

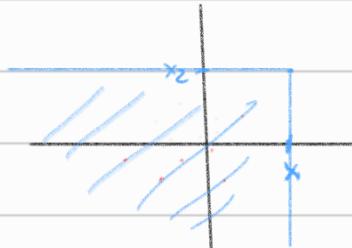
Tema 2 Vectores aleatorios

2.1 σ -álgebra de Borel

Definimos la σ -álgebra de Borel como la misma σ -álgebra que contiene todos los intervalos de \mathbb{R}^n y la denotaremos por \mathcal{B}^n .

En particular, se puede generar a partir de todos los intervalos de la forma

$$(-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_n] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$



2.2. Vector aleatorio

Un vector aleatorio $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sobre un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) se define como una función

$$\underline{x} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

dada por $\underline{x}^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}^n$

Caracterización I

Dijimos que $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ es un vector aleatorio sí

$$\underline{x}^{-1}((-\infty, x]) = \{ \omega \in \Omega / \underline{x}(\omega) \leq x \} = \{ \omega \in \Omega / x_i(\omega) \leq x_i, i = 1, \dots, n ; x_i(\omega) \in x_i \text{ } f \in \mathcal{A} \} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

sou los elementos que están por debajo del vector
dado, si $v = (v_1, \dots, v_n)$ y $u = (u_1, \dots, u_n)$ son vectores de \mathbb{R}^n usaremos $v_i \leq u_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Caracterización II

De la misma manera \underline{x} será vector aleatorio sí \underline{x}_i es variable aleatoria $\forall i = 1, \dots, n$.

2.2.1. Distribución de probabilidad de un vector aleatorio

Dado $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector aleatorio $\underline{x} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, se denotará función de probabilidad a la aplicación

$$P_{\underline{x}} : \mathcal{B}^n \longrightarrow [0, 1]$$

$$P_{\underline{x}} = P_{\underline{x}}$$

$$\delta \underline{x} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$$

cumpliendo que

$$P_{\underline{X}}(B) = P[\omega \in \Omega | \underline{X}(\omega) \in B] = P[\underline{X} = B] \quad \forall B \in \mathcal{B}^u$$

luego de aquí deducirnos que \underline{X} transforma (Ω, \mathcal{A}, P) en $(\mathbb{R}^u, \mathcal{B}^u, P)$ donde el interior se centra en estudiar el nuevo espacio, es decir, en el estudio de $P_{\underline{X}}$

Teorema

$P_{\underline{X}}$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^u, \mathcal{B}^u)$

Función de distribución

Dado $\underline{X}: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^u, \mathcal{B}^u)$ vector aleatorio, definimos la función de distribución como

$$F_{\underline{X}}: \mathbb{R}^u \rightarrow [0,1]$$

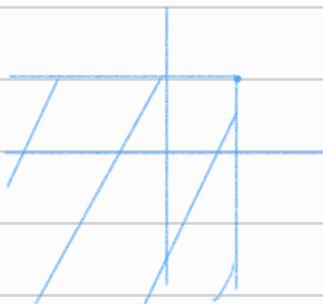
tal que

$$F_{\underline{X}}(x) = P_{\underline{X}}[(-\infty, x]] = P[\underline{X} \in (-\infty, x]] = P[\underline{X} \leq x]$$

abreviando

$$F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_u) = P[\underline{X}_1 \leq x_1, \underline{X}_2 \leq x_2, \dots, \underline{X}_u \leq x_u]$$

Intuitivamente en \mathbb{R}^2 :



Propiedades

Para que $F_{\underline{X}}$ sea función de distribución, bastaría probar que cumple las siguientes propiedades:

i) Es monótona no decreciente en cada argumento

Hágase, ..., x_i , $\forall x_i, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_u \in \mathbb{R} \wedge x_i < x_i' \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \leq F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_u)$$

c) Es continua a la derecha en todo argumento

$$\forall i \in \{1, \dots, u\}, \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_u \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\lim_{x_i' \rightarrow x_i^+} F_x(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^+, x_{i+1}, \dots, x_u) = F_x(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_u)$$

c) $\forall i \in \{1, \dots, u\}, \forall x_1, \dots, x_u \in \mathbb{R}$ es

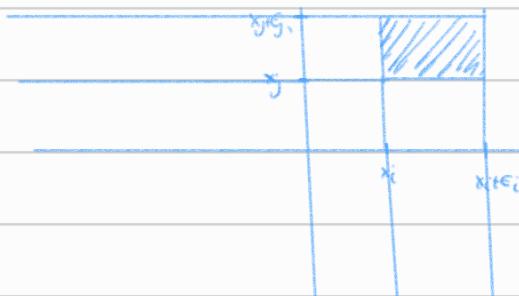
$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_x(x_1, \dots, x_i, \dots, x_u) = 0$$

$$\lim_{x_i \rightarrow +\infty} F_x(x_1, \dots, x_i, \dots, x_u) = 1$$

c) $\forall (x_1, \dots, x_u) \in \mathbb{R}^u, \forall (\epsilon_1, \dots, \epsilon_u) \in \mathbb{R}_+^u$ se verifica:

$$F_x(x_1 + \epsilon_1, \dots, x_u + \epsilon_u) = \sum_{i=1}^u F_x(x_1 + \epsilon_1, \dots, x_{i-1} + \epsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1} + \epsilon_i, \dots, x_u + \epsilon_u) \\ + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^u F_x(x_1 + \epsilon_1, \dots, x_{i-1} + \epsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1} + \epsilon_i, \dots, x_{j-1} + \epsilon_{j-1}, x_j, x_{j+1} + \epsilon_{j+1}, \dots, x_u + \epsilon_u) + \dots + \\ \text{(i) } F_x(x_1, \dots, x_u) \geq 0 \text{ porque lo quito 4 veces más del requerido}$$

De forma intuitiva buscamos conseguir la probabilidad de intervalos que sean resto de dos:



Puede resaltar que las propiedades hasta ahora vistas caracterizan la función de distribución de variables aleatorias. Además, toda función que los cumple es la función de distribución correspondiente a un vector aleatorio.

2.2. Teorema de correspondencia

Existe una correspondencia biunívoca entre las funciones de probabilidad P_X sobre $(\mathbb{R}^u, \mathcal{B}^u)$ y las funciones $F: \mathbb{R}^u \rightarrow [0, 1]$ que satisfacen las propiedades vistas. Dicha correspondencia está determinada por la relación

$$P[\{x \in \mathbb{R}^u\}] = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^u$$

Definición de función de distribución junto a lo que hay escrito justo.

Más concretamente:

- c) Si P_x es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, la función $F_x : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ tal que $F(x) = P_x[(-\infty, x)]$ satisface las propiedades vistas
- d) Recíprocamente, si $F_x : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ satisface las propiedades \Rightarrow $\exists P_x$ sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ verificando

$$P_x[(-\infty, x)] = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

↳ Cada función de distribución modela de forma única a su distribución.

Corolario

- a. La distribución de probabilidad de un vector aleatorio determina y es determinada por su función de distribución.
- b. Las propiedades vistas caracterizan a las funciones de distribución. Toda función que las cumpla es la función de distribución de un vector aleatorio.

Calculos de probabilidades en intervalos bidimensionales

$$\triangleright P[\alpha < X_1 < b, \alpha < X_2 < c] = P[X_1 < b, X_2 < c] - P[X_1 \leq \alpha, X_2 < c]$$

$$\triangleright P[\alpha < X_1 < b, X_2 < c] = P[X_1 < b, X_2 < c] - P[X_1 \leq \alpha, X_2 \leq c]$$

$$\triangleright P[X_1 < b, c < X_2 < d] = P[X_1 < b, X_2 < d] - P[X_1 < b, X_2 \leq c]$$

$$\triangleright P[X_1 < b, c < X_2 < d] = P[X_1 < b, X_2 < d] - P[X_1 < b, X_2 \leq c]$$

2.3 Vectores aleatorios discretos

Diremos que un vector aleatorio es discreto si su conjunto de posibles valores es numerable, es decir,

→ Espacio muestral
 $\exists E_x \subset \mathbb{R}^n$ numerable $| P_x(E_x) = P[x \in E_x] = 1$

Podemos ahora escribir el conjunto de valores del vector, definiendo la función masa de probabilidad como sigue

$$P_x : E_x \rightarrow [0,1]$$
$$x \mapsto P[x_1 = x_1, \dots, x_n = x_n]$$

que satisface las siguientes propiedades

i) $P[x = x] \geq 0 \quad \forall x \in E_x$

$$ii) \sum_{x \in E_x} P[x=x] = 1$$

Caracterización

Toda colección numerable de números no negativos de suma 1 constituye la función masa de probabilidad de algún vector aleatorio multivariante de tipo discreto

Definimos ahora la función de distribución de un vector aleatorio discreto como sigue

$$F_x(x) = P[X \leq x] = \sum_{\substack{x_i \in E_x \\ x_i \leq x}} P[x=x_i] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Caracterización

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbf{X}})$ es discreto ($\Leftrightarrow X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es una componente discreta)

2.4. Vectores aleatorios continuos

Un vector aleatorio $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbf{X}})$ es continuo si $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa e integrable que:

$$F = \int_{D_X} f_{\mathbf{X}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ donde } D_X = \prod_{i=1}^n (-\infty, x_i]$$

Esto se calcula componiendo los integrales en cada coordenada y es llamada función de distribución de \mathbf{X} , $f_{\mathbf{X}}$ es la función de densidad.

Además, $f_{\mathbf{X}}$ determina $F_{\mathbf{X}}$ y por tanto, $P_{\mathbf{X}}$:

$$P_{\mathbf{X}}(B) = P[\mathbf{X} \in B] = \int_B f_{\mathbf{X}}$$

Lo cual explica que, si E es acotado, $P[\mathbf{X} \notin E] = 0$.

propiedad de la integral

Propiedades de la función de densidad

- Para que sea función de densidad:
- i) No negativa, integrable y $\int_{\mathbb{R}^n} f_x(x) dx = 1$
 - ii) $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} f_x(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_i \rightarrow \infty} f_x(x_1, \dots, x_n) = 0$ (Estamos hacia la recta)
 - iii) f_x es continua salvo en un conjunto de puntos de medida nula \subset el conjunto de discontinuidades es numerable. Entonces, F_x es derivable en los puntos de continuidad $x = (x_1, \dots, x_n)$ tal que:
- $$\frac{\partial F_x(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1, \dots, \partial x_n} = f_x(x_1, \dots, x_n)$$
- iv) Si \mathcal{E} es un conjunto numerable $\Rightarrow P_x(\mathcal{E}) = 0$

Caracterización

\rightarrow Si $f_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de densidad de un vector aleatorio \Rightarrow es no negativa e integrable y su integral sobre \mathbb{R}^n vale 1.

\hookleftarrow Todo función $f_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, integrable y tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f_x(x) dx = 1$ es la función de densidad de algún vector aleatorio unidimensional de tipo continuo.

Proposición

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n): (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mu)$ un vector aleatorio de tipo ^{continuo} variables

$X_i: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_{X_i})$ es de tipo continuo.

Creo que es un sii.

2.5. Distribuciones conjuntas

Al considerar un vector aleatorio como un conjunto de variables, a la distribución del vector se le llama distribución conjunta y a la distribución de cada variable distribución marginal de dicho componente.

Dichas distribuciones marginales pueden obtenerse a partir de la distribución conjunta:

Si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vector con función de distribución $F_{\mathbf{X}}$ \Rightarrow tiene $F_{X_i}(x_i) = F_{\mathbf{X}}(+\infty, \dots, x_i, \underline{x_i}, \dots, +\infty)$; análogamente, $F_{X_{i_1}, \dots, X_{i_m}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = F_{\mathbf{X}}(+\infty, \dots, +\infty, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, +\infty, \dots, +\infty)$

Caso discreto

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vector aleatorio discreto con $P[X_i = x_i] = 1$ y función de probabilidad $P[\mathbf{X} = \mathbf{x}]$

Hc \mathbf{X}_i . Si X_i es una componente arbitraria y por tanto discreta con valores en E_{X_i} , entonces

su fp puede obtenerse a partir de la siguiente:

$$P[X_i = x_i] = \sum_{\substack{\mathbf{y} \in E_X \\ j \in I}} P[\mathbf{X} = \mathbf{y}] \quad \rightarrow \text{Sumar todos los valores que busquemos.}$$

$$= P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n]$$

La función de probabilidad de cualquier subvector se obtendrá de igual forma.

Caso continuo

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad $f_{\mathbf{X}}$ \Rightarrow cada X_i es de tipo continuo y su función de distribución es:

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i) dt_i$$

con

$$f_{X_i}(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_{i-1} dt_{i+1} \dots dt_n \quad \forall t_i \in \mathbb{R}$$

Integrar en todas las demás en x_i

La función de densidad marginal de cualquier subvector se obtendrá de igual forma.

2.6. Distribuciones condicionadas

Caso discreto

Distribución condicionada al valor de una variable

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio discreto y X_i una componente arbitraria y

$x_i^* \in \Omega / P[X_i = x_i^*] > 0 \Rightarrow$ Se define la distribución condicionada de $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ a $(X_i = x_i^*)$ como la determinada por la función de probabilidad:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n / X_i = x_i^*] = \frac{P[X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i^*, \dots, X_n = x_n]}{P[X_i = x_i^*]}$$

$P[X_i = x_i^*] \rightarrow$ marginal pi

\hookrightarrow Igual que lo anterior

$$\mathcal{E}_{X_i} = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) / (x_1, \dots, x_i^*, \dots, x_n) \in \mathcal{E}_X\}$$

Distribución condicionada a valores de varias variables

Sea $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_u)$ un vector aleatorio discreto y (z_{i1}, \dots, z_{iu}) un subvector arbitrario y

$(x_{i1}^*, \dots, x_{iu}^*) \in \mathbb{R}^u / P[z_{i1}=x_{i1}^*, \dots, z_{iu}=x_{iu}^*] > 0 \Rightarrow$ Se define la distribución condicionada de

$(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_u)$ a $(z_{i1}=x_{i1}^*, \dots, z_{iu}=x_{iu}^*)$ como lo determinada por la fdp:

$$P \left[z_1=x_1, \dots, z_{i-1}=x_{i-1}, z_{i+1}=x_{i+1}, \dots, z_{iu-1}=x_{iu-1}, z_{iu+1}=x_{iu+1}, \dots, z_u/x_{i1}=x_{i1}^*, \dots, z_{iu}=x_{iu}^* \right] =$$

$$= P[z_1=x_1, \dots, z_{i-1}=x_{i-1}^*, \dots, z_{iu}=x_{iu}^*, \dots, z_u=x_u]$$

$P[x_{i1}=x_{i1}^*, \dots, z_{iu}=x_{iu}^*] \rightarrow$ Igual pero con un subvector

$$\forall (z_1=x_1, \dots, z_{i-1}=x_{i-1}, z_{i+1}=x_{i+1}, \dots, z_{iu-1}=x_{iu-1}, z_{iu+1}=x_{iu+1}, \dots, z_u) / (z_{i1}=x_{i1}^*, \dots, z_{iu}=x_{iu}^*) \in \mathcal{E}$$

Caso continuo

Distribución condicionada al valor de una variable

Sea $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_u)$ un vector arbitrario continuo con función de densidad f_z . Sea x_i una

componente arbitraria y $x_i^* \in \mathbb{R} / f_{z_i}(x_i^*) > 0 \Rightarrow$ Se define la distribución condicionada de

$(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_u)$ a $(z_i=x_i^*)$ como lo determinada por la función de densidad:

$$f_{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_u / z_{i1}=x_{i1}^*} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_u / x_{i1}^*) = \frac{f_z(x_1, \dots, x_i^*, \dots, x_u)}{f_{z_i}(x_i^*)} \leftarrow \text{ver gráfico}$$

\hookrightarrow Igual que para

Distribución condicionada a valores de varias variables

Sea $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_u)$ un vector arbitrario continuo con función de densidad f_z . Sea (z_{i1}, \dots, z_{iu})

un subvector arbitrario y $(x_{i1}^*, \dots, x_{iu}^*) \in \mathbb{R}^u / f_{z_{i1}, \dots, z_{iu}}(x_{i1}^*, \dots, x_{iu}^*) > 0 \Rightarrow$ Se define

la distribución condicionada de $(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{iu-1}, z_{iu+1}, \dots, z_u)$ a $(z_{i1}=x_{i1}^*, \dots, z_{iu}=x_{iu}^*)$

como lo determinada por la función de densidad:

$$f_{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{iu-1}, z_{iu+1}, \dots, z_u / z_{i1}=x_{i1}^*, \dots, z_{iu}=x_{iu}^*} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{iu-1}, x_{iu+1}, \dots, x_u / x_{i1}^*, \dots, x_{iu}^*) =$$

$$= \frac{f_z(x_1, \dots, x_{i1}^*, \dots, x_{iu}^*, \dots, x_u)}{f_{z_{i1}, \dots, z_{iu}}(x_{i1}^*, \dots, x_{iu}^*)} \leftarrow \text{el subvector}$$

$$f_{z_{i1}, \dots, z_{iu}}(x_{i1}^*, \dots, x_{iu}^*) \leftarrow \text{el subvector}$$

2.7. Funciones de vectores aleatorios Cambio de variable

Son $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector aleatorio n -dimensional de una distribución de probabilidad gaussiana

(\mathcal{A}, Ω, P) y sea $g: (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ una transformación medible (apuntes análisis),

considerando $(\mathcal{A}', \Omega', P')$ otro espacio probabilístico donde obtenemos el vector

aleatorio m -dimensional $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = (g(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$; podemos hallar la distribución de \mathbf{y} a partir de la de \mathbf{x}

Para ello, obtenemos la siguiente fórmula general del cambio de variable

$$F_y(y) = P[Y \leq y] = P[g(\mathbf{x}) \leq y] = P[\mathbf{x} \in g^{-1}((-\infty, y])], y \in \mathbb{R}^m$$

Caso discreto a discreto

Supongamos ahora \mathbf{x} vector aleatorio de \mathbb{R}^n discreto y $g: (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ una transformación medible, $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = g(x_1, \dots, x_n)$ vector aleatorio m -dimensional con valores discretos en $g(\mathcal{E}_x)$ con función masa de probabilidad dada por

$$P[y_1=y_1] \cdot P[y_2=y_2] = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P[x=x], x \in \mathcal{E}_x, y \in g(\mathcal{E}_x)$$

Ejemplo

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

x_1	-1	0	1
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

c) Hallar la función masa de probabilidad conjunta de $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

Vemos que si eleguimos por $y_1 = |x_1|$ y $y_2 = x_2^2$ obtenemos que $y_1 \in \{0, 1\}$ y $y_2 \in \{1, 4\}$; luego

y_1	0	1
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P[\mathbf{y} = (y_1, y_2)] = \sum_{\substack{x_1, x_2 \\ y_1 = |x_1| \\ y_2 = x_2^2}} P[\mathbf{x} = (x_1, x_2)]$$

A partir de ahora, tomaremos el mismo enunciado salvo que sea continuo o discreto

Continuo a discreto

$$P[Y=y] = P[X \in g^{-1}(\{y\})] = \int_{g^{-1}(\{y\})} f_x(x) dx, y \in \mathbb{R}^m$$

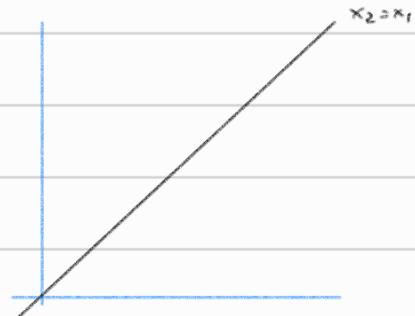
Ejemplo

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad $f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2) = \gamma e^{-\lambda x_1 - \mu x_2}$ para $x_1, x_2 \geq 0$, $\gamma, \lambda, \mu > 0$

Sea la transformación $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 > x_2 \\ 1 & \text{si } x_1 \leq x_2 \end{cases}$. Calcula la fp de Y.

$$P[Y=0] = P[X_1 > X_2] = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{\mathbf{x}}(u, v) du dv = (\text{calcular}) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$P[Y=1] = P[X_1 \leq X_2] = \int_0^\infty \int_v^\infty f_{\mathbf{x}}(u, v) du dv = (\text{calcular}) = 1 - P[Y=0] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$



Continuo a continuo

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[g(\mathbf{x}) \leq y] = P[\mathbf{x} \in g^{-1}((-\infty, y])] = \int_{g^{-1}((-\infty, y))} f_{\mathbf{x}}(x) dx, y \in \mathbb{R}^m$$

No obstante, para poder realizar el cálculo de variable de forma más sencilla y poder pasar a la función de densidad a través de la función masa de probabilidad aparece el siguiente teorema

Teorema de cambio de variable de continuo a continuo

Sea $\mathbf{x}: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathbb{P}_X)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad

$f_{\mathbf{x}}(x)$ y $g: (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ una función medida (tal que

$$\text{i)} \exists g^{-1}: (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

ii) ambas derivadas parciales de g^{-1} son continuas $\Rightarrow g^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

iii) El determinante de la matriz jacobiana ($\det(J(g^{-1}))$) es no nulo:

$$\det(J(g^{-1})) \neq 0$$

Entonces, el vector aleatorio $Y = g(\mathbf{x})$ es de tipo continuo con función de densidad

$f_Y: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

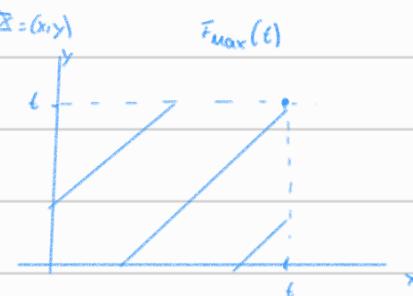
$$f_Y(y) = f_{\mathbf{x}}(g^{-1}(y)) |\det(J(g^{-1}))|$$

2.8. Distribución del máximo y del mínimo

Son $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector aleatorio con función de distribución $F_{\mathbf{x}}$, entonces:

•) Definimos el vector aleatorio $\text{Max} = \max(x_1, \dots, x_n)$ donde

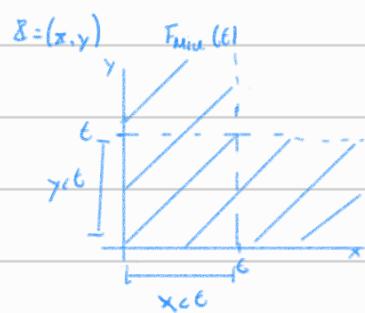
$$F_{\text{Max}}(x) = P[\text{Max} \leq x] = P[x_1 \leq x, \dots, x_n \leq x] = F_{\mathbf{x}}(x, \dots, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



•) Definimos el vector aleatorio $\text{Min} = \min(x_1, \dots, x_n)$ donde

$$F_{\text{Min}}(x) = P[\text{Min} \leq x] = 1 - P[\text{Min} > x] = 1 - P[x_1 > x, \dots, x_n > x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

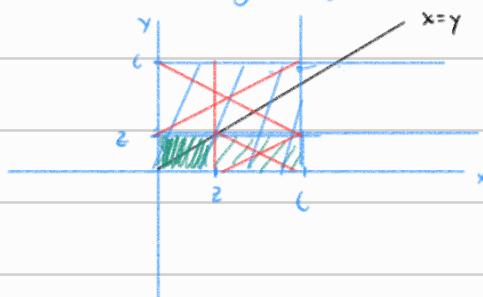
Intuitivamente buscamos calcular la probabilidad de que el $\min(x_1, \dots, x_n)$ esté por debajo de un valor $t \in \mathbb{R}$ de manera que no todos debieran estar por debajo de ese valor.



De forma conjunta, sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector aleatorio, definimos la función de distribución conjunta del máximo y el mínimo como sigue:

$$F_{\text{Max}, \text{Min}}(t, z) = P[\text{Max} \leq t, \text{Min} \geq z] = \begin{cases} P[\text{Max} \leq t] = F_{\mathbf{x}}(t, \dots, t) & t \leq z \\ P[\text{Max} \leq t] - P[\text{Max} \leq t, \text{Min} \geq z] & t > z \end{cases}$$

Gráficamente, se ve de la siguiente forma, sea $\mathbf{x} = (x, y)$, $F_{\text{Max}, \text{Min}}(t, z)$ será $(t, z) \in E$



Representa $P[\text{Max} \leq t, \text{Min} \geq z]$, es decir, que cada coordenada esté entre los dos valores que queremos evaluar

2.9. Esperanza Matemática

Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector aleatorio n -dimensional. La esperanza matemática definida como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}: \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow [\mathbb{R}^n]^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathcal{E}[\mathbf{x}]\end{aligned}$$

donde $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ es el espacio de las funciones de Ω en \mathbb{R}^n donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un espacio muestral, si existe y vendrá dada por el vector de las esperanzas de cada componente

$$\mathcal{E}[\mathbf{x}] = (\mathcal{E}[x_1], \dots, \mathcal{E}[x_n]) = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$$

Como consecuencia, la esperanza matemática de un vector aleatorio $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ existe si existen las esperanzas matemáticas de todos y cada uno de sus componentes.

De la misma manera $\mathcal{E}[\mathbf{x}] \in (\mathbb{R}, \dots, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathcal{E}[x_i] \text{ con } \forall i \in \{1, \dots, n\}$

¿Cómo calcularla?

Para el caso de una componente $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$ puedo hacerlo a través de la distribución conjunta o a partir de la marginal.

\Rightarrow Caso discreto

$$\mathcal{E}[x_i] = \sum_{x_j} x_i P[x_i = x_j] = \sum_{x_1, \dots, x_n} x_i P[x_1 = x_1, \dots, x_n = x_n] \quad (\text{salí mal notado})$$

\Rightarrow Caso continuo

$$\mathcal{E}[x_i] = \int_{\mathbb{R}} x_i f_{x_i}(x_i) dx_i = \int_{\mathbb{R}^n} x_i f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Propiedades

i) Abiertoedad: $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, si $\exists \mathcal{E}[x_i] \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \exists \mathcal{E}[a_i + b_i x_i] \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Ejemplos:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n a_i + b_i x_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i + b_i \mathcal{E}[x_i]$$

ii) Conservación del orden: Si x_1, x_2 son variables aleatorias independientes tales que $x_1 \leq x_2$

y $\mathbb{E}[x_1], \mathbb{E}[x_2]$ existen $\mathbb{E}[x_1] \leq \mathbb{E}[x_2]$

Esperanza de la transformación

Sea $g: \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ una función medida, tal que $Y = g(X)$ variable aleatoria unidimensional, también. Entonces:

- Caso discreto:

$$\mathbb{E}[g(x)] \Leftrightarrow \sum_{x_1, \dots, x_n} |g(x)| P[X_1=x_1, \dots, X_n=x_n] \text{ con}$$

Y en caso de existir

$$\mathbb{E}[g(x)] = \sum_{x_1, \dots, x_n} g(x_1, \dots, x_n) P[X_1=x_1, \dots, X_n=x_n]$$

- Caso continuo

$$\mathbb{E}[g(x)] \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |g(x_1, \dots, x_n)| f_x(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \text{ con}$$

Y en caso de existir

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_x(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

2.10. Momentos centrados y no centrados

Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector aleatorio y $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se define el momento no centrado de orden (k_1, \dots, k_n) como $\mathbb{E}[x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}]$, siempre y cuando exista.

- Caso discreto:

$$w_{k_1, \dots, k_n} = \mathbb{E}[x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}] = \sum_{x_1, \dots, x_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} P[X_1=x_1, \dots, X_n=x_n]$$

- Caso continuo:

$$w_{k_1, \dots, k_n} = \mathbb{E}[x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}] = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} f_x(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Si buscamos calcular los momentos no centrados de la variable aleatoria $X_i, i \in \mathbb{N}_n$ basta

con aplicar lo mismo teniendo $k_1 = k_2 = \dots = k_{i-1} = k_{i+1} = \dots = k_n = 0$

Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector aleatorio y $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se define el momento centrado

de orden (k_1, \dots, k_n) como $\mathbb{E}[(x_1 - \mathbb{E}[x_1])^{k_1} \dots (x_n - \mathbb{E}[x_n])^{k_n}] = \mu_{k_1, \dots, k_n}$, siempre y cuando existan $\mathbb{E}[x_i]$ basta

Algunos casos particulares son, para un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ bidimensional

$$w_{01} = \mathbb{E}[x_2^0], w_{00} = \mathbb{E}[x_1^0], w_{11} = \mathbb{E}[x_1 x_2]$$

$$\mu_{10} = 0, \mu_{01} = 0, \mu_{20} = \text{Var}[x_2] = \mathbb{E}[x_2^2] - \mathbb{E}[x_2]^2, \mu_{02} = \text{Var}[x_1] = \mathbb{E}[x_1^2] - \mathbb{E}[x_1]^2, \mu_{11} = \text{Cov}[x_1, x_2] = w_{11} - w_{01} w_{00}$$

Matriz de covarianzas

A raíz de estos momentos se define, para un vector aleatorio n -dimensional la matriz de covarianzas de la siguiente forma.

$$\text{Cov}_x \left((\text{Cov}(x_i, x_j))_{i,j=1,\dots,n} \right)$$

Siendo para el caso bidimensional

$$\text{Cov}_x = \begin{pmatrix} \text{Var}[x_1] & \text{Cov}[x_1, x_2] \\ \text{Cov}[x_2, x_1] & \text{Var}[x_2] \end{pmatrix}$$

2.1. Función generatriz de momentos

Dado un vector aleatorio $x = (x_1, \dots, x_n)$ n -dimensional, su función generatriz de momentos se define como

$$M_x(t_1, \dots, t_n) = E[e^{t_1 x_1 + \dots + t_n x_n}]$$

dónde $t_i \in (-\infty, \infty)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ $i=1, \dots, n$

Teorema (de unicidad)

Si existe una función generatriz de momentos de un vector aleatorio, determina de forma única su distribución de probabilidad

Relación entre los momentos y la función generatriz de momentos

Si $\exists M_{x_1, \dots, x_n} \Rightarrow \exists m_{n_1, \dots, n_n}$ calculables por la fórmula

$$m_{n_1, \dots, n_n} = \left. \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_n}}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_n^{n_n}} M_x(t_1, \dots, t_n) \right|_{t_1=0, \dots, t_n=0}$$

Funciones generatrices marginales

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ tiene función generatriz de momentos $M_x(t_1, \dots, t_n) \Rightarrow \exists M_{x_i, x_j}(t_i, t_j)$, respectivamente dada por

$$M_{x_i, x_j}(t_i, t_j) = M_{x_1, \dots, x_n}(0, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, 0)$$