Tema 2. Teorema de la aplicación abierta.

Teorema de la aplicación abierta

Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ sobreyectiva. Entonces, T es abierta.

- Demostración -

→ Paso 1: Demostramos que $\exists r>0 : B_Y(0,r) \subset \overline{T(B_X(0,1))}$

Considero en el espacio Y la norma

$$n \in \mathbb{N} \qquad \|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v} \{ \|u\| + n\|v\| \}$$

y Z el espacio de todas las sucesiones $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ que tengan un número finito de términos no nulos, de hecho, todas convergen a 0. Defino la norma:

$$\| \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|_n$$

Y la aplicación:

$$T_n : (Y, \|\cdot\|_Y) \longrightarrow (Z, \|\cdot\|_\infty)$$
$$y \longmapsto T_n(y) = \{\delta_{n,k}\, y\}_{k\in\mathbb{N}}$$

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

Veamos que T_n es lineal y continua:

•) Linealidad:

$$T_n(y_1+y_2) = \{\delta_{n,k}(y_1+y_2)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\delta_{n,k}y_1 + \delta_{n,k}y_2\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\delta_{n,k}y_1\}_{k\in\mathbb{N}} + \{\delta_{n,k}y_2\}_{k\in\mathbb{N}}$$

$$= T_n(y_1) + T_n(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in Y$$

$$T_n(\lambda y_1) = \{\delta_{n,k}(\lambda y_1)\} = \lambda \{\delta_{n,k} y_1\} = \lambda T_n(y_1)$$

• Continuidad:

$$\|T_n(y)\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} \|\delta_{n,k}\, y\|_n = \|y\|_n \leq n\|y\|$$

Ahora, vamos a probar que $\forall y \in Y$ $\{T_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Ahora, como T es sobreyectiva

$$\exists x \in X \mid T(x) = y \Rightarrow y = T(x) + 0 \Rightarrow \|y\|_n \leq \|x\|_X + n\|0\|_Y = \|x\|_X$$

y como $\|T_n(y)\| \leq \|x\|_X$ entonces tenemos la acotación y usando el principio de acotación uniforme

$$\{\|T_n\|\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ está acotada} \Leftrightarrow \exists M>0 : \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \|T_n(y)\| \leq M\|y\| \ \forall y \in Y$$

Vamos a probar ahora la inclusión del paso 1, tomamos $y \in B_Y(0,\frac{1}{M})$.

$$\|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v}\{\|u\| + n\|v\|\} \leq M\|y\|_Y \underset{y\in B_Y(0,1/M)}{<} 1 \Rightarrow \exists\, u_n \subset X,\ v_n \subset Y \text{ tal que } \begin{cases} \|u_n\| + n\|v_n\| \\ y = T(u_n) + v_n \end{cases} < 1$$

Entonces $\|u_n\| < 1$, $n\|v_n\| < 1$ y $\|v_n\| < \frac{1}{n}$.

$$T(u_n) = \{T(u_n) + v_n - v_n\} = \{y - v_n\} \xrightarrow{n\to\infty} y$$

$$y = \underbrace{T(u_n)}_{\in\, T(B_X(0,1))} + \underbrace{v_n}_{\to 0} \Rightarrow y \in \overline{T(B_X(0,1))}$$

$\Rightarrow$ Paso 2: $B(0,\frac{r}{2}) \subset T(B(0,1))$

Como $B(0,r) \subset \overline{T(B(0,1))} \Rightarrow \frac{1}{2^n} B_Y(0,r) \subset \frac{1}{2^n}\overline{T(B(0,1))} \Leftrightarrow B_Y(0,\frac{r}{2^n}) \subset \overline{T(B(0,\frac{1}{2^n}))}$

$y \in B(0,r/2) \subset \overline{T(B(0,\frac{1}{2}))} \Rightarrow \exists\, x_1 \in B(0,\frac{1}{2}) \mid \|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2^2} \Rightarrow y - T(x_1) \in B_Y(0,\frac{r}{2^2}) \subset \overline{T(B(0,\frac{1}{2^2}))}$

$\Rightarrow \exists x_2 \in B(0,\frac{1}{2^2}) \mid \|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{r}{2^3} \ldots$

$\exists\, x_n \in B(0,\frac{1}{2^n}) \mid \|y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k)\| \leq \frac{r}{2^{n+1}}$.

Pero $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge por ser X un espacio de Banach, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ con $\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < 1$.

Por otro lado, $\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k) = y$. $T(x) = T(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = T(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} x_k) \overset{T\text{ continua}}{=} \lim_{N\to\infty} T(\sum_{k=1}^{N} x_k) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} T(x_k)$
$= \sum_{k=1}^{\infty} T(x_k) = y \in T(B(0,1))$ □

Corolario 2.7.

Sean E y F dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$ biyectiva. Entonces T^{-1} es continua.

-Demostración-

Como T es lineal, continua y sobreyectiva, por el Teorema de la aplicación abierta tenemos que T es abierta, es decir, si $\mathcal{U} \subset E$ es abierto $\Rightarrow T(\mathcal{U})$ es abierto de F.

Como T es biyectiva sabemos que admite inversa, que llamaremos T^{-1} y que cumple que

$$T^{-1} \circ T = Id_E \quad \wedge \quad T \circ T^{-1} = Id_F$$

de donde se deduce que $(T^{-1})^{-1} = T$ luego dado $\mathcal{U}$ abierto de E, debemos ver que $(T^{-1})^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en F, pero $(T^{-1})^{-1}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U})$ y T era abierta. □

Corolario 2.8.

Sea E un espacio vectorial dotado de las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Si E es un espacio de Banach para las dos normas tales que existe $C>0$ cumpliendo que

$$\|x\|_2 \leq C\|x_1\| \quad \forall x \in E$$

Entonces, ambas normas son equivalentes y $\exists c>0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad \forall x \in E$$

-Demostración-

Tomaremos $E = (E, \|\cdot\|_1)$, $F = (E, \|\cdot\|_2)$ y $T = I$ y dividiremos la demostración en dos pasos

Paso 1 Supongamos que T es lineal y sobreyectiva, de E en F. Entonces $\exists c>0$ con

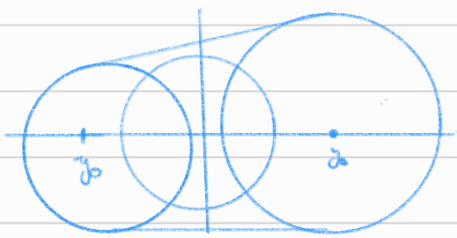
$$\overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c)$$

-Demostración-

Tomamos $X_n = n\,\overline{T(B(0,1))}$, como T es sobreyectiva $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = F$ y usando categoría de Baire tenemos que debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ con $Int(X_{n_0}) \neq \emptyset$. Entonces

$$Int(\overline{T(B(0,1))}) \neq \emptyset$$

Sea $c>0$ y $y_0 \in F$ tal que $B(y_0, 4c) \subset \overline{T(B(0,1))}$. En particular, se tiene que $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$ y, por simetría, $-y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$. Entonces, es claro que, $B(0,4c) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))}$ pues tenemos la siguiente situación:



Como $\overline{T(B(0,1))}$ es convexo por ser T lineal obtenemos que

$$\overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} = 2\overline{T(B(0,1))} \Rightarrow \overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c)$$

Paso 2. Supongamos que T es lineal y continua de E en F que cumple $\overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c)$ entonces $T(B(0,1)) \supset B(0,c)$

-Demostración-

Sea $y \in F$ con $\|y\| < c$, buscamos encontrar $x \in E$ tal que $\|x\| < 1$ y $Tx = y$. Por hipótesis, sabemos que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists z \in E$ con $\|z\| < \frac{1}{2}$ cumpliendo $\|y - Tz\| < \varepsilon$

Tomando $\varepsilon = \frac{c}{2}$ encontramos $z_1 \in E$ con $\|z_1\| < 1/2$ y $\|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}$

Haciendo inducción aplicada sobre $(y - Tz_1)$, $(y - Tz_1 - Tz_2)$ encontramos $x_n = z_1 + \_\_ + z_n$ una sucesión de Cauchy. Como $\|x_n\| \leq 1$ entonces, como E es Banach $\{x_n\} \to x$ con $\|x\| \leq 1$ y $y = Tx$ $\square$