Tema 5: Autómatas con Pila

Serafín Moral

Universidad de Granada

Noviembre, 2021

Contenido

- Autómatas con Pila: definición.
- Criterios de aceptación.
- Autómatas con pila deterministas.
- Lenguajes independientes del contexto deterministas.
- Equivalencia de autómatas y gramáticas.

AUTÓMATAS CON PILA

Un autómata con pila no determinista (APND) es una septupla (Q,A,B,δ,q_0,Z_0,F) en la que

- Q es un conjunto finito de estados
- A es un alfabeto de entrada
- B es un alfabeto para la pila
- δ es la función de transición

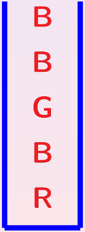
$$\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times B \longrightarrow \wp(Q \times B^*)$$

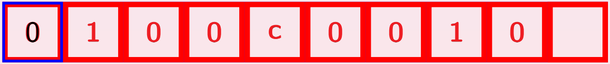
- q_0 es el estado inicial
- Z_0 es el símbolo inicial de la pila
- F es el conjunto de estados finales

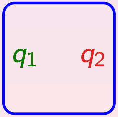
Ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} & \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\} \\
\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} & \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\} \\
\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} & \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\} \\
\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} & \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\} \\
\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} & \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{array}
$$







Lenguaje aceptado

Descripción Instantánea

Se llama **descripción instantánea** o **configuración** de un autómata con pila a una tripleta

$$(q, u, \alpha) \in Q \times A^* \times B^*$$

en la que q es el estado en el se encuentra el autómata, u es la parte de la cadena de entrada que queda por leer y α el contenido de la pila (el primer símbolo es el tope de la pila).

Paso de cálculo

Se dice que de la configuración $(q, au, Z\alpha)$ se puede llegar mediante un **paso de cálculo** a la configuración $(p, u, \beta\alpha)$ y se escribe $(q, au, Z\alpha) \vdash (p, u, \beta\alpha)$ si y solo si $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$ donde a puede ser cualquier símbolo de entrada o la cadena vacía.

Lenguaje Aceptado

Sucesión de Pasos de Cálculo

Si C_1 y C_2 son dos configuraciones, se dice que se puede llegar de C_1 a C_2 mediante una **sucesión de pasos de cálculo** y se escribe $C_1 \overset{*}{\vdash} C_2$ si y solo si exite una sucesión de configuraciones $T_1, \ldots, T_n$ tales que $C_1 = T_1 \vdash T_2 \vdash \ldots \vdash T_{n-1} \vdash T_n = C_2$

Configuración Inicial

Si M es un APND y $u \in A$ se llama **configuración inicial** correspondiente a esta entrada a (q_0, u, Z_0) donde q_0 es el estado inicial y Z_0 el símbolo inicial de la pila.

En el caso del autómata con pila del ejemplo anterior tenemos

$$(q_1, 011c110, R) \vdash (q_1, 11c110, BR) \vdash (q_1, 1c110, GBR) \vdash$$

$$(q_1, c110, GGBR) \vdash (q_2, 110, GGBR) \vdash (q_2, 10, GBR) \vdash$$

$$(q_2, 0, BR) \vdash (q_2, \varepsilon, R) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Lenguaje Aceptado

Existen dos criterios para determinar el lenguaje aceptado por un APND:

a) Lenguaje aceptado por estados finales

$$L(M) = \{w \in A^* : (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \gamma), p \in F, \gamma \in B^*\}$$

b) Lenguaje aceptado por pila vacía

$$N(M) = \{w \in A^* : (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon), p \in Q\}$$

Construir Autómatas con pila que acepten los siguientes lenguajes

- $L = \{0^i 1^i : i \geq 0\}$
- $L = \{0^i 1^j : i \geq j \geq 0\}$
- $L = \{u \in \{0,1\}^* : u = u^{-1}\}$
- Conjunto de palabras en las que la cantidad de 0 es igual que la cantidad de 1.
- Conjunto de palabras en las que la cantidad de 0 es menor o igual que la cantidad de 1.
- Conjunto de palabras en las que la cantidad de 0 es el doble que la cantidad de 1.
- $L = \{0^i 1^j 0^j 1^i : i,j \geq 0\}$

$L = \{0^i 1^i : i \geq 0\}$

Por pila vacía. $M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{array}$$

$L = \{0^i 1^i : i \geq 0\}$

Por estados finales. $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_3, \varepsilon)\}
\end{array}$$

$L = \{0^i 1^j : i \geq j \geq 0\}$

Por pila vacía. $M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_2, X)\} \\
\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} &
\end{array}$$

Por pila vacía:

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR), (q_2, R)\}$$
$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB), (q_2, B)\}$$
$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG), (q_2, G)\}$$

$$\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR), (q_2, R)\}$$
$$\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB), (q_2, B)\}$$
$$\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG), (q_2, G)\}$$

$$\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, R)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, B) = \{(q_2, B)\}$$

cantidad de 0 = cantidad de 1

Por pila vacía. $M = (\{q_1\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\} & \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\} \\
\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} &
\end{array}$$

Por pila vacía (opción 2). $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, 1, R) = \{(q_2, XR)\} & \delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, XX)\} \\
\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_2, 0, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_1, R)\}
\end{array}
$$

cantidad de 0 $\leq$ cantidad de 1

Por pila vacía. $M = (\{q_1\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ Cantidad de 0 $\leq$ Cantidad de 1

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\} & \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\} \\
\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, \varepsilon, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{array}$$

Por pila vacía. $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YYR)\} & \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YYY)\} \\
\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_1, YR)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} &
\end{array}$$

Por estados finales.

$M = (\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_5\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \{q_5\})$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, R)\} & \delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_2, X)\} \\
\delta(q_2, 1, R) = \{(q_2, YR)\} & \delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, YX)\} \\
\delta(q_2, 1, Y) = \{(q_2, YY)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Y) = \{(q_3, Y)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_3, X)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_3, R)\} \\
\delta(q_3, 0, Y) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, \varepsilon, X) = \{(q_4, X)\} \\
\delta(q_3, \varepsilon, R) = \{(q_4, R)\} & \delta(q_4, 1, X) = \{(q_4, \varepsilon)\} \\
\delta(q_4, \varepsilon, R) = \{(q_5, R)\} &
\end{array}$$

Criterios de Aceptación

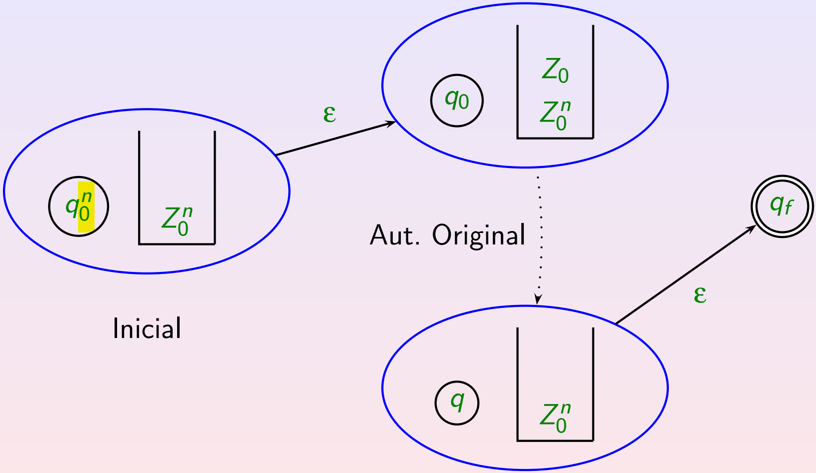
- Está claro que los lenguajes aceptados por un autómata por el criterio de estados finales y el criterio de pila vacía serán, en general, distintos, aunque puede haber casos particulares en los que coincidan.
- Sin embargo, los dos criterios son equivalentes en relación con la clase de lenguajes que definen: la clase de lenguajes aceptados por un autómata con pila por el criterio de estados finales coincide con la clase de lenguajes aceptados por un autómata con pila por el criterio de pila vacía. Se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema

a) Si L es el lenguaje aceptado por un autómata con pila $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$ por el criterio de pila vacía, entonces existe un autómata con pila M_f que acepta el mismo lenguaje L por el criterio de estados finales.

b) Si L es el lenguaje aceptado por un autómata con pila $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$ por el criterio de estados finales, entonces existe un autómata con pila M_n que acepta el mismo lenguaje L por el criterio de pila vacía.

Pila vacía $\rightarrow$ Estados finales

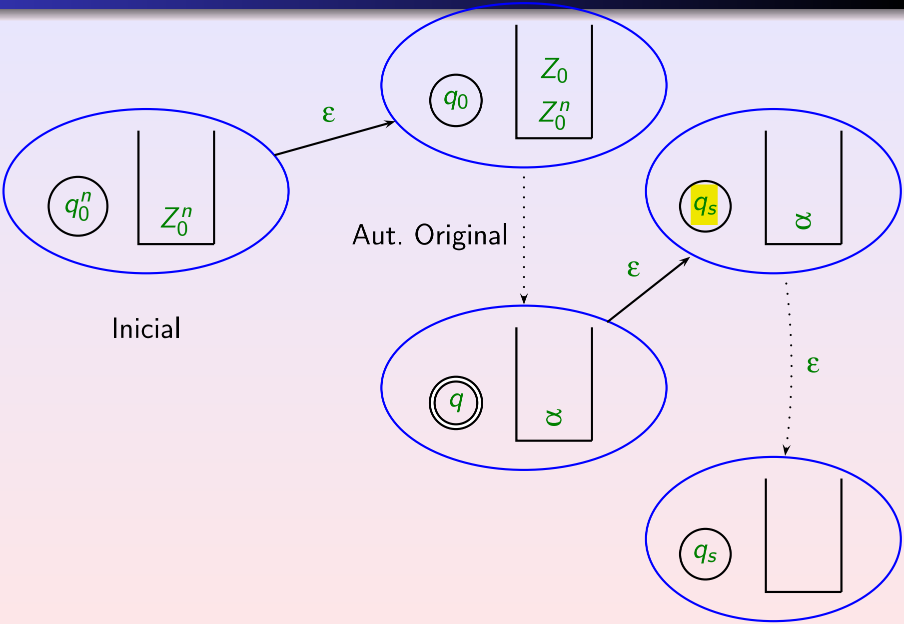


Pila vacía → Estados finales

Construcción de un autómata M_f que acepta por el criterio de estados finales el mismo lenguaje que M por el criterio de pila vacía

Si $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$, entonces el autómata M_f se construye a partir de M siguiendo los siguientes pasos:

- Se añaden dos estados nuevos, q_0^n y q_f. El estado inicial de M_f será q_0^n y q_f será estado final de M_f.
- Se añade un nuevo símbolo a B: Z_0^n. Este será el nuevo símbolo inicial de la pila.
- Se mantienen todas las transiciones de M, añadiéndose las siguientes:
  - $\delta(q_0^n, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_0, Z_0 Z_0^n)\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_f, Z_0^n)\}, \quad \forall q \in Q$



q_0
Z_0
Z_0^n
ε
q_0^n
Z_0^n
Aut. Original
q_s
α
ε
Inicial
q
α
ε
q_s

Construcción de M_n que acepta por el criterio de pila vacía el mismo lenguaje que M por el criterio de estados finales

Si $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$, entonces el autómata M_n se construye a partir de M siguiendo los siguientes pasos:

- Se añaden dos estados, q_0^n y q_s. El estado incial de M_n es q_0^n.
- Se añade un nuevo símbolo a B: Z_0^n. Este será el nuevo símbolo inicial de la pila.
- Se mantienen las transiciones de M y se añaden:
  - $\delta(q_0^n, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_0, Z_0 Z_0^n)\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, H) = \{(q_s, H)\}, \quad \forall q \in F, H \in B \cup \{Z_0^n\}$
  - $\delta(q_s, \varepsilon, H) = \{(q_s, \varepsilon)\}, \quad \forall H \in B \cup \{Z_0^n\}$

Un autómata con pila $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$ se dice que es **determinista** si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\delta(q, a, X)$ tiene a lo más un elemento, para todo $q \in Q, \quad a \in A \cup \{\varepsilon\}, \quad X \in B$.
2. Si $\delta(q, a, X)$ es no vacío para algún $a \in A$, entonces $\delta(q, \varepsilon, X) = \emptyset$.

Una condición equivalente es que para cada configuración C_1 existe, a lo más, una configuración C_2 tal que $C_1 \vdash C_2$ (se puede llegar de C_1 a C_2 en un paso de cálculo).

Ejemplo

El autómata que habíamos visto que aceptaba el lenguaje $\{wcw^{-1} : w \in 0,1^*\}$ era determinista.

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_1,0,R) = \{(q_1,BR)\} & \delta(q_1,1,R) = \{(q_1,GR)\} \\
\delta(q_1,0,B) = \{(q_1,BB)\} & \delta(q_1,1,B) = \{(q_1,GB)\} \\
\delta(q_1,0,G) = \{(q_1,BG)\} & \delta(q_1,1,G) = \{(q_1,GG)\} \\
\delta(q_1,c,R) = \{(q_2,R)\} & \delta(q_1,c,B) = \{(q_2,B)\} \\
\delta(q_1,c,G) = \{(q_2,G)\} & \delta(q_2,0,B) = \{(q_2,\varepsilon)\} \\
\delta(q_2,1,G) = \{(q_2,\varepsilon)\} & \delta(q_2,\varepsilon,R) = \{(q_2,\varepsilon)\}
\end{array}
$$

Definición

Un lenguaje independiente del contexto se dice que es **determinista** si y solo si es aceptado por un autómata con pila determinista por el **criterio de estados finales**.

El lenguaje anterior es determinista pues puede aceptarse por estados finales por el autómata

$M_f = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{R, G, B\}, \delta, q_1, R, \{q_3\})$ donde:

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$	$\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$
$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$	$\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$
$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$	$\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$
$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$	$\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$
$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\}$	$\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$	$\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_3, R)\}$

Determinismo: Criterios No Equivalentes

Si un lenguaje L aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía, entonces L es aceptado por un autómata con el criterio estados finales (la transformación que vimos anteriormente añadía transiciones deterministas).
Pero la relación inversa no es cierta (*las transiciones de un estado final al estado que dejaba la pila vacía eran opcionales - no determistas*).

Definición

Un lenguaje L tiene la propiedad prefijo si y solo si para cada palabra $x \in L$, ningún prefijo de x (distinto de x) está en L.

Teorema

Un lenguaje puede ser aceptado por un autómata determinista por el criterio de pila vacía si y solo si es aceptado por un autómata determinista por el criterio de estados finales y tiene la propiedad prefijo

Ejemplo

El autómata que aceptaba por pila vacía el conjunto de las palabras con la misma cantidad de 0 que de 1:
$M = (\{q_1\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$.

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\} & \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\} \\
\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} &
\end{array}
$$

no es determinista, ya que $\delta(q_1, \varepsilon, R) \neq \emptyset$ y
$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \neq \emptyset$ y $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\} \neq \emptyset$.

Ejemplo: Estados Finales

- El autómata no se puede transformar en uno determinista que acepte el mismo lenguaje por el criterio de pila vacía ya que el lenguaje no cumple la propiedad prefijo: la palabra 001110 está en el lenguaje y su prefijo 0011 también.
- Sin embargo el mismo lenguaje se puede aceptar por estados finales por el autómata $M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \{q_2\})$.

$$\begin{array}{ll}
 & \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \\
 & \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\} \\
\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, R)\} & \delta(q_2, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \\
\delta(q_2, 1, R) = \{(q_1, YR)\} &
\end{array}$$

Luego el lenguaje es independiente del contexto determinista.

Lenguajes deterministas y pila vacía

La distinción entre los dos criterios aplicados a lenguajes deterministas no es sustancial.

Propiedad

Si un lenguaje L es determinista (aceptado por un autómata determinista por el criterio de estados finales) y no cumple la propiedad prefijo una sencilla transformación lo convertiría en un lenguaje con la propiedad prefijo y, por tanto, aceptado por un autómata determinista por el criterio de pila vacía:
Se añade un nuevo símbolo que no esté en el alfabeto y se pone este símbolo al final de todas las palabras. Si $\$ \not\in A$, entonces consideramos $L\{\$\} = \{u\$: u \in L\}$.

Es como añadir un fin de palabra a todas las de L

Lenguajes que no son deterministas

Hay lenguajes independientes de contexto que no son deterministas.

Ejemplo

El lenguaje $L = \{u \in \{0,1\}^* : u = u^{-1}\}$ puede ser aceptado por el criterio de estados finales por el siguiente autómata:

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1,0,R) = \{(q_1,BR),(q_2,R)\} & \delta(q_1,1,R) = \{(q_1,GR),(q_2,R)\} \\
\delta(q_1,0,B) = \{(q_1,BB),(q_2,B)\} & \delta(q_1,1,B) = \{(q_1,GB),(q_2,G)\} \\
\delta(q_1,0,G) = \{(q_1,BG),(q_2,G)\} & \delta(q_1,1,G) = \{(q_1,GG),(q_2,G)\} \\
\delta(q_1,\varepsilon,R) = \{(q_2,R)\} & \delta(q_1,\varepsilon,B) = \{(q_2,B)\} \\
\delta(q_1,\varepsilon,G) = \{(q_2,G)\} & \delta(q_2,0,B) = \{(q_2,\varepsilon)\} \\
\delta(q_2,1,G) = \{(q_2,\varepsilon)\} & \delta(q_2,\varepsilon,R) = \{(q_3,R)\}
\end{array}$$

El problema está en conocer cuando cambiar de q_1 a q_2.

Teorema

Dada una gramática libre de contexto $G = (V, T, P, S)$ existe un autómata con pila $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$ que acepta el mismo lenguaje que genera G, y reciprocamente, dado un autómata con pila M existe una gramática libre de contexto G que genera el lenguaje que acepta M.

El autómata no tiene por qué ser determinista.

Dada la gramática $G = (V, T, P, S)$, los elementos del autómata serán:

- $Q = \boxed{\{q\}}$
- $A = T$
- $B = V \cup T$
- $q_0 = q$
- $Z_0 = S$
- $F = \emptyset$
- δ viene determinado por la siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \delta(q,\varepsilon,B) = & \quad \{(q,\alpha) : B \to \alpha \in P\} \\ \delta(q,a,a) = & \quad \{(q,\varepsilon)\} \end{aligned}$$

Acepta el mismo lenguaje por el criterio de pila vacía.

Ejemplo

Gramática:

$S \rightarrow aSb \quad S \rightarrow cSb \quad S \rightarrow a$

Autómata con Pila:

$$\begin{array}{ll} \delta(q,\varepsilon,S) = \{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} & \delta(q,a,a) = \{(q,\varepsilon)\} \\ \delta(q,b,b) = \{(q,\varepsilon)\} & \delta(q,c,c) = \{(q,\varepsilon)\} \end{array}$$

Autómata $M \to$ Gramática G

Sea una autómata con pila $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ que acepta el lenguaje L por el criterio de pila vacía.

La gramática $G = (V, A, P, S)$ que genera el mismo lenguaje L se construye a partir de variables S y todas las variables de la forma $[q, X, p]$, donde $q, p \in Q, \quad X \in B$.

Idea Básica

La variable $[q, X, p]$ debe de generar aquellas palabras que son capaces de poder leerse de forma completa llevando el autómata con pila desde el estado q al estado p, quitando a X de la pila.

Después se añaden todas las producciones de la forma:

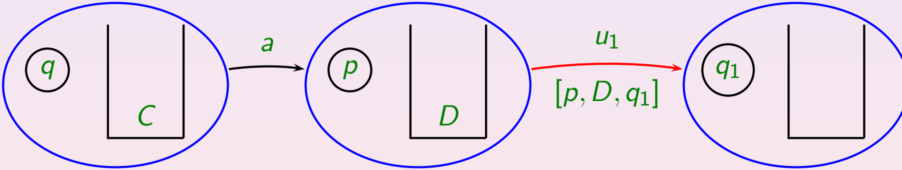
$$S \to [q_0, Z_0, p], \quad p \in Q$$

Producciones

Si tenemos que $(p,\varepsilon) \in \delta(q,a,C)$ entonces leyendo una a el autómata pasa de p a q quitando C de la pila. Por tanto hay que añadir:

$$[q,C,p] \rightarrow a$$

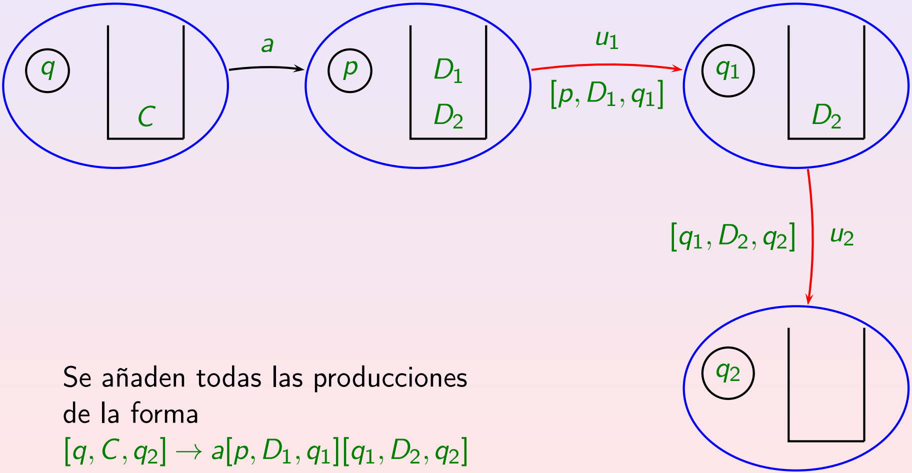
a puede ser un símbolo de A o la cadena vacía.
Si tenemos que $(p,D) \in \delta(q,a,C)$. Tenemos:



Se añade: $[q,C,q_1] \rightarrow a[p,D,q_1]$

Producciones

Si tenemos que $(p, D_1 D_2) \in \delta(q, a, C)$



Se añaden todas las producciones de la forma
$[q, C, q_2] \to a[p, D_1, q_1][q_1, D_2, q_2]$

Producciones

Si tenemos que $(p, D_1 D_2 D_3) \in \delta(q, a, C)$
Añadimos todas las producciones de la forma:

$$[q, C, q_3] \to a[p, D_1, q_1][q_1, D_2, q_2][q_2, D_3, q_3]$$

Si $Q = \{r, s\}$

$[q, C, r] \to a[p, D_1, r][r, D_2, r][r, D_3, r]$, $[q, C, s] \to a[p, D_1, r][r, D_2, r][r, D_3, s]$
$[q, C, r] \to a[p, D_1, r][r, D_2, s][s, D_3, r]$, $[q, C, s] \to a[p, D_1, r][r, D_2, s][s, D_3, s]$
$[q, C, r] \to a[p, D_1, s][s, D_2, r][r, D_3, r]$, $[q, C, s] \to a[p, D_1, s][s, D_2, r][r, D_3, s]$
$[q, C, r] \to a[p, D_1, s][s, D_2, s][s, D_3, r]$, $[q, C, s] \to a[p, D_1, s][s, D_2, s][s, D_3, s]$

Gramática (Variables y Producciones): Resumen

Si partimos del autómata con pila $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, $L = N(M)$.

La gramática $G = (V, A, P, S)$ que genera el mismo lenguaje se construye de la siguiente forma:

- **Variables (V):** $[q, C, p]$, $p, q \in Q$ y $C \in B$, además de la variable S que será la variable inicial.
- **Producciones (P):**
  1. $S \to [q_0, Z_0, q]$ para cada $q \in Q$.
  2. $[q, C, q_m] \to a[p, D_1, q_1][q_1, D_2, q_2] \dots [q_{m-1}, D_m, q_m]$ para cada $q_1, \dots, q_m \in Q$, si $(p, D_1 D_2 \dots D_m) \in \delta(q, a, C)$, donde a puede ser ε.
     (si $m = 0$, entonces la producción es $[q, A, p] \to a$).

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\begin{array}{rl}
\delta(q_0,0,Z_0) = \{(q_0,XZ_0)\}, & \delta(q_1,1,X) = \{(q_1,\varepsilon)\} \\
\delta(q_0,0,X) = \{(q_0,XX)\}, & \delta(q_1,\varepsilon,X) = \{(q_1,\varepsilon)\} \\
\delta(q_0,1,X) = \{(q_1,\varepsilon)\}, & \delta(q_1,\varepsilon,Z_0) = \{(q_1,\varepsilon)\}
\end{array}$$

$$S \rightarrow [q_0, Z_0, q_0], \quad S \rightarrow [q_0, Z_0, q_1]$$

Gramática

$$S \to [q_0, Z_0, q_0], \quad S \to [q_0, Z_0, q_1]$$
$$[q_0, Z_0, q_0] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_0]$$
$$[q_0, Z_0, q_1] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_1]$$
$$[q_0, Z_0, q_0] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_0]$$
$$[q_0, Z_0, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_1]$$

$$[q_0, X, q_0] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_0]$$
$$[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_1]$$
$$[q_0, X, q_0] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_0]$$
$$[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]$$
$$[q_0, X, q_1] \to 1, \quad [q_1, X, q_1] \to 1, \quad [q_1, X, q_1] \to \varepsilon, \quad [q_1, Z_0, q_1] \to \varepsilon$$

Resultado

Elimando símbolos y producciones inútiles queda:

$$
\begin{array}{l}
S \rightarrow [q_0, Z_0, q_1] \\
{[q_0, Z_0, q_1]} \rightarrow 0[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_1] \\
{[q_0, X, q_1]} \rightarrow 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1] \\
{[q_0, X, q_1]} \rightarrow 1, \quad [q_1, X, q_1] \rightarrow 1 \\
{[q_1, X, q_1]} \rightarrow \varepsilon \\
{[q_1, Z_0, q_1]} \rightarrow \varepsilon
\end{array}
$$

Lenguaje generado: $L(G) = \{0^i 1^j \,:\, i \geq j \geq 1\}$

Consideración Final

Pregunta

Si comenzamos con una autómata con pila M y realizamos los siguientes pasos:

- Construimos una gramática independiente del contexto G que genera el mismo lenguaje que M por el criterio de pila vacía.
- Construimos a partir de G un autómata M' que acepta, por pila vacía, el mismo lenguaje que genera G

¿Qué relación tienen M y M'?

No tienen por qué ser el mismo autómata, pero está claro que M y M' aceptarán el mismo lenguaje por el criterio de pila vacía.
Además, M' tendrá sólo un estado (por la forma de construirlo: siempre el autómata que construimos asociado a una gramática tiene un sólo estado) y entonces hemos descrito un procedimiento por el que para un autómata con pila cualquiera se puede construir otro que acepta el mismo lenguaje por el criterio de pila vacía y que tiene un sólo estado.