1. Dadas las funciones $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x)$ se define $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = F(x, \varphi(x))$. Se supone que F y φ son de clase C^2. Expresa $\phi''(x)$ en términos de las derivadas sucesivas de F y φ.

Sabemos que, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x, \varphi(x))$ viene dada por la composición de dos funciones

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x, \varphi(x)) \quad \wedge \quad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto F(x,y)$$

donde $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ por ser el producto de funciones de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ por definición, claramente $\phi = F \circ h$ luego $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, calculamos ahora su derivada para un punto x aplicando la regla de la cadena

$$\phi'(x) = F'(h(x))\, h'(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, h(x))\, h'(x)\right) h'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, h(x))\, h'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, h(x))(h'(x))^2$$

$$\phi''(x) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, h(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, h(x))\, h'(x)\right) h'(x) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, h(x))\, h''(x) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, h(x))\, h'(x)\right)(h'(x))^2 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, h(x))\, 2h'(x)\, h''(x)$$

No la simplifico pues es un clarizo considerable

2. Encuentra la solución de

$$x' = e^{t+x}, \quad x(0) = 0$$

y precisa el intervalo I donde está definida.

Por comodidad, defino $F : D \to \bar{D}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\bar{D} \subseteq \mathbb{R}$ dada por $F(t,x) = e^{t+x}$ función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ luego, en particular, $F \in \mathcal{C}^1(D)$. Veamos cuales son los conjuntos dominio y codominio:

$D = \mathbb{R}^2$ por propiedades de la función exponencial

$\bar{D} = \{ z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \}$ por definición de la función exponencial

Disponemos de la ecuación $x' = F(t,x)$ que es una ecuación de variables separadas sin soluciones constantes luego resolvemos la ecuación según el método que conocemos.

$$x' = e^{t+x} = e^t e^x \iff \frac{dx}{dt} = e^t e^x \iff \int \frac{dx}{e^x} = \int e^t dt \iff -e^{-x} = e^t + c \iff e^{-x} = -e^t - c \iff -x = \ln(-e^t - c)$$

$$\iff x(t) = -\ln(-e^t - c)$$

Para ver el dominio, buscamos $c \in \mathbb{R}^- \mid -e^t - c > 0 \iff -e^t > c \iff e^t > \overset{-c>0}{-c} > 0 \iff t > \ln(-c)$

Además, $x(0) = 0 \Rightarrow 0 = \ln(-1 - c) \iff 1 = -1 - c \iff 2 = -c$; $c = -2$, por tanto $x_0(t) = -\ln(-e^t - 2)$

con $t \in]-2, \infty[$

3. Encuentra una ecuación diferencial para las funciones $y = y(x)$ cuyas gráficas tienen la siguiente propiedad: la distancia al origen desde cada punto $(x, y(x))$ coincide con la primera coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de abscisas.

4. Se considera el cambio de variables $\varphi: \; s = e^t, \; y = e^{-t}x$. Demuestra que φ define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y un dominio Ω del plano. Determina Ω. Comprueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = tx^2$$

y encuentra la nueva ecuación en las variables (s, y).

Definiremos Ω como codominio de φ pues probar que es un difeomorfismo es algo que se ha hecho mucho en otros parciales

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega \quad \text{donde} \quad \Omega = \{(s,y)\in\mathbb{R}^2 \mid s>0\}$$

Veamos que es admisible:

$$y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\,x' = e^t + 0 > 0$$

Nueva ecuación

$$x = ye^t \Rightarrow x' = y'e^t + ye^t = e^t(y'+y)$$

$$y'e^t + ye^t = \ln(s)(ye^t)^2$$

$$\varphi: \begin{cases} s = e^t \\ y = e^{-t}\cdot x \end{cases} \qquad y' = \frac{\ln(s)(ye^{\ln(s)})^2 - ye^{\ln(s)}}{s} = \frac{\ln(s)ys - ys}{s} = \frac{ys(\ln(s)-1)}{s} = y(\ln(s)-1)$$

5. Se considera la función *seno hiperbólico* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = f(t) = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.
Demuestra que f tiene una inversa[1] $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t = g(x)$ y calcula $g'(x)$.

Para demostrar que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la única manera que se me ocurre es probar la caracterización, es decir, que sea inyectiva y sobreyectiva.

i) Inyectividad: Sabiendo que es una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ por ser suma de funciones de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Utilizaremos la derivada para probar que es estrictamente monótona entonces, al estar definida en un intervalo obtendremos que es inyectiva

$$f'(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} > 0 \quad \forall t\in\mathbb{R} \text{ por definición de la función exponencial}$$

luego la función es estrictamente creciente

ii) Sobreyectividad: Tomaremos límites en $\pm\infty$ para ver que abarca toda la recta real haciendo uso de la monotonía estricta de la función.

$$\lim_{t\to -\infty} f(t) = \lim_{t\to -\infty} \frac{e^t - e^{-t}}{2} = -\infty$$

$$\lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{t\to \infty} \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \infty$$

luego al ser estrictamente creciente obtenemos que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Hemos demostrado que es biyectiva; luego, $\exists f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gracias al Teorema de Derivación de la función inversa, como $f'(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, podemos aplicarlo vemos que f^{-1} es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{2}{e^{f^{-1}(x)} + e^{-f^{-1}(x)}}$$

Como desconozco $f^{-1}(x)$, lo dejamos indicado.