Tema 0. Conexión por arcos

Conexión

Definición

Se dice que un espacio topológico X es no conexo si

$$\exists\, \mathcal{U}, V \in T \mid \mathcal{U} \cap V = \emptyset,\ \mathcal{U} \neq \emptyset \neq V \text{ con } X = \mathcal{U} \cup V$$

En caso contrario será conexo.

Es una propiedad exclusora, o blanco o negro.

Proposición

Dado un et X, equivalen:

i) X es conexo

ii) Los únicos abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X

iii) Los únicos subconjuntos de X con frontera vacía son $\emptyset$ y X

Teorema

Ser conexo se conserva por aplicaciones continuas. En particular, ser conexo es una propiedad topológica, es decir, se conserva por homeomorfismos.

↳ aplicación continua y biyectiva entre espacios topológicos

Teorema

La unión de una colección de subconjuntos conexos de un e.t X con intersección no vacía es también conexo

Teorema

Si A es un subconjunto de un e.t. X y A es conexo entonces dado B con $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ se tiene que B también es conexo.

En particular, la adherencia de un conexo siempre es un conexo

Teorema

Dados dos e.t. se cumple que $(X \times Y, T_X \times T_Y)$ es conexo $\Leftrightarrow$ ambos son conexos

Definición

Dado un e.t X y un punto x_0 se define la componente conexa de x_0 en X como el mayor conexo que contiene a x_0 en X.

↳ deben ser cerradas pues el cierre de un conexo es conexo y más grande

Teorema

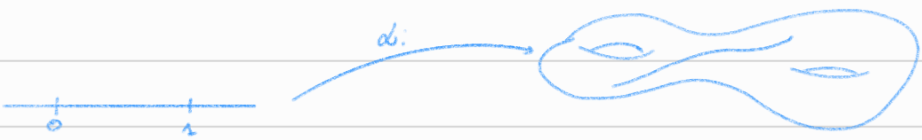
Las componentes conexas de un espacio topológico X forman una partición de X en conjuntos conexos maximales y cerrados.

Conexión por arcos

Definición

Un arco (o camino) en un e.t. X es una aplicación continua

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow X$$



En caso de que $\alpha(0) = \alpha(1)$ diremos que α es un lazo. Diremos que un arco $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ une x con y si se cumple que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si α es un lazo diremos que está basado en x o que tiene como punto base a x.

Denotaremos por $\Omega(X; x, y)$ al conjunto de todos los arcos que unen x con y, es decir:

$$\boxed{\Omega(X; x, y) = \{ \alpha : [0,1] \longrightarrow X \text{ continua} \mid \begin{smallmatrix} \alpha(0) = x \\ \alpha(1) = y \end{smallmatrix} \}}$$

Y denotaremos por $\Omega(X; x)$ al conjunto de todos los lazos basados en x, es decir:

$$\boxed{\Omega(X; x) = \{ \alpha : [0,1] \longrightarrow X \text{ continua} \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x \}}$$

Ejemplo

i) Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ siempre se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0} : [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

Lleva $[0,1]$ en un único punto

es un lazo basado en x_0. En la topología discreta, estos son los únicos arcos que existen. Pues si existiera otro, como $\{x_0\}$ es abierto y cerrado tenemos que $\alpha^{-1}(\{x_0\})$ debe ser abierto y cerrado y por conexión en $[0,1]$ y continuidad de α tenemos que $\alpha^{-1}(\{x_0\}) \in \{\emptyset, [0,1]\}$

↳ Los únicos abiertos y cerrados son $\emptyset$ y $[0,1]$

↳ Preservación de abiertos y cerrados.

Esto quiere decir que un punto siempre se une consigo mismo, es decir, siempre existe el lazo trivial basado en x_0.

ii) Sean $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ un arco uniendo x con y, y $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ un arco uniendo y con z. Podemos definir el arco "concatenado" → Así lo he llamado yo.

$\alpha * \beta : [0,1] \longrightarrow X \mid (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

↳ lo recorro de izq. a dcha. pero siguiendo $[0,1]$.

$\alpha * \beta$ es continua porque $\alpha * \beta|_{[0,1/2]} = \alpha(2t)$ y es continua, idem con $\alpha * \beta|_{[1/2,1]}$ y en el único punto común coinciden. Es importante decir que $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$ son cerrados para hacer este argumento.

iii) Si $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ es un arco uniendo x con y entonces hay otro arco que une y con x ¡Los arcos tienen orientación!

$$\tilde{\alpha} : [0,1] \longrightarrow X$$
$$t \longmapsto \alpha(1-t) \rightarrow \text{Construyo el arco desde el 1 al 0.}$$

Definición

Decimos que un e.t. X es arcoconexo o conexo por arcos si para cualesquiera $x, y \in X$ $\exists\, \alpha : [0,1] \longrightarrow X$ arco que une x con y

Diremos que un subespacio topológico $A \subset X$ es arcoconexo cuando (A, T_A) es arcoconexo

No es lo mismo que conexo: $\forall x \in X$ $\exists \alpha$ arco que une x con y $\forall y \in X$
¿lo seguro b?

Teorema

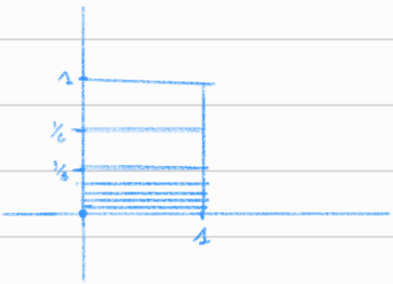
Todo espacio topológico arcoconexo es conexo. Arcoconexión $\Rightarrow$ Conexión!
$\not\Leftarrow$

- Demostración -

Dado $x_0 \in X$ fijo y $x \in X$ un punto cualquiera siempre existen, por arcoconexión, $\alpha_x : [0,1] \longrightarrow X$ arco tal que α_x une x_0 con x. Además $x_0 = \bigcap_{x \in X} \alpha_x([0,1])$ luego, por conexión, tenemos que $\bigcup_{x \in X} \alpha_x([0,1])$ es conexo y como $X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} \alpha_x([0,1]) \subseteq X$ luego X es conexo.
↳ pues $\alpha_x([0,1]) \cap \alpha_y([0,1]) \neq \emptyset$

Contraejemplo

i) No todo conexo es arcoconexo:



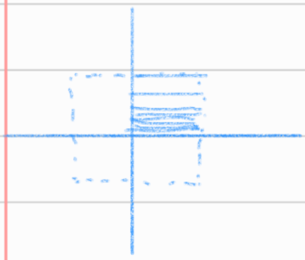
$X_n = [0,1] \times \{1/n\}$ $n \in \mathbb{N}$

$X_0 = \{1\} \times [0,1]$

$X = \{(0,0)\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n \right)$

Sabemos que $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$ es conexo por ser unión de conexos que cortan a uno fijo (X_0) además, como $\bar{Y} = Y \cup [0,1] \times \{0\}$ tenemos que $Y \subseteq X \subseteq \bar{Y}$
↳ conexo.

Veamos que no es arcoconexo, y para ello vamos a demostrar que si tenemos $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ la continua con $\alpha(0) = (0,0) \Rightarrow \alpha(t) = (0,0)\ \forall t \in [0,1]$. Escribimos $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ y como $\alpha(0) = 0$ si tomamos $A = ((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \cap X$ abto que contiene al origen entonces



$\exists \varepsilon > 0 \mid \alpha([0,\varepsilon)) \subset A$, como $y(t)$ es continua y se tiene que la imagen de $y([0,\varepsilon)) \subseteq \{0\} \cup \left(\bigcup_{n\geq 2} \frac{1}{n}\right)$ y como $\left(\bigcup_{n\geq 2} \frac{1}{n}\right) \cup \{0\}$ es discreto, por continuidad y gracias al TVIM, $y([0,\varepsilon]) = \{0\}$

Pero por continuidad $y([0,\varepsilon]) = \{0\}$

Teorema

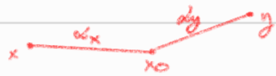
Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado entonces A es arcoconexo.

Convexo $\Rightarrow$ Estrellado

$\not\Leftarrow$

- Demostración -

Como A es estrellado $\exists x_0 \in A \mid \forall x \in X\ (1-t)x + tx_0 \in A\ \forall t \in [0,1] \Rightarrow \alpha_x(t) = (1-t)x + tx_0$ es una curva continua uniendo x con x_0. Sean ahora $x, y \in X$ dos puntos cualesquiera, es claro que $\alpha_{xy} : [0,1] \longrightarrow X$ dada por $\alpha_x * \tilde{\alpha}_y$ es un arco y por tanto A es arcoconexo



Consecuencia

Como consecuencia, cualquier conjunto A de $\mathbb{R}^n$ convexo (estrellado desde cualquier punto) es arcoconexo.

En $\mathbb{R}$, los conjuntos conexos y arcoconexos son los mismos, los intervalos

Teorema

La imagen mediante una aplicación continua de un arcoconexo es un arcoconexo. En particular, ser arcoconexo es una propiedad topológica, es decir, se conserva por homeomorfismos.

- Demostración -

Sean X e Y e.t. con X arcoconexo y $f : X \longrightarrow Y$ continua, buscamos probar que $f(X)$ es arcoconexo.

Dados $x, y \in f(X)$ entonces $\exists x_0, y_0 \in X \mid f(x_0) = x,\ f(y_0) = y$. Como X es arcoconexo $\exists \alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = y_0$. Como f es continua y α también sabemos que $f \circ \alpha$ es continua de manera que $f(\alpha(0)) = f(x_0) = x$ y $f(\alpha(1)) = f(y_0) = y$ luego $f(X)$ es arcoconexo.

Tengo una aplicación continua que une x con y

Teorema

Sea X un e.t y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de arcoconexos de X. Si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ es arcoconexo.

-Demostración-

Basta construir los arcos concatenando dos arcos tomando como pivote un punto de la intersección.

Observación

Hay resultados de conexión que no son ciertos para arcoconexión.

i) Si en un e.t. X se tiene que $A \subseteq X$ es arcoconexo podría ocurrir que si $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ podría ocurrir que B no sea arcoconexo

↳ Basta como contraejemplo el contraejemplo anterior

Ejemplo

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / |x| = 1\}$ son arcoconexos pues podemos verlo quitando un punto dos veces y después unir esos dos

↳ siendo homeomorfo a plano

Teorema

Sean X e Y e.t entonces:

$X \times Y$ es arcoconexo (con la top. prod.) $\Leftrightarrow$ X e Y son arcoconexos.

Teorema

Dado un e.t. X se tiene que:

$$\boxed{X \text{ es arcoconexo} \Leftrightarrow \begin{cases} X \text{ es conexo} \\ \forall x \in X\ \exists V \in N_x \mid V \text{ es arcoconexo} (*) \end{cases}}$$

-Demostración-

$\Rightarrow$) Es trivial

$\Leftarrow$) Elegimos $x \in X$ fijo y definimos $A = \{y \in X \mid \exists\, \alpha_y$ arco uniendo x con $y\}$. Como $x \in A$, sabemos que $A \neq \emptyset$, si probamos que $A^\circ = A = \bar{A}$ tendremos que $A = X$

Para cada punto hay un entorno contenido en el conjunto

Veamos que $A = A^\circ$ y trataremos probar que dado $z \in A$ existe $U \in N_z$ tal que $U \subset A$. Tomamos como U un entorno arcoconexo de z (Existe por hipótesis) $\Rightarrow$ dado $u \in U$ existe α_u un arco que une z con u. Como $z \in A$ tenemos que α_z es un arco que une x con z. Entonces $U \subset A$ y $A = A^\circ$.

Veamos que $A = \bar{A}$; para ello, tomamos $z \in \bar{A}$ sabemos que $\exists U_z \in N_z$ arcoconexo.
Como $z \in \bar{A}$ sabemos que $A \cap U_z \neq \emptyset$ luego $\exists u \in A \cap U_z$ y como A es arcoconexo tenemos intersección de arcoconexos, entonces $A \cup U_z$ es arcoconexo luego $z \in A$ y $A = \bar{A}$.

Por conexión es ya claro que $A = X$

Componentes arcoconexas

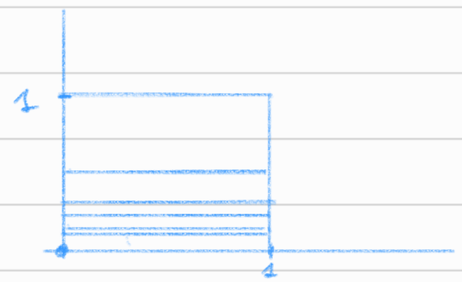
Definición

Dado un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ llamamos componente arcoconexa de x_0 al mayor arcoconexo en X que contiene a x_0

Teorema

Las componentes arcoconexas de un espacio topológico X nos dan una partición de X en subconjuntos arcoconexos de X maximales.
↳ no necesariamente cerradas o abiertas

Ejemplo



$(0,0)$ es una comp arcoconexa pues ya vimos que el conjunto no era arcoconexo.
La otra es $X \setminus \{(0,0)\}$