Demostrar que, considerando $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ y $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son estimadores insesgados de β_0 y β_1 respectivamente.

Partimos de que el modelo lineal general de Gauss-Markov nos dice que, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad \text{para } i=1,2,\dots,n \tag{3.1}$$

con ε_i la componente i-ésima del vector de residuos.

Veamos la insesgadez de $\hat{\beta}_1$. Usando la definición del modelo dada en (3.1) junto a que

$$\bar{Y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \bar{\varepsilon}$$

obtenemos que:

$$Y_i - \bar{Y} = (\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i) - (\beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \bar{\varepsilon}) = \beta_1 (x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$$

de donde deducimos que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\left[\beta_1(x_i-\bar{x}) + \varepsilon_i + \bar{\varepsilon}\right]}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_1(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

Antes de calcular la esperanza, veamos que $E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})\right]=0$. Usando la linealidad de la esperanza, que x_i es constante $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ y que $E[\varepsilon_i]=0$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ tenemos que:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})E[(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})] = 0$$

Por tanto, podemos ya estudiar la esperanza de $\hat{\beta}_1$:

$$E[\hat{\beta}_1] = E\left[\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right] = E[\beta_1] + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})\right]$$

$$= \beta_1$$

donde hemos usado:

(i) Linealidad de la esperanza

(ii) $(x_i - \bar{x})$ es constante $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

(iii) β_1 es constante

(iv) $E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})\right]=0$

Veamos ahora la insesgadez de $\hat{\beta}_0$. Como $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ tomando esperanzas y usando la linealidad de la misma obtenemos que

$$E[\hat{\beta}_0] = E[\bar{Y}] - \bar{x} E[\hat{\beta}_1]$$

y por lo demostrado anteriormente $\hat{\beta}_1$ es insesgado para β_1, entonces

$$E[\hat{\beta}_0] = E[\bar{Y}] - \bar{x}\beta_1$$

Ahora bien, $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \overset{(3.1)}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ de donde, usando que $E[\varepsilon_i] = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, obtenemos

$$E[\bar{Y}] = \beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\varepsilon_i] = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}$$

donde hemos usado la linealidad de la esperanza y que β_0, β_1 y $\bar{x}$ son constantes.

Por tanto, tenemos ya que:

$$E[\hat{\beta}_0] = \beta_0 + \beta_1 \bar{x} - \beta_1 \bar{x} = \beta_0$$