha} \longrightarrow 0$

Tomando $\varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N} \mid$ si $n \geq m \Rightarrow \frac{\rho\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon$

$m \leq p < q \Rightarrow d(x_p, x_q) = d(x_n, x_{n+k})$ [con $n=p$ y $k = q-p$] $\leq \frac{\rho\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon$

$\{x_n\} \longrightarrow x$

$\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$
$\quad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$
$\{x_{n+1}\} \longrightarrow x$

$\boxed{f(x) = x}$ luego f tiene un único punto fijo

Supongamos $\exists y \,/\, f(y) = y$ $\quad d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \Leftrightarrow \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} d(x,y) \leq 0 \Rightarrow d(x,y) \leq 0 \Rightarrow x = y$

4. Aplicaciones lineales continuas

4.1. Continuidad de una aplicación lineal

Como caracterización de la continuidad, tenemos que:

Sean X, Y espacios normados, $T: X \longrightarrow Y$ lineal. Son equivalentes:

(i) T es continua.

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}_0^+ : \|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$

Dicha caracterización, nos permite tomar dos observaciones que darán paso al corolario de Hausdorff:

(i) Si T es continua en $x_0 \in X$ $\Rightarrow$ T es continua.

(ii) T continua $\Leftrightarrow$ T uniformemente continua $\Leftrightarrow$ T lipschitziana.

Corolario ya citado:

Sea X un espacio normado de dimensión finita e Y un espacio normado

si $T: X \longrightarrow Y$ es lineal $\Rightarrow$ T es continua.

Este corolario nos dice que cualquier aplicación, de $\mathbb{R}^N$ o identificada con él, que sea lineal es continua.

4.2. Norma de una aplicación lineal continua

Antes de nada, conviene tratar el espacio de aplicaciones lineales continuas; para nosotros, denotado por $L(X,Y)$ donde X,Y son espacios normados. Se cumple que:

$$L(X,Y) \subset \mathcal{C}(X,Y), \text{ es decir, } T+S,\ \lambda T \in L(X,Y) \quad \forall T,S \in L(X,Y),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Tmb conviene hablar de la norma de una aplicación lineal continua, que la definiremos como la constante de Lipschitz de su argumento.

Tratemos el espacio normado $L(X,Y)$.

$$\|T\| = \min\{M \in \mathbb{R}_0^+ \ / \ \|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\} \quad \forall T \in L(X,Y)$$

$$\|T\| = \sup\{\|T(u)\| : \|u\| \leq 1,\ u \in X\} \quad \forall T \in L(X,Y)$$

La aplicación $T \longmapsto \|T\|$ es una norma en $L(X,Y)$, gracias a esta norma, podremos considerar $L(X,Y)$ como un espacio normado.