Tema 1. Espacios normados

Definición

Espacio normado

Un espacio normado es un espacio vectorial $\mathcal{E}$ junto a una función norma

$$\|\cdot\|: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con las siguientes propiedades:

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{E}$ No negatividad

ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in \mathcal{E}$ Desigualdad triangular

iv) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ Homogeneidad Homotecias

Asociado a este espacio normado tenemos un espacio métrico dado por la siguiente distancia

$$d: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \|x-y\|$$

Con lo cual todas las propiedades necesarias serán equivalentes en ambos sitios

Por tanto, diremos que si $\mathcal{E}$ es completo (toda sucesión de Cauchy sea convergente) entonces tendremos un espacio de Banach

Espacio prehilbertiano

Sea H un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Definimos:

- Producto escalar:

$$(\cdot,\cdot): H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

cumpliendo:

i) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z) \quad \forall x,y,z \in H, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ bilinealidad

$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x,y) + \beta(x,z) \quad \forall x,y,z \in H, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

ii) $(x,y) = (y,x) \quad \forall x,y \in H$ Simetría

iii) $(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in H$ No negatividad

iv) $(x,x) > 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$

Entonces una pareja $(H, (\cdot,\cdot))$ es un espacio prehilbertiano. Además, como de todo producto escalar disponemos de la norma $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ en H tenemos que todo espacio prehilbertiano es normado. En caso de que la norma sea completa tendremos un espacio de Hilbert.

Ejemplo

i) $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ $n\in\mathbb{N}$ donde $|(x_1,\dots,x_n)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ que es un espacio normado y de Hilbert con la distancia completa dada por $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

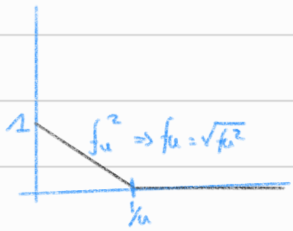
ii) Dado $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}_b(\mathcal{A}) = \{f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathbb{R} \mid f$ es continua en $\mathcal{A}$ y acotada en $\mathcal{A}\}$. Una norma se podría definir como $\|f\|_{\mathcal{C}_b(\mathcal{A})} = \sup\{|f(x)| : x\in\mathcal{A}\}$ y por tanto, es un espacio normado.

↳ por la acotación existe el supremo

iii) Sea $K\subset\mathbb{R}^n$ compacto, tomamos el espacio prehilbertiano $(\mathcal{C}(K), (\cdot,\cdot))$ donde $(f,g) = \int_K f(x)g(x)\,dx$. No obstante, no puede ser un espacio de Hilbert pues tenemos aquí un contraejemplo

$K = [0,1]\subset\mathbb{R}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\; f_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}_0^+$

cuya gráfica es



$\{f_n\}\to 0$ en $(\mathcal{C}[0,1], (\cdot,\cdot))$

$$\Uparrow$$

Probando que $\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = \frac{1}{n}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \underbrace{\|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \longrightarrow 0}$

↳ uniformemente

entonces $\{f_n(x)\}\longrightarrow 0$ pero $\{f_n(0)=1\}\longrightarrow 1$ luego $\|f_n\|\longrightarrow 0$ pues f_n continua luego $f_n(0)>0 \Rightarrow \exists\,\varepsilon>0 \mid f_n(0+\varepsilon)>0$

$\mathcal{L}^2(\Omega)/\sim\; = \{f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ medible $\mid \int_\Omega f(x)^2dx<\infty\}$ ⇒ no es de Cauchy

En caso de tomar $L^2(\Omega)$ donde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ medible tenemos un espacio de Hilbert con la misma norma.

!! ⇒ es completo y por tanto uno de Hilbert

iv) Considerando $1\le p<\infty$ tomamos $L^p(\Omega) = \{f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ medibles $\mid \int_\Omega |f|^p dx<\infty\}$ con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach pero no de Hilbert

v) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ donde $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$ es un espacio normado.
$1\le p<\infty$

vi) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ donde $\|x\|_\infty = \max\{x_i : i\in\{1,\dots,n\}\}$ es un espacio de Banach

supremo esencial (cpd)

vii) Si $p=\infty$ tenemos que $\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \{f:\Omega\to\mathbb{R}$ medible $\mid \sup_\Omega |f|\}$ es de Banach

Se define el supremo esencial como: almost everywhere

$$\sup_\Omega |f| = \inf\{M\ge 0 : |f(x)|\le M, \ \text{a.e. } x\in\Omega\}$$

Notación

i) $c := \{x\in \ell^\infty : x$ es convergente$\}$ (es de Banach)

donde $\ell^p := \{x:\mathbb{N}\to\mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p<\infty\}$

ii) $c_0 := \{x\in c : x$ converge a $0\}$

Proposición

Si H es un espacio prehilbertiano. Entonces

i) Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\boxed{|(u,v)| \le \|u\|\|v\| = \sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}}$$

ii) Identidad del paralelogramo

$$\boxed{\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|u^2\|+\|v^2\|)}$$

Teorema de la proyección

Sea H un espacio de Hilbert, $K\subset H$ no vacío, convexo y cerrado. Entonces:

$\forall f\in H\ \exists! u\in K \mid \|f-u\| = d(f,K)$

Además, u está caracterizado por:

i) $u\in K$ Esto quiere decir que el ángulo entre los vectores nunca es $<\frac{\pi}{2}$

ii) $(f-u, v-u)\le 0$ $\forall v\in K$ → Se le llama extremo condicionado

Llamaremos por $P_K f$ al elemento u que será la proyección en K de f.

- Demostración -

Tenemos que probar que $\exists \inf\{\|f-v\| : v\in K\} =: d$, pero como $\|f-v\|\ge 0$ $\forall v\in K$ tenemos que $0\le \inf\{\|f-v\| : v\in K\}$ entonces existe.

Lo de forma

Para cada $v\in K$, elegimos $\{v_n\}\subset K$ tal que $\{\|f-v_n\|\}\to d$. Usando la identidad del paralelogramo con $u=f-v_n$, $v=f-v_m$ $n,m\in\mathbb{N}$ tenemos:

$$\left\| \frac{f - v_n + f - v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{f - v_n - (f - v_m)}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2 \right)$$

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2 \right)$$

$$\left\| \frac{v_m - v_n}{4} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2 \right) - \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2$$

$$\| v_m - v_n \|^2 = 2\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2 \right) - 4 \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2$$

Como K es convexo y $v_n, v_m \in K$ tenemos que $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ y $\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \| \geq d$. Entonces

$$\| v_m - v_n \| \leq 2\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2 \right) - 4d^2$$

Tomando límite cuando n tiendo a infinito $\|f - v_n\| \longrightarrow d$, $\|f - v_m\| \longrightarrow d$ luego tomando límite:

$$\{2\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2 \right) - 4d^2\} \longrightarrow 0$$

Luego $\|v_n - v_m\| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ luego $\{v_n\}$ es de Cauchy en $(H, (\cdot,\cdot))$ entonces $\{v_n\} \longrightarrow u \in H$ pues H es de Hilbert. Ahora, como $v_n \in K \ \forall n$ y K es cerrado $\Rightarrow u \in K$.

Como $\{v_n\} \to u$ tenemos que $\lim_{n \to \infty} \|f - v_n\| = \|f - u\|$ por continuidad. No obstante, por hipótesis $\|f - u\| = d$. Por tanto la existencia de u está probada.

Veamos ahora la equivalencia:

$\Rightarrow$) Sabemos que $u \in K$ y que $\|f - u\| \leq \|f - v\| \ \forall v \in K$, entonces $\forall w \in K \ \forall t \in [0,1]$ como K es convexo tenemos que $(1-t)u + tw \in K$ y usando como v tenemos que

$$\|f - u\|^2 \leq \|f - (1-t)u - tw\|^2 = (f - (1-t)u - tw, f - (1-t)u - tw)$$
$$= \|f - u\|^2 + t^2 \|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u)$$

Entonces:

$$0 \leq \|w - u\|^2 t^2 - 2(f - u, w - u)t \quad \forall t \in [0,1]$$

Obviando $t = 0$ pues es trivial tenemos que

$$0 \leq \|w-u\|^2 t - 2(f-u, w-u) \quad \forall t \in (0,1]$$

y tomando límite cuando t tiende a 0^+

$$0 \leq -2(f-u, w-u) \iff (f-u, w-u) \leq 0$$

$\Leftarrow$) Razonemos por reducción al absurdo, supongamos que $\|f-u\| > dist(f,K)$ y que $(f-u, v-u) \leq 0$, es decir, gráficamente estamos en esta situación:

Importantísimo

Es decir, como $dist(f,K) < \|f-u\|$ $\exists v \in K \mid dist(f,K) = \|f-v\|$ luego $(f-v, u-v) \leq 0$, pero $(f-u, v-u) = (f-u+v-v, v-u) = (f-v, v-u) + (v-u, v-u) = (f-v, v-u) + \|v-u\|^2 \geq 0 \Rightarrow (f-u, v-u) = 0$ y $\|v-u\|^2 = 0$, es decir, $v = u \Rightarrow (f-u, v-u) > 0$!!

Por tanto, $\|f-u\| = dist(f,K)$

Vamos a probar la unicidad, supongamos $\exists u_1, u_2 \in K \mid \|f-u_1\| = \|f-u_2\| = dist(f,K)$. Entonces por lo probado anteriormente $(f-u_1, u_2-u_1) = (f-u_2+u_2-u_1, u_2-u_1) = (f-u_2, u_2-u_1) + \|u_2-u_1\|^2$

$(f-u_1, u_2-u_1) \leq 0$ luego $(f-u_2, u_2-u_1) + \|u_2-u_1\|^2 \leq 0$, es decir, $\|u_2-u_1\|^2 \leq (f-u_2, u_1-u_2) \leq 0$ por el Teorema aplicado a u_2, pero $\|u_2-u_1\|^2 \geq 0$ luego $\|u_2-u_1\|^2 = 0$, es decir, $u_2 = u_1$

Proposición

Sea $K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert y

$$P_K : H \longrightarrow H$$
$$f \longmapsto P_K f$$

Para cada f me da el elemento más cercano de K a f

Entonces P_K es lipschitziana, es decir, $\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad \forall f_1, f_2 \in H$

· Demostración ·

Dados $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$ y por el teorema de la proyección sabemos que

$$(f_1 - u_1, v - u_1) \leq 0 \quad \wedge \quad (f_2 - u_2, v - u_2) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

y tomando $v = u_2$ o u_1 tenemos que

$(f_1 - u_1, u_2 - u_1) \le 0$

$\wedge$

$(f_2 - u_2, u_1 - u_2) \le 0 \iff (f_2 - u_2, u_2 - u_1) \ge 0$

Restando ambas desigualdades tenemos que gracias a la bilinealidad tenemos

$$(f_1 - f_2, u_2 - u_1) + (u_2 - u_1, u_2 - u_1) = ((f_1 - f_2) + (u_2 - u_1), u_2 - u_1) = ((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) \le 0$$

Es decir:

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|u_2 - u_1\|^2 = (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \le -(f_1 - f_2, u_2 - u_1) \le \|f_1 - f_2\| \|u_2 - u_1\| \Rightarrow \|u_2 - u_1\| \le \|f_1 - f_2\|$$

pues si $\|u_2 - u_1\| = 0$ tenemos algo trivial y en caso contrario tenemos lo que buscamos

Corolario (proyección ortogonal)

Sea $M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert. Entonces:

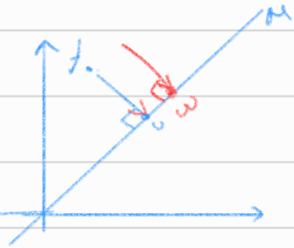
$\forall f \in H \ \exists! u \in M : \|f - u\| = dist(f, M)$ Teorema

Además se caracteriza por:

i) $u \in M$

debe ser perpendicular

ii) $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$



Por último, $P_M : H \longrightarrow H$ es lineal (sólo si M subespacio vectorial)

-Demostración-

Por el T^ma de la proyección sabemos que $u \in M$ cumple y buscamos probar

$$\begin{cases} u \in M \\ (f - u, v - u) \le 0 \ \forall v \in M \end{cases} \iff \begin{cases} u \in M \\ (f - u, w) = 0 \ \forall w \in M \end{cases}$$

$\Leftarrow$) Como M es subespacio vectorial tenemos que $v - u \in M$ luego se cumple.

$\Rightarrow$) Sabemos que $(f - u, v - u) \le 0 \ \forall v \in M$ y elegimos $v \in M$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y como M es un subespacio, sabemos que $\frac{v}{t} \in M$ luego $(f - u, \frac{v}{t} - u) \le 0 \ \forall v \in M, t \neq 0$.

- Si $t > 0 \Rightarrow (f - u, v - tu) \le 0 \ \forall t > 0, v \in M$ y tomando límite cuando $t \to 0$ entonces, por continuidad del prod. esc., $(f - u, v) \le 0 \ \forall v \in M$
- Si $t < 0 \Rightarrow (f - u, v - tu) \ge 0 \ \forall t < 0, v \in M$ y tomando límite cuando $t \to 0$ entonces, por continuidad del prod. esc, $(f - u, v) \ge 0 \ \forall v \in M$

Para probar la linealidad, llamando $v_1 = P_M f_1$, $v_2 = P_M f_2$ y buscamos probar que

$$P_M(f_1+f_2) = P_M f_1 + P_M f_2 = v_1+v_2$$

Como v_1 y v_2 cumplen que:

i) $(f_1 - v_1, w) = 0 \quad \forall w \in M$

ii) $(f_2 - v_2, w) = 0 \quad \forall w \in M$

tenemos que

$0 = (f_1 - v_1, w) + (f_2 - v_2, w) = (f_1 + f_2 - v_1 - v_2, w) = (f_1 + f_2 - (v_1+v_2), w) = (f_1+f_2 - P_M(f_1+f_2), w)$

luego es cerrado para la suma.

Veamos que se cumple para el producto por escalares, es decir, si $v = P_M f$ entonces buscamos probar que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ escalar $P_M(\alpha f) = \alpha P_M f$, pero sabemos que

$$0 = \alpha(f - v, w) = (\alpha f - \alpha v, w)$$

luego $\alpha v = P_M f$ y cumple lo mismo que $\alpha P_M f$ teniendo así lo que buscamos

Espacios duales

Nosotros, dado un e.v. $\mathcal{E}$ definimos el dual algebraico como

$$\mathcal{E}^{\#} = \{ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ lineal} \}$$

Sin embargo, si $\mathcal{E}$ es un e.n, definimos su dual topológico como:

$$\mathcal{E}^{*} = \{ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ lineal y continua} \}$$

Observación

Sean $\mathcal{E}$ y F dos espacios normados y $T : \mathcal{E} \longrightarrow F$ lineal. Entonces son equivalentes:

i) T es continua

ii) T es continua en $x_0 \in \mathcal{E}$ cualquiera. Basta que lo sea en un conjunto específico

iii) $T(B(0,1))$ es un conjunto acotado de F

iv) T es una aplicación acotada, es decir, $T(A)$ es acotado $\forall A \subset \mathcal{E}$ acotado. Preserva acotación

v) T es lipschitziana

vi) $T(\bar{B}(0,1))$ es un conjunto acotado de F.

Es claro que, $\mathcal{E}^*$ es un espacio vectorial y buscamos construir una norma, que será

$$\|f\|_{\mathcal{E}^*} := \sup_{\|x\| \le 1} \|f(x)\| \quad \forall f \in \mathcal{E}^*$$

$\hookrightarrow = \sup \{ y \in f(\bar{B}(0,1)) \}$ que existe por acotación

usando la observación anterior, dicho supremo existe. Debemos probar que dicha aplicación es una norma y en dicho caso $(\mathcal{E}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{E}^*})$ es normado y Banach. Para ver que $(\mathcal{E}^*, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach basta ver que, dada una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ de $\mathcal{E}^*$ buscamos ver que es convergente, dado $x \in \mathcal{E}$ tenemos que $f_n(x) \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, como $\{f_n\}$ es de Cauchy, pues gracias a la linealidad y continuidad de f_n $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\Phi_x : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f_n(x)$$

es lineal y continua. Como $\mathbb{R}$ es completo tenemos que $\{f_n(x)\}$ es convergente. Como $x \in \mathcal{E}$ era arbitrario tenemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathcal{E}$ y por tanto $\mathcal{E}^*$ es completo $\square$

Ejercicio $\|f\|_{\mathcal{E}^*} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\|_{\mathcal{E}} \ \forall x \in \mathcal{E}\}$

Como por definición $\|f\|_{\mathcal{E}^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ $\forall f \in \mathcal{E}^*$ y el supremo es la cota superior más pequeña de un conjunto, es decir, el ínfimo de los mayorantes tenemos claramente lo que buscamos.

Espacio dual de un Hilbert

Observación

Es elemental que, si $v \in H$ (Hilbert) se tiene que $\varphi_v : H \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \varphi_v(u) = (u, v)$ luego $\varphi_v \in H^*$ y $\|\varphi_v\|_{H^*} \leq \|v\|_H$

Además, la aplicación $H \xrightarrow{\Phi} H^*$, $v \longmapsto \varphi_v$ es lineal y permite ver que $H \cong \Phi(H) \subseteq H^*$ (H es subespacio del dual)

Demostración.-

Es clara la linealidad por la bilinealidad del producto escalar y acotada por. Como $|f(x)| = |(x,v)| \leq \|v\|_H \|x\|_H$ luego $f \in H^*$

luego $|f(x)| \leq \|v\|_H$. Por definición $\sup\{|(x,y)| : x \in H, \|x\|_H \leq 1\} \leq \|y\|_H \sup\{\|x\|_H : x \in H, \|x\|_H \leq 1\} = \|y\|_H$

Como tenemos bilinealidad es claro que Φ es lineal y como $\|\varphi_y\| = \|y\|_H$ tenemos que conserva distancias (isometría) es continua. Además, es inyectiva luego $H \cong \Phi(H) \subseteq H^*$

Teorema de Riesz-Fréchet de representación del dual de un espacio de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert se cumple que $\forall f \in H^* \ \exists! \ y \in H \mid f(x) = (x, y) \ \forall x \in H$

Además $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$

-Demostración-

Por la observación anterior:

$$\sup\{|(x,v)| : \substack{x\in H \\ \|x\|_H\leq 1}\} \leq \|y\|_H \sup\{\|x\|_H : \substack{x\in H \\ \|x\|_H\leq 1}\} = \|y\|_H$$

Tomando ahora $v\neq 0$ y $x=\frac{v}{\|v\|_H}$ tenemos que $|(x,v)| = \left|\left(\frac{v}{\|v\|_H}, v\right)\right| = \frac{1}{\|v\|_H}(v,v) = \|v\|_H$

luego $\|\varphi\|_{H^*} = \|v\|$.

Si $v=0$ tenemos que también se cumple trivialmente.

En particular, hemos demostrado que $H^*\neq\{0\}$

(Cambio de notación porque el tío no se aclara)

Buscamos probar que ϕ es sobreyectiva, para lo cual debemos probar lo primero del teorema. Es decir, buscamos probar que $f=\varphi_y$

Sea $f\in H^*$ cualquiera. Distinguimos casos:

- Si $f=0$ tomando $y=0$ tenemos lo buscado
- Si $f\neq 0$, es decir, $M=f^{-1}(\{0\})\subsetneq H$ y como las aplicaciones continuas mantiene cerrados luego $M=\bar{M}$ y como $\{0\}$ es un subespacio vectorial y f es lineal tenemos que M es un subespacio vectorial cerrado.

Usando el T^{ma} de la Proyección, como $f^{-1}(\{0\})\neq H$ tenemos que $\exists z_0\in H\setminus M$, podemos tomar $z_1=P_M z_0\in M$ que cumple $(z_0-z_1,v)=0$ $\forall v\in M$.

Definimos $z=\frac{z_0-z_1}{\|z_0-z_1\|}$ bien definido pues $\|z_0-z_1\|\neq 0$ ya que $z_0\notin M$ y $z_1\in M$. Además cumple:

(i) $\|z\|=1$

(ii) $\forall v\in M$ $(z,v)=\frac{1}{\|z_0-z_1\|}(z_0-z_1,v)=0$ por hipótesis

Por su parte, $z\notin M$ pues $z_0-z_1\in M$ luego $z_0-z_1+z_1\in M$ pues $z_1\in M$ y M es un subespacio vectorial, es decir, $z_0\in M$ pero $z_0\in H\setminus M$!!

Como $M=\ker f$ tenemos que $f(z)\neq 0$ pues $z\notin M$.

Vamos a ver que $\forall x\in H$ $\quad x-\frac{f(x)}{f(z)}z\in M=\ker f$ pues $f(x-\frac{f(x)}{f(z)}z)=f(x)-\frac{f(x)}{f(z)}f(z)=0$

luego se cumple. Es decir, $f(x)=f\left(\frac{f(x)}{f(z)}z\right)$.

Ahora, como $x-\frac{f(x)}{f(z)}z\in M$ tenemos que $0=\left(z, x-\frac{f(x)}{f(z)}z\right)=(z,x)-\frac{f(x)}{f(z)}\overbrace{(z,z)}^{\|z\|^2=1}$

Luego $f(x) = f(z)(z,x) = (f(z)z, x) = (x, f(z)z)$ luego $y = f(z)z$ y tenemos la existencia.

Para ver la unicidad tomamos $y_1, y_2 \in H$ tales que $f(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$ $\forall x \in H$ entonces $(x, y_1 - y_2) = 0$ $\forall x \in H$. Tomando $x = y_1 - y_2$ tenemos que $0 = (y_1 - y_2, y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2 \Rightarrow y_1 = y_2$ $\square$

Podemos entonces concluir que un espacio de Hilbert es isométrico a su espacio dual. Sin embargo normas equivalentes no dan duales equivalentes.