Ejercicio 5. ¿Son isomorfos los grafos de la figura 1? ¿Y los de la figura 2? ¿Y los de la 3?.

Figura 1

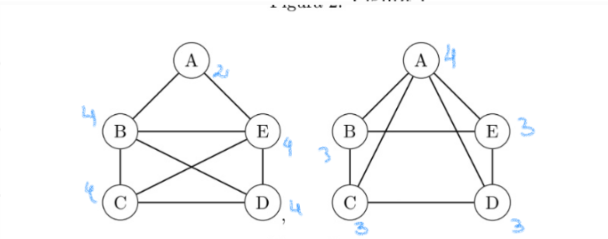


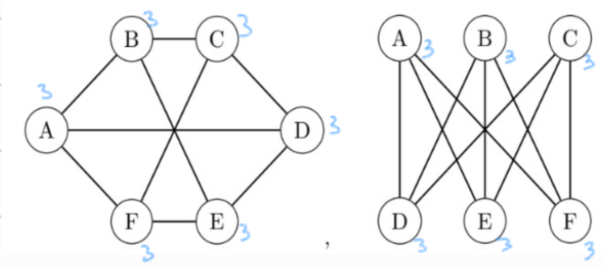
Figura 3:

No son isomorfos porque la sucesión de grados no es invariante.

Las sucesiones de grados son.

0, 0, 1, 0, 4

0, 0, 0, 4, 1



El isomorfismo es

$A \longmapsto A$ $\quad$ $D \longmapsto B$

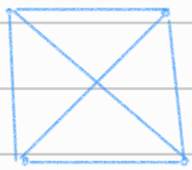
$B \longmapsto C$ $\quad$ $E \longmapsto D$

$C \longmapsto F$ $\quad$ $F \longmapsto F$

Luego son isomorfos

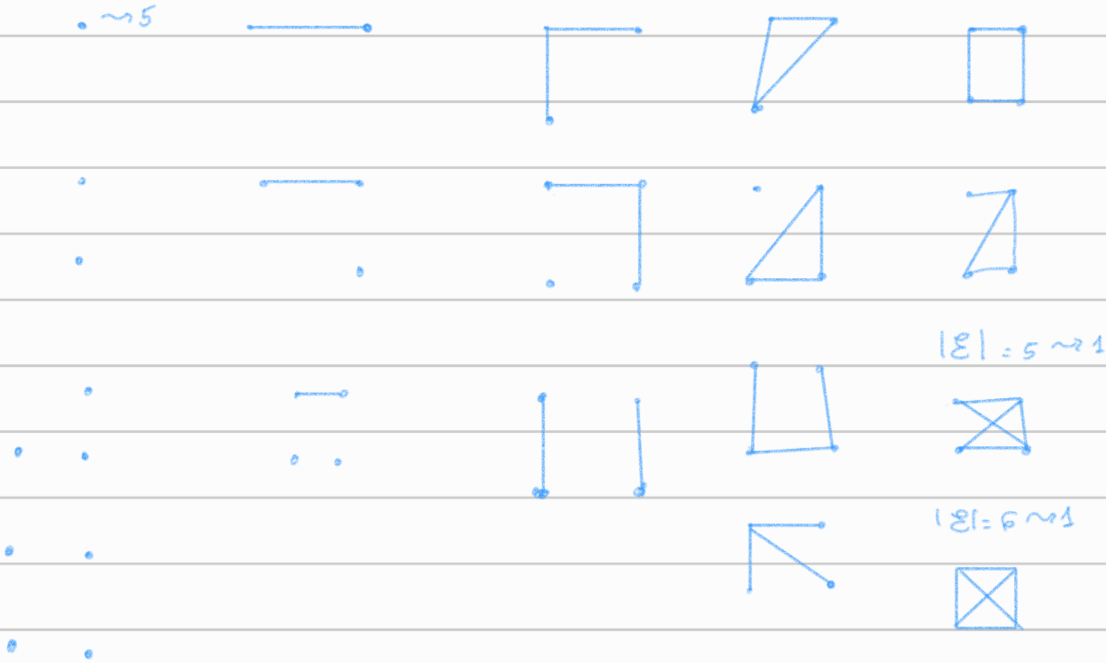
Ejercicio 4. Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construye todos sus subgrafos salvo isomorfismo.

Grafo inicial



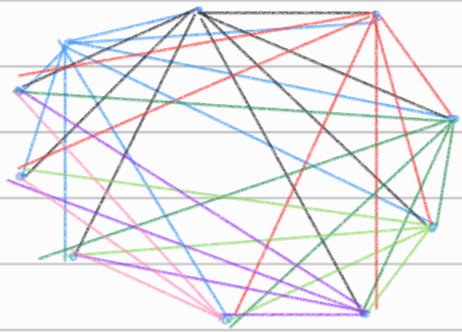
Subgrafos $\qquad |E| : 1 \rightsquigarrow 3 \qquad |E| : 2 \rightsquigarrow 3 \qquad |E| : 3 \rightsquigarrow 4 \qquad |E| : 4 \rightsquigarrow 2$

$\cdot \rightsquigarrow 5$



Luego hay 18 subgrafos no isomorfos

Ejercicio 1. Diez personas están sentadas alrededor de una mesa circular. Cada persona estrecha la mano a todos los demás excepto a la persona sentada directamente enfrente de la mesa. Dibuja un grafo que modele la situación.



Ejercicio 2. Seis hermanos (Alonso, Bernardo, Carlos, Daniel, Enrique y Fernando) tiene que emparejarse para compartir habitación en el próximo curso escolar. Cada uno de ellos ha elaborado una lista con los nombres de aquellos con los que quiere emparejarse:

Lista de Alonso: Daniel.

Lista de Bernardo: Alonso, Enrique.

Lista de Carlos: Daniel, Enrique.

Lista de Daniel: Carlos.

Lista de Enrique: Daniel, Bernardo, Fernando.

Lista de Fernando: Alonso, Bernardo.

Dibuja el grafo dirigido que modela esta situación.

A $\longrightarrow$ Alonso

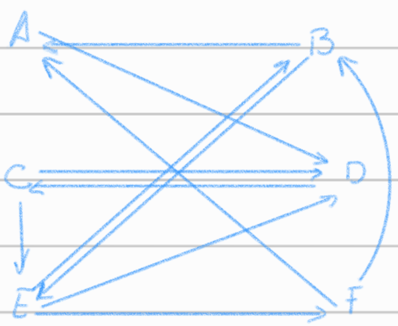
B $\longrightarrow$ Bernardo

C $\longrightarrow$ Carlos

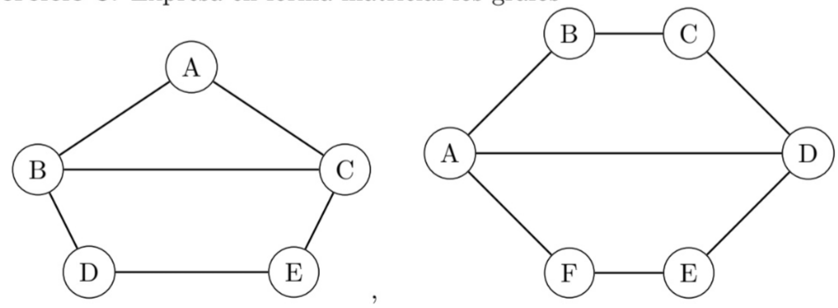
D $\longrightarrow$ Daniel

E $\longrightarrow$ Enrique

F $\longrightarrow$ Fernando



Ejercicio 3. Expresa en forma matricial los grafos



,

Para ello usaremos las matrices de adyacencia $A \in M_5(\mathbb{N}), B \in M_6(\mathbb{N})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Demostrar que, en cualquier grafo, el número de vértices de grado impar es par (Así, en un grupo de personas, el número total de personas que estrechan la mano de un número impar de otras personas es siempre par)

La idea intuitiva es que, cuando un vértice tiene grado impar hay tantos vértices con una incidencia más como el grado de dicho vértice. Esto es a lo sumo, por tanto habrá un número par de vértices con incidencias impares contando el grado de dicho vértice junto con dicho vértice

Sea ahora $\mathcal{G}$ un grafo cualquiera y $V, \mathcal{E}$ los conjuntos de vértices y lados, considerando V_1 el conjunto de vértices de grado impar podemos ver que $V = V_1 \cup (V \setminus V_1)$, es decir, si $V_2 = V \setminus V_1$ el conjunto de vértices de grado par es claro que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Supongamos ahora que $|V_1| = 2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$ cumpliendo que $|V_1| \leq |V|$ Sabemos que $\sum_{v \in V} gr(v) = 2|\mathcal{E}|$, es decir, es par.
Pero $V = V_1 \cup V_2$ luego $\sum_{v \in V} gr(v) = \sum_{v \in V_1} gr(v) + \sum_{v \in V_2} gr(v)$. Usando ahora que los grafos dados por V_1 y V_2 son subgrafos del grafo principal se cumple que

$$\sum_{v \in V_1} gr(v) = 2|\mathcal{E}_1| \quad \wedge \quad \sum_{v \in V_2} gr(v) = 2|\mathcal{E}_2|$$

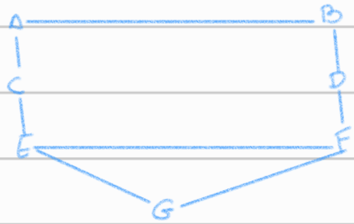
Sin embargo $\sum_{v \in V_1} gr(v) = \sum_{v \in V_1} 2k_v + 1 = (2k+1) + \sum_{v \in V_1} 2k_v = (2k+1) + (2k') = 2(k+k')+1$!!

Ejercicio 7. Demostrar que si cada vértice de un grafo G es de grado 2, cada componente conexa de G es un ciclo

Se puede ver por isomorfismo a  con n vértices $\forall n \in \mathbb{N}$. Habría que construir el isomorfismo

Ejercicio 8. Los siguientes hechos se conocen de las personas A,B,C,D,E,F,G. A habla inglés; B habla inglés y español; C habla inglés italiano y ruso; D habla japonés y español; E habla alemán e italiano; F habla francés, japonés y ruso; G habla francés y alemán. Demostrar que cada par de personas entre estas siete puede comunicarse (con la ayuda de intérpretes, si es necesario, tomados de los cinco restantes)

Basta con construir el grafo que lo permite, usaremos un grafo no dirigido pues si dos personas hablan el mismo idioma se pueden comunicar entre sí



Es claro que A,B,C,D,E,F se comunican entre sí por el ciclo A,B,C,D,E,F gracias a esto, como G se conecta al ciclo mediante G y F puede siempre comunicarse con los demás.

Ejercicio 9. Demuestra que en todo grafo con mas de un vértice existen dos vértices con el mismo grado.

Procedemos por inducción sobre el número de vértices

$n=2$

Supuesto para n, lo vemos para $n+1$. Hay dos casos

- Si separamos los vértices con mismo grado $\rightsquigarrow$ HI nos lo corrige
- Si no separamos los vértices con mismo grado $\rightsquigarrow$ HI nos lo corrobora

Ejercicio 11. ¿Existe algún grafo regular de grado 5 con 25 vértices?

Esto es falso pues el grafo estaría compuesto por un número impar de vértices de grado impar, lo cual hemos demostrado en el ejercicio 6 que es falso

Ejercicio 10. Prueba que si un grafo G contiene solo dos vértices de grado impar entonces ambos han de encontrarse en la misma componente conexa.

Si suponemos que no, sabemos que el subgrafo de la componente conexa es un grafo que tiene un solo vértice de grado impar, lo que el ejercicio 6 nos dice que no es posible luego la suposición inicial es errónea.

Ejercicio 12. ¿Existe un grafo completo con 595 lados?

Al ser completo sabemos que la suma de los grados es 1190, luego debe existir una sucesión gráfica que dé lugar a ese grafo.

Ejercicio 13. ¿Existe un grafo con 6 vértices cuyos grados sean 1,2,2,3,4 y 4 respectivamente?

Para comprobarlo, vamos a ver si la sucesión 4,4,3,2,2,1 es gráfica usando el teorema de Havel-Hakimi:

4 4 3 2 2 1

3 2 1 1 1

1 0 0 1

1 1 0 0

0 0 0

Luego, como 0,0,0 es una sucesión gráfica, existe un grafo con 6 vértices que tiene dicha sucesión gráfica.

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos, dibuja un grafo de Euler que verifique las condiciones, o prueba que tal grafo no existe:

(a) Con un número par de vértices y un número par de lados.

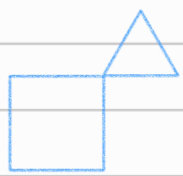
(b) Con un número par de vértices y un número impar de lados.

(c) Con un número impar de vértices y un número par de lados.

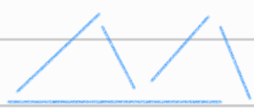
(d) Con un número impar de vértices y un número impar de lados.

a)

b)

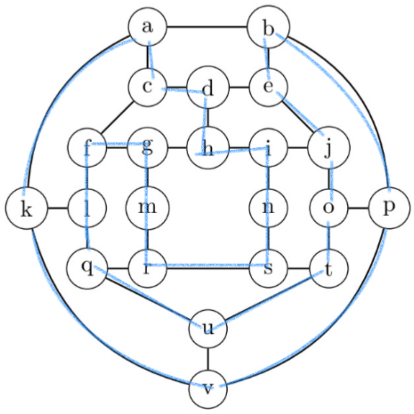


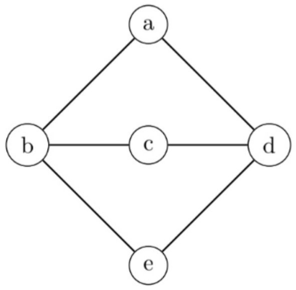
c)



d)

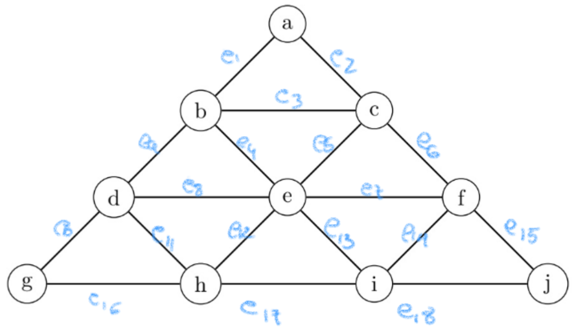
Ejercicio 21. ¿Cuáles de los siguientes grafos contienen un circuito de Hamilton?

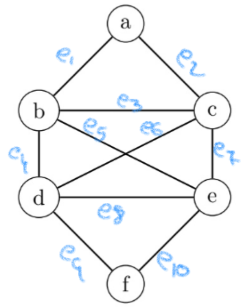




El segundo no es Hamiltoniano. El primero si

Ejercicio 15. Encuentra un circuito de Euler para los grafos



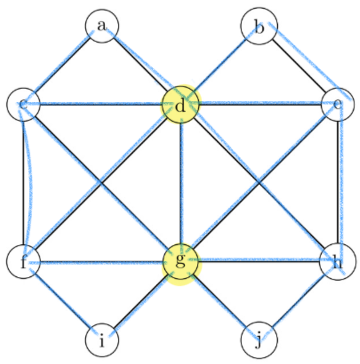


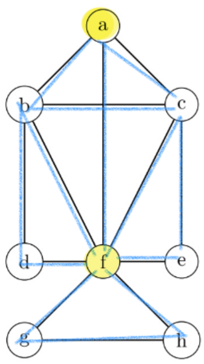
Aplicando el algoritmo de Fleury:

i) $e_1, e_3, e_5, e_4, e_9, e_{10}, e_{16}, e_{11}, e_8, e_{12}, e_{17}, e_{13}, e_7, e_{14}, e_{18}, e_{16}, e_6, e_2$

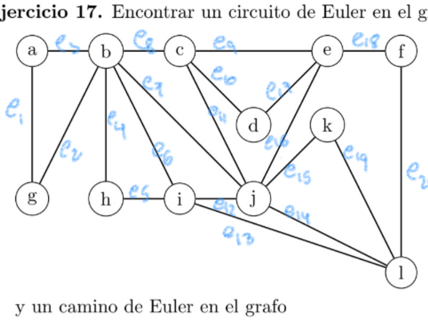
ii) $e_2, e_1, e_3, e_6, e_9, e_{10}, e_8, e_4, e_5, e_7$

Ejercicio 16. Encuentra un camino de Euler para los grafos



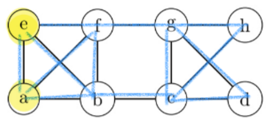


Ejercicio 17. Encontrar un circuito de Euler en el grafo



$\longrightarrow e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{11}, e_{10}, e_{17}, e_{16}, e_{15}, e_{19}, e_{20}, e_{18}, e_9, e_8, e_3$

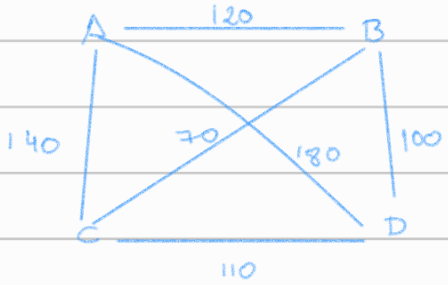
y un camino de Euler en el grafo



Ejercicio 18. ¿Para qué valores de n el grafo $\mathcal{K}_n$ es un circuito de Euler?

Para los valores de n impares pues $gr(v_i) = n-1$ $\forall i$ entonces es un grafo de Euler

Ejercicio 19. Un viajante vive en la ciudad A y se supone que visita las ciudades B, C y D antes de volver a A. Encontrar la ruta mas corta que consuma este viaje si las distancias entre las cuatro ciudades son, en Km., 120 entre A y B, 70 entre B y C, 140 entre A y C, 180 entre A y D, 100 entre B y D y 110 entre C y D.



$120 + 70 + 110 + 120 = 420$ Km

A → B → C → D → B → A

Esta es la ruta más corta.

Ejercicio 20. El *grafo línea* $L(G)$ de un un grafo G se define como sigue: Los vértices de $L(G)$ son los lados de G, $V(L(G)) = E(G)$; y dos vértices en $L(G)$ son adyacentes si y sólamente si los lados correspondientes en G comparten un vértice. Demostrar:

(a) Si G es un grafo conexo regular de grado r, entonces $L(G)$ es un grafo de Euler.

(b) Si G es un grafo de Euler entonces $L(G)$ es Hamiltoniano.

Ejercicio 22. 1. Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión $4 \geq 4 \geq 4 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 2 \geq 1$ es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo que la tenga a ella como sucesión de grados.

2. El grafo con matriz de adyacencia

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

es de Euler o en él hay un camino de Euler entre dos vértices. Razona cual es la situación y encuentra, en su caso, el circuito o el camino de Euler que existe.

1   444 33321   Luego la sucesión es gráfica por el algoritmo de Havel-Hakimi.

[FGABBCD] 33 22321

[GFBAECD] 3332221

[FBAECD] 221221

[FBCEDA] 222211

11211 [BCEDA]

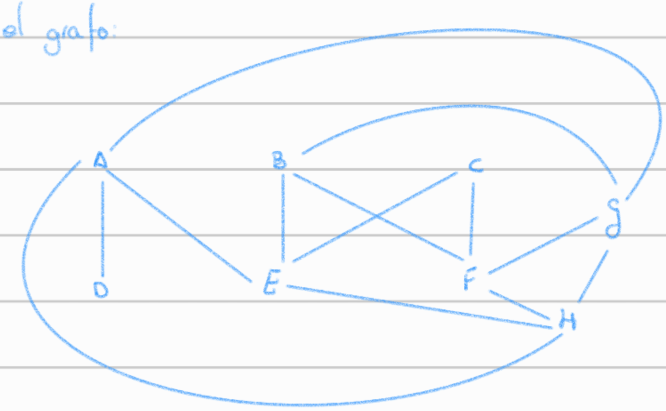
21111 [EBCDA]

0011

1100

000

Construimos el grafo:



2 Debe ser la segunda situación pues $g(v_1)=5$ que es impar.

Procedemos a obtener el camino de Euler.

$(v_1,v_2)(v_2,v_3)(v_3,v_4)(v_4,v_1)(v_1,v_3)(v_3,v_6)(v_6,v_1)(v_1,v_7)(v_7,v_2)(v_2,v_4)(v_4,v_6)(v_6,v_2)(v_2,v_5)(v_5,v_6)(v_6,v_4)$
$(v_4,v_8)(v_8,v_5)(v_5,v_7)(v_7,v_6)$

Ha habido algún fallo pero se hace así

Ejercicio 24. 1. La siguiente matriz es la matriz de incidencia o adyacencia de un grafo. Razona que caso es y dibuja el correspondiente grafo.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

¿Es el grafo anterior de Euler o Hamilton? Razona la respuesta y da un circuito de Euler o Hamilton en caso de que los haya.

2. Aplica el algoritmo para comprobar si la siguiente sucesión

$$6 \geq 4 \geq 4 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3$$

es, o no es, una sucesión gráfica y, en caso de serlo, también aplica el algoritmo para encontrar un grafo que la tenga como sucesión de grados.

1. Es una matriz de incidencia al no ser simétrica ni cuadrada.

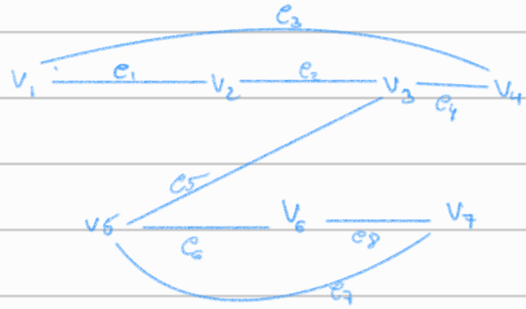
No es de Euler pues $gr(v_3)=gr(v_5)=3$, luego es impar.

Para ver si es de Hamilton vamos a comprobar las condiciones suficientes vistas en clase.

i) $|E| = 8 \overset{?}{\geq} \frac{6 \cdot 5}{2} + 2 = 17$

ii) Como $gr(1)+gr(2) < 7$ no podemos asegurar que sea de Hamilton.

Construimos el grafo



No es de Hamilton pues al pasar por e_5 pisamos v_6 o v_3, en consecuencia, no podemos volver a la componente conexa de $G \setminus \{e_5\}$ de la que partimos.

2. Aplicamos el algoritmo de Havel-Hakimi:

6 4 4 3 3 3 3 3 3

3 3 2 2 2 2 3 3

3 3 3 3 2 2 2 2

2 2 2 2 2 2 2

1 1 2 2 2 2

2 2 2 2 1 1

1 1 2 1 1

2 1 1 1 1

0 0 1 1

1 1 0 0

0 0 0

Luego la sucesión es gráfica, la construcción del grafo se deja al lector ya que se hace igual que en el ejercicio 22.1.

Ejercicio 36. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones. Todos los grafos a los que se hace referencia son simples (es decir, no tienen lazos ni lados paralelos).

1. La matriz
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
es la de adyacencia de un grafo que:
   - *a*) Es de Euler. Falso
   - *b*) No es de Hamilton. Falso
   - *c*) Es plano. ↳ si pues es más pequeño de K_5
2. Un grafo plano conexo regular de grado 8 con 23 caras:
   - *a*) No existe.
   - *b*) Tiene 12 aristas. → Si es de grado 8, con que haya 3 vértices ya supera 12 aristas, con dos vértices hay 8 aristas
   - *c*) Tiene 9 vértices. $9 + 23 - \frac{9 \cdot 8}{2} = -4$
3. Se tiene que:
   - *a*) Un grafo que es de Euler y de Hamilton siempre es plano.
   - *b*) Un grafo que es plano y de Euler siempre es de Hamilton.
   - *c*) Ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

4. Se tiene que:

    a) La sucesión 5 5 4 2 2 2 es la sucesión gráfica de un grafo plano.
    b) La sucesión 5 5 4 4 4 4 es la sucesión gráfica de un grafo de Hamilton.
    c) La sucesión 5 4 4 3 3 3 es la sucesión gráfica de un grafo de Euler.

Ejercicio 25. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones (todos los grafos a los que se hace referencia son simples, no tienen lazos ni lados paralelos):

1. El grafo completo K_n

    a) Es siempre de Euler,
    b) Es siempre de Hamilton
    c) Dependiendo de n puede ser, o no, de Hamilton o de Euler.

2. He encontrado un grafo plano y conexo con 200 vértices y:

    a) Un número par de caras y un número impar de lados.
    b) Un número par de lados y un número impar de caras.
    c) Un número par de lados y caras.

    Característica de Euler

3. Tengo un grafo con un solo vértice de grado impar v:

    a) Puedo encontrar un camino que empiece en ese vértice v, recorra todos los lados del grafo sólo una vez y vuelva a él. Circuito de Euler
    b) Si añado un lado que conecte ese vértice con otro cualquiera del grafo, pongamos w, puedo encontrar un camino que empiece en v, recorra todos los lados del grafo (incluido el que he añadido) sólo una vez y termine en w.
    c) Es imposible tener un grafo como ese. → Ejercicio 6

4. En un grafo plano con cinco componentes conexas y 24 lados:

    a) El número de vértices y el número de caras son opuestos módulo 30. Usar $v-l+c=1+x$
    b) El número de vértices y el número de caras son congruentes módulo 30.
    c) Ninguna de las anteriores es cierta.

5. Dado un grafo regular de grado 1, entonces:

    a) El grafo no puede ser conexo. El grafo regular de dos vértices y un lado es conexo
    b) El grafo tiene tantas componentes conexas como vértices.
    c) El grafo tiene tantas componentes conexas como lados.

6. Un grafo regular conexo de grado 11 con veinte vértices:

    a) Es siempre de Euler. Vértices de grado par
    b) Es siempre de Hamilton. $gr(u)+gr(v)=22>20$
    c) Ninguna de las dos respuestas anteriores es cierta.

7. a) Sólo hay dos grafos con cuatro vértices y cuatro lados no isomorfos. Ejercicio anterior de la relación
    b) Todos los grafos con cuatro vértices y cuatro lados son isomorfos. → La conexión se mantiene por isomorfismos
    c) Sólo hay tres grafos con cuatro vértices y cuatro lados no isomorfos.

8. Un grafo cuya matriz de adyacencia es

$$\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0\end{bmatrix} & \begin{matrix}2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\end{matrix}\end{array}$$

    a) Es de Euler.
    b) No es de Euler pero hay un camino de Euler entre dos vértices.
    c) No es de Euler pero sus componentes conexas si lo son. ↪ El grafo no es conexo

9. Un grafo cuya matriz de incidencia es

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

   a) Es de Hamilton.
   b) No es de Hamilton pero sus componente conexas si lo son.
   c) No es de Hamilton y tampoco lo son sus componentes conexas. No existe circuito de Hamilton en el grafo ya que solo hay una arista.

10. La siguiente matriz

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

   a) Puede ser la matriz de adyacencia de un grafo pero no la de incidencia. no simétrica
   b) Puede ser la matriz de incidencia de un grafo pero no la de adyacencia. La arista 3 incide a tres vértices
   c) No puede ser ni la matriz de incidencia de un grafo ni la de adyacencia.

Ejercicio 27. 1. Si G es un grafo completo con 6 vértices entonces:

   a) G es regular de grado 5. Completo $\Rightarrow$ regular y conexo.
   b) G tiene 20 aristas.
   c) G es de Euler y de Hamilton.

2. Sea G' un subgrafo completo (pleno) de un grafo G. Entonces:

   a) Si G es de Euler también G' es de Euler.
   b) Si G es de Hamilton también G' es de Hamilton.
   c) Ninguna de las anteriores.

3. a) Sólo hay dos grafos con cuatro vértices y 5 lados no isomorfos. $\rightsquigarrow$ Solo 1 (ej anterior)
   b) Todos los grafos con cuatro vértices y 5 lados son isomorfos.
   c) Todos los grafos con cuatro vértices y cinco lados son de Euler.

4. Sea G un grafo plano conexo regular de grado 6 con 15 caras. Entonces:

   a) G tiene 13 vértices. No cumple $v-l+c=2$
   b) El número de vértices es el triple del de aristas. uso: $l \leq 3v-6$
   c) No existe un tal grafo.

5. Salvo isomorfismos, grafos con 50 vértices y 1225 aristas: ¿?

   a) Sólo hay 1. $\to K_{50}$
   b) Hay 2.
   c) No existen grafos en esas condiciones.

Ejercicio 33. Se considera el grupo $Q_2 =< x, y \,|\, x^4 = 1, x^2 = y^2, yx = x^{-1}y >$ y el grafo G cuyos vértices son los elementos de Q_2 y en el que, para cualquier $a \in Q_2$, hay un lado entre a y ax y también un lado entre a y ay.

1. Comprueba que G es un grafo regular dando la sucesión de grados de sus vértices y calcula su matriz de adyacencia.
2. Razona si G es un grafo de Hamilton o plano.
3. Razona si G es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica el algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Sabemos que $Q_2 = \{1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$, luego G viene dado por

$1 \begin{cases} x \\ y \end{cases}$ $\quad x \begin{cases} x^2 \\ xy \end{cases}$ $\quad x^2 \begin{cases} x^3 \\ x^2y \end{cases}$ $\quad x^3 \begin{cases} x^3y \\ 1 \end{cases}$

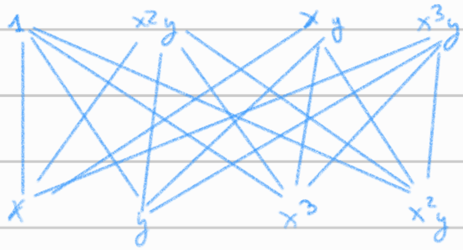
$y \begin{cases} yx = x^3y \\ y^2 = x^2 \end{cases}$ $\quad xy \begin{cases} xyx = y \\ xyy = xy^2 = x^3 \end{cases}$ $\quad x^2y \begin{cases} x^2yx = xy \\ x^2y^2 = 1 \end{cases}$ $\quad x^3y \begin{cases} x^3yx = x^2y \\ x^3y^2 = x \end{cases}$

Realizamos la matriz de adyacencia:

	1	x	x^2	x^3	y	xy	x^2y	x^3y
1	0	1	0	1	1	0	1	0
x	1	0	1	0	0	1	0	1
x^2	0	1	0	1	1	0	1	0
x^3	1	0	1	0	0	1	0	1
y	1	0	1	0	0	1	0	1
xy	0	1	0	1	1	0	1	0
x^2y	1	0	1	0	0	1	0	1
x^3y	0	1	0	1	1	0	1	0

1. Es regular pues $gr(v_i) = 4 \; \forall i$
2. Es de Hamilton pues $gr(u) + gr(v) \geq 8$
3. Es de Euler pues $gr(v_i)$ es par $\forall i$

Para ver si es plano hacemos un dibujo:

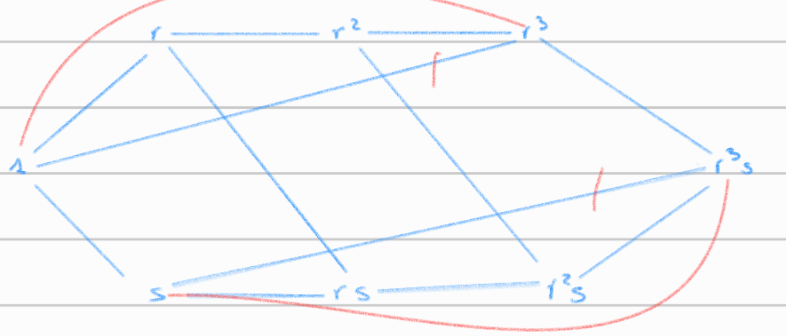


No es plano pues contiene a $K_{3,3}$

Ejercicio 34. Se considera el grupo $D_4 =< r, s \,|\, r^4 = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s >$ y el grafo $\mathbb{G}$ cuyos vértices son los elementos de D_4 y en el que, para cualquier $a \in D_4$, hay un lado entre a y ar y también un lado entre a y as.

1. Calcula la sucesión de grados de $\mathbb{G}$ y calcula su matriz de adyacencia.
2. Razona si $\mathbb{G}$ es un grafo de Euler, de Hamilton o plano.
3. Considera un nuevo grafo $\mathbb{G}'$ obtenido añadiendo a $\mathbb{G}$ un nuevo vértice adyacente a todos los de $\mathbb{G}$. Razona si $\mathbb{G}'$ es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

1. Sabiendo que $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$ podemos construir el grafo



Donde su sucesión de grados es: 0, 0, 8, 0

Su matriz de adyacencia con el orden $\{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. No es de Euler pues ningún vértice tiene grado par, pero es de Hamilton con el circuito $(1, r, r^2, r^3, r^3s, r^2s, rs, s)$
~~Tampoco~~ Sí es plano ~~pues tomando el ciclo como circuito de Hamilton siempre~~ cortan dos aristas
3. En este caso, sí sería de Euler y bastaría aplicar el algoritmo de Fleury.
Nota: Es de Euler porque todos los vértices son de grado par.

Ejercicio 35. Se considera el grupo diédrico $D_5 =< r, s \,|\, r^5 = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s >$ y el grafo $\mathbb{G}$ cuyos vértices son los elementos de D_5 y en el que, para cualquier $a \in D_5$, hay un lado entre a y ar y también un lado entre a y as.

1. Calcula la sucesión de grados de $\mathbb{G}$ y razona si $\mathbb{G}$ es un grafo de Euler, de Hamilton o plano.
2. Considera un nuevo grafo $\mathbb{G}'$ obtenido añadiendo a $\mathbb{G}$ un nuevo vértice adyacente a todos los de $\mathbb{G}$. Razona si $\mathbb{G}'$ es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Se hace exactamente igual que el ejercicio anterior y, por tanto, se deja al lector.

Ejercicio 37. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H =< (1\,2\,3) >$.

1. Construye el conjunto cociente $S_4/\sim_H$ de clases laterales por la derecha Hx, $x \in S_4$.
2. Para cada clase Hx denotamos $n(Hx)$ al mínimo común múltiplo de los ordenes de los elementos en Hx. Considera el grafo $\mathbb{G}$ con vértices las clases Hx y en el que hay un lado entre Hx y Hy si $n(Hx)$ divide a $n(Hy)$ o $n(Hy)$ divide a $n(Hx)$. Identifica el grafo $\mathbb{G}$ dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia. ¿Es $\mathbb{G}$ de Euler, de Hamilton o plano?
3. Considera, si es posible, un subgrafo $\mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}$ obtenido al suprimir una arista entre dos vértices de $\mathbb{G}$ de grado impar. ¿Es $\mathbb{G}'$ de Euler? ¿Hay un camino de Euler entre dos vértices de $\mathbb{G}'$? En caso afirmativo aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito o camino de Euler en $\mathbb{G}'$.

Debido a que es un cálculo larguísimo dejo aquí el proceso.

1 y 2. Basta tomar cada elemento de S_4 y realizar $(123)x$ donde $x \in S_4$ para obtener Hx. Para construir el grafo obtenemos $n(Hx)$ $\forall x \in S_4$ y realizamos las uniones cuando $n(Hx) | n(Hx')$ o $n(Hx') | n(Hx)$. Una vez tenemos eso, demostrar alguna de las propiedades es rutinario.

- Euler $\rightarrow gr(v) = 2n$ $\forall v \in V$
- Hamilton, propiedades a cumplir para que sea o razonamiento por dibujo o matriz ady.
- Ver que es plano, ciclos y aristas intersecan, dar el grafo...

3. Analizar el dibujo del grafo (probablemente todos sean impares luego generalizamos) y estudiar las posibilidades

Ejercicio 38. Se considera el grupo A_4 y su subgrupo $H =< (1\,2)(3\,4) >$. Se considera el grafo $\mathbb{G}$ con vértices las clases laterales por la izquierda de H en A_4, xH, y en el que hay un lado entre xH e yH si $m(xH)$ divide a $m(yH)$ o $m(yH)$ divide a $m(xH)$, donde $m(Hx)$ denota el máximo común divisor de los ordenes de los elementos en xH. Razona cual de las siguientes es la respuesta correcta:

1. $\mathbb{G}$ es plano pero no es de Hamilton.
2. $\mathbb{G}$ no es plano y tiene dos vértices conectados por un camino de Euler.
3. $\mathbb{G}$ es de Hamilton pero no es de Euler.

$A_4 = \{1, (123), (132), (124), (142), (234), (243), (134), (143), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$1H = \{1, (12)(34)\} = (12)(34)H$ $\quad (132)H = \{(132), (234)\} = (234)H$

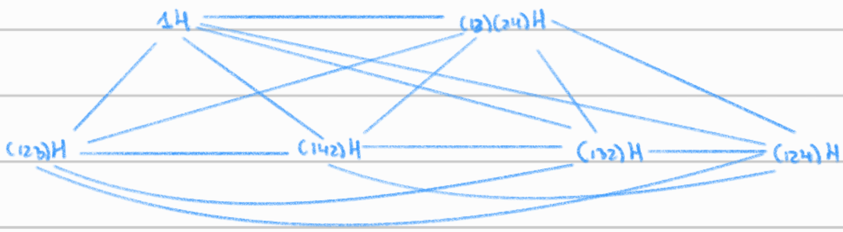
$(123)H = \{(123), (134)\} = (134)H$ $\quad (124)H = \{(124), (143)\} = (143)H$

$(142)H = \{(142), (243)\} = (243)H$ $\quad (13)(24)H = \{(14)(23), (13)(24)\} = (14)(23)H$

Sacamos los $m(xH)$:

$m(1H) = 1 = m((13)(24)H)$

$m((123)H) = 3 = m((142)H) = m((132)H) = m((124)H)$



La respuesta correcta es la tercera pues basta con recorrer un ciclo que englobe todo el grafo, como por ejemplo $1H - (123)H - (142)H - (132)H - (124)H - (13)(24)H - 1H$. Y no es de Euler porque $gr((124)H) = 5$ que es impar.

Ejercicio 40. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones. Todos los grafos a los que se hace referencia son simples (es decir, no tienen lazos ni lados paralelos).

1. Se tiene que:
   - *a*) Hay un grafo conexo regular de grado 6 con 22 caras y 24 aristas.
   - *b*) La sucesión 4 4 4 3 3 es la sucesión gráfica de un grafo plano que tiene un camino de Euler entre dos vértices.
   - *c*) Un grafo conexo y plano es de Euler si y solo si es de Hamilton.
2. La matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   es la de adyacencia de un grafo:
   - *a*) Con 11 aristas y que es de ~~Euler~~ y de Hamilton.
   - *b*) Que es conexo y ~~plano~~ pero no de Hamilton.
   - *c*) Que no es de Hamilton ni plano ni de Euler.

Ejercicio 41. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H = <(1\,3\,4)>$.

1. Construye el conjunto cociente $S_4/\sim_H$ de clases laterales por la derecha Hx, $x \in S_4$.

2. Para cada clase Hx denotamos $n(Hx)$ al mínimo común múltiplo de los ordenes de los elementos en Hx. Considera el grafo $\mathbb{G}$ con vértices las clases Hx y en el que hay un lado entre Hx y Hy si $n(Hx)$ divide a $n(Hy)$ o $n(Hy)$ divide a $n(Hx)$. Identifica el grafo $\mathbb{G}$ dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia.

3. ¿Hay alguna condición suficiente que asegure que $\mathbb{G}$ es de Hamilton? ¿Y necesaria para ser plano? ¿Es $\mathbb{G}$ de Euler, de Hamilton o plano?

4. Considera el subgrafo $\mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}$ obtenido al suprimir la arista entre las clases $H(2\,3)$ y $H(2\,4)$. ¿Es $\mathbb{G}'$ de Hamilton, plano o de Euler? ¿Hay un camino de Euler entre dos vértices de $\mathbb{G}'$? En caso afirmativo aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito o camino de Euler en $\mathbb{G}'$.

Salvo el tercer apartado es una copia del ejercicio 37. En el apartado 3 basta con considerar las propiedades vistas en clase.