3. Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1-z^n}$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa en $D(0,1)$.

La idea será tratar de probar las hipótesis del teorema de convergencia de Weierstrass para obtener así que converge en $D(0,1)$ y su suma es holomorfa.

- $\Omega = D(0,1)$, abierto y conexo de Ω.
- $f_n : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en $D(0,1)$ pues es una función racional
  $z \longmapsto \frac{z^n}{1-z^n}$ sin ceros en el denominador.
- $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge unif en cada compacto de $(D(0,1))$; sea $K \subset D(0,1)$ un compacto y $\alpha = \max\{|z| : z \in D(0,1)\}$; es claro que $0<\alpha<1$.

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| \leq \frac{\alpha^n}{|1-z^n|} \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ tenemos la convergencia uniforme sobre compactos sin más que usar el Test de Weierstrass.

Por tanto, por el teorema de convergencia de Weierstrass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ es holomorfa en $D(0,1)$.

¿Convergencia uniforme en $D(0,1)$?

4. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $f(0)=0$. Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f(z^n)$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa en $D(0,1)$.

Sea $K \subset D(0,1)$ compacto, sabemos que $\exists r := \max\{|z| : z \in K\} < 1$ con lo que $K \subseteq \overline{D}(0,r)$. Ahora, usaremos la hipótesis $f(0)=0$, lo que nos dice que f tiene un cero en el origen. Entonces, por la caracterización de los ceros de una función holomorfa $\exists g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $m \in \mathbb{N} \mid f(z) = z^m g(z)$ $\forall z \in D(0,1)$ y $g(0) \neq 0$.

De esta forma, tenemos que $|f(z^n)| = |z^{n \cdot m} g(z)| \leq r^{nm} M$ ($M \in \mathbb{R}^+ \mid g(z) < M$ $\forall z \in K$ que existe porque $g \in \mathcal{H}(\Omega)$) y por el Test de Weierstrass tenemos la convergencia uniforme sobre compactos.

Aplicando ahora el T^a de convergencia de Weierstrass obtenemos que

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(z^n) \in H(D(0,1)).$$

En este caso, la convergencia puntual se deduce de la uniforme sobre compactos.

7. Sea $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ una función continua. Probar que definiendo

$$f(z) = \int_0^1 \phi(t)\, e^{itz}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

se obtiene una función entera y calcular el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen.

Sea $\varphi(t,z) = \phi(t) e^{itz}$ $\forall (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{C}$. Como $[0,1]$ es un camino es continuo y ϕ es continua tenemos que φ es continua.

Fijado ahora $t \in [0,1]$ definimos $\varphi_t : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \varphi(t,z)$ de manera que $\varphi_t(z) = \phi(t) e^{itz}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

que es holomorfa en $\mathbb{C}$, luego φ_t es una función entera.

Aplicando ahora el teorema de holomorfía de integrales dependientes de un parámetro obtenemos que $f \in H(\mathbb{C})$. Además, se cumple que

$$f^{(n)}(z) = \int_0^1 \varphi_t^{(n)}(z)\, dz = \int_0^1 \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(t,z)\, dz.$$

Buscamos hacer un desarrollo de Taylor centrado en el origen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ $\forall z \in \mathbb{C}$

donde

$$f^{(n)}(0) = \int_0^1 \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(t,0)\, dt$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z) = \phi(t)\,(it)\,e^{itz} \Rightarrow \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(t,z) = \phi(t)\,(it)^n e^{itz} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \int_0^1 \phi(t)\,(it)^n\, dt$$

Entonces tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^1 \phi(t)\,(it)^n\, dt}{n!} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

el origen.

8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t}\, e^{-tz}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

a) Probar que f_n es una función entera y calcular su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen. → THFDIDP

b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

c) Deducir que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $f(z) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-tz}\, dt$ para todo $z \in \Omega$.

a) $\phi_n : [0,n] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \phi_n(t,z) = \sqrt{t}\, e^{-tz}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ϕ_n continua

$\phi_n(t,\cdot) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ $\forall t \in [0,1]$

Entonces por THFDIDP $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y que $f_n^{(n)}(z) = \int_0^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\sqrt{t}e^{-tz}\right)dt$

b) $g_k(z) = \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\, e^{-tz} dt$ $\Rightarrow f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} g_k(z)$ entonces buscamos probar que $\sum_{k\geq 1} g_k$ es convergente uniformemente sobre compactos.

Sea $B \subset \Omega$ un compacto, buscamos aplicar el Test de Weierstrass luego debemos acotar la integral.

nos hará falta que $\inf\{\operatorname{Re} z, z \in B\} \geq \delta > 0$

$\forall z \in B, k \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\, e^{-tz} dt \right| \leq \ell(\cancel{[k-1,k]}) \sup\{|\sqrt{t}e^{-tz}| : z \in B, t \in [k-1,k]\} \leq \frac{\sqrt{k}}{e^{\delta(k-1)}}$$

(con $\ell([k-1,k]) = 1$)

$$|\sqrt{t}\, e^{-tz}| = \sqrt{t}\, e^{-t\operatorname{Re} z} \leq \sqrt{t}\, e^{-t\delta} \leq \sqrt{k}\, e^{-(k-1)\delta}$$

Como $\sum_{k \geq 1} \frac{\sqrt{k}}{e^{\delta(k-1)}}$ es convergente por el criterio de la raíz; tenemos la convergencia uniforme sobre compactos. Es decir, $\{f_n\}$ converge unif. sobre compactos en Ω a $f(z) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \sqrt{t}\, e^{-tz} dt$.

c) El T^a de convergencia de Weierstrass obtenemos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$