ÍNDICE

Tema 9. Matriz Jacobiana

1. Matriz Jacobiana

1.1. Matrices

Lo único importante a destacar es que el espacio vectorial $M_{M\times N}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{MN}$ y que

$A\times B$ con $A\in M_{N\times M}$ y $B\in M_{M\times P}$

$$\gamma_{ik}=\sum_{j=1}^{M}\beta_{ij}\alpha_{jk} \quad \forall i\in\Delta_P, \forall k\in\Delta_N$$

1.2. El espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$

Sea $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M) \iff A=(a_{jk})\in M_{M\times N}$

$\alpha_{jk}=(\pi_j\circ T)(e_k) \quad \forall j\in\Delta_M, \forall k\in\Delta_N$ con p_k y π_j proyecciones coordenadas.

Si $\mathbb{R}^N\ni x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_N\end{pmatrix}\in M_{N\times 1} \xrightarrow{T} \mathbb{R}^M\ni T(x)=y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_M\end{pmatrix}\in M_{M\times 1}$

Donde T no es más que una matriz que va de $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^M$. Es decir, la matriz A es la matriz de la aplicación lineal.

1.3. Matriz Jacobiana

Sea $A=A^\circ\subset\mathbb{R}^N$, $f=(f_1,\dots,f_M):A\longrightarrow\mathbb{R}^M$. Cuando f es diferenciable en $a\in A$, la matriz jacobiana de f en a es la matriz $J_f(a)\in M_{M\times N}$ de la aplicación lineal $Df(a)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$

Por tanto: $Df(a)(x)=J_f(a)\cdot x \quad \forall x\in\mathbb{R}^N$

Dicha matriz está compuesta de la siguiente manera:

$$J_f(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a)\end{pmatrix}_{M\times N}$$

2. Regla de la cadena

2.1. Derivadas parciales de una composición de funciones

Sean $A = A^{\circ} \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\circ} \subset \mathbb{R}^M$, $f: A \longrightarrow \mathcal{U}$, $g: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^P$, $h = g \circ f: A \longrightarrow \mathbb{R}^P$.

Si f es derivable en $a \in A$ y g es derivable en $f(a) = b \in \mathcal{U}$. Entonces:

$$Jh(a) = Jg(b) \cdot Jf(a)$$

con $f = (f_1, \dots, f_M)$, $g = (g_1, \dots, g_P)$, $h = (h_1, \dots, h_P)$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \qquad \forall i \in \Delta_P, \forall k \in \Delta_N$$

2.2. Cómo se entiende y cómo se recuerda la regla de la cadena.

Como f, g y h se escriben en función de $x \in A$, $y \in \mathcal{U}$, $z \in \mathbb{R}^P$, tomamos:

$$y = f(x), \quad z = g(y), \quad z = g(f(x)) = h(x) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_N) \\ y &= (y_1, \dots, y_M) \\ z &= (z_1, \dots, z_P) \end{aligned}$$

Para cada $j \in \Delta_M$ y cada $i \in \Delta_P$ se tiene:

$$y_j = f_j(x_1, \dots, x_N), \quad z_i = g_i(y_1, \dots, y_M), \quad z_i = h_i(x_1, \dots, x_N)$$

Tomamos como notación:

$\forall k \in \Delta_N, j \in \Delta_M, i \in \Delta_P$, escribimos:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a), \quad \frac{\partial z_i}{\partial y_j}(a) = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a), \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(a)$$

Entonces:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial z_i}{\partial y_j}(a) \frac{\partial y_j}{\partial x_k}(a) \qquad \forall k \in \Delta_N, \forall i \in \Delta_P$$

3. Aplicaciones

3.1. Relación entre rectas tangentes y plano tangente

Tomamos $A = A^\circ \subset \mathbb{R}^2$, A conexo y $f : A \to \mathbb{R}$ continua, $\Sigma = G_f \subset \mathbb{R}^3$ con ecuación $z = f(x,y)$ $\forall (x,y) \in A$. f es diferenciable en $(x_0, y_0) \in A$ y $z_0 = f(x_0, y_0)$, sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tenemos que el plano tangente

$$\pi \equiv (z - z_0) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Tomamos $\mathcal{C}$ una curva paramétrica en $\mathbb{R}^3$, con $P_0 \in \mathcal{C} \subset \Sigma$, $\mathcal{C} = \gamma(J)$ con J intervalo abierto, $\gamma : J \to \Sigma$ continua, $P_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in J$.

Ecs. paramétricas de $\mathcal{C}$:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t)) \quad \forall t \in J$$

γ derivable en t_0 con $\gamma'(t_0) \neq 0 \Rightarrow z'(t_0) = x'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, tiene como recta tangente $r \equiv x = x_0 + t\, x'(t_0)$, $y = y_0 + t\, y'(t_0)$

$$z = z_0 + t\left(x'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \Rightarrow r \subset \pi.$$

3.2. Superficies en forma paramétrica

Sea $A = A^\circ \subset \mathbb{R}^2$ con A conexo y $\Gamma : A \to \mathbb{R}^3$ continua. Entonces:

$\Sigma = \Gamma(A) = \{\Gamma(t,s) \mid (t,s) \in A\}$ es una superficie paramétrica en $\mathbb{R}^3$ con ecuaciones paramétricas:

$$x = x(t,s),\quad y = y(t,s),\quad z = z(t,s) \quad \forall (t,s) \in A \quad \text{con } \Gamma = (x, y, z)$$

Se cumple que si Σ es una superficie explícita, en particular, es paramétrica. Sin embargo, el recíproco es falso.

3.3. Plano tangente a una superficie paramétrica.

Sea $\Sigma = \Gamma(A) \in \mathbb{R}^3$, si Γ diferenciable en $(t_0, s_0) \in A$, $P_0 = \Gamma(t_0, s_0) \in \Sigma$

$$J\Gamma(t_0, s_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial x}{\partial s}(t_0, s_0) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial y}{\partial s}(t_0, s_0) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial z}{\partial s}(t_0, s_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_0, s_0),\ \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t_0, s_0)\right)$$

intervalo $J_1 \ni t_0$, $J_2 \ni s_0$

con $rg(J\Gamma(t_0, s_0)) = 2$. Si nos movemos en un entorno de t_0 y s_0, definimos $\gamma_1(t) = \Gamma(t, s_0)$ $\forall t \in J_1$ y $\gamma_2(s) = \Gamma(t_0, s)$ $\forall s \in J_2$, obteniendo $\gamma_1(J_1)$, $\gamma_2(J_2)$ dos curvas paramétricas $\mid \gamma_1'(t_0) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_0, s_0)$ y $\gamma_2'(s_0) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t_0, s_0)$ linealmente independientes dando lugar al plano tangente a Σ en P_0.

Como definición formal, si $A = A^{\circ} \subset \mathbb{R}^2$ conexo y $\Gamma(x,y,z): A \to \mathbb{R}^3$ continua, con imagen $\Sigma = \Gamma(A)$, si Γ diferenciable en $(t_0,s_0) \in A$ y $J\Gamma(t_0,s_0)$ tiene rango 2, decimos que $P_0 = \Gamma(t_0,s_0)$ es un punto regular de la superficie $\Sigma = \Gamma(A)$. Entonces el plano tangente π a la superficie Σ en el punto $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ es el de ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + (t-t_0)\frac{\partial x}{\partial t}(t_0,s_0) + (s-s_0)\frac{\partial x}{\partial s}(t_0,s_0)$$
$$y = y_0 + (t-t_0)\frac{\partial y}{\partial t}(t_0,s_0) + (s-s_0)\frac{\partial y}{\partial s}(t_0,s_0)$$
$$z = z_0 + (t-t_0)\frac{\partial z}{\partial t}(t_0,s_0) + (s-s_0)\frac{\partial z}{\partial s}(t_0,s_0)$$

3.4. Observaciones sobre el plano tangente

Como π es una superficie paramétrica de $\mathbb{R}^2$, tenemos que $P(t,s) = \Gamma(t_0,s_0) + D\Gamma(t_0,s_0)((t,s)-(t_0,s_0))$ $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$, luego

$$\lim_{(t,s)\to(t_0,s_0)} \frac{\|\Gamma(t,s) - \Gamma(t_0,s_0)\|}{\|(t,s)-(t_0,s_0)\|} = 0$$

Lo que nos presenta una justificación analítica.

Una justificación geométrica sería:

Si J es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$, $\varphi: J \to A$ continua $| (t_0,s_0) = \varphi(\alpha_0)$ con $\alpha_0 \in J \Rightarrow$ definimos que $\gamma = \Gamma \circ \varphi$, $\gamma(J)$ es una curva paramétrica con $P_0 = \gamma(\alpha_0) \in \gamma(J) \subset \Sigma$

Supongamos que φ es derivable en α_0 con $\varphi'(\alpha_0) \neq 0 \Rightarrow$ igual ocurre con $\gamma \Rightarrow$

$$\gamma'(\alpha_0) = J\Gamma(t_0,s_0) \cdot \varphi'(\alpha_0) \neq 0$$ luego P_0 es un punto regular de la curva $\gamma(J)$

y con ecuaciones de su recta tangente r, en forma matricial, son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + J\Gamma(t_0,s_0) \cdot \varphi'(\alpha_0) \cdot (\alpha - \alpha_0) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Para $(x,y,z) \in R$ basta con tomar $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{pmatrix} t-t_0 \\ s-s_0 \end{pmatrix} = \varphi'(\alpha_0) \cdot (\alpha - \alpha_0)$$

para obtener que $(x,y,z) \in \pi$. Luego $r \subset \pi$.

3.5 De vuelta al gradiente de un campo escalar.

Un conjunto de nivel en un campo escalar f con nivel λ es:

$$N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) = \lambda\} \quad \text{con } A = A^\circ \subset \mathbb{R}^N \text{ y } f: A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciable.}$$

Una curva de nivel λ es aquella que está contenida en una superficie de nivel, lo que implica que $(\nabla f(x_0, y_0) \mid \gamma'(t_0)) = 0$ con $\gamma(J)$ curva de nivel del campo f.

Una superficie $\Gamma(A)$ es de nivel del campo f cuando está contenida en un conjunto de nivel, es decir,

$$\left(\nabla f(x_0, y_0, z_0) \mid \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_0, s_0)\right) = \left(\nabla f(x_0, y_0, z_0) \mid \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t_0, s_0)\right) = 0$$

Como último apunte, la regla de la cadena no es cierta para funciones que sólo son parcialmente derivables.