Tema 1 Distribuciones de variable continua

1.1 Uniforme

Viene definida en un intervalo $I=(a,b)$, $a,b\in\mathbb{R} \wedge a<b$. Representa hechos tales que su densidad en el punto $x\in(a,b)$ es igual para todos los valores de $x\in(a,b)$. Dicho de otra forma, serán aquellas v.a que, en cada subintervalo de I, la probabilidad es proporcional a la longitud del subintervalo.

- Función de densidad $\quad f_X(x)=\frac{1}{b-a} \quad \forall x\in I$

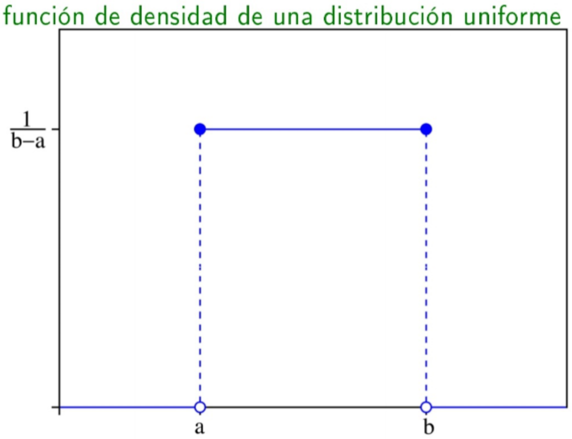
- Función de distribución
$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leq x<b \\ 1 & \text{si } b\leq x \end{cases}$$

- Función generatriz de momentos

$$M_X(t)=\int_a^b E[e^{tx}]dx = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}\,dx = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)t}, \quad t\neq 0$$

$$M_X(t)=1 \quad \text{si } t=0$$

Gráficas de la función de densidad de una distribución uniforme



1.2. Normal

Diremos que una v.a $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$ cuando tenga una función de densidad f_X dada por

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}}$$

Debido a que esto es complicado, lo habitual es tipificar para así usar la tabla con las probabilidades:

$$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y \rightsquigarrow N(0,1)$$

De manera que

$$\boxed{P[X \leq x] = P\left[Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right]}$$

Para identificar su uso, podemos tratar de reflejar el experimento como una distribución binomial continua o una poisson con $\lambda >> 15$ continua.

Proposición

i) $X \rightsquigarrow N(0,1) \Leftrightarrow M_X(t) = e^{t^2/2}$

ii) $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

Demostración

i) Sea $X \rightsquigarrow N(0,1)$ sabemos que

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{tx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx - \frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Como, por definición, $\int_{\mathbb{R}} f_X(y) dy = 1$ obtenemos que $X \rightsquigarrow N(t,1)$

ii) Dado que $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$, es decir, se tiene la siguiente igualdad

$$X \underset{d}{=} \sigma Z + \mu$$

y usando (i) obtenemos

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[e^{t(\sigma Z + \mu)}] = e^{t\mu} \mathbb{E}[e^{(t\sigma)Z}] = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{t\mu} e^{(t\sigma)^2/2} = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad \square$$

Algunas propiedades interesantes de la distribución son

- Es simétrica respecto a la media
- Moda = Media = Mediana
- La probabilidad de un valor concreto es 0, ya visto en integrales

Aplicación 1 (aproximación de probabilidades binomiales)

Sea $X \sim B(n,p)$ tal que:

i) $n > 30$

ii) $0'1 < p < 0'9$

Entonces $B(n,p) \simeq N(np, npq)$

Esto es sólo aplicable para el cálculo de probabilidades.

Aplicación 2 (aproximación de probabilidades de una v.a de Poisson)

Sea $X \sim P(\lambda)$ tal que $\lambda > 10$ entonces $P(\lambda) \simeq N(\lambda, \lambda)$.

De nuevo, esto es sólo aplicable para el cálculo de probabilidades

Corrección por continuidad

Dada la situación de aproximar una distribución discreta por una continua, el uso del operador $\leq$ entra en juego pues habría ocasiones donde perderíamos información. Debido a esto, se suele sumar o restar una cantidad simbólica $k \in (0,1)$ de manera que se busque no perder dicha información. Cabe recalcar que cuanto menor sea k mejor será la aproximación.

- $P[X = c] \simeq P[c-k \leq X \leq c+k]$
- $P[X \leq c] \simeq P[X \leq c+k]$
- $P[X \geq c] \simeq P[X \geq c-k]$

Lo habitual es tomar $k = 0'5$.

1.3 Exponencial

Diremos que una v.a X sigue una distribución exponencial, y lo denotaremos $X \sim exp(\lambda)$, si

$$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0}$$

Esta distribución será útil cuando busquemos representar el tiempo aleatorio transcurrido entre dos sucesos. Si nos fijamos pretende ser la versión continua de la distribución de Poisson

Función de distribución $\quad F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}, \; x \geq 0$

Función generatriz de momentos $\quad M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \quad t < \lambda$

Momentos $\quad E[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$

$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Relación con la distribución de Poisson

Sea $Y \sim P(\lambda t)$, indica el número de sucesos aleatorios ocurridos en un intervalo de tiempo t, cuando su razón de ocurrencia es λ. Sea ahora $X \sim exp(\lambda)$ que indica el tiempo trascurrido entre dos sucesos consecutivos cuando su razón de ocurrencia es constante

Entonces, podremos decir que:

$$P[Y=0] = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^0}{0!} = P(X > t) = 1 - F_X(t) = 1 - 1 + e^{-\lambda t}$$

Donde estamos diciendo que la probabilidad de que no ocurra ningún suceso en el tiempo establecido es igual a la probabilidad de que el tiempo entre sucesos sea mayor que t.

Es importante recalcar que es la única distribución con la propiedad de falta de memoria

$$P[X > t / X > s] = P[X > t] \quad \forall t, s > 0$$

1.4. Erlang

Indica el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del n-ésimo suceso aleatorio; sean $\boxed{X_i \sim exp(\lambda)}$ $i=1,\dots,n$, mutuamente independientes

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i = E \sim \mathcal{E}(n,\lambda)}$$

Para $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, y $\lambda>0$, la función f_x de la v.a. E se define

$$\boxed{f_E(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}}, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad x\in\mathbb{R}^+$$

Función generatriz de momentos $\quad M_E(t) = \left[\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)\right]^{-n}, t<\lambda$

1.5. Gamma $\left(\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1}e^{-x}dx, \; u>0\right)$

Propiedades de la función Γ

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u), \quad u>0$
- $\Gamma(u+k) = (u+k-1)(u+k-2)\dots(u+1)u\Gamma(u), \quad k\in\mathbb{N}, \; u>0$
- $\Gamma(k) = (k-1)!, \quad k\in\mathbb{N}$
- Si $\lambda>0$, $\int_0^\infty x^{u-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(u)}{\lambda^u}$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Simplemente es una extensión de la Erlang, definida cuando el parámetro u no es un número natural sino uno real. Es decir:

Parámetro de escala

$$X\sim\Gamma(u,\lambda), \; u,\lambda\in\mathbb{R}^+ \iff \boxed{f_X(x)=\frac{\lambda^u}{\Gamma(u)}x^{u-1}e^{-\lambda x}, \; x>0}$$

Parámetro de forma

La forma de f_X difiere si $u\le1$ ó $u>1$. De hecho, si $u>1$ la función presenta máximos en los puntos $x=\frac{u-1}{\lambda}$

Casos particulares

i) $X\sim exp(\lambda) \iff X\sim\Gamma(1,\lambda) \quad, \lambda>0$

ii) $X\sim \boxed{\mathcal{E}}(u,\lambda) \iff X\sim\boxed{\Gamma}(u,\lambda) \quad, \lambda>0, u\in\mathbb{N}$

Función generatriz de momentos $M_X(t) = \left[\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)\right]^{-u}$, $t<\lambda$

1.6. Beta

$\left(\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \; ; \text{ simétrica } ; \beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \right)$

Diremos que una v.a X sigue una distribución beta de parámetros p y q si:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} \; , x \in (0,1) \; , p,q > 0}$$

La función de distribución es la integral

Propiedades

i) Si $p = q = 1 \Rightarrow X \sim \mathcal{U}(0,1)$

ii) Simetría $X \sim \beta(p,q) \Leftrightarrow [1-X] \sim \beta(q,p)$

Para ver más propiedades de f_X visitar las diapositivas.