1. Resuelve el problema de valores iniciales

$$x' = -\frac{x}{x+t}, \quad x(0) = -1.$$

¿Está la solución definida en $]-\infty, +\infty[$?

Para resolver el problema, debemos conocer $F: D \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t,x) = \frac{-x}{x+t} = -1 - \frac{x}{t}$

donde $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0\}$. Tomamos $\varphi: \begin{cases} s = t \\ y = \frac{x}{t} \end{cases}$; $x = yt$ cambio de variable admisible obteniendo.

$$y's + y = -1 - y \iff y' = \frac{-1-2y}{s} \quad , s \neq 0 \quad , \text{sol constante: } y(s) = \frac{-1}{2} \ \forall s \in \varphi(D)$$

Variables separadas:

$$\int \frac{dy}{-1-2y} = \ln(s) + c \text{ con } s>0 \quad \text{ó} \quad -\int \frac{dy}{1+2y} = \ln(-s) + c \text{ con } s<0.$$

$$\int \frac{dy}{-1-2y} = -\int \frac{dy}{1+2y} = \frac{-1}{2}\int \frac{2}{1+2y}\,dy = \frac{-1}{2}\ln(1+2y)$$

$$\frac{-1}{2}\ln(1+2y) = \ln(s) + c \qquad \text{si } s>0,\ 1+2y>0$$

$$\ln(1+2y)^{-1/2} = \ln(s)+c \iff e^{\ln(1+2y)^{-1/2}} = Ke^{\ln(s)} \iff \frac{1}{\sqrt{(1+2y)}} = Ks \iff \frac{1}{(Ks)^2} = 1+2y \iff y(s) = \frac{1}{(Ks)^2 2} - \frac{1}{2}$$

definida en todo $\mathbb{R}-\{0\}$ pues tomando $s<0$ obtenemos lo mismo.

luego la respuesta es no

2. Se considera la transformación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (t,x) \mapsto (s,y), \ s = -2e^x, \ y = e^{-3t}.$$

Determina $\Omega = \varphi(\mathbb{R}^2)$ y prueba que φ define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y Ω. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = f(t,x)$$

con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. ¿Bajo qué condiciones sobre f se puede asegurar que el difeomorfismo es admisible para esta ecuación? Encuentra la ecuación transportada al dominio Ω.