Cambios de variable

Sea $\overset{\frac{dx}{dt}}{x'} = f(x,y)$ una ecuación diferencial con $f: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) \longmapsto f(t,x) \end{array}$ continua y D abto y convexo

Para hacer un cambio de variable, el más general de todos, consiste en tomar otra variable independiente y otra dependiente buscando

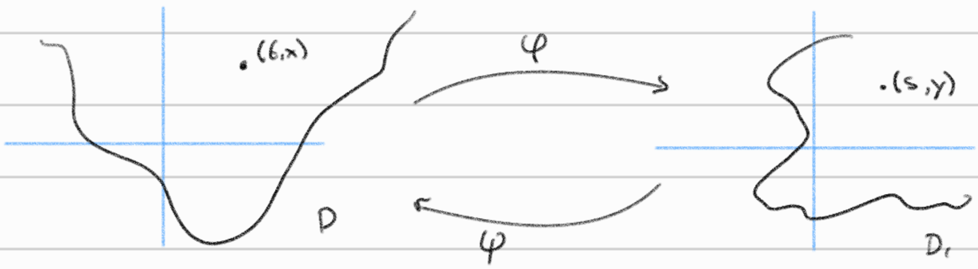
$$\left\{ \begin{array}{l} s = \varphi_1(t,x) \\ y = \varphi_2(t,x) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{obtenemos}} \boxed{\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)}$$

Pero... ¿quién es $\hat{f}$? ¿dónde está definida?

Como $\varphi_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenemos la función $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ dada por

$$\varphi: D \longrightarrow D_1$$

donde gráficamente representa dicho cambio de variable de la siguiente manera



Veamos qué condiciones debe cumplir φ para ser un buen cambio de variable

i) φ es biyectiva, luego dispondrá de inversa $\varphi^{-1} = \psi$. Entonces

$$\varphi \circ \psi = id_{D_1} \quad \wedge \quad \psi \circ \varphi = id_D$$

ii) Poder hacer cálculos diferenciales en ambos dominios, esto se consigue imponiendo que $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$, $\psi \in \mathcal{C}^1(D_1)$ obteniendo que ambas diferenciales sean continuas

Esto que acabamos de definir, se llama difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$; no obstante, hay difeomorfismos de clases superiores.

Hasta este instante no disponemos de rigor, pero haremos un pequeño cálculo para expresar y en función de s:

$$y = y(s)$$

$x' = f(t,x)$

$$\boxed{\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)\, f(t,x)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)\, f(t,x)}}$$

$y = \varphi_2(t,x) \equiv y(t) = \varphi_2(t, x(t)) \longrightarrow$ luego no estamos realizando una derivada parcial

- $\frac{dy}{dt}(t) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x(t))\, x'(t)$

$x' = f(t,x)$

- $\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, f(t,x)$

Ya entendemos que x está en función de t

No obstante, la expresión que obtenemos no es la expresión final pues debemos obtenerla sólo en función de s e y luego haremos uso de la función inversa $\psi = \varphi^{-1}$ tal que $\psi(s,y) = (t,x)$ luego

$$\boxed{\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))\, f(\psi(s,y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))\, f(\psi(s,y))} = \hat{f}(s,y)}$$

Ejemplo:

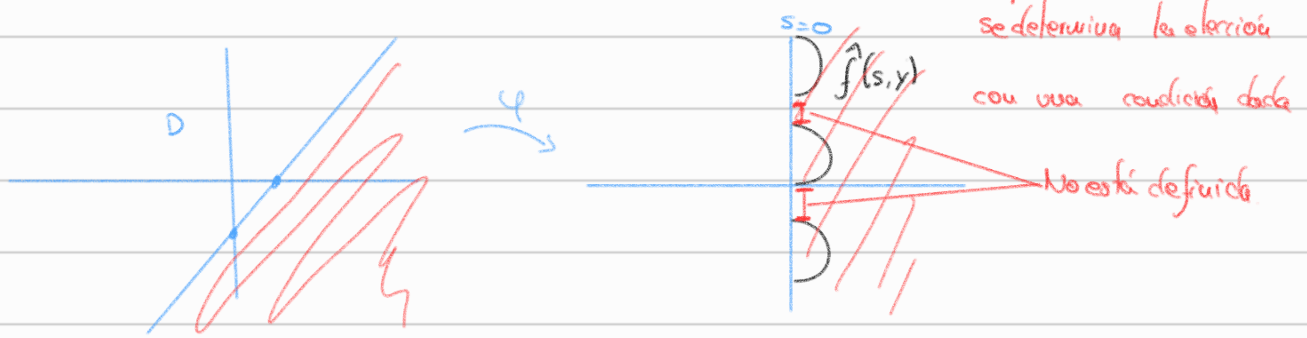
i) $\frac{dx}{dt} = \frac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2}$ $\qquad \begin{cases} y = x+t-3 = \varphi_2(t,x) \\ s = x-2t+1 = \varphi_1(t,x) \end{cases}$

1) Ver dominio de la ecuación de partida

$$f(t,x) = \frac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2}$$

Tomaremos la recta $x-2t+1=0$ y alguno de los semiplanos como dominios

se determina la elección con una condición dada



Luego $D=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \mid x-2t+1>0\}$

2) Determinar el difeomorfismo $\varphi\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

i) Es biyectiva pues el sistema de ecuaciones es SCD.

Es de clase 1 pues todas las parciales son continuas.

ii) Además, como la inversa de un polinomio es otro polinomio de primer grado luego la inversa es de clase C^1

Generalmente obtenemos la imagen del conjunto que no pertenece al dominio y elegimos lo que debemos.

$$D_1=\{(s,y)\in\mathbb{R}^2 \mid s>0\}$$

Repitiendo los cálculos formales ya realizados de forma teórica obtenemos

Poner bien valla

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{dy/dt}{ds/dt}=\frac{x'+1}{x'-2}=\frac{\frac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2}+1}{\frac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2}-2}$$

$$\frac{dy}{dt}=x'+1$$

$$\frac{ds}{dt}=x'-2$$

Sustituyendo

$s>0$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{\frac{\operatorname{sen}(y)}{s^2}-1}{\frac{\operatorname{sen}(y)}{s^2}-2}=\frac{\operatorname{sen}(y)+s^2}{\operatorname{sen}(y)-2s^2}=\hat{f}(s,y)$$

Puede no estar definida en todo D_1

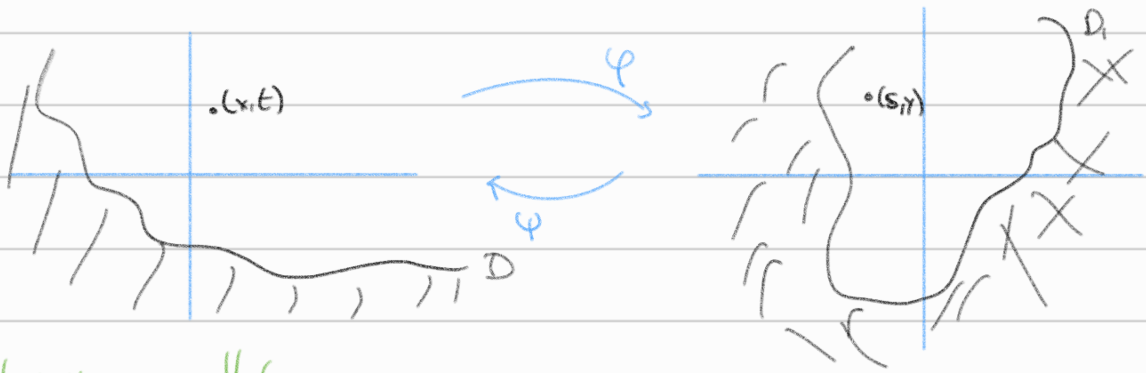
No obstante, necesitamos que $\operatorname{sen}(y) - 2s^2$ sea distinto de 0 añadiendo una nueva condición al cambio de variable.
Luego deberemos tomar, en el ejemplo y en la teoría, la componente conexa que más nos interese luego:

$$\boxed{(ii)\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\varphi(s,y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\varphi(s,y)) f(\varphi(s,y)) \neq 0}$$

Gracias a esto conseguiremos que φ llevará explícitas en explícitas

Entender lo anterior con rigor

Sea $x' = f(t,x)$ con $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, D abto y conexo



Definición y resultado

Un cambio de variable admisible será una función $\varphi: D \longrightarrow D_1$ con D_1 abto y conexo que es un $\mathcal{C}^1$ - difeomorfismo (ya visto); entonces $\exists \varphi^{-1} = \psi$ donde necesitamos que

Condición de admisibilidad $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\varphi(s,y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\varphi(s,y)) f(\varphi(s,y)) \neq 0}$ $\forall (t,x) \in D$

Nota: Esta condición permite que un difeomorfismo lleve curvas en explícitas en curvas en explícitas

Entonces, la ecuación $x' = f(t,x)$ $(*)$ es equivalente a

Quiere decir que cada una solución de $(*)$, $x = x(t)$ en I, nos dará otra solución $y = y(s)$ en J, de la ecuación $y' = \hat{f}(s,y)$

$$\boxed{\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\varphi(s,y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\varphi(s,y)) f(\varphi(s,y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\varphi(s,y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\varphi(s,y)) f(\varphi(s,y))} = \hat{f}(s,y)}$$

Donde $\hat{f}: D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua

- Demostración -

Sea $x(t)$ solución de (*) definida en I, definimos $S: I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $S(t) = \varphi_1(t, x(t))$ que es derivable por ser $\mathcal{C}^1(I)$ con $S'(t) \neq 0$ pues

$$S'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))\, x'(t) \overset{x(t)\text{ sol}}{=} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))\, f(t, x(t)) \underset{\text{Condición admisibilidad}}{\neq} 0$$

Luego la inversa existe y es derivable. Definimos ahora $T: J = S(I) \longrightarrow I$ dada por $t = T(s)$ cumpliendo que $T(S(t)) = t \ \forall t \in I \wedge S(T(s)) = s \ \forall s \in J$.

Definimos ahora $y: J \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y(s) = \varphi_2(T(s), x(T(s)))$. Hasta ahora hemos construido y pero no hemos probado que sea solución; para ello, debemos calcular $\frac{dy}{ds}$ pues es derivable:

$$\frac{dy}{ds}(s) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s)))\, T'(s) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s)))\, x'(T(s))\, T'(s)$$

Ahora buscamos probar que $\frac{dy}{ds} = \hat{f}$

$$\frac{dy}{ds} = T'(s) \cdot \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s)))\, f(T(s), x(T(s))) \right]$$

(Por def)
$\varphi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$ numerador

denominador

regla de derivación de la inversa

$T = S^{-1}$, $S: I \longrightarrow J$, $t \longmapsto \varphi_1(t, x(t))$ $\Longrightarrow T'(s) = \dfrac{1}{S'(T(s))} = \dfrac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(T(s), x(T(s)))\, f(T(s), x(T(s)))}$

$$S'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))\, f(t, x(t))$$

Obteniendo así lo que buscábamos; no obstante, sólo disponemos de que si $x = x(t)$ es solución entonces $y = y(s)$ es solución. El recíproco es cierto y bastará con probar que, si φ es admisible para (*) entonces ψ es admisible para la nueva ecuación; es decir,

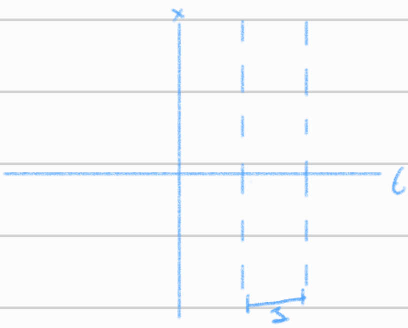
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(s,y)\,\hat{f}(s,y) \neq 0$$

En resumen deberemos probar que $\varphi'(\psi(s,y))\,\psi'(s,y) = I$ expresado en jacobianos sabiendo que $\varphi \circ \psi = id_{D_1}$ y $\psi \circ \varphi = id_D$. Esto último se deja al lector. □

Discusión sobre las ecuaciones diferenciales más sencillas

Cálculo de primitivas

$x' = p(t)$; $p: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Como dominio, tomamos los puntos para los que $f(t,x)$ es continua; entonces $D = I \times \mathbb{R}$



•) $x' = \operatorname{sen} t \Rightarrow x(t) = -\cos t + k$; $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

•) $x' = \frac{1}{t} \Rightarrow x(t) = \ln(-t) + k$; $D =]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$

$x(t) = \ln t + k$; $D =]0, \infty[\times \mathbb{R}$

Gracias al TFC sabemos que tiene solución pues dice que todas las funciones continuas tienen primitiva tal que dado $t_0 \in I$ sabemos que $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$ con $P \in \mathcal{C}^1(I)$ y $P'(t) = p(t)$.

TFC $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right) = f(s)$

Barrow $\longrightarrow$ $\int_{t_0}^{t} F'(s)\,ds = F(t) - F(t_0)$

Luego las soluciones de la ecuación inicial son de la forma:

$$\boxed{x(t) = k + \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds \ , \ k \in \mathbb{R}}$$

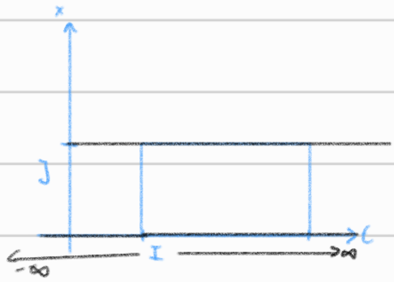
Ecuaciones de variables separadas

$x' = p(t)\,q(x)$ donde p y q son funciones de una variable.

$$p: I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad q: J \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto p(t) \qquad x \longmapsto q(x)$$

, continuas, I y J abiertos

$f(t,x) = p(t)\,q(x)$ con $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D = I \times J$



$\rightarrow$ El cálculo de primitivas está incluido en esta familia

Vamos a ver cómo resolver las ecuaciones de este tipo.

Cálculo formal

$$\frac{dx}{dt} = p(t)\,q(x)$$

Primer caso y luego que buscarlos $\rightarrow$ Cuando q se anula en un punto x_0 entonces es solución constante

$$\Downarrow \quad q(x) \neq 0$$

$$\frac{dx}{q(x)} = p(t)\,dt$$

despejo x y t

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t)\,dt$$

Pruebo que puedo integrar

$$\Downarrow$$

$\Phi(x) = P(t) + c$ $\leftarrow$ Soluciones en forma implícita

$$\Downarrow \Phi^{-1}:$$

$$x(t) = \Phi^{-1}(P(t) + c)$$

Ejemplo

$$x' = e^t e^x \iff \frac{dx}{dt} = e^t e^x$$

i) No hay soluciones constantes

ii) $\frac{dx}{e^x} = e^t dt \iff \int e^{-x}dx = \int e^t dt \iff -e^{-x} = e^t + c \iff e^{-x} = \underbrace{-e^t - c}_{>0 \text{ sup}}$

$\iff -x(t) = \ln(-e^t - c) \iff x(t) = -\ln(-e^t - c)$

Luego las soluciones son de la forma $x(t) = -\ln(-e^t - c)$, $c < 0$

Pero para qué valores de x es una función?

•) Para $c>0$ no vale

•) $c<0$

$t \in J_c =]-\infty, \ln(-c)[$

$-e^t - c > 0$

$-c > e^t$

$\ln(-c) > t$ } ln respeta desigualdades estrictas $\longrightarrow$ en general lo hacen las estrictamente crecientes

Para tomar seno necesito que esté en la misma rama

Demostración

Supongamos ahora que $g(x) \neq 0$ $\forall x \in J$ para evitar soluciones constantes

Idea $\frac{dx}{dt} = p(t) g(t) \xrightarrow[\text{variable}]{\text{cambio}} \frac{dy}{ds} = p(s)$

Vamos a buscar el cambio de variable $s = \varphi_1(t,x)$, $y = \varphi(t,x)$. Para ello,

Vamos a suponer que

$$\begin{cases} s = t \\ y = \phi(x) \end{cases}$$

es decir, buscamos $\phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$, cumpliendo $\phi \in C^1$ y $\phi'(x) \neq 0$ $\forall x \in J$

tomando ahora $\bar{J} = \phi(J)$ intervalo abierto para saber que

ϕ es biyectiva luego $J \longrightarrow \bar{J}$

$x \longmapsto \phi(x) = y$

Llegamos a un rectángulo de misma base y distinta altura.

Necesitamos ahora que ϕ sea admisible, es decir, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f \neq 0$

lo cual es directo pues $\varphi_1(t,x) = t$ y esto ocurre siempre que $s = t$,

pues conserva que las ecs están en explícitas

Una vez que un cambio de variable es admisible $\Rightarrow$ es legítimo el cálculo con diferenciales

Ahora sabemos que $\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \phi'(x) x' = \phi'(x) p(t) g(x)$

Pero aún no hemos acabado pues no está en términos de t e y

$$\frac{dy}{ds} = \phi'(\varphi(y)) p(t) g(\varphi(y)) \quad \text{donde } \phi^{-1} = \varphi$$

No obstante, el cambio de variable que busco es obtener que

$$\frac{dy}{ds} = p(s)$$

luego necesitamos que $\phi'(x)\, q(x) = 1$

Defino $\phi: J \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{q(\xi)}$, $x_0 \in J$ □

$q(x) \neq 0$

Entonces

$$\frac{dy}{ds} = p(t), \quad y(t) = P(t) + c \Rightarrow \phi(x(t)) = P(t) + c \Leftrightarrow$$

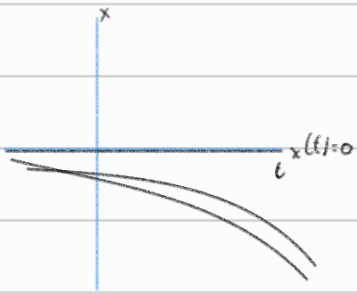
$$\Leftrightarrow x(t) = \phi^{-1}(P(t) + c).$$

Ejemplo

$x' = \lambda x$, $D = \mathbb{R}^2$

i) Soluciones constantes: $x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ii) Aplicamos lo demostrado en cada semiplano.



$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad \int \frac{dx}{x} = \int \lambda\, dt \Leftrightarrow \ln(-x) = \lambda t + c$$

Entonces $-x = e^{\lambda t + c} \Leftrightarrow x = -e^{\lambda t + c}$. Las soluciones son de la forma

$x(t) = k e^{\lambda t}$

Ecuaciones homogéneas

$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$, $h: J \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, J intervalo abierto

Normalmente serán cocientes de polinomios homogéneos o funciones homogéneas.

Un polinomio es homogéneo cuando todos los monomios son de segundo grado

En general

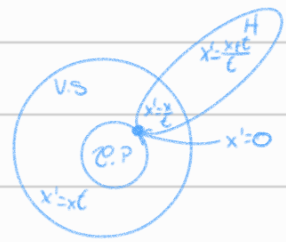
$$x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$$

donde P y Q son polinomios del mismo grado.

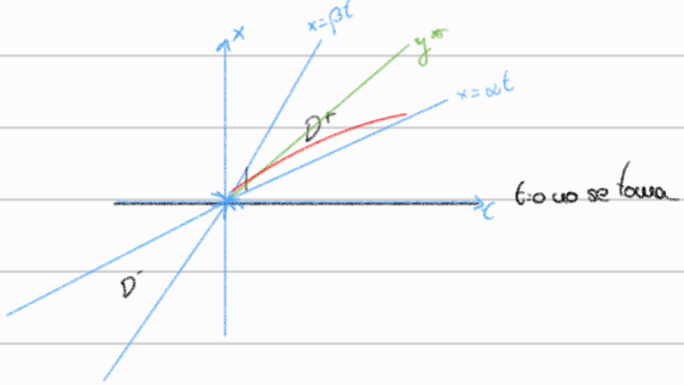
Una función se dice homogénea de cierto grado r cuando $P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^r P(t,x)$; el polinomio P no es el mismo que arriba, esta familia generaliza a la anterior.

Por tanto, todas las ecuaciones donde f sea cociente de funciones homogéneas serán ecuaciones homogéneas.

Nos encontramos en la siguiente situación



$f(t,x) = h\left(\frac{x}{t}\right)$ tiene como dominio de definición suponiendo J abierto acotado.



$J =]\alpha,\beta[$

$\alpha < \frac{x}{t} < \beta$

Como $(0,0)$ no pertenece al dominio elegiremos uno de los dos dominios para preservar la continuidad.

i) $D^+ = \{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t>0,\ \frac{x}{t}\in J\}$

ii) $D^- = \{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t<0,\ \frac{x}{t}\in J\}$

La continuidad se preserva pues simplemente realizamos el siguiente diagrama

$$(t,x) \longmapsto \frac{x}{t} \longmapsto h\left(\frac{x}{t}\right)$$

y sería composición de continuas, esto sólo es válido en cada una de las regiones por separado.

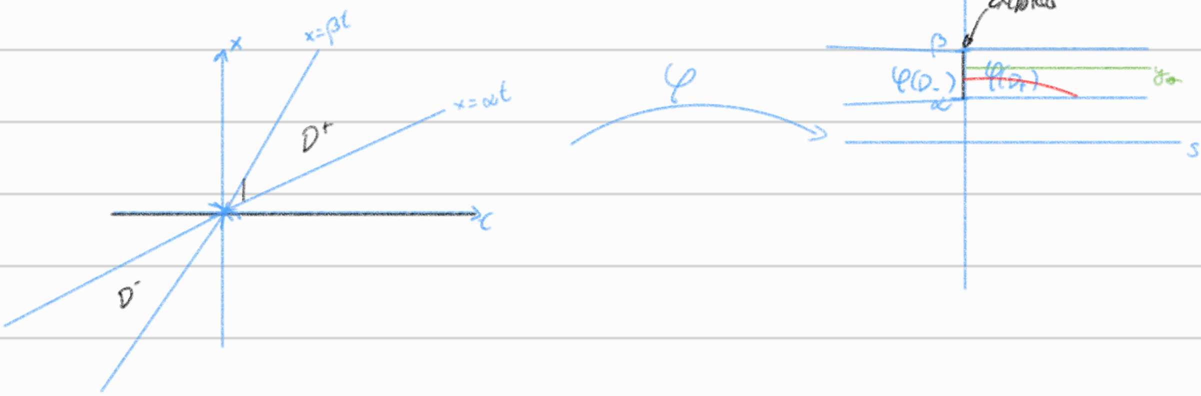
Gracias a un cambio de variable volvemos a una ecuación de variables separadas:

$$\varphi \begin{cases} s=t \\ y=\frac{x}{t}\end{cases} \longleftrightarrow \psi \begin{cases} t=s \\ x=sy\end{cases}$$

y calculando la imagen de φ

$\varphi(D^+) =]0,\infty[\times]$

Obteniendo el siguiente resultado visual



De hecho, tanto φ como φ son de clase 1, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D_+, \mathbb{R}^2)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D_-, \mathbb{R}^2)$; obtenemos que φ es un difeomorfismo que produce un cambio de variable admisible pues la variable independiente 't' no varía.

$$x = t y$$

$$\frac{dx}{dt} = t\frac{dy}{dt} + y \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{1}{t}\left[h\left(\frac{x}{t}\right) - y\right]$$

$$h\left(\frac{x}{t}\right) = h(y) \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{1}{s}\left[h(y) - y\right]$$

Luego la nueva ecuación es:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{s}\left[h(y) - y\right]$$

Obteniendo así una ecuación de variables separadas

Resolución

·) Soluciones constantes

$h(y_*) = y_*$ ⟶ solución constante (mirar dibujo)

·) Soluciones generales

Proceso habitual (mirar dibujo)

Ejemplo

Encontrar la familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación

$$y' = \frac{y-x}{y+x}, \quad y(-1) = -1$$

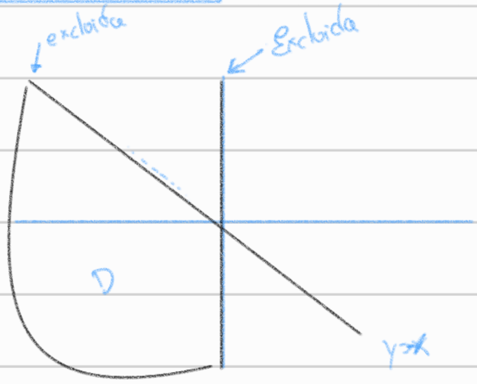
Es claro que es una ecuación homogénea al ser cociente de polinomios homogéneos.

- Dominio:

$$h(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad J =]-1, \infty[\quad \text{pues } \lambda = \frac{y}{x} \text{ y } \frac{y}{x} = -1 \text{ y } \frac{-1}{-1} = 1$$

- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x<0, \ \frac{y}{x} > -1\}$ ($x \neq 0$; $x<0$) y $(-1,-1) \in$ Dominio

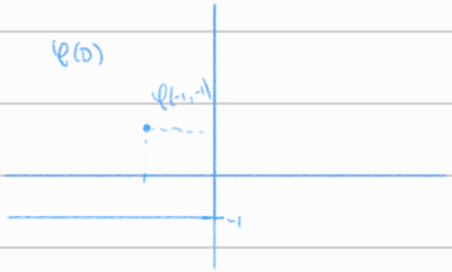
$\boxed{\text{La condición inicial determina el dominio}}$



Tomando φ como cambio de variable

$$\varphi \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Obtenemos el siguiente dominio



Obtenemos la ecuación de variables separadas

$$y = xv \Rightarrow v + xv' = y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1} = \frac{v-1}{v+1}$$

Entonces

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v \iff \frac{dv}{dx} = \frac{-1}{x} \frac{1+v^2}{1+v}$$

En este caso sólo nos interesa la solución $v(-1)=1$

•) Soluciones constantes: no hay pues $\frac{1+v^2}{1+v}$ no se anula

•) Soluciones normales:

$$\operatorname{arctg}(v)+\frac{\ln(1+v^2)}{2} = \int \frac{1+v}{1+v^2}\,dv = -\int \frac{dx}{x} = -\ln(\overset{x<0}{-x})+k;$$

$$\operatorname{arctg}(v)+\frac{1}{2}\ln(1+v^2) = -\ln(-x)+k$$

Sabemos que son soluciones debido a que el método de resolución de variables separadas las define

Deshacemos el cambio de variable:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = -\ln(-x)+k$$

$$\Updownarrow \ \ln(-x)=\frac{1}{2}\ln(x^2),\ x<0$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\ln\sqrt{x^2+y^2} = k$$

Sustituimos $y=-1$, $x=-1 \Rightarrow k=\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}=k_0$

Normalmente sería necesario el teorema de la función implícita pero citando la teoría que tenemos se asegura que se define $y=y(x)$

HAY QUE CITARLO DE FORMA PRECISA

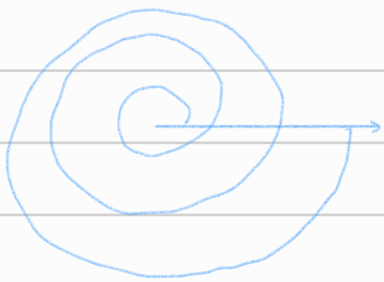
Si hacemos ahora $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$ obtenemos

$=\theta$ en $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ → pero tercer cuadrante $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\theta)) + \ln\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)} =$$

$= \theta + \ln r = k+\pi$ ⟶ Espiral logarítmica o espiral de Arquímedes

$$r = e^{k-\theta+\pi}$$



Si f es creciente o decreciente (en polares) son espirales

Ecuaciones reducibles a homogéneas

$$x' = h\left(\frac{at+bx+c}{\Delta t+\mathcal{B}x+\mathcal{C}}\right) \quad \text{con } a,b,c,\Delta,\mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

$h\ \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $\mathcal{I}$ abierto

Casi siempre funciona una traslación.

$$\varphi: \begin{cases} s = t - t_* \\ y = x - x_* \end{cases}, \ (x_*, t_*) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = f(t,x) \Rightarrow \frac{dy}{ds} = h\left(\frac{a(s+t_*)+b(y+x_*)+c}{\Delta(s+t_*)+\mathcal{B}(y+x_*)+\mathcal{C}}\right) = h\left(\frac{as+by}{\Delta s+\mathcal{B}y}\right)$$

Si consigo hacer que

$$\begin{cases} at_* + bx_* + c = 0 \\ \Delta t_* + \mathcal{B}x_* + \mathcal{C} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow (t_*, x_*)$ sea solución

Obteniendo ya una ecuación homogénea

Pero ¿qué ocurre si es sistema es incompatible?

- Incompatible $\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ \Delta & \mathcal{B} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a,b) = \lambda(\Delta,\mathcal{B})$, son LD en $\mathbb{R}^2$ y podré poner uno en función del otro.

$$(a,b) = \lambda(\Delta,\mathcal{B}), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$x' = h\left(\frac{at+bx+c}{\lambda(at+bx)+c}\right)$$

que realizando el cambio $\varphi \begin{cases} at+bx = y \\ t = s \end{cases}$ obtenemos una ecuación en variables separadas suponiendo $b \neq 0$

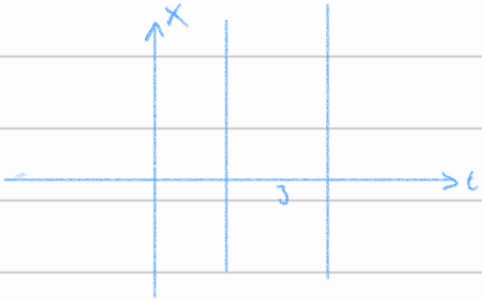
Ejemplo típico

$$x' = \frac{x+t+1}{x-t+3}, \ x(0)=0 \quad \text{encontrar las soluciones y su dominio}$$

Ecuación escalar de 1er orden

$x' = a(t)x + b(t)$, $a, b : J \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas , J abierto

Dominio: $D = J \times \mathbb{R}$



Son ecuaciones lineales en la incógnita x, en t pueden hacer lo que quieran

Si $b \equiv 0$ entonces disponemos de una ecuación lineal homogénea mientras que en otro caso tenemos una ecuación lineal completa

En el caso homogéneo obtenemos una ecuación de variables separadas

$x' = a(t)x \longrightarrow x \equiv 0$ es solución constante

$$\int \frac{dx}{x} = \int a(t)\,dt$$

↳ $x > 0 \Rightarrow \ln x = A(t) + C$, $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$, $t_0 \in J$

$x(t) = e^{C} \cdot e^{A(t)} = k e^{A(t)}$, $k > 0$

↳ $x < 0 \Rightarrow \ln(-x) = A(t) + C$

$x(t) = k \cdot e^{A(t)}$, $k < 0$

Luego las soluciones son de la forma $x(t) = k e^{A(t)}$, $k \in \mathbb{R}$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación con $t < 0$

$$x' = \frac{x}{t}$$

$D =]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$ $\qquad a(t) = \frac{1}{t}$; $A(t) = \ln(-t)$

Luego $x(t) = k e^{\ln(-t)} = -kt$, $k \in \mathbb{R}$, $t \in]-\infty, 0[$

Veamos qué ocurre con la ecuación lineal completa, para ello, tomamos

no es la identidad $\left\{ \varphi : \begin{cases} s = t \\ y = \sigma(t)x \end{cases} \right.$ $\qquad \varphi : \begin{cases} t = s \\ x = \frac{y}{\sigma(t)} \end{cases}$

$\sigma \in \mathcal{C}^1(J)$, $\sigma(t) \neq 0 \ \forall t \in J$

Sabemos que $\varphi : D \longrightarrow D$ y $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$ obteniendo así que disponemos de un difeomorfismo y además un cambio de variable admisible

$$y = \sigma x \Rightarrow y' = \sigma' x + \sigma x = \sigma' x + \sigma(ax+b) \Rightarrow y' = \frac{\sigma'}{\sigma} y + \sigma\left(a\frac{y}{\sigma} - b\right) =$$
$$= \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + a\right) y + b\sigma$$

obtenemos de nuevo una ecuación lineal donde buscamos que $\frac{\sigma'}{\sigma} + a = 0$ para obtener un cálculo de primitivas. Como $\sigma \neq 0$ podemos pensar que la condición es una ecuación diferencial respecto a σ.

$$\sigma' = -a(t)\sigma \longrightarrow \text{ecuación lineal homogénea}$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma(t) = e^{-A(t)}$$

Esto es otra integral

Entonces $y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\sigma(s)\,ds + k = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\,ds + k$

Por tanto, las soluciones son de la forma

$$x(t) = k e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\,ds$$

No aprender, hacer las cuentas mejor

Ejemplo

$x' = \frac{x}{t} + 1$, $D_- =]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$

$y' = \sigma(t)x \Rightarrow y' = \sigma' x + \sigma x' = \sigma' x + \sigma\left(\frac{x}{t} + 1\right) = \sigma' \frac{y}{\sigma} + \sigma\left(\frac{y}{\sigma t} + 1\right)$

$y' = \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{t}\right) y + \sigma;$

$\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow \sigma' = -\frac{\sigma}{t} \Rightarrow \sigma(t) = e^{-\ln(-t)} = \frac{-1}{t}$

$\sigma(t) = \frac{-1}{t}$

$y' = \sigma(t) = -\frac{1}{t} \Rightarrow y(t) = k - \ln(-t) \Rightarrow x(t) = \sigma^{-1}(s)y(t) = -t(k - \ln(-t)),\ t \in]-\infty, 0[$

Ecuación de Riccati

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

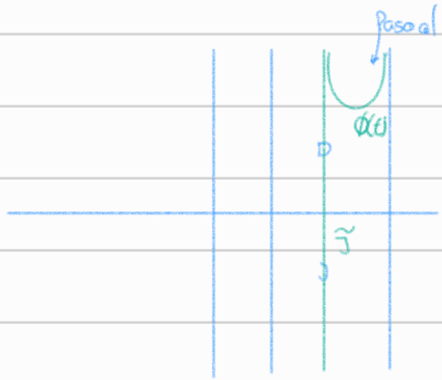
con $a, b, c : J \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas con dominio $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(t,x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$.

El problema con esta ecuación es que no dispone de solución salvo que se conozca $\phi : \tilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ solución de la ecuación. Por ahora supondremos que conocemos dicha función con $\tilde{J} \subset J$

Para obtener todas las soluciones, aplicaremos el siguiente cambio de variable

$$\varphi = \begin{cases} s = t \\ y = \dfrac{1}{x - \phi(t)} \end{cases}$$

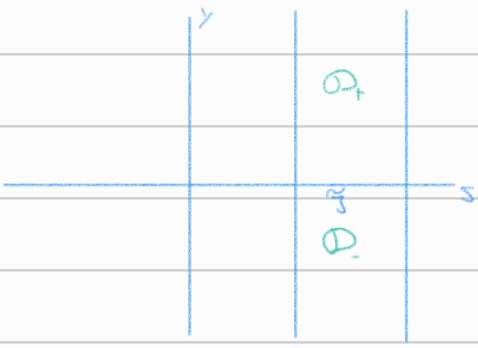
donde, al tomar $x - \phi(t)$ perdemos información de la solución que conocemos provocando que debamos añadirla al final. Gráficamente:



Por tanto, dividimos el dominio en dos

$$D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \tilde{J} \wedge x > \phi(t)\}$$
$$D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \tilde{J} \wedge x < \phi(t)\}$$

Tras aplicar el cambio de variable obtenemos:



Donde

$$\varphi(D_+) = \mathcal{D}_+ = \tilde{J} \times]0, \infty[$$
$$\varphi(D_-) = \mathcal{D}_- = \tilde{J} \times]-\infty, 0[$$

Además, queda claro que φ es de clase $\mathcal{C}^1(D_+)$ y $\mathcal{C}^1(D_-)$ por serlo sus componentes.

Veamos qué ocurre con la función inversa

$$\varphi^{-1}(s,y) = \left(s, \frac{1}{y} + \phi(s)\right)$$

Argumento completo.

Sea $(t,x)\in D_+$, $t\in\tilde{J}$, $x>\phi(t)$ $\Rightarrow$ $s=t\in\tilde{J}$, $x-\phi(t)>0$, $y=\frac{1}{x-\phi(t)}>0$ $\Rightarrow$ $\varphi(D_+)\subseteq D_+$

Sea $(s,y)\in D_+$, $s\in\tilde{J}$, $y>0$ $\Rightarrow$ $t=s\in\tilde{J}$ y dado $y\in\tilde{J}$ defino $x=\frac{1}{y}+\phi(t)>\phi(t)$ luego

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(t,x)=(s,y)\\ (t,x)\in D_+\end{array}\right| \Rightarrow (s,y)\in\varphi(D_+) \Rightarrow D_+\subseteq\varphi(D_+)$$

Veamos ahora qué resulta de hacer el cambio de variable

$$x=\frac{1}{y}+\phi(t)$$

$$\boxed{x'=\frac{-y'}{y^2}+\phi'} \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{y}+\phi\right)^2+b\left(\frac{1}{y}+\phi\right)+c=\frac{a}{y^2}+\frac{2a\phi}{y}+a\phi^2+\frac{b}{y}+b\phi+c=\boxed{\frac{-y'}{y^2}+\phi'}$$

Como ϕ es solución de la ecuación, $\phi'=a\phi^2+b\phi+c$ $\Rightarrow$ $\frac{-y'}{y^2}=\frac{a}{y^2}+\frac{2a\phi}{y}+\frac{b}{y}$ $\Leftrightarrow$ ($y=0$ no está en el dominio)

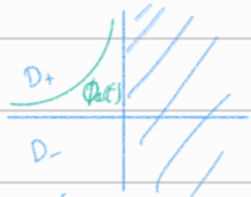
$\Leftrightarrow$ $-y'=a+2a\phi y+by$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{y'=-(2a(t)\phi(t)+b(t))y-a(t)}$ obteniendo una ecuación lineal

No obstante, a esto hay que añadir la solución $\phi(t)=\phi$

Ejemplo

$x'=x^2$ $\quad$ $\phi(t)=0$ $\Rightarrow$ $\varphi:\begin{cases}s=t\\ y=\frac{1}{x}\end{cases}$ $\quad$ Ejercicio

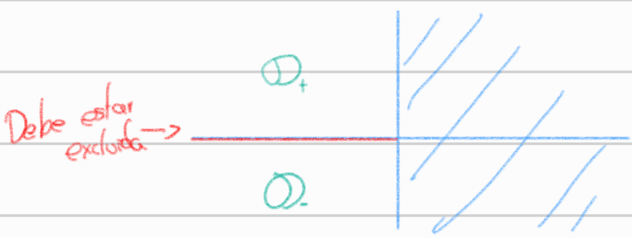
$D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\quad$ $\phi_1(t)=\frac{-1}{t}$ $\longrightarrow$ $\tilde{J}=]-\infty,0[$ (también esta $]0,\infty[$)



$D_+=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t<0,\ x>\frac{-1}{t}\}$

$D_-=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t<0,\ x<\frac{-1}{t}\}$

$$\varphi=\begin{cases}s=t\\ y=\frac{1}{x-\phi(t)}=\frac{1}{x+\frac{1}{t}}\end{cases} \quad \text{ó} \quad x=\frac{1}{y}+\phi(t)=\frac{1}{y}-\frac{1}{t}$$ dando como resultado



$D_+=]-\infty,0[\times]0,\infty[$

$D_-=]-\infty,0[\times]-\infty,0[$

$$x'=-\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{t^2};\quad x'=x^2=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{t}\right)^2=\frac{1}{y^2}-\frac{2}{ty}+\frac{1}{t^2};\quad \frac{-y'}{y^2}+\cancel{\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{y^2}-\frac{2}{ty}+\cancel{\frac{1}{t^2}}$$

luego $\frac{-y'}{y^2}=\frac{1}{y^2}-\frac{2}{ty}$ $\Leftrightarrow$ $y'=\frac{2}{t}y-1$ $\longrightarrow$ Ecuación lineal

Debemos ahora resolver la ecuación lineal con otro cambio de variable

donde $\sigma(t)z = y \Rightarrow y' = \sigma' z + \sigma z' \Leftrightarrow \sigma z' = \left(\frac{2\sigma}{t} - \sigma'\right) z - 1$

$x' = a(t)x$
↳ sol. $e^{A(t)}$

Buscamos que $\left(\frac{2\sigma}{t} - \sigma'\right) = 0$, o lo que es lo mismo, $\frac{2\sigma}{t} = \sigma'$ luego $A(t) = 2\ln(-t) = \ln(t^2)$

entonces $\sigma(t) = e^{\ln(t^2)} = t^2$. Entonces:

vamos para atrás

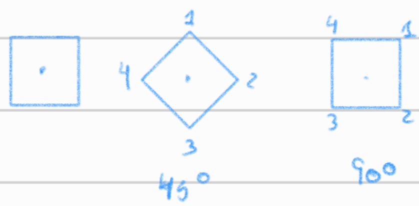
$$t^2 z' = -1 \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow z(t) = \frac{1}{t} + k \;, k \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = t + kt^2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{t + kt^2} - \frac{1}{t} \; k \in \mathbb{R}$$

Habría que ver donde está cada solución definida; además añadimos $x(t) = \frac{-1}{t}$

Sophus Lie

Trabajó la relación entre ec. diferenciales y teorías de grupos buscando asociar un grupo a cada ecuación diferencial

Misión de los grupos detectar simetrías (grupo de transformaciones que dejan invariante):



Algunas relaciones son invariantes con respecto al cuadrado causando un grupo de 4 permutaciones ordenadas de los vértices

Sea $x' = f(t,x)$ ecuación diferencial definida en un dominio D buscando que al aplicarlo obtengamos el mismo dominio

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad\qquad \frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$$

donde diremos que la ecuación diferencial es invariante por φ; no obstante, las soluciones sí que se permutan; pero $\hat{f}(s,y)=f(t,x)$ $\forall (s,y)\in D$

Ejemplo

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{3x^2+1} \quad \text{con } \varphi: \begin{cases} s=-t \\ y^3+y=x^3+x+8 \end{cases}$$

Suponiendo que φ es un cambio de variable bien hecho y sabiendo que el dominio de la ecuación es $D=\mathbb{R}^2$ y $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ admisible (se demostrará más tarde).

Veamos que sí ocurre la invarianza mediante cálculos formales legítimos suponiendo que φ es difeomorfismo admisible

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{-dy}{dt}=\frac{-t}{3y^2+1}=\frac{s}{3y^2+1}$$

$$3y^2y'+y'=3x^2x'+x' \; ; \; (3y^2+1)y'=(3x^2+1)x'=t$$

Donde la nueva ecuación es: $\boxed{\frac{dy}{ds}=\frac{s}{3y^2+1}=\hat{f}(s,y)}$, luego se cumple la simetría

Veamos que φ define un cambio de variable admisible.

Para ello, defino $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\sigma(\alpha)=\alpha^3+\alpha$ derivable ($\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$) con derivada $\sigma'(\alpha)=3\alpha^2+1>0$ luego estr. creciente inyectiva y sobreyectiva ya que $\lim_{\alpha\to\pm\infty}\sigma(\alpha)=\pm\infty$, σ continua luego es biyectiva con inversa derivable pues la derivada es >0 luego podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa.

Entonces, es un difeomorfismo en $\mathbb{R}$

$$\sigma(y)=\sigma(x)+8 \iff y=\sigma^{-1}(\sigma(x)+8)$$

No simplificar pues σ no es lineal

Luego φ define $\varphi(t,x)=(s,y)$ tal que $s=-t$ $y=\sigma^{-1}(\sigma(x)+8)$

Veamos φ^{-1}

$$\varphi^{-1}=\begin{cases} t=-s \\ x=\sigma^{-1}(\sigma(y)-8) \end{cases}$$

y por la misma razón $\varphi^{-1}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

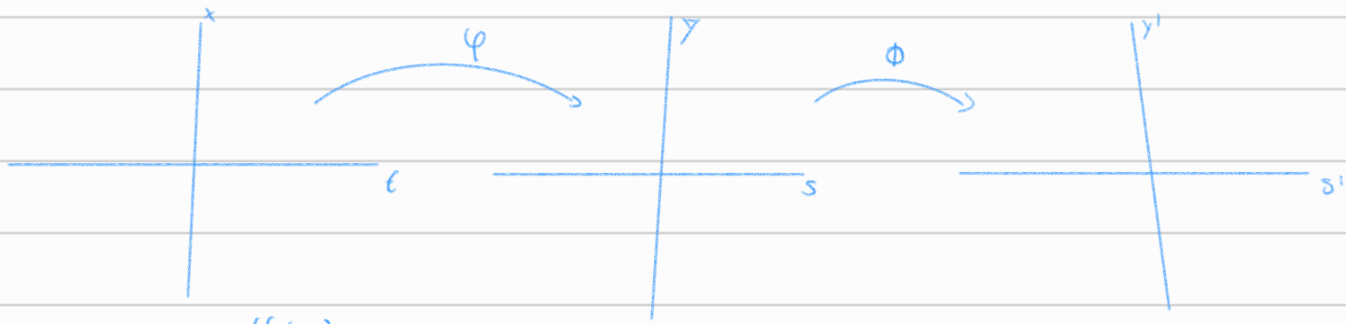
Por tanto, φ es un difeomorfismo admisible pues:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot f = -1 \neq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2.$$

Grupos conocidos

Sea **Diff($\mathbb{R}^2$)** el grupo de todos los difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$Diff(\mathbb{R}^2) = \{ \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ / \ \varphi \text{ difeomorfismo} \}$$



$\varphi, \phi \in Diff(\mathbb{R}^2)$, donde la ley de composición interna es la composición preservando que como φ diff $\Rightarrow \varphi^{-1}$ diff $\Rightarrow (\phi \circ \varphi)^{-1}$ diff. En resumen:

i) $\phi, \varphi \in Diff(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \phi \circ \varphi \in Diff(\mathbb{R}^2)$
ii) Asociativa se cumple $\Rightarrow (\phi \circ \varphi) \circ \varphi \in Diff(\mathbb{R}^2)$
iii) Elemento neutro $\Rightarrow Id(t,x) = (t,x)$
iv) Inverso $\Rightarrow$ por definición de difeomorfismo

Algunos subgrupos son:

-> TRASLACIONES: sea $v \in \mathbb{R}^2$ fijo, $v = (v_1, v_2)$ y desplazamos según ese vector.

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s = t + \lambda v_1 \\ y = x + \lambda v_2 \end{cases} \iff \varphi_\lambda^{-1} = \begin{cases} t = s - \lambda v_1 \\ x = y - \lambda v_2 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sea ahora $\mathcal{G} = \{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, es decir, la amplitud de la traslación varía según λ y afirmamos que es un grupo subconjunto de los difeomorfismos.

i) Ser cerrado para la operación (ley interna) $\equiv g_1, g_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow g_1 \circ g_2 \in \mathcal{G}$

ii) Ser cerrado para inversos $\equiv g \in \mathcal{G} \Rightarrow g^{-1} \in \mathcal{G}$

De hecho, esta familia dispone de la siguiente propiedad.

$$\varphi_{\lambda+\mu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ya que

$$\varphi_{\lambda+\mu}(t,x) = (t + (\lambda+\mu)v_1,\ x + (\lambda+\mu)v_2) = ((t+\lambda v_1) + \mu v_1,\ (x+\lambda v_2) + \mu v_2) = \varphi_\mu(t+\lambda v_1,\ x+\lambda v_2) =$$
$$= \varphi_\mu(\varphi_\lambda(t,x))$$

De esta propiedad se cumplen las propiedades i) y ii) que nos prueba que $\mathcal{G}$ es un subgrupo conmutativo

→ HOMOTECIAS (dilata o contrae): son de la forma $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\varphi_\lambda = \begin{cases} s = \lambda t \\ y = \lambda x \end{cases}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$

que claramente es un difeomorfismo

Veamos que $\mathcal{G} = \{\varphi_\lambda \mid \lambda > 0\}$ forma un subgrupo; lo cual veremos gracias a la siguiente propiedad

$$\varphi_{\lambda\cdot\mu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu$$

que tiene la misma demostración y permite probar que se cumplen i) y ii)

Este grupo traslada sólo en la recta $y = x$ con $x > 0$

→ ROTACION: son de la forma $\varphi_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\theta \in \mathbb{R}$

con matriz de rotación $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ giro antihorario

Veamos que $\mathcal{G} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ es un grupo haciendo uso de la siguiente propiedad

$$R_{\theta+\omega} = R_\theta \circ R_\omega \qquad \text{donde } \theta, \omega \in \mathbb{R}$$

de la cual se deduce la veracidad de las propiedades i) y ii) obteniendo que G es un subgrupo de $Dif(\mathbb{R}^2)$

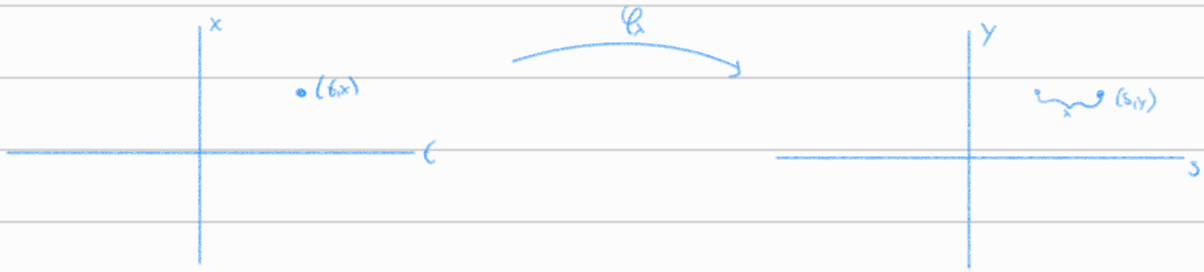
Relación de estos grupos con las ecuaciones diferenciales

Consiste normalmente en encontrar las ecuaciones diferenciales invariantes por estos grupos.

sería análogo para los demás (con más cálculos)

i) Traslaciones horizontales: tomamos $v=(1,0)$ obteniendo el cambio de variable

$$\varphi_\lambda = \begin{cases} s = t+\lambda \\ y = x \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



Partimos de la ecuación $x' = f(t,x)$ definida $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquiera que tras aplicar el cambio deberemos obtener

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}_\lambda(s,y) \quad \text{con la intención de} \quad \hat{f}_\lambda(s,y) = f(s,y)$$

La primera observación es que siempre son admisibles, haciendo las cuentas:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt}\cdot 1 = f(t,x) \Leftrightarrow \underbrace{\frac{dy}{ds} = f(s-\lambda, y)}_{\text{nueva ecuación}}$$

Por tanto, $\frac{dy}{ds} = \hat{f}_\lambda(s,y) = f(s-\lambda,y)$ (Aquí y no es $y(s)$, pensamos en ecuación)

Lo que buscamos es que sea invariante por todas las traslaciones, es decir, debe cumplirse la condición:

$$f(s-\lambda,y) = f(s,y) \quad \forall \lambda, s, y$$

Geométricamente vemos que son funciones que tienen el mismo valor de y para todo valor de s luego son funciones que sólo dependen de x (al aplicar el cambio, no aparece t)

Estudiar las que son invariantes por (tras) verticales $\longrightarrow$ debe salir cálculo de primi

ii) HOMOTECIAS: disponemos ahora de $\lambda>0$ y $\varphi_\lambda = \begin{cases} s=\lambda t \\ y=\lambda x \end{cases}$ un difeomorfismo admisible (homotecia) con $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ admisible.

$x' = f(t,x)$ continua en $\mathbb{R}^2$

hacemos el cambio de variable con la misma idea que para traslaciones.

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \lambda x' \frac{1}{\lambda} = x' = f(t,x) \iff \frac{dy}{ds} = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = \hat{f}_\lambda(s,y)$$

para que sea invariante:

$$f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = \hat{f}_\lambda(s,y) \quad \forall \lambda, s, y \quad \text{luego} \quad f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = f(s,y) \quad \forall \lambda > 0$$

que sean ecuaciones homogéneas, es decir, $P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^g P(t,x)$ donde $g=0$

luego son las ecuaciones homogéneas de grado 0; son funciones que sólo dependen de la pendiente del punto.

De hecho, las homotecias dejan invariantes las ecuaciones homogéneas.

Estudiar lo mismo con rotaciones