Tema 0.- Preliminares

Asignatura: PROBABILIDAD

©Prof. Dr. José Luis Romero Béjar
©Prof. Dr. Francisco Javier Esquivel Sánchez

Conceptos básicos

Variable aleatoria

Distribuciones de probabilidad discretas

Experimentos aleatorios

Se distinguen dos tipos de fenómenos:

1. Determinísticos: Un fenómenos determinístico es aquel en el que siempre se obtiene el mismo resultado al repetirlo en condiciones similares, de forma que siempre tenemos la seguridad de lo que va a suceder antes de que se produzca (por ejemplo, todos los regidos por las leyes de la Física).
2. Aleatorios o probabilísticos. Un fenómeno aleatorio es un evento cuyo resultado no se puede predecir bajo situaciones similares (por ejemplo, los juegos de azar).

Teoría de la probabilidad

La teoría de la probabilidad es un conjunto de reglas y propiedades que sirven para calcular la probabilidad de un fenómeno aleatorio.

Suceso

Un suceso (o evento) es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Por lo tanto, la probabilidad de un suceso es un valor que indica cuánto de probable es que ocurra un resultado.

Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda hay dos sucesos: Cara y Cruz

Se distinguen diferentes tipos de sucesos:

- **Suceso elemental (o suceso simple)**: cada uno de los posibles resultados del experimento.
- **Suceso compuesto**: aquel formado por dos o más sucesos simples, es decir con dos o más resultados.
- **Suceso seguro**: es un resultado de un experimento aleatorio que siempre va a ocurrir.
- **Suceso imposible**: es un resultado de un experimento aleatorio que nunca va a ocurrir.
- **Sucesos compatibles:** dos sucesos son compatibles cuando tienen en común algún suceso elemental.
- **Sucesos incompatibles:** dos sucesos son incompatibles cuando no comparten ningún suceso elemental.
- **Sucesos independientes:** dos sucesos son independientes si la probabilidad de que suceda uno no afecta a la probabilidad del otro.
- **Sucesos dependientes:** dos sucesos son dependientes si la probabilidad de que suceda uno altera la probabilidad de que ocurra el otro.
- **Suceso contrario a otro:** aquel suceso que tiene lugar cuando no ocurre el otro suceso.

Espacio muestral

El espacio muestral está formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Incluye cada uno de los sucesos elementales.

Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda tendremos $\Omega = \{\text{Cara, Cruz}\}$

σ-álgebra de Boole de sucesos

El conjunto de todos los sucesos, que denotaremos por $\mathcal{A}$, es un conjunto de subconjuntos de Ω al que se exige que tenga estructura σ-álgebra para lo que tiene que ser no vacio y cumplir las siguientes propiedades:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
- $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión infinita de sucesos

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathcal{A}.$$

Definición axiomática de probabilidad de Kolmogorov

Dado un experimento aleatorio con espacio muestral asociado Ω y σ-álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, se define la probabilidad como la siguiente aplicación

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando los siguientes axiomas

- A1 $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- A2 $P(\Omega) = 1$
- A3 Para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ de sucesos disjuntos,

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Espacio de probabilidad – Ejemplo

El **espacio de probabilidad** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ del experimento lanzar un dado será

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \text{par}, \text{mayor que } 4, \ldots\}$
- $P = \{0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/2, 1/3, \ldots\}$

Propiedades elementales de una función de probabilidad

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. **Probabilidad del suceso complementario**: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. **Aditividad finita** para procesos disjuntos: $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$.
4. Probabilidad de la **diferencia**: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
   - Si además, $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, entonces $P(A - B) = P(A) - P(B)$.
5. **Monotonía**: Si $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, entonces $P(B) \leq P(A)$.
6. **Regla de adición**: sean $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. **Principio de inclusión-exclusión** para la unión finita de sucesos no disjuntos.
8. **Subaditividad**: $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.
9. **Desigualdad de Boole**: $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^c)$.

Probabilidad Condicionada. Definición.

Dado $A \in \mathcal{A}$, con $P(A) > 0$, la aplicación $P(\cdot/A) : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$, definida como $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ es una función de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

Al espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot/A))$ se le denomina **espacio de probabilidad condicionado** y, a la función $P(\cdot/A)$ **función de probabilidad condicionada**.

Probabilidad Condicionada (Teoremas).

- **Teorema de la probabilidad compuesta**.
Sean $A_1, \ldots, A_{n-1}$ tales que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$, para todo $A_n \in \mathcal{A}$, entonces se verifica la siguiente identidad:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n/A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

- **Teorema de la probabilidad total**.
Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de sucesos que define una partición de Ω, siendo $P(A_i) > 0$, para $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i).$$

- **Teorema de Bayes**.
Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de sucesos que define una partición de Ω, siendo $P(A_i) > 0$, para $i \in \mathbb{N}$,

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Independencia de sucesos

- Dos sucesos $A, B \in \mathcal{A}$, se dice que son **independientes** si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- Se dice que una clase $\mathcal{C}$, de sucesos, satisface la propiedad de **independencia dos a dos de sucesos** si

$$\forall A, B \in \mathcal{C},\; P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- La propiedad de **independencia mutua de los sucesos de una clase** $\mathcal{C}$ se define como:

$$\forall k \geq 2,\; \forall A_{i_1}, \ldots, A_{i_k} \in \mathcal{C}, \quad P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \prod_{l=1}^{k} P(A_{i_l}).$$

Conceptos básicos

Variable aleatoria

Distribuciones de probabilidad discretas

Variable aleatoria

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, una **variable aleatoria** X es una función

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando que

$$X^{-1}(\infty, a] = \{w \in \Omega : X(w) \in (-\infty, a]\} \in \mathcal{A}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Observaciones:

Por tanto, una variable aleatoria es una función que asigna cada uno de los resultados elementales de un experimento aleatorio un número real con la condición de que la imagen inversa de cada intervalo de la recta real sea un suceso del espacio de probabilidad.

Operaciones con variables aleatorias

- La **suma y diferencia** de dos variables aleatorias **es una variable aleatoria sobre el mismo espacio de probabilidad**. Se define puntualmente mediante la suma y diferencia de los respectivos valores puntuales de las variables aleatorias involucradas.
- El **producto y cociente** (si están bien definidos) de variables aleatorias **es una variable aleatoria sobre el mismo espacio de probabilidad**. Se define puntualmente mediante el producto y cociente de los respectivos valores puntuales de las variables aleatorias involucradas.
- El **máximo**, el **mínimo** y el **módulo** de una variable aleatoria también son **variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad**. También se definen, **puntualmente**, como el máximo, mínimo o módulo de los respectivos valores puntuales de las variables aleatorias involucradas.

Tipos de variables aleatorias

Se distinguen, según su naturaleza, dos tipos de variables aleatorias:

- Variables aleatorias **discretas**.
- Variables aleatorias **continuas**.

Función de probabilidad de una variable aleatoria

A partir de la definición anterior se deduce una función de probabilidad sobre la recta real que permite calcular probabilidades de que la v.a. X tome valores en cualquier subconjunto A de número reales:

$$P_X(X \in A) = P(w \in \Omega : X(w) \in A) = P(X^{-1}(A)).$$

Función de distribución de una variable aleatoria

Una función $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

se dice que es **función de distribución** de la variable aleatoria X.

Satisface las siguientes propiedades:

- Monótona no decreciente.
- Continua a la derecha.
- $\exists \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, y $\exists \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Cálculo de probabilidades en intervalos

La distribución de probabilidad de un intervalo se puede calcular a partir de la función de distribución asociada a la variable aleatoria.

- $P_X([a,b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$
- $P_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P_X([a,b)) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
- $P_X((a,b)) = F_X(b^-) - F_X(a)$.
- $P(X > a)) = 1 - F_X(a)$.

Notación

- $F_X(a^-) = P[X < a]$.
- $F_X(b^-) = P[X < b]$.

Variables aleatorias discretas

Dada un v.a discreta con $Rx = \{x_1, x_2, ..., x_i, ...\}$, su **función masa de probabilidad** (f.m.p.) asigna a cada x_i una probabilidad $p_i = P(X = x_i)$ verificando

- $0 \leq p_1 \leq 1, \quad \forall i = 1, ..., \infty.$
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

Observaciones:

- Al conjunto de pares $\{(x_i, p_i) : i = 1, ..., \infty\}$ se le denomina distribución de probabilidad de la v.a. X.
- La probabilidad de la v.v.a X tome valores en cualquier subconjunto A de puntos de su recorrido es de la forma

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i.$$

Variables aleatorias discretas

La **función de distribución** de un v.a discreta con viene dada por su función masa de probabilidad de la siguiente forma:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Observaciones:

- La función de distribución de una variable discreta es un función escalonada no decreciente.
- La función masa de probabilidad se puede calcular en términos de la función de distribución

$$p_i = F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x) - F(x^-).$$

Variables aleatorias continuas

Dada una variable aleatoria continua X, se define su **función de densidad** $f(x)$ como una aplicación $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(i) $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx = 1$,

(iii) $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_x dx$.

Observaciones:

- La probabilidad de que una v.a. continua tome un valor aislado es 0.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$.

Variables aleatorias continuas

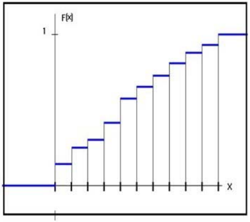
La función de distribución de una v.a. continua $F(x)$ se obtiene como

$$\int_{-\infty}^{x} f_s ds \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

como consecuencia la función de densidad se obtiene derivando la función de distribución; es decir, $f(x) = F'(x) \quad \forall x$ donde F sea diferenciable.

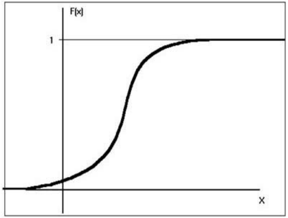
Gráficas de funciones de distribución discretas y continuas

$P(X \leq x) = F(x)$



Caso discreto

Continua por la derecha



Caso continuo

Continua por ambos sentidos

Esperanza matemática

La esperanza matemática o valor esperado de una v.a. se denota por $E[X]$ se se define como

- Caso discreto: $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ si $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$.
- Caso continuo: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$.

Algunas propiedades de la esperanza matemática. Dadas X e Y v.a.:

- Esperanza matemática de una función de una v.a.
  Sea $H(x)$ una función real de una variable real tal que $Y = H(X)$ es una variable aleatoria real. La esperanza matemática viene dada por
  - Caso discreto: $E[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} H(x_i) p_i$.
  - Caso continuo: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f(x) dx$

Esperanza matemática

Algunas propiedades de la esperanza matemática. Dadas X e Y v.a.:

- La esperanza matemática de una variable que toma un valor constante es ese valor.
- Linealidad. Dada X una v.a. con esperanza finita y a y b números reales cualquiera, entonces $E[aX+b]=aE[X]+b$.
- Si $X_i, X_2, ..., Xn$ son vv.aa. con esperanzas finitas, entonces

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

.

- Dadas n vv.aa. definidas como funciones reales $H_i(X_i)$ $(i=1,2,...,n)$ la esperanza de su suma es la suma de las esperanzas

$$E[\sum_{i=1}^{n} H_i(X_i)] = \sum_{i=1}^{n} E[H_i(X_i)]$$

.

Momentos

Los momentos son un conjunto de medidas que resumen propiedades importantes de la distribución y que la caracterizan. En general se define como

$$M_r = E[(X-O)^r] \text{ si } E[|(X-O)^r|] < \infty$$

siendo r el orden y O el origen fijado del momento.

Momentos respecto al origen o no centrados

Son los momentos de orden r en los que O es 0, se definen como $\alpha_r = E[X^r]$. Como caso particular se tiene $\alpha_1 = E[X]$.

Momentos centrados respecto a la media

Son los momentos de orden r en los que O es $E[X] = \mu$, se definen como $\mu_r = E[(X-\mu)^r]$. Como casos particulares se tienen:

- $r = 1 \quad \mu_1 = 0$.
- $r = 2 \quad \mu_2 = Var(X)$.

Función generatriz de momentos

La **función generatriz de momentos** (f.g.m.) de una variable aleatoria X es

$$M_X(t) = E[e^{tX}], t \in \mathbb{R},$$

siempre que esta esperanza exista. Su forma de cálculo es la siguiente:

- Caso discreto: $M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} P[X = x_i]$.
- Caso continuo: $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_i} f(x_i) dx$.

Observaciones:

- Los momentos no centrados se obtienen derivando la f.g.m.

$$M_X^{n)}(0) = E[X^n] = \alpha_n.$$

- La f.g.m. es única y determina unívocamente la distribución de probabilidad de la v.a. X.
- Sea X una v.a. con f.g.m. $M_X(t)$, e $Y = aX + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$. Entonces:

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at).$$

Conceptos básicos

Variable aleatoria

Distribuciones de probabilidad discretas

Distribución Uniforme Discreta

Una v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, cuyos valores posibles son $x_1, x_2, \because x_n$ con probabilidad $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \cdots, n$, se dice que sigue una **Distribución Uniforme** en n puntos. **Denotamos**

$$X \sim \mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}$$

- **Función de distribución**:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{i-1}{n} & x_{i-1} \leq x < x_i,\ i = 2, \ldots, n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

- **Función generatriz de momentos**: $M_X(t) = \frac{\sum_{i=1}^n e^{tx_i}}{n}$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Momentos**: $m_k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}$ y $\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^k}{n}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- **Esperanza matemática de una función medible**: $E[g(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$.
- **Casos especiales** $E[X] = \overline{X}$, y $\mathrm{Var}(X) = S^2$, denotando, como es usual, por S^2 la varianza muestral.

Distribución de Bernoulli

Una v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que sigue una **Distribución Bernoulli** de parámetro p si y solo toma los valores 0 y 1 con probabilidades $1-p$ y p respectivamente. **Denotamos**

$$X \sim B(1, p), 0 < p < 1$$

- **Función Masa de Probabilidad**: $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$
- **Función de Distribución**:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = pe^t + (1-p)$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Momentos**: $m_k = p$, y $\mu_k = (1-p)^k p + (-p)^k(1-p)$, para $k \in \mathbb{N}$.
- **Media**: $E[X] = p$.
- **Varianza**: $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

Distribución Binomial

Una variable aleatoria, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, asociada al **número de éxitos de un experimento aleatorio que se repite un número finito de veces con probabilidad de éxito,** p**, constante** se dice que sigue una **Distribución Binomial** de parámetros n y p, $0 < p < 1$. **Denotamos**

$$X \sim B(n, p), n \in \mathbb{N}$$

.

- **Función Masa de Probabilidad**:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}; x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$, $t \in \mathbb{R}$.
- $E[X] = np$.
- $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.
- Si consideramos que X está asociada **al número de fracasos**, entonces la distribución de probabilidad es, $X \sim B(n, 1-p) \quad n \in \mathbb{N}$.

Distribución de Poisson

Una variable aleatoria, asociada a la **ocurrencia de un número determinado de eventos durante cierto periodo de tiempo** (con probabilidad de ocurrencia pequeña) se dice que sigue una **Distribución de Poisson** de parámetro λ. **Denotamos**

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), (\lambda > 0)$$

También es conocida como **Ley de los sucesos raros**.

- λ expresa la frecuencia media de ocurrencia de un evento, esto es, el número de veces que se espera que ocurra el evento durante un intervalo de tiempo dado.
- **Función Masa de Probabilidad**: $P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$
- **Aproximación mediante el modelo Binomial**: Cuando el número n de pruebas de Bernoulli tiende a ser infinito para un suceso con escasa probabilidad de ocurrencia, la distribución Binomial aproxima a una distribución de Poisson (ley de los sucesos raros).
- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Media y Varianza**: $E[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Distribución Geométrica

Una variable aleatoria, asociada al **número de fracasos, en sucesivas repeticiones independientes de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito** p, **antes de que ocurra el primer éxito** se dice que sigue una **Distribución Geométrica** de parámetro p, $(0 < p < 1)$. **Denotamos**

$$X \sim \mathcal{G}(p), (0 < p < 1)$$

- **Función de Distribución**: $F_X(x) = 0$, para $x < 0$, y, $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$ para $x \geq 0$.
- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1 - p)$.
- $E[X] = \frac{1-p}{p}$.
- $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- **Propiedad de falta de memoria**:

$$P(X \leq h + k / X \leq h) = P(X \leq k) \quad \forall h, k \in \mathbb{N} \cup 0.$$

Distribución Binomial Negativa

Una variable aleatoria, asociada al **número de fracasos, en sucesivas repeticiones independientes de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito** p, **antes de que ocurra el** k**-éximo éxito** se dice que sigue una **Distribución Binomial Negativa** de parámetros n y p, $(0 < p < 1)$. **Denotamos**

$$X \sim \mathcal{BN}(k, p), \; k \in \mathbb{N}, \; (0 < p < 1)$$

.

- **Función Masa de Probabilidad**:

$$P(X = x) = \frac{(x + k - 1)!}{x!(k-1)!}(1-p)^x p^k, \quad x \in \mathbb{N}$$

- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^k$, $t < -\ln(1-p)$.
- $E[X] = \frac{k(1-p)}{p}$.
- $\text{Var}(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$.

Distribución Hipergeométrica

Si se considera una población de tamaño N y una subpoblación de tamaño N_1, y se extrae una muestra aleatoria de tamaño n, sin reemplazamiento o simultáneamente, una v.a. X que describe **el número de individuos de la muestra que pertenecen a la subpoblación** se dice que sigue una **Distribución Hipergeométrica** de parámetros N, N_1 y n. **Denotamos**

$$X \sim H(N, N_1, n);\ \ N, N_1, n \in \mathbb{N},\ \ N_1, n \leq N$$

.

Función Masa de Probabilidad:

$$P(X = x)\frac{(N_1!/x!(N_1 - x)!)\,((N - N_1)!/(n - x)!(N - N_1 - n + x)!)}{N!/n!(N - n)!}$$

$$x = 0, \ldots, n, \quad x \leq N_1,\ \ n - x \leq N - N_1.$$

Distribución Hipergeométrica

Principales características:

- $E[X] = n\frac{N_1}{N}$.
- $\text{Var}(X) = n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$.
- Aproxima a una distribución Binomial $\mathcal{B}(n, p)$ cuando $N, N_1 \to \infty$, con $N_1/N \to p$, y siendo n el parámetro de la Hipergeométrica, que define el número de pruebas de Bernoulli en el modelo Binomial que aproxima.

Distribuciones reproductivas

Se entiende por distribuciones reproductivas las familias de distribuciones que son estables frente a la suma de variables independientes.

Definición: Una familia de distribuciones es reproductiva si la suma de variables aleatorias independientes con distribución en dicha familia es una variable aleatoria con distribución en la misma familia.

Teorema: Sean $\{X_1, ..., X_n\}$ vv.aa. independientes con f.g.m $M_{X_i}(t)$, $i = 1, ..., n$. Entonces $\exists M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$, donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Las distribuciones discretas que tienen la propiedad reproductiva son la Binomial, la Poisson y la Binomial negativa.

Distribuciones reproductivas – Binomial

Sea $X_1, \ldots, X_n$ independientes y $X_i \rightsquigarrow B(k_i, p), \quad \forall i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow B(\sum_{i=1}^{n} k_i, p)$$

Distribuciones reproductivas – Poisson

Sea $X_1, \ldots, X_n$ independientes y $X_i \rightsquigarrow P(\lambda_i), \quad \forall i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow P(\sum_{i=1}^{n} \lambda)$$

Distribuciones reproductivas – Binomial negativa

Sea $X_1, \ldots, X_n$ independientes y $X_i \rightsquigarrow BN(k_i, p), \quad \forall i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow BN(\sum_{i=1}^{n} k_i, p)$$