5. Se clasifican los cráneos en dolicocéfalos (si el índice cefálico, anchura/longitud, es menor que 75), mesocéfalos (si el índice está entre 75 y 80), y braquicéfalos (si el índice es superior a 80). Suponiendo que la distribución de los índices es normal, hallar la media y la desviación típica en una población en la que el 65% de los individuos son dolicocéfalos, el 30% mesocéfalos y el 5% braquicéfalos.

Sea $X$ una v.a que determina el índice cefálico de una población. Entonces sabemos que

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} \cdot P[X \leq 75] = 0'65 \\ \cdot P[75 \leq X \leq 80] = 0'3 \end{array}\right\} P[X \leq 80] = 0'95$$

$$\cdot P[80 \leq X] = 0'5$$

Realizando el proceso de tipificación obtenemos que

$P[X \leq 75] = P\left[Z \leq \frac{75-\mu}{\sigma}\right] = 0'65$. Interpolando, pues $P[Z \leq 0'38] = 0'64803 \wedge P[Z \leq 0'39] = 0'65173$

obtenemos $y = a + bx$ tal que

$$\left\{\begin{array}{l} 0'64803 = a + b0'38 \iff a = 0'64803 - 0'38b \; ; \; a = 0'50743 \\ 0'65173 = a + b0'39 \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$0'65173 = 0'64803 - 0'38b + 0'39b = 0'64803 + 0'01b$$

$$\Updownarrow$$

$$0'0037 = 0'01b \; ; \; b = 0'37$$

$$y = 0'50743 + 0'37x \quad (\text{despejo } x)$$

Luego obtenemos que $\frac{75-\mu}{\sigma} = 0'385324$.

1 $\quad 75 - \mu = 0'385324\sigma$

Usando la condición de que $P[X \leq 80] = 0'95$ hacemos el mismo proceso.

$$P[X \leq 80] = P\left[Z \leq \frac{80-\mu}{\sigma}\right] = 0'95 \iff \frac{80-\mu}{\sigma} = 1'65$$

2 $\quad 80 - \mu = 1'65\sigma$

Luego nuestro sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} 75 = 0'385324\sigma + \mu \\ 80 = 1'65\sigma + \mu \end{array}\right. \iff 75 - 0'385324\sigma = \mu \; , \; \boxed{\mu = 73'47659}$$

$$\Downarrow$$

$$80 = 1'65\sigma + 75 - 0'385324\sigma$$

$$5 = 1'264676\sigma \; ; \; \sigma = 3'95358$$

función de distrib de una exponencial

6. La probabilidad de contagio por unidad de tiempo viene dada por:

función de distribución determina la distribución al completo

$$P[T \leq 1] = 1 - \exp(-\lambda), \quad \lambda = 5. \rightarrow \text{distrib exponencial}$$

↳ tiempo hasta el próximo éxito

Calcular :

a) El número medio de nuevas infecciones, sobre la población de susceptibles, cuyo tamaño observado es de 50 individuos, e indicar la distribución aleatoria de la variable que contabiliza las nuevas infecciones en dicha población.

b) Calcular la probabilidad de que se produzcan 10 contagios en un intervalo de tiempo de longitud 10 unidades temporales. Determinar la distribución de probabilidad de dicha variable aleatoria, así como el número medio de contagios en dicho intervalo temporal.

c) Calcular la probabilidad de que no se produzcan contagios en un intervalo de longitud 20 unidades temporales, así como el tiempo medio transcurrido entre contagios.

a) $T \sim exp(5)$

$X \equiv$ nº infectados $\sim B(50, p)$

$\mathcal{E}[X] = 50p$ ↳ no lo puedo saber

$X \equiv$ nº de individuos contagiados en 1 unidad de tiempo   b)

a) $\mathcal{E}[X] = \lambda = 5$   { Está mal, es una binomial

$X \sim P(5)$

b) $Y \equiv$ nº de individuos contagiados en 10 unidades temporales

$\lambda = 5 \cdot 10 = 50 \Rightarrow Y \sim P(50)$

$P(Y=10) = 5'19 \cdot 10^{-12}$

c) $Z \equiv$ nº contagios en 20 unidades temporales   Tomamos $\lambda = 5$

$\rightarrow P(T > t)$

$\lambda = 5 \cdot 20 = 100$, $Z \sim P(100)$

$P(Z=0) = e^{-100} = 3'72 \cdot 10^{-44}$

$\mathcal{E}[Z] = \frac{1}{\lambda} = 1'5$

9. El número de piezas defectuosas diarias en un proceso de fabricación se distribuye según una Poisson. Sabiendo que el número medio de piezas defectuosas diarias es 25, calcular mediante la aproximación normal:

a) Probabilidad de que el número de defectuosas durante un día oscile entre 24 y 28.

b) Número máximo de defectuosas que con probabilidad 0.97725 se fabrican al día.

c) Número mínimo de defectuosas que con probabilidad 0.15866 se fabrican al día.

Sea $X$ una v.a que representa el número de piezas defectuosas (en un día)

$X \sim P(\lambda=25)$

Como nos pide aproximar por una normal, sabemos que $X \sim P(\lambda=25) \cong N(25,25)$.

a) $P[24 \leq X \leq 28] = P[X \leq 28] - P[X<24] \underset{cc}{=} P[X \leq 28'5] - P[X \leq 23'5] \underset{tip}{=} P[Z \leq \frac{28'5-25}{5}] - P[Z \leq \frac{23'5-25}{5}] =$

$= P[Z \leq 0'7] - P[Z \leq -0'3] = P[Z \leq 0'7] - (1 - P[Z \leq 0'3]) = P[Z \leq 0'7] - 1 + P[Z \leq 0'3] = 0'75804 - 1 + 0'61791 = 0'37595$

b) $P[X \leq x] = 0'97725$ falta aplicar la corrección

$P[X \leq x] = P[Z \leq \frac{x-25}{5}] = 0'97725 \iff 0'2 = \frac{x-25}{5} \iff x = 0'2 \cdot 25 + 25 = 35$

¡Y hay que tipificar! Estamos en discretos

Falta aplicar corrección

c) $P[X \geq x] = 0'15866 \iff 1 - P[X \leq x-1] = 0'15866 \iff P[X \leq x-1] = 0'84134$

$P[X \leq x-1] = P[Z \leq \frac{x-25}{5}] = 0'84134 \iff 0'1 = \frac{x-25}{25} \iff x = 0'1 \cdot 25 + 25 =$

$x+0'5-25$

15. Si la proporción de personas que consumen una determinada marca de aceite de oliva sigue una distribución beta de parámetros 2 y 3, determinar la probabilidad de que dicha proporción esté comprendida entre el 0.1 y 0.5.

Sea $X$ la v.a que determina la proporción de personas que consumen una marca de aceite

$X \sim \beta(2,3)$

$P[0'1 \leq x \leq 0'5] = P[X \leq 0'5] - P[X \leq 0'1] = 0'42 \leftarrow$ Cuadra

$P[X \leq 0'5] = f_X(0'5) = \int_{0'1}^{0'5} \frac{}{\beta(2,3)} \; 0'5(1-0'5)^2 = 12 \cdot 0'5 \cdot 0'5^2 = \frac{3}{2}$ Algo no cuadra

$\beta(2,3) = \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \int_0^1 x(1-2x+x^2)dx = \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$ ✓

$P[X \leq 0'1] = 12 \cdot 0'1 (1-0'1)^2 = 12 \cdot 0'1 \cdot 0'9 = 1'08$ Claro

$P[0'1 \leq x \leq 0'5] \int_{0,1}^{0'5} \frac{1}{\beta(2,3)} x(1-x)^2 dx$

1. La llegada de viajeros a una estación de tren se distribuye uniformemente en el tiempo. Cada 20 minutos se produce la salida del tren. Hallar:

   a) La función de distribución de la variable aleatoria tiempo de espera, su media y su varianza.

   b) La probabilidad de que un viajero espere al tren menos de 7 minutos.

a) Sea $X$ la v.a que representa el tiempo de espera para cada tren.

¿Cómo identifico la distribución?

Exponencial $\lambda = 20$ minutos $\qquad E[\ ] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{20}$

$P[\ <7] = (1-e^{+\lambda x})$ ?

2. La temperatura media diaria en una región se distribuye según una normal con media 25 grados centígrados y desviación típica 10 grados centígrados.

   a) Calcular la probabilidad de que en un día elegido al azar la temperatura media esté comprendida entre 20 y 32 grados centígrados.

   b) Calcular la probabilidad de que en un día elegido al azar la temperatura media difiera de la media de las temperaturas medias diarias más de 5 grados centígrados.

$X$ = temperatura media diaria en una región

$X \sim N(25, 10^2)$

a) $P[20 \leq X \leq 32] = P[X \leq 32] - P[X \leq 20] = P[Z \leq 0'7] - P[Z \leq -0'5] = P[Z \leq 0'7] - (1 - P[Z \leq 0'5]) =$

$= 0'75804 - 1 + 0'69146 = 0'4495$

b) $P[X \leq 20] + P[X \geq 30] = (1 - P[Z \leq 0'5]) + (1 - P[Z \leq 0'5]) = 0'61708$

3. De una variable aleatoria uniformemente distribuida se conoce su esperanza, $\mu$, y su desviación típica, $\sigma$. Hallar el rango de valores de la variable, en función de $\mu$ y $\sigma$. ¿?

Sabemos que $X \sim U(a,b)$

Sabemos que $\mu = m_1 = E[X] = \dfrac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \iff 2\mu(b-a) = (b+a)(b-a)$

$2\mu = b+a$ ; $\boxed{b = 2\mu - a}$

De la misma forma, $Var[X] = \sigma^2 = \mu_2 - \mu^2 = -\mu^2 + \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \Leftrightarrow \mu^2+\sigma^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ba+a^2)}{3\cancel{(b-a)}}$

$$3(\mu^2+\sigma^2) = (2\mu - a)^2 + (2\mu - a)a + a^2 = 4\mu^2 - 4\mu a + \cancel{a^2} + 2\mu a - \cancel{a^2} + a^2 = 4\mu^2 - 2\mu a + a^2$$

$$+3\sigma^2 = \mu^2 - 2\mu a + a^2$$

$$0 = \mu^2 + 3\sigma^2 - 2\mu a + a^2$$

4 Los precios de venta de un artículo se distribuyen según una ley normal. Se sabe que el 20% son superiores a 1000 euros y que el 30% no superan los 800 euros. Hallar la ganancia media y su desviación típica, si las ganancias (Y ) están relacionadas con los precios (X) según la expresión $Y = 350 + 0.15X$.

X = los precios de venta de un artículo

Y = ganancias de la venta

Sabemos que $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$

- $P[X \leq 800] = 0'3$
- $P[X > 1000] = 0'2 \Leftrightarrow P[X \leq 1000] = 0'8$

A su vez, $Y = b + aX$

Si $P[X \leq 800] = 0'3 \Rightarrow P[X > 800] = 1 - P[X \leq 800] = 0'7 \Rightarrow P[Z > \frac{800-\mu}{\sigma}] = 0'7$.

- $P[X \leq 0'25] = 0'59871 \wedge P[X \leq 0'26] = 0'60257 \Rightarrow$ por interpolación

$$\left.\begin{array}{l} 0'59871 = a + 0'25b \\ 0'60257 = a + 0'26b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0'50221 \\ b = 0'386 \end{array}$$

Luego $\frac{800-\mu}{\sigma} = 0'5124 \Leftrightarrow 800 - \mu = 0'5124\sigma \Leftrightarrow \underline{800 - 0'5124\sigma = \mu}$

De la misma manera

$P[X \leq 1000] = P[Z \leq \frac{1000-\mu}{\sigma}] = 0'8$

- $P[Z \leq 0'84] = 0'79955 \wedge P[Z \leq 0'85] = 0'80234 \Rightarrow$ por interpolación

$$\left.\begin{array}{l} 0'79955 = a + 0'84b \\ 0'80234 = a + 0'85b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0'56519 \\ b = 0'279 \end{array}$$

Luego $\frac{1000-\mu}{\sigma} = 0'841612 \Leftrightarrow \underline{1000 - 0'841612\sigma = \mu}$

$\sigma = 607'511$

$\mu = 488{,}711$

Luego, como $\mathcal{E}[Y] = b + a\,\mathcal{E}[\bar{X}]$ obtenemos que la ganancia media es 4 23'306

Usando ahora que $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at) = e^{350t} \cdot e^{at\mu + \frac{(at)^2\sigma^2}{2}}$ obtenemos que

$$M_Y(t) = e^{at\mu + bt + \frac{(at)^2\sigma^2}{2}}$$

Luego derivando y evaluando en 0 obtenemos $Var[Y] = \mathcal{E}[X^2] - \mathcal{E}[X]^2$

10. Un grupo de investigadores ha determinado que el 3% de los individuos afectados por cierto virus fallece. Determinar:

a) La probabilidad de que en una población de 10000 afectados fallezcan más de 100.

b) El número esperado de fallecidos en dicha población.

Es una binomial con $p = 0'03$ y $n = 10000$

a) $P[X \geq 100]$

b) $\mathcal{E}[X] = 300$

11. La experiencia ha demostrado que las calificaciones obtenidas en un test de aptitud por los alumnos de un determinado centro siguen una distribución normal de media 400 y desviación típica 100. Si se realiza el test a un determinado grupo de alumnos, calcular:

a) El porcentaje de alumnos que obtendrán calificaciones comprendidas entre 300 y 500.

b) La probabilidad de que, elegido un alumno al azar, su calificación difiera de la media en 150 puntos como máximo.

$X \equiv$ calificaciones de un test de aptitud.

$$X \rightsquigarrow N(400, 100^2)$$

a) $P[300 \leq X \leq 500] = P[X \leq 500] - P[X \leq 300] = P[Z \leq 1] - P[Z \leq -1] = P[Z \leq 1] - 1 + P[Z \leq 1] =$

$= 0'84134 \cdot 2 - 1 = 0'68268$

b) $P[\bar{X} \leq 100] + P[X \geq 200] = 0'9786$

- $P[X \leq 100] = P[Z \leq -3] = 1 - P[Z \leq 3] = 1 - 0'99865 = 0'00135$

- $P[X \geq 200] = 1 - P[X \leq 200] = 1 - P[Z \leq -2] = P[Z \leq 2] = 0'97725$

14. Una máquina fabrica tornillos cuyas longitudes se distribuyen según una ley normal con media 20 mm y desviación típica 0.25 mm. Un tornillo se considera defectuoso si su longitud no está comprendida entre 19.5 y 20.5 mm. Los tornillos se fabrican de forma independiente.

a) Cuál es la probabilidad de fabricar un tornillo defectuoso?

c) Calcular la probabilidad de que en 10 tornillos fabricados no haya más de dos defectuosos.

d) Cuántos tornillos se fabricarán por término medio hasta obtener el primero defectuoso?

$X \equiv$ longitud de los tornillos fabricados

$$X \sim N(20, 0'25^2)$$

a) $P[19'5 \leq X \leq 20'5] = P[X \leq 20'5] + P[X \leq 19'5] = P\left[Z \leq \frac{0'5}{0'25}\right] + P\left[Z \leq \frac{-0'5}{0'25}\right] = P[Z \leq 2] - P[Z \leq -2]$

$= P[Z \leq 2] - P[Z \geq 2] = P[Z \leq 2] - 1 + P[Z \leq 2] = 0'97725 \cdot 2 - 1 = 0'9545$

b) $Y \equiv$ número de tornillos defectuosos en 10 fabricados

$$Y \sim B(0'9545, 10)$$

$P[Y \leq 2] = \sum_{i=0}^{2} P[Y \leq i]$ (calculadora y palante) $\boxed{\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}}$

c) $Z \equiv$ Nº de tornillos fabricados hasta el primero defectuoso.

$$Z \sim G(0'9545)$$

$$E[Z] = \frac{1-0'9545}{0'9545} = 0'04766$$

13. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus: A, B y C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos tubos con el virus B y cinco con el virus C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $P(|X| < 4)$, siendo $X \sim \mathcal{N}(3, 25)$. La probabilidad de que el virus B produzca la enfermedad es $P(Y \geq 3)$, siendo $Y \sim \mathcal{B}(5, 0.7)$. Por último, la probabilidad de que el virus C produzca la enfermedad es $P(Z \leq 5)$, siendo $Z \sim \mathcal{P}(4)$. Se elige un tubo al azar y al inocular el virus a un animal, contrae la enfermedad. Hallar la probabilidad de que el virus inoculado sea del tipo C.