1 Responda de forma razonada a las siguientes cuestiones breves:

a) Según el modelo de Von Bertalanffy la dinámica que rige el tamaño (longitud) de muchas especies marinas cumple las siguientes hipótesis:

- La longitud máxima que puede alcanzar es K ;
- El crecimiento en cada nueva medición, $L_{n+1} - L_n$, es proporcional a lo que falta para alcanzar su longitud máxima teórica (L_n es la longitud medida en el tiempo n-ésimo y $\mu > 0$ es el factor de proporcionalidad).

Describa el modelo discreto correspondiente y determine la longitud de equilibrio. ¿Bajo qué condiciones la longitud de equilibrio es asintóticamente estable?

b) Se considera la ecuación en diferencias lineal $x_{n+4} - x_{n+2} + x_n = 1$. ¿Son N-periódicas sus soluciones? En caso afirmativo, ¿Cuál es el valor de N? (Ver nota[1])

c) Indica los sistemas dinámicos para los que existe un equilibrio asintóticamente estable (localmente).

1) $\{\mathbb{R}, F(x)\}$ con $F(x) = x - x^3$
2) $\{\mathbb{R}, F(x)\}$ con $F(x) = x - x^2 + x^3$
3) $\{[0,2], F(x)\}$ con $F(x) = \dfrac{x+2}{1+2x}$

a) Vamos a traducir las hipótesis a ecuaciones, sea l_n la longitud de una especie marina en el n-ésimo año, sabemos que:

$$l_n \leq K$$

$$l_{n+1} - l_n = \mu (K - l_n)$$

Por tanto

$$l_{n+1} = \mu K - \mu l_n + l_n = \mu K + l_n (1-\mu)$$

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mu K + x(1-\mu)$ calculamos sus puntos fijos.

$$x_0 = \mu K + x_0(1-\mu) \Leftrightarrow 0 = -\mu K + x_0(1-\mu-1) = \mu K - \mu x_0 \Leftrightarrow \mu x_0 = \mu K \Leftrightarrow x_0 = K$$

Por tanto el valor del punto fijo depende directamente del valor de longitud máxima posible.

Veamos cuando es AE (Arriba España) Como f no es más que un polinomio $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

y por consiguiente, $f'(x) = 1-\mu$ constante

$$|f'(x_0)| = |1-\mu| = 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} 1-\mu = 1 \\ 1-\mu = -1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mu = 0 \\ \mu = 2 \end{matrix}$$

Por tanto, si $0 < \mu < 2$ tenemos que $|f'(x_0)| < 1$ y las soluciones AE, en caso contrario es estable

Para $\mu = 0$ y $\mu = 2$ debemos hacer uso de la definición de estabilidad asintótica

Una solución es asintóticamente estable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid |x_0 - c| < \delta \Rightarrow |x_n - c| < \varepsilon \wedge \lim_{n \to \infty} \{x_n\} = c$

·) $\underline{\mu = 0}$

$f(x) = 0 \Rightarrow$ Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0 \mid |x_0 - K| < \delta \Rightarrow$ veamos que $|x_n - K| < \varepsilon$

Pero $f = 0 \Rightarrow K < \varepsilon$ Por tanto para $\mu = 0$, la solución dada $\{x_n\}$ es estable $\Leftrightarrow K < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow K = 0$

En conclusión, $\nexists \delta > 0$ para el que sea estable

-) $\underline{\mu = 2}$ $\Rightarrow$ $f(x) = \mu k + x(1-\mu) = 2k - x$

Sea $\varepsilon > 0$ y x_0 dado tal que $|x_0 - k| < \delta$, $|x_n - k| = |f^n(x_0) - k| \overset{?}{<} \varepsilon$

Veamos quién es $f^n(x_0)$ con $x_0 \in N$ entorno de k

$$f(x_0) = 2k - x_0$$

$$f(x_1) = 2k - x_1 = 2k - f(x_0) = 2k - 2k + x_0 = x_0$$

$$f(x_2) = 2k - x_0$$

$$\vdots$$

$$f^{2n+1}(x_0) = 2k - x_0$$

$$f^{2n}(x_0) = x_0$$

Por tanto, queda claro por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que $\{x_n\}$ es un dos-ciclo dado por los valores $\{x_0, 2k - x_0\}$

Veamos su estabilidad:

$$f'(x) = -1$$

Entonces $|f'(x_0) f'(x_1)| = 1 > 0 \Rightarrow$ es AE.

b) No disponemos de conocimiento para resolverlo.

c) En este apartado se resolverá uno de ellos, el aparentemente más difícil:

3) Calculamos sus puntos fijos:

$$x = \frac{x+2}{1+2x} \Leftrightarrow x + 2x^2 = x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$$

Veamos su estabilidad:

$$f'(x) = \frac{(1+2x) - 2(x+2)}{(1+2x)^2} = \frac{1+2x-2x-2}{(1+2x)^2} = \frac{-1}{(1+2x)^2}$$

Por tanto:

$$|f'(1)| = \left|\frac{-1}{9}\right| < 1 \longrightarrow AE$$

$|f'(-1)| = \left|\frac{-1}{1}\right| = 1$, como $f'(-1) = -1$ buscamos aplicar otro criterio

$$f''(x) = \frac{4}{(1+2x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-24}{(1+2x)^5}$$

$2f''(-1) - 3f'''(-1)^2 = 2\cdot(-4) - 3\cdot 24 < 0 \longrightarrow$ Inestable

2 En el modelo económico de la telaraña suponemos que la oferta de un producto de consumo, y su demanda son funciones lineales del precio de ese producto en la forma:

$$O(p) = a + bp, \; D(p) = c - dp$$

con a, b, c y d constantes. Supongamos que se ha observado que el marginal de la demanda, d, no es constante sino que decrece en la forma

$$d(p_{n+1}) = \frac{\alpha}{p_n} \text{ con } \alpha > 0$$

Se establece un modelo de oferta-demanda para el producto de manera que se cumple la ley implícita de actualización de precios $O(p_n) = D(p_{n+1})$.

Para los valores $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, deduzca la ecuación en diferencias del modelo, calcule el precio de equilibrio y determine su estabilidad según los valores de α.

¿Siempre necesitamos el modelo dinámico para ver la ecuación de p_{n+1}?

Sean $a=1, b=2, c=4$ tenemos que

$O(p) = 1+2p$

$D(p) = 4 - d_n p$

Nos encontramos en el modelo dinámico entonces $O(p_n) = D(p_{n+1})$ por tanto

$1+2p_n = 4 - d_n p_{n+1} \iff \frac{-3+2p_n}{-d_n} = p_{n+1} \iff \frac{3-2p_n}{d_n} = p_{n+1}$

Sustituyendo d_n por su valor obtenemos que $\frac{3-2p_n}{d_n} = \frac{3-2p_n}{\frac{\alpha}{p_n}} = \frac{(3-2p_n)p_n}{\alpha} = p_{n+1} \iff$
$p_{n+1} = \frac{3p_n - 2p_n^2}{\alpha} \Rightarrow f(x) = \frac{3x-2x^2}{\alpha}$

Calculamos ahora el precio de equilibrio que debe cumplir que:

$x = \frac{3x-2x^2}{\alpha} \iff \alpha x = 3x - 2x^2 \iff \boxed{x=0} \wedge \alpha = 3 - 2x \iff \frac{\alpha-3}{-2} = x \iff \boxed{\frac{3-\alpha}{2} = x = p_e}$

Como $x=0$ no tiene sentido claro en este problema de beneficios calculamos la estabilidad del valor positivo

$f'(x) = \frac{3-4x}{\alpha} \Rightarrow f'(p_e) = \frac{3 - 4\frac{3-\alpha}{2}}{2} = \frac{3-6-2\alpha}{2} = \frac{-3-2\alpha}{2}$

$|f'(p_e)| = 1 \iff \frac{-3-2\alpha}{2} = -1 \iff -3-2\alpha = -2 \iff -2\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{-1}{2}$

$\vee$

$\frac{-3-2\alpha}{2} = 1 \iff -3-2\alpha = 2 \iff -2\alpha = -1 \iff \alpha = \frac{1}{2}$

$\iff |\alpha| < \frac{1}{2}$

Por tanto, si $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ el precio de equilibrio proporciona una solución constante AE.

Veamos que ocurre si $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{2}$

·) $\alpha = \frac{-1}{2}$. $f'(x) = -6 + 8x$, $p_e = \frac{3+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4}$

Veamos ahora la estabilidad del punto de equilibrio

$f''(x) = 8$, $f'''(x) = 0$

$2f''(x) - 3f'''(x)^2 = 2f''(x) = 16 > 0 \Rightarrow$ AE

·) $\alpha = \frac{1}{2}$, $f'(x) = 6 - 8x$, $p_e = \frac{3 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

Veamos ahora la estabilidad del punto de equilibrio

$f''(x) = -8$, $f'''(x) = 0$

$2f''(x) - 3f''(x)^2 = 2f''(x) = -16 < 0 \Rightarrow$ Inestable