Análisis Matemático I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 1

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

- *a*) Espacio pre-hilbertiano
- *b*) Espacio normado
- *c*) Espacio métrico

2. Conocer la relación entre los conceptos anteriores y los ejemplos que permitan distinguir entre ellos

3. Conocer los siguientes resultados, incluyendo su demostración:

- *a*) Desigualdad de Cauchy-Schwartz
- *b*) Desigualdad triangular para la norma de un espacio pre-hilbertiano

1 y 2. a) Espacio prehilbertiano

Un espacio pre-hilbertiano es un par $(V, (\cdot|\cdot))$ donde V es un espacio vectorial $V \neq \emptyset$. Es decir verifica el producto por escalares y la suma cerrada de vectores. Y por otro lado, $(\cdot|\cdot)$ es una forma bilineal simétrica; que, en particular, conocemos el producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{(en este caso)}$$

$$(x, y) \longmapsto (x|y) = \sum_{k=1}^{N} x(k)y(k).$$

Propiedades:

$$(\lambda x + \mu y | z) = \lambda(x|z) + \mu(y|z)$$

$$(x|x) \geq 0 \ \forall x \in V \ \wedge \ (x|x) = 0 \iff x = 0$$

$$(x|y) = (y|x)$$

Esta forma bilineal simétrica induce una forma cuadrática que es una aplicación que recoge los cuadrados de todos los vectores de V. Por def., es definida positiva.

b) Espacio normado

Un espacio normado es un espacio vectorial junto a una aplicación llamada norma.

En ocasiones, ésta puede venir inducida por el producto escalar.

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

Propiedades

- $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

Ejemplo de Espacio Normado no pre-hilbertiano: $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$

c) Espacio métrico

Un espacio métrico es un conjunto no vacío con una distancia que puede o no ser inducida por una norma. En caso de serlo tendríamos una aplicación definida de la siguiente forma.

↳ De modo que V sea normado.

En caso de ser esp. prehilbertiano

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \|y-x\| = \sqrt{(y|y)} - \sqrt{(x|x)}$$

Propiedades

$d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \iff x = y$

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Un ejemplo de espacio métrico no normado es $\mathbb{Z}$ con la distancia discreta (d_{disc}).

$$d_{disc}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ 1 & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

Por último, hay una relación entre conceptos bastante clara:

Espacios prehilbertianos $\subset$ Espacios Normados $\subset$ Espacios métricos

3 a) $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$

Debemos distinguir dos casos:

Si x, y son LD $\Rightarrow$ $x = y = 0$ ó $y = \lambda x$ / $\lambda \geq 0$

Si x, y son LI.

Supongamos $x, y \in V$ LD.

$|(x|y)| = |(x|\lambda x)| = |\lambda|(x|x) = |\lambda| \|x\|^2 = \|x\| \|y\|$ Se da la igualdad

Supongamos $x, y \in V$ LI

$0 < (x - \lambda y | x - \lambda y) = (x | x - \lambda y) - |\lambda| (y | x - \lambda y) =$

$= (x|x) - |\lambda|(x|y) - |\lambda|(y|x) + |\lambda|^2(y|y) = \|x\|^2 - 2|\lambda|(x|y) + |\lambda|^2\|y\|^2$

Tomando $\lambda = \dfrac{(x|y)}{\|y\|^2}$ obtenemos que $0 < \|x\|^2 - \dfrac{(x|y)}{\|y\|^2} \Rightarrow$ ∎

b) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Cauchy-Schwartz

$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x+y) + (y|x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \leq$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ ∎