1. Combinatoria

Permutaciones

Una permutación de un conjunto X es una aplicación biyectiva $f: X \longrightarrow X$. Al conjunto de todas ellas lo llamamos $Perm(X)$, donde si $\#X = n \Rightarrow \#Perm(X) = n!$ En ellas importa el orden.

Variaciones

Hay de dos tipos:

- Sin repetición: si tenemos n elementos, tomados de m en m, el conjunto de las variables sin repetición está formado por cada una de las posibles elecciones ordenadas de m elementos distintos, dentro de un conjunto de n elementos.
  El número de variaciones sin repetición de un conjunto de n elementos formados por m de ellos viene dado por

$$\boxed{V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

  Además, si tomamos V_n^n se tiene que $V_n^n = Perm$

- Con repetición: consiste en lo mismo que sin repetición pero permite tomar elementos repetidos.
  El número de variaciones con repetición de un conjunto de n elementos formados por m de ellos viene dado por

$$\boxed{VR_n^m = n^m}$$

Combinaciones

Hay de dos tipos:

- ·) Sin repetición: si tenemos n elementos, tomados de m a m $(1 \leq m \leq n)$, son cada uno de los posibles subconjuntos de m elementos distintos dentro de un conjunto de n elementos, sin importar el orden.
  El número de combinaciones sin repetición de un conjunto de n elementos tomados de m a m viene dado por

$$\boxed{C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

- Con repetición: es idéntico a las anteriores permitiendo la repetición de los elementos

El número de combinaciones con repetición de un conjunto de n elementos tomados de m a m viene dado por

$$\boxed{CR_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}}$$

En ambos casos, dos combinaciones son iguales entre sí, si y solo si, tienen los mismos elementos sin importar el orden

Teorema del binomio

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ y $n,k \in \mathbb{N}$ se cumple

i) $\binom{n}{0}=1$; $\binom{n}{n}=1$

ii) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

iii) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

iv) Teorema del binomio. $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

v) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Ciclos

Dado un conjunto $\{a_1,\dots,a_m\} \subseteq \Delta_n$, definimos un ciclo de longitud m como una permutación $\sigma \in S_n$ (conjunto de las permutaciones de n elementos) tal que

i) $\sigma(a_i)=a_{i+1}$ $\quad i\in\{1,\dots,m-1\}$

ii) $\sigma(a_m)=a_1$

iii) $\sigma(a_j)=a_j$ $\quad \forall a_j \notin \{a_1,\dots,a_m\}$

Lo representamos por $(a_1,\dots,a_m)=(a_2,\dots,a_m,a_1)=\dots=(a_m,a_1,\dots,a_{m-1})$. En ocasiones se usará la yuxtaposición para representar un ciclo $(a_1,\dots,a_m)=(a_1\dots a_m)$

2. Grafos

Un grafo G es un par (V,E), donde V y E son dos conjuntos, junto con una aplicación $\gamma_G : E \longrightarrow \{\{u,v\}/u,v\in V\}$. Donde V es el conjunto de vértices, E es el conjunto de aristas y γ_G recibe el nombre de aplicación de incidencia

$\gamma_G(e_1)=\{a,b\}$

$\gamma_G(e_2)=\{b,d\}$

$\gamma_G(e_3)=\{b,c\}$

Hay varios tipos de grafos:

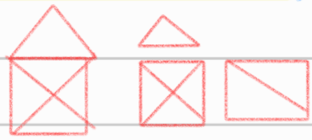
- Simples

- Con lazos

- Dirigidos

Nosotros trabajaremos con grafos sin lazos ni lados paralelos, también llamados multigrafos

Cuando trabajamos con grafos, es habitual restringir a un subgrafo, es decir, dado un grafo $\mathcal{G}$, un subgrafo $\mathcal{G}'$ cumple que $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ y $\gamma_{\mathcal{G}'}(e) = \gamma_{\mathcal{G}}(e)\ \forall e \in \mathcal{E}'$ Conjunto de aristas Se dirá que ese subgrafo $\mathcal{G}'$ es pleno si se verifica que $e \in \mathcal{E}$ tal que $\gamma(e) \subseteq V'$ entonces $e \in \mathcal{E}'$, es decir, si tiene todas las aristas de $\mathcal{G}$ que unen vértices de V'



Caminos de un grafo

Un camino es una sucesión finita de lados con la propiedad de que cada lado acaba donde empieza el siguiente.

Además, pueden ser:

- Cerrado: empieza y termina en el mismo vértice
- Recorrido: camino sin lados repetidos
- Simple: recorrido sin vértices repetidos
- Circuito: recorrido cerrado
- Ciclo: circuito que es además camino simple.

Una propiedad útil es que si, en un grafo, existe un camino entre dos vértices entonces existe un camino simple entre ellos. Además, si existen dos caminos simples distintos entre ellos, tenemos un ciclo

Grafos conexos

En el conjunto de vértices de un grafo $\mathcal{G}$ se puede establecer la siguiente relación binaria de equivalencia

$u, v \in V$, $uRv \iff$ existe un camino de u a v

De esta manera, se dice que un grafo es conexo si todo par de vértices están relacionados, es decir, están conectados por un camino. En definitiva, V/R es unitario

Matriz de adyacencia

Dado un grafo $\mathcal{G}$ de vértices $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ se define su matriz de adyacencia como la matriz de $M_n(\mathbb{N})$ donde a_{ij} representa el número de aristas que unen v_i con v_j

Cumple que, considerando un grafo sin lazos y no dirigido:

i) $a_{ii}=0 \quad \forall i \in \Delta_n$

ii) $a_{ij}=a_{ji} \quad \forall i,j \in \Delta_n$

iii) La matriz de adyacencia no es única, depende de la ordenación de los vértices.

iv) Si $A \in M_n(\mathbb{N})$ entonces es la matriz de adyacencia de un grafo

v) Si el grafo no tiene lados paralelos entonces $a_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \in \Delta_n$

Teorema

Sea $\mathcal{G}$ un grafo y A su matriz de adyacencia. En la posición ij de la matriz A^k aparece el número de caminos de longitud k que unen v_i y v_j

Matriz de incidencia

Dado un grafo $\mathcal{G}$ de vértices $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ y cuyo conjunto de lados es $E=\{e_1, \dots, e_m\}$; se define su matriz de incidencia como la matriz de $M_{n \times m}(\mathbb{N})$ donde a_{ij} vale 1 si $v_i \in \gamma_{\mathcal{G}}(e_j)$ y 0 en otro caso. Si el lado e_j incide sobre v_i

Cumple que

i) No es única pues depende de la ordenación de los vértices

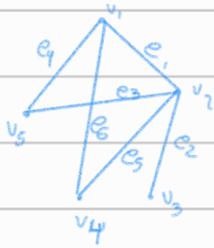
ii) Si hay lados paralelos, habrá columnas idénticas

iii) Los lazos se traducen en filas con un único coeficiente a 1

Como curiosidad, con ambas matrices se pueden construir su grafo asociado. Como ilustración se proporciona el siguiente ejemplo

Adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Isomorfismo de grafos

Dados dos grafos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ se dice que son isomorfos si existen dos biyecciones $h_V : V \longrightarrow V'$, $h_E : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ tales que para cada lado $e \in \mathcal{E}$ se verifica que

$$\boxed{\gamma_{\mathcal{G}'}(h_E(e)) = \{h_V(u), h_V(u')\}}$$

donde $\gamma_{\mathcal{G}}(e) = \{u, v\}$.

Como todo isomorfismo, viene representado por una matriz P. Al ser isomorfos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ existe dicha matriz P de manera que $P^{-1}AP = C$ donde A y C son las matrices de adyacencia

Grado de un vértice

Una propiedad se dice invariante por isomorfismo si dados dos grafos isomorfos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$, uno satisface la propiedad, si y sólo si, lo satisface el otro. Los dos primeros invariantes son el número de vértices y el número de lados.

Se define el grado de un vértice v como el número de lados que inciden en v, lo denotaremos $gr(v)$. Denotaremos por $D_k(\mathcal{G})$ al número de vértices de grado k que hay en el grafo. A la sucesión $D_0(\mathcal{G}), D_1(\mathcal{G}), \dots, D_n(\mathcal{G})$, la llamaremos sucesión de grados del grafo

Se cumple por isomorfismos las siguientes invariantes

i) $gr(v) = gr(h_V(v))$

ii) La sucesión de grados de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ son iguales

iii) $\sum_i gr(v_i) = 2|\mathcal{E}|$

iv) El número de vértices de grado impar es par

Por último, se dice que un grafo es regular si todos los vértices tienen el mismo grado

No obstante, el hecho de que se cumplan los invariantes no garantiza que los grafos estudiados sean isomorfos; algo que nos puede ayudar es consultar la longitud de los ciclos.

Para decir que dos grafos son isomorfos es necesario proporcionar el isomorfismo.

Familias de grafos

Hay varias familias de grafos.

1. Completos de n vértices (K_n), son aquellos que no tienen lados paralelos y dados dos vértices hay un lado que los une.

$$|V| = n$$
$$|E| = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

2. Bipartitos, son aquellos en los que podemos dividir su conjunto de vertices en dos subconjuntos disjuntos donde los vértices de un conjunto sólo se relacionan con los del otro grupo.

$$|V| = |V_1| + |V_2|$$

3. Bipartito completo, composición de los dos anteriores

$$|V| = |V_1| + |V_2|$$
$$|E| = |V_1| \cdot |V_2|$$

4. Ciclo con n vértices, son aquellos en los que cada vértice incide únicamente con los vértices anterior y posterior.

$$|V| = n$$
$$|E| = n$$

5. Rueda de n vértices, son ciclos de n vértices con un vértice interior que conecta con todos los demás

Sucesiones gráficas

Sean $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$. Decimos que la sucesión $d_1, \dots, d_n$ es una sucesión gráfica si existe un grafo G, sin lazos ni lados paralelos, con n vértices tal que $gr(v_i) = d_i$. Diremos que G es una realización de la sucesión $d_1, \dots, d_n$

Teorema de Havel-Hakimi

Sea $d_1, \dots, d_n$ una sucesión de números naturales ordenada con $d_1 < n$. Entonces es una sucesión gráfica si y solo si $d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ es una sucesión gráfica

Una vez aplicado el algoritmo, podemos reconstruir dicho grafo (en caso de que sea sucesión gráfica) siguiendo los pasos de final a principio

Grafos de Euler. Grafos Hamiltonianos

Grafos de Euler

Dado un grafo diremos que es de Euler si existe un circuito de Euler en él, es decir, una sucesión de aristas que pasan por todas las aristas sin repetirse y empieza y termina en el mismo vértice

Si no empieza y termina en el mismo vértice es un camino de Euler, es decir, sí que pasa por todas las aristas con dicha salvedad

Teorema

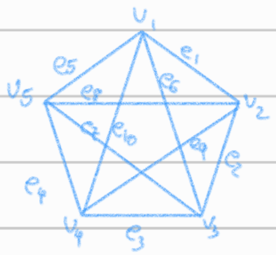
Un grafo conexo es de Euler si y solo si todos sus vértices son de grado par.

- Demostración -

$\Rightarrow$] Supongamos que G es conexo y es de Euler. Sea σ un circuito de Euler y para cada vez que pasamos por un vértice le añadimos un grado 2 al vértice (por ser σ un circuito).

Como cada lado aparece una sola vez entonces el grado será múltiplo de 2.

$\Leftarrow$] Se demuestra por inducción, pero veremos la idea en K_5 (la demostración no parece muy compleja



$\sigma_1 : v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \xrightarrow{e_6} v_1$

$\sigma_2 : v_3 \xrightarrow{e_3} v_4 \xrightarrow{e_4} v_5 \xrightarrow{e_7} v_3$

$\sigma_3 : v_2 \xrightarrow{e_9} v_4 \xrightarrow{e_{10}} v_1 \xrightarrow{e_5} v_5 \xrightarrow{e_8} v_2$

Enganchamos creando el circuito

Con esto construimos el camino

Otras propiedades son:

i) Un grafo conexo tiene un camino de Euler si y sólo si tiene exactamente 2 vértices de grado impar. En dicho caso, empezaremos en uno y acabaremos en el otro.

ii) Para construir un camino de Euler, construimos ciclos sobre un vértice y eliminando los lados que aparecen en él. Después "pegamos" los ciclos obtenidos por los vértices que comparten.

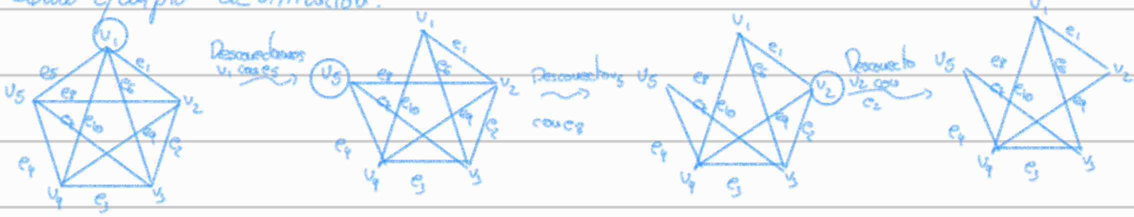
Algoritmo de Fleury

Es un algoritmo que permite construir el circuito de Euler.

1. Verificar que sea de Euler.
2. Seleccionar un vértice arbitrario
3. Seleccionar una arista a partir de ese que no sea puente, a menos que no haya otra alternativa
4. Borrar dicha arista y pasar al vértice de llegada
5. Si no hemos borrado todas las aristas volvemos al punto 3

Una arista es puente cuando al quitar la arista se desconecta el grafo.

Como ejemplo de utilización:



y así sucesivamente salvo que haya una arista puente que la borramos y punto igual.

Ya que hablamos de formas de recorrer los grafos eulerianos conviene ver una forma que involucra a la matriz de adyacencia. Ya que la suma $\sum_j a_{ij} = gr(v_i)\ \forall i$, podemos comprobar haciendo uso de un teorema visto que si esa suma es impar para algún vértice, entonces no será grafo de Euler.

Además, podemos obtener el circuito iniciando en el vértice superior tachando los unos y a cada tachada su simétrico también, repetimos esto hasta acabar con todos los unos

Grafos de Hamilton

Un grafo es hamiltoniano cuando es posible construir un circuito de Hamilton, es decir, un camino cerrado pasando por todos los vértices una sola vez (salvo los extremos).

También, un grafo podrá contener un camino de Hamilton, que es un camino que pasa por todos los vértices una sola vez sin cerrarse.

Teorema

Sea $\mathcal{G}$ un grafo con n vértices, será Hamiltoniano si cumple alguna de estas propiedades

i) $|E| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$

ii) Si $n \geq 3$ y $\forall u, v \in V$ no adyacentes $gr(v) + gr(u) \geq n$

Cabe recalcar que el recíproco es falso y que si no se cumplen las propiedades i) y ii) entonces no es hamiltoniano también es falso.

Algunas observaciones son:

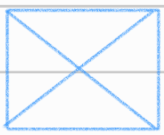
i) Si tiene algún vértice de grado 1 no puede ser hamiltoniano

ii) Si es hamiltoniano y tiene n vértices $\Rightarrow$ tiene, al menos, n lados

Grafos planos

Diremos que un grafo $\mathcal{G}$ es un grafo plano si admite una representación sobre el plano de $\mathbb{R}^2$ en la que los lados no se cortan.

Por ejemplo, K_4 es un grafo plano.



es isomorfo a

De hecho, cualquier poliedro es un grafo plano.

Como propiedad clara, si un grafo es plano, conexo, sin lazos ni lados paralelos y sin vértices de grado 1, entonces

$3c \leq 2l$, $l \leq 3v - 6$. (lo usaremos para probar que el grafo no es plano)

Definimos contracción simple de un grafo plano a través de una arista entre dos vértices adyacentes como el grafo cuyo conjunto de vértices es $V - \{v\}$, donde v es uno de los vértices adyacentes y cuyo conjunto de aristas es el mismo eliminando la arista entre v y su adyacente (u)

y uniendo, todos los vértices que estaban unidos con v, con u.

Definimos el concepto de contracción como una cadena de contracciones simples sobre un grafo, de hecho, puede dar lados paralelos

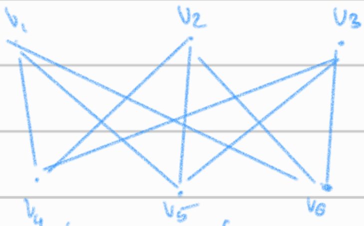
Dado un grafo, podremos determinar si no es plano si construyendo dos caminos de la siguiente manera:

$\alpha = v_1 \longrightarrow v_3$

$\alpha' = v_2 \longrightarrow v_4$

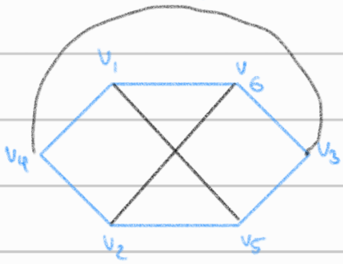
Cuando dos aristas elegidas fuera del ciclo elegido, si y sólo si α y α' o están dentro o están fuera

Un ejemplo es el problema de los suministros determinados por el siguiente grafo:



¿Podemos llevar los suministros sin que se corten? En ese caso es plano.

1. Tomamos un ciclo
2. Tomamos las aristas que faltan



Como tomando una representación del grafo en el plano necesariamente algunas de ellas dentro del ciclo elegido (o fuera) están obligadas a cortarse. El ciclo puede ser cualquiera, cuando más grande mejor

Más bien, si hay dos de las faltantes del ciclo en la misma región entonces se cortarán

Teorema de Kuratowski

Sea G un grafo, entonces G es un grafo plano si, y sólo si, ningún subgrafo suyo puede contraerse a K_5 o $K_{3,3}$

Característica de Euler

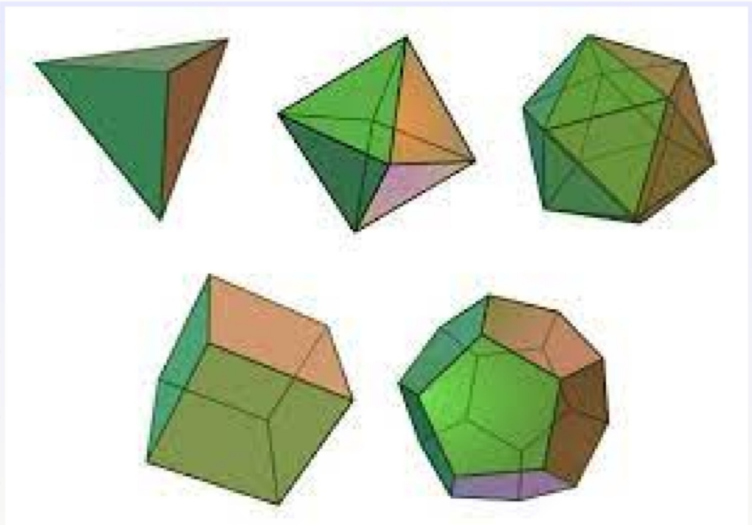
Sea G un grafo plano y conexo, entonces $v-l+c=2$, donde v es el número de vértices, l es el número de lados y c el número de caras de una representación plana

Donde una cara de un grafo plano es cada una de las regiones en las que queda dividido el plano por una representación plana. Sólo se puede hablar de caras en grafos planos y el exterior del grafo es otra cara.

En general, si G es plano, y χ es el número de componentes conexas $v-l+c=1+\chi$. En un poliedro regular, se cumple que $v-l+c=2$, donde v, l y c son los cardinales ya definidos

Sólidos regulares

Sólo existen 5 sólidos regulares



Llamamos poliedros duales a aquellas parejas de poliedros que tienen los vértices y las aristas intercambiadas.

Cubo $\longleftrightarrow$ octaedro

dodecaedro $\longleftrightarrow$ icosaedro