1. Muestra que cualquier esfera de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, es arcoconexa con la topología usual.

Procedemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$

<u>$n=2$</u>

En este caso, tal y como vimos en los apuntes $B(0,1)$ es arcoconexa por ser estrellad

Procedemos ahora por inducción, dado $n \in \mathbb{N}$ y supuesto cierto para $n-1$ buscamos probar que $B^n(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es arcoconexa.

Para ello, dado el punto central $0 \in B^n(0,1)$, es claro que, si denotamos por $B^{n-1}(0,x)$ a la bola de centro cero de dimensión anterior, es decir, la siguiente situación

tenemos que $B^n(0,1) = \bigcup_{x \in B(0,1)} B^{n-1}(0,x)$ y para poder argumentar que eso es así, basta considerar $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ y en cuyo caso, ya es claro que $B^n(0,1) = \bigcup_{x \in \Omega} B^{n-1}(0,x)$.

Entonces $B^n(0,1)$ es unión de arcoconexos que intersecan en una recta y en concreto en un punto luego $B^n(0,1)$ es arcoconexa.

Como cualquier esfera es homeomorfa a la bola unidad tenemos lo que queremos

2. Demuestra que si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de arcoconexos de X tales que todos intersecan a uno de ellos, es decir,

$$A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \quad \forall i \in I,$$

entonces $\cup_{i \in I} A_i$ es arcoconexo.

Procedemos por inducción sobre el cardinal de I dando por hecho que $A_{i_0} \in \{A_i\}_{i \in I}$ desde el primer momento, pues en caso contrario $A_i \cap A_j = \emptyset$ puede ocurrir.

Paso base $n = \#I = 1$: Como A_i es arcoconexo para todo $i \in I$ tenemos el resultado.

Para $n=2$; ya vimos que la intersección de arcoconexos es arcoconexa.

Procediendo por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ y dando por cierto el caso $n-1$ tenemos que $\bigcup_{i \in I \setminus \{i_{n}\}} A_i$ es arcoconexa y que $\left(\bigcup_{i \in I \setminus \{i_n\}} A_i\right) \cap A_{i_{n}} \neq \emptyset$ luego, por lo visto en clase tenemos que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es arcoconexa.

3. Sea X un conjunto, $x_0 \in X$, y consideremos la topología (del punto incluido) dada por

$$T = \{U \subset X : \ x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

¿Es (X,T) arcoconexo?

Veamos que sí es arcoconexo pues dado $x \in X$, sabemos que $\{x_0, x\} \in T_{x_0}$. Por tanto, si definimos la siguiente aplicación

$$\alpha: [0,1] \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto x_0 \text{ si } 0 \leq t < 1/2$$

$$t \longmapsto x \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1$$

tenemos que es continua pues $\alpha^{-1}(\{x_0, x\}) = [0,1]$ $\forall x \in X$ luego tenemos un arco entre cuales quiera dos puntos usando x_0 como pivote

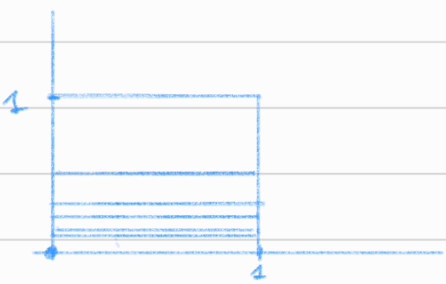
4. Demuestra que en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, todo abierto conexo es arcoconexo. ¿Es cierto que todo cerrado conexo de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo?

Basta dar un contraejemplo para ver que lo anterior es falso, recordando la gráfica de la funcion $f(x) = \cos 1/x$ pues tomando $A = graf(\cos(1/x)) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ tenemos un conexo cerrado que no es arcoconexo y se ha visto en clase.

Para ver lo primero, basta saber que $\{B(x,\varepsilon) : x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}$ forman una base y $B(x,\varepsilon)$ es arcoconexa $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0$ por el ejercicio 1 entonces; como todo abierto es unión de abiertos básicos tenemos que las componentes conexas del abierto en cuestión son arcoconexas. Pero como el abierto de partida era conexo sólo tiene una componente conexa y entonces es arcoconexo.

5. Prueba que la componente arcoconexa de un punto x_0 está contenida en la componente conexa de x_0.

Sea X un e.t y $x_0 \in X$, tomamos A la componente arcoconexa de x_0, como A es arcoconexo entonces, en particular, A es conexo. Como, dado $B \subset X$, $x_0 \in B$, componente conexa de x_0, como B es la más grande tenemos que $A \subseteq B$, para ver que no necesariamente se cumple la igualdad basta considerar el siguiente contraejemplo



$(0,0)$ es una comp. arcoconexa pues ya vimos que el conjunto no era arcoconexo. La otra es $X \setminus \{(0,0)\}$

La componente conexa de $(0,0)$ es X pues es un e.t. conexo.

6. En $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey, esto es, la topología que tiene como base

$$\mathcal{B}_S = \{[a,b) \subset \mathbb{R} : \ a < b\},$$

determina sus componentes arcoconexas.

En este caso, diría que las componentes arcoconexas son los puntos aislados pues los abiertos básicos ni siquiera son conexos pues, por ejemplo, $[0,2)=[0,1)\cup[1,2)$ luego los únicos arcoconexos son los puntos aislados.

7. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo entre espacios topológicos. Demuestra que $A \subset X$ es una componente arcoconexa de X si y solo si $f(A)$ es una componente arcoconexa de Y. Deduce que el número de componentes arcoconexas es invariante por homeomorfismos.

En caso de tener hecha la equivalencia tendríamos demostrada la deducción.

$\Rightarrow]$ Sea A una componente arcoconexa de X, como ser arcoconexo se mantiene por homeomorfismos tenemos que $f(A)$ es arcoconexo; supongamos que $\exists B \in f(X) \mid f(A) \subset B$ (comp. arcoconexa de $f(X)$) y $B \neq f(A)$; en ese caso, $\exists y \in B \setminus f(A)$ tal que $f(a)$, $a \in A$ se une con y mediante un arco $\alpha : [0,1] \to B$ en cuyo caso tenemos que $f^{-1}(y) \in X$ y $f^{-1}(y)$ se une con a por el arco $f^{-1} \circ \alpha$ luego $f^{-1}(y) \notin A$ pues, en ese caso, $y \in f(A)$!. Luego $f(A) = B$.

$\Leftarrow]$ Es esencialmente análogo pues f^{-1} vuelve a ser un homeomorfismo

8. En $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ se considera la topología que tiene por base

$$\beta = \{]a,b[\times \{0,1\} / \ a < b\}.$$

Demuestra que X es arcoconexo. ¿Es X homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología usual?

Dados dos puntos x e y si están en la misma recta podemos considerar la T_u pues es la inducida. En ese caso:

$$\alpha(t) = ((1-t)x_1 + ty_1, 0)$$

Que claramente es continua.

Buscamos encontrar una curva continua que una $x=(0,0)$ y $y=(0,1)$ consideramos

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (0,1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

que es continua pues tomando $B = (a,b) \times \{0,1\} \in \beta$ $\alpha^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin (a,b) \\ [0,1] & \text{si } 0 \in (a,b) \end{cases}$.

Luego X es arcoconexo.

No es homeomorfo porque no es Hausdorff, es decir, dados dos puntos no siempre los puedo separar

9. En $\mathbb{R}^3$ con la topología usual, calcula las componentes arcoconexas de

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ xyz = 1\}.$$

La condición puede escribirse como:

$$xy = \frac{1}{z} \iff xz = \frac{1}{y} \iff yz = \frac{1}{x}$$

Esta condición, además de decirnos que $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ nos dice también que solo puede darse el caso de que dos de ellos sean negativos. Por tanto, si pruebo que $A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, x>0, y>0, z>0\}$ es arcoconexo tendré que hay 4 componentes conexas que son; A_1 y las siguientes: $\leftarrow A_1 \cong A_2 \cong A_3 \cong A_4$

$$A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz=1, \ x>0, y<0, z<0\}$$

$$A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz=1, \ x<0, y<0, z>0\}$$

$$A_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz=1, \ x<0, y>0, z<0\}$$

Para ver que A_1 es arcoconexo basta saber que es homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$ que es arcoconexo y de hecho convexo. El homeomorfismo es el siguiente gracias a que la función $f(x,y,z) = xyz - 1 \ \forall x,y,z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es inyectiva:

$$g: A_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x,y)$$

Por tanto, las componentes arcoconexas son las que buscábamos

10. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual consideremos las rectas horizontales $A_n = \mathbb{R} \times \{1/n\}$, $B_n = \mathbb{R} \times \{-1/n\}$ y el eje de ordenadas menos el origen, esto es, $C = \{0\} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Calcula las componentes conexas y arcoconexas de

$$X = \left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cup C \cup \{(1,0)\}.$$

Es similar a un ejemplo visto en clase