1. Probar que el conjunto de matrices

Es lo mismo

Debemos comprobar las propiedades de los cuerpos

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \cancel{-}b & a \end{pmatrix} \ : \ a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Para ello, basta construir un isomorfismo $f: \mathbb{C} \longrightarrow M$ talque cada número complejo se asocie a una matriz M.

De hecho, tomando un isomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ y sabiendo que $\mathbb{R}^2$ es isomorfo a $\mathbb{C}$ obtenemos el resultado, sea $z \in \mathbb{R}^2$, $z = (u,v)$ donde $\varphi(z) = \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$, veamos que es isomorfismo

Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ base de M

$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Luego φ lleva bases en bases y por tanto, $\mathbb{R}^2$ y M son isomorfos

2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los números complejos

$$\frac{i - \sqrt{3}}{1 + i} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{i\sqrt{3} - 1}$$

a) $\dfrac{i - \sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{(i+\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{i - i^2 + \sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 - i + i - i^2} = \dfrac{(1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})}{2}$

Luego $\operatorname{Re} \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{Im} \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. El módulo sería $\left| \dfrac{1-\sqrt{3}}{i+1} \right| = \sqrt{2}$

b) $\dfrac{1}{i\sqrt{3} - 1} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{(i\sqrt{3} - 1)(-1 - i\sqrt{3})} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{4}$

Luego $\operatorname{Re} \dfrac{1}{i\sqrt{3} - 1} = \dfrac{-1}{4}$ y $\operatorname{Im} \dfrac{1}{i\sqrt{3} - 1} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. El módulo sería $\left| \dfrac{1}{i\sqrt{3} - 1} \right| = 2$

$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) + |w|^2$

3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}\, z} \qquad \forall z \in U$$

Es una transformación de Moebius

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

Para probar esto, debemos probar que es inyectiva y sobreyectiva.

Veamos que es inyectiva.

Supongamos $\exists\, z, w \in U \mid z \neq w \wedge f(z) = f(w)$ entonces $\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} = \dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}$

luego $\dfrac{z}{1-\bar{a}z} = \dfrac{w}{1-\bar{a}w} \iff z(1-\bar{a}w) = w(1-\bar{a}z) \iff z - w = 0 \iff z = w$

lo cual es una contradicción. Es decir, f es inyectiva

Veamos ahora que $f: U \longrightarrow U$ es sobreyectiva.

Sea $z \in \mathcal{U}$ entonces $|z|<1$ y $z = \frac{z'-a}{1-\bar{a}z'}$, veamos que $|z'|<1$

$z(1-\bar{a}z') = z'-a \iff z - \bar{a}z' = z'-a \iff z+a = z'+\bar{a}z' = z'(1+\bar{a}) \iff$

$\frac{z+a}{1+\bar{a}} = z'$, como $|z+a|<|1+\bar{a}|$ entonces $|z'|<1$. Luego f es sobreyectiva en $\mathcal{U}$.

Por tanto, es una biyección de $\mathcal{U}$ en sí mismo

Sea $f^{-1}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ su inversa, sabemos que $(f \circ f^{-1})(z) = z$ $\forall z \in \mathcal{U}$ entonces, despejando

$$f^{-1}(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z} \qquad \forall z \in \mathcal{U}$$

Habría que demostrar que $|1+\bar{a}z|>0$, $|z|<1$, $|\bar{a}|<1 \Rightarrow |1+\bar{a}z|>0$

4. Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Veamos que esta igualdad ocurre si y sólo si $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tales que $z_k = \lambda_k z_1$ $\forall k = 2, \dots, n$

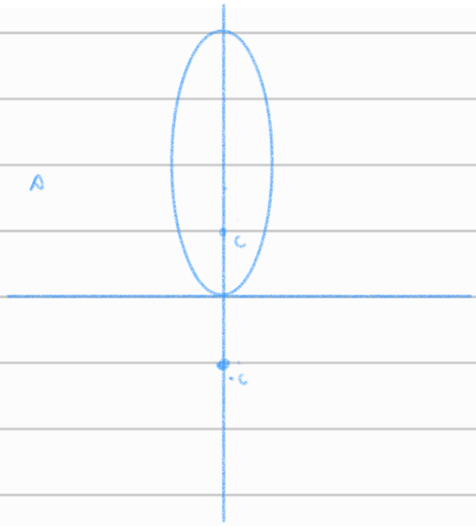
$\Leftarrow$) Es claro que se cumple, basta hacer las operaciones

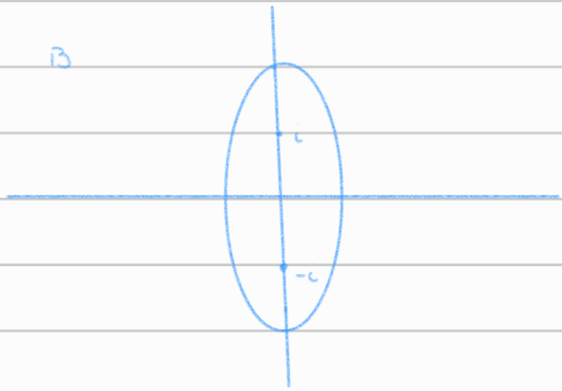
$\Rightarrow$) Procedemos por inducción, sabiendo que es trivial probar el caso $n=1$; si n se cumple veamos si ocurre para $n+1$.

¿?

5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 2|z-i|\} \quad \text{y} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| + |z+i| = 4\}$$





6. Probar que $\arg z = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right)$ para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Sea $\theta = \arg z$, $\theta \in]-\pi, \pi]$ por definición. Como $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ entonces.

Es verdad para cualquier argumento — Está demostrado

$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{|z|\,\mathrm{sen}\,\theta}{|z|\cos\theta + |z|}\right) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta + 1}\right) = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \theta = \arg z$$

aquí usamos la elección del θ

porque $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\frac{\theta}{2})) \in]-\pi, \pi]$, como $\theta \neq \pi$ pues $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Para probar que es un argumento calcular senos y cosenos aparte

9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^8 = z^8$

Para ello, usaremos la forma polar y las fórmulas de De Moivre

$$\arg z = +\arccos\left(1/2\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Luego $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Como $z^8 = (\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3})^8 = \cos\frac{8\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

8. Probar las *fórmulas de De Moivre:*

$$\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta) = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Procederemos por inducción, sea $\theta \in \mathbb{R}$.

$\underline{n=1}$

$\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ ✓

Supuesto para $n-1$ veamos que se cumple para $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{n-1}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \underset{HI}{=} \left[\cos[(n-1)\theta] + i\,\mathrm{sen}[(n-1)\theta]\right](\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

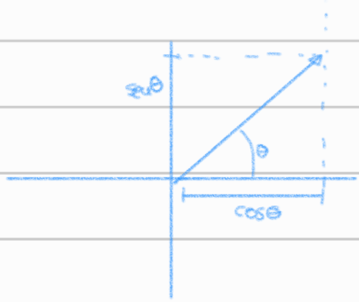
$$= \cos[(n-1)\theta]\cos\theta - \mathrm{sen}[(n-1)\theta]\,\mathrm{sen}\,\theta + i\left[\cos[(n-1)\theta]\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}[(n-1)\theta]\cos\theta\right]$$

$$= \cos(n\theta) + \mathrm{sen}(n\theta)$$ $\square$

7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } x < 0,\ y > 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0,\ y < 0 \end{cases} \qquad \arg z = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right)$$

Trabajaremos de forma intuitiva sabiendo la correspondencia entre la forma polar y la forma binómica sobre $\mathbb{R}^2$. Usaremos que $\theta \in \operatorname{Arg} z \iff \cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ y $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$



Sabemos por trigonometría y haciendo uso de Pitágoras que

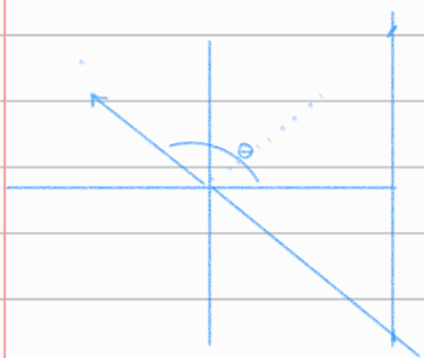
$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

donde

$$\cos\theta\,|z| = \operatorname{Re} z \quad \wedge \quad \mathrm{sen}\,\theta\,|z| = \operatorname{Im} z$$

luego $\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$

Por tanto $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$



Siguiendo esta lógica $\arg z = -\arg -z$

de donde se deduce que $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

Esto es análogo con todos los demás casos

10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

(a) $$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$$

(b) $$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$$

Suma geométrica $\sum_{k=0}^{n} w^k = \frac{1-w^{n+1}}{1-w}$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(kx)+i\operatorname{sen}(kx)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}(\cos x + i\operatorname{sen} x)^k = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1-(\cos x + i\operatorname{sen} x)^{n+1}}{1-(\cos x + i\operatorname{sen} x)}$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1-(\cos((n+1)x) - i\operatorname{sen}((n+1)x)}{1-\cos x - i\operatorname{sen} x}\right) \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \frac{\cancel{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{sen}\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\left[\operatorname{sen}((n+1)\frac{x}{2}) - i\cos((n+1)\frac{x}{2})\right]}{\cancel{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - i\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]} =$$

$$\overset{\cdot\frac{i}{i}}{=} \frac{\operatorname{sen}\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\right]}{\cos\frac{x}{2} + i\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \operatorname{sen}\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(n\frac{x}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(n\frac{x}{2}\right)\right]$$

De donde sacamos la parte real y la parte imaginaria.

1. $1-\cos(nx) = 2\operatorname{sen}^2\left(n\frac{x}{2}\right)$

2. $\operatorname{sen}(nx) = 2\operatorname{sen}\left(n\frac{x}{2}\right)\cos\left(n\frac{x}{2}\right)$

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ las dos igualdades son triviales pues $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ se anula.