ÍNDICE

TEMA 8. VECTOR GRADIENTE

1. Derivadas direccionales

Establezcamos la siguiente notación: X, Y espacios normados, $A = \mathring{A} \subset X$, $f: A \to Y$, $a \in A$.

Sabemos que si $\boxed{f \text{ es diferenciable en } a \Rightarrow Df(a)(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \ \forall u \in X}$

Para saber si f es diferenciable en a podríamos estudiar estos límites:

Si $v = \lambda u$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces:

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = y \in Y \iff \lim_{s \to 0} \frac{f(a+sv) - f(a)}{s} = \lambda y}$$

Además, podemos suponer $\|u\| = 1$.

Veamos la definición de derivada direccional:

Dirección en X: vector $u \in X$ con $\|u\| = 1$. $S = \{u \in X : \|u\| = 1\}$. Fijamos $r \in \mathbb{R}^+$ con $B(a, r) \subset A$ y $\forall u \in S$ definimos:

$\varphi_u :]-r, r[\to Y$, $\varphi_u(t) = f(a+tu)$ $\forall t \in]-r, r[$.

Diremos que f es derivable en la dirección de u en el punto a cuando φ_u es derivable en 0.

Entonces, la derivada direccional de f en a, en la dirección u es:

$$\boxed{f_u'(a) = \varphi_u'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_u(t) - \varphi_u(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}}$$

$\exists f_u'(a) \iff \exists f_{-u}'(a) \Rightarrow f_{-u}'(a) = -f_u'(a)$

f es direccionalmente derivable en a cuando es derivable en a, en la dirección u $\forall u \in S$

Como relación derivabilidad-diferenciabilidad; si f es diferenciable en $a \Rightarrow f$ es direccionalmente derivable en a y $\forall u \in S$ ✓ $f_u'(a) = Df(a)(u)$

2. Derivadas parciales

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ campo escalar

Sea $A = A^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $\beta = \beta_0$, Y esp. normado, $f: A \to Y$, $a \in A$, $k \in \Delta_N$. Cuando f es derivable en a en la dirección e_k decimos que es derivable respecto a la k-ésima variable en el punto a y la k-ésima derivada parcial de f en a se define por

Nosotros tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_N) = \lim_{x \to x_k} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_N)}{x - x_k}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f_{e_k}'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t e_k) - f(a)}{t}}$$

f es parcialmente derivable en a cuando esto ocurre $\forall k \in \Delta_N$, luego tenemos N derivadas parciales de f en a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \in Y$$

Sabemos entonces que si f es diferenciable en $a \Rightarrow f$ es parcialmente derivable en a y $\forall k \in \Delta_N$ $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = Df(a)(e_k)$

2.1 Derivadas parciales de un campo vectorial

Sea $f = (f_1, \dots, f_m): A \longrightarrow \mathbb{R}^m$; diremos que f es parcialmente derivable con respecto a la k-ésima variable en a sii lo es f_j $\forall j \in \Delta_m$, en cuyo caso:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) \right) \in \mathbb{R}^m$$

Luego f es parcialmente derivable en a sii lo es f_j $\forall j \in \Delta_m$

2.2 Derivadas parciales de campos escalares

Como notación alternativa, para $t \in \mathbb{R}$ y $k \in \Delta_N$, $a + t e_k = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_N)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t e_k) - f(a)}{t} = \alpha \in \mathbb{R} \iff \lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, \dots, x_k, a_{k+1}, \dots, a_N) - f(a)}{x_k - a_k} = \alpha$$

Esto es lo que usamos nosotros en las prácticas

Si f es parcialmente derivable en a, se tiene:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_N) - f(a)}{x_k - a_k} \quad \forall k \in \Delta_N}$$

2.3. Derivada parcial en un abierto

Vamos a definir la función derivada parcial, siempre la misma casuística, en este caso f es campo escalar.

f parcialmente derivable con respecto a la k-ésima componente cuando lo es en todo punto $x\in A$.

Entonces la función $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ de A en $\mathbb{R}$ es la k-ésima función derivada parcial de f.

Para $x=(x_1,\dots,x_k,\dots,x_N)\in A$ se tiene $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_k,\dots,x_N)$

Como práctica, cuando se piden las derivadas parciales respecto a una variable, dicha variable (si existen) es la única que cambian, las demás son constantes.

3. Vector gradiente

Supongamos $f:A\to\mathbb{R}$, $A=\mathring{A}\subset\mathbb{R}^N$ parcialmente derivable en $a\in A$. Definimos el gradiente de f en a como el vector $\nabla f(a)\in\mathbb{R}^N$ definido por:

$$\nabla f(a)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,e_k=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\right)$$

Proposición

Sea $A=\mathring{A}\subset\mathbb{R}^N$, $f:A\to\mathbb{R}$, $a\in A$. Son equivalentes:

(i) f es diferenciable en a.

(ii) f es parcialmente derivable en a y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-(\nabla f(a)\mid x-a)}{\|x-a\|}=0$

Entonces $Df(a)=(\nabla f(a)\mid x-a)$

Otra forma de relacionar la diferencial y el gradiente es usando en $\mathbb{R}^N$ la norma euclídea. Fijado $y\in\mathbb{R}^N$, definimos

$$T_y:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto(y\mid x)\qquad\forall x\in\mathbb{R}^N.$$

Entonces $T_y\in L(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ con $\|T_y\|=\|y\|$

Si ahora definimos $\Phi:\mathbb{R}^N\longrightarrow L(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, $y\longmapsto T_y$ $\forall y\in\mathbb{R}^N$, podemos ver que Φ es lineal, biyectiva, y preserva la norma; por tanto, $\mathbb{R}^N\equiv L(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$

3.1. De las derivadas parciales a la diferencial.

Condición suficiente de diferenciabilidad.

Sea $f:A\to\mathbb{R}$, $a\in A$, $k\in\Delta_N$. Supongamos que:

(i) f derivable con respecto a la k-ésima variable en a: $\exists\,\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

(ii) $\forall j\in\Delta_N\setminus\{k\}$, f es derivable con respecto a la j-ésima variable, y la función $\frac{\partial f}{\partial x_j}:A\to\mathbb{R}$ es continua en a:

$\forall j \in \Delta_N \setminus \{n\}$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ $\forall x \in \delta$ y $\lim_{x \to a} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

Si (i) y (ii) $\Rightarrow f$ es diferenciable en el punto a

3.2. Campos escalares de clase C^1

Si $f: A \to \mathbb{R}$ es parcialmente derivable, definimos la función gradiente como sigue:

$$\nabla f: A \to \mathbb{R}^N, \quad x \longmapsto \nabla f(x) \quad \text{cuyas componentes son:} \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$$

Como caracterización, son equivalentes:

(i) $f \in C^1(A)$

(ii) f es parcialmente derivable en A y $\nabla f \in C(A, \mathbb{R}^N)$

(iii) f es parcialmente derivable en A y $\frac{\partial f}{\partial x_n} \in C(A)$ $\forall n \in \Delta_N$

4. Interpretación física y geométrica

4.1. Interpretación física del gradiente

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ direccionalmente derivable en $a \in A$ fijo.

- Derivadas direccionales: $f_u'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$ $\forall u \in S$

$f_u'(a)$ es la tasa de variación del campo por unidad de longitud en la dirección y sentido del vector u.

Si f es diferenciable en a con $\nabla f(a) \neq 0$ y $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$: $f_u'(a) = (\nabla f(a) \mid u) \leq \|\nabla f(a)\| = f_v'(a)$ $\forall u \in S$

En la dirección y el sentido del vector gradiente, el campo aumenta lo más rápidamente posible, a razón de $\|\nabla f(a)\|$ unidades de campo por unidad de longitud. En el sentido opuesto, disminuye lo más rápidamente posible.

$$\nabla f(a) = 0 \Rightarrow f_u'(a) = 0 \ \forall u \in S$$

a es un punto crítico o estacionario del campo f.

4.2. Interpretación geométrica

Trabajamos en $\mathbb{R}^2$ y tomamos una función $f: A \to \mathbb{R}$ continua:

- Superficie explícita $\sigma = \mathcal{G}r(f) = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in A\} \subset \mathbb{R}^3$
- Ec. explícita: $z=f(x,y)$ $\quad (x,y)\in A$

Podemos tomar como variable dependiente otra y generar la misma superficie girada.

Supongamos que f es diferenciable en $(x_0,y_0)\in A$ y sean $z_0=f(x_0,y_0)$, $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\sigma$

$\alpha_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\beta_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

$\pi \equiv \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z-z_0 = \alpha_0(x-x_0)+\beta_0(y-y_0)\}$ es el plano tangente a la superficie σ en el punto P_0

$(\alpha_0,\beta_0,-1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$ es un vector normal a la superficie σ en el punto P_0

5. Extremos absolutos y relativos

Sea $\emptyset\neq A$, $f: A\to\mathbb{R}$, $a\in A$. Diremos que:

- f tiene en a un máximo absoluto, cuando $f(a)\geq f(x)$ $\forall x\in A$
- f tiene en a un mínimo absoluto, cuando $f(a)\leq f(x)$ $\forall x\in A$

extremo absoluto = máximo absoluto o mínimo absoluto

5.1. Extremos relativos

Sea E esp. métrico, $\emptyset\neq A\subset E$, $f: A\to\mathbb{R}$, $a\in A^\circ$. Diremos que f tiene un máximo relativo en a cuando $\exists r\in\mathbb{R}^+ \mid B(a,r)\subset A$ y $f(a)\geq f(x)$ $\forall x\in B(a,r)$. Análogamente mínimo relativo.

Extremo relativo = máximo relativo o mínimo relativo.

Relativo $\not\Rightarrow$ absoluto

absoluto $\not\Rightarrow$ relativo $[(a\in A^\circ)!]$

5.2. Puntos críticos de un campo escalar

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$ y $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f tiene un extremo relativo en un punto $a \in A^\circ$ y es parcialmente derivable en el punto $a \Rightarrow \nabla f(a) = 0$

Cuando f es parcialmente derivable en $a \in A^\circ$ y $\nabla f(a) = 0$, se dice que f tiene en a un punto crítico.