Práctica 3. Imagen de una función de dos variables

Ejercicios propuestos

En cada uno de los siguientes casos, calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$.

(1) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x^2 + y^2 \le 2 \}$
$f(x,y) = x^2(y-1)^3 \quad \forall\,(x,y) \in A$

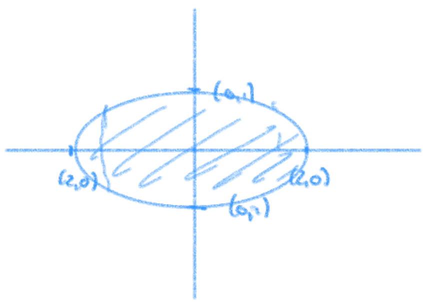
(2) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2 - y^2 \}$
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x \quad \forall\,(x,y) \in A$

(3) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le y \le x \le 1 \}$
$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x \quad \forall\,(x,y) \in A$

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \le 2\}$

$f(x,y) = x^2(y-1)^3 \quad \forall (x,y) \in A$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2(y^3 - 3y^2 + 3y - 1)$



1. A compacto y convexo?

A es convexo por ser homeomorfo a $\bar{B}((0,0),1)$ que es convexo. Además es cerrado y acotado encerrado por, al menos, 3. Luego es compacto.

2. Continuidad de f.

Como es un polinomio es continua y diferenciable $\forall (x,y) \in A$.

3. Interior:

$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 < 2\}$

$(y^2 - 2y + 1)(y-1) = y^3 - y^2 - 2y^2 + 2y + y - 1 =$
$= y^3 - 3y^2 + 3y - 1$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(y-1)^3 x = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2(3y^2 - 6y + 3) = 0$

$x = 0$
$y = 1$

$2(y-1)^3 x = 0 \iff x = 0$ ó $y = 1$

Luego todos es extremo relativo

$\mathcal{E}_0 = \{(0,1)\}$,

$f(\mathcal{E}_0) = \{ f(0,1) = 0$

4. Frontera.

Está claro que $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$ Que es cerrado y acotado

$y^2 = 2 - 2x^2 = 2(1-x^2)$ ó $x^2 = \frac{2-y^2}{2} = 1 - \frac{y^2}{2}$

$f(x,y) = x^2 (y-1)^3$ = tomamos $h : [\quad] \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)(y-1)^3$

$h(y) = \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - \frac{y^5}{2} + \frac{3y^4}{2} - \frac{3y^3}{2} + \frac{y^2}{2} =$

$= -\frac{y^5}{2} + \frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{2} - \frac{5y^2}{2} + 3y - 1$

$h'(y) = -\frac{5}{2} y^4 + 6y^3 - \frac{3}{2} y^2 - 5y + 3 = 0$

$\boxed{y = 1}$

$x^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left.\begin{matrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \\ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 1\right) \end{matrix}\right\}$ ¡No existe en la elipse!!