

Apuntes



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Autor: Lucas Hidalgo Herrera

Grado: Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Asignatura: Curvas y Superficies

Profesor:

Fecha: 18 de febrero de 2026

Índice General

1	Introducción y motivación	2
1.1	Contraste de las distintas geometrías	2
2	Curvas en el plano y en el espacio	4
2.1	Curvas parametrizadas. Curvas regulares. Longitud de arco	4
2.2	Teoría local de curvas regulares planas: curvatura y diedro de Frenet .	4
2.3	Teoría local de curvas regulares en el espacio: curvatura, torsión y triedro de Frenet	4
2.4	Teorema fundamental de curvas en el espacio	4
3	Superficies en el espacio	4
3.1	Definición de superficie y ejemplos	4
3.2	El cambio de parámetros. Funciones y aplicaciones diferenciables sobre superficies	4

1 Introducción y motivación

A lo largo de la carrera se han estudiado una serie de geometrías, en este documento, se estudiará la última de ellas, séase **Curvas y Superficies**.

Antes de nada, aún no sabemos, ni siquiera de forma vulgar y cotidiana lo que es una geometría aunque la hayamos trabajado varios años. Ésta es, el estudio **cuantitativo** de las formas y su evolución para ciertas figuras en el espacio; es decir, vamos a estudiar qué aspecto y qué deformaciones podemos realizar a figuras del plano euclídeo o del espacio euclídeo tridimensional.

Aún así, no hemos definido lo que es una forma o una figura, pese a que su uso cotidiano nos permite tener una intuición de la materia que estudiamos.

Por último, antes de realizar un contraste de las distintas asignaturas que hemos visto, cabe destacar que el estudio que vamos a realizar es de carácter cuantitativo, es decir, no se va a asemejar al estudio de las formas y figuras de otras áreas como pueden ser el arte, la arquitectura, la moda...

1.1 Contraste de las distintas geometrías

Como ya recalcamos en la motivación, para saber dónde nos encontramos y hacia dónde nos dirigimos, vamos a realizar un contraste entre las asignaturas relacionadas con alguna de las áreas de la geometría, véase la figura 1; estas son: *Geometría I*, *Geometría II*, *Geometría III*, *Topología I*, *Topología II* y *Curvas y Superficies*.

Una vez visto esto, podríamos ya determinar que este documento pretende realizar una breve introducción al área que se conoce como **Geometría diferencial**¹.

¹Actualmente, por motivos económicos, el nombre de esta disciplina suele ser **Análisis geométrico**

Cuadro 1: Contraste de las geometrías

Asignatura	Espacio ambiente	Figuras	Soporte matemático	Área de estudio
Geometría I	Espacio vectorial	Subespacios vectoriales: rectas, planos, etc.	Espacio vectorial: $\cup, +$	Polinomios homogéneos de primer grado
Geometría II	Espacio métrico	Subespacios vectoriales: rectas, planos, etc.	Espacio vectorial con métrica: $\cup, +, \perp, \triangleleft$	Polinomios homogéneos de primer grado
Geometría III	Espacio afín métrico	Subespacios afines: rectas, planos, etc.	Espacio vectorial con métrica: $\cup, +, \perp, \triangleleft$, distancias, cónicas, cuádricas, etc.	Geometría algebraica
Topología I	ninguno / espacio topológico	Subespacios topológicos	Topología del espacio topológico: homeomorfismo de conjuntos	Topología introductoria
Topología II	ninguno / espacio topológico	Subespacios topológicos	Topología del espacio topológico: homeomorfismo de conjuntos y teoría de grupos	Topología algebraica
Curvas y Superficies	curvas: \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 superficies: \mathbb{R}^3	Curvas y superficies	Todas las herramientas anteriores junto al análisis	Geometría diferencial

2 Curvas en el plano y en el espacio

- 2.1 Curvas parametrizadas. Curvas regulares. Longitud de arco
- 2.2 Teoría local de curvas regulares planas: curvatura y diedro de Frenet
- 2.3 Teoría local de curvas regulares en el espacio: curvatura, torsión y triedro de Frenet
- 2.4 Teorema fundamental de curvas en el espacio

3 Superficies en el espacio

- 3.1 Definición de superficie y ejemplos
- 3.2 El cambio de parámetros. Funciones y aplicaciones diferenciables sobre superficies