1. Sea $R \in \mathbb{R}^+$ y $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$, no constante. Probar que la función $M :]0,R[\to \mathbb{R}$ definida por

$$M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0,r)^*\} \qquad \forall r \in]0,R[$$

es estrictamente creciente.

Supongamos que M no es estrictamente creciente para llegar a contradicción. Como M no es estrictamente creciente entonces $\exists\, 0<r_1<r_2<R$ tal que $M(r_1) \geq M(r_2)$

$$M(r_1) = \max\{|f(z)| : z \in C(0,r_1)^*\}$$

$$M(r_2) = \max\{|f(z)| : z \in C(0,r_2)^*\}$$

Es decir, hemos encontrado un máximo relativo de $|f|$. Como $f \in \mathcal{C}(\overline{D}(0,r_1))$ y $D(0,r_1) \subset D(0,r_2)$ se tiene que, por el principio del módulo máximo, f es constante en $D(0,r_2)$. Ahora, usando el principio de identidad sobre $D(0,r_2)$ se tiene que f es constante en $D(0,R)$!!

5. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r \in]0,1[$ se tiene

$$\text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\} = r^n$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

Vamos a probar primero que f tiene un cero en el origen. Sea $r \in]0,1[$, sabemos que para $z \in C(0,r)$ se tiene que, por hipótesis,

$$|f(z)| \leq |z|^n$$

Luego tomando la sucesión $z_k = \frac{1}{k}$ se tiene que, como f es continua $\{f(z_k)\} \longrightarrow f(0)$ entonces $f(0)=0$.

Como f no es idénticamente nula, por el teorema de los ceros de funciones holomorfas tenemos que $\exists g \in H(D(0,1))$ de manera que $f(z) = z^k g(z)$ $\forall z \in D(0,1)$, con $g(0) \neq 0$

Habiendo probado ya que $k=n$, debemos ver que g es constante en $D(0,1)$, pero para ello basta ver que $h(z) = \frac{f(z)}{z^n}$ es constante. Sabemos que $h \in H(D(0,1)\setminus\{0\})$, pero sabemos que

$$\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{f(z)}{z^n} = \lim z \cdot \frac{z^k g(z)}{z^k} = 0$$

luego, como $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tenemos que $h \in \mathcal{H}(D(0,1))$ por el Tª de Extensión de Riemann. Sabemos por una parte que $|h(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|^n} \leq \frac{|r|^n}{|z|^n} = 1$ si $|z| = r$ luego basta ver que $\{\frac{1}{n}\}$ nos lleva al máximo relativo pues f es continua luego

$$z_n \to 0 \Rightarrow |h(z_n)| \longrightarrow |h(0)|$$

pero

$$|h(0)| = \lim_{n\to\infty} |h(z_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|f(z_n)|}{|z_n|^n} = \frac{(\frac{1}{n})^n}{(\frac{1}{n})^n} = 1$$

Entonces, aplicando ahora el principio del módulo máximo tenemos que h es constante, es decir, $g(z) = \text{cte}$ con $\text{cte} \in \mathbb{T}$ pues ya vimos que el máximo se encuentra en la frontera.

6. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ verificando que

$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Probar que f es constante.

Sea $z \in D(0,1)$ y formamos la sucesión $\{z_n\} := \{z^{2n}\}$ entonces, aplicando la hipótesis que tenemos

$$|f(z_n)| \leq |f(z_{n+1})|$$

luego, como f es continua, sabiendo que $\{z_n\} \longrightarrow 0$ es claro que $\{|f(z_n)|\} \longrightarrow |f(0)|$ es decir $|f(0)| \geq |f(z)|$. Pero $z \in D(0,1)$ era arbitrario entonces aplicando el principio del módulo máximo conseguimos probar que f es constante.

8. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que, si la función $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

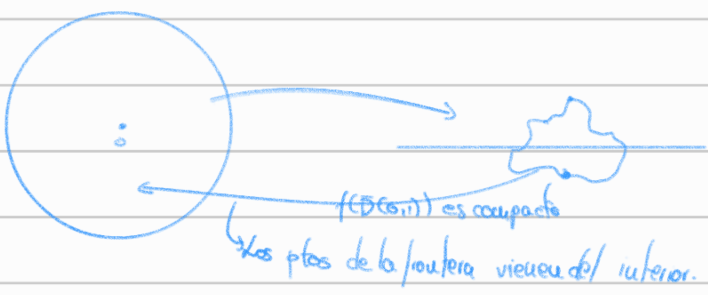
Definimos $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ por $e^{f(z)}$, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$

$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \Rightarrow |g|$ tiene un extremo relativo en Ω — la exponencial es monótona

- Si hay un mínimo relativo, tenemos que g es constante pues g no se anula. Entonces f es constante en Ω
- Si hay un máximo relativo, tenemos que g es constante por el principio del módulo máximo $\Rightarrow f$ cte.

Por tanto, f es constante.

9. Sea $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$, tal que $\operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{T}$. Probar que f es constante.



Suponemos que f no es constante; como $f(\overline{D}(0,1))$ es compacto, entonces $\exists$ $\alpha = \min\{\mathrm{Im}\, f(z), z \in \overline{D}(0,1)\}$ y $\beta = \max\{\mathrm{Im}\, f(z) : z \in \overline{D}(0,1)\}$

- Si $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, f$ cte en $D(0,1) \overset{C\text{-}R}{\Rightarrow}$ f es constante en $D(0,1)$ y por continuidad es constante en $\overline{D}(0,1)$!!
- Si $\alpha \neq 0$ ó $\beta \neq 0$, sin perder generalidad $\alpha \neq 0$. Tomamos $z_0 \in \overline{D}(0,1) \mid \mathrm{Im}\, f(z_0) = \alpha$, entonces $z_0 \in D(0,1)$ entonces $f(z_0)$ es un punto interior por la aplicación abierta y f no es constante. Es decir, $\exists r > 0 \mid D(z_0, r) \subset D(0,1)$ es decir $\exists z_1 \in D(0,1) \mid \mathrm{Im}\, f(z_1) < \alpha$!!