Análisis Matemático II

Tema 1: Ejercicios resueltos

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{\log(1 + n\,x)}{1 + n\,x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ en el intervalo $[0, \rho]$, y en la semirrecta $[\rho, +\infty[$.

Límite conocido

Solución

Por la escala de infinitos, sabemos que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\log t}{t} = 0$. Por tanto, para $x \in \mathbb{R}^+$, de $\{1 + n\,x\} \to +\infty$ deducimos que $\{f_n(x)\} \to 0$. Como $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}_0^+$.

Observamos también que $f_n(x) \geq 0$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}_0^+$ y $n \in \mathbb{N}$, y pasamos ya a estudiar la convergencia uniforme. Por dominio

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con Por ser cociente y composición de derivables

$$f_n'(x) = \frac{n - n\log(1 + n\,x)}{(1 + n\,x)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por tanto, para $x \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene que $f_n'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = (e-1)/n$. De hecho, para $x < (e-1)/n$ se tiene que $f_n'(x) > 0$, mientras que $f_n'(x) < 0$ para $x > (e-1)/n$. Deducimos que f_n es creciente en el intervalo $[0, (e-1)/n]$ y decreciente en la semirrecta $[(e-1)/n, +\infty[$.

Por def.

Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ con $(e-1)/m < \rho$. Entonces, para $n \geq m$ se tiene también $(e-1)/n < \rho$, luego $[\rho, +\infty[\subset [(e-1)/n, +\infty[$, con lo que f_n es decreciente en la semirrecta $[\rho, +\infty[$. Por tanto, para $n \geq m$ se tiene que

Criterio 1 ¿?

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(\rho) \qquad \forall\, x \in [\rho, +\infty[$$

En vista de la convergencia puntual, sabemos que $\{f_n(\rho)\} \to 0$, luego de la desigualdad anterior se deduce que $\{f_n\}$ converge uniformemente en la semirrecta $[\rho, +\infty[$.

Criterio 2.

Por otra parte, observamos que $f_n\big((e-1)/n\big) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos entonces $x_n = (e-1)/n$ para $n \geq m$ y, por ejemplo, $x_n = 0$ para $n < m$, obteniendo una sucesión $\{x_n\}$ de puntos del intervalo $[0, \rho]$ que verifica $f_n(x_n) = 1$ para $n \geq m$. Por tanto, la sucesión $\{f_n(x_n)\}$ no converge a cero, luego $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$. ■

2. Probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución

$0 \le x^{2n} \le 1$

Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \le 1$ se tiene que $1 \le 1 + x^{2n} \le 2$, de donde obtenemos $1 \le g_n(x) \le \sqrt[n]{2}$. Como $\{\sqrt[n]{2}\} \to 1$, deducimos que $\{g_n(x)\} \to 1$. Lema del sandwich

Por otra parte, para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$, observamos que

$$g_n(x) = x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y como $\{1/x^{2n}\} \to 0$, deducimos que $\{g_n(x)\} \to x^2$. $\longrightarrow$ puntualmente

En resumen, la sucesión $\{g_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \max\{1, x^2\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, observamos claramente que $g_n(x) \ge g(x)$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Para la convergencia uniforme, fijado $n \in \mathbb{N}$, usaremos la función $\varphi_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_n(t) = t^{1/n}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, que es derivable con

xq este intervalo

$$\varphi_n'(t) = \frac{1}{n\, t^{(n-1)/n}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \le 1$, aplicamos a φ_n el teorema del valor medio, en el intervalo $[1, 1 + x^{2n}]$, obteniendo que existe $t \in \mathbb{R}$, con $1 \le t \le 1 + x^{2n}$ tal que

Lo que quiero acotar

$$g_n(x) - g(x) = \underbrace{\sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1}_{\sqrt[n]{1+x^{2n}} - \sqrt[n]{1}} = \varphi_n(1 + x^{2n}) - \varphi_n(1) = \frac{x^{2n}}{n\, t^{(n-1)/n}}$$

Como $x^{2n} \le 1$ y $t \ge 1$, deducimos que

$$g_n(x) - g(x) \le 1/n \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

Por otra parte, para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$, usamos el intervalo $[x^{2n}, 1 + x^{2n}]$, obteniendo $s \in \mathbb{R}$ con $x^{2n} < s < 1 + x^{2n}$ tal que

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - x^2 = \varphi_n(1 + x^{2n}) - \varphi_n(x^{2n}) = \frac{1}{n\, s^{(n-1)/n}}$$

De nuevo tenemos $s \ge 1$ y deducimos que

$$g_n(x) - g(x) \le 1/n \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

Segundo criterio

En resumen, hemos probado que

$$|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) - g(x) \le 1/n \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde se deduce que $\{g_n\}$ converge a g uniformemente en $\mathbb{R}$. ∎

3. Sea $\{h_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$h_n(x,y) = \frac{x\,y}{n^2 + x^2 + y^2} \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{h_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Depende de $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ cierto

Solución

Fijado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, es claro que $\big\{ h_n(x,y) \big\} \to 0$, luego $\{h_n\}$ converge a cero puntualmente en $\mathbb{R}^2$.

Criterio 1

Si A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, existe una constante $M \in \mathbb{R}^{+}$ verificando que $\max\big\{ |x|,\, |y| \big\} \leq M$ para todo $(x,y) \in A$. Tenemos entonces que

$$|\,h_n(x,y)\,| = \frac{|\,x\,y\,|}{n^2 + x^2 + y^2} \leq \frac{M^2}{n^2} \qquad \forall\,(x,y) \in A\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\big\{ M^2/n^2 \big\} \to 0$, deducimos que $\{h_n\}$ converge a cero, uniformemente en A.

Criterio 2

Tomando $x_n = y_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión $\big\{ (x_n, y_n) \big\}$ de puntos de $\mathbb{R}^2$, tal que $h_n(x_n, y_n) = 1/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\big\{ h_n(x_n, y_n) \big\}$ no converge a cero, deducimos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$. ■