Ejercicio 2 (2.5 puntos). Sea $E = \{u \in C([0,1]) : u(0) = 0\}$ con la norma usual

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

Consideremos el funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\, dt \qquad \forall u \in E$$

a) Probad que $f \in E^*$ y calculad $\|f\|_{E^*}$.

b) ¿Existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

a) Para probar esto basta ver que f es lineal y acotada:

i) Linealidad; es trivial gracias a la linealidad de la integral

ii) Continuidad; dada $u \in E$, se tiene que

$$|\langle f, u\rangle| = \left|\int_0^1 u(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |u(t)|\,dt \le \int_0^1 \max_{t\in[0,1]} \{|u(t)|\} = \|u\|$$

Por tanto, hemos probado que $f \in E^*$ y, de hecho, que $\|f\| \le 1$, veamos que se alcanza la igualdad; para ello, consideramos la sucesión $\{u_n\} \subset E$ dadas por

$$u_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 1 & \text{si } t \in [1/n, 1] \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Debemos probar que $u_n \in E$ y que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = 1$; lo primero es claro por construcción. Para lo segundo sabemos que

$$f(u_n) = \int_0^1 u_n(t)\,dt = \int_0^{1/n} nt\,dt + \int_{1/n}^1 1\,dt = (1 - 1/n) + \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde $\lim_{n\to\infty} \langle f, u_n\rangle = 1$ probando así que $\|f\|_{E^*} = 1$

b) Lo que se nos pide estudiar es si se alcanza el supremo que define la norma de f; pero veamos que esto no es posible. Supongamos que $\exists u \in E$ tal que $f(u) = 1$; en ese caso, se tendría que

$$\int_0^1 u(t)\,dt = 1 \quad \wedge \quad u(0) = 0$$

Pero como $u : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ y la única función con integral sobre $[0,1]$ definida en $[0,1]$ igual a 1 que sea continua es la función idénticamente 1 se tendría que $u(0) = 1$!!!

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Sea E un espacio de Banach. Probad que si un subconjunto $A \subset E$ es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^*)$, entonces A es acotado.

Para probar que A es acotado trataremos de probar que $f(A)$ es acotado $\forall f \in E^*$; de hecho, lo que usaremos es que, en $\mathbb{R}$ con la topología usual, ser $\sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$-compacto y ser compacto es lo mismo puesto que $\dim(\mathbb{R}) = 1 < \infty$.

Ahora bien, como $f \in E^*$ es continua en la topología $\sigma(E, E^*)$ tenemos que $f(A)$ es compacto en $\mathbb{R}$ con la topología usual de donde $f(A)$ es acotado y $\exists M > 0$ tal que $|f(a)| \le M$ $\forall a \in A$.

Usando ahora ese corolario del principio de acotación uniforme obtenemos que A es acotado.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Sea E un espacio de Banach reflexivo y $K \subset E$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Dotamos a K con la topología débil $\sigma(E, E^*)$ (que hace compacto a K). Sea $F = C(K)$ con la norma uaual. Si $\mu \in F^*$ con $\|\mu\| = 1$ y

$$\langle \mu, u \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in C(K) \quad \text{tal que} \quad u \geqslant 0 \text{ en } K$$

probad que existe un único elemento $x_0 \in K$ tal que

$$\langle \mu, f\big|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \qquad \forall f \in E^*$$

(**Pista:** Encontrad primero $x_0 \in E$ verificando $\langle \mu, f\big|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E^*$ y a continuación probado que $x_0 \in$ usando el teorema de Hahn-Banach).

Veamos qué cosas nos da el problema; lo primero de todo es que F es un espacio de Banach y lo segundo es que, si nos fijamos nos piden probar algo parecido al Teorema de Riesz-Frechet para la representación del dual de un Hilbert.

Puesto que nos dan una pista, vamos a tratar de usarla. Buscamos probar que $\forall \mu \in F^*$ $\exists x_0 \in E$ tal que $\langle \mu, f_{|K} \rangle = \langle f, x_0 \rangle$ $\forall f \in E^*$. Para ello, consideramos la aplicación $L: E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada como sigue $L(f) = \langle \mu, f_{|K} \rangle$; veamos que está bien definida y que $L \in E^{**}$.

i) Para ver que está bien definida basta probar que $\langle \mu, f_{|K} \rangle \in \mathbb{R}$ lo que se reduce a probar que $f_{|K} \in C(K)$. Veamos esto, como $f \in E^*$ tenemos que f es $\sigma(E, E^*)$-continua de donde f es $\sigma(E, E^*)|_K$-continua. Como K es compacto tenemos que $f_{|K}$ es continua sobre un compacto luego $f_{|K} \in C(K)$.

ii) Sean $f, g \in E^*$, ya hemos visto que $f_{|K}, g_{|K} \in C(K)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$L(\lambda f + g) = \langle \mu, (\lambda f + g)_{|K} \rangle = \langle \mu, \lambda f_{|K} + g_{|K} \rangle = \lambda \langle \mu, f_{|K} \rangle + \langle \mu, g_{|K} \rangle$$

obteniendo la linealidad usando que $\mu \in F^*$.

iii) Dado $f \in E^*$ se tiene que

$$|L(f)| = |\langle \mu, f_{|K} \rangle| \leq \|\mu\| \, \|f_{|K}\|_\infty$$

como $\|\mu\| = 1$ tenemos que $|L(f)| \leq \|f_{|K}\|_\infty$ y como K es compacto y f es continua se tiene que $\|f_{|K}\|_\infty < \infty$ obteniendo que L es continua.

Ahora bien, hemos probado que $L \in E^{**}$, como E es reflexivo tenemos que la inyección canónica es sobreyectiva, dando como resultado que $\exists x_0 \in E$ tal que $J_{x_0} = L$ de donde se deduce que, para cada $f \in E^*$ se tiene que

$$\langle \mu, f_{|K} \rangle = L(f) = \langle J_{x_0}, f \rangle = \langle f, x_0 \rangle$$

donde se tiene probada la primera parte de la pista. Probemos ahora que $x_0 \in K$; supongamos que no fuera así; en ese caso podemos considerar los conjuntos $\{x_0\}$ y K para tratar de aplicar la segunda versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. Comprobemos las hipótesis.

i) Claramente, ambos son convexos

ii) K es cerrado por hipótesis y $\{x_0\}$ es, trivialmente, compacto en E.

iii) Por hipótesis, se tiene que $\{x_0\} \cap K = \emptyset$.

Por tanto, podemos aplicar dicho Teorema, obteniendo que $\exists f \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $H = [f = \alpha]$ es un hiperplano cerrado de E que separa $\{x_0\}$ y K obteniendo así que

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \quad \forall x \in K$$

de donde se obtiene que $\alpha - \langle f, x \rangle > 0 \ \forall x \in K$, sin embargo, $\langle f, x \rangle = \langle Jx, f \rangle = \langle \mu, f_{|K} \rangle \ \forall x \in K$ con $\langle \mu, f_{|K} \rangle > 0$ de donde usando la linealidad de μ se tiene que $\alpha \langle \mu, 1 \rangle - \langle \mu, f_{|K} \rangle > 0$ obteniendo que, como $\mu(1) = 1$, $\alpha > \langle \mu, f_{|K} \rangle = \langle f_{|K}, x_0 \rangle$!!!

Por tanto, tenemos ya que $\forall \mu \in F^* \ \exists x_0 \in K$ tal que $\langle \mu, f_{|K} \rangle = \langle f, x_0 \rangle$. Falta por tanto probar la unicidad; para ello, supongamos que $\exists x_0, x_1 \in K$ tales que $\langle f, x_1 \rangle = \langle \mu, f_{|K} \rangle = \langle f, x_0 \rangle \ \forall f \in E^*$; puesto que E es reflexivo tenemos que $\langle f, x_1 \rangle = \langle Jx_1, f \rangle \wedge \langle f, x_0 \rangle = \langle Jx_0, f \rangle \ \forall f \in E^*$ de donde se tiene que $\langle Jx_0, f \rangle = \langle Jx_1, f \rangle \ \forall f \in E^*$ consiguiendo que $Jx_0 = Jx_1$ y como J es biyectiva se tiene que $x_0 = x_1$.