Ejercicio 1. Se considera una solución cualquiera $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x' = 2tx.$$

Se supone que dicha solución está definida en un intervalo abierto I. Demuestra que, para cada $t \in I$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t) = ce^{t^2}.$$

Para ello, buscaremos probar que la ecuación diferencial resultante de la ecuación

$$x = ce^{t^2}$$

definida en el intervalo abierto I es la dada por el enunciado.

Para ello, definimos la función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = xe^{-t^2}$; del enunciado deducimos que

$$f(t) = c \quad \forall t \in I$$

luego sabiendo que la función $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = e^{-t^2}$ es de clase $\mathcal{C}^1(I)$ obtenemos que la función $f \in \mathcal{C}^1(I)$ por ser producto de funciones de estas características pudiendo aplicar derivación implícita:

$$f'(t) = x'e^{-t^2} - 2xte^{-t^2} = e^{-t^2}(x' - 2xt) \overset{e^{-t^2} \neq 0}{=} 0$$

Lo cual se cumple si $(x' - 2xt) = 0$, o lo que es lo mismo $2xt = x'$ que es lo que nos pide el enunciado ya que $f'(t) = 0$ luego $f(t)$ es constante; es decir, sea $c \in \mathbb{R}$ obtenemos que $f(t) = e^{-t^2}x = c$. $\square$

Ejercicio 2. Demuestra que la transformación $\varphi(t, x) = (s, y)$, $s = t$, $y = x + t$ define un difeomorfismo del plano que es compatible con la ecuación

$$x' = (x + t)^2.$$

Sabemos que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ donde
$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t,x) \longmapsto (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x)) = (s,y)$$
luego como φ_1 y φ_2 no son más que polinomios entonces son de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ obteniendo así que $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Sea ahora
$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (s,y) \longmapsto \psi(s,y) = (t,x)$$
veamos que $\psi \circ \varphi = Id$ (el análogo es igual); sea $(t,x) \in \mathbb{R}^2$,

$\psi(\varphi(t,x)) = \psi(s, y+s) = (t, y - s = x)$ luego $\psi = \varphi^{-1}$. Como ψ viene dada por polinomios de primer grado, sabemos ya que es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Entonces sabemos ya que φ y ψ son difeomorfismos

Veamos ahora que son admisibles para ello comprobaremos que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t,x) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)x'(t) \neq 0$$

Sabemos que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) = 1$ y $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) = 0$ luego aprovechando que $x' = (x+t)^2$

vemos que

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 \neq 0$$

Obteniendo así que es un cambio de variable admisible para la ecuación diferencial

En otro apartado se nos pide dar una solución que cumpla que $x(0)=0$, para ello, vamos a aplicar el cambio de variable:

-) Sabiendo que $x' = y' - 1$

$$y' = y^2 + 1 \quad \text{como nueva ecuación.}$$

Claramente es una ecuación de variables separadas donde $p(s) = 1$ y $q(y) = y^2+1$ ambas continuas luego siguiendo el proceso visto en clase.

$$\frac{dy}{ds} = y^2+1 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2+1} = ds \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int ds \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(y) = s + c$$

donde $y \in \mathbb{R}$ y sabemos que la composición $tg \circ \operatorname{arctg}$ está bien definida obtenemos que

$$y = tg(s+c)$$

Deshaciendo ahora el cambio obtenemos que $x + t = tg(t+c) \Leftrightarrow x = tg(t+c) - t$

Tomando ahora la condición $x(0)=0$ obtenemos: $0 = tg(c)$ luego $c = 0$ ó $c = k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$

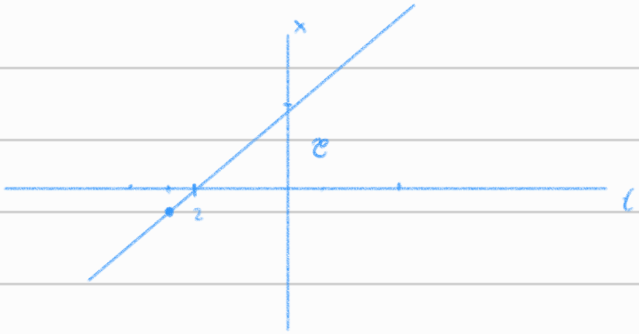
No obstante, como $c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow c = 0$.

Ejercicio 3. Encuentra un cambio de variable que transforme la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x+t+3}{t-x+2}$$

en una ecuación homogénea.

Veamos primero cuál es el dominio que vamos a tomar para $f(t,x) = \frac{x+t+3}{t-x+2}$; y será el conjunto $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > t+2\}$; gráficamente



Buscamos realizar el siguiente cambio de variable $\varphi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\varphi(t,x) = (t-t_0, x-x_0)$ donde (t_0,x_0) es un punto a calcular que cumple que:

$$\begin{cases} x_0+t_0+3=0 \\ t_0-x_0+2=0 \end{cases} ; \quad x_0=t_0+2 \Rightarrow 2t_0+5=0 \quad t_0=\frac{-5}{2}, \; x_0=\frac{-5}{2}+2=\frac{-1}{2}$$

Resolviendo el sistema compatible determinado vemos que el cambio de variable viene dado por

$$\varphi(t,x) = \left(t+\frac{5}{2}, x+\frac{1}{2}\right)$$

que claramente es admisible y un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\mathcal{C})$. Usando que $x=y-\frac{1}{2}$, $t=s-\frac{5}{2}$ y $x'=y'$ obtenemos que nuestra ecuación resultante es:

$$y' = \frac{(y-\frac{1}{2})+(s-\frac{5}{2})+3}{(s-\frac{5}{2})-(y-\frac{1}{2})+2} = \frac{y+s}{-y+s} = \frac{\frac{y}{s}+1}{\frac{-y}{s}+1} \quad \text{obteniendo } y'=h\left(\frac{y}{s}\right)=\frac{u+1}{-u+1}$$

donde h está definida en $\mathcal{C}'=\{(s,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>s-2\}$.

Ejercicio 4. Dadas las ecuaciones

$$x = t + e^t, \quad y = 1 + t^4$$

demuestra que la eliminación del parámetro t nos permite definir una función derivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$. Además, la función $y(x)$ alcanza su mínimo en $x = 1$.

Ejercicio 5. Demuestra que la ecuación

$$x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x = t$$

define de forma implícita una única función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$. Además, prueba que se cumple la identidad $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Para ello, debemos demostrar que x es una aplicación, es decir, que para cada $t\in\mathbb{R}$ $\exists! \, x\in\mathbb{R} \mid x(t)=x$ para lo cual, fijado $t\in\mathbb{R}$ definimos la función auxiliar $f_t:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f_t(x)=x-\frac{1}{3}\operatorname{sen} x - t$

Para demostrarlo trataremos de demostrar la existencia y unicidad de la solución haciendo uso de que haya un único 0 para la función

$\Rightarrow$) Tenemos que f_t es continua cumpliendo que $\lim_{x\to-\infty} f_t(x)=-\infty \wedge \lim_{x\to\infty} f_t(x)=\infty$ luego $\exists x\in\mathbb{R} \mid f_t(x)=0$

$\Rightarrow$) Para demostrar la unicidad, sabiendo que f_t es derivable en $\mathbb{R}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ obtenemos que

$$f_t'(x) = 1-\frac{1}{3}\cos(x) \geq 1-\frac{1}{3} > 0$$

luego f_t es estrictamente creciente $\forall t\in\mathbb{R}$ obteniendo así que $x\in\mathbb{R} \mid f_t(x)=0$ es único

El resultado que pide deriva de que el seno es una función periódica de periodo π. Sea $x(t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \forall t \in \mathbb{R}$

obtenemos que