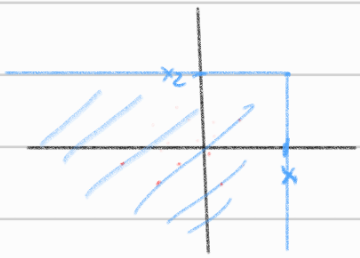
Tema 2 Vectores aleatorios

2.1 σ-Álgebra de Borel

Definimos la σ-álgebra de Borel como la mínima σ-álgebra que contiene todos los intervalos de $\mathbb{R}^n$ y la denotaremos por $\mathcal{B}^n$.

En particular, se puede generar a partir de todos los intervalos de la forma

$$(-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_n] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$



2.2. Vector aleatorio

Un vector aleatorio $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sobre un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se define como una función

$$\underline{X} \quad (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

dada por $\quad \underline{X}^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}^n$

Caracterización I

Diremos que $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ es un vector aleatorio sii

$$\underline{X}^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \,/\, \underline{X}(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \,/\, X_1(\omega_1) \leq x_1; \dots ; X_n(\omega_n) \leq x_n\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(producto)

↪ son los elementos que están por debajo del área

donde, si $u = (u_1, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, \dots, v_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ $\;u \leq v$ sii $u_i \leq v_i \;\forall i \in \Delta_n$

Caracterización II

De la misma manera $\underline{X}$ será vector aleatorio sii $\underline{X}_i$ es variable aleatoria $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

2.2.1. Distribución de probabilidad de un vector aleatorio

Dado $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio $\underline{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, se denomina función de probabilidad a la aplicación

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\underline{X}} \mathcal{B}^n \xrightarrow{P} [0,1]$$

$$P_{\underline{X}} : \mathcal{B}^n \longrightarrow [0,1] \qquad P \circ \underline{X} = P_{\underline{X}}$$

cumpliendo que

$$P_{\mathbb{X}}(B) = P[\omega\in\Omega \mid \mathbb{X}(\omega)\in B] = P[\mathbb{X}\in B] \qquad \forall B\in\mathcal{B}^n$$

Luego de aquí deducimos que $\mathbb{X}$ transforma $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbb{X}})$ donde el interés se centra en estudiar el nuevo espacio, es decir, en el estudio de $P_{\mathbb{X}}$

Teorema

$P_{\mathbb{X}}$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

Función de distribución

Dado $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ vector aleatorio, definimos la función de distribución como

$$F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$$

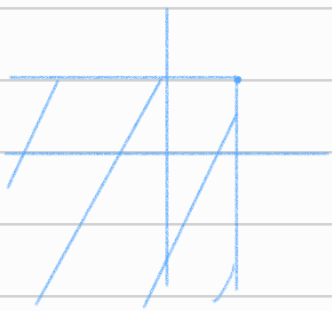
tal que

abreviando

$$\boxed{F_{\mathbb{X}}(x) = P_{\mathbb{X}}[(-\infty, x]] = P[\mathbb{X}\in(-\infty,x]]} = P(\mathbb{X}\leq x)$$

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = P[\mathbb{X}_1\leq x_1, \mathbb{X}_2\leq x_2, \dots, \mathbb{X}_n \leq x_n]$$

Intuitivamente en $\mathbb{R}^2$:



Propiedades

Para que $F_{\mathbb{X}}$ sea función de distribución, bastará probar que cumple las siguientes propiedades:

i) Es monótona no decreciente en cada argumento

$$\forall i\in\{1, \dots, n\}, \ \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in\mathbb{R} \wedge x_i \leq x_i' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \leq F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_n)$$

ii) Es continua a la derecha en cada argumento

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\lim_{x_i' \to x_i^+} F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_n) = F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

iii) $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$

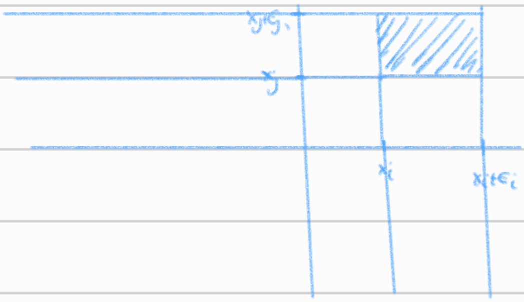
$$\lim_{x_i \to -\infty} F_X(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = F_X(\infty, \infty, \dots, \infty, \dots, \infty) = 1$$

iv) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n_+$ se verifica:

$$F_X(x_1+\epsilon_1, \dots, x_n+\epsilon_n) - \sum_{i=1}^{n} F_X(x_1+\epsilon_1, \dots, x_{i-1}+\epsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1}+\epsilon_{i+1}, \dots, x_n+\epsilon_n)$$
$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F_X(x_1+\epsilon_1, \dots, x_{i-1}+\epsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1}+\epsilon_{i+1}, \dots, x_{j-1}+\epsilon_{j-1}, x_j, x_{j+1}+\epsilon_{j+1}, \dots, x_n+\epsilon_n) + \dots +$$
$$(-1)^n F_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$ porque lo quito 1 vez más del requerido

De forma intuitiva buscamos conseguir la probabilidad de intervalos que sean resta de dos:



Cabe resaltar que las propiedades hasta ahora vistas caracterizan la función de distribución de vectores aleatorios. Además, toda función que las cumple es la función de distribución correspondiente a un vector aleatorio.

2.2.2. Teorema de correspondencia

Existe una correspondencia biunívoca entre las funciones de probabilidad P_X sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ y las funciones $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ que satisfacen las propiedades vistas. Dicha correspondencia está determinada por la relación

$P_X[(-\infty, x]] = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ → Definición de función de distribución junto a lo que hay encima justo.

Más concretamente:

i) Si $P_{\mathbb{X}}$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, la función $F_{\mathbb{X}}: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ tal que $F(x) = P_{\mathbb{X}}[(-\infty, x]]$ satisface las propiedades vistas

ii) Recíprocamente, si $F_{\mathbb{X}}: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ satisface las propiedades $\Rightarrow \exists ! P_{\mathbb{X}}$ sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ verificando

$$\boxed{P_{\mathbb{X}}[(-\infty, x]] = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n}$$

↳ Toda función de distribución modela de forma única a su distribución

Corolario

a. La distribución de probabilidad de un vector aleatorio determina y es determinada por su función de distribución.

b. Las propiedades vistas caracterizan a las funciones de distribución. Toda función que las cumpla es la función de distribución de un vector aleatorio

Cálculos de probabilidades en intervalos bidimensionales

▷ $P[a \le \mathbb{X}_1 \le b, \mathbb{X}_2 \in I] = P[\mathbb{X}_1 \le b, \mathbb{X}_2 \in I] - P[\mathbb{X}_1 < a, \mathbb{X}_2 \in I]$

▷ $P[a < \mathbb{X}_1 \le b, \mathbb{X}_2 \in I] = P[\mathbb{X}_1 \le b, \mathbb{X}_2 \in I] - P[\mathbb{X}_1 \le a, \mathbb{X}_2 \in I]$

▷ $P[\mathbb{X}_1 \le b, c \le \mathbb{X}_2 \le d] = P[\mathbb{X}_1 \le b, \mathbb{X}_2 \le d] - P[\mathbb{X}_1 \le b, \mathbb{X}_2 < c]$

▷ $P[\mathbb{X}_1 \le b, c < \mathbb{X}_2 \le d] = P[\mathbb{X}_1 \le b, \mathbb{X}_2 \le d] - P[\mathbb{X}_1 \le b, \mathbb{X}_2 \le c]$

2.3 Vectores aleatorios discretos

Diremos que un vector aleatorio es discreto si su conjunto de posibles valores es numerable, es decir,

Espacio muestral

$\exists \mathcal{E}_{\mathbb{X}} \subset \mathbb{R}^n$ numerable $\mid$ $\boxed{P_{\mathbb{X}}(\mathcal{E}_X) = P[\mathbb{X} \in \mathcal{E}_X] = 1}$

Dado ahora $\mathcal{E}_{\mathbb{X}} \subset \mathbb{R}^n$ conjunto de valores del vector, definimos la función masa de probabilidad como sigue

$$P_{\mathbb{X}}: \mathcal{E}_X \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto P[\mathbb{X}_1 = x_1, \ldots, \mathbb{X}_n = x_n]$$

que satisface las siguientes propiedades

i) $P[\mathbb{X} = x] \ge 0 \quad \forall x \in \mathcal{E}_X$

ii) $\sum_{x\in \mathcal{E}_X} P[X=x]=1$

Caracterización

Toda colección numerable de números no negativos de suma 1 constituye la función masa de probabilidad de algún vector aleatorio n-dimensional de tipo discreto

Definimos ahora la función de distribución de un vector aleatorio discreto como sigue

$$F_X(x)=P[X\leq x]=\boxed{\sum_{\substack{x\in \mathcal{E}_X \\ x_i\leq x}} P[X=x] \quad \forall x\in \mathbb{R}^n}$$

Caracterización

$X=(X_1,\dots,X_n):(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n,P_X)$ es discreto $\iff$ $X_i:(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B})$ es una componente discreta

2.4. Vectores aleatorios continuos

Un vector aleatorio $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n,P_X)$ es continuo si $\exists f_X:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ no negativa e integrable que:

$$F=\int_{D_x} f_X \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \quad \text{donde} \quad D_x=\prod_{i\in\Delta_n}(-\infty,x_i]$$

Esto se calcula componiendo las integrales en cada coordenada y es llamada función de distribución de X, f_X es la función de densidad.

Además, f_X determina F_X y por tanto, P_X:

$$\boxed{P_X(B)=P[X\in B]=\int_B f_X}$$

lo cual explica que, si $\mathcal{E}$ es numerable, $P[X\in\mathcal{E}]=0$ propiedad de la integral

Propiedades de la función de densidad

Para probar que lo sea basta con esto

i) No negativa, integrable y $\int_{\mathbb{R}^n} f_X = 1$

ii) $\lim_{x_i \to -\infty} f_X(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_i \to \infty} f_X(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i \in \Delta_n$ (Estamos tomando una recta)

Es tanto como decir que los hiperplanos tienen integral nula

iii) f_X es continua salvo en un conjunto de puntos de medida nula $\Leftrightarrow$ el conjunto de discontinuidades es numerable. Además, F_X es derivable en los puntos de continuidad $x = (x_1, \dots, x_n)$ tal que:

$$\frac{\partial F_X(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1, \dots, \partial x_n} = f_X(x_1, \dots, x_n)$$

iv) Si $\mathcal{E}$ es un conjunto numerable $\Rightarrow P_X(\mathcal{E}) = 0$

Caracterización

$\Rightarrow$] Si $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de densidad de un vector aleatorio $\Rightarrow$ es no negativa e integrable y su integral sobre $\mathbb{R}^n$ vale 1.

$\Leftarrow$] Toda función $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no negativa, integrable y tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)dx = 1$ es la función de densidad de algún vector aleatorio n-dimensional de tipo continuo.

Proposición

Sea $X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_X)$ un vector aleatorio de tipo continuo entonces $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_{X_i})$ es de tipo continuo $\forall i \in \Delta_n$

Creo que es un sii.

2.5. Distribuciones marginales

Al considerar un vector aleatorio como un conjunto de variables, a la distribución del vector se le llama distribución conjunta y a la distribución de cada variable distribución marginal de dicha componente.

Dichas distribuciones marginales pueden obtenerse a partir de la distribución conjunta:

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector con función de distribución $F_X \Rightarrow \forall i \in \Delta_n \; F_{X_i}(x_i) = F_X(+\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty)$;

análogamente, $F_{X_{i_1}, \dots, X_{i_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = F_X(\infty, \dots, \infty, x_{i_1}, \infty, \dots, \infty, x_{i_k}, \infty, \dots, \infty)$

Caso discreto

Sea $X=(X_1,\dots,X_n)$ vector aleatorio discreto con $P[X\in\mathcal{E}_X]=1$ y función masa de probabilidad $P[X=x]$ $\forall x\in\mathcal{E}_X$. Si X_i es una componente arbitraria y por tanto discreta con valores en $\mathcal{E}_{X_i}$, entonces su fmp puede obtenerse a partir de la conjunta:

$$\boxed{P[X_i=x_i]=\sum_{\substack{x_j\in\mathcal{E}_{X_j}\\ j\neq i}} P[X=x]=}$$ → Sumar todas las var menos la que buscamos.

$$=P[X_1=x_1,\dots,X_{i-1}=x_{i-1},X_i=x_i,X_{i+1}=x_{i+1},\dots,X_n=x_n]$$

La función masa marginal de cualquier subvector se calcularía de igual forma

Caso continuo

Sea $X=(X_1,\dots,X_n)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad f_X => cada X_i es de tipo continuo y su función de distribución es:

$$F_{X_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i)\,dt_i$$

con

$$\boxed{f_{X_i}(t_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t_1,\dots,t_n)\,dt_1\cdots dt_{i-1}\,dt_{i+1}\cdots dt_n \quad \forall t_i\in\mathbb{R}}$$

Integrar en todas $(-\infty,\infty)$ menos en x_i

La función de densidad marginal de cualquier subvector se calcularía de igual forma

2.6. Distribuciones condicionadas

Caso discreto

Distribución condicionada al valor de una variable

Sea $X=(X_1,\dots,X_n)$ un vector aleatorio discreto y X_i una componente arbitraria y $x_i^*\in\mathbb{R}\,/\,P[X_i=x_i^*]>0$ => Se define la distribución condicionada de $(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n)$ a $(X_i=x_i^*)$ como la determinada por la función masa de probabilidad:

$$P\left[X_1=x_1,\dots,X_{i-1}=x_{i-1},X_{i+1}=x_{i+1},\dots,X_n=x_n \,/\, X_i=x_i^*\right]=\frac{P\left[X_1=x_1,\dots,X_i=x_i^*,\dots,X_n=x_n\right]}{P[X_i=x_i^*]}$$

→ marginal p_i
↳ Igual que lo anterior

$\forall (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)\,/\,(x_1,\dots,x_i^*,\dots,x_n)\in\mathcal{E}_X$

Distribución condicionada a valores de varias variables

Sea $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_n)$ un vector aleatorio discreto y $(X_{i_1},\dots,X_{i_k})$ un subvector arbitrario y $(x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}^*)\in\mathbb{R}^k / P[X_{i_1}=x_{i_1}^*,\dots,X_{i_k}=x_{i_k}^*]>0 \Rightarrow$ Se define la distribución condicionada de $(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n)$ a $(X_{i_1}=x_{i_1}^*,\dots,X_{i_k}=x_{i_k}^*)$ como la determinada por la fmp:

$$P\left[X_1=x_1,\dots,X_{i_1-1}=x_{i_1-1},X_{i_1+1}=x_{i_1+1},\dots X_{i_k-1}=x_{i_k-1},X_{i_k+1}=x_{i_k+1},\dots,x_n / X_{i_1}=x_{i_1}^*,\dots,X_{i_k}=x_{i_k}^*\right]=$$

$$=\frac{P[X_1=x_1,\dots,X_{i_1}=x_{i_1}^*,\dots,X_{i_k}=x_{i_k}^*,\dots,X_n=x_n]}{P[X_{i_1}=x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}=x_{i_k}^*]}$$ $\longrightarrow$ Igual pero con un subvector

$\forall\,(X_1=x_1,\dots,X_{i_1-1}=x_{i_1-1},X_{i_1+1}=x_{i_1+1},\dots X_{i_k-1}=x_{i_k-1},X_{i_k+1}=x_{i_k+1},\dots,x_n)/(X_{i_1}=x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}=x_{i_k}^*)\in E_X$

Caso Continuo

Distribución condicionada al valor de una variable

Sea $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_n)$ un vector arbitrario continuo con función de densidad $f_{\mathbb{X}}$. Sea X_i una componente arbitraria y $x_i^*\in\mathbb{R} / f_{X_i}(x_i^*)>0 \Rightarrow$ Se define la distribución condicionada de $(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n)$ a $(X_i=x_i^*)$ como la determinada por la función de densidad:

$$f_{X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n / X_i=x_i^*}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n/x_i^*)=\frac{f_X(x_1,\dots,x_i^*,\dots,x_n)}{f_{X_i}(x_i^*)}$$ $\longleftarrow$ marginal

$\hookrightarrow$ Igual que para d

Distribución condicionada a valores de varias variables

Sea $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_n)$ un vector arbitrario continuo con función de densidad $f_{\mathbb{X}}$. Sea $(X_{i_1},\dots,X_{i_k})$ un subvector arbitrario y $(x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}^*)\in\mathbb{R}^k / f_{X_{i_1},\dots,X_{i_k}}(x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}^*)>0 \Rightarrow$ Se define la distribución condicionada de $(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_{i_k-1},X_{i_k+1},\dots,X_n)$ a $(X_{i_1}=x_{i_1}^*,\dots,X_{i_k}=x_{i_k}^*)$ como la determinada por la función de densidad:

$$f_{X_1,\dots,X_{i_1-1},X_{i_1+1},\dots,X_{i_k-1},X_{i_k+1},\dots,X_n / X_{i_1}=x_{i_1}^*,\dots,X_{i_k}=x_{i_k}^*}(x_1,\dots,x_{i_1-1},x_{i_1+1},\dots,x_{i_k-1},x_{i_k+1},\dots,x_n/x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}^*)=$$

$$=\frac{f_X(x_1,\dots,x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}^*,\dots,x_n)}{f_{X_{i_1},\dots,X_{i_k}}(x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}^*)}$$ $\longleftarrow$ Un subvector