Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Μάθημα:Τεχνικές Βελτιστοποίησης

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελεάνα Ζέρη   ΑΕΜ:10811

Η δεύτερη εργαστηριακή άσκηση έχει ως ζητούμενο την ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών f χωρίς περιορισμούς.Η αντικειμενική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για τη μελέτη είναι η f(x,y) = x^5*e^(-x^2-y^2). Στόχος είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά και την αποδοτικότητα τριών διαφορετικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης που περιγράφονται συνοπτικά παρακάτω:

1. ***Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου***:Η μέθοδος της μέγιστης καθόδου ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση ακολουθώντας την κατεύθυνση του αρνητικού του gradient της συνάρτησης σε κάθε επανάληψη, δηλαδή τη πιο απότομη κατεύθυνση μείωσης της συνάρτησης.
2. ***Μέθοδος Newton***:Η μέθοδος Newton χρησιμοποιεί την κατεύθυνση καθόδου που προκύπτει από την αντίστροφη του Hessian (δεύτερη παράγωγος) της συνάρτησης και του gradient της, προσφέροντας μια πιο ακριβή προσέγγιση για τη σύγκλιση στο τοπικό ελάχιστο.

Ο **Hessian** είναι ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης και μας δίνει πληροφορίες για την καμπυλότητα της συνάρτησης σε ένα σημείο.
Οι **ιδιοτιμές** του Hessian καθορίζουν τη φύση της καμπυλότητας:

- Εάν όλες οι ιδιοτιμές του Hessian είναι **θετικές**, τότε το σημείο είναι **τοπικό ελάχιστο** (καμπυλότητα προς τα πάνω).
- Εάν όλες οι ιδιοτιμές του Hessian είναι **αρνητικές**, τότε το σημείο είναι **τοπικό μέγιστο** (καμπυλότητα προς τα κάτω).
- Εάν οι ιδιοτιμές του Hessian είναι και **θετικές και αρνητικές**, τότε το σημείο είναι **σημείο σέλας** (π.χ., σημείο που έχει μέγιστο σε μία κατεύθυνση και ελάχιστο σε άλλη).

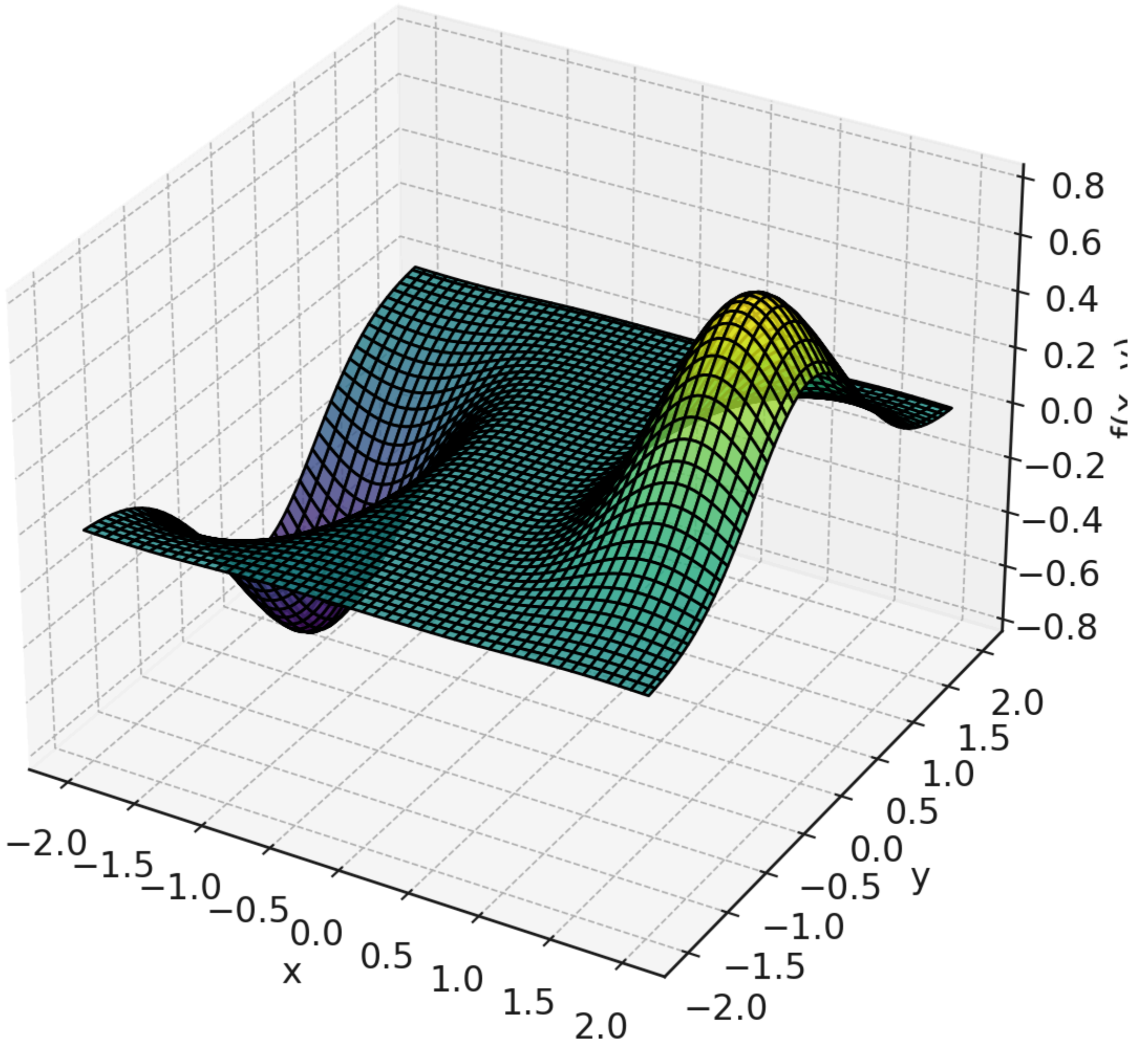
3. ***Μέθοδος Levenberg-Marquardt(LM):*** Η μέθοδος Levenberg-Marquardt συνδυάζει την **μέθοδο Newton** και το **gradient**,για να εξασφαλίσει καλύτερη σύγκλιση, ειδικά όταν ο Hessian δεν είναι καλά ορισμένος. Η βασική διαφορά με τη μέθοδο Newton είναι ότι η LM εισάγει έναν παράγοντα ρύθμισης (λ) για να διορθώσει την αστάθεια του Hessian,καθιστώντας τον θετικά ορισμένο σε κάθε επανάληψη.

Οι μέθοδοι αυτοί εφαρμόζονται με τρεις διαφορετικούς τρόπους επιλογής βήματος (γ):
α) σταθερό,
*β) βήμα τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η f(xk + γ*dκ),*
γ) βάσει του κανόνα Armijo
Η ανάλυση πραγματοποιείται με τη χρήση τριών διαφορετικών αρχικών σημείων(xo,yo) για κάθε διαφορετικό τρόπο ορισμού του βήματος (γ):
i *) (0,0),*
ii) (-1,1),
iii) (1,−1)

Η σύγκλιση κάθε αλγορίθμου αξιολογείται με γραφική απεικόνιση της αντικειμενικής συνάρτησης σε συνάρτηση με τον αριθμό των επαναλήψεων. Επιπλέον, σχολιάζεται η επίδραση της επιλογής του αρχικού σημείου και του βήματος στην απόδοση και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Plot της αντικειμενικής μας συνάρτησης:

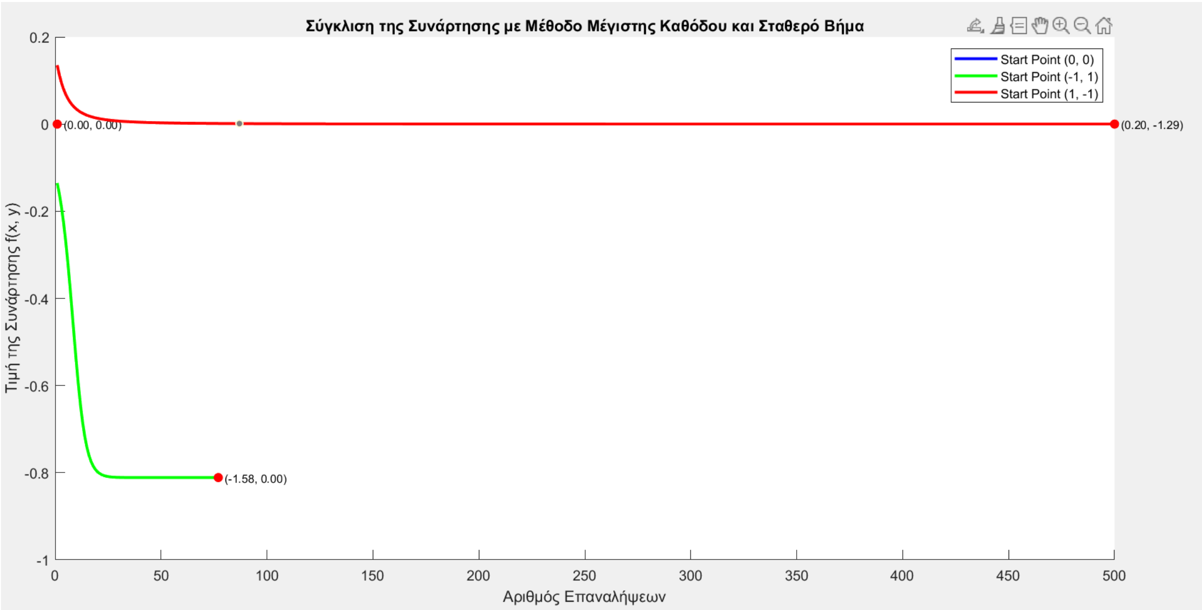
$$f(x, y) = x^5 e^{-x^2 - y^2}$$



Όπως βλέπουμε, η συνάρτηση έχει συμμετρική συμπεριφορά γύρω από τον άξονα y και παρουσιάζει έντονες κοιλάδες.
Το **ολικό ελάχιστο** της συνάρτησης προσεγγιστικά υπολογίζεται στο σημείο (x,y)≈(−1.58,−0.01) με τιμή f(x,y)≈−0.811
Το σημείο (0,0) είναι σημείο σέλας
Στα plot που ακολουθούν:

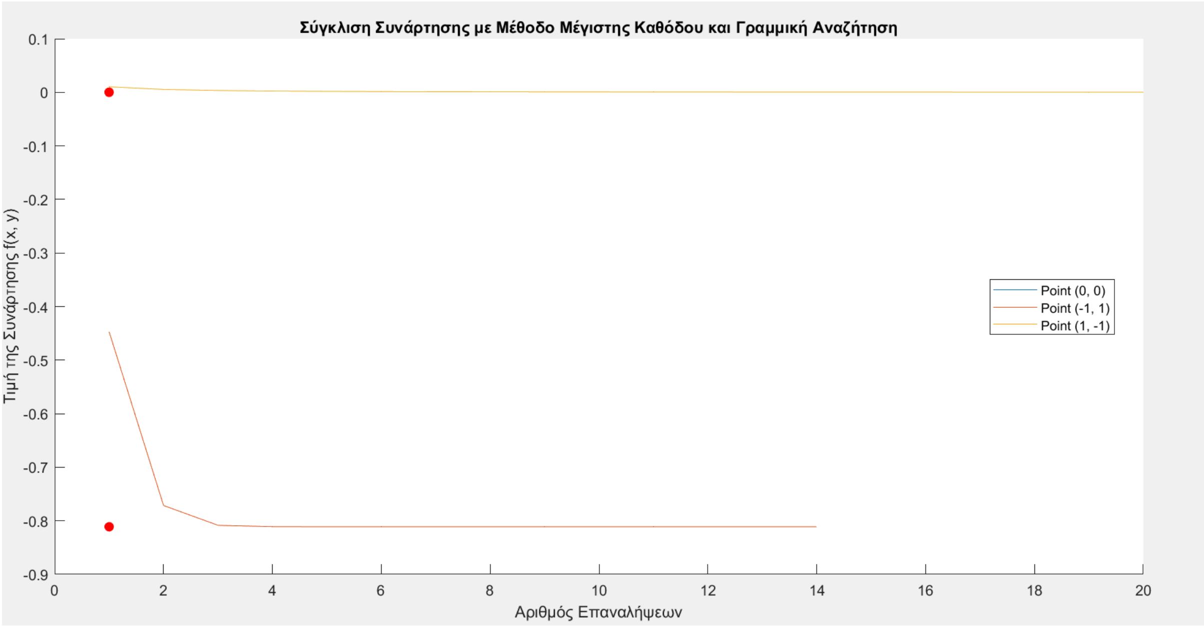
Άξονας x (Αριθμός επαναλήψεων):Οριζόντια, δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων (iterations) που απαιτούνται για να φτάσουμε σε σύγκλιση.
Άξονας y (Τιμή της συνάρτησης):Κάθετη, δείχνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f(x,y) σε κάθε επανάληψη.

1α)(i,ii,iii)



Αποτελέσματα στο terminal:
A)Μέγιστη Κάθοδος: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000),
Σύγκλιση σε (0.000000, 0.000000) σε 1 επαναλήψεις.
B)Μέγιστη Κάθοδος: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000),
Σύγκλιση σε (-1.581139, 0.000005) σε 77 επαναλήψεις.
C)Μέγιστη Κάθοδος: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000),
Σύγκλιση σε (0.196651, -1.286553) σε 500 επαναλήψεις.

1β)(i,ii,iii)



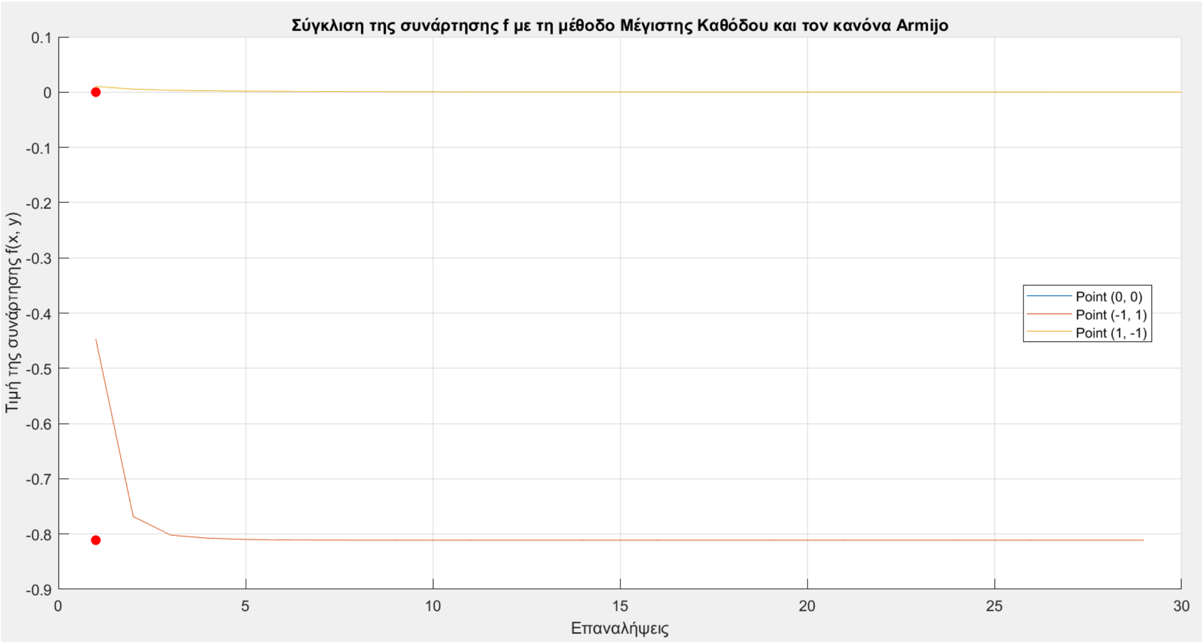
Στο παραπάνω plot έβαλα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=20 για να φανεί καλυτερα η σύγκλιση των σημείων.Βάζοντας αριθμό επαναλήψεων=500 στο Matlab παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα:

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000), Σύγκλιση σε (0.000000, 0.000000) σε 1 επαναλήψεις.

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000), Σύγκλιση σε (-1.581139, 0.000000) σε 14 επαναλήψεις.

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000) ΔΕΝ συγκλίνει εντός των 500 επαναλήψεων.

1γ)(i,ii,iii)



Στο παραπάνω plot έβαλα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=30 για να φανεί καλυτερα η σύγκλιση των σημείων.Βάζοντας αριθμό επαναλήψεων=500 στο Matlab παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα:
Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Armijo: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000), Σύγκλιση σε (0.000000, 0.000000) σε 1 επαναλήψεις.

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Armijo: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000), Σύγκλιση σε (-1.581139, 0.000000) σε 29 επαναλήψεις.

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Armijo: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000) ΔΕΝ συγκλίνει μετά από 500 επαναλήψεις.

Η γραφικές παραστάσεις και τα αποτελέσματα από τον κώδικα της Μεθόδου Μέγιστης Καθόδου με σταθερό βήμα γ=0.1*{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: defteri_a.m}*, με βήμα τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η f(xk + γ*dκ) *{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: defteri_b.m}*, και τέλος με τον κανόνα Armijo για την επιλογή του βήματος (γ) *{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: defteri_c.m}* ,παρουσιάζουν τα εξής:

Αποτελέσματα για τα Αρχικά Σημεία:

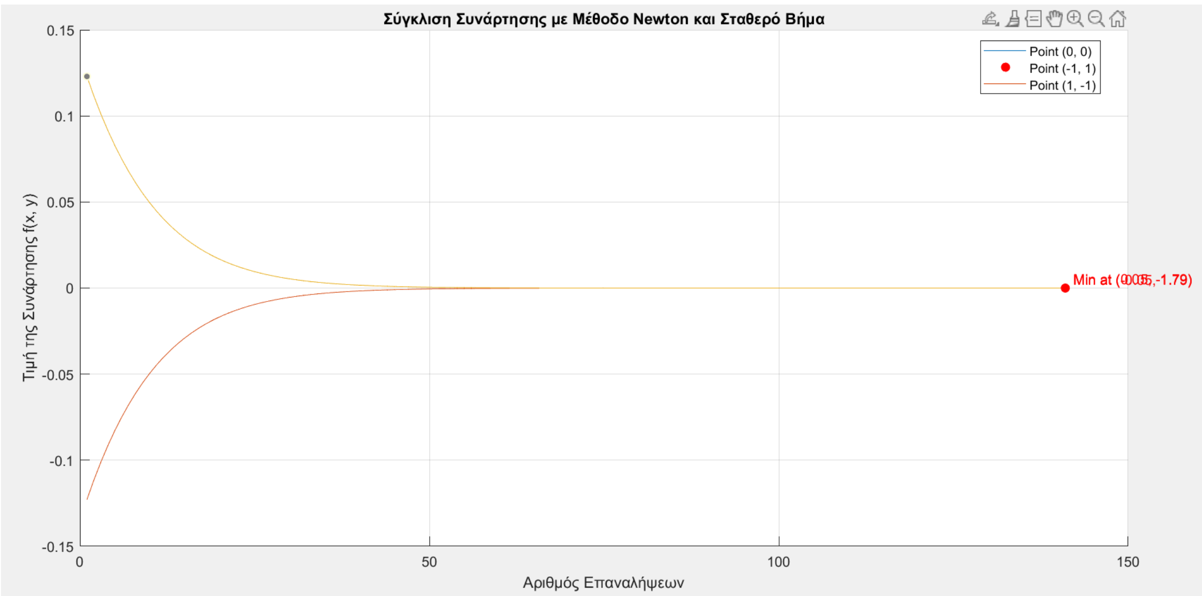
- **(0, 0):** Η μέθοδος συγκλίνει άμεσα σε 1 επανάληψη, καθώς πρόκειται για στάσιμο σημείο (gradient = 0). Το gradient είναι μηδενικό:Το $\nabla f(0,0)=0$, γεγονός που υποδηλώνει ότι το (0,0) είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης.Αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ελάχιστο ή μέγιστο, αλλά μπορεί να είναι και σημείο σέλας. Ειδικά για αυτή τη συνάρτηση, το (0,0) είναι σημείο σέλας(γραφική αναπαράσταση).Η μέθοδος άρα παγιδεύεται.

- **(-1, 1):** Όλα τα είδη βημάτων οδηγούν κοντά στο ολικό ελάχιστο (−1.581,0.000), με διαφορετικό ρυθμό σύγκλισης:
    - Σταθερό βήμα: 77 επαναλήψεις.
    - Γραμμική αναζήτηση: 14 επαναλήψεις.
    - Κανόνας Armijo: 29 επαναλήψεις

Το σημείο (−1,1) είναι πιο κοντά στο ολικό ελάχιστο και όλες οι μέθοδοι το προσεγγίζουν.

- **(1, -1):**
    - Σταθερό βήμα: Παρουσιάζει αργή σύγκλιση (500 επαναλήψεις) και όχι σε ακριβές ελάχιστο.
    - Γραμμική αναζήτηση και Armijo: Δεν συγκλίνουν, καθώς η μέθοδος "παγιδεύεται" σε περιοχή με μικρό gradient.Αυτό υποδεικνύει ότι η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου είναι λιγότερο αποδοτική όταν το αρχικό σημείο βρίσκεται αρκετά μακριά από το ελάχιστο και μπορεί να απαιτεί πολύ περισσότερες επαναλήψεις ή ακόμα και να μην συγκλίνει καθόλου όπως φαίνεται σε τέτοιες περιπτώσεις.Η γραμμική αναζήτηση ίσως δεν επιλέγει σωστά το βήμα γ στο σημείο (1,−1).

2α)(i,ii,iii)



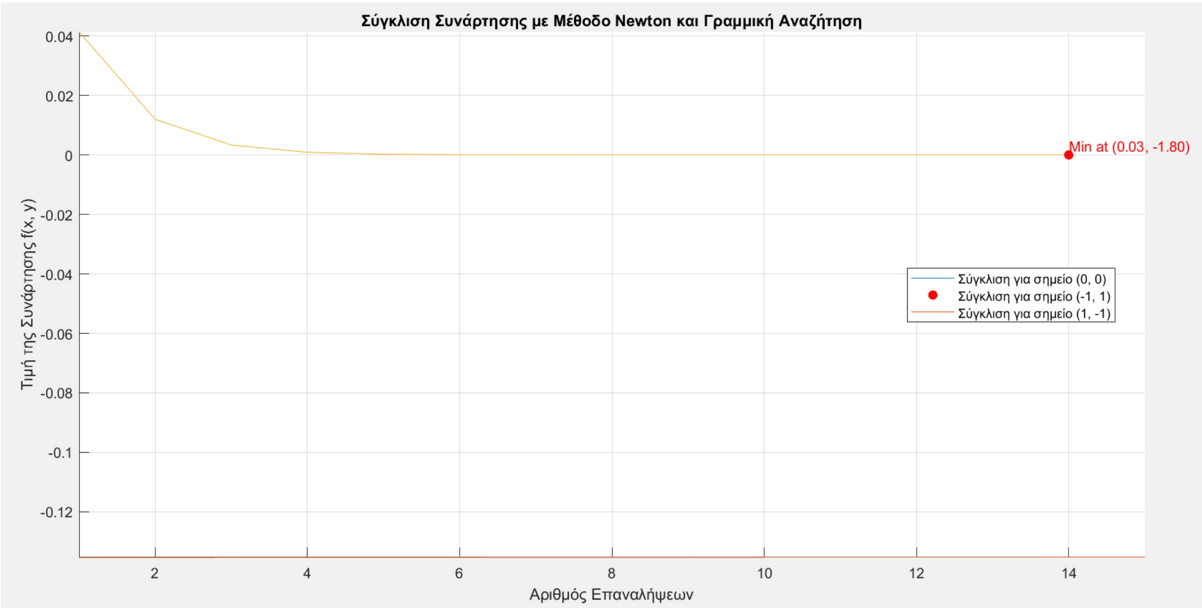
Στο παραπάνω plot έβαλα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=50 για να φανεί καλυτερα η σύγκλιση των σημείων.Βάζοντας αριθμό επαναλήψεων=500 στο Matlab παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα:

Μέθοδος Newton με Σταθερό Βήμα: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000), Σύγκλιση σε (NaN, NaN) σε 1 επαναλήψεις.

Μέθοδος Newton με Σταθερό Βήμα: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000), Σύγκλιση σε (-0.045618, 1.791778) σε 141 επαναλήψεις.

Μέθοδος Newton με Σταθερό Βήμα: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000), Σύγκλιση σε (0.045618, -1.791778) σε 141 επαναλήψεις.

2β)(i,ii,iii)



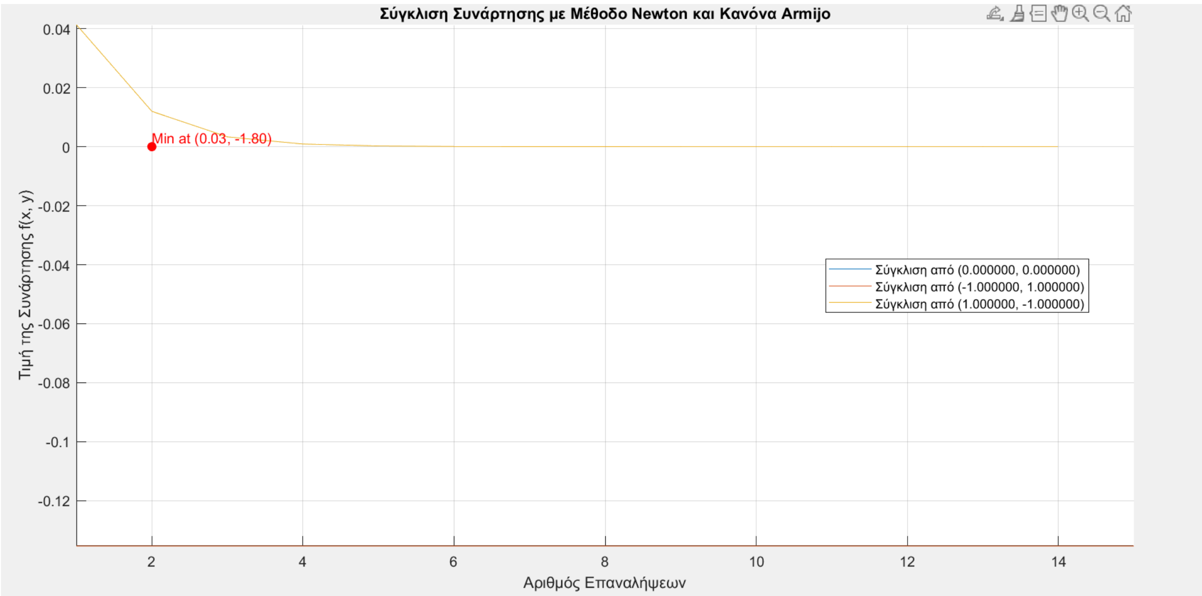
Στο παραπάνω plot έβαλα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=20 για να φανεί καλυτερα η σύγκλιση των σημείων.Βάζοντας αριθμό επαναλήψεων=500 στο Matlab παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα:

Μέθοδος Newton με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000), Σύγκλιση σε (NaN, NaN) σε 1 επαναλήψεις.

Μέθοδος Newton με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000) ΔΕΝ συγκλίνει εντός των 500 επαναλήψεων.

Μέθοδος Newton με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000), Σύγκλιση σε (0.032359, -1.804577) σε 14 επαναλήψεις.

2γ)(i,ii,iii)



Στο παραπάνω plot έβαλα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=20 για να φανεί καλυτερα η σύγκλιση των σημείων.Βάζοντας αριθμό επαναλήψεων=500 στο Matlab παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα:

Μέθοδος Newton με Armijo: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000), Σύγκλιση σε (NaN, NaN) σε 1 επαναλήψεις.

Μέθοδος Newton με Armijo: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000) ΔΕΝ συγκλίνει εντός των 500 επαναλήψεων.

Μέθοδος Newton με Armijo: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000), Σύγκλιση σε (0.032351, -1.804620) σε 14 επαναλήψεις.

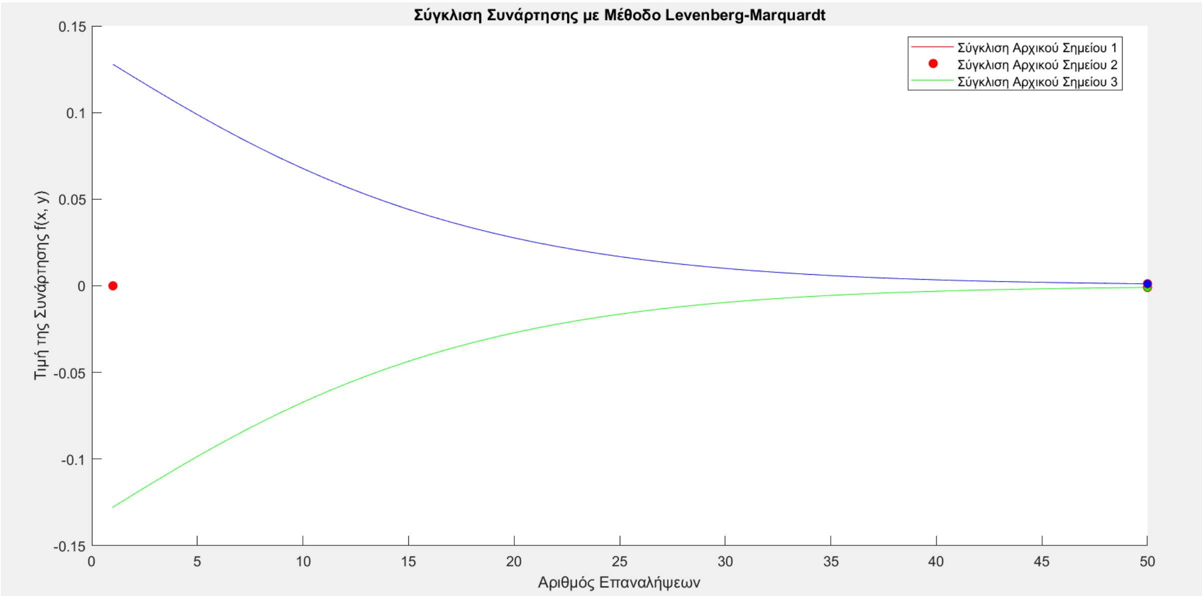
Οι γραφικές παραστάσεις και τα αποτελέσματα από τον κώδικα της Μεθόδου Newton με σταθερό βήμα γ=0.1*{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: trith_a.m}*, με βήμα τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η f(xk + γ*dκ) *{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: trith_b.m}*, και τέλος με τον κανόνα Armijo για την επιλογή του βήματος (γ) *{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: trith_c.m}* ,παρουσιάζουν τα εξής:

- **Αρχικό Σημείο (0, 0):**Σταθερό βήμα, Γραμμική Αναζήτηση και Armijo:Η μέθοδος Newton βασίζεται στον υπολογισμό του αντίστροφου του **Hessian.**Στο σημείο αυτό ο Hessian είναι μη αντιστρέψιμος,πιο συγκεκριμένα ο Hessian είναι μηδενικός άρα μη αντιστρέψιμος και δηλαδή δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το H^{-1}.Αυτό οδηγεί σε αριθμητική αστάθεια και, ως αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος δεν μπορεί να προχωρήσει και επιστρέφει NaN για το επόμενο βήμα.

Η Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου δεν αντιμετωπίζει το πρόβλημα αυτό, καθώς χρησιμοποιεί απλά τον αρνητικό gradient για να καθορίσει την κατεύθυνση, και συγκλίνει γρήγορα στο (0,0) με μία μόνο επανάληψη, "ακινητοποιείται" λόγω μηδενικό gradient που δείχνει τη κατεύθυνση βελτιστοποίησης.

- **Αρχικό Σημείο (-1, 1):**
  - Σταθερό Βήμα: Συγκλίνει σε $(-0.045618, 1.791778)$ μετά από 141 επαναλήψεις, μακριά από το ολικό ελάχιστο. Η αργή σύγκλιση δείχνει ότι το σταθερό βήμα δεν βοηθά σε αυτή την περίπτωση.
  - Γραμμική Αναζήτηση: Δεν συγκλίνει εντός 500 επαναλήψεων. Η γεωμετρία της συνάρτησης σε αυτή την περιοχή και η εξάρτηση από το Hessian επηρεάζουν αρνητικά τη μέθοδο. Οι αρνητικές ιδιοτιμές του Hessian $\{-26, -18\}$ υποδεικνύουν ότι η συνάρτηση είναι στραμμένη προς τα κάτω σε όλες τις κατευθύνσεις γύρω από το σημείο $(-1,1)$. Αυτό είναι χαρακτηριστικό ενός τοπικού μέγιστου.Το βήμα της Newton είναι δύσκολο να υπολογιστεί σωστά όταν το Hessian είναι αρνητικά ορισμένο, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε αποτυχία σύγκλισης.
  - Armijo: Ομοίως, η μέθοδος δεν συγκλίνει εντός 500 επαναλήψεων.
- **Αρχικό Σημείο (1, -1):**
  - Σταθερό Βήμα: Συγκλίνει σε σημείο $(0.045618, -1.791778)$μετά από 141 επαναλήψεις, το οποίο δεν είναι το ολικό.
  - Γραμμική Αναζήτηση: Συγκλίνει σε σημείο $(0.032359, -1.804577)$ σε μόλις 14 επαναλήψεις, επιτυγχάνοντας καλύτερη απόδοση.Για το σημείο αυτό, η μέθοδος Newton συγκλίνει σε τοπικό ελάχιστο όχι λόγω της ίδιας της μεθόδου Newton, αλλά λόγω της γραμμικής αναζήτησης, η οποία βοηθά τον αλγόριθμο να ξεφύγει από την αρνητική καμπυλότητα,να κατευθυνθεί προς περιοχές με θετική καμπυλότητα που υποδεικνύουν κάποιο ελάχιστο και τελικα να βρει ένα τοπικό ελάχιστο.
  - Armijo: Συγκλίνει σε παρόμοιο σημείο $(0.032351, -1.804620)$με 14 επαναλήψεις. Η χρήση του κανόνα Armijo διασφαλίζει βέλτιστο βήμα για γρηγορότερη σύγκλιση.

3α)(i,ii,iii)



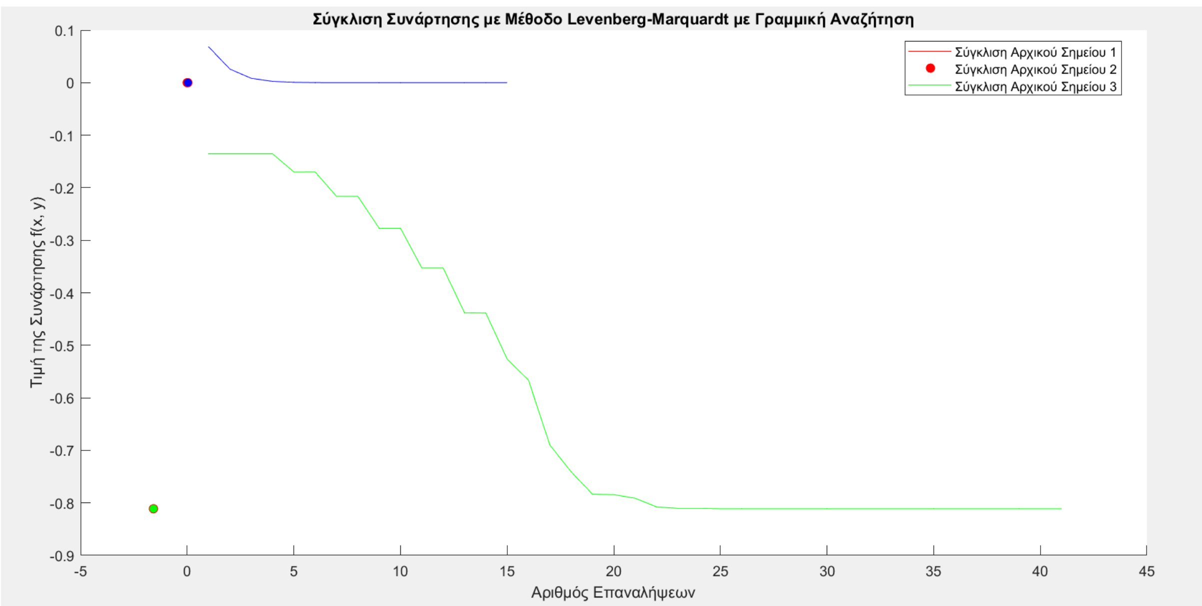
Στο παραπάνω plot έβαλα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=150 για να φανεί καλυτερα η σύγκλιση των σημείων.Βάζοντας αριθμό επαναλήψεων=100000 στο Matlab παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα:

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με σταθερό γ: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000), Σύγκλιση σε (0.000000, 0.000000) σε 1 επαναλήψεις.

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με σταθερό γ: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000), Σύγκλιση σε (0.057773, 2.004333) σε 2532 επαναλήψεις.

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με σταθερό γ: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000), Σύγκλιση σε (0.060916, -2.056414) σε 2172 επαναλήψεις.

3β)(i,ii,iii)



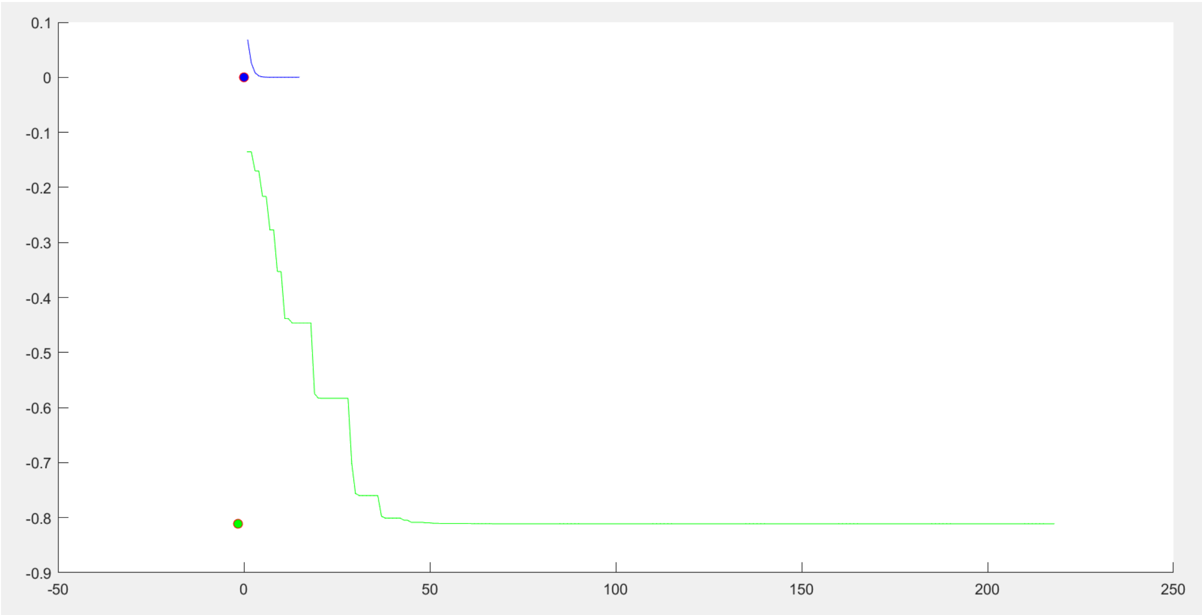
Βάζοντας αριθμό επαναλήψεων=100.000 στο Matlab παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα:

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000), Σύγκλιση σε (0.000000, 0.000000) σε 1 επαναλήψεις.

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000), Σύγκλιση σε (-1.581139, 0.000000) σε 41 επαναλήψεις.

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με Γραμμική Αναζήτηση: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000), Σύγκλιση σε (0.030401, -1.753513) σε 15 επαναλήψεις.

3γ)(i,ii,iii)



Στο παραπάνω plot έβαλα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=15 για να φανεί καλυτερα η σύγκλιση των σημείων.Βάζοντας αριθμό επαναλήψεων=500 στο Matlab παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα:

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με Armijo: Αρχικό σημείο: (0.000000, 0.000000), Σύγκλιση σε (0.000000, 0.000000) σε 1 επαναλήψεις.

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με Armijo: Αρχικό σημείο: (-1.000000, 1.000000), Σύγκλιση σε (-1.581139, 0.000000) σε 218 επαναλήψεις.

Μέθοδος Levenberg-Marquardt με Armijo: Αρχικό σημείο: (1.000000, -1.000000), Σύγκλιση σε (0.030393, -1.753562) σε 15 επαναλήψεις.

Οι γραφικές παραστάσεις και τα αποτελέσματα από τον κώδικα της Μεθόδου Levenberg-Marquardt με σταθερό βήμα γ=0.1*{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: tetarti_a.m}*, με βήμα τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η f(xk + γ*dκ) *{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: tetarti_b.m}*, και τέλος με τον κανόνα Armijo για την επιλογή του βήματος (γ) *{αρχείο στο φάκελο ergasia_2: tetarti_c.m}* ,παρουσιάζουν τα εξής:

- **(0, 0):**

  Σταθερό βήμα,γραμμική αναζήτηση,Armijo:γρήγορη σύγκλιση στο (0,0),το οποίο είναι σημείο σέλας, επομένως δεν αποτελεί ελάχιστο(1 επανάληψη)

  Και στις τρεις παραλλαγές βήματος (σταθερό, γραμμική αναζήτηση, Armijo), η μέθοδος αποτυγχάνει. Αυτό συμβαίνει λόγω του μη αντιστρέψιμου Hessian στο σημείο (0,0), οδηγώντας σε αριθμητική αστάθεια και επιστροφή NaN.

- **(-1, 1):**

  Σταθερό βήμα: αργή σύγκλιση, φτάνει στο (0.057773,2.004333)μετά από 2532 επαναλήψεις. Η σύγκλιση είναι αργή και το σημείο δεν πλησιάζει το ολικό ελάχιστο κοντά στο (−1.58,0).

  Γραμμική αναζήτηση: γρήγορη σύγκλιση στο κοντινό σημείο (−1.581139,0.000000), πλησιάζοντας το ολικό ελάχιστο(41 επαναλήψεις)

  Armijo: Καλή σύγκλιση στο (−1.581139,0.000000), με σταθερή και σχετικά αργή πορεία προς το ολικό ελάχιστο(218 επαναλήψεις)

  Η Levenberg-Marquardt (με γραμμική αναζήτηση ή Armijo) είναι καλύτερη, καθώς καταλήγει στο ολικό ελάχιστο στο (−1.5811,0)(-1.5811, 0)(−1.5811,0) από το σημείο (−1,1), ενώ η Newton αποτυγχάνει να συγκλίσει στη γραμμική αναζήτηση και με τον κανόνα Armijo.

- **(1, -1):**

  Σταθερό βήμα: Αργή σύγκλιση, φτάνει στο (0.060916,−2.056414)μετά από 2172 επαναλήψεις. Η σύγκλιση είναι αργή και το σημείο δεν πλησιάζει το ολικό ελάχιστο.

  Γραμμική αναζήτηση: Γρήγορη σύγκλιση στο (0.030401,−1.753513),το σημείο δεν πλησιάζει το ολικό ελάχιστο(15 επαναλήψεις).Αυτό δείχνει ότι το αρχικό σημείο βρίσκεται σε περιοχή της συνάρτησης όπου η μέθοδος οδηγείται σε άλλο τοπικό ελάχιστο, μακριά από το ολικό ελάχιστο.

  Armijo: Καλή σύγκλιση στο (0.030393,−1.753562), το σημείο δεν πλησιάζει το ολικό ελάχιστο(15 επαναλήψεις)Αυτό δείχνει και πάλι ότι το αρχικό σημείο βρίσκεται σε περιοχή της συνάρτησης όπου η μέθοδος οδηγείται σε άλλο τοπικό ελάχιστο, μακριά από το ολικό ελάχιστο.

  Και οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν σε τοπικό ελάχιστο, αλλά η Levenberg-Marquardt είναι ελαφρώς πιο αργή από τη Newton με γραμμική αναζήτηση (15 έναντι 14 *επαναλήψεων).*

Η μόνη περίπτωση που η Newton είναι προτιμότερη είναι όταν το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο (καλός Hessian) και το αρχικό σημείο κοντά σε τοπικό ελάχιστο. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, η Levenberg-Marquardt είναι η πιο αξιόπιστη επιλογή.
Είδαμε ακόμη ότι η μέθοδος Newton μπορεί να αποτύχει σε περιοχές όπου ο Hessian έχει αρνητικές ιδιοτιμές (αρνητική καμπυλότητα), οδηγώντας σε κακές κατευθύνσεις καθόδου ή αποτυχία σύγκλισης.Η Levenberg-Marquardt, λόγω του ρυθμιστικού παράγοντα, προσαρμόζει τις ιδιοτιμές του Hessian ώστε να παραμένουν θετικές, διασφαλίζοντας κατεύθυνση προς ένα πιθανό ελάχιστο.Σίγουρα στα συμπεράσματα θα πρέπει να τονιστεί,τέλος,ότι η σύγκλιση εξαρτάται έντονα από το αρχικό σημείο και τη στρατηγική επιλογής βήματος.

Αναφορικά με την μέθοδο της μέγιστης καθόδου θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την απλότητα υλοποίησης και ότι είναι αριθμητικά σταθερή, καθώς βασίζεται μόνο στο gradient.Από την άλλη,χαρακτηρίζεται από αργή σύγκλιση, ειδικά όταν το gradient είναι μικρό ή η γεωμετρία της συνάρτησης είναι κακή ενω ενδέχεται να απαιτεί πολλές επαναλήψεις και να παγιδεύεται όπως είδαμε.

Γενική Σύγκριση

Απλότητα & Σταθερότητα: Μέγιστη Κάθοδος > Levenberg-Marquardt > Newton.

Ταχύτητα Σύγκλισης: Newton > Levenberg-Marquardt > Μέγιστη Κάθοδος (σε καλά ορισμένα προβλήματα).

Αξιοπιστία για Ολικό Ελάχιστο: Levenberg-Marquardt > Newton > Μέγιστη Κάθοδος.

Η Levenberg-Marquardt είναι η πιο αξιόπιστη και γενικά καλύτερη μέθοδος για αυτό το πρόβλημα, ενώ η Newton είναι γρήγορη αλλά ευάλωτη. Η Μέγιστη Κάθοδος είναι χρήσιμη αλλά για απλά σενάρια.