1 Definición y caracterizaciones

Sean $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\forall i \in \Delta_n$ variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio n-dimensional.

Diremos que X_i son independientes sii se cumple que

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Caracterización para caso discreto

Supongamos X_i discreta $\forall i \in \Delta_n$ y $X = (X_1, \dots, X_n)$ discreto entonces diremos que X_i son independientes sii:

1. $P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1] \dots P[X_n = x_n]$
2. $P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = h_1(x_1) \dots h_n(x_n)$

$\forall x_i \in \mathbb{R}, i \in \Delta_n$ con h_i arbitraria $\forall i \in \Delta_n$

Caracterización para caso continuo

Supongamos X_i continua $\forall i \in \Delta_n$ y $X = (X_1, \dots, X_n)$ continuo entonces diremos que X_i son independientes sii:

1. $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$
2. $f_X(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1) \dots h_n(x_n)$

$\forall x_i \in \mathbb{R}, i \in \Delta_n$ con h_i arbitraria $\forall i \in \Delta_n$

Caracterización de independencia por conjuntos de Borel

Sean $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\forall i \in \Delta_n$ variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad; entonces X_i son independientes sii

$$P[X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n] = P[X_1 \in B_1] \dots P[X_n \in B_n] \quad \forall B_i \in \mathcal{B}, i \in \Delta_n$$

2 Propiedades

1. Sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria $\mid P[X = x] = 1 \Rightarrow X$ es siempre independiente de cualquier otra.

2. Sean $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \Delta_n$ variables aleatorias independientes, entonces, $(X_i, \dots, X_j)$ con $1 \leq i \leq j \leq n$ son independientes entre sí

3 Sean $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \Delta_n$ variables aleatorias independientes, entonces

$$f_{X_i / (X_j, \dots, X_k)}(x) = f_{X_i}(x) \quad \forall i \in \Delta_n, \ 1 \leq j \leq k \leq n \quad i \notin \{j, \dots, k\}$$

4. Sean $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \Delta_n$ variables aleatorias independientes y $\exists M_{X_i}(t) \ \forall t \in (-a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$, $i \in \Delta_n$; entonces $\exists M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n)$ con $t_i \in (-a_i, b_i) \ \forall i \in \Delta_n$ y se tiene que

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = M_{X_1}(t_1) \dots M_{X_n}(t_n)$$

5. Sean $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \Delta_n$ variables aleatorias independientes y $g_i : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ funciones medibles $\forall i \in \Delta_n$; entonces $g_i(x_i)$ son independientes $\forall i \in \Delta_n$

3. Teorema de multiplicación de esperanzas

Teorema

Sean $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \Delta_n$ variables aleatorias independientes definidas sobre un mismo espacio de probabilidad entonces:

i) Si $\exists E[X_i] \ \forall i \in \Delta_n \Rightarrow E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$

ii) $Cov(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i, j \in \Delta_n \mid i \neq j$

iii) Si $\exists E[X_i^2] \ \forall i \in \Delta_n \Rightarrow Var[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i]$ $a_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \Delta_n$

Corolario

Sean $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \Delta_n$ variables aleatorias independientes definidas sobre un mismo espacio de probabilidad y $g_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función medible $\forall i \in \Delta_n$ entonces

i) $g_i(x_i)$ son independientes $\forall i \in \Delta_n$

ii) $E[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)] = \prod_{i=1}^{n} E[g_i(X_i)]$

4 Independencia para familias de variables aleatorias

Diremos que una familia arbitraria es una colección de variables aleatorias que, como mucho, será infinita numerable.

Usando esto, diremos que una familia arbitraria $\{X_t, t\in T\}$ donde $T\subseteq \mathbb{N}$ son independientes dos a dos cuando X_i es independiente de X_j $\forall i,j\in T, i\neq j$

De la misma manera, diremos son mutuamente independientes si $\forall n\in\mathbb{N}$, las variables aleatorias $X_{t_1},\dots,X_{t_n}$ son independientes, $t_1,\dots,t_n\in T$

Una implicación que se ve claramente es:

Independencia mutua $\Rightarrow$ Independencia dos a dos

Pero la recíproca es falsa.

5. Propiedades reproductivas

Describiremos sólo las distribuciones reproductivas de variables aleatorias continuas; consideraremos X_i v.a que se rigen por una distribución mutuamente independientes:

Normal

$$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

-Demostración-

$$M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}} \quad \forall i\in\Delta_n$$

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}} = e^{\sum_{i=1}^n \mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}} = e^{\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right)t + \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)t^2}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

Gamma

$$X_i \sim \Gamma(v_i,\lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n v_i, \lambda\right)$$

Erlang

$$X_i \sim \mathcal{E}(n_i,\lambda) \Rightarrow \sum_{i=1} X_i \sim \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^n n_i, \lambda\right)$$

Exponencial

$$X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{E}(n,\lambda)$$