8. La longitud de vida (en horas) de una determinada pieza de cierta máquina es una variable aleatoria que se distribuye de acuerdo a la función de densidad

$$f(x) = \exp(1-x), \quad x > 1.$$

Cuando falla la pieza, se sustituye por otra de las mismas características, y se supone que las longitudes de vida de distintas piezas son independientes. Calcular aproximadamente el número de piezas de recambio necesario para asegurar el funcionamiento de la máquina al menos durante 1000 horas, con probabilidad mayor que 0.95.

Nos piden calcular $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$P[S_n \geq 1000] > 0'95$$

siendo S_n la suma de los tiempos de los n recambios, es decir

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , x_i \text{ v.a.c.d. con } f(x) = e^{1-x} \quad , x > 1$$

Vamos a aplicar entonces el Teorema Límite de Lévy. Considero X la variable que representa a cualquier variable de la sucesión pues están igualmente distribuidas.

- $E[X] = \int_1^\infty x e^{1-x} dx = 2$
- $E[X^2] = \int_1^\infty x^2 e^{1-x} dx = 5 \Rightarrow$ Podemos aplicar el teorema

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 5 - 2^2 = 1$$

- $E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i] = 2n$
- $Var[S_n] = E[S_n^2] - E[S_n]^2 = n$

No interpolar, tomar punto del medio

Por tanto, sabemos que

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{L} Z \sim N(0,1)$$

$$0'95 = P[S_n \geq 1000] = P\left[\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \geq \frac{1000 - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}}\right] = P\left[Z \geq \frac{1000 - 2n}{\sqrt{n}}\right] = 0'95$$

$$P\left[Z \geq \frac{1000 - 2n}{\sqrt{n}}\right] = P\left[Z \leq \frac{2n - 1000}{\sqrt{n}}\right] = 0'95$$

Entonces

$$\frac{2n - 1000}{\sqrt{n}} = 1'6448 \iff 2n - 1000 = 1'6448\sqrt{n}$$

$$4n^2 - 1000^2 = 1'6448^2 n$$

$$4n^2 - 1'6448^2 n - 1000^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{n} = 22'78 \Rightarrow n = 22'78^2 = 518'73$$

Entonces se necesitarán 519 recambios.

7. Para realizar una compra de un determinado material eléctrico del que se sabe que es defectuoso con probabilidad 0.25, se le somete a una determinada prueba que da los resultados A, B y C, con probabilidades 0.8, 0.15 y 0.05, si el material es válido, y probabilidades $0.2, 0.3$ y 0.5, si el material es defectuoso. Si cada lote se somete a seis pruebas de forma independiente, y se acepta para su compra si no aparece nunca el resultado C ni más de dos veces el resultado B, calcular la probabilidad de que un lote elegido al azar sea aceptado para su compra. Calcular el número de lotes que hay que probar para comprar al menos 20 con probabilidad mayor o igual que 0.9452.

Nos dicen que:

$P(A/D)=0'2$ $\quad$ $P(A/V)=0'8$ $\quad$ $P(D)=0'25$

$P(B/D)=0'3$ $\quad$ $P(B/V)=0'15$ $\quad$ $P(V)=0'75$

$P(C/D)=0'5$ $\quad$ $P(C/V)=0'05$

$P(A)= P(D)\cdot P(A/D)+P(V)\cdot P(A/V)=0'65$

$P(B)=0'1875$

$P(C)=0'1625$

Sea $(X_B, X_C)\sim M_2(6, 0'1875, 0'1625)$ entonces

$P[X_B\leq 2, X_C=0]=P[X_B=0, X_C=0]+P[X_B=1, X_C=0]+P[X_B=2, X_C=0]=0'3$

Sea ahora X v.a. definida como sigue:

$X=\begin{cases} 1 & \text{se compra lote} \longrightarrow P[X=1]=0'3 \\ 0 & \text{no se compra} \longrightarrow P[X=0]=0'7 \end{cases}$ $\quad X\sim B(1, 0'3)$

Buscamos aplicar el teorema de Moivre y LaPlace

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesion de vaiid según $B(1, 0'3) \Rightarrow S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$P[S_n\geq 20]\geq 0'9452$, es decir, $n\in\mathbb{N}$ que garantice esa probabilidad

$P[S_n\geq 20]=P\left[\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\geq\frac{20-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]=P\left[Z\geq\frac{20-0'3n}{\sqrt{0'21}\sqrt{n}}\right]=0'9452 \iff$

$\iff P\left[Z\leq\frac{0'3n-20}{\sqrt{0'21n}}\right]=0'9452 \iff \frac{0'3n-20}{\sqrt{0'21}\sqrt{n}}=1'6 \iff n=89'83$

Se necesitan 90 lotes.