Ejercicio 1. Sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal y simple de un grupo G. Demostrar que si G/N tiene una serie de composición entonces G tiene una serie de composición.

Supongamos que $\frac{G_0}{N} \rhd \frac{G_1}{N} \rhd \dots \rhd \overset{1}{\frac{G_n}{N}} = \{\frac{G_n}{N}\}$ es una serie de composición, entonces no tiene refinamientos propios.

Como es de composición, se cumple que todos sus factores son simples entonces

$$\frac{\frac{G_0}{N}}{\frac{G_1}{N}} \cong \frac{G_0}{G_1}$$ por el 3TI aplicable pues $N \lhd G$ y $N \lhd G_a \ \forall a \in \mathbb{N}$.

De esta forma, tenemos que $G_1 \lhd G_0$ y por una obvia inducción $G_{i+1} \lhd G_i$. Por tanto, tenemos que $\{G_n\} = G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_n$ es una serie normal de G, como G es simple y $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ también lo son por el 3TI obtenemos que $\{G_n\}$ es de composición.

Nota: La notación de sucesiones no está aceptada pero la usaremos para facilitar formalismos

¿El hecho de que sea simple no implica que las únicas series normales sean

$G_0 \rhd 1$

$G_0 \rhd G_0 \rhd \dots \rhd G_0$

Y por ende no tenga una serie de composición como la demostrada?

El simple es N

Ejercicio 2. Sea G un grupo abeliano. Demostrar que G tiene series de composición si y sólo si G es finito.

$\Leftarrow$] Supongamos que G es finito, por ende admite una serie de composición por un teorema visto en clase.

$\Rightarrow$] Supongamos que G tiene una serie de composición.

$$G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_n = \{1\}$$

Entonces $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ son simples y cocientes de grupos abelianos, luego son abelianos. Por un lema visto en clase tenemos que $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ es un cíclico de orden primo, sin pérdida de generalidad supondremos que $\left|\frac{G_i}{G_{i+1}}\right| = p_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

Sabemos ahora que:

Consecuencia del T^{ma} de Lagrange y de que $G_{i+1} < G_i$. Además porseccionales es más claro aún.

$$[G_0 : G_1][G_1 : G_2] \_\_ [G_{n-1} / G_n] = [G_0 : G_n] = [G : \{1\}] = |G|$$

Pero $[G_i : G_{i+1}] = p_i$ luego $|G| = p_1 \cdot \dots \cdot p_n$ finito luego G es finito.

Ejercicio 3. Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G. Demostrar que existe una serie de composición de G uno de cuyos términos es H.

Consideramos la serie normal

$$G \rhd H \rhd 1$$

Por un lado, por ser G finito, sabemos que admite una serie de composición luego aplicando el Teorema de Schreier obtenemos que $\exists \{G_n\}$ serie de composición que es un refinamiento de la de partida luego $\exists G_i \in \{G_n\} \mid G_i = H$. $\square$

Nota: Realmente hemos usado el Teorema de Jordan-Hölder pero está camuflado; es una parte de su demostración.

Ejercicio 4. Se define la longitud de un grupo finito G, denotada $l(G)$, como la longitud de cualquiera de sus series de composición. Demostrar que si H es un subgrupo normal de G entonces $l(G) = l(H) + l(G/H)$.

Como G es finito y $H \trianglelefteq G$ tenemos que, por el ejercicio anterior, G admite la siguiente serie de composición

$$G = G_0 \rhd \_\_ \rhd H \rhd \_\_ \rhd G_n$$

De esta forma, sabemos que $H \rhd \_\_ \rhd G_n$ es una serie normal de H, pero H es finito. Supongamos que $\{H_n\} = H \rhd \_\_ \rhd G_n$ no es de composición $\Rightarrow$ admite un refinamiento que la hará de composición por el Teorema de Jordan-Hölder, luego $\{G_n\} = G_0 \rhd \_\_ \rhd H \rhd \_\_ \rhd G_n$ no sería de composición !!

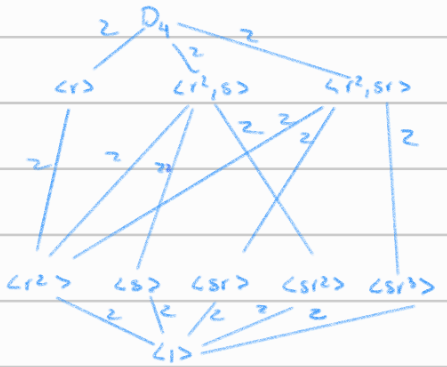
Por tanto, si $\ell(G)$ es la longitud de $\{G_n\}$, es claro ya que, $\ell(G) = \ell(G/H) + \ell(G)$ pues, por la misma razón la serie

$$\frac{G}{H} \rhd \frac{G_1}{H} \rhd \dots \rhd \frac{H}{H}$$

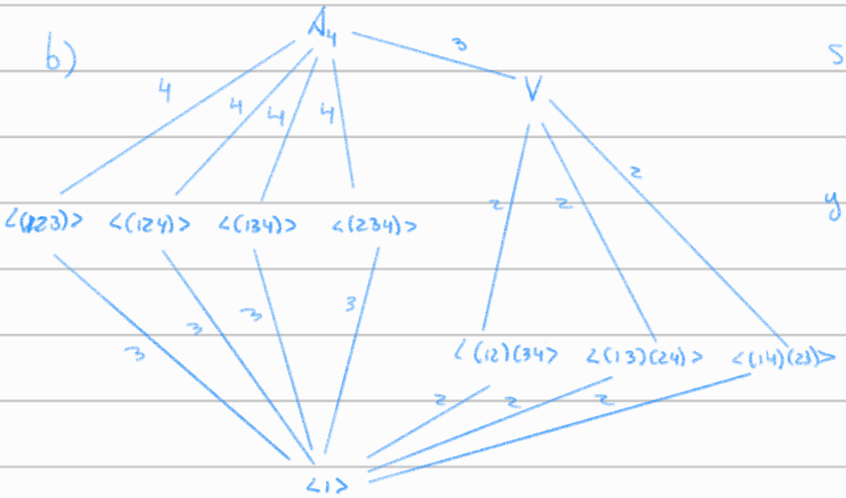
es de composición por el ejercicio 1.

Ejercicio 5. Encontrar todas las series de composición, calcular la longitud y la lista de factores de composición de los siguientes grupos:
a) El grupo diédrico D_4; b) El grupo alternado A_4;
c) El grupo simétrico S_4; d) El grupo diédrico D_5;
e) El grupo de cuaternios Q_2; f) El grupo cíclico C_{24};
g) El grupo simétrico S_5.

a)



Por tanto, las series de composición son todas las posibles combinaciones de caminos, todas de longitud 3 b)



Son series de composición

$A_4 \rhd V \rhd 1$

y es única. Luego $\ell(A_4)=2$

c) Para S_4, usando que $A_4 \rhd V \rhd 1$ es la única de A_4, la única de S_4 es $S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd 1$

d) El único subgrupo normal es $\langle r\rangle$ que a su vez sólo tendrá subgrupos de la forma $\langle r^k\rangle$ pero $|\langle r\rangle|=5$, primo, luego no tendrá subgrupos normales no triviales.

$$D_5 \rhd \langle r\rangle \rhd 1$$

Hacer los tres restantes cuando se acerque el examen.

Ejercicio 6. Sea G un grupo finito, y

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_{r-1} \rhd G_r = \{1\}$$

una serie normal de G. Demostrar que

$$l(G) = \sum_{i=0}^{r-1} l\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right), \qquad fact(G) = \bigcup_{i=0}^{r-1} fact\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right).$$

Procedemos por inducción

Caso base $r=0$ es trivial

Suponiendo cierto para $r-1$, lo vemos para r. Como $\{G_i\}$ es de composición, de la serie de G_1 se verifica $\ell(G_1)=\sum_{i=1}^{r-1} \ell(G_i/G_{i+1})$

Por el ejercicio 4 con $H=G_1$ tenemos que $\ell(G)=\ell(G_1)+\ell(G/H)=\sum_{i=0}^{r-1}\ell(G_i/G_{i+1})$ □

Veamos ahora la segunda parte también por inducción

Caso base $r=1$: $G_0 \rhd G_1=\{1\}$ lo refinamos por el Tª de Jordan-Hölder ya que existe por ser G finito:

$$H_0 = G = G_0 \rhd H_1 \rhd \dots \rhd H_m = G_1 \rhd 1$$

Sabemos que, como es s.c. $\frac{H_i}{H_{i+1}}$ son simples de G $\{\frac{H_i}{H_{i+1}} \mid i=0,\dots,m-1\}$

Ahora, si consideramos la serie de composición de $\frac{G_0}{G_1}$ que existe por el ej 1

$$\frac{G_0}{G_1} = \frac{H_0}{H_1} \rhd \dots \rhd \frac{H_m}{H_1} \rhd \{1\}$$

cuyos factores son $\frac{H_i/H_1}{H_{i+1}/H_1} \cong \frac{H_i}{H_{i+1}}$ luego se cumple lo pedido.

Por una obvia inducción aplicando la idea anterior de atrás a adelante obtenemos el resultado

$$G_0 \rhd \dots \rhd G_{m-2} \rhd \underbrace{G_{m-1} \rhd G_m}_{HI} = 1 \Rightarrow fact(G_0) = fact\left(\frac{G_0}{G_{m-1}}\right) \cup fact\left(\frac{G_{m-1}}{G_m}\right)$$

$$\frac{H_0}{\mathcal{G}_{u-1}} \triangleright \dots \triangleright \frac{\mathcal{G}_{u-3}}{\mathcal{G}_{u-1}} \triangleright \underbrace{\frac{\mathcal{G}_{u-2}}{\mathcal{G}_{u-1}} \triangleright 1}_{HI} \longrightarrow \frac{H_0}{H_r} \triangleright \longrightarrow \triangleright \frac{H_{r-1}}{H_r} \triangleright 1$$

Y así sucesivamente obtenemos el resultado. Aunque podríamos aplicar la HI directamente, la de $r-1$ ahora y obtener el resultado directo por el 3er Tª isomorfía (probablemente).

Ejercicio 7. Si $G_1, G_2 \dots, G_r$ son grupos finitos, demostrar que

$$l(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r) = \sum_{i=1}^{r} l(G_i), \quad fact(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r) = \bigcup_{i=1}^{r} fact(G_i).$$

Demostramos por un lado la primera igualdad, sean

$$\begin{array}{c} \mathcal{G} = \mathcal{G}_{11} \triangleright \longrightarrow \triangleright \mathcal{G}_{1a_1} \\ | \qquad\qquad | \\ \mathcal{G}_r = \mathcal{G}_{r1} \triangleright \longrightarrow \triangleright \mathcal{G}_{ra_r} \end{array}$$

las series de composición de cada $\mathcal{G}_i$ que existen por ser $\mathcal{G}_i$ finito $\forall i$, podemos dar la siguiente serie normal

$$\mathcal{G}_{11} \times \mathcal{G}_{2,r} \triangleright \mathcal{G}_{12} \times \mathcal{G}_{2r} \triangleright \longrightarrow \triangleright \mathcal{G}_{1u_1} \times \mathcal{G}_{21} \times \mathcal{G}_{3,r} \triangleright \longrightarrow \triangleright \mathcal{G}_{1u_1} \times \mathcal{G}_{2u_2} \times \mathcal{G}_{31} \times \mathcal{G}_{4,r} \triangleright \longrightarrow \dots \triangleright \mathcal{G}_{1u_1} \times \mathcal{G}_{2a_2} \times \dots \times \mathcal{G}_{ra_r}$$

que es de composición pues, si no lo fuera, habría un $\mathcal{G}_{ji} \triangleright \mathcal{G}_{ij} \triangleright \mathcal{G}_{ij+1}$ que nos llevaría a contradicción.

Por tanto, es claro ya que $l(\mathcal{G}_{1,r}) = \sum_{i=1}^{r} l(\mathcal{G}_i)$

Para ver la unión basta ver que

$$fact(\mathcal{G}_i) = \frac{\mathcal{G}_{ij}}{\mathcal{G}_{ij+1}} \quad \forall i,j \in \mathbb{N}$$

pero $\dfrac{\mathcal{G}_{ij}}{\mathcal{G}_{ij+1}} \cong \dfrac{\mathcal{G}_{ij}}{\mathcal{G}_{ij+1}} \times \{1\} \times \overbrace{\quad}^{r-3 \text{ veces}} \times \{1\}$. Veamos ahora los $fact(\mathcal{G}_{1,r})$, sabemos ya que

$$\mathcal{G}_{11} \times \mathcal{G}_{2,r} \triangleright \mathcal{G}_{12} \times \mathcal{G}_{2r} \triangleright \longrightarrow \triangleright \mathcal{G}_{1u_1} \times \mathcal{G}_{21} \times \mathcal{G}_{3,r} \triangleright \longrightarrow \triangleright \mathcal{G}_{1u_1} \times \mathcal{G}_{2u_2} \times \mathcal{G}_{31} \times \mathcal{G}_{4,r} \triangleright \longrightarrow \dots \triangleright \mathcal{G}_{1u_1} \times \mathcal{G}_{2a_2} \times \dots \times \mathcal{G}_{ra_r}$$

es de composición, veamos quienes son los factores:

$$\frac{\mathcal{G}_{11}}{\mathcal{G}_{12}} \times \frac{\mathcal{G}_{2,r}}{\mathcal{G}_{2,r}}, \frac{\mathcal{G}_{12}}{\mathcal{G}_{13}} \times \frac{\mathcal{G}_{2,r}}{\mathcal{G}_{2,r}}, \dots, \frac{\mathcal{G}_{1u_1}}{\mathcal{G}_{1u_1}} \times \frac{\mathcal{G}_{21}}{\mathcal{G}_{2,2}} \times \frac{\mathcal{G}_{3,r}}{\mathcal{G}_{3,r}} \dots$$

luego se cumple la unión pues $\dfrac{\mathcal{G}_{i-1,j}}{\mathcal{G}_{i-1,j}} \times \dfrac{\mathcal{G}_{ij}}{\mathcal{G}_{ij+1}} \times \dfrac{\mathcal{G}_{i+1,j}}{\mathcal{G}_{i+1,j}} \cong \{1\} \times \_ \times \{1\} \times \dfrac{\mathcal{G}_{ij}}{\mathcal{G}_{ij+1}} \times \{1\} \times \_ \times \{1\}$. $\square$

Ejercicio 8. Sea G un grupo cíclico de orden p^n con p primo. Demostrar que $l(G) = n$ y que $fact(G) = (\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p, \overset{(n)}{\dots}, \mathbb{Z}_p)$

Por las propiedades de $\mathcal{G}$, sabemos que $\mathbb{Z}_p$ es simple, además $\mathbb{Z}_{p^n}$ tiene como únicos subgrupos normales a $\mathbb{Z}_{p^i}$ con $0 \le i \le n$ luego una serie de composición es

$$\mathbb{Z}_{p^n} \triangleright \mathbb{Z}_{p^{n-1}} \triangleright \longrightarrow \triangleright \mathbb{Z}_p \triangleright 1$$

cuya longitud es n y los factores son:

$$\frac{\mathbb{Z}_{p^n}}{\mathbb{Z}_{p^{n-1}}} = \mathbb{Z}_p, \_\_\_, \frac{\mathbb{Z}_{p^2}}{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p, \frac{\mathbb{Z}_p}{1} = \mathbb{Z}_p$$

Ejercicio 9. Sea G un grupo cíclico de orden n. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(G) = e_1 + \cdots + e_r,$$

y que

$$fact(G) = (\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_r}).$$

Aplica el resultado cuando $n = 12$ y compara su longitud y factores de composición con los del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

Basta aplicar que G es cíclico, que $n = p_1^{e_1} \_\_\_ p_r^{e_r}$ y un teorema de tema 6 para obtener que

$$G \cong C_{p_1^{e_1}} \oplus \_\_\_ \oplus C_{p_r^{e_r}}$$

donde cada $C_{p_i^{e_i}}$ tiene una serie de composición de longitud e_i; por tanto, aplicando el ejercicio 7 tenemos que $l(G) = \sum_{i=1}^{r} C_{p_i^{e_i}} = e_1 + \_\_\_ + e_r$.

Además, del mismo ejercicio, junto al ejercicio 8, se deduce que

$$fact(G) = \{\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\_\_\_}, \mathbb{Z}_{p_1}, \mathbb{Z}_{p_2}, \overset{(e_2)}{\_\_\_}, \mathbb{Z}_{p_2}, \_\_\_, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\_\_\_}, \mathbb{Z}_{p_r}\}$$

Lo aplicamos para el ejemplo:

$12 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow \mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ con $l(\mathbb{Z}_{12}) = 2+1 = 3$ y $fact(\mathbb{Z}_{12}) = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$

$2 \times 6 = 2 \times 2 \cdot 3 \Rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$ tiene longitud $1+2 = 3$ y $fact(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6) = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$

$$\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \rhd \{1\} \oplus \mathbb{Z}_2 \rhd 1$$

Ejercicio 10. Sea D_n el grupo diédrico de orden $2n$. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(D_n) = e_1 + \cdots + e_r + 1,$$

y que

$$fact(G) = (\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_r}, \mathbb{Z}_2).$$

Sabemos que una serie normal de D_n es

$$D_n \rhd \langle r \rangle \rhd 1$$

pero, en nuestro caso, $\langle r \rangle$ es el subgrupo normal más grande de D_n; además, $\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ por tanto, podemos ya aplicar el ejercicio anterior obteniendo

$$l(D_n) = l\left(\frac{D_n}{\langle r \rangle}\right) + l(\langle r \rangle) = 1 + e_1 + \_\_\_ + e_r$$

por su parte

$$fact(D_n) = \frac{D_n}{\langle r \rangle} \cup fact(\langle r \rangle) = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\_\_\_}, \mathbb{Z}_{p_1}, \_\_\_, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\_\_\_}, \mathbb{Z}_{p_r}\}$$

Ejercicio 11. Demostrar que D_4, D_5, S_2, S_3 y S_4 son grupos resolubles.

D_4: $D_4 \triangleright \langle r \rangle \triangleright \langle r^2 \rangle \triangleright 1 \equiv D_4 \triangleright \mathbb{Z}_4 \triangleright \mathbb{Z}_2 \triangleright 1$ es una serie normal cuyos factores son

$$\frac{D_4}{\mathbb{Z}_4} \cong \mathbb{Z}_2 \cong \frac{\mathbb{Z}_4}{\mathbb{Z}_2}$$

abelianos. Luego resoluble

D_5 $D_5 \triangleright \langle r \rangle \triangleright 1 \equiv D_5 \triangleright \mathbb{Z}_5 \triangleright 1$ cuyos factores son cíclicos luego es resoluble.

S_2 $S_2 \cong \mathbb{Z}_2$, como es abeliano, es resoluble

S_2 $S_3 \triangleright A_3 \triangleright \langle 1 \rangle$ pues $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$, $fact(S_3) = \{\frac{S_3}{A_3}, A_3\} = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$ cíclicos de orden primo.

S_4 $S_4 \triangleright A_4 \triangleright V \triangleright 1$ cumpliendo $\frac{S_4}{A_4} \cong \mathbb{Z}_2$, $\frac{A_4}{V} \cong \mathbb{Z}_3$ $V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ que son todos abelianos

Ejercicio 12. Sean H y K subgrupos normales de un grupo G tales que G/H y G/K son ambos resolubles. Demostrar que $G/(H \cap K)$ también es resoluble.

$\boxed{HK=G}$!!

Por el ejercicio 25 de la relación 4 sabemos que $\frac{G}{H \cap K} \cong \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$ que ambos son resolubles. Usando ahora que cualquier producto finito de grupos resolubles es resoluble obtenemos que $\frac{G}{H \cap K}$ es resoluble.

Ejercicio 13. Sea G un grupo resoluble y sea H un subgrupo normal no trivial de G. Demostrar que existe un subgrupo no trivial A de H que es abeliano y normal en G.

¿Teorema de Jordan-Hölder + caracterización? Pero qué me garantiza de ser no trivial?

Idea inducción.

¿G no finito?

A partir de aquí se requieren conocimientos de temas superiores

Ejercicio 14. Demuestra que todo p-grupo finito es resoluble.

Hay fallas en la lógica, es más fácil ver que $Z(G) \lhd G$ $G/Z(G)$ es resoluble

Sea G un p-grupo finito, como es finito y p-grupo sabemos que p es primo y $|G| = p^n$. Por tanto, por un teorema del tema 6 tenemos que $\forall p^i$ $i \in \mathbb{N}$ ica $\exists H_i < G \mid |H_i| = p^i$. Por tanto, una serie de subgrupos es:

$$G_0 > H_{n-1} > H_{n-2} > \_\_\_ > H_1 > H_0 = 1 \quad (1)$$

Pero, por ser finito, admite una serie de composición. Ahora, como $|G| = p^n$ sus únicos subgrupos serán los H_i pues $|S| \mid |G|$ con $\forall S < G$. Por tanto, tenemos que (1) es una serie de composición.

Vamos a ver ahora que los factores de composición son cíclicos; los factores de composición son

$$\frac{H_{i+1}}{H_i} \quad \forall i \in \{0, \_\_\_, n-1\}$$

cuyo orden es $\frac{|H_{i+1}|}{|H_i|} = p$ (primo) $\forall i \in \{0, \_\_\_, n-1\}$ luego es un grupo cíclico. Por tanto, por la caracterización de la resolubilidad tenemos que G es resoluble.

Ejercicio 15. Demuestra que todo grupo de orden pq, con p y q primos, es un grupo resoluble.

Sea G un grupo tal que $|G| = pq$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $p > q$. Estudiamos los p-subgrupos de Sylow de G.

$$n_p \mid q$$

$$n_p \equiv 1 \mod p$$

Como q primo sólo hay dos opciones.

- $n_p = q$, en este caso, de la congruencia obtenemos que $q = 1 + kp > p$!!
- $n_p = 1$, este es el bueno.

De esta forma $\exists! P < G$ p-subgrupo de Sylow que es normal en G. P resoluble por ser p-grupo finito. En este caso, $\left|\frac{G}{P}\right| = q$ que es primo y por tanto cíclico, y por tanto resoluble por ser abeliano. Entonces, por un resultado del tema 5, G es resoluble

Ejercicio 16. Demuestra que todo grupo de orden p^2q, con p y q primos, es un grupo resoluble.

Necesito normalidad

en N se hace con n_p

Como tendrá algún p-subgrupo de Sylow por el Primer T^a de Sylow y tendrá orden p^2 vemos fácil que es resoluble por ser abeliano gracias al T^a de Burnside. Ahora, aplicando el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior obtenemos lo que queremos □

$$\boxed{\begin{array}{l} 1\ T^a\ \text{Sylow},\ \text{Burnside} \Rightarrow \text{abeliano y resoluble.} \\ \left|\frac{G}{P}\right| = q \ \text{primo} \Rightarrow \text{resoluble por ser cíclico luego abeliano.} \end{array}}$$

Ejercicio 17. Demuestra que si p_1, p_2, p_3 son tres primos tales que $p_3 > p_1 p_2$ entonces cualquier grupo de orden $p_1 p_2 p_3$ es resoluble.

Este enunciado es equivalente a

"Todo grupo de orden $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ con p_1, p_2, p_3 primos es resoluble"

Estudiamos sus p-grupos de Sylow.

$$n_{p_3} \mid p_1 p_2 \qquad n_{p_3} \equiv 1 \bmod p_3 \quad \Big\} \text{ opciones } \begin{cases} n_{p_3} = 1 \\ n_{p_3} = p_1 \to p_1 = 1 + k p_3 \Rightarrow p_1 p_2 = (1+kp_3)p_2 = p_2 + k p_2 p_3 > p_3 \ !! \\ n_{p_3} = p_2 \quad \text{ídem} \\ n_{p_3} = p_1 p_2 \to p_1 p_2 = 1 + k p_3 > p_3 \ !! \end{cases}$$

Luego $\exists! P_3 < G$ p_3-subgrupo de Sylow que por tanto es normal y resoluble. Ahora, $\left|\frac{G}{P_3}\right| = p_1 p_2$ que por el ejercicio 15 es resoluble. Entonces, G es resoluble.

Ejercicio 18.

1. Demuestra que todo grupo de orden 70 es resoluble.
2. Demuestra que todo grupo de orden 24 es resoluble.
3. Demuestra que todo grupo de orden 100 es resoluble.
4. Demuestra que todo grupo de orden 48 es resoluble.
5. Sea G un grupo de orden 200. Demuestra que $G \times D_{41}$ es resoluble.
6. Demuestra que todo grupo de orden 63 es soluble (sin usar que es un caso particular de un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos).

factores cíclicos de orden primo

Producto finito de resolubles

1. $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \longrightarrow$ por el ejercicio anterior es resoluble

2. $24 = 2^3 \cdot 3$

$n_2 = 1$ ó $n_2 = 3$ si $n_2 = 1 \longrightarrow P_2$ resoluble y $\frac{G}{P_2}$ resoluble por ser 3-subgrupo de Sylow

si $n_3 = 4 \longrightarrow$ Obtenemos que sólo hay 3 elementos luego $\exists! P_3$ 3-subgrupo de Sylow normal, $\left|\frac{G}{P_3}\right| = 8 = 2^3 \Rightarrow$ resoluble por ser 2 grupo

3. $100 = 2^2 \cdot 5^2$ se haría igual, estudiando $n_5 = 1$ y viendo $\left|\frac{G}{P_5}\right| = 2^2$ resoluble por ser 2-grupo finito

5. Supuesto que G es resoluble, como por el ejercicio 10 D_n es resoluble por tener factores de composición cíclicos de orden primo, obtenemos que el producto de resolubles es resoluble, basta considerar la serie de derivados.

6. Estudiar $n_7 = 1 \Rightarrow \exists! P_7$ 7-subgrupo de Sylow resoluble por ser abeliano

luego $\left|\frac{G}{P_7}\right| = 9 = 3^2$ que es resoluble por ser 3-grupo finito

4. Igual, clavado al 2.

Ejercicio 13

1. $H' = [H,H] \trianglelefteq G$, $\forall a \in G$ $[h_1, h_2] \in H'$ $a[h_1,h_2]a^{-1} = [ah_1a^{-1}, ah_2a^{-1}] \in H'$ luego $H' \trianglelefteq G$
2. Hacer inducción sup. $H^{(i)} \trianglelefteq G \Rightarrow H^{(i+1)} \trianglelefteq G$?

   ↳ Hacemos el análogo a 1.
3. H es resoluble $\Rightarrow \exists r \,/\, H^{(r)} = 1 \Rightarrow 1 = H^{(r-1)} < H \trianglelefteq G$ y es abeliano.