Índice

Tema 6. Diferenciabilidad

1. Motivación

1.1. Derivada de una función real de variable real

Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, diremos que f es derivable en el punto a cuando $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ cumpliendo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-\lambda(x-a)}{x-a}=0 \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-\lambda(x-a)}{|x-a|}=0$$

En cuyo caso λ es único y es la derivada de f en $a \equiv f'(a)=\lambda$

Si volvemos a hacer hincapié en el espacio $L(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tomando $\alpha\in\mathbb{R}$, $T_\alpha \in L(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donde $T_\alpha(x)=\alpha x \ \forall x\in\mathbb{R}$. Definiendo $\Phi: \mathbb{R} \to L(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\alpha \mapsto T_\alpha$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, se cumple la biyectividad y conservación de la norma en Φ. Luego $\mathbb{R}$ y $L(\mathbb{R},\mathbb{R})$ son idénticos como esp. normados.

1.2. En busca de una generalización

Definamos la diferencial de una función, en las mismas hipótesis que en la toma de derivabilidad, sustituimos λ por T donde $T\in L(\mathbb{R},\mathbb{R})$; la llamaremos diferencial de f en a y la denotaremos por $Df(a)$

Si bien es claro que hay una gran relación entre esos dos conceptos, se cumple:

$$f \text{ derivable en } a \iff f \text{ diferenciable en } a.$$

En este caso, la relación es la siguiente:

$$Df(a) = f'(a)x \quad \text{y} \quad f'(a) = Df(a)(1)$$

Dicho concepto se generaliza para funciones en un subconjunto de un espacio normado con valores en cualquier otro espacio normado.

2. Funciones diferenciables

2.1. Concepto de función diferenciable

SITUACIÓN: X, Y espacios normados, $A\subset X$, $f: A \to Y$ y $a\in \overset{\circ}{A}$

Diremos que f es diferenciable en el punto a cuando $\exists T\in L(X,Y) \,/\, \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}=0$

o bien $\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-T(x-a)\|}{\|x-a\|}=0$, equivalentemente, $h=x-a$ $\lim_{h\to 0} \ldots$

2.2. Observaciones importantes

Unicidad de la diferencial

Si f es diferenciable en a, la aplicación $T \in L(X,Y)$ es única y la llamamos diferencial de f en a; se denota por $Df(a)$

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Análisis}} =0$$

tomamos $|t| < \frac{r}{\|u\|}$ en $B(a,r)$

$u \in X \setminus \{0\}$ tomamos $x = a+tu$ $t \in \mathbb{R}$

He necesitado que $a \in \mathring{A}$. Si busco dirección cualquiera $\Rightarrow a+tu \in A \rightarrow$ por $a \in \mathring{A}$

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\|f(a+tu)-f(a)-T(tu)\|}{|t|\,\underset{\text{no imp.}}{\|u\|}} = \lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} - T(u) \right\| = 0 \iff T(u) = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}}_{\text{huele a derivada direccional}}$$

$\Downarrow$ es única por unicidad del límite.

se puede sacar si $a \in \mathring{A}$. Esa condición es suficiente pero no necesaria.

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

Relación con la continuidad

Si f es diferenciable en $a \Rightarrow f$ continua en a.

tomamos la def. de diferenciabilidad.

$$f(x) = \frac{f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)}{\|x-a\|}\,\|x-a\| + f(a) + Df(a)(x-a)$$

Siempre sale indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Significado analítico de la diferencial

Supongamos que f es diferenciable en a y sea $g: X \longrightarrow Y$ dada por:

$$g(x) = f(a) + Df(a)(x-a) = f(a) - Df(a)(a) + Df(a)(x) \quad \forall x \in X$$

g es una función afín y continua, que verifica:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{\|x-a\|} = 0$$

luego g es una "buena aproximación" de f "cerca" del punto a.

Carácter local

Si $\mathcal{U} \subset A$ y $a \in \mathcal{U}^{\circ}$, entonces:

f diferenciable en $a \iff f|_{\mathcal{U}}$ diferenciable en a.

En cuyo caso se tiene $Df(a) = D(f|_{\mathcal{U}})(a)$

Podemos restringir a un abierto sin perder ni ganar nada, pero no es necesario tomar puntos interiores

Independencia de las normas

Si f es diferenciable en a, sustituimos las normas de X e Y por sendas normas equivalentes, entonces f sigue siendo diferenciable en a con la misma diferencial.

Sean X, Y esp. normados y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas de X e Y. Como son equiv:

$$\|y\|_2 \leq \rho_2 \|y\|_1$$

$$\rho_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2$$

$$0 \leq \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|_2}{\|x-a\|_2} \leq \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|_1}{\|x-a\|_1} \to 0$$

$\to f$ es diferenciable cuando cambio las normas.

2.3. Espacios de funciones diferenciables

Al igual que ocurría con la continuidad, se dice que una función $f: A \longrightarrow Y$ con $A \subset X$, X, Y espacios normados; es diferenciable en A si lo es en cada punto de A. Denominamos por $D(A, Y)$ al conjunto de las funciones diferenciables de A en Y, de hecho $D(A, Y) \subset \mathcal{C}(A, Y)$.

Definimos $\forall f \in D(A, Y)$ la función $Df: A \longrightarrow L(X, Y)$ dada por $x \longmapsto Df(x)$, decimos que Df es la diferencial de f.

Diremos que f es de clase C^1 cuando $f \in D(A, Y)$ y Df es continua, se cumple:

$$\mathcal{C}^1(A, Y) \subseteq D(A, Y) \subseteq \mathcal{C}(A, Y)$$

3. Reglas de diferenciación.

Resulta evidente ver que:

- si f constante $\Rightarrow Df(x)=0 \quad \forall x\in X$
- si f lineal y continua $\Rightarrow f\in C^1(X,Y)$ con $Df(a)=f \quad \forall a\in X$

Algunas de las propiedades son las siguientes:

3.1. Linealidad

Sean X, Y esp. normados, $A=A^\circ\subset X$, $f,g: A\longrightarrow Y$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Si f y g son diferenciables en un punto $a\in A$ entonces $\alpha f+\beta g$ es diferenciable en a con $D(\alpha f+\beta g)(a)=\alpha Df(a)+\beta Dg(a)$.

- La combinación lineal de funciones diferenciables es diferenciable
- Si ambas son clase 1 $\Rightarrow$ su combinación lineal es clase 1.
- $C^1(A,Y)\subset D(A,Y)\subset C(A,Y)$

3.2. Composición

Teorema: Regla de la cadena

Sean X,Y,Z espacios normados, $A=A^\circ\subset X$, $U=U^\circ\subset Y$ $f:A\longrightarrow U$, $g:U\longrightarrow Z$.
Si f es diferenciable en $a\in A$ y g es diferenciable en $b=f(a)$, entonces $g\circ f$ es diferenciable en a con: $D(g\circ f)(a)=Dg(b)\circ Df(a)$

Se cumplen además:

(i) $f\in D(A,Y)$, $g\in D(U,Z) \Rightarrow g\circ f\in D(A,Z)$
(ii) $f\in C^1(A,Y)$, $g\in C^1(U,Z) \Rightarrow g\circ f\in C^1(A,Z)$

$\boxed{\text{Demostración regla de la cadena}}$

Diferenciabilidad de f en a.

Definimos $\Phi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$
$$x\longmapsto \frac{\|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|}\quad \forall x\in\Omega\setminus\{a\}$$
$$a\longmapsto 0$$
que es continua. Entonces.

Diferenciabilidad de g en b

$\Phi(x)\|x-a\|=\|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\| \quad \forall x\in\Omega$. De forma análoga, $\Psi: U\longrightarrow\mathbb{R}$ continua en b, $\Psi(b)=0$ y

$\Psi(y)\|y-b\|=\|g(y)-g(b)-Dg(b)(y-b)\| \quad \forall y\in U$

$Dg(b)\circ Dg(a)\in L(X,Z)$ (cumple una condición de la diferencial)

Definimos $\Lambda:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ / $\Lambda(x)=\|g(f(x))-g(f(a))\cdot Dg(b)(Df(a)(x-a))\| \quad \forall x\in\Omega$

¿$\lim_{x\to a}\frac{\Lambda(x)}{\|x-a\|}=0$?

Sea $x \in \Omega$, $f(x) = y$

$$\Delta(x) = \| g(y) - g(b) - Dg(b)(Df(a)(x-a)) \| \leq \| g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b) \| + \| Dg(b)[y - b - Df(a)(x-a)] \|$$

si $x \to a$ $\boxed{\Phi(x) = 0}$

$$\| Dg(b)(y - b - Df(a)(x-a)) \| \leq \| Dg(b) \| \, \| f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \| = \| Dg(b) \| \, \Phi(x) \, \| x - a \|$$

$$\| g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b) \| = \varphi(y) \| y - b \| \leq \varphi(y) \left[\| f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \| + \| Df(a)(x-a) \| \right] \leq$$

$$\leq \varphi(y) \left[\Phi(x) \| x - a \| + \| Df(a) \| \, \| x - a \| \right] = \varphi(y) \left[\| x - a \| \left(\Phi(x) + \| Df(a) \| \right) \right]$$

$$0 \leq \Delta(x) \leq \| x - a \| \left[\underbrace{\varphi(y) \left(\Phi(x) + \| Df(a) \| \right)}_{0} + \| Dg(b) \| \, \Phi(x) \right]$$

$x \in \Omega$ $\forall a f$

$$0 \leq \frac{\Delta(x)}{\| x - a \|} \leq \underset{0}{\varphi(y)} \left(\underset{0}{\Phi(x)} + \underset{K}{\| Df(a) \|} \right) + \| Dg(b) \| \, \underset{0}{\Phi(x)}$$

$\Psi(y) = \Psi(f(a))$

f cont. a

Ψ cont. en $b = f(a) \Rightarrow \Psi \circ f$ cont. en a

$$\lim_{x \to a} \Psi(f(x)) = \Psi(f(a)) = \Psi(b) = 0$$

79/113

2° punto

$Df : \Omega \longrightarrow L(X, Y)$

$Dg : U \longrightarrow L(Y, Z)$

$D(g \circ f) : \Omega \longrightarrow L(X, Z)$

Sea $a \in \Omega$

$$\| D(g \circ f)(x) - D(g \circ f)(a) \| = \| Dg(f(x)) \circ Df(x) - Dg(f(a)) \circ Df(a) \| \leq$$

$$\leq \| Dg(f(x)) \circ (Df(x) - Df(a)) + (Dg(f(x)) - Dg(f(a))) \circ Df(a) \| \leq$$

$$\leq \underbrace{\| Dg(f(x)) \| \, \| Df(x) - Df(a) \|}_{0} + \underbrace{\| Dg(f(x)) - Dg(f(a)) \| \, \| Df(a) \|}_{0}$$

$\| Dg(f(a)) \|$ $\quad 0$ $\quad 0$ $\quad$ constante

Como observación, si $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z) \Rightarrow \| S \circ T \| \leq \| S \| \, \| T \|$

$$\| S(T(x)) \| \leq \| S \| \, \| T(x) \| \leq \underbrace{\| S \| \, \| T \|}_{\text{constante}} \| x \| \quad \forall x \in X$$

$$\| S \circ T \| \leq \| S \| \, \| T \|$$

3.3. Funciones con valores en un producto

Sea Y un producto de espacios normados, vamos a denotar por:

1. Proyección coordenada: $\pi_j : Y \longrightarrow Y_j$, $\pi_j(y) = y(j)$ $\forall y \in Y$

   $\pi_j \in L(X, Y)$ con $\| \pi_j \| = 1$

2. Inyección natural: $I_j : Y_j \to Y$, $I_j(u) = (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$ $\forall u \in Y_j$

   $I_j \in L(Y_j, Y)$ con $\| I_j \| = 1$

Hablaremos de su diferenciabilidad, vayamos al grano:

Sea X un espacio normado, $A = A^\circ \subset X$, $f = (f_1, \dots, f_m) : A \longrightarrow Y$, $a \in A$

f es diferenciable en $a \Leftrightarrow f_j$ es diferenciable en a $\forall j \in \Delta_m$ en cuyo caso:

$$Df(a) = (Df_1(a), \dots, Df_m(a))$$

(i) $f \in D(A, Y) \Leftrightarrow f_j \in D(A, Y_j)$ $\forall j$

(ii) $f \in C^1(A, Y) \Leftrightarrow f_j \in C^1(A, Y_j)$ $\forall j$

3.4. Producto

Establecemos la siguiente notación:

$$D(A, \mathbb{R}) = D(A) \quad , \; C(A, \mathbb{R}) = C(A)$$

Si pensamos en el producto, resulta intuitivo pensar en su derivada, vamos a verla:

Si tomamos $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$, diremos que:

si f, g son diferenciables en $a \Rightarrow fg$ es diferenciable en a, además se verifica que:

$$D(fg)(a) = g(a)\, Df(a) + f(a)\, Dg(a)$$

Se cumple tamb que el producto de funciones hereda la diferenciabilidad de sus distintas funciones

3.5. Cociente

Si $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N \Rightarrow D(A) \subset C'(A)$.

Por otro lado, resulta evidente ver que si f, g son diferenciables $\Rightarrow \frac{f}{g}$ son diferenciables, además:

$$D(f/g)(a) = \frac{1}{g(a)^2}\left(g(a)\, Df(a) - f(a)\, Dg(a)\right)$$

De nuevo, se heredan las propiedades de diferenciabilidad.

Al igual que en continuidad, se pueden tomar funciones racionales, que serán diferenciables