INDUCCIÓN

1. Demuestre que para todo número natural no nulo n se cumple:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$$

La demostración es por el principio de inducción matemática según el predicado del tenor $P(n)$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$$

En el caso base $n=1$

$$\prod_{k=1}^{1}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{(1+2)}{4}=\frac{(1+2)}{2+2}=\frac{(1+2)}{2\cdot 1+2}$$

Luego $P(1)$ vale

Como hipótesis de inducción supondremos que n es un nº natural y que $P(n)$ es cierto, es decir que

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$$

y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ vale

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}-\frac{n+2}{2n+2\,(n+2)^2}=\frac{(n+2)^3-(n+2)}{2n+2\,(n+2)^2}=$$

$$=\frac{(n+2)^2-1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{(n+2)^2-1^2}{2(n+1)(n+2)}=\frac{(n+3)\cancel{(n+1)}}{2\cancel{(n+1)}(n+2)}=\frac{n+3}{2(n+2)}=\frac{n+3}{2n+4}=\frac{(n+1)+2}{2(n+1)+2}$$

Luego $P(n+1)$ vale.

Por el principio de inducción matemática sabemos que para todo nº natural n, $P(n)$ es cierto y eso era lo que se pedía

2. Demuestre que para cualquier número natural n el número $n^2 - n$ es par. Utilice lo anterior para demostrar que para todo número natural n, $n^3 - 3n^2 - 4n$ es un múltiplo de 6.

La demostración es por inducción por el primer principio de inducción según el predicado del tenor P(n)

$$n^2 - n = 2k \quad k \in \omega$$

En el caso base n=0

$$0 \cdot 2 \cdot 0 = 0\,(2-1) = 0\,(2 \cdot 0 - 1) = 0^2 \cdot 2 - 0 = 0^2 - 0$$

Luego P(0) vale

Como hipótesis de inducción supondremos que n es un n° natural y que P(n) es cierto, es decir, que :

$$n^2 - n = 2k, \quad k \in \omega$$

Y en el paso de inducción demostraremos que P(n+1) vale

$$(n+1)^2 - (n+1) = (n^2 + 2n + 1) - (n+1) = n^2 - n + 2n = 2k + 2n = 2(k+n)$$

Luego P(n+1) vale

Por el principio de inducción matemática sabemos que para todo n° natural n, P(n) es cierto y eso era lo que se pedía

La demostración es por inducción por el primer principio de inducción según el predicado del tenor P(n)

$$n^3 - 3n^2 - 4n = 6k \quad , k \in \omega$$

En el caso base n=0

$$0^3 - 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 = 6 \cdot 0$$

Luego P(0) vale

Como hipótesis de inducción supondremos que n es un n° natural y que P(n) es cierto, es decir que :

$$n^3 - 3n^2 - 4n = 6k \quad , k \in \omega$$

Y en el paso de inducción demostraremos que P(n+1) vale

$(n+1)^3 - 3(n+1)^2 - 4(n+1) = n^3+3n^2+3n+1 + 3n^2+6n+3 - 4n-4 = n^3+6n^2+5n =$

$= n^3-3n^2+9n^2-4n+9n = n^3-3n^2-4n+9n^2+9n = 6n+9(n^2+n) = 6n+6\ 3(n+n)$

Luego $P(n+1)$ vale

Por el principio de inducción matemática sabemos que para todo nº natural n, $P(n)$ es cierto y eso era lo que se pedía

3. Demuestre por inducción que para todo número natural n

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La demostración es por el principio de inducción matemática según el predicado del tenor $P(n)$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En el caso base $n=0$

$$\sum_{i=0}^{n} = 0 = \frac{0}{6} = \frac{0(0)(0)}{6} = \frac{0\cdot(0+1)(0+1)}{6} = \frac{0\cdot(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$$

Luego $P(0)$ vale

Como hipótesis de inducción supondremos que n es un nº natural y que $P(n)$ es cierto, es decir que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ vale

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} =$$

Luego $P(n+1)$ vale.

Por el principio de inducción matemática sabemos que para todo nº natural n, $P(n)$ es cierto y eso era lo que se pedía

4. Use el teorema de inducción para demostrar que:

$$2^{n-1} \leq n!$$

para todo $n > 0$.

La demostración es por el principio de inducción matemática según el predicado del tenor $P(n)$

$$2^{n-1} \leq n!$$

En el caso base $n = 0$

$$2^{0-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \leq 1 = 0!$$

Luego $P(0)$ vale

Como hipótesis de inducción supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierta, es decir que

$$2^{n-1} \leq n!$$

y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ vale

$$2^{n} = 2^{n-1} \cdot 2 \leq n! \cdot 2$$

Probemos que $n! \cdot 2 \leq (n+1)! = n! \cdot (n+1) \iff 2 \leq (n+1)$ cierto $\forall n \in \omega \setminus \{0\}$. Por el caso base es cierto para $n=0$

Luego $P(n+1)$ vale.

Por el principio de inducción matemática sabemos que para todo nº natural n, $P(n)$ es cierto y eso era lo que se pedía

7. Use el teorema de inducción para demostrar que $3^n + 7^n - 2$ es divisible por 8, para $n \geq 1$.

El problema se puede reducir a demostrar que $3^n + 7^n - 2 = 8k$ para $n \geq 1$, k un número entero

Haremos un esquema:

·) caso base $n=1$, $3^1 + 7^1 - 2 = 10 - 2 = 8 = 8 \cdot 1$, 1 es entero

·) Supongamos que se cumple para $n-1$ y veamos que se cumple para n

$3^{n-1} + 7^{n-1} - 2 = 8k$, k nº entero

$3^n + 7^n - 2 = 3^{n-1} \cdot 3 + 7^{n-1} \cdot 7 - 2 = (8k - 7^{n-1} - 2) \cdot 3 + 7^n - 2 = 8k - 3 \cdot 7^{n-1} - 6 + 7^n - 2 =$

$= 8k + 7^{n-1}(7-2) - 8 = 8(k-1) + 7^{n-1} \cdot 5$

Se supone que saldría así

Procedemos por el principio del Buen Orden, sea $P \subseteq \omega$ el conjunto de números naturales tales que $8k = 3^n + 7^n - 2$, veamos que tiene mínimo. Supongamos que no, entonces, para cada número natural n en P existe otro número natural n' menor tal que $8k = 3^{n'} + 7^{n'} - 2$. Sin embargo, como k es entero, y sabemos que la afirmación es cierta para $n=0$, siguiendo el argumento llegaríamos a que ω no tiene mínimo, es decir, una contradicción.

Por tanto $3^n + 7^n - 2 = 8k$ para todo número natural n por el principio del Buen orden

8. Use el teorema de inducción para demostrar que para todo número natural n, $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

De la misma manera, el problema se puede reducir a que $n^3 + 2n = 3k$ para algún k nº entero y para todo número natural n.

·) caso base, $n=0$ trivial

·) Paso de inducción, suponemos que es cierto para n nº natural, veamos que lo es para $n+1$

$n^3 + 2n = 3k$

$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = 3k + 3(n^2 + n + 1)$ que claramente es divisible por 3

Por tanto, hemos demostrado lo pedido usando el primer principio de inducción

9. Es cierto que de un número n_0 en adelante se tiene que $100^n < n!$; encuéntrelo y demuestre por inducción lo dicho a partir de ese número n_0.

Lo demostraremos por el segundo principio de inducción. Supongamos n natural mayor que n_0 y supongamos que, si $P \subseteq \omega$ es el conjunto de naturales que cumplen la desigualdad, entonces $n \subset P$, veamos si $n \in P$

$$100^{n-1} < (n-1)!$$

$$100^n = 100 \cdot 100^{n-1} < 100 \cdot (n-1)! \leq n \cdot (n-1)! \iff 100 < n$$ por tanto esto se cumple

sii $n \geq 100$, por tanto $n_0 = 100$.

Si usamos el principio del Buen Orden, vemos que el mínimo es 100.

Por tanto, por el segundo principio de inducción hemos demostrado que se cumple lo pedido para $n \geq n_0 = 100$

13. Sea n un número natural y sea S cualquier conjunto de números naturales menores que n. Demuestre que S es vacío o S tiene máximo.

No es necesario hacerlo por inducción. La demostración es por casos según n natural.

- Si $n=0 \Rightarrow S=\emptyset$ y no existe máximo
- Si $n \neq 0$, sea $S = \{k \in \omega \mid k < n\}$. Supongamos que no existe un máximo para el conjunto, gracias a las propiedades de los naturales podemos asegurar que $\nexists m \in \mathbb{N} \mid n < m < n+1$. Como no existe máximo $\Rightarrow \forall k \in S \ \exists k+1 \in \omega \mid k+1 < n$. Lo cual es una contradicción pues si tomamos $k = n-1 \Rightarrow k+1 = n < n$!!

  Y por tanto tiene máximo.

16. Demuestre que para todo número impar n, 9 divide a $4^n + 5^n$.

De la misma manera, el problema se puede reducir a que $4^n + 5^n = 9k$ para algún k nº entero y para todo n nº impar.

- Paso base $n=1$ trivial
- Paso inducción. Supongamos cierto para $(n+1)$ y lo vemos para $(n+3)$

$$4^{n+1} + 5^{n+1} = 9k$$

$$4^{n+1} = 9k - 5^{n+1}$$

$$4^{(n+3)} + 5^{(n+3)} = 4^2 (9k - 5^{n+1}) + 5^{(n+3)} =$$

$$= 9 \cdot 16k + 5^{n+1}(5^2 - 16) = 9 \cdot 16k + 5^{n+1} \cdot 9 = 9(16k + 5^{n+1})$$ y $(16k + 5^{n+1})$ es entero

21. Demuestre que para para todo número natural n se cumple:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$$

·) Caso base $n=0$ $\quad 1=1$

·) Supongamos cierto para n y lo vemos para $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2n+1) = 2(n+1)+1 + \sum_{k=0}^{n}(2n+1) = 2n+3+(n+1)^2 = 2n+3+n^2+2n+1 = n^2+4n+4 = (n+2)^2$$

Como se pedía.

25. Demuestre que para todo número natural superior a 5, $n^3 < n!$. $\quad$ 2º principio de inducción

·) Caso base $n=6$, $6^3 = 216 < 720 = 6!$

·) Supongamos que $(n-k)^3 < (n-k)!$ para todo número natural n que cumple que $5 < n-k < n$ veamos qué ocurre con el caso de n

$n^3 > (n-1)^3$ $\qquad\qquad$ $(n^2-2n+1)(n-1) = n^3-2n^2+n-n^2+2n-1 =$

$n! > (n-1)!$ $\qquad\qquad$ $= n^3-3n^2+3n-1$

$n! = n\,(n-1)! > n\cdot(n-1)^3 = n\cdot[n^3-3n^2+3n-1] = n^4-3n^3+3n^2-n$

$n^4-3n^3+3n^2-n > n^3 \iff n^4+3n^2 > 4n^3+n \iff n^3+3n > 4n^2+1 \iff n(n^2+3) > 4n^2+1$

$\Updownarrow$

$n^3-4n^2+3n+1 > 0 \iff n > 2$ que se cumple por hipótesis.

Por tanto $n! > n\,(n-1)^3 > n^3$ y lo hemos probado (esquemáticamente) usando el segundo principio de inducción

28. Demuestre que para todo número natural n, el dígito menos significativo de n^5 es igual al dígito menos significativo de n.

Denotaremos por $Res(a,b)$ al resto de dividir a entre b de manera que para todo número natural n su dígito menos significativo viene dado por $Res(n,10) < 10$ por la definición de par divisor de n por 10.

De esta manera, se nos pide demostrar que $Res(n,10) = Res(n^5,10)$ para todo número natural n

·) Caso base $n=0$, $Res(0,10)=0=Res(0^5,10)$

·) Supongamos que es cierto para $n-1$ y veamos que se cumple para n.

Sabemos que $Res(n-1,10)=Res((n-1)^n,10)$

$Res(n,10)=r \iff n=a\cdot 10+r$

$Res((n-1),10)=r' \iff (n-1)=a'\cdot 10+r' \iff n=a'\cdot 10+(r'+1)$

$Res(n^5,10)=\tilde{r} \iff n^5=\tilde{a}\cdot 10+\tilde{r} \iff n=\sqrt[5]{\tilde{a}\cdot 10+\tilde{r}}$

Ejercicio 6.

Demuestra por inducción que para $n \geq 0$ se tiene que $9^{n+1}+2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

La demostración es por el primer principio de inducción matemática según el predicado del tenor

$9^{n+1}+2^{6n+1}$ es divisible por 11

más analíticamente $9^{n+1}+2^{6n+1}=11k$ para algún k número entero

·) Caso base $n=0$ $9^{0+1}+2^{6\cdot 0+1}=9+2=11=11\cdot 1$, luego se cumple.

·) Supongamos que es cierto para n un número natural y lo vemos para $n+1$

Sabemos que $9^{n+1}+2^{6n+1}=11k$ luego $2^{6n+1}=11k-9^{n+1}$. Entonces

$9^{n+2}+2^{6(n+1)+1}=9^{n+1}\cdot 9+2^{6n+7}=9^{n+1}\cdot 9+2^{6n+1}\cdot 2^6$

$=9^{n+1}\cdot 9+(11k-9^{n+1})\,2^6=9^{n+1}\cdot 9+2^6\cdot 11k-2^6\cdot 9^{k+1}=9^{k+1}(9-2^6)+2^6\cdot 11k$

Vamos a probar que $9^{n+1}(9-2^6)$ es múltiplo de 11

·) caso base $n=0$ $9^1(9-2^6)=-495=11\cdot(-45)$

·) Lo suponemos cierto para n y lo vemos para $n+1$

$9^{n+2}(9-2^6)=9^{n+1}(9-2^6)\cdot 9=11k'\cdot 9$

Luego $9^{n+1}(9-2^6)$ es múltiplo de 11 para todo n número natural.

De la misma manera, $9^{n+1}+2^{6n+1}$ es divisible por 11

Recurrencias

1. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_n = u_{n-1} + d$$

y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = a$, donde a es una constante (*progresión artimética*). (sol. $x_n = dn + a$)

El orden n de la recurrencia es 1.

La ecuación característica es

$$x - 1 = 0$$

Sus solución es $x = 1$. Ahora sabemos que $r_1 = 1$. En cuanto a las multiplicidades $m = 1$

y como vemos $k = 1 = m$.

La solución general de la parte homogénea es:

$$x_n^{(h)} = C_0 1^n = C_0$$

función de ajuste.

$$f(n) = d = 1^n d$$

$s = 1$ es la solución de la ecuación característica con multiplicidad 1 en cada caso

Calculamos la solución particular, recordando que $x_n^{(p)} = n^m p(n) s^n$, donde $p(n) = d$ con $\deg(p(n)) = 0$.

Entonces

$$x_n^{(p)} = n d 1^n = nd$$

Por tanto.

$$x_n^{(h)} = C_0$$

$$x_n^{(p)} = nd$$

Sabemos que $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \Rightarrow x_n = C_0 + nd$

Como nos dan un valor inicial $u_0 = a$ constante $\Rightarrow a = u_0 = C_0 + 0\, d = C_0$

2. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_n = k u_{n-1}$$

y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = a$, donde a es una constante (*progresión geométrica*). (sol. $x_n = ak^n$)

El grado de la ecuación es $n = 1$.

La ecuación característica es:

$$x - k = 0$$

Su solución es $x=n$. Ahora sabemos que $r=n$ y sobre las multiplicidades $m=1$

Por tanto, la solución general es de la forma:

$$x_n = c_0 k^n$$

Como se nos da un dato inicial $u_0=a$, tenemos que

$$a = c_0$$

Por tanto, para este problema en específico, la solución es $\boxed{x_n = ak^n}$

3. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

y encuentre la solución particular que cumple: $u_0 = 1$ y $u_1 = 6$.

El grado de la recurrencia es $k=2$

La ecuación característica es

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Sus soluciones son $r_1 = 3$ con multiplicidad $m_1=2$.

Por tanto las soluciones de la recurrencia son de la forma $x_n = (c_0 + nc_1)3^n$

Para el caso particular $u_0 = 1$, $u_1=6$ tenemos que

•) $1 = c_0$

•) $6 = (c_0 + c_1)3 \iff 2 = c_0 + c_1 \iff c_1 = 2 - c_0 = 2-1 = 1$

Es decir $x_n^{(p)} = (1+n)3^n$

4. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

y encuentre la solución particular que cumple: $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ y $u_2 = 15$.

El grado de la ecuación es $k=3$.

La ecuación característica es

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Las soluciones son $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ con multiplicidades $m_1 = m_2 = m_3 = 1$

Por tanto, las soluciones son de la forma

$$x_n = c_0 + c_1 2^n + c_2 3^n$$

Para el caso particular $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ y $u_2 = 15$ tenemos que

$$2 = c_0 + c_1 + c_2$$
$$5 = c_0 + 2c_1 + 3c_2$$
$$15 = c_0 + 4c_1 + 9c_2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}.$$

Por tanto $x_n^{(p)} = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$

7. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_{n+2} = -4u_{n+1} - 3u_n + 5(-2)^n$$

El grado de la recurrencia es $n = 2$.

La ecuación característica es.

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Solución general de la parte homogénea:

Las raíces son $r_1 = -1$, $r_2 = -3$ con multiplicidad $m_1 = m_2 = 1$

$$x_n^{(h)} = c_0 (-1)^n + c_1 (-3)^n$$

Solución particular.

La función de ajuste es $f(n) = 5(-2)^n$, $s = -2$ no es solución de la ecuación característica, tenemos $p(n) = 5$ $\deg(p(n)) = 0$ y $m = 0$. Por tanto

$$x_n^{(p)} = n^0 c_2 (-2)^n$$

Calculemos $x_n^{(p)}$, o sea, el valor de c_2

$$5(-2)^n = u_{n+2} + 4u_{n+1} + 3u_n$$

$$x_n^{(p)} = c_2 (-2)^n$$

$$x_{n+1}^{(p)} = c_2 (-2)^{n+1}$$

$$x_{n+2}^{(p)} = c_2 (-2)^{n+2}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación $5(-2)^n = u_{n+2} + 4u_{n+1} + 3u_n$

$$5(-2)^n = x_{n+2}^{(p)} + 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)} = c_2(-2)^{n+2} + 4 \cdot c_2 (-2)^{n+1} + 3 \cdot c_2 (-2)^n = (-2)^n (4c_2 - 8c_2 + 3c_2) =$$
$$= (-2)^n (-c_2) \Leftrightarrow -5 = c_2$$

Por tanto, la solución general a la recurrencia es $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = c_0 (-1)^n + c_1 (-3)^n - 5(-2)^n$

9. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n + 3^n$$

(sol. $x_n = (c_1 + c_2 n + \frac{n^2}{18})3^n$)

El grado de la recurrencia es $k=2$

La ecuación característica es

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Buscamos la solución de la parte homogénea y para ello obtenemos las raíces del polinomio característico $p(x) = x^2 - 6x + 9$, $r_1 = 3$ con multiplicidad $m_1 = 2$.

Por tanto $x_n^{(h)} = (c_0 + c_1 n)3^n$

La función de ajuste es $f(n) = 3^n$ con polinomio $p(n)=1$, $\deg(p(n)) = 0$. No obstante, $s=3$ es raíz de la ecuación con multiplicidad $m=2$.

Por tanto $x_n^{(P)} = n^2 c_2 3^n$ y para calcular c_2, sabemos que $3^n = u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n$ y como $x_n^{(P)}$ es solución

$$3^n = (n+2)^2 c_2 3^{n+2} - 6(n+1)^2 c_2 3^{n+1} + 9n^2 c_2 3^n = 3^n\left((n+2)^2 c_2 \cdot 9 - 18(n+1)^2 c_2 + 9n^2 c_2\right)$$

Bastará con que $\frac{1}{9} = 4 - 2c_2$ tras un largo desarrollo. Entonces $2c_2 = 4 - \frac{1}{9} = \frac{35}{9}$; $c_2 = \frac{35}{18}$.

Entonces

$$x_n^{(P)} = \frac{35n^2}{18}3^n$$

debe salir sin 35.

Es decir, la solución general es $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(P)} = (c_0 + c_1 n + \frac{35n^2}{18})3^n$

10. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_{n+3} = -5u_{n+2} - 8u_{n+1} - 4u_n + 2(-1)^n + (-2)^{n+3}$$

(sol. $x_n = (1-2n)(-1)^n + (3 + 2n + n^2)(-2)^n$)

A partir de este ejercicio, inclusive, las soluciones serán esquemáticas

Ecuación característica:

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$$

	1	5	8	4
-2		-2	-6	-4
	1	3	2	0
-1		-1	-2	
	1	2	0	

$r_1 = -1$, $r_2 = -2$ con $m_1 = 1$, $m_2 = 2$

Sol. homogénea. $x_n^{(h)} = c_0(-1)^n + (c_1 + c_2 n)(-2)^n$

Función ajuste. $f(n) = 2(-1)^n - 8(-2)^n$

$$x_n^{(P)} = n c_3 (-1)^n - n^2 c_4 (-2)^n$$

Sabemos que $2(-1)^n - 8(-2)^n = u_{n+3} + 5u_{n+2} + 8u_{n+1} + 4u_n$

Por tanto $2(-1)^n - 8(-2)^n = x_{n+3}^{(P)} + 5x_{n+2}^{(P)} + 8x_{n+1}^{(P)} + 4x_n^{(P)}$

No obstante, ¿no faltan datos?

15. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

Ecuación característica

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$r_1 = 3$, $m_1 = 2$

Solución homogénea: $x_n^{(h)} = (c_0 + c_1 n) 3^n$

Función ajuste: $f(n) = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$

$$x_n^{(p)} = c_3 2^n + n^2 c_4 3^n$$

$$3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n = c_3 2^{n+2} + (n+2)^2 c_4 3^{n+2} - 6 c_3 2^{n+1} - 6(n+1)^2 c_4 3^{n+1} + 9 c_3 2^n + 9n^2 c_4 3^n$$

$$3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n = 2^n (4c_3 - 12 c_3 + 9c_3) + 3^n ((n+2)^2 c_4 9 - 6(n+1)^2 \cdot 3 + 9n^2 c_4)$$

Bastará con:

$$3 = 4c_3 - 12c_3 + 9c_3$$

$$7 = 9(n+2)^2 c_4 - 18(n+1)^2 c_4 + 9n^2 c_4$$

Por último deberemos obtener c_0 y c_1 usando la solución $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$ y las condiciones $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$

17. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_0 = 7,$$
$$u_1 = 19,$$
$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2, \text{ si } n \geq 2$$

(sol. $x_n = 2^{n+2} + n^2 + 7n + 3$)

Ecuación característica:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$r_1 = 1$ $m_1 = 2$

Solución homogénea:

$$x_n^{(h)} = c_0 + c_1 n$$

Función ajuste: $f(n) = 2^n + 2$

Solución particular $x_n^{(P)} = c_3 2^n + c_4 n^2$

Sabemos que $2^n + 2 = x_{n+2}^{(P)} - 2x_{n+1}^{(P)} - x_n^{(P)}$. Desarrollando obtenemos c_3 y c_4

Por último deberemos obtener c_0 y c_1 usando la solución $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(P)}$ y las condiciones $u_0 = 7$ y $u_1 = 19$

18. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_1 = 7,$$
$$u_2 = 19,$$
$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2, \text{ si } n \geq 3$$

(sol. $x_n = 2^{n+2} + n^2 + n - 3$)

El grado de la recurrencia es $k=2$

La ecuación característica es

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Sus soluciones son $r_1 = 1$ con multiplicidad $m_1 = 2$

Por tanto $x_n^{(h)} = (c_0 + c_1 n) 1^n = c_0 + c_1 n$

La función de ajuste es

$$f(n) = 2^n + 2$$

Como la multiplicidad de 2 es cero tenemos que una solución particular es

$$x_n^{(P)} = c_2 2^n + n^2 c_3$$

Calculamos c_2 y c_3

$$2^n + 2 = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \quad \text{para todo } n \text{ natural}$$

Como $x_n^{(P)}$ es solución

$$2^n + 2 = x_{n+2}^{(P)} - 2x_{n+1}^{(P)} + x_n^{(P)}$$

$$x_{n+2}^{(P)} = c_2 2^{n+2} + (n+2)^2 c_3 = 2^n \cdot 4c_2 + (n^2 + 4n + 4) c_3$$

$$x_{n+1}^{(P)} = c_2 2^{n+1} + (n+1)^2 c_3 = 2^n \cdot 2c_2 + (n^2 + 2n + 1) c_3$$

$$x_n^{(P)} = c_2 2^n + n^2 c_3$$

Por tanto

$$2^n + 2 = 2^n (4c_2 + 2c_2 + c_2) + c_3 (3n^2 + 6n + 5)$$

Bastará con que

$$2^n = 2^n (7c_2) \iff \frac{1}{7} = c_2$$

y

$$2 = c_3 (3n^2 + 6n + 5)$$

Suponiendo $n=0$ obtenemos $c_3 = \frac{2}{5}$ ¿? No coincide con la solución

19. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_1 = 4,$$
$$u_2 = 3,$$
$$u_n = 3u_{n-1} + 10u_{n-2} + 7 \cdot 5^n, \text{ si } n \geq 2$$

(sol. $x_n = n5^{n+1} + 6(-2)^n - 2 \cdot 5^n$)

Ec. característica

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$r_1 = 5$, $r_2 = -2$

Sol. homogénea $x_n^{(h)} = c_0 5^n + c_1 (-2)^n$

Función ajuste:

$$f(n) = 7 \cdot 5^n$$

Sol. particular: $x_n^{(p)} = n\, c_2 5^n$

$$7 \cdot 5^n = u_n - 3u_{n-1} - 10u_{n-2}$$

Por tanto

$$7 \cdot 25 \cdot 5^{n-2} = 7 \cdot 5^n = n c_2 5^n - 3 \cdot (n-1) c_2 5^{n-1} - 10 \cdot (n-2) c_2 \cdot 5^{n-2} = 5^{n-2} \left(25n - (3n+3)5 - 10n + 20 \right) c_2$$

$$7 \cdot 25 = (25n - 15n + 15 - 10n + 20) c_2 = 5 c_2$$

$$c_2 = 35$$

No concuerda por fallos de cálculo.

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

Para calcular las constantes usar las condiciones iniciales

20. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+3} = 3u_{n-2} + 3u_{n+1} - u_n, \qquad n \geq 0$$

Ecuación general

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$r_1 = 2+\sqrt{3} \quad , r_2 = 2-\sqrt{3} \quad , r_3 = -1$$

Sol homogénea

$$x_n^{(h)} = c_0 (2+\sqrt{3})^n + c_1 (2-\sqrt{3})^n + c_2 (-1)^n$$

Sol. general: $x_n = x_n^{(h)}$

21. Resuelva el problema de recurrencia:

$u_0 = 8,$
$u_1 = 6,$
$u_2 = 26,$
$u_n = -u_{n-1} + 4(u_{n-2} + u_{n-3})$, si $n \geq 3$

(sol. $x_n = 2(-1)^n + (-2)^n + 5 \cdot 2^n$)

Ec característica:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$r_1 = 2, r_2 = -1, r_3 = -2$$

Sol homogénea y general

$$x_n = c_0 2^n + c_1 (-1)^n + c_2 (-2)^n$$

$$\left.\begin{aligned} 8 = u_0 &= c_0 + c_1 + c_2 \\ 6 = u_1 &= 2c_0 - c_1 - 2c_2 \\ 26 = u_2 &= 4c_0 + c_1 + 4c_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_0 &= 5 \\ c_1 &= 2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto $x_n = 5 \cdot 2^n + 2(-1)^n + (-2)^n$

22. Resuelva la recurrencia:

$$u_n = 4u_{n-1} + 4u_{n-2} + (n+1)2^n$$

Ec característica.

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$r_1 = 2+\sqrt{2} \quad , r_2 = 2-\sqrt{2}$$

Sol homogénea.

$$x_n^{(h)} = c_0 (2+\sqrt{2})^n + c_1 (2-\sqrt{2})^n$$

Función ajuste. $(n+1)2^n = f(n)$, $p(n) = (n+1)$ $\deg(p(n)) = 1$

$$x_n^{(p)} = (c_2 + c_3 n) 2^n$$

Sabemos que $(n+1)2^n = u_n - 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$. Como $x_n^{(p)}$ es solución de la ecuación para todo n número natural

$$(n+1)2^n = x_n^{(p)} - 4x_{n-1}^{(p)} - 4x_{n-2}^{(p)}$$

$$x_{n-1}^{(p)} = [c_2 + c_3(n-1)]2^{n-1} = [c_2 + c_3n - c_3]2^{n-1} = [c_2 - c_3 + c_3n]2^{n-1}$$

$$x_{n-2}^{(p)} = [c_2 + c_3(n-2)]2^{n-2} = [c_2 + c_3n - 2c_3]2^{n-2} = [c_2 - 2c_3 + c_3n]2^{n-2}$$

$$(n+1)2^n = (c_2+c_3n)2^n - 4\cdot 2^{n-1}(c_2-c_3+c_3n) - 4\cdot 2^{n-2}(c_2-2c_3+c_3n)$$

$$= 2^n[c_2+c_3n-2(c_2-c_3+c_3n) - c_2+2c_3-c_3n]$$

$$= 2^n[\cancel{c_2}+\cancel{c_3n}-2c_3n-2c_2+2c_3-\cancel{c_2}+2c_3-\cancel{c_3n}]$$

$$= 2^n(-2c_3n-2c_2+4c_3)$$

Por tanto es necesario que

$$-2c_3 = 1 \quad , \quad c_3 = \frac{-1}{2}$$

$$1 = -2c_2+4c_3 = 2(-c_2+2c_3) = 2(-c_2-1) = -2c_2-2$$

$$3 = -2c_2 \quad , \quad c_2 = \frac{-3}{2}$$

Es decir $x_n^{(p)} = (-1)\left(\frac{1+3n}{2}\right)2^n$

Por tanto $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = c_0(2+\sqrt{2})^n + c_1(2-\sqrt{2})^n + (-1)\left(\frac{1+3n}{2}\right)2^n$

5. Encuentre la representación polar de los siguientes números complejos:

$r_z = |z|$

$$\theta_z = \begin{cases} 2\arctan\frac{Im(z)/|z|}{1+(Re(z)/|z|)} & \text{, si } z \notin \mathbb{R}^- \\ \pi & \text{, si } z \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

a) $z_1 = -1-i$ (sol. $r_1 = \sqrt{2}$ y $\theta_1 = -3\pi/4$)

$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{(-1)/\sqrt{2}}{1+(-1/\sqrt{2})}\right) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$$

b) $z_2 = 2+2i$ (sol. $r_2 = 2\sqrt{2}$ y $\theta_2 = \pi/4$)

$|z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

c) $z_3 = -1+i\sqrt{3}$ (sol. $r_3 = \sqrt{2}$ y $\theta_3 = 2\pi/3$)

$|z_3| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

d) $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$ (sol. $r_4 = \sqrt{2}$ y $\theta_4 = -\pi/3$)

$$|z_4| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right) = \frac{-\pi}{3}$$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

e) $z_5 = 2i\sqrt{3}$ (sol. $r_5 = 2$ y $\theta_5 = \pi/2$)

$$|z_5| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta = 2\arctan\left(1\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

1. Considere el problema de recurrencia:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 0$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}, \quad (n \geq 2)$$

Ec. característica:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Solución homogénea.

$$x_n^{(h)} = c_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Función ajuste: $f(n) = 2^{n-2}$, $p(n) = 1$ $\deg(p(n)) = 0$ $mult(2) = 0$

$$x_n^{(p)} = c_2 2^n$$

Sabemos que $2^{n-2} = u_n - u_{n-1} - u_{n-2}$ y que $x_n^{(p)}$ es solución particular luego

$$2^{n-2} = x_n^{(p)} - x_{n-1}^{(p)} - x_{n-2}^{(p)}$$

$$x_{n-1}^{(p)} = c_2 2^{n-1} = 2^{n-2}(2c_2)$$

$$x_{n-2}^{(p)} = 2^{n-2}c_2$$

$$2^{n-2} = 2^{n-2}(4c_2) + 2^{n-2}(2c_2) + c_0 = 2^{n-2}(7c_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{7}$$

$$x_n = c_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{2^n}{7}$$

$$0 = u_0 = c_0 + c_1 \; ; \; c_1 = -c_0$$

$$0 = u_1 = c_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{2}{7}$$

$$0 = c_0\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{2}{7} = c_0\sqrt{5} + \frac{2}{7}$$

$c_0 = \frac{-2\sqrt{5}}{35}$ $\quad c_1 = \frac{2\sqrt{5}}{35}$

Sean x_n e y_n las sucesiones dadas por:

$x_0 = 0$	$y_0 = 0$
$x_1 = 2$	
$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n;\ n \geq 2.$	$y_n = y_{n-1} + n \cdot 2^n;\ n \geq 1$

Comenzamos por la $\{x_n\}$

Ec característica:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$r_1 = 2$ $\quad r_2 = 1$

$x_n^{(h)} = c_0 2^n + c_1$

Función ajuste: $f(n) = 2^n$ $\quad m(2) = 1$

$x_n^{(p)} = c_2 n 2^n$

Buscamos c_2, pues $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, es decir,

$2^n = x_n^{(p)} - 3x_{n-1}^{(p)} + 2x_{n-2}^{(p)}$

$x_{n-1}^{(p)} = c_2(n-1)2^{n-1} = (c_2 n - c_2)2^{n-1} = (c_2 n - c_2)2\, 2^{n-2}$

$x_{n-2}^{(p)} = c_2(n-2)2^{n-2} = (c_2 n - 2c_2)2^{n-2}$

$2^n = c_2 n 2^n - 3\cdot(c_2 n - c_2)2^{n-1} + (c_2 n - 2c_2)2^{n-1}$

$= (c_2 n 2)2^{n-1} - 3(c_2 n - c_2)2^{n-1} + (c_2 n - 2c_2)2^{n-1}$

$= 2^{n-1}(\cancel{2c_2 n} - \cancel{3c_2 n} + 3c_2 + \cancel{c_2 n} - 2c_2) = 2^{n-1}(c_2)$

$2 = c_2$

Entonces $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = c_0 2^n + c_1 + n2^{n+1}$

$0 = x_0 = c_0 + c_1$ $\quad 2 = x_1 = 2c_0 + c_1 + 4$

$c_0 = -c_1$ $\quad -2 = 2c_0 + c_1 = -2c_1 + c_1 = -c_1$

Luego $x_n = -2 \cdot 2^n + 2 + n2^{n+1}$

Procedemos con y_n:

Ec. característica

$y - 1 = 0$, $r = 1$ $m = 1$

$y_n^{(h)} = c_0$

Función ajuste $f(n) = n2^n$, $p(n) = n$ $\quad \deg(p(n)) = 1$ $\quad mult(2) = 0$

$y_n^{(p)} = (c_1 n + c_2)2^n$

Buscamos c_1, pues $y_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, es decir,

$$n2^n = y_n^{(p)} - y_{n-1}^{(p)}$$

$$y_{n-1}^{(p)} = (c_1 n - c_1 + c_2)2^{n-1}$$

Luego

$$n2^n = (2c_1 n + 2c_2)2^{n-1} - 2^{n-1}(c_1 n - c_1 + c_2) = 2^{n-1}\left(2c_1 n + 2c_2 - c_1 n + c_1 - c_2\right) = 2^{n-1}(c_1 n + c_1 + c_2)$$

$$n = c_1 n \quad , \quad 1 = c_1$$

$$0 = c_1 + c_2 \quad , \quad c_2 = 0$$

Entonces

$$y_n^{(p)} = n2^n$$

En consecuencia

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = c_0 + n2^n$$

y con las condiciones dadas

$$0 = y_0 = c_0$$

En conclusión

$$y_n = n2^n$$

5. Sea la sucesión de números enteros definida para $n \geq 0$ mediante la recurrencia

$$\begin{cases} x_0 = 4, \ x_1 = 14, \\ x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 2^n \quad \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

a) Basándose en la recurrencia anterior, demuestra por inducción que para cualquier $n \geq 0$, x_n es un número par.

Ec. característica:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$r_1 = 3 \qquad m_1 = 2$$

$$x_n^{(h)} = (c_0 + c_1 n)3^n$$

Función de ajuste: 2^n

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = (c_0 + c_1 n)3^n + 2^n$$

$$4 = x_0 = c_0 + 1 \quad , \quad c_0 = 3$$

$$14 = x_1 = (3 + c_1)3 + 2$$

$$4 = 3 + c_1 \quad , \quad c_1 = 1$$

$$x_n = (3+n)3^n + 2^n$$

Demostramos por inducción lo pedido:

·) caso base $n=0$ $\quad (3+0)+1 = 4 = 2 \cdot 2$

·) Suponemos cierto para n y demostramos para $n+1$

$(3+n)3^n + 2^n = 2n$ luego $2^n = 2n - (3+n)3^n$

Entonces

$(4+n)3^{n+1} + 2^n \cdot 2 = (4+n)3^{n+1} + 2n - (3+n)3^n = 3^n\left(3(4+n) - (3+n)\right) + 2n$

$= 3^n\left(12 + 3n - 3 + n\right) + 2n = 3^{n+1}\left(3 + n\right) + 2n$

Probamos por inducción que $3^n(9+4n)$ es divisible por 2 ¿?