1. Se estudian las plantas de una determinada zona donde ha atacado un virus. La probabilidad de que cada planta esté contaminada es 0.35.

a) ¿Cuál es el número esperado de plantas contaminadas en 5 analizadas?

b) Calcular la probabilidad de encontrar entre 2 y 5 plantas contaminadas en 9 exámenes.

c) Hallar la probabilidad de encontrar 4 plantas no contaminadas en 6 análisis.

a) Estamos frente a una distribución binomial donde definimos X como el número de plantas contaminadas de 5 analistas

Luego.

$$X \sim B(5, 0'35) \quad , \quad E[X] = 5 \cdot 0'35 = 1'75$$

Es decir, el número pedido es 1'75 plantas

b) En este caso, tomamos Y = número de plantas contaminadas en 9 analizadas y vemos que

$$Y \sim B(9, 0'25)$$

Debemos tener cuidado sobre qué tabla usamos

Pretendemos calcular

$$P[2 \leq Y \leq 5] = F(5) - F(1) = 0'9464 - 0'1211 = 0'8253$$

c) En este caso, definimos Z como el número de plantas no contaminadas en 6 análisis, que viene modelada por la distribución binomial

$$Z \sim B(6, 0'65)$$

Luego $P[Z=4] = 0'328$

3. Un pescador desea capturar un ejemplar de sardina que se encuentra siempre en una determinada zona del mar con probabilidad 0.15. Hallar la probabilidad de que tenga que pescar 10 peces de especies distintas de la deseada antes de:

a) pescar la sardina buscada,

b) pescar tres ejemplares de la sardina buscada.

a) En este caso, nos encontramos frente a una distribución geométrica, con parámetro $p = 0'15$, donde definimos la v a X dada por el número de peces pescados antes de la primera sardina luego.

$$X \sim \mathcal{G}(0'15)$$

Además, sabemos que $F_X(10) = P[X \leq 10]$, luego $P[X=10] = F_X(10) - F_X(9)$ es decir:

$$P[X=10] = 0'02953$$

b) Ahora nos trasladamos a una distribución binomial negativa donde X_1 será el número de peces pescados antes de la tercera sardina, es decir

$$X_1 \sim BN(3, 0'15)$$

luego lo que nos piden es:

$$P[X_1 = 10] = \frac{12!}{2\ 10!}(1-0'15)^{10}\, 0'15^3 = 0'04385$$

5. Se capturan 100 peces de un estanque que contiene 10000. Se les marca con una anilla y se devuelven al agua. Transcurridos unos días se capturan de nuevo 100 peces y se cuentan los anillados.

   a) Calcular la probabilidad de que en la segunda captura se encuentre al menos un pez anillado.

   b) Calcular el número esperado de peces anillados en la segunda captura.

Gracias al enunciado, sabemos que la probabilidad de obtener un pez anillado es del 0'01.

a) Sea X la v.a que determina si se obtiene pez anillado o no en la captura, vemos que sigue una distribución binomial con parámetros

$$X \sim B(2, 0'01)$$

luego $P[X \leq 1] = P[X=0] + P[X=1] = F_X(1) = 0'9999$

b) En este caso, $E[X] = np = 2\ 0'01 = 0'02$

7. En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una línea de ensamble. La probabilidad de que cada unidad sea defectuosa es 0.05.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentra defectuosa?

   b) ¿Cuántas unidades deben inspeccionarse por término medio hasta encontrar cuatro defectuosas?

   c) Calcular la desviación típica del número de unidades inspeccionadas hasta encontrar cuatro defectuosas.

a) Nos encontramos frente a una distribución binomial negativa donde denotaremos por X al número de unidades inspeccionadas antes de la segunda defectuosa luego

$$X \sim BN(2, 0'05)$$

Por tanto, $P[X=19] = 0'018867$

b) Ahora, tomando X_1 como número de unidades inspeccionadas antes de la cuarta defectuosa obtenemos que $X_1 \sim BN(4, 0'05)$ luego $E[X_1] = \frac{4(1-0'05)}{0'05} = 76$

c) Siguiendo con la distribución anterior, $Var[X_1] = \frac{E[X_1]}{p} = 1520$

8. Los números 1,2,3,...,10 se escriben en diez tarjetas y se colocan en una urna. Las tarjetas se extraen una a una y sin devolución. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

   a) Hay exactamente tres números pares en cinco extracciones.

   b) Se necesitan cinco extracciones para obtener tres números pares.

   c) Obtener el número 7 en la cuarta extracción.

a) En este caso, llamaremos X al nº de pares obtenidos en cinco extracciones. Nos encontramos frente a una distribución binomial luego

$$X \sim B(5, 0'5)$$

$P[X=3] = F_X(3) - F_X(2) = 0'8125 - 0'5 = 0'3125$

b) Pasamos ahora a una distribución binomial negativa donde X_1 es el número de extracciones realizadas antes del 3er nº par obtenido, luego

$$X_1 \sim BN(3, 0'5)$$

$P[X_1 = 5] = 0'082$

c) Sea X_2 la v.a que representa obtener un 7 en la cuarta tirada vemos que

$$X_2 \sim G(0'1)$$

luego $P[X_2 = 3] = F_{X_2}(3) - F_{X_2}(2) = 0'271 - 0'19 = 0'081$

9. Supongamos que el número de televisores vendidos en un comercio durante un mes se distribuye según una Poisson de parámetro 10, y que el beneficio neto por unidad es 30 euros.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el beneficio neto obtenido por un comerciante durante un mes sea al menos de 360 euros?

   b) ¿Cuántos televisores debe tener el comerciante a principio de mes para tener al menos probabilidad 0.95 de satisfacer toda la demanda?

a) Para obtener 360 € es necesario vender 12 televisores luego, si X es el número de televisores vendidos, tenemos que $P[X<12] = F_X(11) = 0'6968$ luego $P[X \geq 12] = 1 - F_X(11) = 1 - 0'6968 = 0'3032$

b) Para que $P[X=x] \geq 0'95$, necesitamos ver que x debe ser 15 para que $P[X=x] \geq 0'95$

luego a inicios de mes debe tener disponibles 15 televisores

2. Cada vez que una máquina dedicada a la fabricación de comprimidos produce uno, la probabilidad de que sea defectuoso es 0.01.

a) Si los comprimidos se colocan en tubos de 25, ¿cuál es la probabilidad de que en un tubo todos los comprimidos sean buenos?

b) Si los tubos se colocan en cajas de 10, ¿cuál es la probabilidad de que en una determinada caja haya exactamente 5 tubos con un comprimido defectuoso?

a) Nos encontramos frente a una distribución binomial donde X_1 es el número de comprimidos defectuosos en un tubo de 25 comprimidos. Es decir:

$$X_1 \sim B(25, 0'01)$$

Luego $P[X_1=0] = 0'777821$

b) Para ello, debemos calcular la probabilidad de que 1 tubo sea defectuoso, donde usaremos una distribución binomial con X_2 la v.a. que representa el número de comprimidos defectuosos en 25 fabricados. Es decir:

$$X_2 \sim B(25, 001)$$

Luego $P[X_2 = 1] = 0'1964$ es la probabilidad de que salga un tubo con 1 sólo comprimido defectuoso

Ahora, tomando por X_3 el número de tubos defectuosos en una caja con 10 tubos, vemos que viene representada por una distribución binomial

$$X_3 \sim B(10, 0'1964)$$

Luego $P[X_3=5] = 0'02467$

4. Un científico necesita 5 monos afectados por cierta enfermedad para realizar un experimento. La incidencia de la enfermedad en la población de monos es siempre del 30%. El científico examinará uno a uno los monos de un gran colectivo, hasta encontrar 5 afectados por la enfermedad.

   a) Calcular el número medio de exámenes requeridos.

   b) Calcular la probabilidad de que encuentre 10 monos sanos antes de encontrar los 5 afectados.

   c) Calcular la probabilidad de que tenga que examinar por lo menos 20 monos.

Según el enunciado, la probabilidad de que un mono esté afectado es del 0'3

a) Es claro que nos encontramos ante una distribución binomial negativa donde X_1 representaría el número de exámenes requeridos antes del quinto mono afectado luego $E[X_1] = \frac{5(1-0'3)}{0'3} = 11'6$

luego el número medio de exámenes requeridos es 11'6

b) $P[X_1 = 10] = 0'06871$

c) $P[X_1 \geq 20] = 1 - P[X_1 = 19] = 1 - 0'2453 = 0'7547$

6. Cada página impresa de un libro tiene 40 líneas, y cada línea tiene 75 posiciones de impresión. Se supone que la probabilidad de que en cada posición haya error es $1/6000$.

   a) ¿Cuál es la distribución del número de errores por página?

   b) Calcular la probabilidad de que una página no contenga errores y de que contenga como mínimo 5 errores.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que un capítulo de 20 páginas no contenga errores?

Este ejercicio se basa en composición de distribuciones binomiales y se deja al lector a modo de repaso.