Análisis Matemático I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 2

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones en espacios métricos:

a) Conjunto abierto y conjunto cerrado

b) Interior, cierre y frontera de un conjunto

c) Punto de acumulación y punto aislado de un conjunto

d) Sucesión convergente

2. Conocer y comprender los siguientes resultados:

a) Caracterización de la topología de un espacio métrico mediante las sucesiones convergentes

b) Criterio de equivalencia entre dos distancias, basado en la convergencia de sucesiones

3. Conocer el criterio para la equivalencia de dos normas, incluida su demostración, y conocer la forma en que se usa para definir la topología usual de $\mathbb{R}^N$.

1. a) Un conjunto $\mathcal{U}$ de un espacio métrico E se dice que es abierto cuando:

Faltan las propiedades pero las conocemos

$$\forall x \in \mathcal{U} \ \exists B(x,r), r>0 \ / \ B(x,r) \subset \mathcal{U}.$$

Intuitivamente, cuando, para cada elemento de un conjunto abierto existe una bola abierta, que esencialmente no es más que otro conjunto abierto, incluida en el conjunto que incluye al elemento.

Un conjunto Γ es un conjunto cerrado cuando $E \setminus \Gamma$ es un conjunto abierto o intuitivamente:

$$\forall x \in E \setminus \Gamma \ \exists B(x,r) \ r>0 \ / \ B(x,r) \subset E \setminus \Gamma$$

Estos dos conceptos no son excluyentes, por ejemplo, el $\emptyset$ es abierto y cerrado en todas las topologías.

b) Se define el interior de un conjunto $\mathcal{U}\subset E$ como la unión arbitraria de todas las bolas abiertas contenidas en $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U}^\circ := \{ \bigcup_{i\in I} S_i \ / S_i \subset T \}$$ es decir si es un abierto.

Como propiedades tenemos que:

1. $\mathcal{U}\subset E$ es abierto $\iff \mathcal{U}=\mathcal{U}^\circ \iff \mathcal{U}\subset\mathcal{U}(x)\ \forall x\in A$
2. $\mathcal{U}^\circ$ es el máximo abierto contenido en $\mathcal{U}$.
3. $\mathcal{U}\in\mathcal{U}(x)$, $A\subset C\subset E \Rightarrow C\in\mathcal{U}(x)$
4. $x\in\mathcal{U}^\circ \iff \mathcal{U}\in\mathcal{U}(x) \iff \exists\varepsilon>0 / B(x,\varepsilon)\subset\mathcal{U}$
5. $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{U}(x) \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{N} A_k\in\mathcal{U}(x)$

¿6. La unión de entornos es entorno?

Se define el cierre de un conjunto como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto otorgado.

$$\bar{\mathcal{U}} := \bigcap\{\mathcal{U}\subset \mathcal{C} \ / \ \mathcal{U}\subset\mathcal{U}_i \ \ \forall i\in\mathbb{N}\}$$

Como propiedades tenemos que:

1. $\bar{\mathcal{U}}$ es el mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{U}$.
2. $A\subset C \iff A=\bar{A}$

Por otro lado tenemos la siguiente relación:

$\forall \mathcal{U}\in P(E)$ se tiene $E\setminus\bar{A}=(E\setminus A)^\circ$ $\quad E\setminus A^\circ=\overline{(E\setminus A)}$

Por último la frontera de un conjunto es el conjunto de puntos adherentes a ese conjunto que no son interiores:

$$Fr(\mathcal{U}) := \{x\in\bar{X} \ / \ x \text{ es punto adherente a } x\notin\mathcal{U}^\circ\}$$

Propiedades

1. $Fr(\mathcal{U})=\bar{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}^\circ$
2. $Fr(A)=\bar{A}\cap\overline{E\setminus A}$
3. $Fr(A)$ es cerrado $\wedge$ $Fr(A)=Fr(E\setminus A)$
4. A abierto $\iff A\cap Fr(A)=\emptyset$
5. A es cerrado es $A\cap Fr(A)\neq\emptyset$
6. $\bar{A} = A\cup Fr(A)$ $\wedge$ $A^\circ = A\setminus Fr(A)$
7. $E = A^\circ\cup Fr(A)\cup(E\setminus A)^\circ$ es una partición de E $\Rightarrow A^\circ\cap Fr(A) = A^\circ\cap(E\setminus A)^\circ = Fr(A)\cap(E\setminus A)^\circ=\emptyset$

c) Sea $x\in E$ espacio topológico. Se dice que x es punto de acumulación en A cuando x es punto adherente del conjunto $A\setminus\{x\}$. Y denotamos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A

$$A' = \overline{A\setminus\{x\}}$$

Como observación, $x\in A' \iff \mathcal{U}\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset \ \forall \mathcal{U}\in\mathcal{U}(x) \iff B(x,\varepsilon)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset \ \forall\varepsilon>0$.

Por otro lado se dice que $x\in\bar{A}\setminus A' \iff \exists\,\mathcal{U}\in\mathcal{U}(x) \,/\, \mathcal{U}\cap A=\{x\} \equiv$ si $\exists\,\varepsilon>0 \,/\, B(x,\varepsilon)\cap A=\{x\}$.

Por tanto $x\in A \Rightarrow$ Ptos. Aisl. $=\bar{A}\setminus A' = A\setminus A'$ y por tanto $\bar{A}=A'\cup A$ luego A es cerrado $\iff A'\subset A$

d) Se dice que $\{x_n\}$ $x_n\in A\ \forall n\in\mathbb{N}$ es convergente a x y escribimos que $\{x_n\}\to x$ si en cada entorno de x hay una cola de la sucesión:

$$\{x_n\}\to x \iff \forall\,\mathcal{U}\in\mathcal{U}(x)\ \exists\, m\in\mathbb{N}\,/\, n\geq m \Rightarrow x_n\in\mathcal{U}$$

Como caracterización:

- Espacio métrico

$\{x_n\}\to x \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\, m\in\mathbb{N}\,/$ si $n\geq m$ $d(x_n,x)<\varepsilon$

- Espacio normado

$\{x_n\}\to x \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\, m\in\mathbb{N}\,/$ si $n\geq m$ $\|x_n-x\|<\varepsilon$

- Espacio métrico:

$\{x_n\}\to x \iff \{d(x_n,x)\}\to 0$

2a) Para conocer una topología nos basta saber sus conjuntos abiertos, o de otra forma sus conjuntos cerrados:

Un conjunto $A\in\mathcal{P}(E)$ es cerrado $\iff x_n\in A\ \forall n\in\mathbb{N},\ \{x_n\}\to x \Rightarrow x\in A$

b) Si d_1, d_2 son dos distancias en un mismo conjunto no vacío E, equivalen:

1. La topología de d_1 está incluida en la topología de d_2
2. Toda sucesión convergente para la distancia d_2 es convergente para d_1

3. Para dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y un espacio vectorial X. Son equivalentes:

(i) $\exists p \in \mathbb{R}^+ / \|x\|_2 \leq p\|x\|_1 \quad \forall x \in X$.

(ii) La topología de la norma$_2$ está incluida en la topología de la norma 1.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $\mathcal{U} \in T_2$ un abierto para la topología 2 $\Rightarrow \forall x \in \mathcal{U}\ \exists \varepsilon > 0 / B(x,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Usando (i) podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{p} / B(x,\delta) \subset B(x,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. De esta forma, hemos visto que $\mathcal{U}$ es abierto para la T_1.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Como $B_2(0,1) \subset T_2$ tamb lo es para T_1 usando (ii) $\Rightarrow \exists \delta > 0 / B(x,\delta) \subset B_2(0,1)$.
Por tanto, tomando $p = \frac{1}{\delta}$ se tendría la desigualdad buscada. En efecto, si $x \in X \vee \|x\|_2 > p\|x\|_1$ se tiene que si $y \in X$, $y = \frac{x}{\|x\|_2}$, $\|y\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} < \frac{1}{p} = \delta$.

Luego hay una contradicción puesto que $\|y\|_2 < 1$ y sin embargo $\|y\|_2 = 1$ luego

$\|x\|_2 \leq p\|x_1\|$ $\blacksquare$