Tema 2. El grupo fundamental

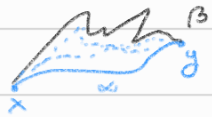
1. Homotopía por arcos

Definición

Sean X, Y dos e.t y $f, g: X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, decimos que f es homotópica a g si $\exists H: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continua tal que $H(x,0) = f(x) \wedge H(x,1) = g(x)$ $\forall x \in X$

Definición

Dados X e.t, $x, y \in X$ y dos arcos $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$ decimos que α y β son homotópicos por arcos si existe una aplicación continua $H: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ cumpliendo



(i) $H(s,0) = \alpha(s)$ $\forall s \in [0,1]$

(ii) $H(s,1) = \beta(s)$ $\forall s \in [0,1]$

(iii) $H(0,t) = x$ $\forall t \in [0,1]$

(iv) $H(1,t) = y$ $\forall t \in [0,1]$

Lema

Ser homotópico por arcos da lugar a una relación de equivalencia en $\Omega(X; x, y)$

-Demostración-

(i) Dado $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ α es homotópica consigo misma pues la homotopía es

$$H(s,t) = \alpha(s) \quad \forall s,t \in [0,1]$$

(ii) Claramente es reflexiva pues si α es hom.p.a a β basta tomar

$$\tilde{H}(s,t) = H(s, 1-t)$$

(iii) La transitividad también es clara pues dados $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x, y)$ tenemos

$$H_1, H_2: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \text{ continuas}$$

$$\begin{array}{l|l} H_1(s,0) = \alpha(s) & H_2(s,0) = \beta(s) \\ H_1(s,1) = \beta(s) & H_2(s,1) = \gamma(s) \end{array}$$

Entonces basta tomar $H: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ dada por

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(s,2t) & t \in [0, 1/2] \\ H_2(s,2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

El resultado es cierto para homotopías básicas, es decir, tab es una rel. de equivalencia

Ejemplos

(i) Sean X un e.t y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplic. continuas. Vamos a ver que f y g son homotópicas

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x, t) \longmapsto (1-t) f(x) + t g(x)$$ → llevar f a g

En el caso particular de que $f = \alpha$ y $g = \beta$ fuesen arcos comenzando en un punto común y acabando en otro pto. común entonces H sería una homotopía por arcos

(ii) Si $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ es un arco y $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es una aplicación continua con $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. Entonces

$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ es homotópico por arcos a $\alpha(s)$

lo que hacemos es recorrer α de forma distinta pero en mismo sentido (distinta velocidad)

$\tilde{\alpha}$ es continua y existe una homotopía por arcos entre ambos

$$H(s,t) = \alpha((1-t)s + t h(s))$$

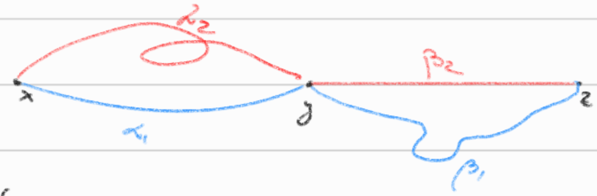
Convenio

Como convenio, a la clase de equivalencia de un arco $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ lo denotaremos por $[\alpha] = \{\beta \in \Omega(X; x, y) : \beta$ es homotópico por arcos a $\alpha\}$

Lema

Dados dos arcos $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega(X; x, y)$ $\beta_1, \beta_2 \in \Omega(X; y, z)$. Si $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$ entonces:

$$[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$$



-Demostración-

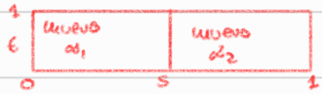
Sabemos que

$$(\alpha_i * \beta_i)(s) = \begin{cases} \alpha_i(2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ \beta_i(2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

además $\exists H_1, H_2$ homotopías de α_1 y α_2 y β_1 y β_2 respectivamente. Entonces $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ homotopía de $(\alpha_1 * \beta_1)$ y $(\alpha_2 * \beta_2)$ dada por:

$$H(s,t)=\begin{cases} H_1(2s,t) & s\in[0,\tfrac12],\ t\in[0,1] \\ H_2(2s-1,t) & s\in[\tfrac12,1],\ t\in[0,1] \end{cases}$$

Me muevo en el mismo tiempo pero luego que mover las dos



A partir de este lema podemos definir $[\alpha]*[\beta]=[\alpha*\beta]$ y no depende del representante gracias al lema.

Teorema

Dados X e.t, $\alpha\in\Omega(X;x,y)$, $\beta\in\Omega(X,y,z)$ y $\gamma\in\Omega(X;z,w)$. Se tiene que

(i) $[\alpha]*([\beta]*[\gamma])=([\alpha]*[\beta])*[\gamma]$ Asociativa

(ii) $[\alpha]*[\varepsilon_y]=[\alpha]$ $\wedge$ $[\varepsilon_x]*[\alpha]$ Neutro

(iii) $[\alpha]*[\tilde{\alpha}]=[\varepsilon_x]$ $\wedge$ $[\tilde{\alpha}]*[\alpha]=[\varepsilon_y]$ Simétrico

-Demostración-

(ii) Sabemos que

$$(\alpha*\varepsilon_y)=\begin{cases}\alpha(2s) & s\in[0,\tfrac12]\\ \varepsilon_y(2s-1) & s\in[\tfrac12,1]\end{cases}$$

Pero α y $(\alpha*\varepsilon_y)$ son homotópicos pues $(\alpha*\varepsilon_y)(s)=\alpha(h(s))$ donde

$h(s)=2s$ con $s\in[0,\tfrac12]$

$h(s)=1$ con $s\in[\tfrac12,1]$

El análogo es cierto.

(iii) Sabemos que

$$(\alpha*\tilde{\alpha})(s)=\begin{cases}\alpha(2s) & s\in[0,\tfrac12]\\ \tilde{\alpha}(2s-1) & s\in[\tfrac12,1]\end{cases}=\begin{cases}\alpha(2s) & s\in[0,\tfrac12]\\ \alpha(2-2s) & s\in[\tfrac12,1]\end{cases}$$

Llamamos $h(s)=2s$ $s\in[0,\tfrac12]$ $h(s)=2-2s$ $s\in[\tfrac12,1]$. Entonces construimos

$H(s,t)=\alpha((1-t)h(s))$

que es homotopía

2.- El grupo fundamental

Corolario

Dados X un e.t y un punto $x_0\in X$ se tiene que $\Omega(X;x_0)$ bajo la relación de equivalencia de ser homotópicos por arcos y con operación $*$ forman un grupo algebraico.

-Demostración-

El hecho de que $\frac{\Omega(X;x_0)}{R}$ donde R es una rel de equiv. "ser homotópico por arcos" se verifica por el teorema anterior.

Definición

El grupo algebraico dado por el corolario anterior lo llamamos grupo fundamental de X en x_0 y lo denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$

En general, este grupo casi nunca es conmutativo

Ejemplo

(c) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado desde un punto x_0. Entonces $\pi_1(X, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$

En general, los conjuntos convexos tienen grupo fundamental trivial

Teorema

Sean x e $y \in X$ dos puntos de un e.t. Si X es arcoconexo $\Rightarrow \pi_1(X, x)$, $\pi_1(X, y)$ son iguales salvo isomorfismo

- Demostración:

Sea $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ que existe por ser X arcoconexo. Consideramos la aplicación

$$F_\alpha : \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$
$$[\gamma] \longmapsto [\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]$$ Conjugada

que está bien definida. Queremos ver que F_α es un isomorfismo de grupos:

- F_α es homomorfismo:

$$F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) \overset{?}{=} F_\alpha([\gamma_1]) * F_\alpha([\gamma_2])$$

$$F_\alpha([\gamma_1]) * F_\alpha([\gamma_2]) = ([\alpha] * [\gamma_1] * [\tilde{\alpha}]) * ([\alpha] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}])$$
$$= [\alpha] * ([\gamma_1] * [\gamma_2]) * [\tilde{\alpha}] = F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2])$$

- F_α tiene inversa, que es $F_{\tilde{\alpha}}([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [\beta] * [\alpha]$ con $\beta \in \pi_1(X, x)$ (además es homomorfismo)

Definición

Decimos que un e.t. es simplemente conexo si es arcoconexo y su grupo fundamental es el trivial en un punto (y por el Teorema anterior en todos sus puntos)
↳ por ser arcoconexo

Intuitivamente es más claro, pensando que es un espacio sin orificios

Ejemplo

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado desde x_0 entonces A es simplemente conexo
↳ Es arcoconexo y en x_0 el grupo fund. es el trivial

Lema

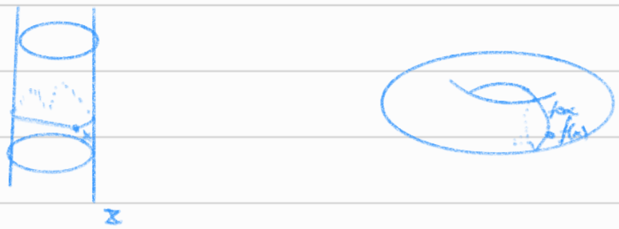
Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre esp. topológicos y $x \in X$. Entonces la aplicación

$$\boxed{\begin{aligned}(f_x)_*: \Pi_1(X,x) &\longrightarrow \Pi_1(Y, f(x))\\ [\alpha] &\longmapsto [f\circ\alpha]\end{aligned}}$$

está bien definida y es un homomorfismo de grupos.

(Cuando no haya confusión posible escribiremos solamente f_* en lugar de $(f_x)_*$

-Demostración-



Para ver que $(f_x)_*$ está bien definida tomamos α_1, α_2 lazos basados en x homotópicos, es decir, $[\alpha_1]=[\alpha_2]$ entonces, $\exists H: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$ continua luego basta tomar $f\circ H$ como homotopía entre $f\circ\alpha_1$ y $f\circ\alpha_2$

Veamos ahora que $(f_x)_*$ es un homomorfismo de grupos, es decir,

$$(f_x)_*([\alpha]*[\beta]) \overset{?}{=} (f_x)_*([\alpha]) * (f_x)([\beta])$$

Pero

Esta es la clave

$$(f_x)_*([\alpha]*[\beta]) = (f_x)_*([\alpha*\beta]) = [f_x\circ(\alpha*\beta)] = \left[\begin{cases} f_x(\alpha(2s)) & \text{si } s\in[0,1/2] \\ f_x(\beta(2s-1)) & \text{si } s\in[1/2,1]\end{cases}\right]$$

$$=[(f_x\circ\alpha)*(f_x\circ\beta)] = (f_x)_*([\alpha]) * (f_x)([\beta])$$

A esta aplicación $(f_x)_*$ se le llama homomorfismo inducido por f.

Propiedades

(i) Si f, g son dos aplicaciones continuas $f: X\longrightarrow Y$, $g: Y\longrightarrow Z$ entonces

$(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$ Es jugar con la composición de arcos y aplicaciones continuas

(ii) $Id_*: \Pi_1(X,x_0) \longrightarrow \Pi_1(X,x_0)$ es la identidad en grupos fundamentales.
$[\alpha] \longmapsto [\alpha]$

Corolario

Si $h: X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces $(h_x)_*: \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,h(x))$ es un isomorfismo de grupos. Es decir, el grupo fundamental se conserva salvo isomorfismos por homeomorfismos. Dos espacios homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos cuya correspondencia viene dada por h.

Definición

Si $(G_1,*_1)$ y $(G_2,*_2)$ son dos grupos algebraicos consideramos sobre $G_1 \times G_2$ el producto $*$ considerado por:

$$(a_1,b_1)*(a_2,b_2) = (a_1 *_1 a_2 \,,\, b_1 *_2 b_2) \quad a_1,a_2 \in G_1 \,,\, b_1,b_2 \in G_2$$

Teorema

Sean X, Y dos e.t. , $x \in X, y \in Y$. Entonces, con la topología producto en $X \times Y$ se tiene que $\pi_1((X \times Y),(x,y))$ es isomorfo a $\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$

-Demostración-

Definimos $\varphi: \pi_1(X \times Y,(x,y)) \longrightarrow \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$ y debemos ver que
$$[\alpha] \longmapsto [p_1 \circ \alpha \,,\, p_2 \circ \alpha]$$
está bien definido y es un isomorfismo.

↳ dos correspondientes proyecciones

Pero φ está bien definida y es homomorfismo por ser f_* componente a componente. Además, su inversa es:

$$\psi: \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y) \longrightarrow \pi_1(X \times Y,(x,y))$$
$$([\beta],[\gamma]) \longmapsto [(\beta,\gamma)]$$

↳ es como una inyección

que está bien definida y es un homomorfismo tal que $\varphi \circ \psi = Id_{\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)}$ y $\psi \circ \varphi = Id_{\pi_1(X \times Y,(x,y))}$

Espacios Recubridores

Definición

Sea $p: R \longrightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva entre dos espacios topológicos. Dado un punto $b \in B$, decimos que un abierto $\mathcal{U}$ que contiene a b está regularmente recubierto si:

(i) $p^{-1}(\mathcal{U})$ es una unión disjunta de abiertos $A_i \subset R$, $i \in I$.

(ii) $\forall i \in I$ $p|_{A_i}$ es un homeomorfismo; $p|_{A_i}: A_i \longrightarrow \mathcal{U}$.

También diremos que b está regularmente recubierto por $\mathcal{U}$.

Definición

Decimos que una aplicación $p: R \longrightarrow B$ entre dos espacios topológicos es una aplicación recubridora si p es continua, sobreyectiva y si todo punto $b \in B$ está contenido en un abierto $\mathcal{U}_b$ regularmente recubierto.

Observación

Todo homeomorfismo es una aplicación recubridora. La implicación contraria es falsa.

Teorema

La aplicación
$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad x \longmapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$$
es una aplicación recubridora.

↳ dar vueltas a una circunferencia

· Demostración ·

Evidentemente p es sobreyectiva por serlo sus componentes y es continua por serlo sus componentes.

Veamos que $O = \mathbb{S}^1 \cap ((0,\infty) \times \mathbb{R})$ está regularmente recubierto. Basta con los cuatro cuadrantes

↳ Los demás cuadrantes son análogos

$$p^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(2\pi x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\pi x \in (-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$$ porque cubre todos

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (k - \tfrac{1}{4}, k + \tfrac{1}{4}),\ k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k - \tfrac{1}{4}, k + \tfrac{1}{4})$$ los puntos de $\mathbb{S}^1$

Tomando $\mathcal{A}_k = (k - \tfrac{1}{4}, k + \tfrac{1}{4})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ falta ver que cada abierto $\mathcal{A}_{k_0}$ cumple que

$$p: \mathcal{A}_0 \longrightarrow O \text{ es un homeomorfismo}$$

Pero es inyectiva y sobreyectiva por las propiedades de $\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)$ luego $p|_{\mathcal{A}_i}$ es biyectiva.

Falta probar que $p|_{\mathcal{A}_i}^{-1}$ es continua, para ello consideramos

$$p: [k - \tfrac{1}{4}, k + \tfrac{1}{4}] \longrightarrow \bar{O}$$

que continua desde un compacto a un Hausdorff luego $p|_{[k - 1/4, k + 1/4]}$ es cerrada luego homeomorfismo y ya es fácil probar que $p|_{\mathcal{A}_i}$ es homeomorfismo.

Ejemplo

La aplicación
$$p: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$
$$(x,y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy)$$
$$x + iy \longmapsto (x + iy)^2$$
$$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \longmapsto (\cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta))$$
es recubridora.

En general con $p(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\cos(n\theta), \operatorname{sen}(n\theta))$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es recubridora.

Propiedades básicas

(i) Sean $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones tales que una de ellas es un homeomorfismo y la otra una aplicación recubridora. Entonces, $g \circ f: X \longrightarrow Z$ es una aplicación recubridora $\longrightarrow$ Demo: Y es recubridor $X \cong Y \Rightarrow f \circ g$ es recubridor. $Y \cong Z$ y f recubridora $\Rightarrow X$ recubridor de Z.

La composición de aplicaciones recubridoras no siempre es recubridora.

(ii) Sea $p: R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora y $B_0 \subset B$, entonces

$$p_{|p^{-1}(B_0)}: p^{-1}(B_0) \longrightarrow B_0$$

es una aplicación recubridora.

Demo: B reg. recubierto $\Rightarrow B_0$ reg. recubierto $\Rightarrow p_{|p^{-1}(B_0)}$ es recubridora

(iii) Si $p_1: R_1 \longrightarrow B_1$ y $p_2: R_2 \longrightarrow B_2$ son aplicaciones recubridoras entonces

$$p: R_1 \times R_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$$
$$(x, y) \longmapsto (p_1(x), p_2(y))$$

es una aplicación recubridora cuando consideramos las topologías producto en ambos espacios.

Ejemplos

La aplicación restringida a él es recubridora del codominio

(i) $\mathbb{R}^2$ es un recubridor del cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Como, por el T^{ma} anterior $\mathbb{R}$ es recubridor de S^1 y $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ tenemos lo que queremos.

$$p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), y)$$

es homeomorfismo $\Rightarrow$ recubridora

Producto de recubridoras es recubridora

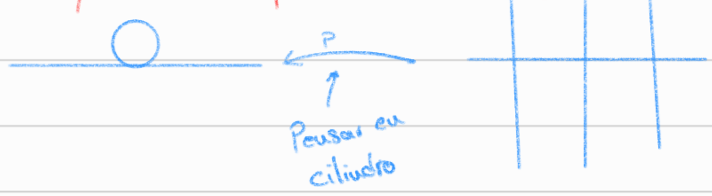
es nuestra aplicación recubridora.

(ii) $\mathbb{R}^2$ es un recubridor de toro $S^1 \times S^1$ de $\mathbb{R}^4$ (ó el toro de rotación de $\mathbb{R}^3$) donde la aplicación recubridora es

$$p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$$
$$(x, y) \longmapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), \cos(2\pi y), \operatorname{sen}(2\pi y))$$

De nuevo es producto de aplicaciones recubridoras

(iii)



Levantamientos en espacios recubridores

Definición

Sea $p: R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora y $f: X \longrightarrow B$ una aplicación continua. Decimos que $\hat{f}: X \longrightarrow R$ es un levantamiento de f si se cumple que:

(i) $\hat{f}$ es continua

(ii) $p \circ \hat{f} = f$

Trata de realizar una relación similar al 1er Tma de isomorfía

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

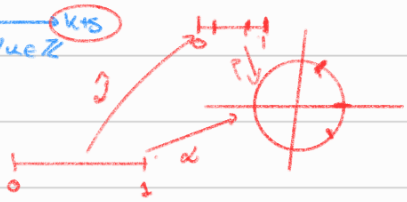
Lleva al espacio que proyectamos (X) al espacio recubridor R de forma que $p\circ\hat{f}$ garantiza el recubrimiento

Ejemplos

Consideramos la aplicación recubridora $p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $x \longmapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ y consideramos $\alpha: [0,1] \longrightarrow S^1$, $s \longmapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Si tomamos $\hat{\alpha}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \longmapsto s$ es claro que es un levantamiento.

↳ continua ∧ $p\circ\hat{\alpha}(s) = p(s) = ((\cos 2\pi s), (\sin 2\pi s))$

Otros levantamientos son $\hat{\alpha}_k: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \longmapsto k+s$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Para la curva $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$ un levantamiento sería $\hat{\tilde{\alpha}}_k(s) = k - s$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

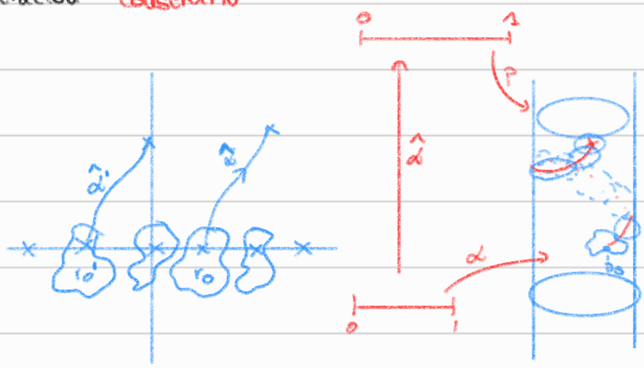


Lema

Sean $p: R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, $r_0 \in R$ y $b_0 \in B$ | $p(r_0) = b_0$. Entonces, dado un arco $\alpha: [0,1] \longrightarrow B$ con $\alpha(0) = b_0$, existe un único arco $\hat{\alpha}: [0,1] \longrightarrow R$ tal que $\hat{\alpha}(0) = r_0$ y $\hat{\alpha}$ es un levantamiento de α. ↳ Es continua ↳ $p\circ\hat{\alpha} = \alpha$

- Demostración - ↳ Debo construirlo

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\hat{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$



Como p es una aplicación recubridora, cada punto $b \in B$ tiene asociado un abierto $\mathcal{U}_b \subseteq B$ regularmente recubierto que contiene a b. Como $\alpha([0,1])$ es compacto entonces

$p^{-1}(\mathcal{U}_b) = \biguplus_i$

↳ la curva lo es

$$\alpha([0,1]) \subseteq \mathcal{U}_{b_1} \cup \mathcal{U}_{b_2} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{b_m}$$

Entonces; $[0,1] \subseteq \alpha^{-1}(\mathcal{U}_{b_1}) \cup \dots \cup \alpha^{-1}(\mathcal{U}_{b_k})$ donde $\alpha^{-1}(\mathcal{U}_{b_i})$ abierto $\forall i$ (α continua). Usando el Lema de Número de Lebesgue tenemos que $\exists \delta > 0$ fijo tal que $\forall x \in [0,1]$ $B(x,\delta) \cap [0,1]$ está contenido en algún $\alpha^{-1}(\mathcal{U}_{b_j})$, para cierto $j \in \{1, \dots, k\}$.

Esto nos asegura que podemos hacer una subdivisión del intervalo $[0,1]: t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ tal que $\alpha([t_j, t_{j+1}])$ está contenido en algún $\mathcal{U}_{b_\ell}$ con $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.

Definimos $\hat{\alpha}$ de manera recursiva:

$\alpha([t_0 = 0, t_1])$ está contenido en algún $\mathcal{U}_{b_\ell}$. Como $\mathcal{U}_{b_\ell}$ está regularmente recubierto $p^{-1}(\mathcal{U}_{b_\ell}) = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$ unión disjunta de abiertos y $p|_{\Delta_i} : \Delta_i \longrightarrow \mathcal{U}_{b_\ell}$ es homeomorfismo. ¿Estamos pensando en que $b_0 \in \mathcal{U}_{b_\ell}$?

pueden ser muchas copias → $r_0 \in p^{-1}(b_0) \Rightarrow p^{-1}(\mathcal{U}_{b_\ell}) = \bigcup_{i \in I} \Delta_i \Rightarrow r_0 \in \Delta_{i_0}$ para algún $\Delta_{i_0}, i_0 \in I$

Como $p|_{\Delta_{i_0}} : \Delta_0 \longrightarrow \mathcal{U}_{b_\ell}$ es homeomorfismo, podemos definir $\hat{\alpha}(t) = (p|_{\Delta_{i_0}})^{-1}(\alpha(t))$ con $t \in (t_0, t_1)$. Claramente $\hat{\alpha}$ es continua por ser composición de continuas y $p|_{\Delta_{i_0}} \circ \hat{\alpha} = \alpha$

Análogamente, como r es finito podemos hacer el proceso de forma iterativa obteniendo un levantamiento $\hat{\alpha}$. En los pliegues es continua por el lema de pegado y porque p y α lo son $\Rightarrow \hat{\alpha}$ debe serlo.

Para ver la unicidad si $\hat{\alpha}(0) = r_0$ es evidente que si existiese otro, $\tilde{\alpha} : [0,1] \longrightarrow R$, es claro que $\tilde{\alpha}([t_i, t_{i+1}]) = \hat{\alpha}([t_i, t_{i+1}])$, pero como $p|_{\Delta_{i_0}}$ es homeomorfismo tenemos que debe ser la misma curva, por continuidad. La idea es que si empieza en una franja $\Rightarrow$ no podrá salirse y por homeomorfismo deberá ser la misma.

* Es importante tener en cuenta que en general el levantamiento de un lazo no es un lazo, sino simplemente un arco. El levantamiento de un arco es un arco, pero el de un lazo no tiene por qué ser de un lazo, sí será un arco

Lema

Sean $p : R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora y $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow B$ una aplicación continua.

Dados $b_0 = H(0,0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ entonces $\exists! \hat{H} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow R$ tal que $\hat{H}(0,0) = r_0$.

Además, si H es una homotopía por arcos entonces $\hat{H}$ también lo será.

El levantamiento de una homotopía por arcos es estrictamente una homotopía por arcos. El recíproco es falso.

Corolario

Basta usar el lema anterior a la homotopía entre arcos.

Sean $p : R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow B$ dos arcos homotópicos y tomamos $r_0 \in p^{-1}(\alpha(0)) = p^{-1}(\beta(0))$. Si elegimos $\hat{\alpha}, \hat{\beta} : [0,1] \longrightarrow R$ como los únicos arcos con $\hat{\alpha}(0) = \hat{\beta}(0) = r_0$ entonces se tiene que $[\hat{\alpha}] = [\hat{\beta}]$

Los levantamientos preservan homotopías, es decir, los levantamientos de arcos homotópicos son arcos homotópicos

Definición

Consideramos una aplicación recubridora $p: R \longrightarrow B$, $b_0 \in B$ y $r_0 \in R$ con $p(r_0) = b_0$. Entonces podemos definir la siguiente aplicación

↳ Esto no significa que dicha correspondencia sea biunívoca pues p sólo es sobreyectiva

$$\phi: \Pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$
$$[\alpha] \longmapsto \hat{\alpha}(1)$$

(A cada arco basado en b_0 le hace corresponder su final.)

donde $\hat{\alpha}$ es el único levantamiento de α con $\hat{\alpha}(0) = r_0$.

Para el caso de la circunferencia tenemos que cuenta el nº de vueltas empezando en b_0. Lo más importante es que la aplicación ϕ (ni continua ni nada) está bien definida.

A ϕ se le suele llamar correspondencia del levantamiento

Teorema

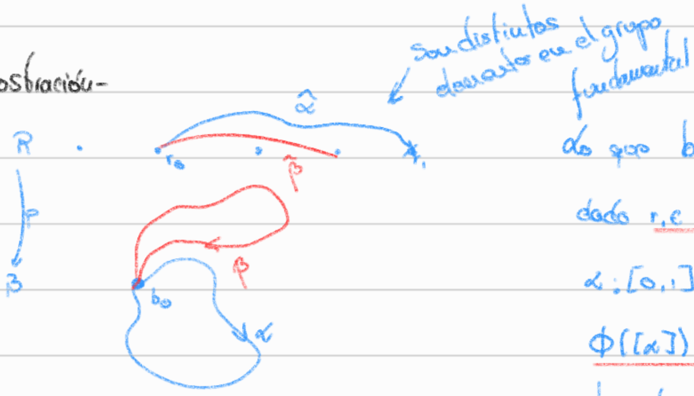
Sean $p: R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$, $r_0 \in R$ con $p(r_0) = b_0$. Si R es arcoconexo entonces la correspondencia del levantamiento

$$\phi: \Pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$

es sobreyectiva. La idea intuitiva es que puedo unir cualesquiera dos puntos $\Rightarrow$ los levantamientos llegarán a todos lados

Además, si R es simplemente conexo entonces ϕ es biyectiva.

Demostración-



Lo que buscamos probar es que dado $r_1 \in p^{-1}(b_0) \subseteq R$ existe un lazo $\alpha: [0,1] \longrightarrow B$ de forma que $\phi([\alpha]) = r_1$, es decir, su único levantamiento $\hat{\alpha}: [0,1] \longrightarrow R$ cumple que $\hat{\alpha}(0) = r_0$ y $\hat{\alpha}(1) = r_1$. Como R es arcoconexo, sabemos que $\exists \alpha^*: [0,1] \longrightarrow R$ tal que $\alpha^*(0) = r_0$ y $\alpha^*(1) = r_1$. Eligiendo ahora $\alpha = p \circ \alpha^*$ entonces α es un arco en B de manera que $\alpha(0) = p(\alpha^*(0)) = p(r_0) = b_0$ y $\alpha(1) = p(\alpha^*(1)) = p(r_1) = b_0$ luego $\alpha \in \Pi_1(B, b_0)$

Además, $\hat{\alpha} = \alpha^*$ es un levantamiento de $\alpha \Rightarrow \phi([\alpha]) = \hat{\alpha}(1) = \alpha^*(1) = r_1$.

Veamos que, si R es simplemente conexo entonces ϕ es biyectiva. De hecho, sólo debemos probar que ϕ es inyectiva pues si R es simplemente conexo es claro que es arcoconexo. [Simplemente conexo es más fuerte que arcoconexo]

Sean $[\alpha]$ y $[\beta] \in \Pi_1(B, b_0) \mid \phi([\alpha]) = \phi([\beta])$, como $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$ entonces $\hat{\alpha} \ast \tilde{\hat{\beta}}$ es un lazo basado en r_0; por ser R simplemente conexo, $[\hat{\alpha}] \ast [\tilde{\hat{\beta}}] = [\hat{\alpha} \ast \tilde{\hat{\beta}}] = [\varepsilon_{r_0}]$

Entonces

$$[\hat{\alpha}] = [\varepsilon_{x_0}] * [\hat{\beta}] = [\hat{\beta}]$$ multiplica por $[\hat{\beta}]$ a la derecha en ambos miembros

y tenemos ya que $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son homotópicos y, por tanto $[\alpha]=[\beta]$

Grupo fundamental de la circunferencia

Definición

Dado un lazo $\alpha : [0,1] \longrightarrow S_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ basado en $(1,0)$, definimos el grado de α como el único número entero $\hat{\alpha}(1)$ dado por el levantamiento $\hat{\alpha}$ de α mediante la aplicación recubridora $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ con $\hat{\alpha}(0)=0$ → Basta tomar $\alpha(s)=0 \ \forall s \in [0,1] \Rightarrow \hat{\alpha}(1)=0$.

→ Consiste en dar vueltas a la circunferencia

Para el grado de α usaremos la notación $\deg(\alpha)$.

Observación

Como el grado es simplemente la correspondencia del levantamiento para p y $b=0$

$\Rightarrow$ si $[\alpha]=[\beta] \Rightarrow \deg(\alpha)=\deg(\beta)$. Es decir, está bien definida sobre clases de equivalencia.

↳ Ser homotópico aquí equivale a dar el mismo número de vueltas en conjunto.

Teorema

El grupo fundamental de S^1 en el $(1,0)$ es isomorfo al grupo aditivo $(\mathbb{Z},+)$. De hecho,

$$\begin{aligned} \deg : \pi_1(S^1,(1,0)) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\longmapsto \deg(\alpha) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

-Demostración-

Como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, por el teorema anterior tenemos que $\deg$ es biyectiva.

Veamos que $\deg$ es un homomorfismo. Para ello, tomamos $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ los levantamientos de α y β respectivamente con $\hat{\alpha}(0)=0=\hat{\beta}(0)$. Buscamos calcular $\widehat{\alpha * \beta}$, lo definiremos así:

$$\widehat{(\alpha * \beta)}(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$ partir en mitades

y veremos que realmente es el levantamiento. Es fácil ver que $\alpha * \beta$ es continua y veamos cual es la proyección.

por def. de cos y sen

$$p(\widehat{(\alpha * \beta)})(s) = \begin{cases} p(\hat{\alpha}(2s)) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ p(\hat{\alpha}\cancel{(1)} + \hat{\beta}(2s-1)) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ p(\hat{\beta}(2s-1)) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

para que empiece en 1.

$\hat{\alpha}$ levan α

$\hat{\beta}$ levan β

Luego $p(\widehat{\alpha * \beta}) = \alpha * \beta$ y tenemos que $\widehat{\alpha * \beta}$ es un levantamiento $\alpha * \beta$ con $\widehat{\alpha * \beta}(0) = \hat{\alpha}(0) = 0$

entonces $\deg(\alpha * \beta) = \widehat{\alpha * \beta}(1) = \hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(1) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ $\square$

Consecuencias

(i) El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es $\mathbb{Z}$

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ pues tienen grupos fundamentales distintos.

$\mathbb{Z}$ — trivial por ser simplemente convexo.

(iii) $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}$ tiene a $\mathbb{Z}$ como grupo fundamental

(iv) El grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z}^2$

Proposición

No existe ninguna aplicación continua $f: \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{S}^1$

-Demostración-

Tomamos $\alpha(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ un lazo basado en $(1,0)$.

$$[\alpha]_{\overline{D}} = [\varepsilon_{(1,0)}] \qquad [\text{por ser } \overline{D} \text{ simplemente convexo}]$$

Supongamos que $f: \overline{D}(0,1) \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es la aplicación continua del enunciado, entonces:

$$f_*: \Pi_1(\overline{D}, (1,0)) \longrightarrow \Pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \quad [\text{homomorfismo}]$$

$$[\alpha]_{\overline{D}} \longmapsto [f \circ \alpha]_{\mathbb{S}^1} = [\alpha]_{\mathbb{S}^1} \quad [\text{por ser } f|_{\mathbb{S}^1} = Id]$$

$\neq [\varepsilon_{(1,0)}]$

Pero $[\alpha]_{\overline{D}} = [\varepsilon_{(1,0)}]_{\overline{D}} \Rightarrow [\alpha]_{\mathbb{S}^1} = f_*([\alpha]_{\overline{D}}) = f_*([\varepsilon_{(1,0)}]_{\overline{D}}) = [\varepsilon_{(1,0)}]_{\mathbb{S}^1}$, lo cual

es una contradicción pues $\deg(\alpha) = 1$, $\deg(\varepsilon_{(1,0)}) = 0$ — f_* homomorfismo $\square$

Teorema del punto fijo de Brouwer

Si $f: \overline{D} \longrightarrow \overline{D}$ es continua entonces $\exists x_0 \in \overline{D} \mid f(x_0) = x_0$.

-Demostración-

Supongamos que f no tiene ningún punto fijo, es decir, $f(x) \neq x$ $\forall x \in \overline{D}$.

Para cada $x \in \overline{D}$ consideramos la semirrecta abierta $f(x) + \lambda(x - f(x))$ con $\lambda > 0$ y consideramos — une x con $f(x)$

la intersección con la circunferencia unidad, como $f(x), x \in \overline{D}$ y son distintos; lo anterior — $f(x) \neq x$ $\forall x \in \overline{D}$

es una semirrecta y ha de cortar exactamente en un único punto a $\mathbb{S}^1$ — por construcción

Buscamos λ para que $f(x) + \lambda(x - f(x))$ tenga módulo 1

$$1 = \langle f(x) + \lambda_x(x - f(x)), f(x) + \lambda_x(x - f(x)) \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle + 2\lambda_x \langle f(x), (x - f(x)) \rangle + \lambda_x^2 \langle x - f(x), x - f(x) \rangle$$

$$\lambda_x = \frac{-2\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{4\langle f(x), x - f(x) \rangle - 4(\langle f(x), f(x) \rangle - 1)\langle x - f(x), x - f(x) \rangle}}{2\langle x - f(x), x - f(x) \rangle}$$

que está bien definida y $g(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x))$ es continua. Además $|g(x)| = 1$ $\forall x \in \overline{D}$

y, si $x \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow g(x) = x$!! (contradice la proposición de antes)

por construcción de g

Entonces f tiene un punto fijo. $\square$

Observación

El teorema anterior es también cierto para todo conjunto homeomorfo al disco $\bar{D}$.

Corolario

Sea $V: \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ una aplicación continua. Entonces existen $x, y \in S^1$ de forma que $V(x) = \lambda x$, $V(y) = -\mu y$ con $\lambda, \mu > 0$

- Demostración -

Consideramos $\boxed{f(x) = \dfrac{V(x)}{|V(x)|}}$ $\forall x \in \bar{D}$ que es continua pues $V(x) \neq 0$ $\forall x \in \bar{D}$. Aplicando el T^{ma} de Brouwer tenemos que $\exists x_0 \in \bar{D} \mid f(x_0) = x_0 \Rightarrow \dfrac{V(x_0)}{|V(x_0)|} = x_0 \in S^1$ y $V(x_0) = \underbrace{|V(x_0)|}_{\lambda} x_0$

Si tomamos $\boxed{g(x) = \dfrac{-V(x)}{|V(x)|}}$ se cumple lo mismo y tenemos $y_0 \in \bar{D} \mid V(y_0) = -\underbrace{|V(y_0)|}_{\mu} y_0$

Este resultado es cierto para todo $\theta \in [0, 2\pi[$

Teorema fundamental del Álgebra

Todo polinomio complejo de grado $n \geq 1$ tiene, al menos, una raíz compleja.

- Demostración -

Definimos $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$ $n \geq 1$

Supongamos que $p(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ y tomamos $H: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow S^1$ dada por:

$$H(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\boxed{p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s}\right)} \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s}\right)\right| \boxed{p\left(\frac{t}{1-t}\right)}} & \text{si } (s,t) \in [0,1] \times [0,1[\\ e^{2\pi i n s} & (s,t) \in [0,1] \times \{1\} \end{cases}$$

→ estudia cómo se mueven todas las circunferencias de todos los radios

→ realizo rotaciones para cada t.

Veamos que H es continua. Para ello, simplemente demostramos que

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s_0}\right) \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s_0}\right)\right| p\left(\frac{t}{1-t}\right)} = e^{2\pi i n s_0}$$

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s_0}\right) \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s_0}\right)\right| p\left(\frac{t}{1-t}\right)} = \lim_{t \to 1^-} \frac{\left(\left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi i n s_0} + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} e^{2\pi i (n-1) s_0} + \ldots\right)}{\left|\left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi i n s_0} + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} e^{2\pi i (n-1) s_0} + \ldots\right|} \cdot \frac{\left|\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{t}{1-t}\right)^i\right|}{\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{t}{1-t}\right)^i}$$

divido y multiplico por $\left(\frac{t}{1-t}\right)^n$ → $= \dfrac{e^{2\pi i s_0 n}}{|e^{2\pi i s_0 n}|} = e^{2\pi i s_0 n}$

Y por el lema del pegado tenemos la continuidad de H, cumpliendo que $H(0,t) = 1$ $t \in [0,1]$, $H(1,t) = 1$ $t \in [0,1]$, $H(s,0) = 1$ $s \in [0,1]$, $H(s,1) = e^{2\pi i n s}$ $s \in [0,1]$

Entonces H es una homotopía por arcos entre los lazos $\alpha_1(s) = 1$, $\alpha_2(s) = e^{2\pi i n s}$ $\Rightarrow \boxed{[\alpha_1] = [\alpha_2]}$

lo cual es una contradicción pues $\deg(\alpha_1) \neq \deg(\alpha_2)$. $\square$

Retracciones, tipos de homotopías y retractos de deformación

Definición

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que una aplicación continua $r: X \longrightarrow A$ es una retracción si se cumple que:

$$r(a)=a \quad \forall a \in A$$

Ser retracción sólo consiste en dejar fijos los puntos de un conjunto A. (Siendo continua)

Se dice que A es un retracto de X si $\exists r: X \longrightarrow A$ una retracción de X en A.

Ejemplos

(i) S^n es un retracto de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Podemos considerar

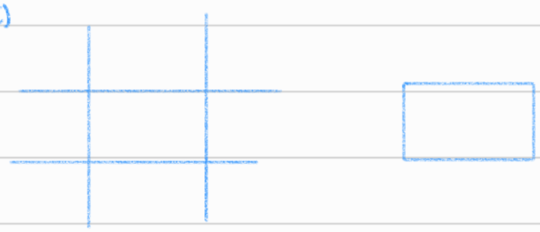
$$r: \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow S^n$$
$$x \longmapsto \frac{x}{|x|}$$

→ también vale la aplicación definida en el T^{ma} de pto. fijo de Brouwer.

que es continua y $r(y)=y \quad \forall y \in S^n$

(ii) S^1 no es retracto de $\bar{D}$, por una proposición que vimos (Corolario de Brouwer)

(iii)



Lema

Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ tal que A es un retracto de X. Entonces, la aplicación

$$i: A \longrightarrow X$$

induce un homomorfismo $i_*: \pi_1(A,a_0) \longrightarrow \pi_1(X,a_0)$ inyectivo $a_0 \in A$.

-Demostración-

Si A es retracto de X entonces $\exists r: X \longrightarrow A$ continua tal que $r(a)=a \ \forall a \in A$. Usando que $i \circ r : Id_X$ conseguimos que $i_* \circ r_* : Id_{\pi_1(X,a_0)}$ luego es inyectiva entonces i_* es inyectiva.

Definición

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos. Decimos que f es una equivalencia homotópica si existe $g: Y \longrightarrow X$ continua tal que $g \circ f$ es homotópica a Id_X y $f \circ g$ sea homotópica a Id_Y.

En esto influye mucho la topología del espacio topológico.

Decimos que X e Y son homotópicamente equivalentes si existe una equivalencia homotópica entre ambos. Equivalentemente, son del mismo tipo de homotopía.

A la aplicación g se le llama una inversa homotópica de f

↳ No es única

Observaciones

(i) La inversa homotópica no tiene por qué ser única.

(ii) Ser homotópicamente equivalente es una relación de equivalencia. En particular, la composición de equivalencias homotópicas también lo es.

(iii) Una equivalencia homotópica no tiene por qué ser inyectiva o sobreyectiva.

(iv) Todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica

Lema

Sean $f,g: X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas y $x_0 \in X$. Si H es una homotopía entre f y g, y consideramos el arco $\alpha(t) = H(x_0,t)$. Entonces se tiene que

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "\varphi = \text{isomorfismo}"] \\
& \pi_1(Y,g(x_0))
\end{tikzcd}$$

el diagrama es conmutativo donde $\varphi \circ f_* = g_*$ y $\varphi([\gamma]) = [\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]$

En particular f_* es inyectiva, respectivamente sobreyectiva, si y sólo si g_* lo es.

- Demostración -

Tenemos que demostrar que, si β es un lazo en X basado en x_0 entonces:

$$[\tilde{\alpha}] * [f\circ\beta] * [\alpha] = \varphi([f\circ\beta]) = (\varphi \circ f_*)([\beta]) = g_*([\beta]) = [g\circ\beta]$$

Equivalentemente, que:

$$[\alpha] * [g\circ\beta] = [f\circ\beta] * [\alpha] \Longleftrightarrow \exists H \text{ homotopía por arcos entre ambas curvas.}$$

Por hipótesis, tenemos que $H: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continua con $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g$ $\forall x \in X$.

Definimos $F: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X\times[0,1]$, $(s,t) \longmapsto (\beta(s),t)$ que es continua, $b_0(s) = (s,0)$ $s\in[0,1]$, $b_1(s) = (s,1)$ $s \in [0,1]$,

$h_0(t) = (0,t)$ $t\in[0,1]$, $h_1(t) = (1,t)$ $t \in [0,1]$.

Como $[0,1]\times[0,1]$ es simplemente conexo y $b_0 * h_1 * \tilde{b}_1 * \tilde{h}_0$ es un lazo basado en $(0,0)$ entonces tenemos que $[b_0 * h_1 * \tilde{b}_1 * \tilde{h}_0] = [\varepsilon_{(0,0)}] \Leftrightarrow [b_0 * h_1] = [h_0 * b_1]$ entonces

$$\exists G: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1] \text{ homotopía por arcos}$$

$$G(s,0) = (b_0 * h_1)(s) \quad \wedge \quad G(s,1) = (h_0 * b_1)(s)$$

$$G(0,t)=(0,0) \quad \wedge \quad G(1,t)=(1,1)$$

Consideramos entonces:

$$H \circ F \circ G : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow Y \quad \text{continua}$$

$(H\circ F\circ G)(0,t) = H(F(G(0,t))) = H(F(0,0)) = H(\beta(0),0) = H(x_0,0) = f(x_0)$

$(H\circ F\circ G)(1,t) = H(F(1,1)) = H(x_0,1) = g(x_0)$

$$(H\circ F\circ G)(s,0) = H(F((l_0 * l_1)(s))) = H\left(F\left(\begin{cases} l_0(2s) & s\in[0,\frac{1}{2}] \\ l_1(2s-1) & s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}\right)\right) = H\left(F\left(\begin{cases} (2s,0) & s\in[0,\frac{1}{2}] \\ (1,2s-1) & s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}\right)\right)$$

$$= H\left(\begin{cases} (\beta(2s),0) & s\in[0,\frac{1}{2}] \\ (x_0,2s-1) & s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}\right) = \begin{cases} f(\beta(2s)) & s\in[0,\frac{1}{2}] \\ \alpha(2s-1) & s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases} \quad \{(f\circ\beta)*\alpha\}(s)$$

Análogamente $(H\circ F\circ G)(s,1) = (\alpha * (g\circ\beta))(s)$ y tenemos ya la homotopía buscada y $(f\circ\beta)*\alpha = \alpha * (g\circ\beta)$ □

Teorema

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una equivalencia homotópica, entonces

$$f_*: \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x_0))$$

es un isomorfismo.

- Demostración -

Como f es una equivalencia homotópica

$$\exists g: Y \longrightarrow X \quad \text{inversa homotópica de } f$$

Sabemos que $g\circ f$ es homotópica a Id_X entonces

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "(f_{x_0})_*"] \arrow[drr, "Id_*"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(X,g(f(x_0))) \arrow[d, "\varphi"] \\
& & \pi_1(X,x_0)
\end{tikzcd}$$

$=$

Usando el lema visto anteriormente

$$\exists \varphi: \pi_1(X,g(f(x_0))) \longrightarrow \pi_1(X,x_0) \quad \text{isomorfismo}$$

De aquí se deduce que $(f_{x_0})_*$ es inyectiva y que g_* es sobreyectiva. Haciendo un proceso análogo con $\pi_1(Y,f(x_0))$, $\pi_1(X,g(f(x_0)))$, $\pi_1(Y,f(g(f(x_0))))$ obtenemos que g_* es inyectiva y, por tanto, biyectiva.

Entonces $(f_{x_0})_*$ es biyectiva, y por tanto isomorfismo. □

Definición

Sean X un esp. topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un retracto de deformación de X si existe una retracción $r: X \longrightarrow A$ que es homotópica a Id_X.

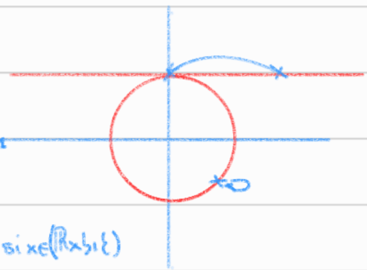
La definición es equivalente a decir que existe $H: X \times [0,1] \longrightarrow X$ homotopía tal que
$$H(x,0)=x \quad \wedge \quad H(x,1) \in A \ \ \forall x \in X, \ H(a,1)=a \ \ \forall a \in A$$

Aquí la retracción es simplemente $r(x) = H(x,1)$

Ejemplos

i) $X = S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$

Veamos que S^1 es un retracto de deformación de X.



$$H: X \times [0,1] \longrightarrow X$$
$$(x,t) \longmapsto H(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in S^1 \\ (1-t)x + t(0,1) & \text{si } x \in (\mathbb{R} \times \{1\}) \end{cases}$$

Es continua por serlo en cada subconjunto separado, que son cerrados, y por el lema de pegado en la intersección.

Además, cumple las condiciones del retracto de deformación. □

ii) $X = (\mathbb{R} \times \{-1,1\}) \cup (\{-1,1\} \times \mathbb{R})$

Es intuitivo que $([-1,1] \times \{-1,1\}) \cup (\{-1,1\} \times [-1,1])$ es un retracto de deformación de X con:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ (1-t)x + t(1,1) & \text{si } \pi_1(x) \geq 1 \text{ y } \pi_2(x) \geq 1 \\ (1-t)x + t(-1,1) & \text{si } \pi_1(x) \leq -1 \text{ y } \pi_2(x) \geq 1 \\ (1-t)x + t(-1,-1) & \text{si } \pi_1(x) \leq -1 \text{ y } \pi_2(x) \leq -1 \\ (1-t)x + t(1,-1) & \text{si } \pi_1(x) \geq 1 \text{ y } \pi_2(x) \leq -1 \end{cases}$$

Corolario

Sea A un retracto de deformación de X. Entonces A y X son del mismo tipo de homotopía y la aplicación inclusión induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales
$$i_*: \pi_1(A, a_0) \longrightarrow \pi_1(X, a_0), \ a_0 \in A$$

-Demostración-

Si A es retracto de deformación de X entonces $\exists H$ homotopía cumpliendo

$$\begin{cases} H(x,0)=x & \forall x\in X \\ H(x,1)\in A & \forall x\in X \\ H(a,1)=a & \forall a\in A \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si $r(x)=H(x,1)$, tenemos que H es una homotopía entre Id_X y $i\circ r$. Y, por otro lado,

$H(x,0)=Id_X$ continua $\Rightarrow$ homotopía
$H(x,1)=r(x)$

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A$$
$$a \longmapsto a \longmapsto a$$

Ser del mismo tipo de homotopía

con $r\circ i = Id_A \Rightarrow A$ y X son del mismo tipo de homotopía por el T^{ma} anterior. Además, i_* es isomorfismo

↳ Es equivalente a decir que r e i son una equivalencia homotópica $\square$

Observación

Si A es retracto de $X \Rightarrow i_*: \Pi_1(A,a_0) \longrightarrow \Pi_1(X,a_0)$ es monomorfismo

Si A es retracto de deformación de $X \Rightarrow$ es isomorfismo.

Ejemplos

i) $X=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ y $x_0\in X \Rightarrow \{x_0\}$ es retracto de X ya que $r: X \longrightarrow \{x_0\}$, $x \longmapsto x_0$ es continua

pero, sin embargo, no es un retracto de deformación, pues si lo fuese, estaríamos diciendo que $i_*: \Pi_1(\{x_0\},x_0) \longrightarrow \Pi_1(X,x_0)$ sería isomorfismo pero $\{0\}$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}$

ii) $S^1\times\{0\}$ es un retracto de deformación del cilindro

$$H((x,y,z),t)=(x,y,(1-t)z)$$

que es continua y cumple

$$H((x,y,z),0)=(x,y,z)$$

$$H((x,y,z),1)=(x,y,0)$$

$$H((x,y,0),1)=(x,y,0)$$

iii) Consideramos la cinta de Möbius X dada por $Y=[0,1]\times[0,1]$ bajo la relación de equivalencia

$$(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1,y_1)=(x_2,y_2) \\ \text{o bien} \\ \{x_1,x_2\}=\{0,1\} \wedge y_1+y_2=1 \end{cases}$$

Definimos la "circunferencia" $A=[0,1]\times\{1/2\}$ bajo la relación de equivalencia R. Consideramos la homotopía

$$H: Y\times[0,1] \longrightarrow Y$$
$$((x,y),t) \longmapsto (x,(1-t)y+t\tfrac{1}{2})$$

De esta forma, $\pi_1(\mathbb{X}) \cong \pi_1(\alpha) \cong \mathbb{Z}$

Definición

Se dice que un esp. topológico $\mathbb{X}$ es contráctil si existe $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que x_0 sea retracto de deformación de $\mathbb{X}$

Corolario

Todo espacio topológico contráctil tiene que ser simplemente conexo.
$\Rightarrow$

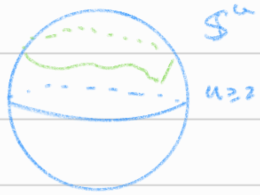
- Demostración -

Sea $\mathbb{X}$ el espacio topológico y $x_0 \in \mathbb{X}$ para el cual $\exists H: \mathbb{X} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{X}$ con $H(x,0) = x$, $H(x,1) = x_0$ $\forall x \in \mathbb{X}$

Estoy fijando $x \in \mathbb{X}$ $\rightarrow$ $\alpha_x(t) := H(x,t)$ $\forall t \in [0,1]$ es un arco que une x con x_0 $\Rightarrow$ $\mathbb{X}$ es arcoconexo. definición de contráctil

Como x_0 es retracto de deformación de $\mathbb{X} \Rightarrow i_*: \pi_1(\{x_0\}, x_0) \longmapsto \pi_1(\mathbb{X}, x_0)$ es isomorfismo
$$\underset{\{0\}}{\overset{\shortparallel}{\pi_1(\{x_0\},x_0)}}$$
entonces $\mathbb{X}$ es simplemente conexo. $\square$

El grupo fundamental de las esferas. Aplicaciones



Lema

Sean $\mathbb{X}$ un esp. topológico y $\mathcal{U}, V$ dos abtos suyos tal que $\mathbb{X} = \mathcal{U} \cup V$. Si $\mathcal{U} \cap V$ es arcoconexo entonces dado $x_0 \in \mathcal{U} \cap V$ y α un lazo basado en x_0; existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ $n \in \mathbb{N}$ lazos basados en x_0 tales que $[\alpha] = [\alpha_1] * \dots * [\alpha_n]$ donde la imagen de cada α_i cae completamente en $\mathcal{U}$ o bien en V.

- Demostración -

Sea $\alpha: [0,1] \longrightarrow \mathbb{X}$ lazo basado en x_0, como α es continua $\alpha^{-1}(\mathcal{U})$ y $\alpha^{-1}(V)$ son abiertos. Entonces, por el lema del número de Lebesgue, existe una partición de $[0,1]$ dada por
$$P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m} = 1\}$$
verificando que $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ está contenido en $\mathcal{U}$ o en V para $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Me quedo sólo con los de la intersección } Si $\alpha(t_i) \notin \mathcal{U} \cap V$, podemos considerar $P' = P \setminus \{t_i\}$ sin perder información, ya que $\alpha([t_{i-1}, t_i] \cup [t_i, t_{i+1}])$ estaría contenido en $\mathcal{U}$ o bien, todo en V.

Entonces, $\alpha(t_i) \in \mathcal{U} \cap V$. Como $\mathcal{U} \cap V$ es arcoconexo entonces
$$\exists \beta_i \text{ arco uniendo } x_0 \text{ con } \alpha(t_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ con } n = \#P$$

Entonces, ya se tiene que

$$[\alpha]=[\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_k]$$

donde α_i es una parametrización en $[0,1]$ de $\alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$

son arcos y no lazos

Entonces $[\alpha]=[\alpha_1]*[\tilde{\beta}_1]*[\beta_1]*[\alpha_2]\dots[\alpha_k]=[\alpha_1 * \tilde{\beta}_1]*[\beta_1*\alpha_2*\tilde{\beta}_2]*\dots*[\beta_{k-1}*\alpha_k]$

con cada operando es un lazo que, o bien solo está contenido en $\mathcal{U}$, o bien sólo en V. □

Teorema

Sea X un esp. topológico y $\mathcal{U},V$ abiertos de X. Supongamos que se cumple

i) $\mathcal{U}\cup V=X$.

ii) $\mathcal{U}\cap V$ es arcoconexo no vacío.

iii) $\mathcal{U},V$ simplemente conexos.

Entonces X también es simplemente conexo.

-Demostración-

Dado α lazo basado en $x_0\in\mathcal{U}\cap V$, por el lema anterior nos dice que $[\alpha]=[\alpha_1]*[\alpha_2]*\dots*[\alpha_k]$ donde cada α_i es un lazo basado en x_0 completamente contenido en $\mathcal{U}$ o bien en V.

Entonces $[\alpha_i]=[\varepsilon_{x_0}]$ $\forall i\in\{1,\dots,k\} \Rightarrow [\alpha]=[\varepsilon_{x_0}]$ □

Corolario

Las esferas S^n, $n\geq 2$, son simplemente conexas.

-Demostración-

Tomamos $\mathcal{U}=S^n\setminus\{(0,\dots,0,1)\}$ y $V=S^n\setminus\{(0,\dots,0,-1)\}$ son abiertos y simplemente conexos por ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$. Claramente $S^n=\mathcal{U}\cup V$ y $\mathcal{U}\cap V$ es arcoconexo pues es homeomorfo a $\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\}$ con $n\geq 2$. Por el teorema anterior tenemos el resultado. □

Corolario

El grupo fundamental del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$, $n\geq 2$, es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

-Demostración-

Veamos que la aplicación

$$p: S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$$
$$x \longmapsto [x]$$

es una aplicación recubridora. Claramente es continua y sobreyectiva

Por otro lado, dado $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tenemos que el abierto $\mathcal{U}_{x_0} = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle \neq 0\}$ es saturado pues $p^{-1}(p(\mathcal{U}_{x_0})) = \mathcal{U}_{x_0}$ y $\mathcal{U}_{x_0} = \{x \in \mathbb{S}^n \mid \langle x, x_0 \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathbb{S}^n \mid \langle x, x_0 \rangle < 0\}$

Es fácil probar que p restringido a cada operando son homeomorfismos.

Entonces, la correspondencia del levantamiento

aquí tenemos los puntos que van a a_0

$$\varphi : \Pi_1(\mathbb{RP}^n, [a_0]) \longrightarrow p^{-1}([a_0]) = \{a_0, -a_0\}$$

es biyectiva pues $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo y entonces $\Pi_1(\mathbb{RP}^n, [a_0]) \cong \mathbb{Z}_2$ □

Ejemplos

i) Calculamos el grupo fundamental de dos esferas S_1, S_2 de $\mathbb{R}^3$ que se tocan en un único punto.

$\Pi_1(S_1 \cup S_2) = \{0\}$

Sea $x_0 \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow$ tomamos $\mathcal{U} = \mathbb{X} \setminus \{y_1\}$ con $y_1 \in S_1 \setminus \{x_0\}$ y $V = \mathbb{X} \setminus \{y_2\}$ con $y_2 \in S_2 \setminus \{x_0\}$

Es claro que $\mathbb{X} = \mathcal{U} \cup V$ y $\mathcal{U}, V$ abiertos. Además, $\mathcal{U} \cap V$ es arcoconexo pues $S_1 \setminus \{y_1\}$ es arcoconexo y $S_2 \setminus \{y_2\}$ es homeomorfo a $S_1 \setminus \{y_1\} \Rightarrow \mathcal{U} \cap V$ es arcoconexo por ser unión
↳ por ser homeomorfo a $\mathbb{R}_2$

de arcoconexos que se tocan en un punto.

Queda por ver que $\mathcal{U}$ y V son simplemente conexos, lo vemos para $\mathcal{U}$. Veremos que $\mathcal{U}$ tiene a S_2 por retracto de deformación y, por tanto, $\Pi_1(\mathcal{U}) = \Pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \{0\}$ luego $\mathcal{U}$ sería simplemente conexo.

Igualmente lo es V y por el T^{ma} anterior $\mathbb{X}$ es simp conexo.

Para ver que $\mathcal{U}$ es simplemente conexo, sabemos que $\exists f$ homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$, como $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo $\exists H$ homotopía de $\mathbb{R}^2$ en $\{y\}$ con $y \in \mathbb{R}$ de forma que $\{y\}$ es retracto de deformación de $\mathbb{R}^2$. Entonces basta considerar la homotopía considerada por $H \circ f$ en los puntos de S_1 y por Id en S_2.

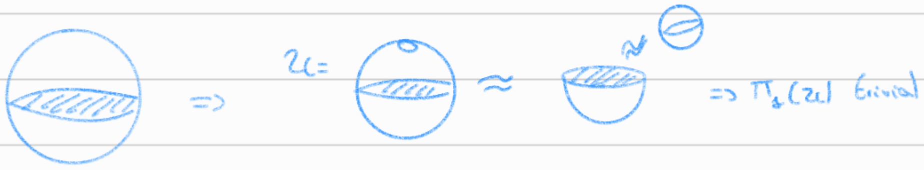
De esta forma, es claro que $\tilde{H}$ definida de esa manera es homotopía y S_2 es retracto de deformación de $\mathcal{U}$.

ii) Si llamamos $S(x,r)$ a la esfera centrada en $x \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$; consideramos $\mathbb{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S((n,0,0), 1/2)$

El argumento es tomar un arco, como es continuo su imagen es compacto luego está en una cantidad finita de esferas.

Demostrando por inducción que la cantidad finita de esferas es simplemente conexo.

iii) Consideramos $\mathbb{S}^2 \cup \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$



Aplicamos teorema y que X es simp. conexo.

Lema

Sea $f: S^1 \longrightarrow S^1$ continua que conserva antípodas, es decir, $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in S^1$. Supongamos que $f(1,0)=(1,0)$. ← Esto no importa para nada

Si tomamos el lazo $\alpha(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ entonces se tiene que $\deg(f\circ\alpha)$ es impar.

-Demostración-

$\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$ con $\alpha_1(s) = \alpha(\frac{s}{2})$ y $\alpha_2(s)=\alpha(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})$ $\forall s\in[0,1]$. Como $f\circ\alpha_1$ es un arco que comienza en el $(1,0)$ y acaba en $(-1,0)$ $\Rightarrow$ su levantamiento por p, lo podemos elegir que comience en el origen (ya que $p(0)=(1,0)$) y su punto final $\widehat{f\circ\alpha_1}(1)$ ha de cumplir que

$$p\circ(\widehat{f\circ\alpha_1})(1) = (-1,0) = (\cos 2\pi(\widehat{f\circ\alpha_1})(1), \sin 2\pi(\widehat{f\circ\alpha_1})(1)) \Rightarrow \widehat{f\circ\alpha_1}(1) = k+\tfrac{1}{2} \text{ para cierto } k\in\mathbb{Z}$$

Veamos que $\widehat{f\circ\alpha}$ es la siguiente curva.

$$\widehat{f\circ\alpha} = \widehat{f\circ\alpha_1} * \gamma, \quad \gamma(s) = (k+1/2+\widehat{f\circ\alpha_1}(s))$$

Debemos probar que $\widehat{f\circ\alpha_1}*\gamma$ es continua, bien definida (claramente por lema de pegado) y también que $p\circ \widehat{f\circ\alpha_1}*\gamma = f\circ\alpha$.

$$p(\widehat{f\circ\alpha_1}*\gamma) = p(\widehat{f\circ\alpha_1})*p(\gamma)$$

$$p(\widehat{f\circ\alpha_1}) = f\circ\alpha_1$$

$$p(\gamma) = p(k+1/2+\widehat{f\circ\alpha_1}(s)) = (\cos(2\pi(k+1/2+\widehat{f\circ\alpha_1}(s))), \sin(2\pi(k+1/2+\widehat{f\circ\alpha_1}(s))))$$

$$=(\cos(\pi+2\pi\widehat{f\circ\alpha_1}(s)), \sin(\pi+2\pi\widehat{f\circ\alpha_1}(s))) = -(\cos(2\pi \widehat{f\circ\alpha_1}(s)), \sin(2\pi\widehat{f\circ\alpha_1}(s)))$$

$$= -p(\widehat{f\circ\alpha_1}(s)) = -f\circ\alpha_1(s) = f(-\alpha_1(s)) = f(\alpha_2(s))$$

Entonces $p(\widehat{f\circ\alpha_1}*\gamma) = f\circ\alpha_1 * f\circ\alpha_2 \Rightarrow \deg(f\circ\alpha) = (\widehat{f\circ\alpha})(1) = \gamma(1) = k+1/2+\widehat{f\circ\alpha_1}(1) = k+1/2+k+1/2 = 2k+1$ $k\in\mathbb{Z}$. □

Lema

No existe una aplicación continua $f: S^2\longrightarrow S^1$ que conserve antípodas

-Demostración-

Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists f: S^2 \longrightarrow S^1$ continua con $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in S^2$. Entonces consideramos la aplicación $j: S^1 \longrightarrow S^2$, $(x,y) \longmapsto (x,y,0)$ que es continua

inyección

Es claro que $f\circ j$ conserva antípodas. Salvo rotación de S^1 podemos suponer que $f\circ j(1,0)=(1,0)$

$\Rightarrow \exists \alpha \mid \deg(f\circ j\circ \alpha) \neq 0$ y un nº impar. En particular, $(f\circ j)_*([\alpha]) \neq [\varepsilon_{(1,0)}]$

porque S^2 simp. conexo

$(f_* \circ j_*)([\alpha]) = [\varepsilon_{(1,0)}]$ pues $f_* = [\varepsilon_{(1,0)}]$

ya que $\pi(S^1) = [\varepsilon_{(1,0)}]$!! pues el lema anterior nos decía que $\deg(f\circ j\circ \alpha)$ es impar □

Teorema de Borsuk-Ulam

Sea $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación continua. Entonces $\exists x_0 \in S^2 \mid f(x_0) = f(-x_0)$

- Demostración -

Si no ocurriera lo que dice el teorema $\Rightarrow f(x) \neq f(-x)\ \forall x \in S^2$ y construyendo la aplicación continua

$$\boxed{g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \in S^1\ \forall x \in S^2}$$

cumpliendo que $g(-x) = -g(x)$ y eso contradice el lema anterior □

Observación

No existen aplicaciones continuas e inyectivas de S^2 en $\mathbb{R}^2$ y, en particular, S^2 no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^2$

Teorema de los dos tortitas

Sean A_1 y A_2 dos compactos de $\mathbb{R}^2$ entonces existe una recta que divide a ambos a la vez dejando la mitad de área a cada lado

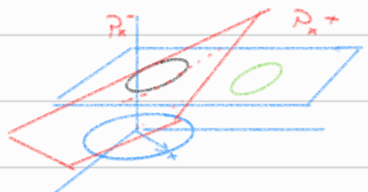
- Demostración -

Identificamos $\mathbb{R}^2$ dentro de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$. Para cada $x \in S^2$ consideramos

$P_x^+ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, x\rangle > 0\}$

$P_x^- = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, x\rangle < 0\}$

$L_x = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, x\rangle = 0\} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\})$



Observamos que, si $x \neq \pm(0,0,1) \Rightarrow L_x$ es una recta. En caso contrario $L_x = \emptyset$.

Esto es muy claro por intuición

$\boxed{P_x^+ = P_{-x}^-}$. Además, si área(A_1) = área$(A_2) = 0$ entonces cualquier recta es válida. Así que podemos suponer que área$(A_1) > 0$ y definimos

$$f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (\text{área}(A_1 \cap P_x^+), \text{área}(A_2 \cap P_x^+))$$

A cada función hay que asignarle cada $x \in S^2$ el área de la parte positiva de cada compacto

por el tma de la convergencia dominada f es continua y por el T^{ma} de Borsuk-Ulam

↳ la función área lo es

$\exists x_0 \in S^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0) \Rightarrow$

Prop clara

área$(A_1 \cap P_{x_0}^+)$ = área$(A_1 \cap P_{-x_0}^+)$ = área$(A_1 \cap P_{x_0}^-)$

$$\text{área}(A_2 \cap P_{x_0}^+) = \text{área}(A_2 \cap P_{-x_0}^+) = \text{área}(A_2 \cap P_{x_0}^-) \qquad \square$$

Prop clara

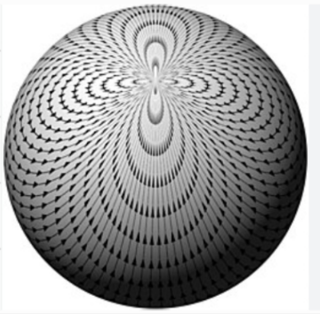
La recta L_{x_0} es la que nos da lo que pedimos.

Teorema del bocadillo de jamón

Sean A_1, A_2, A_3 tres compactos de $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ Existe un plano que divide a cada uno en dos partes de igual volumen.

Teorema de la bola peluda

Sea $n \in \mathbb{N}$ par, $n \geq 2$, todo campo vectorial continuo X sobre la esfera real S^n se anula en algún punto. es decir, $\exists v \in S \mid X(v) = 0$.



Teorema de Seifert-van Kampen

Preliminares algebraicos

- Dado un grupo $(G, \cdot)$ denotaremos por "e" a su elemento neutro y, para cada $g \in G$, usaremos la notación g^{-1} para denotar su inverso.
- Dado $n \in \mathbb{Z}$, denotaremos por g^n a $\begin{cases} \prod_{i=1}^{n} g & \text{si } n \geq 1 \\ e & \text{si } n = 0 \\ \prod_{i=1}^{-n} g & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$
- Recordemos también que $H \subseteq G$ es un subgrupo de G si

$$h_1 h_2^{-1} \in H \quad \forall h_1, h_2 \in H$$

y lo notaremos por $H < G$. Si además, se tiene que $ghg^{-1} \in H \ \forall h \in H, \forall g \in G$ se dice que $H \triangleleft G$.

1. Grupos cocientes

- Dado $H < G$, definimos la relación de equivalencia R dada por $g_1 R g_2 \iff g_1 g_2^{-1} \in H \iff \exists h \in H \mid g_1 = hg_2$
- Dado $g \in G$ denotamos por $[g] := Hg = \{hg : h \in H\}$ a la clase de equivalencia de g. Es importante observar que $[g_1] \cdot [g_2] = [g_1 g_2]$ no está bien definida en general; sólo está bien definida si y sólo si $H \triangleleft G$. En ese caso, podemos considerar el conjunto cociente bajo la relación R dado por $(G/H, \cdot)$ es un grupo.

2. Subgrupo normal generado por un conjunto

- Dado un grupo G, $\bigcap_{i \in I} d_i$ con $d_i \triangleleft G$ $\forall i$ es un subgrupo normal en G. A partir de esto, dado $C \subseteq G$ subconjunto no vacío existe el menor subgrupo normal de G que lo contiene dado por la intersección de todos los subgrupos normales que lo contienen. Y lo notaremos por $\langle C\rangle_N$.

$$g\in\langle C\rangle_N \iff g=(g_1c_1^{n_1}g_1^{-1})(g_2c_2^{n_2}g_2^{-1})\cdots(g_kc_kg_k^{-1})$$

donde $g_i\in G$, $c_i\in C$, $n_i\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$

3. Producto libre de grupos

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de grupos donde $G_i\cap G_j=0$ $\forall i,j\in I$ $i\neq j$. Denotamos por e_i al elemento neutro de G_i.

Llamamos letra a un elemento de cualquiera de los grupos, $x\in\bigcup_{i\in I}G_i$.

Llamamos palabra a una yuxtaposición de letras, de la forma $w=x_1x_2\ldots x_n$ $n\geq 0$ $n\in\mathbb{Z}$. Cabe destacar que no estamos multiplicando, sino haciendo una concatenación de letras. Si $n=0$, se le suele llamar palabra vacía y la denotaremos por $w=1$. Al número n lo llamaremos longitud de la palabra.

Llamaremos sílaba a la yuxtaposición de dos letras, es decir, es una palabra con $n=2$.

Diremos que dos palabras

$$w_1=x_1\ldots x_n \qquad w_2=y_1\ldots y_k$$

son iguales cuando $n=k$ y $x_i=y_i$ $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$

En el conjunto de todas las palabras, definimos la aplicación yuxtaposición, que a cada dos palabras

$$\left.\begin{array}{l} w_1=x_1,\ldots,x_n \\ w_2=y_1\ldots y_n \end{array}\right. \longmapsto w_1w_2=x_1\ldots x_ny_1\ldots y_n$$

le hace corresponder la concatenación de ambas. Esta operación es asociativa y tiene elemento neutro, pero debemos encontrar el inverso, mediante la palabra reducida.

Dada una palabra $w=x_1\ldots x_n$ diremos que está reducida si cumple:

i) $\nexists$ $x_i,x_{i+1}\in G_j$ con $i\in\{1,\ldots,n\}$, $j\in I$.
ii) $\nexists i\in\{1,\ldots,n\}$ con $x_i=e_i$

{ No hay dos del mismo grupo seguidas y no hay ningún neutro.

Así, dada una palabra cualquiera $w=x_1x_2\ldots x_n$ podemos reducirla con el siguiente procedimiento

(1) Cuando $\exists i\in\{1,\ldots,n\}$ con $x_i,x_{i+1}\in G_j$ $j\in I$, consideramos $x_i\cdot x_{i+1}$ usando la operación de G_j

(2) Se eliminan todos los elementos neutros.

En el conjunto de las palabras reducidas podemos definir la operación yuxtaposición + reducción. Esto dota al conjunto de las palabras reducidas de estructura de grupo. Lo denotaremos por

$\ast_{i\in I}G_i$ Producto libre de grupos y se le llama producto libre de los G_i.

Ejemplo:

(i) $\mathbb{Z}_2 = \{e_1, a\}$, e_1 elemento neutro, $aa = e_1$

$\mathbb{Z}_2 = \{e_2, b\}$, e_2 elemento neutro, $bb = e_2$

Las palabras son cualquier yuxtaposición de elementos y las reducidas son las yuxtaposiciones de a y b de forma intercalada.

Lema (Propiedad Universal del producto libre)

Sea $\{\mathcal{G}_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos disjuntos. Consideramos una familia de homomorfismos

$$f_i : \mathcal{G}_i \longrightarrow \mathcal{G}$$

sobre un grupo $\mathcal{G}$ fijo. Entonces $\exists !\, f: *\mathcal{G}_i \longrightarrow \mathcal{G}$ homomorfismo tal que $f \circ h_i = f_i$ $\forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & \mathcal{G} \\ & *\mathcal{G}_i \arrow[u, dotted, "f"'] \end{tikzcd}$$

¿Para qué me sirve?

donde h_i es el homomorfismo inclusión.

En la práctica, ¿quién es f? Realmente $f(x_1 \ldots x_n) = f_{i_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{i_n}(x_n)$ donde $x_k \in \mathcal{G}_{i_k}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$

4. Grupos libres y presentaciones de grupos

La situación para esta sección será estudiar grupos libres cuando $\mathcal{G}_i = \mathbb{Z}$ $\forall i \in I$

Definición

Sea $S = \{a\}$ un conjunto de un único elemento. Definimos el conjunto $F(a) = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$ donde tomamos la operación

$$a^k \cdot a^l := a^{k+l}$$

Con esta forma $(F(a), \cdot)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. A $F(a)$ se le suele llamar el grupo libre de rango 1 (nº de generadores que tiene) generado por a.

Definición

Dado un conjunto S cualquiera no vacío, definimos $F(S)$ como:

$$F(S) = \underset{a\in S}{*} F(a)$$

y se le suele llamar grupo libre generado por S. Tendrá, como mucho, tantos grados de libertad como elementos haya en S.

Ejemplo

(i) $F(a,b)$ tiene como algunos elementos

$$a^2, b^3, a^2b^5, a^{-1}b, a^{-100}b^{10000}.$$

donde $ab \neq ba$. Además, no admitimos las siguientes situaciones

$$a^0, b^0, (a^n a^k b^m b^t \longrightarrow a^{n+k} b^{m+t})$$

Observación

Cuando el conjunto $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ es finito con n elementos, se suele decir que $F(S)$ es el grupo libre de rango n sobre S. Se suele denotar por $\mathbb{Z} * \overset{(n)}{\cdots} * \mathbb{Z}$.

Corolario (Propiedad Universal del grupo libre)

Dados S un conjunto no vacío, G un grupo y $\rho: S \longrightarrow G$ una aplicación. Entonces, existe un único homomorfismo

$$f: F(S) \longrightarrow G$$

tal que $f_{|S} = \rho$

En la práctica

$$f(a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}) = \rho(a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot \rho(a_n)^{m_n}, \quad a_i \in S, \ m_i \in \mathbb{Z} \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Observación

De esta manera, de la propiedad anterior se deduce que todo grupo G se puede ver como un grupo libre sobre un subgrupo normal suyo.

Definición

Sean S un conjunto no vacío y $F(S)$ el grupo libre sobre S. Dado un subconjunto no vacío $R \subset F(S)$. Entonces, al grupo cociente $\dfrac{F(S)}{\langle R \rangle_N}$ lo denotaremos de la forma $\langle S \mid R \rangle$ o bien $\langle S; R \rangle$.

El resultado anterior nos dice que todo grupo G es de la forma $\langle S; R \rangle$ para un cierto S y un cierto R.

$S :=$ generadores de G $\qquad$ $R :=$ relaciones de G.

Ejemplos:

(i) $\langle a; a^n \rangle$ es una presentación de $\mathbb{Z}_n$

$$\hookrightarrow \frac{F(a)}{\langle a^n \rangle_N} = \frac{\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}}{\{a^{ln} \mid l \in \mathbb{Z}\}} = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$$

(ii) $<a, \emptyset>$ es una presentación de $\mathbb{Z}$.

(iii) $<a,b; b>$ es una presentación de $F(a) \cong \mathbb{Z}$. Podemos verlo como que tomar cociente es como ver que $<b>_N$ es el 1.

(iv) $<a,b; a^n, b^m>$ es una presentación de $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$

(v) $<a,b; aba^{-1}b^{-1}> \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$\frac{F(a,b)}{<aba^{-1}b^{-1}>} \Rightarrow [aba^{-1}b^{-1}] = [1] \Rightarrow [ab] = [ba]$$

Teorema de Seifert-van Kampen

Sean X un espacio topológico y U, V dos abiertos suyos cumpliendo las siguientes propiedades

(i) $X = U \cup V$

(ii) $U, V, U \cap V$ arcoconexos

Si denotamos por i_1, i_2, j_1, j_2 las inclusiones naturales dadas por el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "j_1"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\ & V \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

y tomamos $x_0 \in U \cap V$, entonces el homomorfismo

$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

que extiende a j_{1*} y j_{2*} es sobreyectivo. Además, $Ker(j)$ viene dado por el subgrupo normal generado por $R = \{ i_{1*}(g)^{-1} i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0) \}$

Por tanto, $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\dfrac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{<R>_N}$

Casos especiales

(i) Si U, V son simplemente conexos $\Rightarrow$ X es simplemente conexo $\to$ Es un teorema visto

(ii) Si $U \cap V$ es simplemente conexo $\Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ pues $\pi_1(U \cap V, x_0) = [\varepsilon]$

(iii) Si U es simplemente conexo $\Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \dfrac{\pi_1(V, x_0)}{<R>_N}$ con $R = \{ i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0) \}$

Ejemplos

(i) Sean C_1, C_2 dos circunferencias de $\mathbb{R}^2$ que se tocan en un único punto, x_0.

Buscamos calcular $\pi_1(C_1 \cup C_2, x_0)$.

Tomamos $x_1 \in C_1 \setminus \{x_0\}$ y $x_2 \in C_2 \setminus \{x_0\}$ y tomamos $U = X \setminus \{x_2\}$, $V = X \setminus \{x_1\}$.

a) U abierto y arcoconexo por ser unión de C_1 y un conjunto homeomorfo a $\mathbb{R}$.

b) V es abierto y arcoconexo

No tomamos $\mathcal{U}=C_1, V=C_2$, $\mathcal{U}\cap V=\{x_0\}$ porque necesitamos que sean abiertos.

c) $\mathcal{U}\cap V$ es abierto por intersección de abiertos. Además, es arcoconexo por ser unión de arcoconexos que se tocan en un punto.

d) $\pi_1(\mathcal{U},x_0)=\mathbb{Z}$ pues C_1 es retracto de deformación de $\mathcal{U}$.

Sabemos que $\alpha(t)=(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ es generador de $\pi_1(C_1,x_0)$ y por ser retracto de deformación α es generador de $\pi_1(\mathcal{U},x_0)$.

e) $\pi_1(V,x_0)=\mathbb{Z}$ por la misma razón, con generador β.

f) $\pi_1(\mathcal{U}\cap V,x_0)\cong\{0\}$ pues $\{x_0\}$ es retracto de deformación de $\mathcal{U}\cap V$.

Entonces, por el Teorema de Seifert-van Kampen $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(\mathcal{U},x_0)*\pi_1(V,x_0)$

(ii) Sean C_1, C_2 y C_3 tres circunferencias que sólo se tocan en un punto común, x_0, a las tres

Podría tomarse $\mathcal{U}=X\setminus\{x_1\}$ con $x_1\in C_1$

$V=X\setminus\{x_2,x_3\}$ con $x_2\in C_2, x_3\in C_3$

lo que nos permite aplicar el caso particular (i)

Lo haremos con $V=X\setminus\{x_2\}$ con $x_2\in C_2$ para el caso general

Es claro que se cumplen las hipótesis. Ahora bien, $\mathcal{U}$ tiene a $C_2\cup C_3$ como retracto de deformación suyo $\Rightarrow \pi_1(\mathcal{U},x_0)\underset{(i)}{\cong}\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ con generadores $\boxed{[\beta]_{\mathcal{U}}, [\gamma]_{\mathcal{U}}}$ son arcos que representan vueltas a una de las dos circunferencias

circunf. común

visto como lazo en $\mathcal{U}$

De igual forma $\pi_1(V,x_0)\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$, con generadores $[\alpha]_V, [\gamma]_V$ visto como lazo en V

$\pi_1(\mathcal{U}\cap V,x_0)\cong\mathbb{Z}$ con generador $[\gamma]_{\mathcal{U}\cap V}$

Usando el Tma de Seifert-van Kampen (¡No podemos poner cocientes por la cara!) tenemos que $\pi_1(X,x_0)\cong\dfrac{\pi_1(\mathcal{U},x_0)*\pi_1(V,x_0)}{\langle R\rangle_N}$ con $R=\{i_{1*}(g)^{-1}i_{2*}(g) \mid g\in\pi_1(\mathcal{U}\cap V,x_0)\}$

luego

$$\pi_1(X,x_0)=\langle[\beta]_{\mathcal{U}},[\gamma]_{\mathcal{U}},[\alpha]_V,[\gamma]_V;\ i_{1*}([\gamma]_{\mathcal{U}\cap V})^{-1}i_{2*}([\gamma]_{\mathcal{U}\cap V})\rangle$$

$$=\langle[\beta]_{\mathcal{U}},[\gamma]_{\mathcal{U}},[\alpha]_V,[\gamma]_V;\ \underbrace{[\gamma]_{\mathcal{U}}^{-1}[\gamma]_V}_{\text{Elemento neutro}\Rightarrow\boxed{[\gamma]_{\mathcal{U}}=[\gamma]_V}}\rangle=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$$

(iii) Consideramos $n\in\mathbb{N}$ circunferencias $C_1,\dots,C_n\in\mathbb{R}^2$ de manera que $\exists x_0\in\mathbb{R}^2 \mid C_i\cap C_j=\{x_0\}\ \forall i,j\in\mathbb{N}$

Sabemos ya que $\pi_1(C_1\cup C_2,x_0)\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ y supongamos que $\pi_1(\bigcup_{i=1}^{n-1}C_i,x_0)=\mathbb{Z}*\overset{(n-1)}{\cdots}*\mathbb{Z}$ y veamos de $\pi_1(\bigcup_{i=1}^{n}C_i,x_0)=\mathbb{Z}*\overset{(n)}{\cdots}*\mathbb{Z}$ con los generadores siendo los lazos basados en x_0 que dan una vuelta alrededor de cada circunferencia.

Tomamos $\mathcal{U}=\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)\setminus\{x_n\}$ con $x_n\in C_n$ y $x_n\neq x_0$ y $V=\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)\setminus\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$ con $x_i\in C_i$ $x_i\neq x_0$ $\forall i\in\{1,\dots,n-1\}$. Por tanto, $\mathcal{U}\cap V$ es arcoconexo, de hecho, simplemente conexo.

Además, es evidente que $\mathcal{U}$ y V son abiertos y arcoconexos.

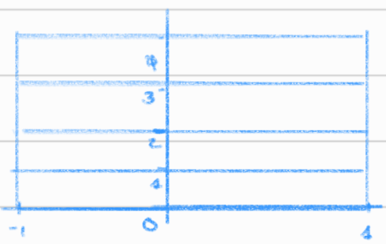
Por la casuística (ii) de los casos especiales sabemos que

$$\pi_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i, x_0\right)=\pi_1(\mathcal{U},x_0) * \pi_1(V,x_0)$$

Pero $\mathcal{U}$ tiene como retracto de deformación $\bigcup_{i=1}^{n-1} C_i$ y por la hipótesis de inducción $\pi_1(\mathcal{U},x_0)\cong \mathbb{Z} \overset{(n-1)}{* \cdots *} \mathbb{Z}$. Por la misma razón $\pi_1(V,x_0)=\mathbb{Z}$.

Entonces $\pi_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i, x_0\right)\cong \mathbb{Z} \overset{(n)}{* \cdots *}\mathbb{Z}$.

(iv) Consideramos en $\mathbb{R}^2$, $X=(\{-1,1\}\times[0,n])\cup\left(\bigcup_{k=0}^{n}[-1,1]\times\{k\}\right)$, que gráficamente es:



Para $n=4$.

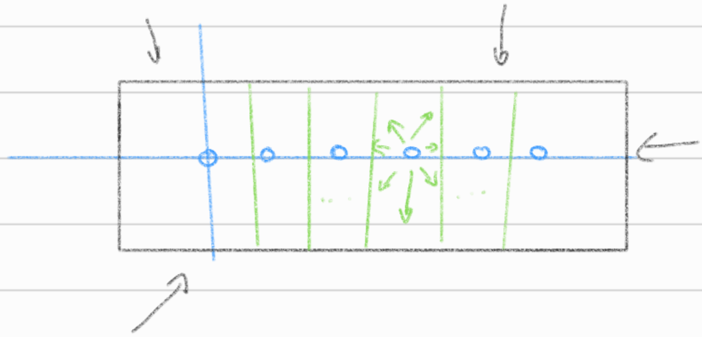
Procedemos por inducción, para $n=1$ $X\simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(X)\cong\mathbb{Z}$. Suponemos que, para $n\in\mathbb{N}$ ocurre que $\pi_1(X)\cong \mathbb{Z} \overset{(n)}{* \cdots *}\mathbb{Z}$ y demostramos que $\pi_1(X)\cong \mathbb{Z}\overset{(n+1)}{* \cdots *}\mathbb{Z}$. Basta considerar

$\mathcal{U}=X\setminus\{(0,n+1)\}$

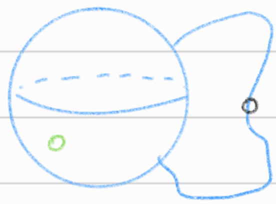
$V=X\setminus\{(0,i):i\in\{1,\dots,n\}\}$

y aplicamos lo mismo que en el ejemplo anterior.

(v) Consideramos $\mathbb{R}^2\setminus\{(i,0):i\in\{0,\dots,n\}\}$ y para ver que no es producto cartesiano, basta ver que dos lazos no conmutan



(vi) Consideramos $X = S_2 \cup \alpha([0,1]) \subset \mathbb{R}^3$ donde $\alpha([0,1])$ es un arco inyectivo con $\|\alpha(0)\| = 1 = \|\alpha(1)\|$ y $\|\alpha(t)\| \neq 1$ para $t \in (0,1)$



Y ya aplicar el T^{ma} para obtener $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$.