Topología: Relación de problemas del Tema 1

Grado en Matemáticas, Doble Grado en Física y Matemáticas,
Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Curso 2023-2024

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Prueba que la aplicación $\widetilde{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad \forall x, y \in X$$

es una distancia en X. Prueba que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$.

2. Sea (X, d) un espacio métrico. Prueba que la aplicación $\widetilde{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{d}(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \quad \forall x, y \in X$$

es una distancia en X. Prueba que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$.

3. Sea (X, d) un espacio métrico y $x_0 \in X$. Prueba que la aplicación $d' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d'(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y\ , \\ d(x,x_0) + d(x_0,y) & \text{si} \quad x \neq y\ , \end{cases}$$

es una distancia en X. Si (X, d) es el espacio métrico euclídeo a d' se le denomina **distancia de correos**.

4. Consideremos la siguiente aplicación $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |y_2 - x_2| & \text{si} \quad x_1 = y_1\ , \\ |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| & \text{si} \quad x_1 \neq y_1\ . \end{cases}$$

Demuestra que d es una distancia en $\mathbb{R}^2$ y calcula las bolas abiertas y cerradas de $(\mathbb{R}^2, d)$. A d se le denomina **distancia del río en la jungla** o **distancia del ascensor** .

5. Consideremos la distancia discreta d_{disc} en $\mathbb{R}^n$. Prueba que no existe ninguna norma $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $d_{\|\cdot\|} = d_{disc}$.

6. Consideremos la norma $\| \cdot \|_1$ en $\mathbb{R}^n$. Prueba que no existe ninguna forma bilineal simétrica definida positiva $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\| \cdot \|_g = \| \cdot \|_1$.

7. Encuentra todas las topologías de un conjunto con dos elementos.

8. Estudia si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico en los siguentes casos:

   a) $X = \mathbb{N}$ y $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\} \cup \{\{1, \ldots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
   b) $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T} = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$.
   c) $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T} = \{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$.
   d) X un conjunto, A, B subconjuntos no vacíos de X y $\mathcal{T} = \{\varnothing, A, B, X\}$.
   e) X un conjunto, $A \subset X$ tal que $\varnothing \neq A \neq X$ y $\mathcal{T} = \mathcal{P}(A) \cup \{X\}$.
   f) $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{A \subset X \mid \exists f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \cap A\}$.

9. Sea X un conjunto infinito y $x_0 \in X$. Prueba que

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid x_0 \notin U\} \cup \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\}$$

   es una topología sobre X, a la que llamaremos **topología fuerte en un punto**.

10. Dado $n \in \mathbb{N}$ denotaremos U_n al conjunto de los divisores de n. En $\mathbb{N}$ se considera la siguiente familia de subconjuntos $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $U \in \mathcal{T}$ si y solo si $U_n \subset U$, para todo $n \in U$. Prueba que:

    a) $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{N}$.
    b) $\mathcal{B} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathcal{T}$.

11. En $H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ se considera la familia

$$\mathcal{B} = \{B((x,y), \varepsilon) \mid y > 0, \varepsilon \in]0, y[\} \cup \{(x, 0) \cup B((x,y), y) \mid y > 0\}$$

    Prueba que existe una única topología $\mathcal{T}$ en H^+ tal que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$. A este espacio topológico se le conoce como **semiplano de Moore**.

12. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías de un conjunto X. Demuéstrese que la familia $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, formada por los abiertos comunes a ambas, es también una topología de X. ¿ Es la unión de dos topologías una topología?

13. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los intervalos que son abiertos son los de la forma (a, b), para $a \leq b$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ y $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ y los que son cerrados son de la forma $[a, b]$, para $a \leq b$, $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$.

14. Prueba que el conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ es un abierto en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ mientras que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ es un cerrado que no es abierto.

15. Sea X un conjunto no vacío y $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de X. Demuestrar que existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\{A_i\}_{i \in I}$ es base de $\mathcal{T}$. Prueba que todo abierto de $\mathcal{T}$ es un cerrado.

16. Sobre $\mathbb{R}$ consideramos la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{T} = \{U \cup V \mid U \in \mathcal{T}_u \ , \ V \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

    Se pide:

a) Prueba que $\mathcal{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$ que contiene a la topología usual $\mathcal{T}_u$. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ recibe el nombre de **recta diseminada**.

b) Prueba que los intervalos $[a, b]$ y $[c, d)$ con $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

c) Calcula una base de entornos de $x \in \mathbb{R}$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

d) Calcula el interior, la clausura y la frontera de los intervalos $[0, 1]$ y $[0, \sqrt{2}[$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

e) Calcula el interior, la clausura y la frontera de $\{x\}$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

17. Sobre $\mathbb{R}$ consideramos la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \bigcup (n, +\infty) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

a) Prueba que existe una única topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$.

b) Calcula una base de entornos en $x \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{T}$ no trivial.

c) Prueba que $(1, +\infty)$ es un abierto de $\mathcal{T}$ pero $(-\infty, 1)$ no lo es.

d) Prueba que $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_u$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$.

e) Calcula la clausura, el interior y la frontera de los conjuntos $(-\infty, 2]$ y $[2, +\infty)$.

18. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$. Prueba que, para cada punto $x \in X$, la familia:
$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$$
es una base de entornos abiertos del punto x.

19. En $\mathbb{R}^2$ se considera para cada $z \in \mathbb{R}^2$, la familia $\mathcal{B}_z = \{\{z\} \cup A_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, donde A_ε es una bola abierta de centro z y radio ε a la que se han quitado un número finito de radios. Demuestra que $\mathcal{B}_z$ es una base de entornos para alguna topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ recibe el nombre de **plano agrietado**.

20. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$ y sea $\mathcal{B}_x$ una base de entornos de x. Prueba que la familia $\widetilde{\mathcal{B}}_x = \{\mathring{B} \mid B \in \mathcal{B}_x\}$ es una base de entornos abiertos del punto x.

21. En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ de la recta de Sorgenfrey calcula la clausura de los siguientes subconjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $(a, b]$, $[a, b)$, $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ y $B = \left\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

22. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ calcula la clausura, el interior y la frontera de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\{0, 1\}$.

23. Calcula los puntos de acumulación y los puntos aislados del subconjunto A en los siguientes casos:

a) $(X, \mathcal{T}_t)$ y $A \subseteq X$ con $\sharp A \geq 2$.

b) $(X, \mathcal{T}_D)$ y $A \subseteq X$.

c) $(X, \mathcal{T}_{CF})$ y $A \subseteq X$ finito.

d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ y $A = (0, 1]$.

24. ¿Para qué espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ se cumple que X es el único subconjunto denso?

25. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y D un subconjunto denso de $(X, \mathcal{T})$. Demuestra que para todo subconjunto abierto $A \subset X$ se tiene $\overline{D \cap A} = \overline{A}$.

26. Prueba que en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ se verifica:

    a) $\overline{B(x, \varepsilon)} = \overline{B}(x, \varepsilon)$.

    b) $\mathrm{int}(\overline{B}(x, \varepsilon)) = B(x, \varepsilon)$.

    c) $\partial \overline{B}(x, \varepsilon) = \partial B(x, \varepsilon) = S(x, \varepsilon)$.

    ¿Son ciertas las igualdades anteriores en todo espacio métrico?

27. Un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice frontera si $A \subset \partial A$. Demuestra que:

    a) A es frontera $\Longleftrightarrow \mathring{A} = \emptyset \Longleftrightarrow \overline{X \setminus A} = X$.

    b) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son conjuntos frontera.

28. Un conjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice enrarecido si $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$. Demuestra que:

    a) Si A es enrarecido, A es frontera.

    b) Un subconjunto frontera y cerrado es enrarecido.

    c) Si $U \in \mathcal{T}$, entonces ∂U es enrarecido.

    d) Todo subconjunto cerrado y enrarecido es frontera de un abierto.

29. Demuestra que todo subconjunto cerrado de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ es la frontera de algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

30. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X tal que $\cup_{i \in I} \mathrm{int}(A_i) = X$. Entonces $U \in \mathcal{T}$ si y solo si $U \cap A_i \in \mathcal{T}_{A_i}$, $\forall i \in I$.

31. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Sea $a \in A$ y $\mathcal{B}_a$ una base de entornos de a en $(X, \mathcal{T})$. Prueba que la familia

$$(\mathcal{B}_A)_a = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}_a\}$$

    es una base de entornos de a en $(A, \mathcal{T}_A)$.

32. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$ un subconjunto no vacío y $B \subset A$. Prueba que:

    a) $\mathrm{int}_X(B) \cap A \subset \mathrm{int}_A(B)$. Da un ejemplo de que en general no se tiene la igualdad.

    b) $\mathrm{fr}_A(B) \subset A \cap \mathrm{fr}_X(B)$. Da un ejemplo de que en general no se tiene la igualdad.

33. Consideremos el conjunto $A = [-1, 0) \cup (0, 2) \cup \{3\}$ de $\mathbb{R}$ con la topología $(\mathcal{T}_u)_A$ inducida en A por $\mathcal{T}_u$.

    a) Estudia si los conjuntos $\{3\}$ y $(0, 2)$ son abiertos o cerrados en $(A, (\mathcal{T}_u)_A)$.

b) Comprueba si $[-1, -\frac{1}{2}]$ es entorno de -1 en $(A, (\mathcal{T}_u)_A)$.

c) Calcula la clausura de $[-1, 0)$ en $(A, (\mathcal{T}_u)_A)$.

34. Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es un subconjunto no vacío, se define $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ como $d_A(x, y) = d(x, y)$, $\forall x, y \in A$. Prueba que:

    a) (A, d_A) es un espacio métrico.

    b) $(\mathcal{T}_d)_A = \mathcal{T}_{d_A}$, es decir la topología inducida en A por $\mathcal{T}_d$ coincide con la topología asociada a d_A.

35. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si para todo entorno $V \in \mathcal{N}_x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x escribiremos $x \in \lim_{n\to\infty} x_n$ y diremos que x es un límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Prueba las siguientes afirmaciones:

    a) En un espacio topológico Hausdorff, una sucesión convergente tiene un único límite.

    b) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $x \in X$ y $\mathcal{B}_x$ una base de entornos de x. Entonces $x \in \lim_{n\to\infty} x_n$ si y solo si para todo $B \in \mathcal{B}_x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \geq n_0$.

    c) En un espacio $(X, \mathcal{T}_t)$ con la topología trivial cualquier sucesión en X converge a todos los puntos de X (una sucesión puede converger a más de un punto).

    d) Sea (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x \in X$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x (en $(X, \mathcal{T}_d)$) si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

    e) En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$ prueba que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si y solo si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$ para todo $n \geq n_0$.

    f) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Supongamos que existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en A que converge a un punto $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$.

    g) Sea $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Si $x \in \mathring{A}$ entonces para cualquier sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para $n \geq n_0$.

    h) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico 1AN, $A \subset X$ un subconjunto no vacío y $x \in \overline{A}$. Entonces existe una sucesión de puntos de A que converge a x. Da un contraejemplo de que esto no tiene por qué ser cierto si $(X, \mathcal{T})$ no es 1AN.

    i) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico 1AN y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Supongamos que para cualquier sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para $n \geq n_0$. Entonces $x \in \mathring{A}$.

36. Prueba que la recta de Sorgenfrey es un espacio de Hausdorff y 1AN pero no es 2AN.

37. Sobre $\mathbb{R}$ consideramos la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{[a, b] \mid a < b, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \ .$$

    Se pide:

    a) Prueba que existe una única topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$.

b) Calcula una base de entornos en $x \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{T}$ no trivial.

c) Prueba que $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_2?

d) Calcula la clausura, el interior y la frontera de los conjuntos $[0, 1)$, $[0, \sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}$.

e) Prueba que $\mathbb{Z}$ es un subconjunto discreto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

f) Estudia si $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico $1AN$ o $2AN$.