5. Grupos resolubles

5.1. Definiciones

Definición

Sea G un grupo, una serie de G es una cadena de subgrupos dada por

$$\boxed{G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots > G_r = 1 \quad (1)}$$

Al número $r \in \mathbb{N}$ se le llama longitud de la serie

Ejemplo

Consideramos en S_3 la siguiente serie: $S_3 > \{1, (123), (132)\} > 1$

Definición

$s < r$

Si $G = H_0 > H_1 > \dots > H_s = 1$ (2) es una serie, se dice que (1) es un refinamiento de (2), si todo grupo que aparece en (2) también aparece a (1)

Diremos que un refinamiento será propio cuando $\exists\, G_i \in (1)$ tal que $G_i \notin (2)$. Es decir, no son la misma serie

Ejemplo

Consideramos en A_4 la serie $A_4 > V > 1$ y su refinamiento $A_4 > V > \langle (12)(34) \rangle > 1$ que además es propio

Definición

Una serie se dice propia si todos los subgrupos son propios, es decir, $H_{i+1} < H_i$ es subgrupo propio.
Además, será normal si $G_{i+1} \lhd G_i$ $\forall i$

Ejemplo

Consideramos en A_4 la serie $A_4 \rhd V \rhd 1$ y su refinamiento $A_4 \rhd V \rhd \langle (12)(34) \rangle \rhd 1$ que además es propio.

Definición

En una serie normal $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \dots \rhd G_n = 1$, los cocientes G_i / G_{i+1} serán los factores de la serie

Ejemplo

Considerando la serie sobre S_3 dada por $S_3 \rhd \{1, (123), (132)\} \rhd 1$ tiene como factores S_3/A_3 y $A_3/1$

Definición

Dos series normales de un grupo G

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \dots \rhd G_r = 1$$

$$G = H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \dots \rhd H_s = 1$$

Tienen factores isomorfos

se dicen isomorfas si $r = s$ y $\exists \sigma \in S_r$ tal que $\frac{G_i}{G_{i+1}} \simeq \frac{H_{\sigma(i)}}{H_{\sigma(i)+1}}$ $\forall i$

Ejemplo

Consideremos, en $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, las siguientes series

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \overset{2}{\rhd} 2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \overset{2}{\rhd} 4\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \overset{2}{\rhd} 8\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \overset{3}{\rhd} \frac{24\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}} := 0$$

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \overset{3}{\rhd} 3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \overset{2}{\rhd} 6\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \overset{2}{\rhd} 12\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \overset{2}{\rhd} \frac{24\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}} := 0$$

son isomorfas con $\sigma \in S_4$ dada por $\sigma = (1\,2\,3\,4)$

Definición

Una serie de G se dice que es una serie de composición de G si es normal sin refinamientos normales propios.

Ejemplo

i) $A_4 \rhd V \rhd 1$ no es de composición pues $A_4 \rhd V \rhd \langle (12)(34) \rangle \rhd 1$ es un refinamiento que es serie de composición.

ii) $GL_n(K)$ con $n \geq 2$ y K un cuerpo

- $n = 2$, consideramos $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in K^*, b \in K \right\}$ es infinito no conmutativo

y por otro lado $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in K \right\}$.

$T \rhd \mathcal{U} \rhd 1$ es una serie de composición

- $n > 2$, considerando $T = \{ A \in M_{n \times n}(K) \mid a_{ij} = 0 \; \forall i < j \wedge \det(A) \neq 0 \}$, por otro lado $N = \{ A \in M_{n \times n}(K) \mid a_{ij} = 0 \; \forall i \leq j \}$ y consideramos $\mathcal{U} = I + N^i$.

Con esto podemos construir la serie de composición

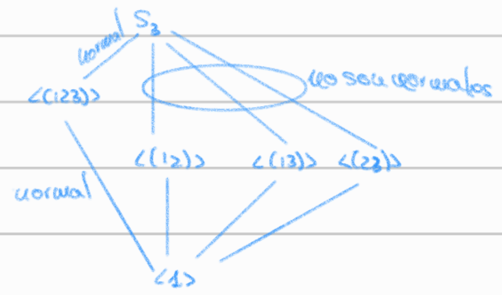
$$T \rhd \mathcal{U}_1 \rhd \mathcal{U}_2 \rhd \dots \rhd \mathcal{U}_n = I$$

Definición

En una serie de composición, los factores de la serie los llamamos factores de composición cuyos órdenes serán llamados índices de composición.

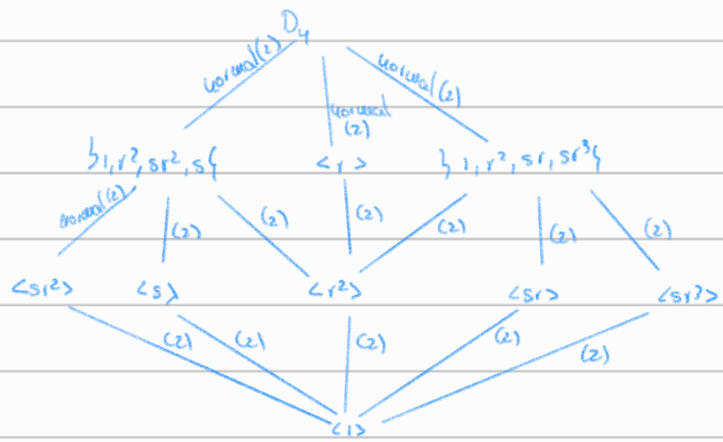
Ejemplo

Consideramos S_3 y buscamos sus series de composición.



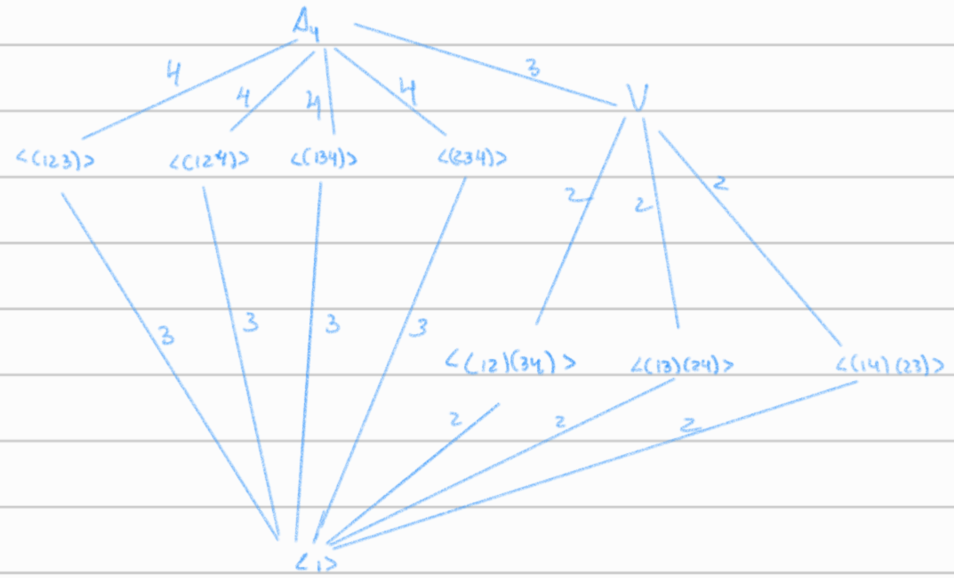
Luego la única serie de composición es $S_3 \triangleright \langle (123) \rangle \triangleright \langle 1 \rangle$.

Consideramos ahora D_4



Y siguiendo todos los posibles ramos obtenemos todas las series de composición.

Consideramos ahora A_4



//Todo. Calcular las series de composición

Consideramos ahora $S_3\times\mathbb{Z}_2$, en S_3 tenemos la serie $S_3 \rhd A_3 \rhd 1$, construimos las de $S_3\times\mathbb{Z}_2$. Como en $\mathbb{Z}_2$ tenemos solo $\mathbb{Z}_2 \rhd \{0\}$

$$S_3\times\mathbb{Z}_2 \rhd S_3\times\{0\} \rhd A_3\times\{0\} \rhd \{(1,0)\}$$

donde bajamos de uno en uno en cada componente del producto. Esto se puede repetir consiguiendo dos series de composición más. No obstante, no son las únicas pues $\operatorname{mcd}(|S_3|,|\mathbb{Z}_2|)\neq 1$ luego hay alguna más como

$$S_3\times\mathbb{Z}_2 \overset{2}{\rhd} H_1 \overset{2}{\rhd} H_2 \overset{3}{\rhd} 1$$

Definición

Un grupo G se dice simple si no es trivial y si no tiene subgrupos normales

Ejemplo

5.2 Resultados de series

Lema

Un grupo es abeliano y simple si y sólo si es cíclico de orden primo

Demostración

$\Leftarrow]$

El orden de los que tuviera sería divisor del primo.

Si $\mathcal{G}$ es cíclico de orden primo, no tiene subgrupos propios $\Rightarrow \mathcal{G}$ es simple

↳ no tiene subgrupos normales

$\Rightarrow]$ Si $\mathcal{G}$ es abeliano $\Rightarrow$ todos sus subgrupos son normales.

Si $\mathcal{G}$ es simple no tiene subgrupos ~~propios~~ normales $\Rightarrow$ no tiene subgrupos propios

Sea $1 \neq x \in \mathcal{G}$ $\quad \langle x \rangle \trianglelefteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} = \langle x \rangle \Rightarrow \mathcal{G}$ es cíclico.

porque $|\mathcal{G}| = n \cdot m$

Si $|\mathcal{G}| = n \cdot m \Rightarrow 1 \neq \langle x^m \rangle \lneq \mathcal{G}$ de manera que tendría grupos propios!!

Si $|\mathcal{G}| = \infty \Rightarrow \mathcal{G} \cong \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ no es simple

↳ abeliano y cíclico

Lema

Si un grupo $\mathcal{G}$ tiene una serie de composición, los factores de composición son grupos simples

Demostración

serie de composición → sin ref. propios

Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \triangleright \mathcal{G}_1 \triangleright \dots \triangleright \mathcal{G}_r = 1$ y supongamos $\exists i \mid \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i+1}}$ no es simple. Luego $\exists H \neq \langle 1 \rangle$ de manera que $H \triangleleft \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i+1}}$. Considerando $p: \mathcal{G}_i \to \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1}$ y el 3TI tenemos que $p^*(H) \triangleleft \mathcal{G}_i$, entonces

$H < \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i+1}} < \mathcal{G}_i$?

$$\frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i+1}} \cong \frac{\mathcal{G}_i/H}{\mathcal{G}_{i+1}/H} \rightarrow H \triangleleft \mathcal{G}_i$$

$$\mathcal{G} \triangleright \dots \triangleright \mathcal{G}_i \triangleright H \triangleright \mathcal{G}_{i+1} \triangleright \dots \triangleright \mathcal{G}_0$$

es un refinamiento y la serie dejaría de ser composición

Proposición

Si $\mathcal{G}$ es un grupo finito entonces $\mathcal{G}$ tiene una serie de composición

Demostración

no tiene subgrupos propios

Si $|\mathcal{G}| = p$ primo $\Rightarrow \mathcal{G}$ es simple $\Rightarrow \mathcal{G} \triangleright 1$ es una serie de composición

Si $|\mathcal{G}|$ no es primo. Supongamos cierta la H.I $\forall H$ grupo con $|H| < |\mathcal{G}|$.

Como $\mathcal{G}$ es finito tiene un número finito de subgrupos, entre los cuales $\exists \mathcal{G}_1$ normal

$\mathcal{G}_1$ ↳ maximal propio. Entonces $|\mathcal{G}_1| < |\mathcal{G}| \Rightarrow \mathcal{G}_1 \triangleright \dots \triangleright \mathcal{G}_r = 1$ es serie de composición por HI.

Como $\mathcal{G}_1$ es normal maximal $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \triangleright \mathcal{G}_1 \triangleright \dots \triangleright \mathcal{G}_r = 1$ es serie de composición.

Teorema del refinamiento de Schreier

Dos series normales de cualquier grupo $\mathcal{G}$ tienen refinamientos isomorfos.

-Demostración-

Consideramos dos series normales

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \rhd \mathcal{G}_1 \rhd \dots \rhd \mathcal{G}_{i-1} \rhd \mathcal{G}_i \rhd \dots \rhd \mathcal{G}_r = 1$$

$$\mathcal{G} = H_0 \rhd H_1 \rhd \dots \rhd H_{j-1} \rhd H_j \rhd \dots \rhd H_s = 1$$

$\forall i = 1, \dots, r$ $\mathcal{G}_i \lhd \mathcal{G}_{i-1} \lhd \mathcal{G}$ consideramos $\overbrace{\mathcal{G}_i(H_j \cap \mathcal{G}_{i-1})}^{\mathcal{G}_{ij}} \lhd \overbrace{\mathcal{G}_i(H_{j-1} \cap \mathcal{G}_{i-1})}^{\mathcal{G}_{ij-1}}$, de esta manera

$H_j \lhd H_{j-1}$

$$\mathcal{G}_{i0} = \mathcal{G}_i(H_i \cap \mathcal{G}_{i-1}) = \mathcal{G}_i \mathcal{G}_{i-1} = \mathcal{G}_{i-1}$$

$$\mathcal{G}_{is} = \mathcal{G}_i(H_s \cap \mathcal{G}_{i-1}) = \mathcal{G}_i \cdot 1 = \mathcal{G}_i$$

Entre estos metemos los $\mathcal{G}_{ij}$

$$\mathcal{G}_{i-1} = \mathcal{G}_{i0} \rhd \mathcal{G}_{i1} \rhd \dots \rhd \mathcal{G}_{is-1} \rhd \mathcal{G}_{is} \rhd \mathcal{G}_i$$

luego la serie queda como sigue:

$$\boxed{\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \rhd \mathcal{G}_{10} \rhd \mathcal{G}_{11} \rhd \dots \rhd \mathcal{G}_{1s} = \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_{20} \rhd \mathcal{G}_2 \rhd \dots \rhd \mathcal{G}_{2s} = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_{30} \rhd \dots \rhd \mathcal{G}_{r-1s} = \mathcal{G}_{r-1} = \mathcal{G}_{r0} \rhd \dots \rhd \mathcal{G}_{rs} = \mathcal{G}_r \rhd 1}$$

que tiene longitud $r(s+1) - (r-1) = rs + 1$

Definimos ahora $\forall j = 1 \dots s$, $\forall i = 0 \dots r$ $H_{ij} = H_j(\mathcal{G}_i \cap H_{j-1}) \lhd H_j(\mathcal{G}_{i-1} \cap H_{j-1}) = H_{i-1j}$, $H_{0j} = H_{j-1}$, $H_{rj} = H_j$

y se construye la serie de la misma forma:

$$\mathcal{G} = H_0 = H_{01} \rhd \dots \rhd H_{rs} = H_s = 1$$

tiene longitud $rs + 1$.

Los factores son, por el 4TI: ↳isomorfismo

$$\frac{\mathcal{G}_{ij-1}}{\mathcal{G}_{ij}} = \frac{\mathcal{G}_i(H_{j-1} \cap \mathcal{G}_{i-1})}{\mathcal{G}_i(H_j \cap \mathcal{G}_{i-1})} \cong \frac{H_j(\mathcal{G}_{i-1} \cap H_{j-1})}{H_j(\mathcal{G}_i \cap H_{j-1})} = \frac{H_{i-1j}}{H_{ij}}$$

Teorema de Jordan-Holder

Si un grupo $\mathcal{G}$ admite una serie de composición, cualquier serie normal puede refinarse a una serie de composición. Además, dos series de composición de un grupo son isomorfos.

-Demostración-

Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \rhd \mathcal{G}_1 \rhd \dots \rhd \mathcal{G}_r = 1$ (1) serie de composición de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G} = H_0 \rhd H_1 \rhd \dots \rhd H_s = 1$ (2) serie normal de $\mathcal{G}$. Por el teorema anterior existen refinamientos isomorfos; como (1) es de composición su refinamiento es ella misma y para (2):

$$\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}_0 \triangleright \tilde{\mathcal{G}}_1 \triangleright \cdots \triangleright \tilde{\mathcal{G}}_r = 1$$

Se cumple que dos series de composición isomorfas sobre un grupo tendrán longitudes y factores isomorfos. Además, grupos isomorfos tendrán factores de composición isomorfos aunque el recíproco no es cierto.

$\mathbb{Z}_6$ y S_3 tienen los mismos factores

$\mathbb{Z}_6 \triangleright \mathbb{Z}_3 \triangleright 1$

$\mathbb{Z}_6 \triangleright \mathbb{Z}_2 \triangleright 1$

$fact(\mathbb{Z}_3) = \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}$

$S_3 \triangleright A_3 \triangleright 1 \quad fact(S_3) = \{\mathbb{Z}_3, S_3\}$

Para clasificar los grupos finitos, lo que vamos a hacer será clasificar los grupos simples, puesto que si $N \triangleleft \mathcal{G}$, estudiando $\mathcal{G}/N$, obtenemos alguna información de la estructura de $\mathcal{G}$.

5.3. Clasificación de los grupos simples

Se comenzó la demostración en 1980 y se terminó en 2004. Dicha clasificación son aprox. 1500 páginas que se resumen en el Teorema de Gorestein conocido como "Teorema Enorme" y determina que sólo hay 18 familias infinitas de grupos simples y 26 grupos simples solos denominados "los esporádicos"; donde el más pequeño de todos tiene orden 7920 y el más grande orden 10^{54}.

El teorema determina que cualquier grupo finito simple será isomorfo a alguno de los conocidos.
↳ no tiene subgrupos normales

Las 18 familias infinitas se dividen en tres tipos:

- Cíclicos de orden primo → ya los hemos estudiado
  ↳ son abelianos simples → finitos
- Alternados A_n, $n \geq 5$
- Grupos de Lie (16 restantes)

Teorema de Abel

A_n es simple con $n \geq 5$

-Demostración-

Supongamos que $\exists N \triangleleft A_n \mid N \neq 1$, veremos que $N = A_n$. Usaremos como idea principal que $A_n = \langle (1\,2\,j) \rangle$.

Como $N \triangleleft A_n$ entonces $\exists \sigma \in N$ no trivial y será la que mueva menos elementos. Como σ es par por estar en A_n deberá mover más de 2 elementos. Veremos que mueve exactamente a 3

• Si σ es producto de ciclos disjuntos de longitud 2, supongamos que σ mueve a los elementos $x_1, x_2, x_3, \dots$ luego

$$\sigma = (x_1\, x_2)(x_3\, x_4)(x_5\, x_6)\dots$$

El conjugado por τ

Sea ahora $\tau := (x_3\, x_4\, x_5)$ y definimos $\sigma_1 = (x_3 x_4 x_5)\,\sigma\,(x_3 x_4 x_5)^{-1} \in N$ por ser $N \trianglelefteq A_n$ y si consideramos $[\tau,\sigma] = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = \sigma_1\sigma^{-1} \in N$.

?

Supongamos que σ mueve a x_5 entonces $\sigma_1 = (x_1\, x_2)(x_3\, \sigma(x_5))(x_4\, x_6)\dots$ y en este caso $[\tau,\sigma] = (x_3\, \sigma(x_5))(x_4\, x_5)(x_3\, x_4)(x_5\, \sigma(x_6))$ que deja fijo a x_1, x_2 y mueve a los que movía σ. Con lo cual $[\tau,\sigma] \in N$ que mueve menos elementos que σ. !!

σ mueve a x_1 y x_2

¿Según la elección lo hace?

Supongamos ahora que σ no mueve a x_5, entonces $\sigma_1 = (x_1 x_2)(x_4 x_5)$ y $[\tau,\sigma] = (x_3\, x_5\, x_4)$ que mueve a x_3, x_5 y x_4 que son menos elementos que los que movía σ. (4)

Luego σ no puede ser producto de ciclos disjuntos.

• Si σ tiene un ciclo de longitud mayor o igual que 3. Supongamos ahora que σ mueve a $x_1, x_2, x_3 \dots$ Sea $\tau := (x_3 x_4 x_5)$ y $\sigma_1 = \tau\sigma\tau^{-1} \in N$ luego $[\tau,\sigma] = \sigma_1\sigma^{-1} \in N$. Por qué hay que probar de nuevo que $[\tau,\sigma] \in N$

Supongamos que σ mueve más de 3 elementos; como σ es par entonces mueve al menos 5. Entonces $\sigma_1 = (x_1 x_2 x_4 \dots) \neq \sigma$ y $[\tau,\sigma] = \sigma_1\sigma^{-1} \neq 1 \in N$, que deja fijos a los mismos que σ y a x_2. Por lo tanto, $[\tau,\sigma]$ mueve menos elementos que σ !!

¿Por qué?

Por tanto, N contiene un ciclo de longitud 3 $(i\, j\, k)$ donde $i \neq j \neq k$ (usual notado transit).

Si $i, j, k, 1, 2$ son todos distintos tenemos que

$$(1\, i)(2\, j)(i\, j\, k)(1\, i)(2\, j) = (1\, 2\, k) \in N$$

$n \geq 5$ A_n tiene 5 elementos

Si $i = 1$ pero $j, k, 2$ son distintos $\Rightarrow \exists h$ distinto a los anteriores tal que

$$(2\, j)(k\, h)(1\, j\, k)(2\, j)(k\, h) = (1\, 2\, h) \in N$$

Si $i = 2$ pero $j, k, 1$ son distintos $\Rightarrow \exists h$ distinto a los anteriores tal que

$$(1\, j)(k\, h)(2\, j\, k)(1\, j)(k\, h) = (1\, 2\, h) \in N$$

Por tanto, N contiene a los generadores de $A_n \Rightarrow N = A_n = \langle (1\, 2\, j) \rangle$ ↳ cualquiera □

Propiedades de los factores de composición

El estudio de estas propiedades nos conduce a la definición de los grupos resolubles. Para entenderlo necesitamos conocer el ejercicio 33 del tema anterior conociendo que $[g,g]$ es el primer grupo derivado de $\mathcal{G}$. Además, algunos resultados son:

i) $\mathcal{G}$ abeliano $\iff [\mathcal{G},\mathcal{G}]=1$

ii) Si $N \trianglelefteq \mathcal{G}$, $\mathcal{G}/N$ es abeliano $\iff [\mathcal{G},\mathcal{G}] < N$ ← El neutro en el cociente

↳ pa definir

iii) $[S_3, S_3] = A_3$ $\wedge$ $[A_4, A_4] = V$

Definición

La serie derivada de un grupo $\mathcal{G}$, es la cadena de subgrupos normales

$$\boxed{\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 \triangleright \mathcal{G}' \triangleright \mathcal{G}'' \triangleright \dots \triangleright \mathcal{G}^i \triangleright \dots}$$ → no es de composición → normal sin ref. propios

donde $\mathcal{G}^{(i+1)} = [\mathcal{G}^{(i)}, \mathcal{G}^{(i)}]$.

↳ cada subgrupo normal es el derivado del anterior

Definición

Un grupo se dice resoluble si $\exists i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{G}^{(i)} = 1$; es decir, la serie derivada alcanza el grupo trivial

Como ejemplos tenemos:

i) Si $\mathcal{G}$ es abeliano $\Rightarrow \mathcal{G}$ es resoluble.

ii) S_3 es resoluble pues $S_3' = A_3$ y $S_3'' = 1$.

iii) A_4 es resoluble pues $A_4' = V$ y $A_4'' = 1$.

iv) S_4 es resoluble pues $S_4' = A_4$.

v) A_5 no es resoluble, en general, A_n no va a ser resoluble.

$A_5' \neq 1$, como A_5 es simple $A_5' = A_5$ pues por ser simple, no tiene subgrupos normales propios.

vi) S_n no es resoluble pues $[S_n, S_n] = A_n$ $\forall n \geq 3$ y A_n es simple para $n \geq 5$.

↳ $n \geq 5$

Caracterización

Sea $\mathcal{G}$ un grupo ~~finito~~ → admite una serie de composición, son equivalentes:

i) $\mathcal{G}$ es resoluble

ii) $\mathcal{G}$ tiene una serie normal con factores abelianos

iii) Los factores de composición son cíclicos de orden primo → abelianos simples

iv) $\mathcal{G}$ tiene una serie normal con factores cíclicos

-Demostración-

i) ⇒ ii)] Si $\mathcal{G}$ es resoluble, la serie derivada alcanza el 1 entonces es la serie normal con factores abelianos

ii) ⇒ iii) Consideramos la serie normal con factores abelianos $\mathcal{G}=\mathcal{G}_0 \triangleright \mathcal{G}_1 \triangleright \dots \triangleright \mathcal{G}_s=1$ por el T^a de Jordan-Holder podemos refinarla

$$\dots \mathcal{G}_r \triangleright H_1 \triangleright H_2 \triangleright H_3 \triangleright \mathcal{G}_{r+1} \triangleright \dots$$

que tiene como factores de composición, y además abelianos:

$$\mathcal{G}_r/H_1 \cong \frac{\mathcal{G}_r/\mathcal{G}_{r+1}}{H_1/\mathcal{G}_{r+1}}, \quad H_1/H_2 \cong \frac{H_1/\mathcal{G}_{r+1}}{H_2/\mathcal{G}_{r+1}}, \quad H_2/H_3 \cong \frac{H_2/\mathcal{G}_{r+1}}{H_3/\mathcal{G}_{r+1}}$$

y por otro lado, sabemos que $H_1/\mathcal{G}_{r+1}$, $H_2/\mathcal{G}_{r+1}$, $H_3/\mathcal{G}_{r+1}$ son subgrupos abelianos de $\mathcal{G}_r/\mathcal{G}_{r+1}$ pues $\mathcal{G}_r/\mathcal{G}_{r+1}$ es abeliano. (El n° de factores usados podría ser cualquiera (H_1, H_2, H_3)).

por?

Veamos que los factores son cíclicos de orden primo, pero son abelianos finitos y simples por ser factores. Entonces, por co resultado visto son cíclicos de orden primo.
↳ de composición

iii ⇒ iv) Si tiene factores de composición, tendrá una serie normal que será la de composición, luego sus factores son cíclicos.

iv ⇒ i) Sea $\mathcal{G}=\mathcal{G}_0 \triangleright \mathcal{G}_1 \triangleright \mathcal{G}_2 \triangleright \dots \triangleright \mathcal{G}_r=1$ una serie normal con factores de composición cíclicos; entonces $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$ es abeliano, es decir, $\mathcal{G}'=[\mathcal{G},\mathcal{G}]<\mathcal{G}$ y por una leve inducción $\mathcal{G}^{i)}<\mathcal{G}_i \ \forall i$

Como $\frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i+1}}$ es abeliano, entonces $\mathcal{G}_i'<\mathcal{G}_{i+1}$ y por tanto $\mathcal{G}^{i+1)}=(\mathcal{G}^{i)})'<\mathcal{G}_i'<\mathcal{G}_{i+1}$. Ahora, vemos el último eslabón, $\mathcal{G}^{r)}<\mathcal{G}_r=1$, es decir, la serie derivada alcanza el 1. □

Ejemplo

$S_4 \triangleright A_4 \triangleright V \triangleright 1$ es una serie normal con factores S_4/A_4, A_4/V, $V/1$ que son abelianos y por tanto S_4 es resoluble.

Esto mismo ocurre con $D_n \triangleright \langle r \rangle \triangleright 1$ cuyos factores son abelianos, y por tanto, D_n es resoluble. Cabe destacar que la serie no tiene por qué ser de composición.

Proposición

i) Todo subgrupo de un grupo resoluble es resoluble

ii) Todo cociente de un grupo resoluble es resoluble

iii) Si $N \triangleleft \mathcal{G}$ y se cumple que N y $\mathcal{G}/N$ son resolubles ⇒ $\mathcal{G}$ es resoluble.

- Demostración -

Sea $G = G^0 \triangleright G' \triangleright G'' \triangleright \dots \triangleright G^r = 1$ una serie derivada:

i) Si $H < G$ entonces $H^i < G^i$ $i \geq 0$ $\wedge$ $\exists r \mid G^r = 1$ y por tanto $H^r = 1$

ii) Sea $N \triangleleft G$, por inducción vamos a tener que $(G/N)^k = \frac{G^k N}{N}$ y por tanto, como la serie derivada acaba en el 1, $(G/N)^r = 1$, es decir, G/N es resoluble.

iii) Sea $N \triangleleft G$ y G/N resoluble. Como G/N es resoluble $\Rightarrow \exists s$ de manera que $(G/N)^s = 1$, de donde deducimos que $G^s < N$ y como N es resoluble $\exists t$ de manera que $N^t = 1$. De aquí deducimos que $G^{s+t} < N^t = 1$ y por tanto es resoluble

Corolario

Cualquier producto finito de grupos resolubles es resoluble

- Demostración -

Supongamos que G_1, G_2 son resolubles y veamos qué ocurre con $G_1 \times G_2$. Sabemos que $G_2 \cong 1 \times G_2 < G_1 \times G_2$, luego $1 \times G_2$ es resoluble y además, $1 \times G_2 \triangleleft G_1 \times G_2$ luego trabajamos dicho cociente $\frac{G_1 \times G_2}{1 \times G_2} \cong G_1$ que es resoluble. Luego, por la proposición anterior $G_1 \times G_2$ son resolubles