

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Project 2024

Μάθημα: Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Ελεάνα Ζέρη

AEM:10811

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία καλούμαστε να μελετήσουμε και να βελτιστοποιήσουμε τη λειτουργία ενός δικτύου οδικής κυκλοφορίας. Μας δίνονται συγκεκριμένα δεδομένα ροών και παραμέτρων του δικτύου, καθώς και ένα σχήμα που περιγράφει την κυκλοφορία του οδικού δικτύου. Στο Θέμα 1, μας ζητείται να κατανοήσουμε και να διατυπώσουμε μαθηματικά το πρόβλημα βελτιστοποίησης σχετικά με τη λειτουργία του δικτύου, λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα που μας δίνονται και τους περιορισμούς.

Στο Θέμα 2, καλούμαστε να υλοποιήσουμε έναν γενετικό αλγόριθμο στο Matlab για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης που διατυπώθηκε στο πρώτο θέμα για σταθερό $V=100$.

Στο Θέμα 3, εξετάζουμε την επίδραση της μεταβολής του ρυθμού εισερχόμενων οχημάτων V ($\pm 15\%$ της αρχικής τιμής), λύνοντας το πρόβλημα εκ νέου με την ίδια μεθοδολογία βελτιστοποίησης και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα.

Μέσα από αυτή τη διαδικασία, χρησιμοποιούμε τεχνικές βελτιστοποίησης και προσομοίωσης για να εξετάσουμε πώς η κυκλοφορία μπορεί να κατανεμηθεί αποτελεσματικά, μειώνοντας τη συμφόρηση στο δίκτυο.

ΣΥΝΤΟΜΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

Στην εργασία αυτή, αξιοποιούμε τους γενετικούς αλγορίθμους, μια κατηγορία εξελικτικών αλγορίθμων που αποτελούν στοχαστικές μεθόδους εμπνευσμένες από τη φυσική εξέλιξη. Οι γενετικοί αλγόριθμοι λειτουργούν προσομοιώνοντας γενετικές διεργασίες, όπως η επιλογή (selection), η διασταύρωση (crossover) και η μετάλλαξη (mutation), με στόχο τη βελτιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης η οποία στους γενετικούς αλγορίθμους χαρακτηρίζεται ως συνάρτηση ικανότητας-fitness function και εδώ αντιστοιχεί στον συνολικό χρόνο διάσχισης του δικτύου ανά όχημα. Στη μεθοδολογία αυτή, ξεκινάμε με έναν πληθυσμό υποψήφιων λύσεων (χρωμοσώματα), όπου κάθε χρωμόσωμα αναπαριστά μια πιθανή κατανομή ροών x_i στους δρόμους του δικτύου. Ο πληθυσμός

αυτός εξελίσσεται μέσα από γενεές (δηλαδή επαναλήψεις -iterations), με κάθε γενιά να περιλαμβάνει διαδικασίες όπως:

1. Επιλογή (Selection):

Οι πιο αποδοτικές λύσεις-χρωμοσώματα (x_i) επιλέγονται με βάση την τιμή της συνάρτησης fitness, δίνοντας μεγαλύτερη πιθανότητα επιβίωσης στις καλύτερες λύσεις.

Η διαδικασία επιλογής στους γενετικούς αλγορίθμους είναι στοχαστική, που σημαίνει ότι κάθε λύση (χρωμόσωμα) στον πληθυσμό δεν έχει εγγυημένη μετάβαση στην επόμενη γενεά, ακόμα και αν είναι ιδιαίτερα αποδοτική. Αυτό το συναντάμε και στη φύση, όπου τα πιο ικανά άτομα έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα επιβίωσης, χωρίς όμως αυτή να είναι εξασφαλισμένη.

Η πιο κοινή διαδικασία επιλογής είναι ο «Τροχός της Τύχης» (Roulette Wheel Selection), σύμφωνα με την οποία κάθε άτομο στον πληθυσμό έχει πιθανότητα επιβίωσης ανάλογη της ικανότητάς του. Έτσι, κάθε χρωμόσωμα στον πληθυσμό έχει πιθανότητα επιβίωσης αναλογική με την τιμή της συνάρτησης fitness του. Στον κώδικα:

```
function selected_population = selection_roulette(population, fitness)
```

2. Διασταύρωση (Crossover):

Ο γενετικός τελεστής διασταύρωσης οδηγεί στη συνένωση δύο επιλεγμένων (μετά το κομμάτι του Selection) γονεϊκών λύσεων για τη δημιουργία νέων, πιο αποδοτικών απογόνων. Τα χρωμοσώματα των δύο γονέων χωρίζονται σε δύο τμήματα, τα οποία στη συνέχεια ανταλλάσσονται, παράγοντας έτσι δύο νέες λύσεις. Η διασταύρωση αποτελεί τον κυριότερο τελεστή στους γενετικούς αλγορίθμους, καθώς επιτρέπει την εξερεύνηση νέων περιοχών του χώρου λύσεων συνδυάζοντας τα καλύτερα χαρακτηριστικά των γονέων. Τυπικές τιμές για το ποσοστό διασταύρωσης κυμαίνονται μεταξύ 0.6 και 0.8. Στον κώδικα χρησιμοποίησα τη τιμή *crossover_rate* = 0.8, δηλαδή το 80% των χρωμοσωμάτων στον πληθυσμό θα υποβληθούν σε διαδικασία διασταύρωσης.

Το σημείο τομής, το οποίο καθορίζει τη θέση όπου τα χρωμοσώματα των γονέων θα χωριστούν σε δύο τμήματα, επιλέγεται τυχαία για

κάθε ζεύγος γονέων. Αυτή η διαδικασία μιμείται τη φυσική κληρονομικότητα, όπου τουλάχιστον στον άνθρωπο και στα περισσότερα ζώα, κάθε απόγονος κληρονομεί κάποια από τα γονίδια του από τον ένα γονέα και τα υπόλοιπα από τον άλλο. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τη δημιουργία νέων λύσεων που ενδέχεται να είναι πιο αποδοτικές από τους γονείς τους, ενισχύοντας την εξελικτική διαδικασία του αλγορίθμου.

3. **Μετάλλαξη (Mutation):** Ο τελεστής της μετάλλαξης λειτουργεί αντιστρέφοντας την τιμή ενός bit από 0 σε 1 και από 1 σε 0. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μια μετάλλαξη είναι συνήθως αρκετά μικρή, ώστε να μη διαταράξει υπερβολικά τον πληθυσμό. Τυπικές τιμές για την πιθανότητα μετάλλαξης κυμαίνονται μεταξύ 0.001 και 0.01.

Στον κώδικα χρησιμοποίησα τη τιμή $mutation_rate = 0.01$, δηλαδή το 1% των χρωμοσωμάτων στο πληθυσμό θα υποστούν μετάλλαξη σε κάθε γενιά.

Τυχαίες μικρές αλλαγές εφαρμόζονται, λοιπόν, στις λύσεις για να διατηρηθεί η ποικιλομορφία και να αποφευχθεί η σύγκλιση σε τοπικά βέλτιστα. Κύριος σκοπός της μετάλλαξης είναι να εμποδίσει τον γενετικό αλγόριθμο από το να 'κολλήσει' σε περιοχές του χώρου αναζήτησης με το να διαταράσσει ελαφρά το χρωμόσωμα.

Ο στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον συνολικό χρόνο διάσχισης του δικτύου, λαμβάνοντας υπόψη τις παραμέτρους που μας δίνονται και τους περιορισμούς δυναμικότητας των δρόμων. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία εφαρμόζεται με τη χρήση Matlab και προσαρμόζεται στα χαρακτηριστικά του προβλήματος, όπως η αρχική τιμή $V=100$ στο Θέμα 2, αλλά και η μεταβολή του V κατά $\pm 15\%$ στο Θέμα 3. Μέσα από τη διαδικασία αυτή, ο πληθυσμός συγκλίνει σε λύσεις που ελαχιστοποιούν τον συνολικό χρόνο διάσχισης.

Για κάθε υλοποίηση μας δίνονται:

Ο χρόνος κίνησης στο δρόμο i συναρτήσει του αριθμού των οχημάτων x_i :

$$Ti(x_i) = t_i + a_i \frac{x_i}{1 - \frac{x_i}{c_i}}$$

ci [οχ./min]: ο μέγιστος δυνατός ρυθμός διέλευσης οχημάτων από τον ίδιο δρόμο,

$$ai = 1.25, i = 1, \dots, 5,$$

$$ai = 1.5, i = 6, \dots, 10 \text{ και}$$

$$ai = 1, i = 11, \dots, 17$$

ενώ σύμφωνα με την θεωρία επιλέγονται:

$$pop_size = 100 : \text{Μέγεθος πληθυσμού}$$

$$num_generations = 200 : \text{Αριθμός γενεών}$$

θέτω επίσης:

$$t = 1 : \text{Σταθερός χρόνος διάσχισης}$$

Θέμα 1: Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος

Δίνονται:

t : Σταθερός χρόνος διάσχισης ενός δρόμου i όταν η κίνηση είναι ασθενής.

x : Ρυθμός διέλευσης οχημάτων στο δρόμο i [οχ./min]

c : Μέγιστος ρυθμός διέλευσης οχημάτων στο δρόμο i

a : Συντελεστής ανάλογα με την ομάδα στην οποία ανήκει ο δρόμος.

$T(x)$: Ο χρόνος κίνησης στο δρόμο i ως συνάρτηση του αριθμού των οχημάτων x

$V=100$: Ρυθμός εισερχόμενων οχημάτων στο δίκτυο.

Στόχος: Να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος διάσχισης του δικτύου

ανά όχημα: Minimize ($Z = \left[\sum_{i=1}^{17} Ti(xi) \right]$)

Περιορισμοί:

Ροή οχημάτων: Ο αριθμός των οχημάτων που εισέρχεται σε κάθε κόμβο ισούται με τον αριθμό που εξέρχεται. Για κάθε κόμβο, ισχύει:

$$1. \text{ Ροή εισόδου} = \text{Ροή εξόδου}$$

Χωρητικότητα δρόμων: Ο ρυθμός διέλευσης οχημάτων x_i δεν μπορεί να ξεπερνά τον μέγιστο ρυθμό c_i :

$$2. 0 \leq x_i \leq c_i, \forall i.$$

Συνολικός ρυθμός εισερχομένων οχημάτων:

$$3. \sum_{i \in \text{είσοδοι}} x_i = V$$

Θέμα 2 : Υλοποίηση Γενετικού Αλγορίθμου στο Matlab για την ελαχιστοποίηση του Z με V=100

Ως αποτελέσματα στο Command Window παίρνουμε:

Καλύτερη Λύση:

Columns 1 through 11

0.6694 1.1283 1.1747 2.1857 0.2029 0.1642 1.0653 1.3693 0.1460
1.6729 0.9767

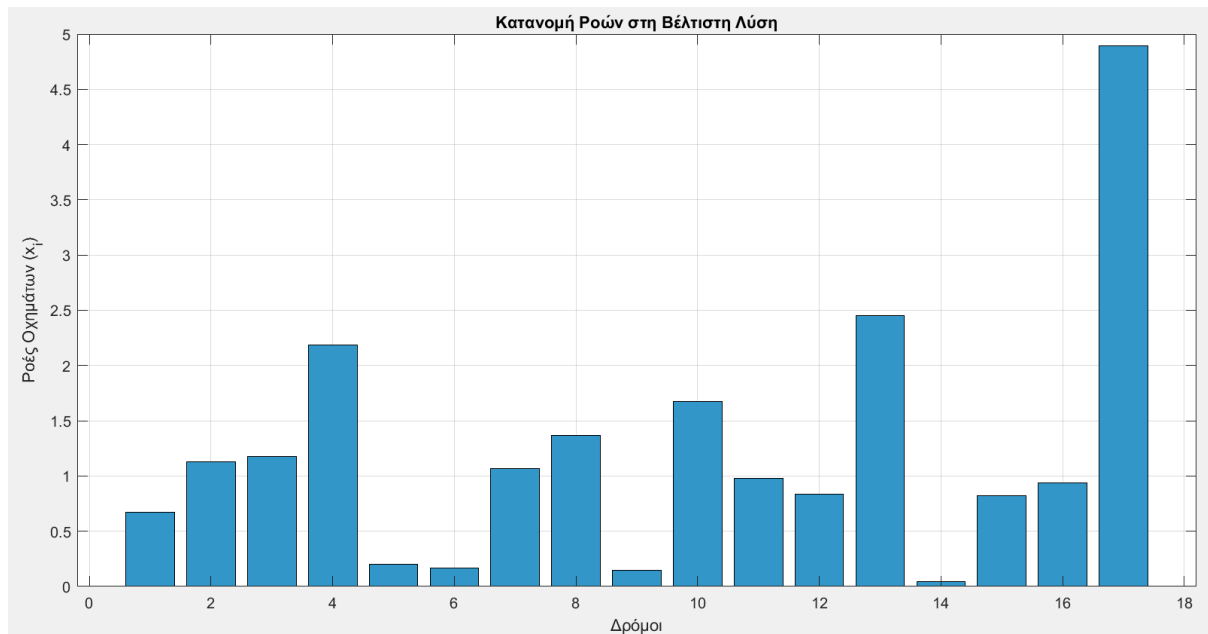
Columns 12 through 17

0.8386 2.4500 0.0422 0.8249 0.9384 4.8953

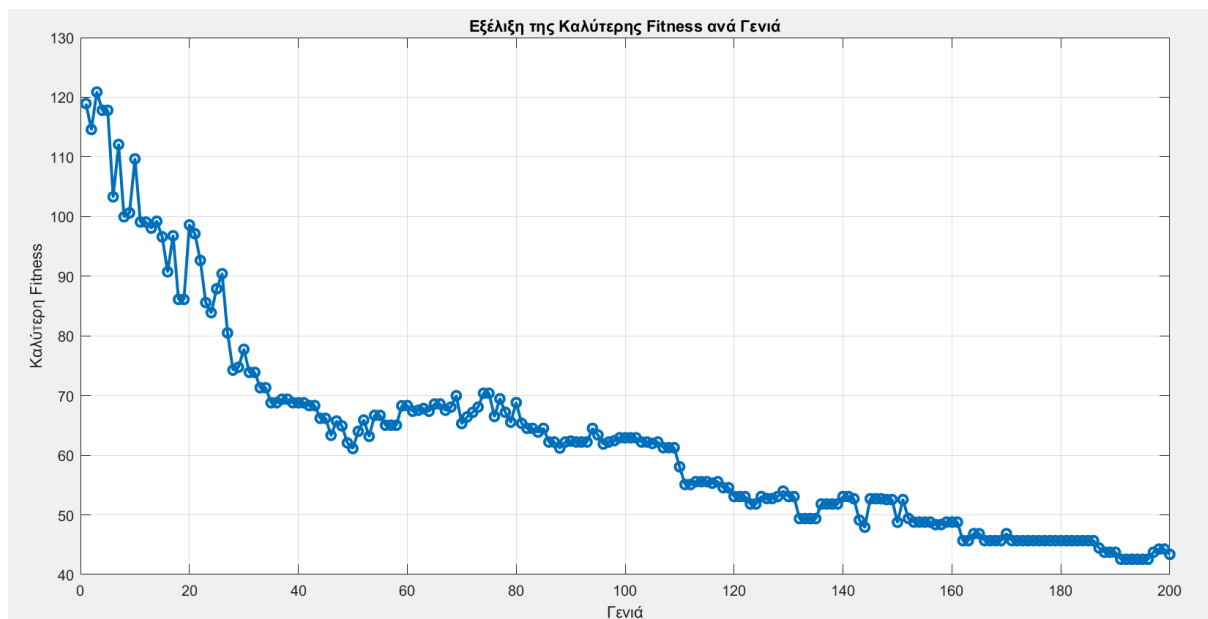
Ελάχιστος Χρόνος: 42.5576

Αυτή είναι η βέλτιστη κατανομή των x_i , δηλαδή των ροών οχημάτων σε κάθε δρόμο. Κάθε στήλη αντιστοιχεί σε έναν δρόμο (Column 1→Road 1, Column 2→Road 2,...,Column 17→Road 17). Ο συνολικός χρόνος διάσχισης του δικτύου (Z) για τη βέλτιστη κατανομή x_i είναι 42.5576 λεπτά.

Οι βέλτιστες κατανομές των x_i φαίνονται και στο παρακάτω figure:



Μέσω του παρακάτω figure, επίσης, φαίνεται καλύτερα πώς εξελίσσεται η καλύτερη λύση όσο περνούν οι γενιές:



Ξεκινάμε με υψηλές τιμές Fitness (~120) στην αρχή και παρατηρούμε σταδιακή πτώση καθώς εξελίσσονται οι γενιές.

Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί το fitness (δηλαδή ο συνολικός χρόνος διάσχισης του δικτύου). Βλέπουμε ότι ο γενετικός αλγόριθμος το επιτυγχάνει, καθώς οι τιμές μειώνονται σταθερά.

Στις πρώτες ~25 γενιές, η βελτίωση είναι πιο απότομη. Αυτό συμβαίνει επειδή

αρχικά υπάρχουν "κακές" λύσεις στον πληθυσμό, και ο αλγόριθμος βρίσκει γρήγορα πιο αποδοτικές λύσεις. Με την επιλογή, τη διασταύρωση και τη μετάλλαξη, βρίσκονται γρήγορα καλύτερες λύσεις.

Από τη 20η γενιά και μετά, η βελτίωση γίνεται πιο αργή και σταδιακή. Αυτό συμβαίνει γιατί οι λύσεις πλησιάζουν στο βέλτιστο και απαιτείται περισσότερη εξερεύνηση για να βρεθούν μικρότερες βελτιώσεις.

Στις τελευταίες ~10 γενιές (190-200), η τιμή της συνάρτησης fitness γίνεται σχεδόν σταθερή (~42-43). Παρατηρώ ότι η ελάχιστη τιμή της fitness επιτυγχάνεται στη γενιά 191 (τιμή 42.5576) και παραμένει σταθερή μέχρι τη γενιά 196. Ωστόσο, από τη γενιά 197 έως την 200η (τελευταία), η fitness αυξάνεται, φτάνοντας τελικά την τιμή 43.379, η οποία δεν είναι η ολική ελάχιστη. Αυτό αναδεικνύει τη στοχαστική φύση των γενετικών αλγορίθμων, όπου δεν είναι εγγυημένο ότι η απόδοση θα βελτιώνεται διαρκώς από γενιά σε γενιά. Η αύξηση στις τελευταίες γενιές μπορεί να αποδοθεί στη μετάλλαξη, η οποία εισάγει τυχαίες αλλαγές στον πληθυσμό για να διατηρηθεί η ποικιλομορφία. Ωστόσο, όταν ο πληθυσμός έχει σχεδόν συγκλίνει, η πιθανότητα να προκύψει μια βελτιωμένη λύση μέσω μετάλλαξης μειώνεται.

Τα "σκαμπανεβάσματα" στο γράφημα (τα ζγκ-ζαγκ) οφείλονται σε διάφορους παράγοντες που σχετίζονται με τη φύση του γενετικού αλγορίθμου. Όπως βλέπουμε, τα πιο έντονα σκαμπανεβάσματα συμβαίνουν στις πρώτες γενιές. Αυτό είναι λογικό, καθώς ο πληθυσμός περιλαμβάνει μεγάλη ποικιλία λύσεων και οι αλλαγές είναι πιο μεγάλες. Κατά τη διαδικασία της μετάλλαξης, εισάγονται τυχαίες αλλαγές σε κάποιες λύσεις. Αυτές οι αλλαγές μπορεί περιστασιακά να οδηγήσουν σε χειρότερες λύσεις, κάτι που προσωρινά αυξάνει την καλύτερη fitness. Μείωση όμως της πιθανότητας μετάλλαξης μπορεί να κάνει την καμπύλη πιο ομαλή, αλλά ίσως μειώσει την ικανότητα του αλγορίθμου να ξεφεύγει από τοπικά βέλτιστα. Επιπλέον, η διασταύρωση συνδυάζει γονίδια από δύο γονείς για να δημιουργήσει απογόνους. Σε ορισμένες περιπτώσεις, ο συνδυασμός αυτός μπορεί να μην είναι τόσο αποδοτικός όσο οι αρχικοί γονείς, προκαλώντας αύξηση στη fitness. Ακόμη, σε κάποια σημεία του αλγορίθμου (όπως μεταξύ των γενεών 45-58 κ.α.), ο πληθυσμός μπορεί να συγκλίνει προσωρινά σε ένα "τοπικό βέλτιστο", το οποίο δεν είναι το ολικό. Καθώς ο αλγόριθμος προσπαθεί να ξεφύγει από αυτά τα τοπικά βέλτιστα, η fitness αυξομειώνεται.

Θέμα 3 : Υλοποίηση γενετικού αλγορίθμου στο Matlab για την ελαχιστοποίηση του Z με μεταβαλλόμενο $V=\pm 15\%$ της αρχικής τιμής $V=100$

Ως αποτελέσματα στο Command Window παίρνουμε:

Αποτελέσματα για διαφορετικές τιμές V :

$V = 85$: Ελάχιστος Χρόνος = 34.6847

$V = 90$: Ελάχιστος Χρόνος = 43.8156

$V = 95$: Ελάχιστος Χρόνος = 42.0801

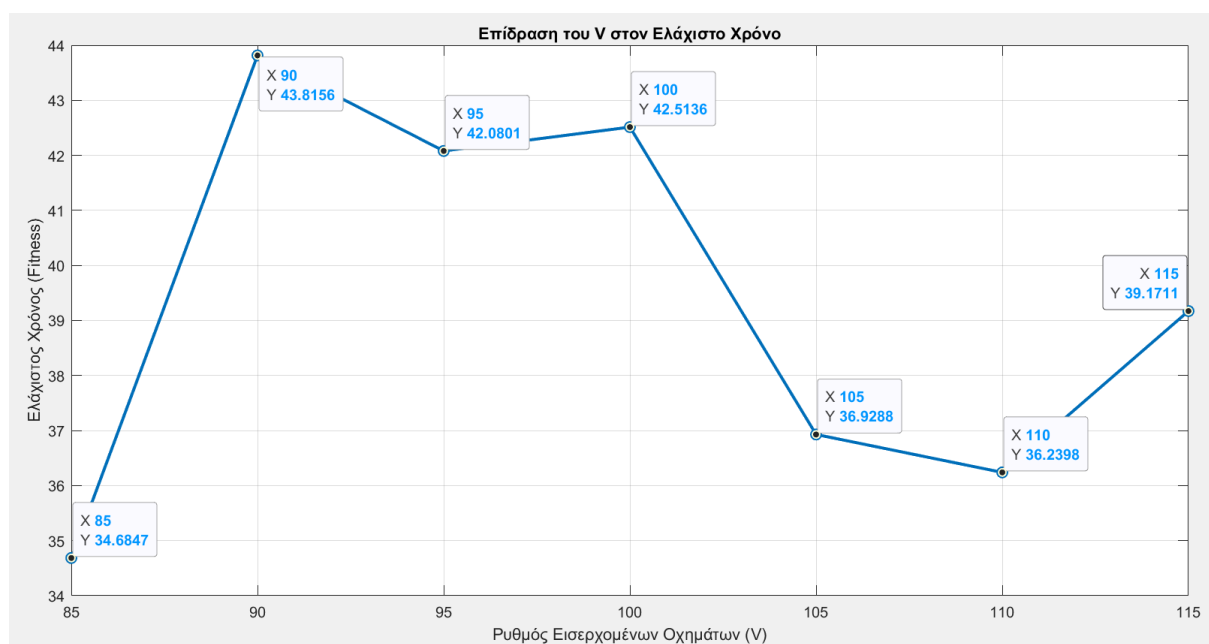
$V = 100$: Ελάχιστος Χρόνος = 42.5136

$V = 105$: Ελάχιστος Χρόνος = 36.9288

$V = 110$: Ελάχιστος Χρόνος = 36.2398

$V = 115$: Ελάχιστος Χρόνος = 39.1711

Το παρακάτω figure δείχνει καλύτερα πώς μεταβάλλεται ο συνολικός χρόνος (fitness) για διαφορετικές τιμές του ρυθμού εισερχομένων οχημάτων (V):



Στο Θέμα 3, εφαρμόσαμε τον ίδιο αλγόριθμο, εξετάζοντας διαφορετικές τιμές V στο εύρος $[85,115]$. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι η σχέση μεταξύ V και Z είναι μη γραμμική. Συγκεκριμένα:

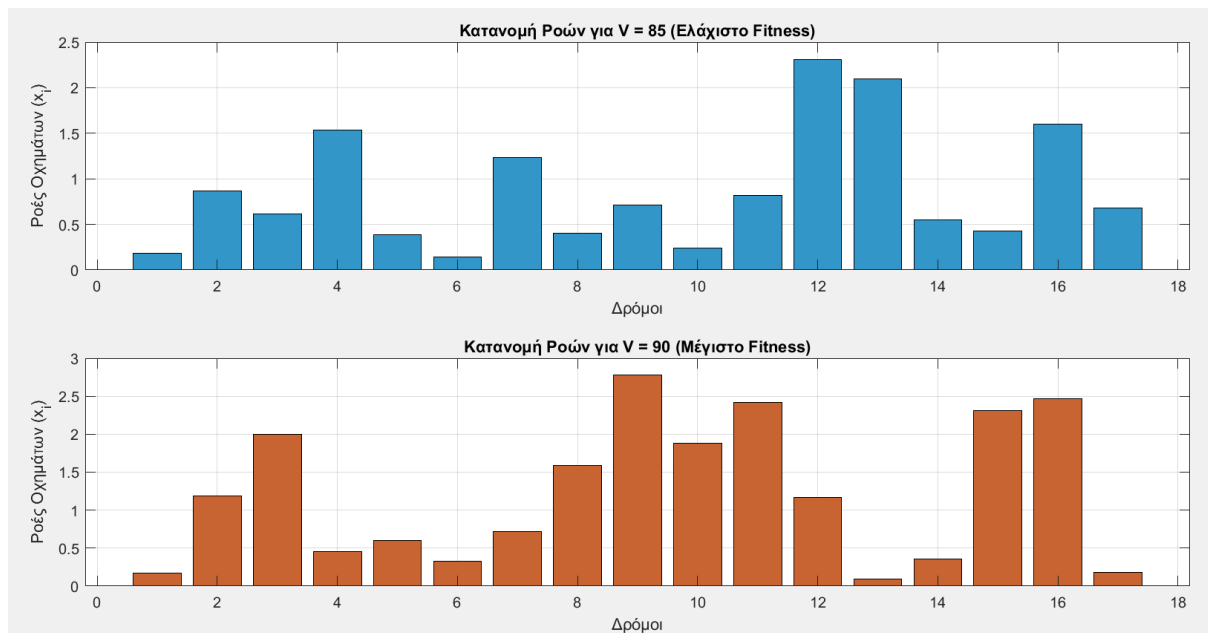
Η ελάχιστη τιμή fitness $Z \approx 34.6847$ επιτυγχάνεται για $V=85$, όπου το δίκτυο λειτουργεί πιο αποδοτικά.

Για $V=100$, το fitness είναι $Z \approx 42.5136$, μια τιμή κοντά στο ολικό μέγιστο, γεγονός που δείχνει ότι το δίκτυο είναι λιγότερο αποδοτικό σε αυτή την τιμή.

Για $V=110$, η τιμή fitness μειώνεται ξανά ($Z \approx 36.2398$), δείχνοντας ότι οι υψηλότερες τιμές V δεν προκαλούν πάντα συμφόρηση, πιθανότατα λόγω της δυναμικής των περιορισμών που επηρεάζουν την κατανομή ροών στους δρόμους.

Στο Θέμα 2, παρατηρήθηκε ότι η συνάρτηση fitness σταθεροποιείται στις τελευταίες γενιές αλλά ενδέχεται να αυξηθεί λόγω της στοχαστικότητας της μεθόδου. Αυτό είναι εμφανές και στο Θέμα 3, όπου η fitness ποικίλλει για διαφορετικά V , υποδεικνύοντας ότι οι λύσεις εξαρτώνται από την αρχικοποίηση και την τυχαιότητα του αλγορίθμου.

Παρακάτω παρατίθεται το figure των κατανομών των ροών στους δρόμους:



Οι διαφορετικές τιμές του V αλλάζουν τη συμπεριφορά του δικτύου, επηρεάζοντας την κατανομή των ροών. Για $V=85$ (ελάχιστο fitness) η κατανομή ροών είναι πιο συγκεντρωμένη σε συγκεκριμένους δρόμους. Βλέπουμε δηλαδή ότι οι οδηγοί αξιοποιούν τους πιο αποδοτικούς δρόμους, γεγονός που μειώνει τον χρόνο. Από την άλλη, για $V=90$ (μέγιστο fitness), οι ροές διανέμονται σε περισσότερους δρόμους και αυτή η πιο ομοιόμορφη-ισομερής κατανομή οδηγεί σε χειρότερους χρόνους λόγω της χρήσης λιγότερο αποδοτικών δρόμων και της συμφόρησης.

Συμπερασματικά, η ανάλυση στο Θέμα 3 προσφέρει πιο ολοκληρωμένη κατανόηση της συμπεριφοράς του δικτύου υπό διαφορετικούς ρυθμούς εισερχόμενων οχημάτων. Αναδεικνύεται η σημασία της ευελιξίας στη ρύθμιση του V , καθώς οι συνθήκες συμφόρησης και η απόδοση του δικτύου εξαρτώνται έντονα από αυτή την παράμετρο. Παρόλο που στο Θέμα 2 το $V=100$ έδωσε μια αποδεκτή λύση, η οποία προσεγγίζει με συνέπεια την ελάχιστη λύση που μπορεί να δώσει ο γενετικός αλγόριθμος για το συγκεκριμένο V , αλλά δεν είναι ολικά βέλτιστη όταν εξετάζουμε την επίδραση της παραμέτρου V (Θέμα 3). Η περαιτέρω διερεύνηση του V στο Θέμα 3 απέδειξε ότι η ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου διάσχισης επιτυγχάνεται με $V=85$. Τέλος, η στοχαστική φύση των γενετικών αλγορίθμων επισημαίνει την ανάγκη για προσεκτική παραμετροποίηση και περαιτέρω διερεύνηση για πιο στοχευμένη βελτιστοποίηση.