1. Introducción

Estudiaremos objetos con la siguiente forma:

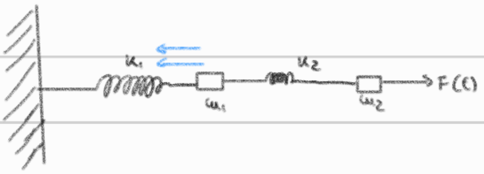
$$x' = A(t)\,x + b(t)$$

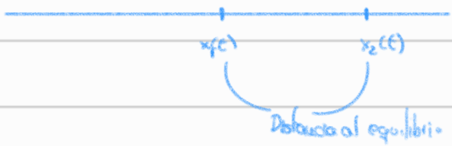
donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$, $A: I \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $b: I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continuas; tenemos un sistema de d ecuaciones y d incógnitas.

Equivalentemente

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1d}(t)x_d + b_1(t) \\ \vdots \\ x_d' = a_{d1}(t)x_1 + a_{d2}(t)x_2 + \dots + a_{dd}(t)x_d + b_d(t) \end{cases}$$

Ejemplo





$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) + F(t) \end{cases}$$

Vemos que el sistema no es de nuestro tipo pues el sistema es de orden 2.
No obstante, siempre podremos pasarlo a un sistema de primer orden de la siguiente forma

$$y_1 = x_1,\; y_2 = x_1',\; y_3 = x_2,\; y_4 = x_2'$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \dfrac{-k_1}{m_1} y_1 + \dfrac{k_2}{m_1}(y_3 - y_1) \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \dfrac{-k_2}{m_2}(y_3 - y_1) + \dfrac{F(t)}{m_2} \end{cases}$$

Donde hemos intercambiado orden por dimensión, formalmente hemos pasado del espacio de configuraciones al espacio de estados. Esto se puede hacer con todos los órdenes.

De forma general:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = b(t) \longrightarrow \begin{matrix} y_1 = x \\ y_2 = x' \\ \vdots \\ y_n = x^{(n-1)} \end{matrix},\quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = x^{(n)} = -a_0(t)y_1 - a_1(t)y_2 - \dots - a_{n-1}(t)y_n + b(t) \end{cases}$$

2 Teorema de existencia y unicidad

Enunciado

Dados $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ existe una única solución del sistema

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

tal que $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$, es decir, es global.

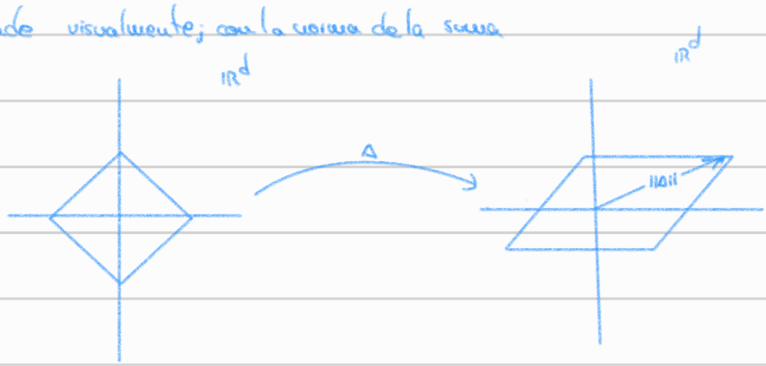
Para poder demostrarlo preparamos las herramientas

Normas matriciales

Sea $\mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|$ cualquiera pues son equivalentes entre sí. Entonces existe la norma inducida por $\|\cdot\|$ para matrices:

$$A \in \mathbb{R}^{d\times d}, \quad \|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$$

Donde visualmente; con la norma de la suma



Consiste en tomar la bola unidad y aplicar A para luego tomar el vector más largo desde el origen

Siempre $\exists \max\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$ pues A es lineal y $\|x\| \leq 1$ es un compacto

Algunas propiedades generales son:

- $\|I\| = 1$
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$
- $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ con $\|A\|$ la norma inducida

Integrales vectoriales

Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua, $f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$ donde f_i es continua para todo $i\in\{1,\dots,d\}$. Entonces.

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t)\,dt \end{pmatrix}}$$

Algunas propiedades son:

- Sea $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$, $A\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)=\int_a^b Af(t)\,dt \quad \forall t\in I$
- $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,dt$, es válido para cualquier norma.

Convergencia uniforme

Sea $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ definimos la norma del infinito como

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in I} \|\varphi(t)\|$$

Realmente no es una norma si no se restringe a un intervalo acotado.

Ejemplo

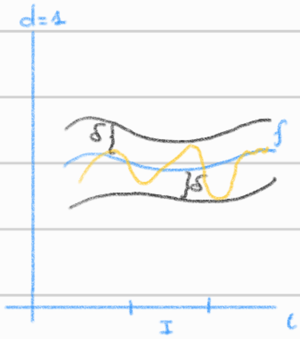
$\varphi(t)=\begin{pmatrix} \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$, $I=]0,1[$ con $\|x\|=\max\{|x_1|,|x_2|\}$

$\|\varphi\|_\infty = e$

$\varphi(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ t \end{pmatrix}$, $I=]0,1[\Rightarrow \|\varphi\|_\infty=\infty$

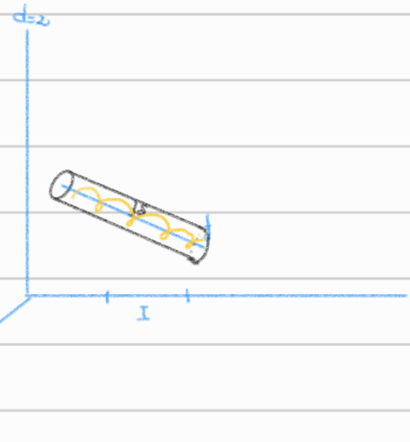
Sea $f_n, f: I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ funciones, diremos que $f_n \longrightarrow f$ converge uniformemente en I si $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$

Donde visualmente:



$\|f-\varphi\|_\infty < \delta$

φ



Como propiedades más importantes:

- Si $\{f_n\}$ converge unif. a f y f_n continua $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ es continua
- Sea $[a,b] \subset I$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continuas, $\{f_n\} \longrightarrow f$ entonces:

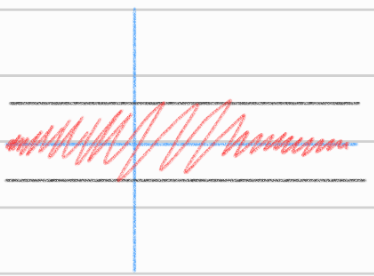
$$\boxed{\left\{\int_a^b f_n\right\} \longrightarrow \int_a^b f}$$

Cabe recalcar que lo anterior no se cumple con las derivadas;

$$f_n = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}, \quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n \longrightarrow f = 0$$

$$\|f_n - f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left|\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Gráficamente.



Pero $f_n' = \cos(nt)$ y $f_n'(\pi) = (-1)^n$

luego no converge puntualmente a $f' = 0$

Test de Weierstrass

→ No puede depender de t.

Sea $\{f_n\}$ tal que $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ y $\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq M_n$ $\forall t \in I$, $\forall n \geq 0$.

Si $\sum M_n < \infty$ entonces f_n converge uniformemente en I

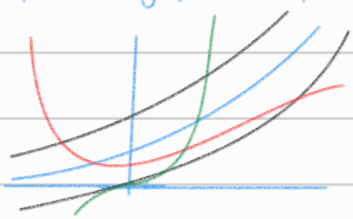
Ejemplo

Desarrollo en serie de potencias de la función exponencial

$$\boxed{e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}}$$ IMPORTANTE

¿La serie $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ converge uniformemente a e^t?

No puede serlo, pensemos gráficamente por qué



S_n polinomio grado par

S_n polinomio grado impar

Demostración

Vamos a realizar la demostración en dos partes

Supongamos que I es un intervalo acotado de longitud ℓ, $\|A(t)\| \leq \alpha$, $\|b(t)\| \leq \beta$ $\forall t \in I$. (H_0)

- Existencia (H_0)

- Comienzo de idea incorrección -

Sea $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una solución de $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ donde integrando.

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\,ds$$

donde llegamos por ser x' continua y con la regla de Barrow:

solución particular   solución general

$$x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\,ds \Leftrightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\,ds}$$

Buscamos soluciones aproximadas de esto:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0(t) = x_0, \; t \in I \\ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_n(s) + b(s)]\,ds \end{array}}$$

Iterados de Picard

donde hemos construido los "iterantes de Picard".

Por tanto, la idea de la demostración será construir las iterantes de Picard de manera que cada iterante será de clase 1.

Los pasos son:

1. $\{x_n\} \longrightarrow$ (algo) que es continuo
2. $n \longrightarrow \infty$
3. Probar que la solución de la ecuación integral cumple la condición inicial

- fin de la idea -

Usando los iterantes de Picard

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0(t) = x_0 \\ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,x_n(s) + b(s)]\,ds \end{array}}$$

tales que $x_n: I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ está bien definida y continua para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a probar que $\{x_n\}$ converge uniformemente en el intervalo I. Usamos para ello el Test de Weierstrass buscando una $\{M_n\}$ tal que

(i) $\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq M_n$ $\forall t \in I$

(ii) $\sum M_n < \infty$

Para (i):

Importante (regula que los extremos estén bien)

Porque estamos tomando la norma asociada

$$- \|x_1(t)-x_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)x_0 + b(s)]ds \right\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)x_0 + b(s)\| ds \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} [\|A(s)\|\|x_0\| + \|b(s)\|] ds \right| \le$$

$$\underset{He}{\le} \left| \int_{t_0}^{t} [\alpha\|x_0\| + \beta] ds \right| \le (\alpha\|x_0\|+\beta)\underbrace{|I|}_{\text{long } I} = M_0$$

- Aplicando lo que sabemos del anterior:

Acotar esto igual que antes no nos daría la solución pero no convergentes

$$* \|x_2(t)-x_1(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(x_1(s)-x_0(s))ds \right\| \le \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x_1(s)-x_0(s)\|ds \right| \le \alpha M_0 \left| \int_{t_0}^{t} ds \right|$$

$$\le \alpha M_0 |t-t_0|$$

todo lo importante es mantener esta dependencia del t

$$* \|x_3(t)-x_2(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(x_2(s)-x_1(s))ds \right\| \le \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x_2(s)-x_1(s)\|ds \right| \le \alpha^2 M_0 \left| \int_{t_0}^{t} |s-t_0| ds \right|$$

$$= \alpha^2 M_0 \frac{|t-t_0|^2}{2}$$

Es la clave

$$* \|x_{n+1}(t)-x_n(t)\| \le \frac{\alpha^n M_0 |t-t_0|^n}{n!}, \quad t \in I$$

Como $M_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $M_n = \frac{M_0 \alpha^n |I|^n}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donde $|I|$ es la longitud del intervalo I

Para (ii): sabemos que $\sum M_n = M_0 e^{\alpha|I|} < \infty$ luego converge y hemos usado el desarrollo de la exponecial por potencias.

Por tanto, sabemos que $\{x_n\}$ converge uniformemente en I, luego sea $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Por serlo los iterantes

Veamos ahora que x es solución; disponemos de $[t_0,t]$ si $t_0 > t$ o $[t,t_0]$ si $t > t_0$ dado $\{x_n\} \xrightarrow{\text{unif}} x$ luego $A(\cdot)x_n \xrightarrow{\text{unif}} A(\cdot)x$ pues $\|A(t)x_n(t) - A(t)x(t)\| \le \alpha \|x_n(t)-x(t)\|$, de la misma manera

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} A(s)\,x_n(s)\,ds \xrightarrow{\text{unif}} \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds}$$

y haciendo $n \to \infty$ gracias a la definición de los iterantes de Picard obtenemos que $x \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$ y es:

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds}$$

Por tanto, aplicando TFC obtenemos que

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$$

luego x es solución de la ecuación diferencial, y como $x(t_0)=x_0$ tenemos que es solución del problema de valores iniciales

- Unicidad (He)

Lema

Sea $f: J \longrightarrow [0,\infty[$ continua, J intervalo, $\alpha>0$; si $t_0\in J$ y se cumple

$$\boxed{f(t) \le \alpha \left| \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \right| \quad \forall t\in J}$$

entonces $f(t)=0$ $\forall t\in J$

- Demostración -

Sabemos que $f(t)\le \alpha \left|\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right|$:

→ Si J es compacto entonces $\exists \max_{t\in J} f(t) = m$, entonces $f(t)\le \alpha m |t-t_0|$

Aplicando esto a la desigualdad

$$\boxed{f(t) \le \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \alpha m |s-t_0|\,ds \right|}$$

Entonces

Por inducción

$$\boxed{f(t) \le m\,\alpha^2 \frac{|t-t_0|^2}{2}}$$

Iterando obtenemos que $f(t) \le m\alpha^n \frac{|t-t_0|^n}{n!}$ $\forall t\in J$, luego por el Lema del Sandwich sabiendo que $\left\{\frac{|t-t_0|^n}{n!}\right\}$ tiende a 0 obtenemos

$$0\le f(t)\le 0 \quad \forall t\in J$$

es decir, $f(t)=0$ $\forall t\in J$

→ Si J es un intervalo cualquiera la idea sería

Sea $\{J_n\}$ una sucesión creciente de intervalos compactos, es decir,

$$J_n \subset J_{n+1}$$

y $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = J$. Entonces por el paso anterior

$$f(t)=0 \quad \forall t\in J_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

□

Siguiendo con la demostración del teorema, supongamos que $x(t)$ e $y(t)$ son soluciones del problema de valores iniciales definidas en J. Veamos que $x=y$.

Como son solución:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds$$
$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)y(s) + b(s)]ds$$

Entonces $x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)(x(s) - y(s))ds \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| \overset{He}{\leq} \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\| ds \right| \quad \forall t \in I$

Aplicando el lema anterior sobre $f(t) = \|x(t) - y(t)\|$ obtenemos que $f(t) = 0 \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| = 0 \ \forall t \in I$

Hemos demostrado la unicidad usando (He). Debemos deshacernos de He

Caso General

Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos abiertos y acotados tales que $t_0 \in I_0$, $I_n \subset I_{n+1}$, $I_n \subset I$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$. ← Es decir, I es un recubrimiento de I_n

Definimos ahora $\alpha_n = \max_{t \in I_n} \|A(t)\|$ y $\beta_n = \max_{t \in I_n} \|b(t)\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, luego para cada I_n se cumple He entonces se cumple el teorema en cada I_n:

- Unicidad: Si $x(t), y(t)$ son soluciones del PVI en $I \Rightarrow (x|_{I_n})(t), (y|_{I_n})(t)$ son soluciones en I_n para cada $n \overset{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I}{\Rightarrow} x(t) = y(t) \quad \forall t \in I_n$

- Existencia: Sea $x_n(t)$ la solución del PVI en I_n para cada n. Además, defino

$$x(t) = x_n(t) \text{ si } t \in I_n$$

que está bien definida gracias a la unicidad, es derivable por coincidir en cada compacto y es solución del PVI. □

-Fin de la demostración del teorema-

3 Sistemas lineales homogeneos

Su cleta forma $x' = A(t)x$, $A: I \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ continua. Sea $V = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ espacio vectorial

Ejemplo

Si $d=2$, $f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ t^3 \end{pmatrix}$

Definimos $L: V \longrightarrow W = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ operador tal que $L(x) = x' - A(\cdot)x$ que es lineal
dependencia de t

Por tanto, $Z = \operatorname{Ker}(L) = \{$todas las soluciones de la ecuación lineal homogénea$\}$

- $\dim(Z)=d$: Sea $t_0 \in I$, defino $\phi_{t_0}: Z \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $x \longmapsto x(t_0)$ lineal y es un isomorfismo.

monomorfismo → unicidad

epimorfismo → existencia

- Si $\phi_1, \dots, \phi_d$ es base de Z entonces $x(t) = c_1\phi_1(t) + \dots + c_d\phi_d(t)$, $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$

Proposición

Dados $\phi_1, \dots, \phi_d \in Z$, son equivalentes:

i) $\phi_1, \dots, \phi_d$ es base de Z — Wronskiano — Los vectores deben ponerse como columnas

ii) $\det(\phi_1(t) | \dots | \phi_d(t)) \neq 0 \quad \forall t \in Z$

iii) $\exists t_0 \in I \quad \det(\phi_1(t_0) | \dots | \phi_d(t_0))$ — La demostración es análoga

Ejemplos

Si el sistema es triangular podemos obtener una solución y como ejemplo:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \frac{1}{t} x_2 \end{cases} \qquad I =]0,\infty[\text{ ó }]-\infty,0[\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$d = 2 \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

(i) $x_2' = \frac{x_2}{t}$, $x_2(t) = c_2 t$, $c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $x_1' = x_1 + c_2 t$ → ec. lineal completa $\xrightarrow{\text{cojo}}$ $x_1(t) = \alpha t + \beta$

Aplicamos la estructura afín

$\alpha = \alpha t + \beta + c_2 t$

$\alpha = \beta$, $\alpha + c_2 = 0 \Rightarrow x_1(t) = -c_2 t - c_2 = -c_2(t+1)$

Por tanto, las soluciones de (ii) son

$$x_1(t) = -c_2(t+1) + \underbrace{c_1 e^t}_{\text{sol de la homogénea}}$$

Entonces una base de Z (tomamos c_1 y c_2 linealmente indep) puede ser: $\left\{ \overset{c_2=0,\ c_1=1}{\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{c_2=1,\ c_1=0}{\begin{pmatrix} -(t+1) \\ t \end{pmatrix}} \right\}$

que es base gracias a que $\begin{vmatrix} e^t & -(t+1) \\ 0 & t \end{vmatrix} = te^t \neq 0 \quad \forall t \in I$ por el intervalo elegido.

2. Un sistema se puede resolver cuando la matriz A es constante.

$$x' = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad I = \mathbb{R}$$

Sea $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R} \Rightarrow Av = \lambda v$, $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Entonces $x(t) = e^{\lambda t} v$ es solución del sistema

d?

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} v, \quad \text{pero } Ax(t) = e^{\lambda t} Av = \lambda e^{\lambda t} v$$

Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma(A) = \{4, -2\} \Rightarrow x_1(t) = 4e^{4t} v_1$, $x_2(t) = -2e^{-2t} v_2$

$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ los elegimos nosotros

3. La variable compleja ayuda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ ⤳ sólo si A es real

Imaginamos que $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ con $\lambda \in \sigma(A) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ entonces $w \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ tal que

$Aw = \lambda w$ ⟹ lo solucionamos en los complejos

$$x : I \longrightarrow \mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}, \quad x = (\underset{\text{parte imag.}}{\overset{\text{parte real}}{u, v}})$$

$$\boxed{x = u + iv}$$

Lo importante es que si x es solución compleja entonces u y v son soluciones reales.

$$x' = \boxed{u' + iv'}$$
$$\| $$
$$Ax = \boxed{Au + iAv}$$

Truquito. $x(t) = e^{\lambda t} w$ es solución compleja y sacamos la parte real y la parte imaginaria que serán soluciones.

En este caso

$$\sigma(A) = \{i, -i\} \Rightarrow v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad v_{-i} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Construyo una y saco conjugada ⟶ $\varphi(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + i\,\text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) + i\cos(t) \end{pmatrix}$

Entonces $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \text{sen}\, t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \text{sen}\, t \end{pmatrix}$ son soluciones

Hay otra forma de resolverlo y es tan fácil como pasarlo a un sistema de orden superior

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1'' = x_2' = -x_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_2 = x_1' \\ -x_1 = x_2' \end{cases}$$

$x'' + x = 0$

Entonces $x_1'' + x_1 = 0$, sacamos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

donde el grado de cada monomio depende del orden de la derivada

$e^{\lambda_i t}$ son solución

De esta forma las raíces son e^{it}, e^{-it} entonces $x_1(t) = c_1 \cos t + c_2\, \text{sen}\, t$

Como $x_2 = x_1'$ tenemos que $x_2(t) = -c_1\, \text{sen}\, t + c_2 \cos t$

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i\,\text{sen}\, t}$$

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes siempre se pueden expresar como una ecuación de orden superior

4 Matriz solución y matriz fundamental

Pensaremos en sistemas de la forma

$$x' = Ax \quad , \quad A: I \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d} \text{ continua}$$

Hasta ahora, hemos visto soluciones de la forma $x = x(t)$, $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$. No obstante, podríamos definir las soluciones como matrices.

Definición

Una matriz $\phi: I \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ es una matriz solución si ϕ es derivable
$t \longmapsto \phi(t) = (\phi_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq d}$

y cumple que $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$

Ejemplo

$$x' = Ax \ , \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \phi = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \phi_1 & \phi_d \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{array}\right) \end{array}$$

$p(\lambda) = i, -i$

$ie^{it} \to c_1 - \operatorname{sen} \ \cos$

En realidad esto no es nuevo pues no es más que decir que las columnas son las soluciones vectoriales; por tanto, disponemos de una equivalencia

Esto se cumple gracias a que:

$$A, B = (b_1, \ldots, b_d) \Rightarrow A \cdot B = (Ab_1 | Ab_2 | \ldots | Ab_d)$$

Aquellas matrices solución que cumplen que $\det(\phi(t)) \neq 0$ las llamaremos matrices fundamentales, para algún $t \in I$ o para todo $t \in I$, es decir, eso es equivalente.

Gracias a esto, si ϕ es una matriz fundamental, $Z = \{\phi(t) c \mid c \in \mathbb{R}^d\}$ es el espacio de soluciones. Si ϕ es matriz solución $Z \supseteq \{\phi(t) c \mid c \in \mathbb{R}^d\}$

vector de constantes

Construcción de matrices solución/fundamentales a partir de otras

matriz de constantes

Supongamos que $\phi(t)$ es matriz solución y $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ entonces $\phi(t) \cdot C$ (en ese orden) es también matriz solución.

Esto es análogo con matrices fundamentales siempre y cuando $\det(C) \neq 0$

-Demostración-

Regla de la derivada del producto de matrices

Sean $\phi, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ derivables entonces $\phi \cdot \varphi$ es derivable:

$$(\phi\cdot\varphi)' = \phi'\varphi + \phi\varphi'$$ ¡El orden importa! (producto de matrices no conmutativo)

- Demostración -

$\phi\cdot\varphi$ es derivable porque cada componente es suma y producto de funciones derivables.

como producto derivable $\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0}$

$$\frac{1}{h}\left[\phi(t+h)\varphi(t+h) - \phi(t)\varphi(t)\right] = \frac{1}{h}\left[\phi(t+h)\varphi(t+h) - \phi(t+h)\varphi(t)\right] + \frac{1}{h}\left[\phi(t+h)\varphi(t) - \phi(t)\varphi(t)\right]$$

1. distributiva
2. def derivada $\rightarrow = \square$
3. continuidad del prod de matrices

(Bilineal: la aplicación es bilineal si fijada una coordenada $\Rightarrow$ es lineal en la coordenada restante)

(Multilineal: son lineales en una coordenada fijando las restantes

Volviendo a la demostración:

Como ϕ es matriz solución $\Rightarrow \phi$ es derivable y $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$

- $\phi\cdot C$ es derivable por el lema anterior

$$(\phi\cdot C)' = \phi'\cdot C = (A\phi)C = A(\phi\cdot C)$$

luego $\phi\cdot C$ es una matriz solución $\square$

Matriz fundamental principal en t_0

Sea $t_0 \in I$, diremos que ϕ, siendo matriz fundamental, cumple que $\phi(t_0) = I$ matriz identidad

Ejemplo

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$ es principal en $t_0 = 2k\pi,\ k\in\mathbb{N}$

Ejercicio FÓRMULA DE JACOBI-LIOUVILLE

Sea $\phi(t)$ una matriz solución y $t_0 \in I$ entonces

$$\boxed{\det \phi(t) = \det \phi(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))ds}}$$

1. Probar
2. Demostrar que la otra es caso particular

5. Recordatorio del inicio

$x' = \lambda x \implies x(t) = e^{t\lambda} x_0$

$x' = Ax \implies x(t) = e^{tA} x_0$, pero... ¿qué es e^A?

Sea $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, usaremos que $e^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$, pero usando las sumas parciales

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!} \lambda^n \text{ obtenemos}$$

ya perfectamente definido que

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!} A^n$$

Por tanto, $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3} A^3 + \dots$

Debemos ver que esto tiene sentido, que converge luego, sea $A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tales que $\|A_n\| \leq M_n$

Si $\sum M_n < \infty \implies \sum A_n$ converge y:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} A_n \ , \ \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Usando lo anterior, podemos ver que mayorando por $\|\frac{1}{n!} A^n\| = \frac{1}{n!} \|A^n\| \underset{\text{norma matricial}}{\leq} \frac{1}{n!} \|A\|^n = M_n$

de donde $\sum_{n=0}^{\infty} M_n = e^{\|A\|} < \infty$ luego e^{tA} está bien definida.

Cálculo de la exponencial

- $e^0 = I + 0 = I$ (la exponencial de una matriz no es la exponencial de las componentes)
- A diagonal $\implies e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}$ (por definición y desarrollo de sumas de potencias)
- A es nilpotente, es decir, una potencia es nula luego todas las siguientes son.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, A^{d-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

luego $$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(d-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Hasta ahora hemos visto casos particulares pero veamos algo más general:

$x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$

Proposición

Sea $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ dada por $\phi(t)=e^{tA}$, entonces $\phi(t)$ es matriz fundamental de $x'=Ax$ principal en $t_0=0$

-Demostración-

Definimos los iterantes de Picard

$$x_0(t)= x_0$$

$$x_{n+1}(t)= x_0+\int_0^t A x_n(s)ds$$

de donde sabemos que $x_n(t) \xrightarrow{unif} x(t)$ en I intervalo acotado, $x(t)$ solución de $x'=Ax$

$$x_1(t)= x_0+\int_0^t A x_0 ds = x_0+tAx_0=(I+tA)x_0$$

$$x_2(t)= x_0+\int_0^t A x_1(s)ds = x_0+\int_0^t A(I+sA)x_0 ds = x_0+tAx_0+\frac{t^2}{2}A^2x_0 = (I+tA+\frac{t^2}{2}A^2)x_0$$

Por inducción $x_N(t)=(I+tA+\frac{t^2}{2}A^2+\dots+\frac{t^N}{N!}A^N)x_0$ que son las sumas parciales de la exponencial

De donde vemos que $\{x_N(t)\} \longrightarrow e^{tA}x_0$ y por otro lado, por la demostración del Tª de existencia y unicidad $\{x_N(t)\} \xrightarrow{unif} x(t)$ entonces $x(t)=e^{tA}x_0$ por unicidad del límite.

Veamos la tesis:

·) $\phi(0)=I$ por definición

vector de la base canónica, una proyección.

·) $\phi(t)=(\phi_1(t)|\dots|\phi_d(t))$ donde $\phi_i(t)=\phi(t)e_i$, $e_i=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ (i) $\square$

Nota: es fundamental porque en 0 el determinante es distinto de 0

Supongamos ahora $\phi(t)$ matriz fundamental de $x'=Ax$ sería un error decir que $\phi(t)$ es la exponencial, como sabemos que $\phi(t)C$, $|C|\neq 0$, es m.f tenemos que $\phi(t)\phi(0)^{-1}=e^{tA}$ pues la matriz principal es única

Pasos:

1 Resolver sistema

2 Aplicar el truco

6. Cálculo progresivo en dificultad de la matriz exponencial

Caso 1

- Matriz diagonalizable en los reales -

Condición de diagonalización

· Todos los valores propios sean reales

· Haya tantos vectores propios l.i. como dimensión.

Valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ (puede haber repeticiones)

Vectores propios $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ (l.i.)

Como $x(t) = e^{\lambda_i t} v_i$ es solución entonces $\phi(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1 | \dots | e^{\lambda_d t} v_d)$ es matriz fundamental pues $\det(\phi(0)) = \det(v_1 | \dots | v_d) \neq 0$.

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = -2$ $\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Donde da igual la elección de los vectores propios.

Caso 2

- Matriz diagonalizable en $\mathbb{C}$ -

Situación:

Valores propios reales: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

Vectores propios: $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^d$

Valores propios complejos: $\mu_1, \dots, \mu_s, \overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_s} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Vectores propios: $\omega_1, \dots, \omega_s, \overline{\omega_1}, \dots, \overline{\omega_s} \in \mathbb{C}^d$

Necesitamos que $v_1, \dots, v_r, \omega_1, \dots, \omega_s, \overline{\omega_1}, \dots, \overline{\omega_s}$ debe ser base de $\mathbb{C}^d$ donde $d = r + 2s$.

Soluciones: $x(t) = e^{\lambda_i t} v_i \in \mathbb{R}^d$

$x(t) = e^{\mu_i t} \omega_i \in \mathbb{C}^d$ donde $\varphi_i(t) = \mathrm{Re}(e^{\mu_i} \omega_i)$

$\tilde{\varphi}_i(t) = \mathrm{Im}(e^{\mu_i} \omega_i)$

donde no tomamos un valor complejo y su conjugado.

Matriz solución: $\phi(t) = (e^{\lambda_1} t | \dots | e^{\lambda_r} t | \varphi_1(t) | \dots | \varphi_s(t) | \tilde{\varphi}_1(t) | \dots | \tilde{\varphi}_s(t))$

que además es matriz fundamental y ya podemos aplicar el truco

Ejemplo

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $\mu_1=i$ $\bar{\mu}_1=-i$

$\omega_1=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \bar{\omega}_1=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$

$x_1(t)=e^{it}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ es solución

$\varphi_1(t)=Re\begin{pmatrix}e^{it}\\ie^{it}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(t)\\-\operatorname{sen}(t)\end{pmatrix}$

$\tilde{\varphi}_1(t)=Im\begin{pmatrix}e^{it}\\ie^{it}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}$

Luego

$$\phi(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \operatorname{sen} t\\ -\operatorname{sen} t & \cos t\end{pmatrix}$$

Caso General

- Matriz exponencial de cualquier sistema -

Por ejemplo las matrices nilpotentes no son diagonalizables.

Forma canónica de Jordan

Sea $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$ entonces podemos conseguir

$$A=PJP^{-1}$$

donde

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r\end{pmatrix}$$

donde

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}$$

Además si hay tantas J_i como dimensión de la matriz entonces es diagonalizable.

- Es única salvo permutaciones
- Casos; si hay 1 valor propio con $d=3$ raíces

$$\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 1 & \\ & 3 & 1\\ & & 3\end{pmatrix}$$

Propiedades

1 Si $A=PBP^{-1} \Rightarrow e^{A}=Pe^{B}P^{-1}$, de hecho $A^{n}=PB^{n}P^{-1}$

- Demostración -

Tomamos las sumas parciales de A.

$$I+A+\frac{1}{2}A^2+\dots+\frac{1}{n!}A^n = I+PBP^{-1}+\frac{1}{2}PB^2P^{-1}+\dots+\frac{1}{n!}PB^nP^{-1}=$$

$$=P\left(I+B+\frac{1}{2}B^2+\dots+\frac{1}{n!}B^n\right)P^{-1}$$

Haciendo paso al límite

$$e^A=\lim_{n\to\infty} I+A+\frac{1}{2}A^2+\dots+\frac{1}{n!}A^n$$

$$Pe^BP^{-1}=\lim_{n\to\infty} P\left(I+B+\frac{1}{2}B^2+\dots+\frac{1}{n!}B^n\right)P^{-1}$$

límite conmu con func continuas

Producto de matrices es continuo

2. $e^J=\begin{pmatrix} e^{J_1} & & & \\ & e^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r}\end{pmatrix}$

Por tanto todo se reduce a saber calcular e^J donde J será un bloque

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$$

Para ello, consideramos el sistema $x'=Jx$ y obtenemos la matriz fundamental. Supongamos que $\dim(J)=r$ entonces el sistema viene dado por:

$$\begin{cases} x_1'=\lambda x_1+x_2 \\ x_2'=\lambda x_2+x_3 \\ \vdots \\ x_{r-1}'=\lambda x_{r-1}+x_r \\ x_r'=\lambda x_r \end{cases}$$

que no resolveremos de forma usual sino con el siguiente cambio de variable:

$$y_i(t)=e^{-\lambda t}x_i(t)$$

entonces:

$$y_1'=e^{-\lambda t}x_1'-\lambda e^{-\lambda t}x_1=e^{-\lambda t}(x_1-x_1')=e^{-\lambda t}x_2=y_2$$

donde por inducción obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=y_3 \\ \vdots \\ y_{r-1}'=y_r \\ y_r'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_r=c_r \\ y_{r-1}=c_{r-1}+c_r t \\ y_{r-2}=c_{r-2}+c_{r-1}t+c_r\frac{t^2}{2} \\ \vdots \\ y_1=c_1+c_2t+c_3\frac{t^2}{2}+\dots+c_r\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \end{array}$$

tras deshacer el cambio obtenemos la solución del sistema de partida:

$x_i(t) = e^{\lambda t} y_i(t)$:

$x_r = c_r e^{\lambda t}$

$x_{r-1} = (c_{r-1} + c_r t) e^{\lambda t}$

$x_{r-2} = \left(c_{r-2} + c_{r-1} t + c_r \frac{t^2}{2}\right) e^{\lambda t}$

$\vdots$

$x_1 = \left(c_1 + c_2 t + \frac{c_3 t^2}{2} + \dots + \frac{c_r t^{r-1}}{(r-1)!}\right) e^{\lambda t}$

Por tanto tomando como vectores de $C = (c_1 | \cdots | c_r)$ los vectores de la base canónica:

$$\phi(t) = e^{\lambda t} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & t & t^2/2 & & t^{r-1}/(r-1)! \\ 0 & 1 & t & & t^{r-2}/(r-2)! \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

que es matriz solución y matriz fundamental que en $\phi(0) = I$

luego

$\phi(t) = e^{tJ}$, J es una matriz de un bloque.

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$J = \left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline & 2 \end{array}\right)$ ó $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$ pero la primera es imposible por no ser diagonalizable

Entonces $\exists P \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A = PJP^{-1} \Leftrightarrow AP = JP \Leftarrow$ sistema para resolver y sacar la P donde, en este caso, una P es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y por la fórmula:

$$e^J = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $e^A = P e^J P^{-1}$