Análisis Matemático I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 4

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

a) Conjunto acotado en un espacio métrico

b) Espacio métrico compacto

c) Espacio métrico conexo

2. Conocer y comprender los siguientes resultados:

a) Preservación de la compacidad por funciones continuas

b) Preservación de la conexión por funciones continuas

3. Conocer los siguientes resultados, incluyendo su demostración:

a) Teorema de Bolzano-Weierstrass

b) Teorema de Hausdorff

1.

a) Se dice que $A \subset E$ subconjunto de un espacio métrico está acotado cuando está incluido en una bola, es decir:

$$A \subset E \text{ acotado} \iff \forall x \in E\ \exists r \in \mathbb{R}^+ / A \subset B(x,r)$$

Si tomamos $x_0 \in E$, $r_0 \in \mathbb{R}^+$, es fácil ver gracias a la desigualdad triangular que $\forall a \in A$

$$d(x,a) \leq d(a,x_0) + d(x_0,x) < r + d(x_0,x)$$ por el acotado por $B(x_0,r_0)$

Por tanto, todo subconjunto finito de un espacio métrico está acotado.

Si pensamos en sucesiones, diremos que $\{x_n\}$ está acotada sii $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado. De otra forma, si $\exists z \in E$ / $\{d(x_n,z)\}$ está acotada. Por tanto $\{x_n\} \to x$ sii $\{d(x_n,x)\} \to 0$ de esta manera caracterizamos la convergencia de sucesiones.

En un espacio métrico, toda sucesión convergente está acotada. Sin embargo el recíproco es falso.

b) Decimos que un espacio métrico $\mathcal{E}$ es compacto cuando toda sucesión de puntos del espacio admite una parcial convergente. Diremos que un subconjunto $A \subset \mathcal{E}$ es compacto sii $(A, d_{|A})$ es un espacio métrico compacto.

Es fácil ver que es una noción topológica ya que viene definida usando sucesiones.

Si tomamos el caso de $\mathbb{R}^N$, diremos que $A \subset \mathbb{R}^N$ compacto $\Leftrightarrow$ A cerrado y acotado.

Si no es $\mathbb{R}^N$ $\Leftarrow$ es falso.

c) Diremos que un espacio métrico $\mathcal{E}$ es conexo cuando no se puede escribir como unión de dos abiertos disjuntos, es decir:

$$\mathcal{E} \neq \mathcal{U} \cup V \quad \text{con} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\circ}, V = V^{\circ}, \mathcal{U} \cap V = \emptyset$$

Diremos que un subconjunto es conexo cuando $(A, d_{|A})$ es conexo.

En $\mathbb{R}^N$ los conexos son los intervalos.

Además, podemos afirmar que un conjunto es conexo sii los únicos abiertos y a la vez cerrados son el vacío y el total.

Como caracterización:

Son equivalentes:

i) $\mathcal{E}$ conexo

ii) La imagen por $f: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ continua es un intervalo

iii) Toda función continua $f: \mathcal{E} \to \{0,1\}$ es constante.

2. a) Teorema de Weierstrass. Sean E, F dos espacios métricos y $f: E \to F$ continua. Si E compacto $\Rightarrow f(E) \subset F$ es un subconjunto compacto de F.

Esto nos lleva a pensar la existencia de un máximo y un mínimo de dicha función; como es compacto es acotado $\Rightarrow$ tiene sup. e ínfimo $\Rightarrow \exists u, v \; \left| \begin{array}{l} f(u) = \inf\{f(E)\} \\ f(v) = \sup\{f(E)\} \end{array} \right.$

pero como es cerrado $\Rightarrow f(u), f(v) \in \overline{f(E)} = f(E) \Rightarrow$ son mínimo y máximo.

b) Sean E, F espacios métricos y $f: E \to F$ continua. Si E es conexo $\Rightarrow f(E) \subset F$ es un subconjunto conexo de F. Si tomamos $F = \mathbb{R}$ y consideramos E compacto y conexo, gracias al enunciado anterior $f(E) \subset \mathbb{R}$ compacto y conexo $\Rightarrow f(E)$ es un intervalo cerrado y acotado.

3 a) $\boxed{\text{TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS}}$ Toda sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$ admite una parcial convergente.

Veamos por <u>INDUCCIÓN</u>:

<u>$N=1$</u>

Por años anteriores cierto

Supongámoslo cierto para $\mathbb{R}^N$, ¿lo es para $\mathbb{R}^{N+1}$?

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^{N+1}$, tomamos otra sucesión $\{y_n\}$ |

$y_n(k) = x_n(k) \; \forall k \in \Delta_N \Rightarrow \{y_n\}$ es una sucesión de vectores de $\mathbb{R}^N$ acotada. Usando la hipótesis de inducción, $\exists \varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid \{y_{\varphi(n)}\}$ es convergente y

$x_{\varphi(n)}(k) = y_{\varphi(n)}(k) \; \forall k \in \Delta_N \Rightarrow$ converge $\forall k \in \Delta_N$.

Veamos ahora que ocurre con $\{x_n(N+1)\}$, realmente tomamos $\{x_{\varphi(n)}(N+1)\}$, sucesión de vectores de $\mathbb{R}$ acotada $\Rightarrow \exists \tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \{x_{\varphi(\tau(n))}(N+1)\}$ es convergente. Luego si consideramos la parcial $\sigma = \varphi \circ \tau$ obtenemos que $\{x_{\varphi(\tau(n))}(k)\}$ es converg. $\forall k \in \Delta_N$ y por lo visto anteriormente es convergente para $\mathbb{R}^{N+1} \Rightarrow \{x_{\sigma(n)}\}$ converge.

b) Teorema de Hausdorff.

- Todas las normas de $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.

Bastará con ver que toda norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es equivalente a la norma de la suma.

Sea $x \in \mathbb{R}^N$, $\beta = \beta_u$ base de $\mathbb{R}^N$

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{N} x_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{N} |x_k| \|e_k\| \leq \rho \|x\|_1 \text{ donde } \rho = \max\{\|e_k\| : k \in \Delta_N\}$$

Gracias a esto ya tenemos la primera desigualdad.

Para buscar la otra vamos a tomar $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_1 = 1\}$, que es cerrado y acotado $\Rightarrow$ compacto para $(\mathbb{R}^N, T_u)$. Además $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función continua, luego tenemos:

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \leq \rho \|x-y\|_1 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N$$

Como $\|\cdot\|$ es continua $\Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R}^N$ / $\|x_0\| = \min\{\|x\| : x \in \mathbb{R}^N\}$, si llamamos $\lambda = \|x_0\| \Rightarrow$ tenemos que si $\frac{x}{\|x\|_1} \in S$

$$\lambda \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \Leftrightarrow \lambda \|x\|_1 \leq \|x\|$$ de donde obtenemos la segunda desigualdad.

- Todas las normas de un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes:

Si X es un espacio vectorial de dimensión $N \in \mathbb{N}$ $\exists f : X \to \mathbb{R}^N$ biyectiva lineal que "traslada" cualquier norma de X a $\mathbb{R}^N$ y f^{-1} viceversa $\Rightarrow \forall x \in X$ tomamos $y = f(x)$ donde $f(x) \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \lambda \|y\|_1' \leq \|y\|_2' \leq \rho \|y\|_1'$ $\forall y \in \mathbb{R}^N$. Entonces $\forall x \in X$ podemos tomar $y = f(x)$ para obtener que

$$\lambda \|x\| = \lambda \|y\|_1' \leq \|y\|_2' = \|x\|_2 \text{ y } \|x\|_2 = \|y\|_2' \leq \rho \|y\|_1' = \rho \|x\|_1 \quad \blacksquare$$