2. Para $r \in]1,+\infty[$ se define $I(r) = \displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{z\,dz}{z^3+1}$ y $J(r) = \displaystyle\int_{\sigma_r} \frac{z^2 e^z}{z+1}\,dz$ donde $\gamma_r = C(0,r)$ y $\sigma_r = [-r, -r+i]$. Probar que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} I(r) = \lim_{r\to+\infty} J(r) = 0$.

$r>1 \quad \left| \int_{C(0,r)} \frac{z}{z^3+1}\,dz \right| \leq \ell(C(0,r)) \sup\left\{ \left|\frac{z}{z^3+1}\right| ; z\in C(0,r)^* \right\} \leq \frac{2\pi r \cdot r}{r^3-1} \xrightarrow{r\to\infty} 0$

Nota: Las ideas del ejercicio son, acotar la integral usando la propiedad de continuidad

$|z| = r$ si $z \in C(0,r)^*$

$|z^3+1| \geq |z^3| - 1 = r^3+1$

desigualdad triangular

$\Rightarrow \dfrac{|z|}{|z^3+1|} \leq \dfrac{r}{r^3-1} \quad \forall z \in C(0,r)^*$

$\sigma_r = [-r, -r+i]$

$\left| \int_{\sigma_r} \frac{z^2 e^z}{z+1}\,dz \right| \leq \underbrace{\ell(\sigma_r)}_{=1} \cdot \sup\left\{ \left|\frac{z^2 e^z}{z+1}\right| : z\in\sigma_r^* \right\} \leq \frac{(r+1)^2 e^{-r}}{r-1} \longrightarrow 0$

desigualdad triangular

Si $z \in \sigma_r^*$ $\quad |z+1| \geq |z| - 1 \geq r-1$

$|z^2| = |z|^2 \leq (r+1)^2$

parametrización del segmento

$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, pero $z \in \sigma_r^* \Rightarrow z = -r+ti$ con $t\in[0,1]$

3. Probar que $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z}\,dz = 0$ y deducir que $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(1+r^2+2r\cos t)\,dt = 0$, para todo $r \in]0,1[$.

↳ Consecuencia inmediata de la fórmula de Cauchy para la circunferencia

Para probar que existe una primitiva, pues sabemos de $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$ es continua en $C(0,r)$ $\forall r \in]0,1[$; luego por el Teorema de Caracterización de existencia de primitiva obtendremos que $\int_{C(0,r)} f(z)\,dz = 0 \quad \forall r \in]0,1[$.

Usando la serie de Mercator sabemos que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{n-1}$ la cual es una serie de potencias centrada en 0 con radio de convergencia 1 luego converge uniformemente en todo compacto de la circunferencia $C(0,1)$, y en particular, en $\overline{D}(0,r)$ $\forall r \in [0,1]$.

Primitivizando término a término, defino $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot z^n$ que es holomorfa en $\overline{D}(0,r)$ y que cumple que $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in C(0,r)$. Luego, tenemos lo que buscamos

Para deducir que $\int_0^{\pi} \log(1+r^2+2r\cos t)\,dt = 0$ usaremos la parametrización de la circunferencia de centro 0 y radio r

$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(1+re^{it})}{re^{it}} \cdot ire^{it}\,dt = i\int_{-\pi}^{\pi} \log(1+re^{it})\,dt = i\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}| + i\arg(1+re^{it})\,dt$

Tenemos por tanto que $\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|\,dt = 0$

usando que $\ln(1+r^2+2r\cos t)$ es par

$$0=\int_{-\pi}^{\pi}\ln|1+re^{it}|\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\sqrt{1+r^2+2r\cos t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\ln 1+r^2+2r\cos t=\int_{0}^{\pi}\ln(1+r^2+2r\cos t)\,dt.$$

4. Sea $f\in\mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que $|f(z)-1|<1$ para todo $z\in D(0,1)$. Admitiendo que f' es continua, probar que $\int_{C(0,r)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=0$ para todo $r\in]0,1[$.

Sabemos que $|f(z)-1|<1\ \forall z\in D(0,1)\Rightarrow f(z)\in D(1,1)$. Consideramos ahora $g(z)=\log(f(z))\ \forall z\in D(0,1)$.
Como $D(1,1)\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ vemos que g es continua; de hecho, es holomorfa por ser composición de funciones holomorfas.
Bastará probar que $g'(z)=f(z)\ \forall z\in D(0,1)$; pero $g'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$ por la regla de la cadena. Entonces, como $C(0,r)$ es un camino cerrado $\forall r\in]0,1[$ sabemos por el Tª de caracterización de existencia de primitiva que $\int_{C(0,r)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=0$.

5. Sean $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ y $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ dada por $f(z)=1/(1+z^2)$ para todo $z\in\Omega$. Probar que f no admite una primitiva en Ω.

Usaremos la circunferencia de centro i y radio 1.

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}\Rightarrow 1=A(z+i)+B(z-i)\iff A=\frac{-1}{2i}\quad B=\frac{1}{2i}$$

Entonces

$$\int_{C(i,1)}\frac{1}{1+z^2}\,dz=\frac{1}{2i}\left(\int_{C(i,1)}\frac{1}{z+i}\,dz-\int_{C(i,1)}\frac{1}{z-i}\right)=\frac{2\pi i}{2i}=\pi\neq 0$$

$$\int_{C(i,1)}\frac{1}{z+i}\,dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2i+e^{it}}ie^{it}\,dt=\left[\log(e^{it}+2i)\right]_{-\pi}^{\pi}=\left[\ln|e^{it}+2i|+i\arg(e^{it}+2i)\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

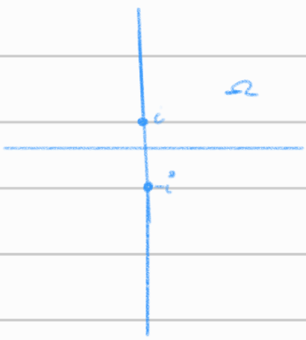
$$\int_{C(i,1)}\frac{1}{z-i}\,dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{e^{it}}ie^{it}\,dt=i\cdot[\pi-(-\pi)]=2\pi i$$

6. Probar que $\int_\sigma\frac{dz}{1+z^2}=0$, donde $\sigma(t)=\cos t+(i/2)\operatorname{sen}t$ para todo $t\in[0,2\pi]$.

Sabemos que la arcotangente es holomorfa en $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{iy, y\in\mathbb{R}\mid |y|\geq 1\}$ con $\operatorname{arctg}'(z)=\frac{1}{1+z^2}\ \forall z\in\Omega$.
Luego bastará probar que $\sigma^*\subset\Omega$, pues en ese caso tendremos lo que queremos por el teorema de caracterización de existencia de primitiva.

$\sigma(t)=\cos t+(i/2)\operatorname{sen}t$

$|\operatorname{Im}(\sigma(t))|=|\frac{1}{2}\operatorname{sen}t|\leq\frac{1}{2}\ \forall t\in[0,2\pi]\Rightarrow\sigma^*\subset\Omega$



y en ese caso, como $\sigma(0)=\sigma(2\pi)$ tenemos que

$$\int_\sigma\frac{1}{1+z^2}\,dz=0$$