**2.** Sea $f$ una función entera verificando que existen constantes $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$z \in \mathbb{C},\ |z| > \rho \implies |f(z)| \leqslant \alpha |z|^\beta$$

Probar que $f$ es una función polinómica de grado menor o igual que $\beta$.

Como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, admite un desarrollo de Taylor centrado en el origen, es decir,

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} z^i \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Supongamos ahora $m > \beta$, vamos a ver que $f^{(m)}(0) = 0$; para ello usaremos la fórmula de Cauchy para las derivadas; sea $R \in \mathbb{R}^+ \mid R > \rho$, como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tenemos que podemos aplicar el teorema:

$$f^{(m)}(0) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(w)}{w^{m+1}}\, dw$$

Tomando módulos y acotando como normalmente hacemos

$$\left| f^{(m)}(0) \right| \leq \frac{\alpha\, m!}{R^{m-\beta}}$$

Como $R > 0$, $m - \beta > 0$ y $R$ arbitrario; tomando límites cuando $R$ tiende a infinito tenemos que $|f^{(m)}(0)| = 0$, es decir, $f^{(m)}(0) = 0$. De aquí es fácil deducir que $f$ es un polinomio

**3.** Sea $f$ una función entera verificando que Liouville

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Probar que $f$ es constante.

Antes de nada vamos a ver que esa condición de la $f$ nos determina que la imagen de un cuadrado es la imagen de $\mathbb{C}$

De dicha condición se obtiene que $f(z) = f(z + u + iw)$ con $u, w \in \mathbb{Z}$, de manera que tomando $\overline{[0, 1, 1+i, i, 0]^\circ}$ tenemos el cuadrado de vértices $\{0, 1, i, 1+i\}$ que cumple que

$$\forall w \in \mathbb{C}\ \exists z \in \overline{[0,1,1+i,i,0]^\circ},\ u, w \in \mathbb{Z} \mid w = z + u + iw \implies f(z) = f(w)$$

Basta probar que $f$ es acotada; pero $\overline{[0,1,1+i,i,0]^\circ}$ es compacto $\Rightarrow f(\overline{[0,1,1+i,i,0]^\circ})$ es compacto luego acotado. Como $f(\overline{[0,1,1+i,i,0]^\circ}) = f(\mathbb{C})$ tenemos por el Teorema de Liouville que $f$ es constante.

**4.** Sea $f$ una función entera verificando que $f\big(f(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre $f$?

Si es constante $\to$ valores
Si no es constante $\to$ Liouville

Sea $f(z) = w \in \mathbb{C}$, nuestra condición pasa a ser $f(w) = w$. Distinguimos casos:

- Si $f$ es constante $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \mid f(z) = \alpha\ \forall z \in \mathbb{C}$
- Si $f$ no es constante, el teorema de Liouville nos dice que $f(\mathbb{C})$ es densa en $\mathbb{C}$, es decir, $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. Entonces, como $f(\mathbb{C}) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid f(w) = w\}$ tenemos que $\mathbb{C} \subset \overline{f(\mathbb{C})} \subset \overline{\{w \in \mathbb{C} \mid f(w) = w\}}$, es decir, $f = id_{\mathbb{C}}$

5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función $f$, holomorfa en un entorno del origen, y verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande:

(a) $a_{2n} = 0\,,\ a_{2n-1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $a_{2n} = a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = \dfrac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Sea $\Omega = D(0,R)$ con $R \in \mathbb{R}^+$. Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y consideramos $A = \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ que tiene $A' = \{0\}$

Como $f(z) = 0 \ \forall z \in A$, $A' \cap \Omega \neq \emptyset$, obtenemos que la función es la función idénticamente nula en todo $\Omega$ por el principio de identidad.

Sin embargo, $\frac{1}{2n-1} \in \Omega$ y $f(\frac{1}{2n-1}) = 1$ !!; luego $f \notin \mathcal{H}(\Omega)$.

De hecho, no hemos usado la holomorfía de $f$ en ningún instante, sólo la continuidad.

b) $f(\frac{1}{2n}) = a_{2n} = \frac{1}{2n} \Rightarrow A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\} \supset \{\frac{1}{2n}\} \cup \{0\}$

como tiene un punto de acumulación en cualquier entorno del origen; por el principio de identidad $f(z) = z \ \forall z \in \Omega$ lo cual es incompatible con que $f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{2n-1}$ !!

c) Tomamos $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ con $A' = \{0\}$. Para cada $z \in A$ se tiene que

$$f(z) = f(\tfrac{1}{n}) = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+z}$$

Aplicando de nuevo el principio de identidad tenemos que $f(z) = \frac{1}{1+z} \ \forall z \in D(0,1)$. Como $f$ es racional tenemos que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ luego sí existe tal $f$.

8. ¿Qué se puede afirmar sobre dos funciones enteras cuya composición es constante?

Sean $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que $f(g(z)) = \alpha \ \forall z \in \mathbb{C}$. Distinguimos casos.

- Si $f$ es constante, no hay nada que probar.

- Si $f$ no es constante, sabemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ luego su imagen es un conjunto denso de $\mathbb{C}$.

9. Sea $f$ una función entera verificando que $f(z) \to \infty \quad (z \to \infty)$. Probar que $f$ es una función polinómica.

1. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Probar que $|f^{(n)}(0)| \leqslant e\,(n+1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $r \in \mathbb{R}^+ \mid 0<r<1$ se cumple que $\overline{D}(0,r) \subset D(0,1)$; además, $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Por las desigualdades de Cauchy tenemos que

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(f,0,r)}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, como $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ $\forall z \in D(0,1)$, tenemos que $M(f,0,r) = \frac{1}{1-r}$ pues $|z|=r$; entonces

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \, \frac{1}{r^n(1-r)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si conseguimos ver que $\frac{1}{r^n(1-r)} = (n+1)e$ tenemos el resultado. En particular, podemos tomar $r = \frac{n}{n+1}$ obteniendo que

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\frac{1}{e}} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)} = e\,n! \cdot (n+1) = e(n+1)!$$

como se quería probar.

función polinómica.

10. Sea $f$ una función entera verificando que

$$z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1 \implies |f(z)| = 1$$

Probar que existen $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$.