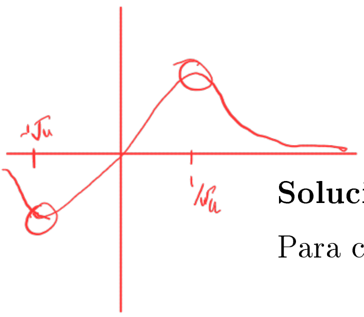
# Análisis Matemático II

## Tema 2: Ejercicios resueltos

**1.** Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo

$$f_n(x) = \frac{x}{n\,(1 + n\,x^2)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

↳ Acotar para que desaparezca la x.




**Solución**

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n$ es derivable en $\mathbb{R}$ con

$|M_n| \to 0$ y el término general de una serie convergente

$$f_n'(x) = \frac{n\,(1 + n\,x^2) - 2\,n^2 x^2}{n^2\,(1 + n\,x^2)^2} = \frac{n\,(1 - n\,x^2)}{n^2\,(1 + n\,x^2)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Vemos que $f'(x) \leq 0$ si $|x| \geq 1/\sqrt{n}$, mientras que $f'(x) \geq 0$ si $|x| \leq 1/\sqrt{n}$. Deducimos claramente que:

- Por una parte, $f_n$ es decreciente en $\left]-\infty\,,\, \frac{-1}{\sqrt{n}}\right]$, con lo cual:

$$0 \geq f_n(x) \geq f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{-1}{2\,n\,\sqrt{n}} \qquad \forall\, x \in \left]-\infty\,,\, \frac{-1}{\sqrt{n}}\right]$$

- Análogamente, $f_n$ es decreciente en $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\, +\infty\right[$, de donde:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\,n\,\sqrt{n}} \qquad \forall\, x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\, +\infty\right[$$

- Finalmente, $f_n$ es creciente en $\left[\frac{-1}{\sqrt{n}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ y obtenemos que

$$\frac{-1}{2\,n\,\sqrt{n}} = f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\,n\sqrt{n}} \qquad \forall\, x \in \left[\frac{-1}{\sqrt{n}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Observando los tres casos anteriores, concluimos que

$$|\,f_n(x)\,| \leq \frac{1}{2\,n\,\sqrt{n}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

serie armónica.

Puesto que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\,n\,\sqrt{n}}$ es convergente, el test de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$. ■

**2.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : [\,1\,,\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g_n(x) = \frac{1}{n^x} \qquad \forall\, x \in [\,1\,,\,+\infty\,[$$

Probar las siguientes afirmaciones:

**(a)** Para $\rho \in \mathbb{R}$ con $\rho > 1$, la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformemente en $[\,\rho\,,\,+\infty\,[$

**(b)** La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[\,1\,,\,+\infty\,[$

**(c)** La serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ no converge uniformemente en $]\,1\,,\,+\infty\,[$

**Solución**

**(a)** Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $x \mapsto n^x = e^{x \log n}$ es creciente en $\mathbb{R}$, de donde deducimos que

$$|\,g_n(x)\,| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^\rho} \qquad \forall\, x \in [\,\rho\,,\,+\infty\,[\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Por ser $\rho > 1$, la serie armónica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\rho}$ es convergente, luego la desigualdad anterior nos permite usar el test de Weierstrass, para concluir que la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformemente en la semirrecta $[\,\rho\,,\,+\infty\,[\,$.

**(b)** Usando de nuevo que la función $x \mapsto n^x$ es creciente, tenemos que

$$|\,g_n(x)\,| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n} \qquad \forall\, x \in [\,1\,,+\infty[\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y como $\{1/n\} \to 0$, deducimos que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[\,1\,,\,+\infty\,[\,$.

**(c)** Razonando ahora por reducción al absurdo, supongamos que la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ convergiese uniformemente en $]\,1\,,\,+\infty\,[\,$.

Fijado $\varepsilon > 0$, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leq p < q$ se tendría

$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^x} < \varepsilon \qquad \forall\, x \in ]\,1\,,\,+\infty\,[$$

Fijados $p, q \in \mathbb{N}$ con $m \leq p < q$, de la desigualdad anterior obtendríamos que

$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n} = \lim_{x \to 1} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^x} \leq \varepsilon$$

Porque es unif de Cauchy
y es $\forall x \in ]1, \infty[$

En resumen, de esta forma habríamos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ m \leq p < q \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

Si la afirmación anterior fuese cierta, la serie armónica $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ sería una sucesión de Cauchy, es decir, dicha serie convergería, lo cual es falso. Esta contradicción prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ no puede converger uniformemente en $]\,1\,,\,+\infty\,[$. ■

**3.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n\,!}{(\,n\,+\,1\,)^{\,n}}\, x^{\,n}$$

No toda cosa con $x^n$ es una serie de potencias. Los coeficientes deben ser constantes y no depender de $x$.

**Solución**

Conviene recordar que la sucesión $\left\{ \left( 1 + \dfrac{1}{n} \right)^{n} \right\}$ es creciente y converge a $e$. En particular, anotamos para uso posterior que

$$\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \leq e \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Denotando por $\{c_n\}$ a la sucesión de coeficientes de la serie dada, que son números positivos, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)\,!\;(\,n\,+\,1\,)^{\,n}}{n\,!\;(\,n\,+\,2\,)^{\,n+1}} = \left( \frac{n\,+\,1}{n\,+\,2} \right)^{n+1} = \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \tag{2}$$

de donde deducimos claramente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\,c_{n+1}\,|}{|\,c_n\,|} = \frac{1}{e}$$

Usando ahora el criterio de la raíz para sucesiones, obtenemos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,c_n\,|} = 1/e\,$. Por tanto, tenemos una serie de potencias con radio de convergencia $e\,$.

Así pues, la serie converge absolutamente en el intervalo abierto $\boxed{J \ =\,]-e\,,\,e\,[}$ y uniformemente en cada conjunto compacto contenido en dicho intervalo. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J}\,$.

Para $x = \pm e$, usando primero (2) y después (1), se tiene claramente que

$$\frac{|\, c_{n+1}\, x^{n+1}\,|}{|\, c_n\, x^n\,|} = e\,\left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1} \geq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

decreciente

Es creciente convergente a e

Esto prueba que la sucesión $\{\,|\, c_n\, x^n\,|\,\}$ es creciente, luego no puede converger a cero. Por tanto, la serie $\sum_{n\geq 0} c_n\, x^n$ no converge en los puntos $e$ y $-e$, luego su campo de convergencia puntual es el intervalo abierto $J$.

Término general no tiende a 0.

Finalmente, estudiamos la convergencia uniforme en $J$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que el término general de la serie converge uniformemente a cero en $J$. Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{\rho_n\}$ de números reales positivos, con $\{\rho_n\} \to 0$, tales que, para $n \geq m$ se tiene

$$c_n\,|\,x\,|^n = |\, c_n\, x^n\,| \leq \rho_n \qquad \forall\, x \in J$$

Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ obtenemos entonces que

$$c_n\, e^n = \lim_{x \to e} c_n\,|\,x\,|^n \leq \rho_n$$

y como $\{\rho_n\} \to 0$, deducimos que $\{c_n\, e^n\} \to 0$. Esto es una contradicción, pues acabamos de ver que la sucesión $\{c_n\, e^n\}$ es creciente, luego no converge a cero. Así pues, el término general de la serie $\sum_{n\geq 0} c_n\, x^n$ no converge uniformemente a cero en $J$, luego dicha serie no converge uniformemente en $J$. ■

Cartera de series convergentes. (Criterio de comparación)

$r^n$ Series geométricas $\longrightarrow$ converge si $r<1$

$\frac{1}{n^\alpha}$ Serie armónica $\longrightarrow$ $\alpha>1$ conv. $\alpha<1$ diverge

Series $\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ $\longrightarrow$ si $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ Log como si no estuviera

$\alpha > 1$ conv.

$\alpha < 1$ diverge

si $\alpha = 1 \Rightarrow$

$\beta > 1$ converge

$\beta \leq 1$ no converge