1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

a) Función real medible y función medible positiva

Antes de nada conviene destacar cuál es el concepto de función medible. Sea $\Omega \in \mathcal{M}$ e Y un espacio topológico, diremos que $f: \Omega \longrightarrow Y$ es una función medible si $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ $\forall A \in T_Y$

Por tanto, queda claro que toda función continua es medible pues:

Si doy, $A \in T_Y$ y $h: \Omega \to Y$ continua $\Rightarrow h^{-1}(A) \in T_\Omega$ pues $h^{-1}(A) = G \cap \Omega$ con $G \in T_{\mathbb{R}^N}$ luego $h^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ por serlo G y Ω

Debe quedar claro que ser medible es muy débil pues al igual que pasaba con conjuntos, requiere del axioma de elección para encontrar una función no medible

Algunas propiedades son:

- La composición de medibles es medible
- El producto cartesiano de medibles es medible

Diremos que una función medible de Ω en Y es una función real medible si $Y = \mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones reales medibles de Ω en $\mathbb{R}$, claramente $\mathcal{L}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)$

Diremos que una función real medible $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es una función medible positiva si $f(\Omega) \subset \mathbb{R}_0^+$. Por comodidad y elegancia consideraremos el espacio topológico $[0, \infty]$ como codominio de estas funciones y las denotaremos por $\mathcal{L}^+(\Omega)$

Debe quedar claro que no hay ninguna inclusión entre los conjuntos $\mathcal{L}(\Omega)$ y $\mathcal{L}^+(\Omega)$. No obstante, como $\mathbb{R}$ y $[0, \infty]$ inducen la misma topología en $\mathbb{R}^+$, se tiene que $f: \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ es una función real medible sii es una función medible positiva.

y no en $[0, \infty]$

b) Función simple positiva

Partimos de las funciones característica, denotaremos por $\chi_B: \mathbb{R}^N \longrightarrow \{0,1\}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$ a la función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, es claro que $\chi_B^{-1}(]\alpha, \infty]) = B$ si $\alpha < 1$ ($1 \in]\alpha, \infty]$), y $\chi_B^{-1}(]\alpha, \infty]) = \emptyset$ si $\alpha \geq 1$ ($1 \notin]\alpha, \infty]$). Por tanto, $\chi_B \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N)$ sii $B \in \mathcal{M}$. De la misma manera, para cada conjunto no medible, tenemos que su función característica asociada no es una función medible

Por otro lado, podemos dar ejemplos de funciones medibles no continuas. Y cuando $B = \mathbb{Q}_N$, la función $\chi_B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ pero $\chi_B \notin \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ de hecho no es continua en ningún punto.

Llamaremos función simple positiva a toda combinación lineal de funciones características de conjuntos medibles con coeficientes reales no negativos, es decir, de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} p_i \chi_{E_i} \quad \text{donde } m \in \mathbb{N},\ p_i \in \mathbb{R}_0^+ \ \forall i \in \Delta_m \ \text{y } E_i \in \mathcal{M} \ \forall i \in \Delta_m$$

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Estabilidad de las funciones reales medibles por operaciones algebraicas y operaciones relacionadas con el orden entre funciones

Gracias a las propiedades de las funciones medibles y a que la suma y producto de funciones reales medibles provoca funciones medibles tenemos lo que queremos.

No obstante, conviene hablar de unas funciones derivadas de una composición de funciones. Sea $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, podemos asociar la función $|f|$, valor absoluto de f dada por $|f|(x) = |f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ $\forall x \in \Omega$. Es claro que, en el conjunto ordenado $\mathcal{F}(\Omega)$ se tiene $|f| = \sup\{f, -f\}$. Nótese que el conjunto $\{-f, f\}$ no puede tener máximo.

Definimos por parte positiva de f o parte negativa de f a las funciones $f^+, f^- : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definidas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

De esta forma queda claro que:

$$f^+ - f^- = f \quad \text{y} \quad f^+ + f^- = |f|$$

Pues bien, se tiene la estabilidad pedida.

- El valor absoluto, la parte positiva y la parte negativa de una función real medible, son también funciones medibles *b*) Estabilidad de las funciones medibles positivas por operaciones analíticas: supremo e ínfimo, límite superior e inferior, y límite puntual

Este apartado viene como resultado de la siguiente forma.

→ Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas, también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

$$g = \sup\{f_n : n\in\mathbb{N}\},\quad g(x) = \sup\{f_n(x) : n\in\mathbb{N}\}\ \forall x\in\Omega$$

$$h = \inf\{f_n : n\in\mathbb{N}\},\quad h(x) = \inf\{f_n(x)\ n\in\mathbb{N}\}\ \forall x\in\Omega$$

$$\varphi = \limsup_{n\to\infty} f_n,\quad \varphi(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\quad \forall x\in\Omega$$

$$\psi = \liminf_{n\to\infty} f_n,\quad \psi(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\quad \forall x\in\Omega$$

En particular, cuando $\{f_n\}$ converge puntualmente en Ω a una función $f:\Omega\to[0,\infty]$, se tiene que f es medible.

Observamos que, esta última afirmación es la más importante y, al igual que con funciones con valores reales, si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de Ω en $[0,\infty]$ y una función $f:\Omega\to[0,\infty]$ verifican que $\{f_n(x)\}\to f(x)$ para todo $x\in\Omega$, es natural decir que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, o que f es el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$. También podríamos hablar de la convergencia puntual en un conjunto $E\subset\Omega$, pero sólo nos interesa el caso $E=\Omega$. Por tanto, acabamos de ver que el límite puntual de una sucesión de funciones medibles positivas es una función medible positiva.

3. Conocer y comprender la demostración del teorema de aproximación de Lebesgue, incluyendo el caso de aproximación uniforme.

Teorema de Aproximación de Lebesgue.

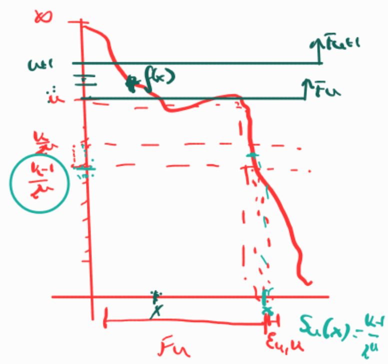
Toda función medible positiva es el límite puntual en Ω de una sucesión creciente de funciones simples positivas.

Demostración

Si $f:\Omega\to[0,\infty]$ es medible, para $n,k\in\mathbb{N}$ con $1\le k\le n2^n$ definimos

$$F_n = \{x\in\Omega \mid f(x)\ge n\}$$

y $\quad E_{n,k} = \{x\in\Omega \mid \frac{k-1}{2^n}\le f(x) < \frac{k}{2^n}\}$



y vemos claramente que, tanto F_n como $E_{n,k}$ son medibles. Definimos ahora

↳ Por qué?

$$\boxed{s_n = n\chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{n,k}}\qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

↳ si $x\in E_{n,k}$ tomamos el valor inferior del eje y.

(1) → solo toma 1 valor para cada x

Evidentemente $\{s_n\}$ es una sucesión de funciones simples positivas y la demostración concluirá probando que $\{s_n\}\nearrow f$. Se tiene $s_n(x) = 0\ \forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ y $n\in\mathbb{N}$, pero solo nos interesa lo que ocurre en Ω. Para que se comprenda mejor el razonamiento, conviene hacer una sencilla observación acerca de la igualdad (1). Fijado $n\in\mathbb{N}$ tenemos

$$[0,\infty] = \underbrace{[n,\infty]}_{\text{Pertenencia de } n} \biguplus \underbrace{\left(\biguplus_{k=1}^{n2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[\right)}_{\text{Partición de lo de abajo.}}, \text{ luego } \Omega = F_n \uplus \left(\biguplus_{k=1}^{n2^n} E_{k,n}\right)$$

Por tanto, dado $x\in\Omega$, al usar (1) para calcular $s_n(x)$, aparece a lo sumo un sumando no nulo. Así pues, si $x\in F_n$ tendremos $s_n(x)=n$, y en otro caso $\exists! k\in\{1,2,\dots,n2^n\}$ tal que $x\in E_{k,n}$, con lo que $s_n(x)=(k-1)2^{-n}$

Fijados $x\in\Omega$ y $n\in\mathbb{N}$, para comprobar que $s_n(x)\le s_{n+1}(x)$, cabe distinguir tres casos, dependiendo del valor de $f(x)$. Empezamos por el más sencillo.

Caso 1.

$$n+1\le f(x) \Rightarrow x\in F_{n+1}\subset F_n \Rightarrow s_n(x)=n<n+1=s_{n+1}(x)$$

$\Rightarrow f(x)>n$

Caso 2

Si $n\le f(x)<n+1$, $\exists! k\in\mathbb{N}$ con $1\le k\le (n+1)2^{n+1}$, tal que $x\in E_{k,n}$. Entonces $k>2^{n+1}f(x)\ge 2^{n+1}n$, luego $k-1\ge 2^{n+1}$, y deducimos que

$\frac{k}{2^{n+1}} > f(x) \ge n$ ↳ entre n y el lado de la partición

$$s_n(x)=n\le \frac{k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$$

↳ $\frac{k-1}{2^{n+1}}\ge n$ por como se hizo la partición

Caso 3

Supongamos por último que $f(x)<n$ y sea $k\in\mathbb{N}$, con $1\le k\le n2^n$, tal que $x\in E_{k,n}$. Entonces

¿?

es único por ser una unión disjunta.

↳ $2k-2\le 2^{n+1}f(x)<2k$, es decir, $j-1\le 2^{n+1}f(x)<j+1$, donde $j=2k-1$ verifica que $1\le j\le n2^{n+1}-1<(n+1)2^{n+1}$, con lo que caben dos posibilidades:

↳ $\frac{k-1}{2^n}\le f(x)\le \frac{k}{2^n}$ ← sustituyo j

$j-1=2k-2$

$j+1=2k$

¿+? De donde sale?

$$j-1\le 2^{n+1}f(x)<j \Rightarrow s_n(x)=\frac{k-1}{2^n}=\frac{j-1}{2^{n+1}}=s_{n+1}(x)$$

$$j\le 2^{n+1}f(x)<j+1 \Longrightarrow s_n(x)=\frac{k-1}{2^n}<\frac{j}{2^{n+1}}=s_{n+1}(x)$$

Comprobado que $\{s_n\}$ es creciente, fijamos $x\in\Omega$ para ver que $\{s_n(x)\}\longrightarrow f(x)$. Esto es evidente si $f(x)=\infty$, pues entonces $s_n(x)=n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. En otro caso, para $n>f(x)$ se tiene que $x\notin F_n$, luego $x\in E_{k,n}$ con $1\le k\le n2^n$. Por tanto:

$$n\in\mathbb{N},\ n>f(x) \Rightarrow 0\le f(x)-s_n(x)\le 1/2^n \qquad (2)$$

lo que implica que $\{s_n(x)\}\longrightarrow f(x)$

□

Teorema de Aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, verificando que $\sup\{f(\Omega)\} < \infty$. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas que converge uniformemente a f en Ω

Demostración

Nótese que las funciones simples positivas nunca toman el valor ∞, y por hipótesis, $f(x) < \infty$ $\forall x \in \Omega$, luego tiene sentido decir que $\{s_n\}$ converge uniformemente a f en Ω. Definiendo $\{s_n\}$ como en (1), comprobamos enseguida dicha convergencia uniforme. Basta por ello tomar $m \in \mathbb{N} \mid m > \sup(f(\Omega))$, con lo cual, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ vemos en (2) que

Es importante que $m > \sup\{f(\Omega)\}$, es decir $f(x) < m$.

$$0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in \Omega$$

y esto prueba que $\{s_n\}$ converge uniformemente a f en Ω