Práctica 1

Continuidad

1.0. Planteamiento

Vamos a comentar algunas ideas útiles para estudiar la continuidad de un campo escalar o vectorial $f : E \to \mathbb{R}^M$ donde E es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$. Usando las componentes de un campo vectorial, el problema se reduce al caso $M = 1$, es decir, al estudio de campos escalares. Trabajaremos en el caso particular $E = \mathbb{R}^N$, lo que se concreta de la siguiente forma:

Problema. Estudiar la continuidad de un campo escalar $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con $N > 1$.

Prestaremos especial atención al caso $N = 2$.

1.1. La parte rutinaria del problema

Habitualmente existe un conjunto **abierto** $U \subset \mathbb{R}^N$, tal que la restricción $f\big|_U$ se obtiene mediante **operaciones** con funciones continuas: suma, producto, cociente y composición. Por tanto, suele ser fácil comprobar que $f\big|_U$ es continua y, como U es abierto, podemos usar el **carácter local de la continuidad** para concluir que f es continua en todos los puntos de U. Así pues, esta primera parte del estudio se resume de la siguiente forma:

1.a *Definir el conjunto U y comprobar que U es abierto*

1.b *Comprobar que $f\big|_U$ es continua*

1.c *Aplicar el carácter local de la continuidad*

Queda estudiar la continuidad de f en cada punto $\alpha \in \mathbb{R}^N \setminus U$, o lo que viene a ser lo mismo, la existencia de límite de f en α.

1.2. Límites parciales

Fijamos pues $\alpha \in \mathbb{R}^N$ para estudiar la existencia de límite de f en α. Obviamente, todas las observaciones que haremos de ahora en adelante sólo tienen interés cuando la existencia de dicho límite no pueda obtenerse usando las reglas básicas de cálculo de límites, porque se presenta algún tipo de **indeterminación**.

Sea $\{e_k : k \in I_N\}$ la base usual de $\mathbb{R}^N$. Fijado $k \in I_N$, el cambio de variable $x = \alpha + t\,e_k$ con $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $x \to \alpha$ cuando $t \to 0$ y que $x \neq \alpha$ para $t \neq 0$ nos dice que:

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to 0} f(\alpha + te_k) = L} \tag{1}$$

Al límite que ha aparecido a la derecha, cuando existe, le llamaremos k-ésimo **límite parcial** de f en α. Es fácil, saber si existe y, en su caso, calcularlo, pues se trata del límite en el origen de una función real de variable real. Podemos pues estudiar los N límites parciales de f en α. Obsérvese que esto es tanto como estudiar el comportamiento de f cuando nos acercamos al punto α, moviéndonos por una recta paralela a cada uno de los ejes de coordenadas.

Como la implicación $(\mathbf{1})$ es válida para todo $k \in I_N$, concluimos que: *si f tiene límite en el punto α, todos los límites parciales de f en α existen y coinciden*. Por tanto:

2.a *Si no existe uno de los límites parciales, entonces f no tiene límite en α*

2.b *Si existen dos límites parciales, pero no coinciden, f tampoco tiene límite en α*

2.c *Si todos los límites parciales existen y coinciden, no llegamos a ninguna conclusión.*

La última observación se debe a que la implicación $(\mathbf{1})$, está lejos de ser una equivalencia, incluso suponiendo que $\lim\limits_{t\to 0} f(\alpha + te_k) = L$ para todo $k \in I_N$. A partir de ahora, supondremos que se presenta la situación **2.c**, pues en los otros casos nuestro problema está resuelto. Aún así, el estudio de los límites parciales nos ha dado una información. Tenemos $L \in \mathbb{R}$, el valor común de todos los límites parciales, que es el único posible límite de f en α.

En el caso particular $N = 2$, si $\alpha = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, los límites parciales, cuando existen, se han definido por

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(a+t\,,b) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0} f(a\,,b+t)}$$

pero es más natural hacer el cambio de variable $t = x - a$ en el primero y $t = y - b$ en el segundo, con lo que dichos límites parciales toman la forma

$$\lim_{x\to a} f(x,b) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to b} f(a,y)$$

Lo mismo puede decirse en el caso general: para cada $k \in \Delta_N$, el k-ésimo límite parcial de un campo escalar $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ en el punto $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, cuando existe, viene dado por

$$\lim_{x_k\to a_k} f(a_1,\ldots,a_{k-1}, x_k\,, a_{k+1},\ldots,a_N)$$

1.3. Límites direccionales y límites radiales

En vez de un vector de la base usual, podemos usar un vector no nulo arbitrario $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Hacemos entonces el cambio de variable $x = \alpha + t\,u$, con $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta de nuevo que $x \to \alpha$ cuando $t \to 0$ y que $x \neq \alpha$ para $t \neq 0$. La regla de cambio de variable nos da:

$$\boxed{\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \implies \lim_{t \to 0} f(a + tu) = L} \tag{2}$$

Si $v = c\,u$ con $c \in \mathbb{R}^*$ es evidente que

$$\lim_{s \to 0} f(\alpha + sv) = L \iff \lim_{t \to 0} f(a + tu) = L$$

lo que permite **normalizar** u sin perder información. Lo más habitual es tomar $\boxed{\|u\| = 1}$.

En general, en un espacio normado, una **dirección** no es más que un vector de norma 1. Usaremos en $\mathbb{R}^N$ la norma euclídea y denotaremos por S al conjunto de todas las direcciones:

$$\boxed{S = \{ u \in \mathbb{R}^N : \|u\| = 1 \}}$$

Dado $u \in S$, el límite que aparece a la derecha de (2), cuando existe, es el **límite direccional** de f en α según la dirección u. Obsérvese que los límites parciales no son más que casos particulares de límites direccionales, el k-ésimo límite parcial es el límite direccional según la dirección e_k para todo $k \in I_N$. Es fácil estudiar la existencia de cada límite direccional, y en su caso calcularlo, pues de nuevo se trata del límite en el origen de una función real de variable real. Nótese que estudiar los límites direccionales equivale a estudiar el comportamiento de f cuando nos acercamos al punto α, moviéndonos por una recta que ya no tiene que ser paralela a uno de los ejes de coordenadas, es cualquier recta que pase por el punto α.

La implicación (2) nos dice que: *si f tiene límite en el punto α, entonces todos los límites direccionales existen y coinciden*. Por tanto, el estudio de los límites direccionales nos lleva a conclusiones análogas a las obtenidas al estudiar los límites parciales:

Igual que con parciales

3.a *Si no existe uno de los límites direccionales, entonces f no tiene límite en α*

3.b *Si existen dos límites direccionales que no coinciden, f no tiene límite en α*

3.c *Si todos los límites direccionales existen y coinciden, no llegamos a ninguna conclusión.*

En ocasiones, en lugar de los límites direccionales, puede ser más cómodo usar los límites radiales, que pasamos a explicar. Fijada una dirección $u \in S$ tenemos claramente

$$\underbrace{\lim_{t \to 0} f(a + tu) = L}_{\text{direccional}} \iff \underbrace{\lim_{t \to 0^+} f(a + tu) = \lim_{t \to 0^+} f(a - tu) = L}$$

buscan acercamiento por derecha o por izquierda.

Los dos límites que han aparecido a la derecha de esta equivalencia, caso de que existan, son los **límites radiales** según los vectores u y $-u$, respectivamente. Ahora estamos estudiando el comportamiento de f cuando nos movemos por dos semirrectas con origen en α, las que contienen a u y $-u$ respectivamente. Es evidente que el estudio de todos los límites radiales equivale al de todos los límites direccionales.

1.3.1. Límites radiales en el caso $N = 2$

Para cada dirección $u = (u_1, u_2) \in S$, podemos escribir $\boxed{u_1 = \cos\theta}$ y $\boxed{u_2 = \operatorname{sen}\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Por la periodicidad de las funciones seno y coseno, basta considerar los valores de θ en un intervalo semiabierto de longitud 2π, siendo lo más habitual usar el intervalo $]-\pi, \pi]$, pero esto no ahorra trabajo.

Si $\alpha = (a, b)$ y usamos una variable real ρ que sólo toma valores positivos, tenemos:

$$\lim_{t \to 0^+} f(a + tu_1, b + tu_2) = L \iff \lim_{\rho \to 0} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\operatorname{sen}\theta) = L$$

esta es la mejor para radiales porque así pido el segundo límite parcial

igual con $-\rho$

Por tanto, para estudiar cada límite radial, en vez de $(x, y) = (a + tu_1, b + tu_2)$ con $t \in \mathbb{R}^+$ y $(u_1, u_2) \in S$, podemos escribir $(x, y) = (a + \rho\cos\theta, b + \rho\cos\theta)$ con $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in \mathbb{R}$, lo que equivale a trabajar en **coordenadas polares** con origen en el punto (a, b). En vez de describir los límites radiales usando dos parámetros u_1 y u_2, lo hacemos con un solo parámetro $\theta \in \mathbb{R}$. En teoría esto es siempre más sencillo, pero en la práctica lo será o no, dependiendo de la forma concreta que tenga la función f.

1.3.2. Límites direccionales en el caso $N = 2$

En vez de la normalización $u = (u_1, u_2) \in S$, podemos tomar $\boxed{u_1 = 1}$ y $\boxed{u_2 = \lambda} \in \mathbb{R}$. Esto excluye el caso $u_1 = 0$, que corresponde al segundo límite parcial, ya estudiado. Los demás límites direccionales toman entonces la siguiente forma:

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha + tu) = L \iff \lim_{t \to 0} f(a + t, b + \lambda t) = L \iff \boxed{\lim_{x \to a} f\big(x, b + \lambda(x - a)\big) = L}$$

por lo que se dice que hemos hecho la sustitución $y = b + \lambda(x - a)$. Cuando $a = b = 0$, que es un caso frecuente, la sustitución es simplemente $\boxed{y = \lambda x}$.

es una recta

De esta forma describimos los límites direccionales (salvo uno de ellos) usando de nuevo un solo parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ estamos estudiando el comportamiento de f cuando nos acercamos al punto α moviéndonos por la recta de pendiente λ.

1.4. Existencia de límite

Volviendo al caso general, está claro que el estudio de los límites parciales, o el más general de los límites direccionales o radiales, puede probar que f no tiene límite en el punto α, pero nunca permite concluir la existencia de dicho límite. En la práctica, la única forma de probar la existencia de límite consiste en obtener algún tipo de **acotación** de la función f, de la que podamos deducirla. De forma directa, dicha acotación puede ser la siguiente:

4.a *Supongamos que existen $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $g : B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{R}_0^+$, verificando:*

$$|f(x) - L| \leqslant g(x) \quad \forall x \in B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \alpha} g(x) = 0 \tag{a}$$

Está claro entonces que $\lim_{x \to \alpha} \big(f(x) - L\big) = 0$, *es decir,* $\boxed{\lim_{x \to \alpha} f(x) = L}$.

Encontrar la función g que verifique las dos condiciones requeridas en $(\mathbf{a})$ no siempre es fácil. Pero podemos aprovechar el trabajo que hemos hecho para el estudio de los límites direccionales o radiales. Si dicho estudio no ha dado resultado, es porque

$$\lim_{t \to 0^+} \big(f(\alpha + tu) - L \big) = 0 \quad \forall u \in S$$

Al comprobar la última igualdad es posible que hayamos usado alguna acotación de la expresión $|f(\alpha + tu) - L|$. Pues bien, una acotación del mismo tipo, que sea válida para todas las direcciones $u \in S$, puede asegurar la existencia de límite. Más concretamente:

4.b *Supongamos que existen $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\to \mathbb{R}_0^+$, verificando:*

$$\boxed{\lim_{t \to 0} h(t) = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{|f(\alpha + tu) - L| \leqslant h(t)} \quad \forall u \in S, \ \forall t \in]0, r[\qquad (\mathbf{b})$$

Es acotar por una función de límite en todas las direcciones

Entonces podemos asegurar que $\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$.

Basta usar el resultado anterior, con $g(x) = h(\|x - \alpha\|)$ para todo $x \in B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$. Es claro que $\lim_{x \to \alpha} g(x) = 0$ y, para $x \in B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$, tomamos $t = \|x - \alpha\|$ y $u = (x - \alpha)/t$, para tener

$$|f(x) - L| = |f(\alpha + tu) - L| \leqslant h(t) = g(x)$$

luego de $(\mathbf{b})$ se deduce $(\mathbf{a})$.

Ahora la función h puede ser más fácil de encontrar, pues de entrada se trata de una función de una sola variable. La estrategia consiste en acotar la expresión $|f(\alpha + tu) - L|$ de forma que, por así decirlo, desaparezca la variable u y quede sólo una función de t, que es la función h con la que intentaremos usar $(\mathbf{b})$. Obviamente la acotación deberá ser cuidadosa, para que se pueda tener $\lim_{t \to 0} h(t) = 0$.

Podemos acotar el cambio de variable

1.4.1. Existencia del límite en el caso $N = 2$

En el caso $N = 2$ y usando coordenadas polares, el último resultado toma la forma que sigue. Para $r \in \mathbb{R}^+$, escribimos $I_r =]0, r[$.

4.c *Supongamos que existen $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h : I_r \to \mathbb{R}_0^+$, verificando:*

$$\lim_{t \to 0} h(t) = 0 \quad \text{y} \quad |f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\,\text{sen}\,\theta) - L| \leqslant h(\rho) \ \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ \forall \rho \in I_r \qquad (\mathbf{c})$$

Entonces podemos asegurar que $\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$.

La estrategia será por tanto acotar la expresión $|f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\,\text{sen}\,\theta) - L|$ de forma que, por así decirlo, desaparezca la variable θ y quede sólo una función de ρ, la función h con la que intentaremos comprobar $(\mathbf{c})$.

Si en vez usar coordenadas polares, hemos hecho la otra normalización, no debemos olvidar que el segundo límite parcial había quedado excluido. El resultado a emplear tiene entonces la forma siguiente, donde de nuevo abreviamos escribiendo $J_r =]-r, r[\setminus\{0\}$:

4.d *Supongamos que* $\lim\limits_{y\to b} f(a,y) = L$ *y que existen* $r\in\mathbb{R}^+$ *y* $h : J_r \to \mathbb{R}_0^+$*, tales que:*

$$\lim_{t\to 0} h(t) = 0 \quad \text{y} \quad \big|f\big(a+t\,,\,b+\lambda t\big) - L\big| \leqslant h(t) \;\; \forall \lambda\in\mathbb{R},\;\; \forall t\in J_r \qquad (\mathbf{d})$$

Entonces podemos asegurar que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L$.

1.5. Otros cambios de variable

No es difícil comprobar que cualquiera de las acotaciones explicadas anteriormente es de hecho equivalente a la existencia de límite. Por tanto, si no hemos conseguido comprobar alguna de ellas, debemos sospechar que el límite no existe. Pero no queda ya ningún método general que nos permita demostrarlo. Sólo queda la posibilidad de encontrar algún nuevo cambio de variable que resuelva el problema, que obviamente no podrá ser ninguno de los usados en el estudio de los límites direccionales.

Más concretamente, supongamos que L es el valor común de todos los límites direccionales de f en α. Podemos usar una nueva función de variable real φ, definida al menos en un intervalo de la forma $]0,r[$ con $r>0$ y con valores en $\mathbb{R}^N$, que verifique

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \alpha \qquad \text{y} \quad \varphi(t) \neq \alpha \quad \forall t \in]0,r[$$

La regla de cambio de variable nos dice entonces que

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to 0} f\big(\varphi(t)\big) = L$$

Por tanto, la estrategia consiste en buscar la función φ, de forma que $f\circ\varphi$ no tenga límite en el origen, o tenga límite distinto de L, para concluir que f no tiene límite en α. Podemos probar con alguna familia sencilla de funciones, para encontrar entre ellas la que resuelva nuestro problema.

Por ejemplo, en el caso $N=2$, con $\alpha=(a,b)$, es natural usar una función potencia, cuyo exponente podamos elegir a posteriori. Más concretamente, para $p\in\mathbb{R}^+$, probamos con la función φ_p definida por

$$\boxed{\varphi_p(t) = \big(a+t\,,\,b+t^p\big) \qquad \forall t\in\mathbb{R}^+}$$

y estudiamos el comportamiento en el origen de la función $f\circ\varphi_p$, que obviamente dependerá del valor de p. Intentamos entonces elegir p de forma que $f\circ\varphi_p$ no tenga límite en el origen, o tenga límite distinto de L.