Ej. 1 Se considera una solución cualquiera $x = x(t)$ de la ecuación diferencial $x' = 2tx$ y se supone que dicha solución está definida en un intervalo abierto I. Demuestra que $\exists c \in \mathbb{R} \mid x(t) = c e^{t^2} \ \forall t \in I$

Sabemos que, como $x(t)$ y e^{-t^2} es derivable luego considerando $f(t) := x(t)e^{-t^2}$, $t \in I$ $f: I \to \mathbb{R}$ vemos que es derivable por ser producto de funciones derivables.

Luego desarrollando vemos que

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-t^2}\right) = x'(t)e^{-t^2} - 2x(t)te^{-t^2} = 0$$

Usando la relación $x' = 2tx$ obtenemos que $2tx(t)e^{-t^2} - 2tx(t)e^{-t^2} = 0$ demostrando que la función f es constante en I luego $x(t)e^{-t^2} = c$ con $c \in \mathbb{R}$ $\forall t \in I$ luego $x(t) = ce^{t^2} \forall t \in I$ ■

Ej 2. (Ej. 8 relación) Demostrar que si $x = x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0 \quad (*)$$

entonces se cumple que $(x')^2 + x^2 = c$ $(**)$ para algún $c \in \mathbb{R}$ ¿Y el recíproco?

Supongamos que $x: I \longrightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y tomo $f: I \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) := (x')^2(t) + x^2(t)$, $t \in I$.

Como $(*)$ una ecuación de segundo orden y por definición de solución, sabemos que $x \in \mathcal{C}^2(I)$, lo que deduce que $f \in \mathcal{C}^1(I)$ al ser $x, x' \in \mathcal{C}^1(I)$

Luego $\frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left((x'(t))^2 + (x(t))^2\right) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t)\underbrace{(x''(t) + x(t))}_{0} = 0 \ \forall t \in I$

Es decir, vemos que $f'(t) = 0 \ \forall t \in I$ luego $f(t) = c \ \forall t \in I$ con $c \in I$

Veamos que el recíproco no es cierto. Un contraejemplo es la función constantemente 1. pues

$0 + 1 = 1$, $c = 1$ pero $0 + 1 \neq 0$

Ej. 3 (Ej. 1 relación) En la teoría del aprendizaje se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad de materia que queda por memorizar. Se supone que M es la cantidad total de materia a memorizar y $A(t)$ la materia memorizada en un tiempo t. Encontrar la ecuación diferencial para $A(t)$ y encontrar soluciones del tipo $A(t) = a + be^{\lambda t}$

La ecuación diferencial encontrada es $A' = c(M - A)$ con $c \in \mathbb{R}^+$ dada

2 Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

a) El grafo de $y(x)$ verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.

b) El grafo de $y(x)$ verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

a) Sea $y'(x)$ la función que modela la pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en un punto x vemos que

$$y' = |y - a|^2$$

dando a representa al origen

b)

11 Dada la ecuación de Clairaut

$$x = tx' + \phi(x'),$$

encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.

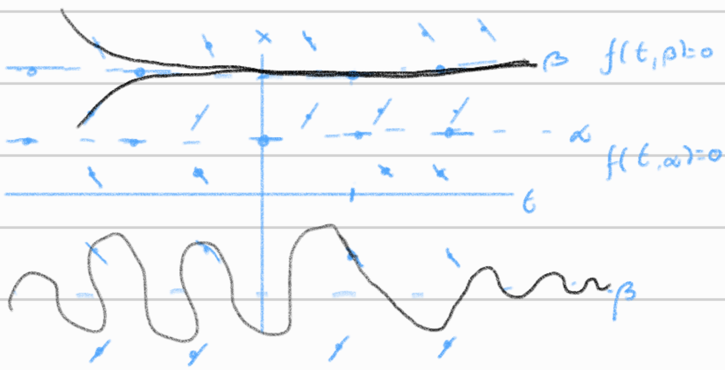
Se supone ahora que $\phi(x) = x^2$. Demuestre que $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ también es solución. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

3 En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x - \alpha)(\beta - x),$$

donde $x(t)$ es la cantidad de compuesto a tiempo t, $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$.

Vemos claramente que $f(t,x) = k(x-\alpha)(\beta-x)$



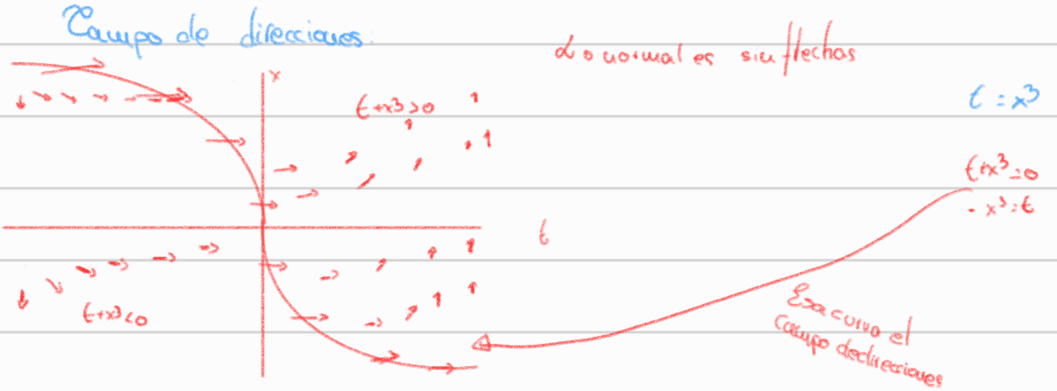
Luego a la única conclusión que puedo llegar es que $x(t)$ tenderá a β o $\cdot\beta$

5 Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que $x(0) = 0$, demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

Campo de direcciones



Sea ahora una solución tal que $x(0)=0$ veamos que tiene un punto crítico. Para ello, sabiendo que es derivable por ser solución calculamos la derivada en 0

$$x'(0)=x(0)^3=0 \quad \text{pues } x(0)=0$$

Entonces sabemos que es un punto crítico, pero veamos que es un mínimo.

lo podemos hacer por ser C^2 $\hookrightarrow$ $x''(0)=1+3x(0)^2x'(0)=1>0$ luego es un mínimo

Como es el único punto crítico vemos que obtenemos el resultado pedido

Veamos que es un mínimo global por RA,

$x|_{(0,\infty)}$ es creciente pero si hubiera otro mínimo no podría ser eso

luego no hay mínimo

Ej. 4. Dadas funciones $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto F(x,y)$, $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto\varphi(x)$ se define $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\phi(x)=F(x,\varphi(x))$. Supongamos que $F\in\mathcal{C}^2$, expresa $\phi''(x)$ en términos de las derivadas sucesivas de F y φ

Para ello, bastará con usar la regla de la cadena pues para cada $x\in\mathbb{R}$ vemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "F\circ h"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$(x,y)\longmapsto F(x,y)$$

$$x\longmapsto(x,\varphi(x))\longmapsto F(x,\varphi(x))$$

Sabemos que $h\in\mathcal{C}^2$ pues es la identidad junto con φ y ambas lo son, además, $F\in\mathcal{C}^2$ luego $F\circ h=\phi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Luego $\phi'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)$ entonces

$$\phi''(x)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,\varphi(x))+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\varphi''(x)+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

Repasar

Ej. 5 Prueba que la ecuación

$$e^x+x^3+t=0$$

define una única función implícita $x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $t\longmapsto x(t)$. Además, justifique que $x(t)$ es decreciente.

Definimos $F(t,x)=e^x+x^3+t$ $\forall(t,x)\in\mathbb{R}^2$ luego, fijado $t_0\in\mathbb{R}$ tomamos $F_{t_0}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto F(t_0,x)$, observo que $F_{t_0}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

Veamos ahora que F es biyectiva

- $F_{t_0}'(x)=e^x+3x^2>0$ luego F es est creciente $\Rightarrow$ inyectiva
- $\lim_{x\to\infty}F_{t_0}(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}F_{t_0}(x)=-\infty$ $\wedge$ F continua $\overset{T^a\,Bolz}{\Rightarrow}$ F_t es biyectiva $\forall t$.

Luego $\forall t\in\mathbb{R}$ $\exists! x_t\in\mathbb{R}$ tal que $F(t,x(t))=0$

4 Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes

$$a)\quad xy=k,\qquad b)\quad y=kx^4,\qquad c)\quad y=e^{kx}$$

Para resolver las ecuaciones que aparecen en b) y c) habrá que esperar a la siguiente lección.

a) Vamos a buscar la ecuación diferencial, para ello aplicamos derivación implícita sabiendo que ambas partes de la ecuación son diferenciables.

$$0=y+xy'\iff y'=\frac{-y}{x},\ x\neq0$$

Luego sabemos que dichas curvas son la solución a la ecuación luego gracias a que el producto de pendientes ortogonales es -1 y por la teoría de trayectorias ortogonales vista en clase vemos que

$$\sigma^{\perp}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y'=\frac{x}{y},\ y\neq0\}$$

b) $y=kx^4$ donde $F(x,y,k)=kx^4-y$ luego aplicando derivación implícita en el dominio correspondiente sobre σ: $kx^4-y=0$ obtenemos

$4kx^3 - y' = 0$

Donde vemos que $k = \frac{y}{x^4}$ para $x \neq 0$ luego

$$\frac{4y}{x} - y' = 0 \iff y' = \frac{4y}{x} \quad \text{para } x \neq 0$$

Entonces $\sigma^{\perp}$: $y' = \frac{-x}{4y}$ para $y \neq 0$

c) $y = e^{kx}$ donde $\sigma : \{F(x,y,k) = 0 \mid F(x,y,k) = e^{kx} - y\}$. Aplicando derivación implícita en el dominio correspondiente vemos que

$$\left.\begin{array}{l} ke^{kx} - y' = 0 \\ y = e^{kx} \end{array}\right\}$$

Suponiendo $y > 0$, $\ln(y) = kx \Rightarrow k = \frac{\ln(y)}{x}$

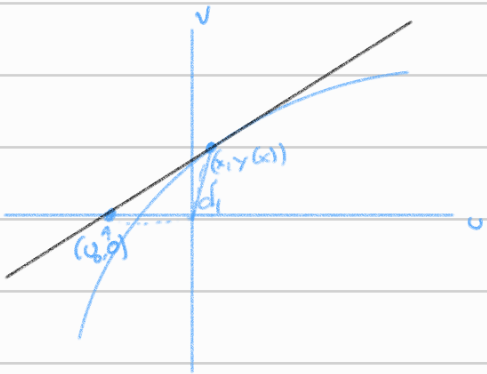
$\boxed{\text{Suponiendo } y < 0, \ \ln(-y) = kx \Rightarrow k = \frac{\ln(-y)}{x}}$ la exponencial es siempre positiva

Aplicando ahora que el producto de pendientes de rectas ortogonales es -1 obtenemos

$$\sigma^{\perp} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y' = \frac{-x}{y\ln(y)}\}$$

Ej. 6. Encuentra una ecuación diferencial para las funciones $y = y(x)$ cuyas gráficas tienen la siguiente propiedad:

- La distancia al origen desde cada punto $(x, y(x))$ coincide con la primera coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de abscisas



$d_1 = \sqrt{x^2 + y(x)^2}$

Calculamos la recta tangente a la gráfica en el punto $(x, y(x))$

$$v - y(x) = y'(x)(u - x)\Big|_{y(x)=0} \Big|_{y(x)=0}$$

$$v = y'(x)(u_0 - x) = y'(x)u_0 - y'x$$

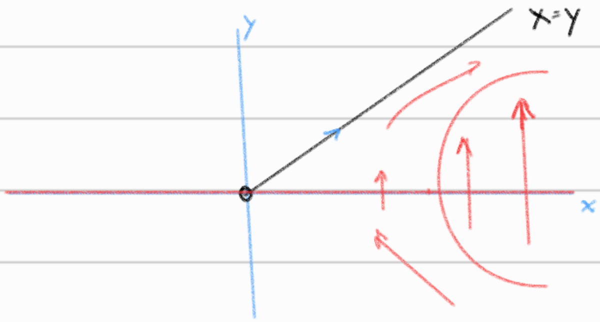
$\frac{v + y'x}{y'} = u_0$ pero $y'(x) \neq 0$ pues no habría punto de corte con la tg

Es decir, $\boxed{\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{y'} + x}$

Si busco la forma normal, debo dividir y comprobar que $y' \neq 0$ así como no dividir por 0

Ej 7. El sistema $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$, admite una solución $(x(t), y(t))$ con $x(t) = y(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$.

Dibuja la órbita asociada en el plano (x,y). Encuentra la ecuación diferencial de las órbitas



Por la imagen de e^t sólo consideramos los valores positivos

Nuestro sistema es

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Buscamos y en función de x luego $\frac{dx}{dt} = y \neq 0$ por ahora, veremos qué ocurre con $y(t) = 0$

Supongamos que $(x(t), y(t))$ es una solución $t \in I$ intervalo abierto. Si $y(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, entonces tenemos que $y' = \frac{x}{y}$

Si $y = 0$ vemos que la órbita deja de ser una gráfica

Ej 8 Sea $F:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = \int_0^{\sqrt{t}} e^{s^2} ds$. ¿Es de clase $\mathcal{C}^1$? Calcula F' en caso afirmativo

Si pusiera $\int_0^t e^{s^2}$ sí podemos aplicar TFC pero en este caso no, tenemos que ver que es una composición:

$$\varphi: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sqrt{t}, \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$$

$$\psi:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \int_0^y e^{s^2} ds, \quad \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$$

Pero $F = \psi \circ \varphi$ luego $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ por el TFC al ser $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $z \longmapsto e^{z^2}$.

Sabemos que $F'(t) = (\psi \circ \varphi)'(t) = \psi'(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{e^t}{2\sqrt{t}}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$

donde $\psi':]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto e^{u^2}$ y $\varphi': \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $v \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{v}}$

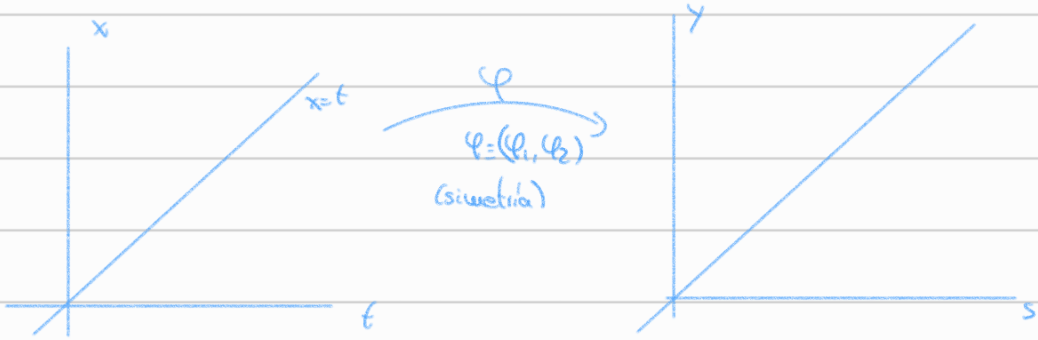
Ej 9. Se considera el cambio de variable

$$\varphi :: s = x \quad , y = t$$

a) ¿En qué circunstancias se puede asegurar que es un cambio admisible para $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, con $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua?

b) Se considera la nueva ecuación $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$. ¿Qué relación hay entre f y $\hat{f}$?

a)



Dado $s = \varphi_1(t,x) = x$ y $y = \varphi_2(t,x) = t \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Vamos a probar que φ es un difeomorfismo admisible.

i) Difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(t,x) \longmapsto (s,y) = (x,t)$

a) Es biyectiva pues su inversa es $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(s,y) \longmapsto (t,x) = (y,s)$

Para comprobar que es la inversa, $\varphi \circ \varphi = Id$ siempre pues $\varphi = \varphi$

Como φ es diferenciable $\Rightarrow \varphi$ lo es y con derivada continua porque cada componente es de clase $C^1(\mathbb{R})$ luego $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Es decir, $\varphi = \varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$

ii) Es admisible

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = f(t,x) \neq 0$$

Luego necesitamos que $f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$

b) Tenemos $\varphi \; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\varphi^{-1} = \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\hat{f}(s,y) = \frac{d}{ds}(y(s)) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x) f(t,x)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x)} =$$

$$= \frac{1}{f(t,x)} = \frac{1}{f(y,s)}$$

definido en el enunciado

Ej 10 • Demuestra que la transformación $\varphi(t,x) = (s,y)$; $\begin{cases} s = t \\ y = x+t \end{cases}$, define un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ compatible con $x' = (x+t)^2$

·) Encuentra la solución con $x(0) = 0$

·) Para que sea un difeomorfismo es necesario que sea biyectiva, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\psi = \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

- Sea $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, sabemos que es inyectiva pues $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto s$ y $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto x+t$ son inyectivas
- De la misma manera φ es sobreyectiva pues ambas componentes lo son.

Sabemos ya que φ es biyectiva luego tiene una función inversa $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(s,y) \mapsto (t,x)$ dada por

$$\psi(s,y) = (s, y-s)$$

Además, es la inversa pues $\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}^2} = \psi \circ \varphi$

Veamos que $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ pues sus componentes lo son al ser polinomios de grado 1. Incluso, $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ por la misma razón

Sabemos ya que φ y ψ son difeomorfismos, falta conocer si el cambio de variable es admisible. ← Para poder probar la admisibilidad debemos probar la continuidad en el dominio de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, x' \neq 0$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) = 1 \ ; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, \underbrace{x'}_{= f(t,x)} = 0$$

Luego se comprueba que es admisible

·) Como busco expresar $y = y(s)$ entonces sabemos que $y(s) = x(s) + s$ luego

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = x' + 1 = (x+t)^2 + 1 = y^2 + 1$$

Es una ecuación de variables separadas luego procedemos como en teoría (sabiendo que no hay soluciones constantes)

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dt \iff \operatorname{arctg}(y) = t+c \quad \text{luego} \quad y(t) = \tan(t+c) \quad \forall t \in \left] \frac{-\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c \right[$$

Deshaciendo el cambio conseguimos que

$$x(t) = y(t) - t = tg(t+c) - t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Gracias a la condición $x(0)=0 \Rightarrow 0 = tg(c)$

$$c = \operatorname{arctg}(0) = 0 \Rightarrow x(t) = tg(t) - t$$

Teorema de Cauchy-Peano

Por cada punto del dominio $(t, x(t))$ pasa al menos una solución de la ecuación

Teorema de Picardi

Si la función es de clase $\mathcal{C}^1$ en su dominio entonces por cada punto $(t, x(t))$ existe una única solución que pasa por él

6 *a*) Estudie cuántas funciones diferenciables $y(x)$ se pueden extraer de la curva

$$C \quad \equiv \quad x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$

dando su intervalo maximal de definición.

b) Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.

c) La misma cuestión para una ecuación del tipo $g(y, y') = 0$.

a) Esto es tanto como decir cuántas funciones $y = y(x)$ implícitas hay en la ecuación. Para ello, tomando $F(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x + 2y - 1$ como función de dominio $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ veamos las hipótesis del teorema de la función implícita.

- $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ lo cual es claro por ser un polinomio
- Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x_0, y_0) = 0$, veamos si $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 4y_0 + 2 \neq 0$

Esto ocurre sii $y_0 \neq \frac{-1}{2}$ luego, sea $(x_0, y_0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \frac{-1}{2} \wedge F(x_0, y_0) = 0$ obtenemos que

$\exists y : I \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(I)$ tal que $x_0 \in I$, $F(x, y(x)) = 0 \ \forall x \in I$, $y(x_0) = y_0$, $(x, y(x)) \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in I$, es decir, es función implícita

Por tanto habrá tantas funciones implícitas como puntos que sean solución a la ecuación

b) Sabiendo ahora que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y aplicando derivación implícita obtenemos que

$$2x + 4yy' + 2 + 2y' = 0 \iff x + 2yy' + 1 + y' = 0 \iff y'(2y+1) = -1-x$$

Luego la ecuación diferencial pedida es: $y' = \frac{-1-x}{2y+1}$ con $y \neq \frac{-1}{2}$

c)

8 Demuestre que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0$$

entonces también cumple

$$(x')^2 + x^2 = c$$

para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.
Encuentre una solución de $(x')^2 + x^2 = 1$ que no sea solución de $x'' + x = 0$.

De la primera ecuación obtenemos que, dada $x(t)$ solución, $x''(t) = -x(t)$, una solución de esta ecuación son las funciones trigonométricas.

Sabemos que, como $x(t)$ es solución de una ecuación de segundo orden, entonces $x \in \mathcal{C}^2(I)$ y $x' \in \mathcal{C}^1(I)$ luego $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x,x') = (x')^2 + x^2$ es una función $F \in \mathcal{C}^1(I)$. Aplicando ahora derivación implícita vemos que

$$F'(t) = 2x'x'' + 2xx' = 2x'(\underbrace{x''+x}_{0}) = 0$$

Luego $F'(t) = 0$, es decir, es una función constante obteniendo que

$$(x')^2 + x^2 = c. \qquad \square$$

Supongo que también se puede hacer por resolución de ecuaciones de variables separadas

Como solución al ejemplo pedido podemos tomar $x=1$ luego $(x')^2+x^2=1$ y $x''+x=1\neq 0$.

3 Nos planteamos resolver la ecuación

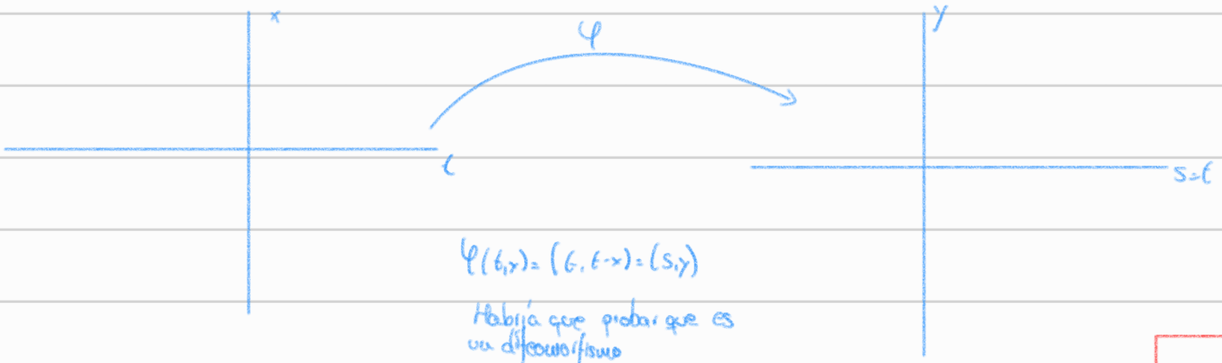
$$x' = \cos(t-x)\,.$$

Compruebe que el cambio $y = t - x$ nos lleva a una ecuación de variables separadas. Resuelva e invierta el cambio para llegar a una expresión explícita de $x(t)$. Repase el procedimiento por si se ha perdido alguna solución por el camino.

El cambio trivialmente es admisible veamos el dominio de la ecuación original

·) Como cos está definida en todo $\mathbb{R}$ vemos que $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Aplicamos el siguiente cambio de variable



$\varphi(t,x)=(t,t-x)=(s,y)$

Habría que probar que es un difeomorfismo

$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=1-x' \iff x'=1-y'$ luego $1-y'=\cos(y) \iff y'=1-\cos(y)$

$\boxed{\text{sols. cts } y=2k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}}$

$$\frac{dy}{ds}=1-\cos(y)$$

$$\int\frac{dy}{1-\cos(y)}=\int ds=s$$

dos soluciones no constantes viven entre dos equilibrios

$\int\frac{y'(t)}{1-\cos(y(t))}dt=t+c$ con $t\in I$ donde y está definida

$\Rightarrow=\int\frac{(1+\cos(y))}{1-\cos^2(y)}dy=\int\frac{1+\cos(y)}{\operatorname{sen}^2(y)}$ suponiendo que $y(t)\in\,]0,2\pi[\ \forall t\in I$

$\rightarrow$ si no sabemos integrarla: Sea $F(y)=\int_{\pi}^{y}\frac{1}{1-\cos(u)}du$, $y\in\,]0,2\pi[$ luego la ecuación obtenida en integrales sería $\int F'(y(t))y'(t)dt=t+c \Rightarrow F(y(t))=t+c$

π → podría ser cualquiera

$t+c \rightarrow$ implícitamente

Necesitamos que F sea biyectiva y sabemos que es inyectiva por ser $F'(y)>0$, es decir, es estrictamente creciente luego $F:\,]0,2\pi[\,\rightarrow\mathbb{R}$ difeomorfismo de una variable creciente luego al disponer de inversa

$$y(t) = F^{-1}(t+c)$$

¿Pero quién es F^{-1}?

$$\int \frac{dy}{1-\cos(y)}$$