1. Se considera el problema de encontrar las soluciones reales de la ecuación $x + \frac{1}{2} - 2\sin(\pi x) = 0$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

   a) ¿Se puede utilizar el método de bisección para resolver dicho problema tomando $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ como intervalo inicial? ¿Por qué? En caso afirmativo, calcule las tres primeras iteraciones de dicho método.

   b) Halle una cota del error que se comete si consideramos la última de las iteraciones del apartado anterior como el valor de la solución del problema dado.

   c) ¿Cuántas iteraciones del método de bisección son necesarias para garantizar un error menor que 10^{-5}?

a) Debido a que el método de bisección usa el teorema de Bolzano, $f(x) = x + \frac{1}{2} - 2\sin(\pi x)$ $\forall x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ debe ser continua, y lo es por ser suma y composición de funciones continuas. Además, debe existir una raíz

$$f(\tfrac{1}{2}) = 1 - 2\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}) = -1 < 0$$

$$f(\tfrac{3}{2}) = 2 - 2\operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2}) = 4 > 0$$

Luego existe una raíz por el teorema de Bolzano

Calculamos las tres primeras iteraciones

$[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ $\quad m_0 = \frac{3/2 + \frac{1}{2}}{2} = 1$ $\quad f(1) = \frac{3}{2} - 2\,\cancel{\operatorname{sen}\pi}^{0} > 0$

$[\frac{1}{2}, 1]$ $\quad m_1 = \frac{1/2 + 1}{2} = \frac{3}{4}$ $\quad f(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4} - 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} < 0$

$[\frac{3}{4}, 1]$ $\quad m_2 = \frac{\frac{3}{4} + 1}{2} = \frac{7}{8}$ $\quad f(\frac{7}{8}) = \frac{11}{8} - 2\operatorname{sen}(\frac{7\pi}{8}) > 0$

b) Sabemos que el método de bisección dispone de la cota del error

$$\mathcal{E}_n \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \quad \rightsquigarrow |\mathcal{E}_n| \leq \frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

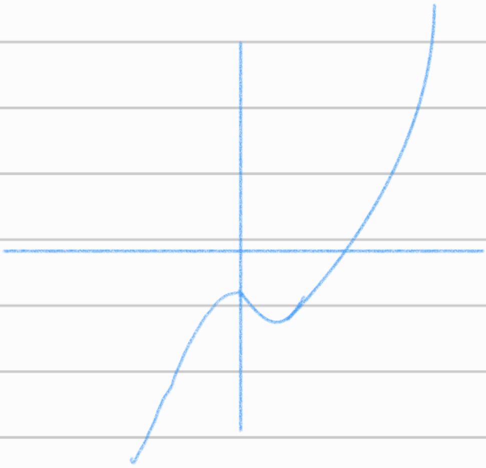
c) Para calcular este número de iteraciones usaremos que $\mathcal{E}_n \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \mathcal{E}$ donde $\mathcal{E}_n$ es el error de la iteración n-ésima y $\mathcal{E}$ el error que buscamos no superar; luego.

$$\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-5};\quad 10^5 < 2^{n+1};\quad \frac{10^5}{2} < 2^n;\quad n > \log_2 \frac{10^5}{2} = 15'6$$

Por tanto, deberemos hacer 16 iteraciones

3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[1, 4]$. Elija una semilla x_0 que permita hallar, usando el método de Newton-Raphson, una aproximación a dicha solución y justifique dicha elección. Calcule las dos primeras iteraciones.

Como $f(a)f(b)<0$ ya que $f(1)<0$, $f(4)>0$ sabemos que existe una raíz en el intervalo $[1,4]$



$f'(x)=3x^2-4x$, $f'(x)=0$ sii $x=0$ ó $x=\frac{4}{3}$

$f''(x)=6x-4$, $f''(x)=0$ sii $x=\frac{2}{3}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x)=-5$

$f(\frac{4}{3})<0$

Veamos qué ocurre en $[1,4]$.

	$[1,\frac{4}{3}]$	$[\frac{4}{3},x]$	$[x,4]$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

Por tanto, se ve claramente que la solución es única, que además puede restringirse al intervalo $]\frac{4}{3},4]$, donde se verifican las hipótesis del teorema de convergencia local para $x_0=3$ pues $f(x_0)f''(x_0)>0$ pues $f(3)>0$ y $f''(3)>0$.

Calculamos las iteraciones con $x_0=3$

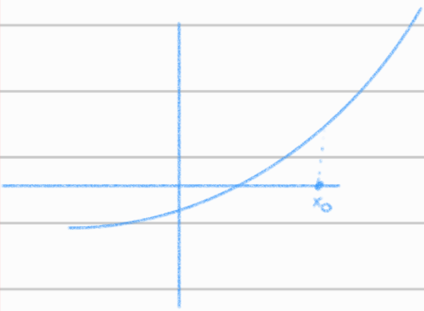
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{3^3-2\cdot 3^2-5}{3^3-4\cdot 3} = 2'7\overline{3}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2'691624726$$

4. Deduzca la fórmula para el cálculo de las iteraciones del método de la secante a partir de su interpretación gráfica.

Esto es el método de N-R, la secante se hace igual pero con la recta que pasa por $(x_n, f(x_n))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

Dada una función $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}$ y una ecuación $f(x)$ buscamos interpretar gráficamente el método de Newton-Raphson, dada una semilla $x_0\in\Omega$



Sabemos que dado x_0 buscamos encontrar el punto de corte de la recta tangente $\varphi(x)$ con el eje de abscisas luego, como la recta tangente en un punto x_0 viene dada por

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)(x-x_0)$$

de donde

$$\varphi(x)=\varphi'(x_0)(x-x_0)+\varphi(x_0)$$

Como buscamos el punto de corte con la recta $y=0$, x_1 viene dado por

$\varphi'(x_0)(x_1+x_0)+\varphi(x_0)=0$; $x_1=\frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)}-x_0$, $x_1=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-x_0$

pues $f(x_0)=\varphi(x_0)$ y $\varphi'(x_0)=f'(x_0)$.

Ahora, por inducción se deduce que, dado $x_0\in\Omega$ $x_{n+1}=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\square$

5. Dada la ecuación $x-\frac{1}{2}\cos x=0$, se pide:

a) Demuestre que tiene una única solución real en el intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$. → Podemos probar punto fijo

b) Describa un método de iteración funcional, distinto del método de Newton-Raphson, que permita aproximar dicha solución, razonando la respuesta.

c) Realice las dos primeras iteraciones del método descrito en el apartado anterior.

d) ¿Cuántas iteraciones es preciso realizar para garantizar un error menor que 10^{-2} en el método dado en el apartado b)? → $|\varepsilon_n|\leq\frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$

a) Sabemos que $f(x)=x-\frac{1}{2}\cos x$ $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ es continua, como $f(0)<0$ y $f(\frac{\pi}{2})>0$ sabemos por el Teorema de Bolzano que existe una solución.

Veamos el crecimiento en $[0,\pi/2]$: $f'(x)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x$, de donde vemos que $f'(x)>0$ $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ por tanto, f es inyectiva y estrictamente creciente, es decir, la solución es única

Nada de it. func.

~~b)~~ Se va a usar el método de bisección, siempre converge pues f es continua en $[0,\frac{\pi}{2}]$.

~~c)~~ Usaremos el método de bisección

$x=0.45$

$[0,\frac{\pi}{2}]$ $m_0=\frac{\pi/2}{2}=\frac{\pi}{4}$ $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\pi-\sqrt{2}}{4}>0$

$[0,\frac{\pi}{4}]$ $m_1=\frac{\pi}{8}$ $f(\frac{\pi}{8})=\frac{\pi}{8}-\frac{\cos(\frac{\pi}{8})}{2}<0$

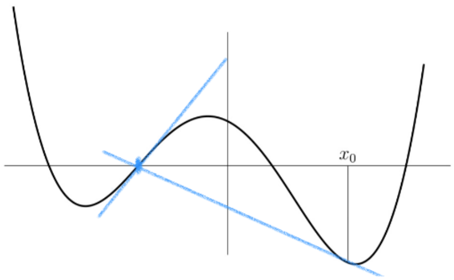
d) Sabiendo que, si $\{\varepsilon_n\}$ es la sucesión de los errores entonces $\varepsilon_n\leq\frac{b-a}{2^{n+1}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ basta ver que dado ε error a no superar $\varepsilon_n\leq\frac{b-a}{2^{n+1}}<\varepsilon$ cumple lo pedido. Entonces:

$$n>\log_2\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)$$

En este caso $n>5'295$, es decir, debemos hacer 6 iteraciones

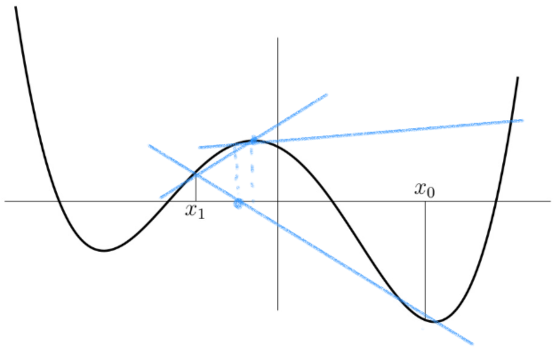
12. A partir de la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra, determine gráficamente las dos aproximaciones siguientes que generan los métodos de Newton-Raphson y de la secante partiendo de las semillas que aparecen en cada caso. Deduzca si hay convergencia y hacia qué solución de $f(x) = 0$.

   a) Método de Newton-Raphson



Gráficamente parece que no converge pues $f(x_n) = 0$, $n > 1$

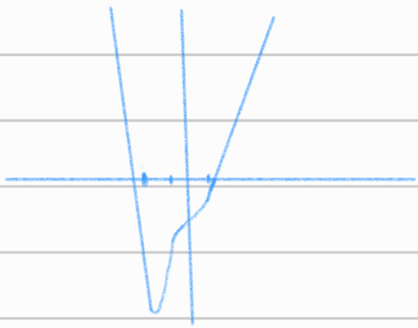
   b) Método de la secante



Gráficamente tampoco parece que vaya a converger.

8. Localice un intervalo $[a, b]$ en el que se encuentren todas las soluciones reales de la ecuación $2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$, y sepárelas. Tomando $x_0 = -2$ como semilla, calcule las tres primeras iteraciones del método de Newton-Raphson usando el algoritmo de Horner.

Para ello, estudiamos un poco la función:



- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

- Como $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ la derivamos para conocer el crecimiento

$$f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 8x^3 - 6x + 3$$

Veamos cuándo se anula. $f'(x) = 0$ sii $8x^3 - 6x + 3 = 0$, es decir, $x = -1'052$ por tanto $f(x)$ parece asemejarse a una parábola.

- Veamos ahora las curvaturas

$$f'': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 24x^2 - 6$$

donde $f''(x) = 0$ sii $24x^2 - 6 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{\frac{6}{24}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$

Con toda esta información podemos hacer un esbozo de la función (dibujo superior).
Para conocer el intervalo que contiene a las soluciones usaremos el teorema de Bolzano.

$f(-2) > 0$, $f(-1) < 0$ Por tanto una solución está en el intervalo $[-2, -1]$.

Como la función es estrictamente decreciente hasta $x=-1'082$ no habrá más soluciones ahí. A partir de aquí $f'(x)>0$ $\forall x>-1'082$ luego a lo sumo habrá otra solución.

$$f(-1)<0, \quad f(2)>0$$

Por tanto, ambas soluciones pueden encontrarse en el intervalo $[-2,2]$

Para calcular las iteraciones, por Horner sabemos que:

$$p(x)=((2x^2-3)x+3)x+4 \qquad p'(x)=(8x^2-6)x+3$$

Tomando $x_0=-2$

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = -2'2857$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = -1'929710164$$

6. Usando algún resultado sobre convergencia para los métodos de iteración funcional, demuestre el teorema de convergencia local para ceros simples del método de Newton-Raphson.

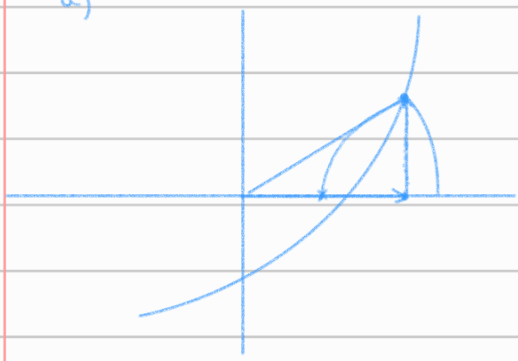
Este ejercicio se ha hecho en clase, debemos ver que N-R es un método de iteración funcional basado en punto fijo. A continuación, dada una raíz s ver que $f'(s)=f''(s)=0$ para saber el orden de convergencia. Para ver la convergencia local bastará usar el teorema de convergencia local y ver que $|f'(s)|<1$

7. Para resolver la ecuación $f(x) = 0$ se considera el método $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$, donde $m \neq 0$. Se pide

   a) Interprete gráficamente el cálculo de las iteraciones según dicho método.

   b) ¿Qué condiciones para la función f, para la constante m y para el valor inicial x_0 asegurarían unicidad de solución y convergencia a dicha solución del método considerado? $\hookrightarrow x = g(x)$ y probar $|g'(s)| < 1$

a)



b)

9. Sea $s = \sqrt{3}$. Para calcular s se considera el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{ax + x^3}{3 + bx^2}.$$

Halle los valores de a y b para que, partiendo de una semilla x_0 suficientemente próxima a s, se asegure la convergencia al menos cuadrática. Para tales valores, calcule x_3 para $x_0 = 1$.

Como disponemos de la raíz, bastará encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $g'(s)=0 \wedge g''(s)=0$

$$g'(x) = \frac{(a+3x^2)(3+bx^2) - (ax+x^3)(2bx)}{(3-bx^2)^2} = \frac{2abx^4 + 3bx^3 + (a+ab)x^2 + 3a}{a - 3bx^2 + b^2x^4}$$

$$g''(x) = \frac{(8abx^3 + 9bx^2 + 2(a+ab)x)(a - 3bx^2 + b^2x^4) - (2abx^4 + 3bx^3 + (a+ab)x^2 + 3a)(-6bx - 4b^2x^3)}{(a - 3bx^2 + b^2x^4)^2}$$

Realizando $g'(x)=x$ y $g''(x)=x$ obtenemos un sco de dos ecuaciones y dos incógnitas, resolviendo obtenemos a y b.

Calcular las iteraciones es sencillo.

10. Se desea aplicar un método iterativo del tipo $x_{n+1} = px_n + q\frac{7}{x_n^2} + r\frac{7^2}{x_n^5}$ para obtener $\sqrt[3]{7}$. Halle los valores de p, q, r para que la convergencia local del método sea al menos cúbica. Realice dos iteraciones partiendo de $x_0 = 2$.

o de la misma forma $f(s) = g(s) - s = 0$

De nuevo, al igual que el ejercicio 9, debemos garantizar que $g'(s) = g''(s) = g'''(s) = s$ de donde obtenemos un sco de tres ecuaciones y tres incógnitas que nos darán los valores de p, q, r.

Calcular las iteraciones es sencillo.

En este caso no es necesario probar que $g \in C^3(I)$ con $I = [2,3]$ pues es claro al no tomar x el valor 0

11. Sea $f(x) = x^5 + x^2 - 1$.

Este ejercicio está pensado para hacerse con las sucesiones de Sturm.

a) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$?

b) Pruebe que el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt{\frac{1}{x_n^3 + 1}}$$

converge en el intervalo $[0, 1]$ a una raíz de $f(x) = 0$.

c) Localice todas las raíces reales de $f(x)$.

---

a) Estudiamos la función en dicho intervalo. Comenzamos por los límites:

$$f(0) = -1 \wedge f(1) = 1$$

Por tanto, sabemos que, al menos, hay una solución

Ahora, estudiamos el crecimiento:

$$f' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 5x^4 + 2x$$

de donde $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0 \wedge 5x^3 + 2 = 0$, es decir, $x \in \{0, \sqrt[3]{\frac{-2}{5}}\}$, como estudiamos el intervalo $[0,1]$, nuestra función es estrictamente monótona en ese intervalo y por tanto, sólo hay una raíz

b) Para ello, podemos tratar de probar el teorema del Punto fijo en el intervalo $[0,1]$ sobre

$$f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } f(x)=g(x)-x \quad \forall x\in[0,1]$$

Para ello, debemos calcular su imagen:

$$f'(x)=\frac{\frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x^3+1}}}-1=\frac{-3x^2\sqrt{x^3+1}}{2(x^3+1)^2}-1 \quad \forall x\in[0,1]$$

Que claramente se cumple que $f'(x)<0$ $\forall x\in[0,1]$. Por ello, como $f(0)=1$ y $f(1)<0$ sabemos que existe un subintervalo I tal que $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$.

No obstante, vamos a probar que $|g'(x)|<1$; para ello $g'(x)=\dfrac{-3x^2}{2x^3\sqrt{x^3+1}+2\sqrt{x^3+1}}$. Veamos que $|g'(x)|<1$ $\forall x\in[0,1]$, para ello usaremos que g' es continua salvo en -1

$$g'(0)=0 \quad y \quad g'(1)\geq -1$$

$$|g'(x)|=\frac{3x^2}{|2x^3\sqrt{x^3+1}+2\sqrt{x^3+1}|}\leq\frac{3}{4\sqrt{2}}<1$$

Es fácil ver que converge en un subintervalo de $[0,1]$ como ya se verá venir

c) Para ello, debemos construir la sucesión de Sturm de f.

1 Sea la función $f(x) = e^x - ax^2$ con $a \in [3, 4]$.

a) Demuestra que tiene una raíz negativa, otra raíz en $[0, 1]$ y otra mayor que 1.

b) Demuestra que $x = g_1(x) = \sqrt{\frac{e^x}{a}}$ y $x = g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{a}}$ son ecuaciones equivalentes a la de partida.

c) Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a -0.5 partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_2(x)$ y realiza dos iteraciones.

d) Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a 1 partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_1(x)$ y realiza dos iteraciones.

e) Toma $a = 3$. Comprueba que la raíz mayor que 1 está en $[3, 4]$. Demuestra la no convergencia hacia la raíz próxima a 4 partiendo de x_0 muy próximo a ella (pero diferente de ella) usando $g_1(x)$ y encuentra una función para la iteración funcional, alternativa a las anteriores que converja a la raíz cercana a 4. Partiendo de $x_0 = 3.98$ obtenga x_1 y x_2 con el método propuesto.

a) Para ello, usaremos el Teorema de Bolzano, sabiendo que f es continua.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(0)=1$, $f(1)=e-a<0 \ \forall a\in[3,4]$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

De ahí se deduce la existencia de ellas

b) $x=\sqrt{\frac{e^x}{a}} \iff ax^2=e^x \iff f(x)=0$

$x=-\sqrt{\frac{e^x}{a}} \iff ax^2=e^x \iff f(x)=0$

c) Tenemos $f_3(x)=e^x-3x^2$, sabiendo que la raíz se encuentra en $[-1,0]$ vamos a ver que $|g_2'(s)|<1$

hay que ver que $g_2([-1,0])\subset[-1,0]$ para

$$|g_2'(s)| = \frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}} \le \frac{1}{6\sqrt{\frac{1}{3}}} < 1$$

$\leftarrow$ Basta ver que la función es creciente en $[-1,0]$

poder aplicar el teorema.

$\hookrightarrow$ si queremos saber en todo el intervalo

Luego converge, realizamos dos iteraciones:

$x_0=0$

$x_1=-\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x_2=-\sqrt{\frac{e^{\sqrt{\frac{1}{3}}}}{3}} = -0'7705651982$

d) Realizamos un estudio similar al anterior

$$|g_1(s)| = \frac{e^s}{6\sqrt{\frac{e^s}{3}}} \le \frac{e}{6\sqrt{\frac{e}{3}}} < 1$$

$\leftarrow$ Por ser creciente en $[0,1]$

Luego converge localmente en $[0,1]$

Tenemos que comprobar lo mismo

$x_0=0$

$x_1=\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x_2=0'7705651982$

e) Para comprobar la existencia en $[3,4]$ usamos Bolzano sobre f, $f(3)<0$, $f(4)>0$ luego hay una raíz en $[3,4]$.

Para demostrar la no convergencia, tomando la sucesión de los errores sabemos que si el método es convergente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|}=|g'(s)|$$

$g_1'(x)=\frac{\sqrt{e^x/3}}{2}$ que cumple $|g_1'(x)|>1 \ \forall x\in[3,4]$ luego no puede haber convergencia.

La función es de punto fijo. $x = \ln(3x^2) = g_3(x)$

$f([\frac{7}{2}, \frac{9}{2}]) = [3'6041, 4'1067] \subset [\frac{7}{2}, \frac{9}{2}]$

$g_3'(x) = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x}$

$g_3''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0 \Rightarrow g'(x)$ decreciente

$|g_3(\frac{7}{2})| = \frac{4}{7} < 1$

$|g_3(\frac{9}{2})| < \frac{4}{9} < 1$

Por tanto, por el Tº del punto fijo sabemos que el método converge

2 Sea la ecuación $p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 15.2 = 0$.

a) Prueba que no tiene ninguna raíz menor que 1.

b) Prueba que Newton-Raphson converge partiendo de $x_0 = 0$ hacia la raíz más pequeña y realiza dos iteraciones.

c) Calcula la sucesión de Sturm y decide si existen raíces múltiples.

d) Separa las raíces reales de dicha ecuación.

a) Usaremos que, si $s \in \mathbb{R}$ cumple $P(s)=0$ entonces $|s| \leq 1+\alpha$ donde $\alpha = \max\{|\frac{a_i}{a_n}|\} = 20$, luego $s \in [-2\cancel{0}, 2\cancel{0}]$.

Para encontrar dónde están las raíces usamos Sturm:

$f_0(x) = P(x)$

$f_1(x) = P'(x) = 3x^2 - 16x + 20$

$f_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{116}{45} = 8x - \frac{116}{5} = 40 - 116 = 10x - 29$

$f_3(x) = \frac{-117}{100} = +1$

Por tanto una sucesión de Sturm es $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$

	f_0	f_1	f_2	f_3	cambios	
$-2\cancel{0}$	$-$	$-$	$-$	$+$	1	} Por tanto no hay raíces hasta $x=1$
1	$-$	$-$	$-$	$+$	1	} 1 raíz en $[1,2]$
2	$+$	0	$-$	$+$	2	} 1 raíz en $[2,3]$
3	$-$	$-$	$+$	$+$	1	} 1 raíz en $[3,4]$
4	$+$	$+$	$+$	$+$	0	} No hay raíces más allá de $x=4$
$2\cancel{0}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	

b) Para ello, estudiamos la convergencia en $[0,2]$. Hay que ver que la raíz es única

i) $f(0)f(2) < 0$ pues $f(0) < 0$, $f(2) > 0$

ii) $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [0,2]$, en $x=2$ es 0 pero no afecta $\rightsquigarrow$ Se puede hacer pues se vió en clase que converge para todo el intervalo pero no puedo empezar el método en el extremo que se anula

iii) $f''(x)$ no cambia de signo, afirmativo, f_2 por ser recta y por Sturm no cambia de negativo

iv) $f(0)f''(0) > 0$ $f(0) < 0$ y $f''(0) < 0$ luego $f(0)f''(0) > 0$

Por tanto, tenemos convergencia para N-R en $[0,2]$ con $x_0=0$ a la única raíz que hay que es la más pequeña.

$$x_0=0$$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{15'2}{20} = \frac{19}{25} = 0'76$$

$$x_2 = 0'76 - \frac{f(0'76)}{f'(0'76)} = 1'1968443392$$

otra forma es razonar por ucca = resto mostrar lo ⇒ no hay raíces múltiples

c) Gracias a lo obtenido en el apartado a) y que P es de grado 3, todas las raíces son simples

d) Las raíces se encuentran en los intervalos $[1,2]$ $[2,3]$ $[3,4]$ respectivamente

3 Sea la ecuación $f(x) = e^{x-1} - ax^3 = 0$ siendo $a > 1$.

a) Demuestra que tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

b) A partir de ahora considera $a = 2$. Calcula las dos primeras aproximaciones x_1 y x_2 obtenidas con bisección (siendo $x_0 = 0.5$). Indica el error máximo que se comete con x_2.

c) Realiza dos iteraciones con el método de la secante tomando como valores iniciales (o semillas) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Debes calcular x_2 y x_3.

d) Evalúa la función en la segunda aproximación x_2 obtenida con bisección e indica, razonadamente con los resultados que se te han pedido, si se puede asegurar, o no, que la segunda aproximación obtenida con bisección está más cerca de la raíz que la segunda aproximación obtenida con la secante.

a) Usaremos el Teorema de Bolzano sabiendo que $f \in C([0,1])$

$$f(0) = e^{-1} > 0 \quad , \quad f(1) = -a < 0 \text{ pues } a>1$$

Luego existe, al menos, una raíz en $[0,1]$

b) Trabajamos en $[0,1]$ pues $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0'5$. Como $f(x_0)>0$ tomamos $I_1 = [0'5, 1]$, $x_1 = \frac{1'5}{2} = 0'75$ y como $f(x_1)<0$ tomamos $I_2 = [0'5, 0'76]$ de donde $x_2 = 0'625$.

Sabiendo que $|x_n - s| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$, para $n=2$ sabemos que $|x_2 - s| \leq \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0'125$

c) Sabemos que, dada $f \in C([0,1])$ el método de la secante viene dado por:

$x_0, x_1 \in [0,1]$ dados

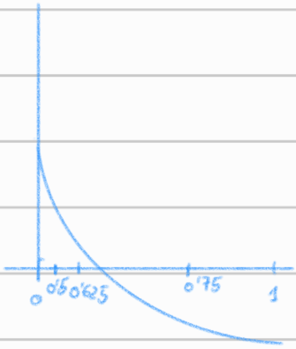
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Por tanto, para $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

$$x_2 = 1 - \frac{f(1)}{f(1) - f(0)} = 0'1553624035$$

$$x_3 = 0'1653624035 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(1)} = 0'2883717519$$

d) $f(x_2) = f(0'625) = 0'1990080288 > 0$. Por ahora sabemos:



Por tanto, la raíz debe estar en $]0'625, 0'75[$, es decir, x_2 de Bisección está más cerca de la raíz que x_2 del método de la secante.

Otra forma es $|E_n| \leq 0'125$, $x_3 < 0'618 < s < 0'75$

$0'1318 < s - x_3 < 0'2568 \Rightarrow |x_3 - s| \leq 0'258$

4 Considera la ecuación $x^2 = a$ siendo $a > 0$.

a) Se pretende usar el método de Newton-Raphson en la ecuación anterior para hallar la raíz cuadrada de a. Deduce que el método se puede expresar, en este caso, de la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{1}$$

b) Demuestra que el método es convergente partiendo de $x_0 = \text{máx}(1, a)$.

c) Apoyándote en la expresión (1) obtén la segunda aproximación x_2 de la raíz cuadrada positiva de 13, partiendo de $x_0 = 13$.

d) Determina la expresión del método de Newton-Raphson para la raíz cúbica de un número diferente de cero y aplícalo dos veces para aproximar la raíz cúbica de 13 partiendo de $x_0 = 13$.

a) $f(x) = x^2 - a$, $f'(x) = 2x$ $\qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Luego $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} = \dfrac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x_n^2 + a}{x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$

b) Demostrar el teorema de convergencia de N-R. Tomaremos los intervalos $I_1 = [a, 1]$ si $a < 1$ y $I_2 = [1, a]$

Si $a < 1$:

i) $f(a)f(1) < 0$ pues $f(a) = a^2 - a < 0$ y $f(1) = 1 - a > 0$

ii) $f'(x) \neq 0$ pues $0 \notin [a, 1]$

iii) $f''(x)$ no cambia de signo por ser constante

iv) $f(x_0)f''(x_0) > 0$ pues $f(1) > 0$ $f''(1) > 0$

Si $a > 1$:

i) $f(a)f(1) < 0$ pues $f(a) = a^2 - a > 0$ y $f(1) = 1 - a < 0$

ii) $f'(x) \neq 0$ pues $0 \notin [a, 1]$

iii) $f''(x)$ no cambia de signo por ser constante

iv) $f(x_0)f''(x_0) > 0$ pues $f(a) > 0$ $f''(a) > 0$

Luego converge para $x_0 = \max(a, 1)$ pues si $a = 1$ $f(1) = 0$

c) $a = 13$ y calcular

d) Para ello, buscamos un método que dé solución a la ecuación $x^3 = a$, luego $f(x) = x^3 - a$ obteniendo el método derivado de N-R

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - x_n^3 + a}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2} = \frac{2}{3}\left(x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

Vamos que es convergente para $x_0 = 13$ tomando el intervalo $[1, 14]$; considerando $a = 13$.

- $f(12)f(14) < 0$? $f(1) < 0$ $f(14) > 0$
- $f'(x) \neq 0$ lo cual se cumple en $[1,14]$ pues $f'(x) = 0$ sii $x = 0$
- $f''(x)$ no cambia de signo, $f''(x) = 6x$, $f''(x) = 0$ sii $x = 0$ luego se cumple
- $f(x_0)f''(x_0) > 0$? $f(x_0) > 0$ $f''(x_0) > 0$

Por tanto el método converge

5 Sea S la única solución en el dominio cuadrado $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$ del sistema no lineal

$$\begin{cases} xy^2 + 4x - 1 = 0 \\ 4yx^2 + 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

¿Es convergente a S la sucesión de iteraciones del método de iteración funcional definido por

$$x_{n+1} = \frac{1}{4 + y_n^2}$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{6 + 4x_n^2}$$

cualquiera que sea la aproximación inicial $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$?

Para ello basta estudiar el determinante de la matriz jacobiana y que la imagen de g, $\left(\frac{1}{4+y^2}, \frac{1}{6+4x^2}\right) \in [0,1] \times [0,1]$:

$$0 \leq \frac{1}{4+y^2} \leq 1 \iff 1 \leq 4 + y^2 \iff -3 \leq y^2 \checkmark$$
$$0 \leq \frac{1}{6+4x^3} \leq 1 \iff 1 \leq 6 + 4x^3 \iff -\frac{5}{4} \leq x^3 \checkmark$$

Ahora debemos probar que $\|G(x,y)\| < 1$ $\forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$

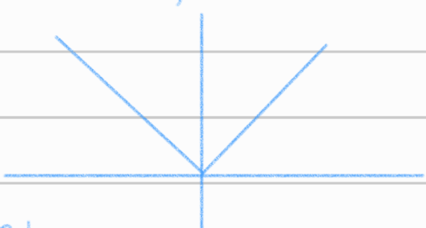
$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2y}{(4+y^2)^2} \\ \frac{-8x}{(6+4x^2)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando la norma 1 $\|J_F(x,y)\| = \max\left\{\frac{8x}{(6+4x^2)^2}, \frac{2y}{(4+y^2)^2}\right\} < 1$. Tras eso hay que comprobar que el sistema es equivalente al método de punto fijo, despejando x e y del sistema

$$xy^2 + 4x - 1 = 0 \iff xy^2 + 4x = 1 \iff x(y^2 + 4) = 1 \iff x = \frac{1}{y^2+4}$$
$$4yx^2 + 6y - 1 = 0 \iff y(4x^2 + 6) = 1 \iff \frac{1}{4x^2+6} = y$$

6 Se sabe que $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y posee un único cero en dicho intervalo. ¿Se puede aproximar siempre dicho cero mediante el método de bisección?

Para eso basta dar un contraejemplo.



Debe cumplir el Tª Bolzano

7 Se considera la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Se pide:

a) Demuestra que la ecuación anterior tiene una única solución real s .

b) Encuentra un intervalo $[a, b]$ en el que al tomar cualquier punto $x_0 \in [a, b]$ como aproximación inicial del método de Newton-Raphson aplicado a $f(x)$ se asegure que la sucesión de iteraciones de dicho método converja a s con convergencia al menos cuadrática y demuestra que eso es así.

c) Calcula las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para resolver la ecuación dada tomando como aproximación inicial $x_0 = 1$.

También se puede hacer Sturm

a) Para ello, estudiamos un poco la imagen de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x - 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Estudiamos la derivada $f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f'(x) = 3x^2 - 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$ cumpliendo que se anula en $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Por tanto, estudiamos $f'': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f''(x) = 6x \; \forall x \in \mathbb{R}$ que es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ con $f''(x) < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^-$ $f''(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^+$

- $f(x_1) < 0$ y es un máximo en el intervalo $]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}[$, luego no existe ninguna raíz en ese intervalo.
- Como x_2 es un mínimo y $f'(x) > 0 \; \forall x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ obtenemos que f es estrictamente creciente y por el Tª de Bolzano vemos que existe una raíz que con lo estudiado es única.

b) Ya que sabemos que f es estrictamente creciente en $]\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty[$, bastará encontrar $b \in \mathbb{R}^+ \mid f(b) > 0$; probamos con $b = 2$, $f(2) > 0$. Pasamos a probar el Tª de convergencia global de N-R en $[1, 2]$ pues $f(1) < 0$

i) $f(1) f(2) < 0$, comprobado.

ii) $f'(x) \neq 0 \; \forall x \in [1, 2]$ sí.

iii) $f''(x)$ no cambia de signo, $f''(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^+$

iv) $\max \left\{ \left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| , \left| \frac{f(2)}{f'(2)} \right| \right\} \leq b - a$ sii $\max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{11} \right\} \leq 1 = b - a$ ✓

~~No se cumple, pero sabemos en este caso que existirá un subintervalo de $]1, 2[$ en el que el método convergerá con orden cuadrático, sea J_2.~~

c) $x_0 = 1$

$x_1 = 1 - \frac{-1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1'5$

$x_2 = 1'5 - \frac{0'875}{5'75} = 1'3478260869565 2$

8 Se pretende estimar el valor de $\sqrt[7]{2}$ usando un método iterativo.

a) Determina justificadamente una función f y un intervalo $[a, b]$ donde se pueda aplicar el método de bisección. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4}?.

b) Determina justificadamente un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que permita asegurar que el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ y realiza 3 iteraciones del método.

c) Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{8x_n + 3x_n^8}{6 + 4x_n^7} .$$

Realiza 3 iteraciones del método empezando en el mismo valor x_0 del apartado anterior.

d) ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente a la solución? Justifica la respuesta.

a) Como buscamos obtener la raíz séptima de 2, buscamos resolver la ecuación $x^7 - 2 = 0$ luego tomamos $f(x) = x^7 - 2$ que sabemos que es estrictamente creciente y continua, luego, por ejemplo, tomando el intervalo $[1, 2]$, vemos que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$ luego podemos aplicar bisección sabiendo que converge

$n \geq \ln_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}$

donde ε es la cota del error; es decir $n \geq \ln_2 \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}} = 8'517$, luego basta $n = \cancel{9}$ 13

b) Vamos a probar, para el intervalo $[1,2]$ y $x_0 = \cancel{1}\ 2$ que el método converge

i) $f(1)f(2)<0$ ya comprobado

ii) $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [1,2]$, sabemos que $f'(x)=0 \iff x=0$

iii) $f''(x)$ no cambia de signo, como $f''(x) = 42x^5$ y $f''(x)=0$ sii $x=0$ obtenemos lo buscado, de hecho $f''(x)>0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$

iv) $f(x_0)f''(x_0)>0$, se cumple pues $f(x_0)>0$ y $f''(x_0) = 42>0$.

Luego converge a la raíz para $x_0 = 1'5$

Repítelos

$x_0 = 2$

$$x_1 = 1 - \frac{1'5^7 - 2}{7 \cdot 1'5^6} = 0'8107975701$$

$x_2 = 1'700643583$

$x_3 = 1'469504861$

c) $x_0 = 1$ ← en 2

$x_1 = 1'1$

$x_2 = 1'104089288$

$x_3 = 1'104089514$

d) Claramente el segundo pues es la solución para $n=3$. No se puede usar lo que se quiere calcular. Debemos ver la convergencia de cada uno, ¡el segundo hay que ver que converge! Puedes sustituir sin sacar el valor numérico (el decimal).

9 Sucesión de Sturm

a) Sea $\{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ una sucesión de Sturm en el intervalo $[a,b]$ y $k_i \in \mathbb{R}$ con $k_i > 0$ para $i = 0, \ldots, m$. Demuestra que si se define $\tilde{f}_i = k_i f_i$, entonces $\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_m(x)\}$ es también una sucesión de Sturm en $[a,b]$.

b) Dado el polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$, determina justificadamente un intervalo en el que estén contenidas todas sus raíces.

c) Construye una sucesión de Sturm para el polinomio p y utilízala para determinar el número de raíces reales así como intervalos de amplitud 1 en el que se encuentran.

d) Realiza dos iteraciones del método de la secante para calcular de forma aproximada el valor de la raíz ~~positiva~~ más pequeña justificando la convergencia.

negativa

a) Para ello, debemos probar las propiedades de una sucesión de Sturm.

i) $\tilde{f}_0(x) \in C([a,b])$, lo cual es trivialmente cierto

ii) $\tilde{f}_0(s) = 0 \Rightarrow \tilde{f}_0'(s)\tilde{f}_1(s) > 0$, como $\tilde{f}_0'(s) = k_0 f_0'(s)$ y $\tilde{f}_1(s) = k_1 f_1(s)$

basta probar que $k_0 f_0'(s) k_1 f_1(s) > 0$, lo cual es cierto pues $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ y f_0, f_1 son funciones de una sucesión de Sturm

iii) $\tilde{f}_j(x) = 0 \Rightarrow \tilde{f}_{j-1}(x)\tilde{f}_{j+1}(x) < 0$, $\tilde{f}_{j-1}(x)\tilde{f}_{j+1}(x) = k_{j-1}f_{j-1}(x)\, k_{j+1}f_{j+1}(x) \cancel{<} 0$ por ser k_{j-1} y k_{j+1} positivos

y f_{j-1}, f_{j+1} funciones de una sucesión de Sturm.

iv) $\tilde{f}_m(x) \neq 0$, lo cual se cumple pues $k_m f_m(x) = \tilde{f}_m(x)$ y $f_m(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ por ser parte de una sucesión de Sturm y $k_m > 0$.

□

b) Para ello, si $s \in \mathbb{R}$ cumple $p(s)=0$ sabemos que $|s| \leq 1+ \max_{0\leq i<n} \left\{\left|\frac{a_i}{a_n}\right|\right\} = 1+1$ luego $s \in]-2,2[$.

c) $f_0(x)=p(x)=x^3-x+1$

$f_1(x) = p'(x) = 3x^2-1$

$f_2(x) = \frac{2x}{3} - 1 = 2x-3$

$f_4(x) = 1$ 3

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	cambios
-2	-	+	-	+	+	3
-1	+	+	-	+	+	2
0	+	-	-	+	+	2
1	+	+	-	-	+	2
2	+	+	+	-	+	2

} 1 raíz

Por tanto sólo hay una raíz real en el intervalo $[-2,-1]$

d) Aplicamos el método de la secante, basta ver que la raíz es simple y que $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ para saber que converge en un subintervalo de $[-2,-1]$.

$x_0 = -2 \quad , x_1 = -1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1-x_0)}{f(x_1)-f(x_0)} = -1 - \frac{5}{-5-1} = -1 + \frac{5}{6} = \frac{-1}{6}$$

$x_3 = 0'2703617721$

10 Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Se pretende resolver la ecuación
$$f(x) = 0$$
utilizando el método de Newton-Raphson sabiendo que es convergente localmente ¿Qué debe cumplir la función f para que dicho método tenga convergencia local al menos cúbica?

b) Si sabemos que f tiene una única raíz real en el intervalo $[-1,1]$, ¿Cuántas iteraciones del método de bisección hay que realizar para conseguir un error menor que 10^{-7}?

c) ¿Es el método de Newton-Raphson para resolver el sistema
$$F(X) = 0$$
invariante frente a transformaciones lineales de F?
Nota: Que sea invariante frente a transformaciones ineales quiere decir que la secuencia de aproximaciones $\{X_n\}$ es la misma si se aplica el método al sistema $F(X) = 0$ o si se aplica al sistema $AF(X) = 0$, siendo A una matriz no singular, partiendo del mismo vector inicial X_0.

a) Como N-R es de punto fijo, vamos a usar el teorema de convergencia debe ocurrir que $g'(s)=0=g''(s)$ y $g'''(s) \neq 0$ donde $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \qquad g''(x) = \frac{f'(x)^2 f''(x) + f(x)f'(x)f'''(x) - 2f(x)f''(x)}{(f'(x))^3}$$

Luego distinguiendo casos.

- $m=1$, $g'(s)=0 \wedge g''(s)=0$ si $f''(s)=0$
- $m=2$ por el caso anterior $g''(s)=0$
- $m\geq 3$ sabemos que s es raíz triple de f luego $f(s)=f'(s)=f''(s)=0$ y por tanto $g''(s)=0$

Obteniendo así la conv al menos cúbica

b) Sabemos que $e_n < \frac{b-a}{2^{n+1}}$ luego $\frac{2}{2^{n+1}} \leq 10^{-7} \iff \frac{1}{2^n} \leq 10^{-7} \iff 10^7 \leq 2^n \iff n \geq \log_2 10^7$ luego $n=24$.

c) Sabemos que N-R$_n$ viene dado por $F(x)=0$ con F diferenciable $/ x_{n+1} = x_n - JF^{-1}(x_n)F(x)$

Si $AF(x)=0$ sabemos que $\exists f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ asociada a A lineal. Sea $G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $G = f \circ F$, como f es lineal y F diferenciable $\Rightarrow$ G es diferenciable.

Sea $a \in \mathbb{R}^n$, $JG(a) = Jf(a)\, JF(a) = A \cdot JF(a)$ pues f es lineal. Además, como $\det JF(x_n) \neq 0 \wedge A$ es regular $\Rightarrow JG(x_n)$ es regular $\forall n \in \mathbb{N}$

$$JG^{-1}(x_n) = (A \cdot JF(x_n))^{-1} = JF^{-1}(x_n)\, A^{-1}$$

Luego $x_{n+1} = x_n - JG^{-1}(x_n) \cdot G(x_n) = x_n - JF^{-1}(x_n) A^{-1} \cdot A \cdot F(x_n) = x_n - JF^{-1}(x_n)F(x_n)$, es decir, en esencia son el mismo método

11 El problema de trisección de un ángulo consiste en hallar las razones trigonométricas de $\alpha/3$, conociendo las de $\alpha \in (0, \pi/2)$.

a) Llamando $x = \operatorname{sen}(\alpha/3)$ y $a = \operatorname{sen}\alpha$, demuestra que x es solución de la ecuación

$$-4x^3 + 3x - a = 0 \tag{2}$$

b) Construye una sucesión de Sturm de polinomios asociada a $p(x) = -4x^3 + 3x - a$ y deduce que p tiene exactamente 3 raíces reales.

c) Demuestra que $\operatorname{sen}(\alpha/3)$ es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$, en el intervalo $(0, a/2)$ y que, tomando como valores iniciales $x_0 = a/3$ o $x_0 = a/2$, el método de Newton-Raphson converge.

d) Para resolver (2), se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{a}{3 - 4x_n^2}$$

Estudia bajo qué condiciones el método converge localmente a la solución. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente?

e) Tomando $a = 1/2$, realiza una iteración del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = 1/6$ para obtener una aproximación de $\operatorname{sen}(\pi/18)$.

a) $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3}\right)$

$= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)$

$= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 4\operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ ok

b) Sea s una raíz $\Rightarrow |s| \leq 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ luego podemos tomar el intervalo $[-2, 2]$

$f_0(x) = p(x) = -4x^3 + 3x - a$

$f_1(x) = -12x^2 + 3$

$f_2(x) = -2x + a$

$f_3(x) = -1$

	f_0	f_1	f_2	f_3	cs
-2	+	−	+	−	3
2	−	−	−	−	0

$-4x^2 + 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{4}$

Luego tiene exactamente 3 raíces reales.

c) Para ello, vemos que sólo hay una solución en $[0, \frac{a}{2}]$ pues evaluando

$0 \longrightarrow \{-a, 3, a, -1\} \longrightarrow 2$ cambios

$\frac{a}{2} \longrightarrow \{\frac{-a^3 + a}{2}, -3a^2 + 3, 0, -1\} \longrightarrow 1$ cambio

Luego hay una sóla raíz en $[0, \frac{a}{2}]$ y para ver que es única, veamos que $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} < \operatorname{sen}\alpha = 3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} - 4\operatorname{sen}^3(\frac{\alpha}{3}) \Leftrightarrow 2 < 3 - 4\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{3}) \Leftrightarrow -1 < -4\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{3})$$

$\Leftrightarrow 1 > 4\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{3}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{3})$, como $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ obtenemos lo que buscamos

Para ello, vamos a estudiar la conv global en $[0, \frac{a}{2}]$

i) $p(0)p(\frac{a}{2}) < 0$ (ap 2)

ii) $p'(x) \neq 0 \ \forall x \in [0, \frac{a}{2}]$ se cumple pues sólo se anula en $\frac{1}{2}$ y $\frac{a}{2} < \frac{1}{2}$ $\forall a$

iii) $p''(x)$ no cambia de signo $p''(x) = -24x$

iv) $\max \left\{ \left| \frac{f(0)}{f'(0)} \right|, \left| \frac{f(\frac{a}{2})}{f'(\frac{a}{2})} \right| \right\} = \max \left\{ \frac{a}{3}, \frac{(-a^3+a)}{6(-a^2+1)} \right\} \leq \frac{a}{2}$

$$\frac{(-a^3+a)}{6(-a^2+1)} = \frac{a}{6}\frac{(-a^2+1)}{-a^2+1}$$

d) Sabemos que en $[0, \frac{a}{2}]$ N-R tiene convergencia cuadrática así que vamos a estudiar el método

$$x_{n+1} = \frac{a}{3 - 4x_n^2}$$

de donde obtenemos la ecuación de punto fijo

$$x = \frac{a}{3 - 4x^2} \Leftrightarrow 3x - 4x^3 + a = 0$$

que es la ecuación de partida; como sabemos que $a = \operatorname{sen}\alpha$ y $s = \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{3})$ es la solución.

vamos a ver que $|g'(s)| < 1$.

$$g(x) = \frac{a}{3-4x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{8ax}{(3-4x^2)^2} \Rightarrow g''(x) = \frac{8a(3-4x^2)^2 + 8ax\,2(3-4x^2)8x}{(3-4x^2)^4}$$

Donde se cumple que $g'(s) = g''(s) = 0$ luego tenemos convergencia, y al menos cúbica, por tanto, el segundo método es más rápido

c) $x_0 = \frac{1}{6}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0'17361$$

13. Se considera la ecuación $xe^{-\frac{x}{3}} + 1 = 0$ y los métodos de iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$ dados por las funciones

$$g_1(x) = -e^{\frac{x}{3}},\ g_2(x) = e^{\frac{x}{3}},\ g_3(x) = 3\ln(-x)\ \text{ y }\ g_4(x) = \frac{x - e^{\frac{x}{3}}}{2}.$$

a) Encuentre un intervalo de amplitud 1 donde haya una única raíz de la ecuación.

b) Averigüe cuáles de los métodos propuestos son compatibles con la ecuación dada; es decir, para cuáles de ellos la solución es punto fijo.

c) De entre los métodos compatibles con la ecuación ¿cuáles son convergentes localmente? Justifique la respuesta.

d) De entre los métodos convergentes localmente ¿cuál es el más rápido? ¿Por qué?

e) Para los métodos que hayan resultado divergentes, aplique Steffensen con $x_0 = -0.5$ hasta que dos iteraciones consecutivas disten menos de 10^{-3}.

a) Tª Bolzano. $[-1,0]$; $f(-1) = -\frac{1}{\sqrt[3]{e}} + 1 < 0$, $f(0) = 1$ luego existe una raíz en $[-1,0]$

$f'(x) = e^{-\frac{x}{3}} - \frac{x}{3}e^{-\frac{x}{3}} = (1 - \frac{x}{3})e^{-\frac{x}{3}}$, vamos a ver cuando se anula, en $x=3$ luego en $[-1,0]$ es estric. creciente y la solución es única.

b) $g_1(x) = x \iff e^{-\frac{x}{3}} = x \iff e^{-\frac{x}{3}} - x = 0$ luego no es $f(x)=0$ (no val)

$g_2(x) = x \iff e^{\frac{x}{3}} = x \iff e^{x/3} - x = 0$ luego no es $f(x)=0$

$g_3(x) = x \iff 3\ln(-x) = x \iff e^{3\ln(-x)} = e^{x} \iff -x e^{3} = e^{x} \iff e^{x} - xe^{3} = 0$ luego no es $f(x)=0$ (no val)

$g_4(x) = x \iff \frac{x - e^{\frac{x}{3}}}{2} = x \iff x - e^{x/3} = 2x \iff -e^{x/3} = x \iff -1 = xe^{-x/3} \iff f(x)=0$

Luego el único es $g_4(x)$.

c) Veamos si $g_4(x)$ cumple las hipótesis de convergencia local.

· $g_4(x) \in \mathcal{C}^2([-1,0])$

· $|g_4'(s)| < 1$? $g_4'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{e^{x/3}}{3}) = \frac{1}{6}(3 - e^{x/3})$, que es decreciente ya que la exponencial es creciente, luego como es continua, $|g'(s)| \leq |g_4'(-1)| = \frac{1}{6}(3 - e^{-1/3}) \approx 0'38 < 1$

Luego $\exists I \subset [-1,0]$ entorno desde donde el método de iteración funcional $g_4(x_n) = x_{n+1}$ converge

d) Como solo converge uno pues ese. Pero basta saber que a mayor derivada antes converge, hay que buscar una buena cota. Otra forma es comparar derivadas pero Probamos con g_1 y g_4

$g_1'(x) = \frac{-e^{x/3}}{3}$, $|g'(s)| < |g_1'(-1)| = \frac{e^{-1/3}}{3} < \frac{1}{3}$ pero $|g_1'(-1)| \leq |g_4'(-1)|$ luego g_4 es más rápido.

e) Lo hacemos solo para $g_4(x) = \frac{x - e^{x/3}}{2}$

$$\hat{x}_n = \frac{\Delta(x_n)^2}{\Delta^2(x_n)} = \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)}$$

x_n	$x_{n+1} - x_n$	x_n'
-0'5		x_0
-0'673240862		
-0'06287186		
0'0383001767		x_0'
-0'5255743724		
-0'3960977429		

14. Supongamos que se modifica el método de bisección cambiando el punto de división del intervalo por el valor $a + \frac{b-a}{3}$ (porque se cree que la solución está más cerca del extremo a). ¿Es convergente dicho método? ¿Cuál es la cota del error absoluto después de n iteraciones?

Para estudiar la convergencia, nos basamos en la sucesión de amplitudes $\{\ell_n\}:= b_n - a_n$, amplitud del intervalo $[a_n, b_n]$ en la iteración $n \geq 0$, como $m_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{3} = a_n - \frac{\ell_n}{3}$ es fácil ver que $|\varepsilon_n| = |m_n - s| \leq \max\{\frac{\ell_n}{3}, \frac{2\ell_n}{3}\}$, donde b formamos el caso en el que $a_n = m_{n-1}$ o $b_n = m_{n-1}$ pero, en todo caso, $\ell_n \leq \frac{2}{3}\ell_{n-1} \leq (\frac{2}{3})^2 \ell_{n-2} \leq \dots \leq (\frac{2}{3})^n \ell_0 = (\frac{2}{3})^n (b-a)$ luego la cota del error es

$$|\varepsilon_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(b-a) \qquad \text{¿por qué +1?}$$

Es decir, sigue siendo convergente para funciones continuas

16. Sea $D = \prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i]$ y sea $G : D \to \mathbb{R}^k$ con $G = (g_1, \dots, g_k)$ tal que $G \in \mathcal{C}^1(D)$. Demuestre que si existe $L \in]0, 1[$ tal que $\forall i, j = 1, \dots, k$ se verifique $\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right| \leq \frac{L}{k}$ $\forall x \in D$, entonces G es contráctil. Sugerencia: considere la norma $|| \cdot ||_1$ o $|| \cdot ||_\infty$.

Vamos a buscar probar que

$$\|g(y) - g(x)\|_1 \leq L\|y-x\|_1 \qquad \text{(da igual la norma usada)}$$

Como $g \in \mathcal{C}^1(D)$, sabemos que g es derivable luego dispone de matriz jacobiana cumpliendo que, para $x, y \in D$

$$\lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = Jg(x)$$

tomando normas vemos que $\lim_{y\to x} \left\|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right\|_1 = \|Jg(x)\|_1$ luego $\left\|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right\| \leq \|Jg(x)\|_1$ pero

$$\|Jg(x)\|_1 = \max\left\{\sum_{i=0}^{k}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|\right\} = L$$

Luego tenemos que

$$\left\|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right\|_1 = \frac{\|g(y)-g(x)\|}{\|y-x\|} \leq L \iff g \text{ es contráctil pues } L<1$$

17. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{x^2-y^2}{2} - x + \frac{7}{24} & = & 0 \\ xy - y + \frac{1}{9} & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, 0.4] \times [0, 0.4]$.

b) Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

c) Calcule, tomando $x_0 = (0.1, 0.2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

a) Para ello, tratamos de probar que la función dada por $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ donde

$$g_1(x) = \frac{x^2-y^2}{2} + \frac{7}{24}$$

$$g_2(x) = xy + \frac{1}{9}$$

es contráctil y lleva $g(D) \subset D$

Probamos primero que $g(D) \subset D$, para ello, basta ver que $g_1(x,y) \in [0, 0'4]$ y $g_2(x,y) \in [0, 0'4]$ $\forall x, y \in D$

$g_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} + \frac{7}{24}$, pero $x^2-y^2 \in [-0'16, 0'16]$ luego $\frac{x^2-y^2}{2} \in [-0'08, 0'08]$, entonces $g_1(x,y) \in [0, 0'4]$ (sumar $\frac{7}{24}$)

$g_2(x,y) = xy + \frac{1}{9}$, sabemos que $xy \in [0, 0'16]$ luego, como $\frac{1}{9} < \frac{1}{5} \Rightarrow g_2(x,y) \in [0, 0'4]$

Por tanto, $g(D) \subset D$. Para ver que g es contráctil, como g es continua y con derivadas parciales continuas, calculamos su jacobiana

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Luego $\|Jg(x,y)\|_1 = |x|+|y|$, como $x, y \in [0, 0'4] \Rightarrow x+y \in [0, 0'8]$ luego $\exists! \, S \in D$ tal que $g(S) = S$ además, el método iterativo $X_{n+1} = g(X_n)$ converge $\forall X_0 \in D$

c) Sabemos, que el método de Newton-Raphson para matrices es:

$$X_{n+1} = X_n - JF^{-1}(X_n) \cdot F(X_n)$$

Por tanto, calculamos los elementos necesarios sabiendo que $F \in C^1(D)$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} x-1 & -y \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_n-1 & -y_n \\ y_n & x_n-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{x_n^2-y_n^2}{2} - x_n + \frac{7}{24} \\ x_n y_n - y_n + \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 0'10738556209 \\ 0'12509 80392 \end{pmatrix} \dots$$

18. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x - xy & = & \frac{1}{16} \\ x^2 - y & = & -\frac{1}{8} \end{array}\right\}$$

a) Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, \frac{1}{8}] \times [0, \frac{1}{4}]$.

b) Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

c) Calcule, tomando $x_0 = (0.1, 0.2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

a) Sea $g_1(x,y) = xy + \frac{1}{16}$ y $g_2(x,y) = x^2 + \frac{1}{8}$ $\forall x, y \in D$, veamos la contractibilidad y que $g(D) \subset D$

$$g_1(x,y) = xy + \frac{1}{16}, \quad xy \in [0, \tfrac{1}{32}] \Rightarrow xy + \tfrac{1}{16} \in [0, \tfrac{3}{32}] \subset [0, \tfrac{1}{8}]$$

$$g_2(x,y) = x^2 + \frac{1}{8}, \quad x^2 \in [0, \tfrac{1}{64}] \Rightarrow x^2 + \tfrac{1}{8} \in [0, \tfrac{9}{64}] \subset [0, \tfrac{1}{4}]$$

Luego $g(D) \subset D$, veamos ahora la contractibilidad de g sabiendo que $g \in C^1(D)$

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Usando la norma de la suma $\|Jg(x,y)\| = \max\{|y+2x|, |x|\}$, pero $y+2x > x \ \forall x,y \in D$ luego,

$\|Jg(x,y)\| = |y+2x| \leq \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} < 1$

Entonces, por el Teorema del punto fijo para vectores $\exists! S \in D \mid g(S) = S$ y tal que el método

$X_{n+1} = g(X_n)$ converge a $S \ \forall x_0 \in D$

c) De nuevo, calculamos $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - xy - \frac{1}{16} \\ x^2 - y + \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-0'2 & -0'1 \\ 0'2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0'1 - 0'1 \cdot 0'2 - \frac{1}{16} \\ 0'1^2 - 0'2 + \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0'8 & -0'1 \\ 0'2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0'0175 \\ -0'065 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1'282 & -0'128 \\ 0'2564 & -1'025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'0175 \\ -0'065 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'0795 \\ 0'1315 \end{pmatrix}$$

Para x_2 se haría igual