

情報特別演習最終レポート

筑波大学情報学群情報科学類 (201611350) 江畑 拓哉

February 7, 2018

Contents

1	概要	3
2	序論	3
3	時系列データベースの比較と OpenTSDB の利用法	4
3.1	InfluxDB	4
3.2	Graphite	5
3.3	Datomic	6
3.4	OpenTSDB	9
3.4.1	HBase とその周辺知識	9
3.4.2	HBase	9
3.4.3	Hadoop	10
3.4.4	Zookeeper	10
3.4.5	OpenTSDB	12
3.4.6	OpenTSDB の HTTP API	14
3.4.7	Grafana	15
4	Clojure を用いた JVM における高速計算技法	16
4.1	Clojure 自身の高速化手法	16
4.2	ClojureCL	16
4.3	Neanderthal	16
4.4	Clojure.core.matrix	20
4.4.1	vectorz-clj	20
4.4.2	clatrix	20
4.5	ACM3 (Apache Common Math 3)	21
5	ARIMA モデルによる時系列分析	21
5.1	BackShift 記法	21
5.2	単位根検定	22
5.2.1	定常性の性質	22
5.2.2	ADF 検定	25

5.2.3	KPSS 検定	26
5.3	AR モデル	27
5.4	MA モデル	27
5.5	ACF と PACF	28
5.5.1	ACF	28
5.5.2	PACF	28
5.5.3	p, q の決定法	29
5.6	パラメータ推定	32
5.6.1	対数尤度関数	32
5.6.2	アメーバ法	32
5.6.3	AIC	34
5.7	SARIMA モデルについて	34
6	Clojure/ClojureScript を用いた Web 開発	35
6.1	Clojure によるバックエンド開発	35
6.1.1	Luminus Framework	35
6.1.2	Swagger UI	36
6.2	ClojureScript によるフロントエンド開発	36
6.2.1	基本的な開発	38
6.2.2	Reagent	38
7	MLLK の開発	39
7.1	ARIMA モデルライブラリ	40
7.2	データベース設計	40
7.2.1	Postgresql	40
7.2.2	OpenTSDB	41
7.3	バックエンド開発	42
7.4	フロントエンド開発	42
8	発展 : ARIMA 推定 と Random Forest による予測	45
8.1	概要	45
8.2	実験方法	45
8.3	実験結果	45
8.4	考察	45
9	まとめと今後の課題	45
10	付録	45
10.1	このレポートにおける数式について	45
10.1.1	独立同時分布と変数の補足	46
10.1.2	標準誤差	46
10.2	出力結果	48

1 概要

今情報特別演習において私は、機械学習を初学者が学ぶための Web アプリ開発を行った。当初は大規模データベースを用いた機械学習 API を作るという目標であったが、特に機械学習を学んでいくにあたり、これの中身を理解するための初学者向けの解説の供給が少ないと感じたため、開発目標をやや変更した。

今回学習した内容は、① 大規模データベースの、特に時系列データベースの比較とその利用法 ② 機械学習等を実装する際に重要となる高速計算を JVM 言語内で行う手法 ③ 代表的な時系列分析の一つである (S)ARIMA モデル ④ 開発言語として取り上げた Clojure/ClojureScript の、言語自体・これを用いた Web 開発手法、の 4 分野である。

結果として 時系列データベースとして OpenTSDB を採用し ARIMA モデルとそれに付随する ADF 検定などを実装・解説を作成した。更に JVM 上で高速計算を行うために、*jblas* や *Intel[®] MATH KERNEL LIBRARY* を用いた GPU 演算、OpenCL の利用例を調べ比較し、一部を Web アプリの実装に活用した。そして *Clojure* という言語を身に着け、Clojure/ClojureScript を用いて JavaScript のライブラリである *React.js* などを利用する手法についてまとめ、これらを利用して Web アプリの概形を実装した。

2 序論

この情報特別演習の初期テーマの決定はグループメンバーからの提案が元であった。その概要は、大規模データベースである *Apache HBase[™]* (以降 “HBase” と呼称する) を用いて入力されたデータの因果関係を分析、予測する機械学習 API を作成するというものである。ここから因果関係と相関関係の違いについて学習し、機械学習手法について吟味した結果、ニューラルネットを用いた学習手法と、(S)ARIMA モデルを用いた時系列データ予測と Random Forest を用いた欠損値補完を組み合わせたものの 2 つの手法が議題に上がったが、後者を選択することになりこれを研究することになった。その中で機械学習を学ぶ際にその内部を知る必要があり、学んでいく際にその資料の供給が少ないことを感じ、その資料も兼ね備えたいと考え、また機械学習結果を視覚的にわかりやすく伝える目的も合わせて、Web アプリという形で開発を行うことに目標を定めた。

機械学習という名前は世間に流布しており、それを用いた API として例えば Microsoft Azure の *ComputerVisionAPI* 等を上げることができるが、この中身が解説されることはその必要性や機密性の問題から非常に少ない。また Python や R といった言語やそのライブラリ等に付属している統計処理、機械学習の関数などもその殆どが簡便化されており、例えば *auto.arima()* 関数などはその中身に踏み込むことなく実行、モデルの比較を行うことができる。これは機械学習の利用者という立場からすれば素晴らしい進歩であると考えられるが、その反面機械学習を学ぶ立場になった場合、その中身を知らない状態で API や関数を利用することができるため、手放しに機械学習を理解できたと誤解してしまう可能性がある。

このため主要な機械学習についてその中身を学習できるツールの作成は、統計や機械学

習を学びたいと志している、或いは先述のようなツールの中身について興味を持った者に対して、一定の需要があるのではないかと考えている。

3 時系列データベースの比較と OpenTSDB の利用法

一般的に時系列データのような、単調増加する要素を持つデータを通常の大規模データベースに保存することはデータの分散という点から問題が発生する。[14] このため時系列データを扱うためのデータベースを考える必要がある。幸いなことに、初期案にあった HBase に対して時系列データを扱うことができるように拡張した *OpenTSDB* というデータベースがある。OpenTSDB は HTTP API として操作が許されており、また保存されているデータを確認することが容易であるように設計されている。今回は HBase を完全分散モードで利用する、というチームメンバーの目標に沿ってこちらのデータベースを採用した。

他の時系列データベースの提案として考えられるものに、① *InfluxDB*、② *Graphite*、③ *Datomic* などを挙げることができる。

この章ではそれぞれのデータベースの特徴と利用法を簡潔にまとめる。

3.1 InfluxDB

InfluxDB は InfluxData が開発を行っているデータベースであり、高機能なクラウドシステムを有料で使うことができるほか、オープンソースソフトウェアとしての利用も可能である。このデータベースの利点の一つに、利用方法が簡単であることが挙げられる。シングルノードでの利用に関してのみに焦点を絞れば、2017 年 12 月において *Arch Linux* でのインストールは、パッケージのインストールとサービスの起動の 2 つのコマンドで利用可能になる。またデータベースの読み書きに関しては、SQL に近い記法を用いた HTTP API を用いて行うことができ、今回の演習における開発言語である Clojure で必要な部分に関するラッパーを書くことは非常に簡単であった。また TICK stack と呼ばれる InfluxDB を含む時系列データを扱うための環境を追加でセットアップすればデータのモニタリング、収集、リアルタイム処理をより効率的に行うことができる。本演習の初期目標ではデータの入力をユーザが行うことができる設定になっていたため、悪意あるデータを監視することが容易であるという点、データベースの外側の分野までの広いサポート環境があるという点からこのデータベースは非常に魅力的である。

このデータベースが扱うデータモデルの概要を以下に示す。

Table 1: InfluxDB data model

name(required)		
timestamp (required)	fields (required)	tags (optional)
⋮	⋮	⋮

それぞれの用語についてその意味と例を挙げると以下ようになる。

- name データの名前 (ex. 日経平均株価)
データの名前であり、何に関してのデータであるかを表す。
- timestamp 時刻データ (ex. 2018-01-27T00:00:00Z)
時刻データであり、いつのデータであるのかを示す。この場合の“いつのデータ”とは、データの登録日時ではなく、そのデータの発生日時である。
- fields 測定値群 (ex. (終値: 12000) (始値: 11000))
そのデータが持つ値を示す。いくつかの属性に従って複数の値を格納することができるが、ここに登録されるデータは索引付けされるべきものではないという点でタグ群と意味が異なる。
- tags タグ群 (ex. (記録者: A) (ソース: 東京株式市場))
そのデータの持つ属性や追加情報を示す。ここに登録されるデータは索引付けされており、データの絞り込みを行う目的に用いられる。

3.2 Graphite

Graphite は Python を中心にして書かれた時系列データベースであり、同じく Python の Web フレームワークである Django と組み合わせることが、Graphite 自身の Web UI コンポーネントが Django であるという点から、非常に容易である。同時に Python は機械学習に関する API・ライブラリが豊富に存在しているため、本演習が純粋に“Web API の作成”のみの目標であったならば当然こちらを用いて開発を行っていただろう。またデータベースの導入自体も、Python のパッケージ管理システムである pip を用いて行うことができることから、純粋に Python のみによってすべてを解決することができる。更に Graphite のドキュメントは豊富に存在しており、例えば Monitoring with Graphite [3] を挙げることができる。

Graphite の内部について簡単に説明を行うと、主に 4 つのコンポーネント、Carbon、Whisper、Cario、Django を中心に展開する。

- Carbon は、後述するデータベースそのものと言える Whisper にデータを登録する役割を担っており、メトリクス¹のバッファリングを行ったり他のデータベースにメトリクスをリレーさせたりすることができる。
- Whisper は、入手したデータをファイルシステムに書き込み・読み出しを行う役割を担っており、この部分は Ceres と呼ばれるコンポーネントに置き換えることがで

¹metrics: 入手したデータを分析して数値化したもの

きる。両者の違いは、Whisper が保存領域を固定サイズとして確保するのに対して、Ceres は任意のサイズで保存領域を確保できるということにある。

- Cario は、Graphite のグラフィックエンジンを担当しており、保存されているデータを視覚化する上で非常に重要な役割を果たしている。
- Django は、Cario によって出力されたデータを表示する役割を担っており、データを扱う開発者はこの部分を見てデータを確認することになる。

このデータベースが扱うデータモデルは階層構造を取っており、一例を紹介すると以下のようなになる。

“stock_price.nikkei_index.close_price 12000 1517055464”

上の文字列を送信することによって、stock_price の中の nikkei_index の中にある close_price という階層に 12000 という値を Unix 時間である 1517055464 のデータとして登録している。つまりこのデータは以下のような形に保存されたと考える。

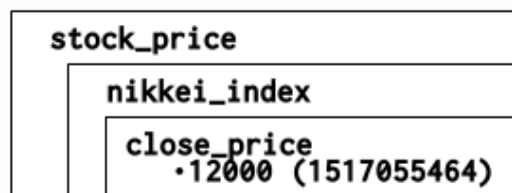


Figure 1: Graphite example

3.3 Datomic

Datomic は他のデータベースとはかけ離れた設計が行われた新しい世代の分散型データベースである。Clojure の作者である Rich Hickey 氏らが作成し、有料でメンテナンスとアップデートが付属されたクラウドシステムを使うことができる。また一年に限っては無料でこの機能を利用することもできる。これとは別に存在する無料版に関しては分散できるピア数などの制限がかかる。

Datomic には 2 つの目標「情報を時間によって紐付け蓄積する」「データベースアプリケーションのモデルをリモートアクセスするものからそれぞれのプログラムの中にあるものとする」¹ がある。この考え方によって得られた大きな 2 つの特徴に、① Append-Only

¹<http://endot.org/notes/2014-01-10-using-datomic-with-riak/>

②データベースに独立したクエリーエンジンがある。

Append-Only とはその名の通り、追加のみという意味で言い換えれば変更ができないということの意味する。これは情報を時間に紐付けることによって最新の情報を見ることができるため、情報を“書き換える”必要がなくなったためにできたことであり、トランザクション処理などのデータの管理を容易にすることができる。

データベースに独立したクエリーエンジンとは、アプリケーション側でトランザクションやクエリ処理を実行するという意味を示しており、データベースに HTTP API などを用いてクエリを投げデータベース側がそのクエリを処理して結果を送信していたものをアプリケーション側に移す、ということになる。その意味で Datomic はアプリケーション側をピア²と呼称する。

ピアが扱うデータはデータベースではなくピア側のキャッシュに Read Only な形で LRU³形式で保持される。データベースは書き込まれたデータを保存し、更新があればそれぞれのピアが持っている、データベースに対して常に開いているノードに告知し、アプリケーション側から要求されるデータ群をそのまま返すことになる。これによってピア側のメモリキャッシュを疑似データベースとして貪欲に使うことができ、データベースのボトルネックを解消することができるようになっている。更にピア側のキャッシュ上のデータベースは実質ゼロコストで用いることができるため、LRU が最適であるような目的のアプリケーションにこのデータベースを適用した場合、データへのアクセスという点において他のデータベースに性能で劣ることはない。またクエリ処理を分散しているため、多くのクエリ処理をこなさなければならないピアが増えたとしても、キャッシュ上のデータを使っている限りはその処理によってデータベースに負荷がかかることもない。またデータベースの更新をピアに告知しなければならないという点でデータベースへの書き込みがネックになる可能性もあるが、これは論理的に分かれているデータごとにデータベースそのものを分割することで解決することができる。

データベースのアクセス方法は Datalog と呼ばれる Clojure らしいシステムによって扱われるため、SQL に慣れている場合には苦勞する可能性があるが、アプリケーションに柔軟に組み込むことができる。これはデータがキャッシュ上に Read-Only な形で存在しているという特性と、Clojure が関数型言語の側面を持っているという点を考えれば、データベース上のデータを手元にあるデータであるかのように利用することができるということを意味している。また保存しているデータは必ず Datom という最小単位に分割されており、これを元にして様々な形にデータを変形させることができる。

このデータベースが扱うデータ例を以下に示す。

```
{:nikkei-index/type "close-price"  
  :nikkei-index/value 12000  
  :nikkei-index/timestamp 1517055464}
```

データは nikkei-index/type に対する値として “close-price” が格納されている。nikkei-index に “close-price” が含まれているわけではない。

²peer

³Least Recently Used

h

Table 2: Datomic の特徴

目指すもの	<ul style="list-style-type: none">・ 情報は時間によって紐付ける・ データベースアプリケーションのモデルをそれぞれのプログラム内に移動する
大きな特徴	<ul style="list-style-type: none">・ Append-Only データベース・ データベース側ではなくアプリケーション側にクエリ処理エンジンがある

Datomic Architecture

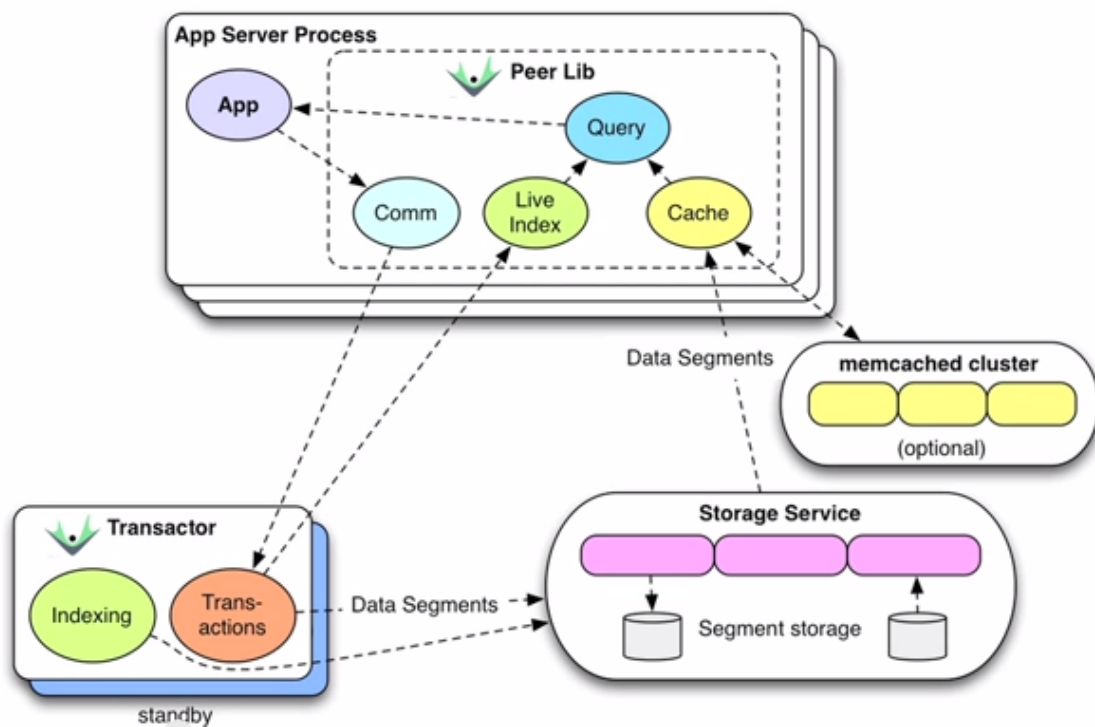


Figure 2: Talk Notes: Using Datomic With Riak より

3.4 OpenTSDB

OpenTSDB の特徴の説明、セットアップや利用方法に関して説明を行う前に、その基盤である HBase とその周辺知識について簡単にまとめ、その後 OpenTSDB についての説明を行う。また OpenTSDB を用いる際に強力な可視化ツールとなる Grafana についてもデータベースの中身にデータが入っていることを示すために触れておく。

3.4.1 HBase とその周辺知識

HBase とは *ApacheTM Hadoop[®]* (以降 “Hadoop” と呼称する) と呼ばれる、大規模データの分散処理フレームワークのためのデータベースである。そして Hadoop の分散サービスを形成するために *Apache ZookeeperTM* (以降 “Zookeeper” と呼称する) という管理ツールが使われる。

3.4.2 HBase

HBase は NoSQL の一つである。NoSQL は大別して、①キーバリュー型②ワイドカラム型③ドキュメント型④グラフ型、があり HBase はワイドカラム型⁴に属している。

Table 3: ワイドカラム型の例 (Name 列を取り出すこと等を得意とする)

ID	Name	Email	Birthday	Authorization
001	Bob	bob @ foo.com	1998/01/02	true
002	John	john @ bar.com	1987/02/01	false
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Hadoop の HDFS (Hadoop Distributed File System) の補完を担っており、複数台のマシンのディスクを一台のディスクであるかのように扱うことができる。全体のデータは Region という単位で分割されており、これをそれぞれのディスクに 1 つ以上割り振っていくことで分散を行う。

続いて HBase の論理データモデルについて説明を行う。最上位概念は Namespace と呼ばれるもので、この中には Table と呼ばれるデータを表形式で保持している概念を 1 個以上含んでいる。一つ以上の RowKey、一つ以上の ColumnFamily で構成されている。そして ColumnFamily には一つ以上の ColumnQualifier が存在している。行キーである ColumnQualifier と列キーである RowKey の交差点にはそれぞれ Cell と呼ばれる領域があり、ここにデータが格納されることになる。データは Timestamp とともに保存されており、Cell にはそのデータが重ねて保存される。つまり Cell には Timestamp に紐付けられたデータが複数存在することになる。また、ワイドカラム型であるという特性上、Table は Rowkey でソートされた状態で保存されることになる。

HBase の物理モデルの Table の構造はキーバリュー形式で保存されている。物理モデ

⁴簡単に説明するとデータを行ごとではなく列に対して管理しており特定の列を取り出して処理することに最適化されており、高いパフォーマンスやスケーラビリティを持っている。

ルの詳細はデータの分散などの説明も必要となるが、これ以上の内容は本演習で理解することができなかったため説明を省略する。

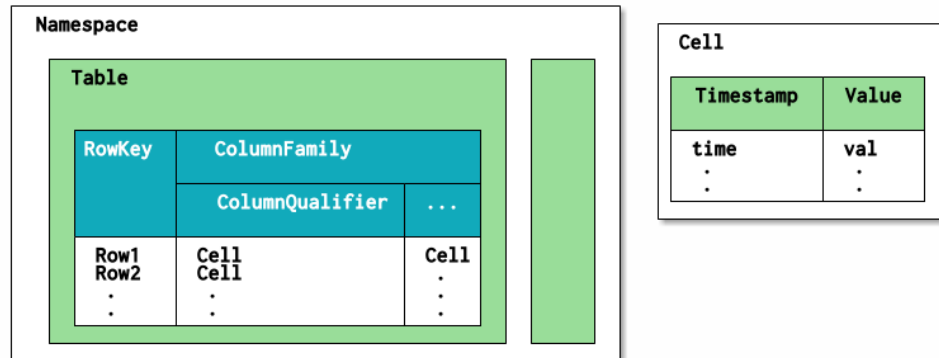


Figure 3: HBase の論理データモデル

3.4.3 Hadoop

Hadoop は大規模データセットの分散処理フレームワークである。Hadoop はモジュール化されているため、そのコンポーネントの殆どを別のソフトウェアに入れ替えることもできる柔軟な設計がされている。今演習では標準的な Hadoop の構成に付随してインストールされる、①Hadoop Common ②Hadoop YARN⁵ ③Hadoop MapReduce ④Hadoop Distributed File System (HDFS) をそのまま利用している。

Common は他のモジュールに利用される基本的なライブラリ群である。YARN は Hadoop のリソース管理やスケジューリングを行い、MapReduce は分散処理のためのフレームワークである。HDFS は分散ファイルシステムで、大容量ファイルを扱うことができる。HDFS は大量の小さなデータを高速に扱うことを不得手としているので、HBase がこの補完を行っている。

3.4.4 Zookeeper

Zookeeper は Hadoop などにおける、構成情報の管理、分散処理の提供、またグループサービスの提供なども行う、分散アプリケーション全体を管理するツールである。使用用途は多岐にわたり、例えば Hadoop などにおける構成管理、Apache StormTM 6 における処理の同期などに用いられる。ツリー状の階層化された名前空間を持ち、ノードと呼ばれる要素にサーバなどを割り当てている。高速処理や高い信頼性があるにもかかわらず、非常に簡単な API を持っていることが特徴である。ベンチマークとしては Zookeeper 3.4

⁵Yet Another Resource Negotiator

⁶リアルタイム高速分散処理フレームワーク

Documentation に記載されている。

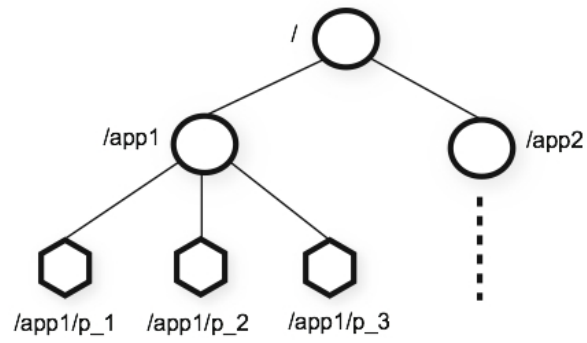


Figure 4: Zookeeper の階層構造

3.4.5 OpenTSDB

OpenTSDB とは HBase をホストとした⁷ 時系列データベースで、その構成は① 時系列デーモン (以降 TSD と呼称する) ② コマンドラインユーティリティ、の2つである。特徴としては TSD にマスター・スレーブといった上下関係がないこと、HBase などのホストに各アプリケーションが直接触れる必要がないこと、標準的に保存されているデータをブラウザから視覚的に確認することができることなどが挙げられる。

APACHE HBASE					
Home Table Details Procedures Local Logs Log Level Debug Dump Metrics Dump HBase Configuration					
ServerName Start time La:					
localhost.localdomain,16201,1517818226215 Mon Feb 05 17:10:26 JST 2018 1 s					
Total:1					

Backup Masters

ServerName	Port
Total:0	

Tables

User Tables System Tables Snapshots

4 table(s) in set. [Details]

Namespace	Table Name	Online Regions	Offline Regions	Failed Regions	Split Regi
default	tsdb	1	0	0	0
default	tsdb-meta	1	0	0	0
default	tsdb-tree	1	0	0	0
default	tsdb-uid	1	0	0	0

Figure 5: HBase 上の OpenTSDB (tsdb という名前のテーブルがあることが確認できる)

これによって得られる恩恵として、アプリケーションをチームで開発・維持する際に OpenTSDB を軸にしてデータベース側とアプリケーション側に分割することができるということが考えられる。例えばアプリケーション側はデータベース側の分散等の開発が終わる前に仮設置の HBase に対して OpenTSDB を適用し、アプリケーションをほぼ本環境と同じように動かすことができる。またデータベースの分散数を増やしたい場合は、データベース側にのみ視点を当てて変更を行うことができる。

⁷正確には Google の BigTable もホストとなりうる

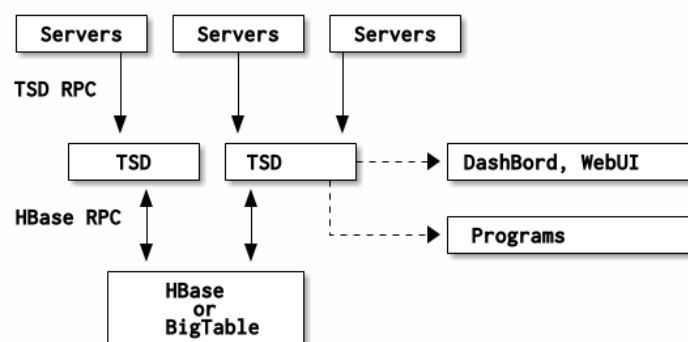


Figure 6: OpenTSDB の概略図

OpenTSDB の論理モデルは Metric と呼ばれるその時系列データのタイトルとも言える概念が最も外側に位置しており、この中にテーブルに近い構造が一つ含まれていると考えることが出来る。このテーブルの行キーはソートされたタイムスタンプであり、時系列データベースの要である。テーブルの列キーはタグと呼ばれるキーバリュー形式の識別子が0以上割り当てられており、これによって欲しいデータの絞り込みを行うことができる。

Metric			
Timestamp	Tag		...
	key	value	...
Time	Value		
⋮	⋮		
⋮	⋮		

Figure 7: OpenTSDB の論理モデル

OpenTSDB はそのアクセスを HTTP API を用いて行うことができる。以降にその概要をまとめる。

3.4.6 OpenTSDB の HTTP API

OpenTSDB を利用するにあたって重要な要素に HTTP API の習得がある。このクエリによってアプリケーション開発者はデータの取得や送信を行うことになる。尚、HTTP API を使わずに Telnet を用いる手段もあるが、どちらも機能として同等であるためここでは HTTP API についての説明のみに留める。

API は、データの取得に関してはクエリ文字列とボディ部の両方の手段をサポートしており、ボディ部を用いる場合はクエリ文字列を用いるよりも詳細な検索をかけることができる。対してデータの送信は PUT メソッドによるボディ部を用いた手段のみが利用できる。それぞれの具体例を示すと以下ようになる。

Table 4: OpenTSDB におけるクエリ例①

前提条件 クエリ内容	・ http: //localhost:4242 に対して OpenTSDB が開いている 1 年前から現在までの Metric nikkei-index における タグについて key が “type” 、 value が “close-price” であるデータを要求する
クエリ文字列	・ http: //localhost:4242/api/query \ ?start=1y-ago&m=avg:nikkei-index{type=close_price}
ボディコンテンツ	・ http: //localhost:4242/api/query ・ Content-Type JSON ・ Body { “start” : 1y-ago, “queries” : [{“aggregator” : “sum”, “metric” : “nikkei-index”, “tags” : {“type” : “close-price”} }] }

Table 5: OpenTSDB におけるクエリ例②

前提条件 クエリ内容	<ul style="list-style-type: none"> ・ http: //localhost:4242 に対して OpenTSDB が開いている ・ Metric “nikkei-index” の、タグが、key は “type”、value は “close-price” である UnixTime が 1517055464 である時間に、12000 という値を保存する
	<ul style="list-style-type: none"> ・ http: //localhost:4242/api/put ・ Content-Type JSON ・ Body <pre>{ "metric" : "nikkei-index", "timestamp" : 1717055464, "value" : 12000, "tags" : { "type" : "close-price" } }</pre>

3.4.7 Grafana

Grafana は InfluxDB や Graphite 、 OpenTSDB などのデータベースに対してデータを視覚化させるためのツールで、 Web ブラウザから Grafana が開けることになるポート⁸にアクセスすることで、ユーザーフレンドリーなクエリ処理機構を用いてデータベースと通信を行い、得られた結果をグラフや表にすることができる。以下にその例を示す。

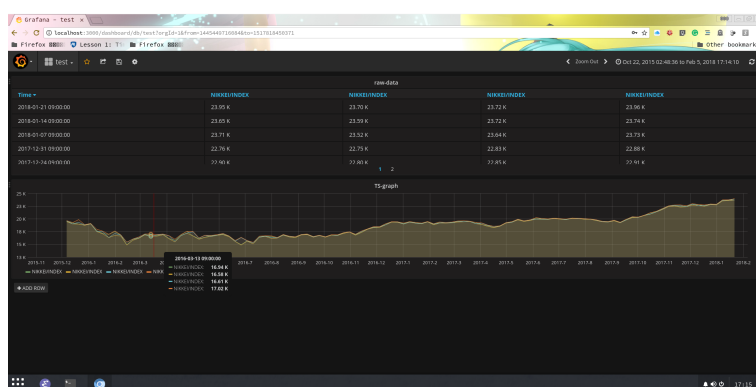


Figure 8: Grafana を用いた視覚化の例

⁸標準的には 3000 番

4 Clojure を用いた JVM における高速計算技法

本演習の開始時、自分のこれまでのプログラム言語学習経歴⁹から、Lisp の影響を受けた言語を選択することが最も演習に適していると考えており、更に HBase を活用することが決定していたため、Java に近く Lisp に近い言語として JVM¹⁰上で動作する Clojure を採用した。また演習を勧めていく上でフロントエンドの開発も行う必要が出てきたため、同様のシンタックスを用いる ClojureScript も採用し、この両方の言語を中心に学習した。

この章ではその内の Clojure における高速計算手法についての学習成果を完結にまとめる。

4.1 Clojure 自身の高速化手法

Clojure に GPU ライブラリ等を適用する以前に純粋な Clojure で最適化されたコードを書くことが高速計算を行う際に重要であることは言うまでもない。本演習では Clojure 自身の学習も兼ね Clojure for the Brave and True [6]、Clojure High Performance Programming [8] を教材に Clojure の最適化手法を学習した。具体的な学習内容としてはプログラム設計の見直しや基本的なシンタックスの見直し、効率の良いスレッド化・並列処理、プログラム全体のパフォーマンス測定法 (プロファイリング法) などである。成果としてどこまでの性能向上が認められたかを具体的に比較することは難しいが、性格の良いプログラムを書くことが出来るようになったのではないかと考えている。

4.2 ClojureCL

ClojureCL とは Clojure で OpenCL を用いるためのライブラリで C 言語で書かれる OpenCL のコードよりも簡潔なシンタックスで書くことが主張されている。このライブラリは JVM 上で OpenCL を動作させるため、JNI¹¹ を基盤としたライブラリである、jocl を用いており、非常に低レベルな部分で OpenCL とリンクしているため、OpenCL そのものの知識が必要となるものの、その速度を十分に体感することが出来る。本演習ではドキュメントに記載されたソースコードを移し、自分の環境においてそれを体験するまでを行った。2018 年 2 月 1 日においてはより深い理解を行うために、OpenCL in Action [11] を学習している。

4.3 Neanderthal

Neanderthal は、Intel[®] MKL を用いた高速行列演算・線形代数のためのライブラリである。その速度は GPU を利用するモードの場合には大規模サイズの行列演算に関しては、Clojure / Java ライブラリに対しても大凡 3000 倍の高速化を達成し、CPU を利用する場合においても純粋な Java よりも 100 倍の高速化を達成している。この高速化に関

⁹ 昨年の情報特別演習においては Python を中心に利用し、授業外で Common Lisp をある程度習得した

¹⁰ Java virtual machine

¹¹ Java Native Interface

しては後述する Clojure.core.matrix 系ライブラリに対してやや扱いが難しいが、その分大幅な高速化が望むことが出来る。またこのライブラリの依存関係は intel MKL のライブラリを含むことに意味があるため、intel MKL のライブラリ¹²をアプリケーション内に含んでしまえば標準的な環境で動作させることが出来る。

Single precision floating point (vs jBlas single precision):

Neanderthal and jBlas run on 4 cores, Vectorz doesn't have parallelization.

Since Clatrix does not support single-precision floating point numbers, I did this comparison with jBlas directly for reference (Neanderthal is still considerably faster :), but keep in mind that you can't use that from core.matrix.

Matrix Dimensions	Neanderthal	jBLAS	Vectorz	Neanderthal vs jBLAS	Neanderthal vs Vectorz
2x2	232.36 ns	362.00 ns	61.36 ns	1.56	0.26
4x4	237.72 ns	369.99 ns	129.34 ns	1.56	0.54
8x8	253.22 ns	476.57 ns	568.02 ns	1.88	2.24
16x16	372.30 ns	598.43 ns	3.45 µs	1.61	9.27
32x32	903.14 ns	1.37 µs	23.44 µs	1.52	25.96
64x64	2.80 µs	7.52 µs	218.64 µs	2.69	78.21
128x128	16.30 µs	31.48 µs	1.55 ms	1.93	94.85
256x256	126.25 µs	191.15 µs	12.28 ms	1.51	97.24
512x512	1.07 ms	1.25 ms	96.94 ms	1.16	90.21
1024x1024	7.93 ms	10.63 ms	778.46 ms	1.34	98.12
2048x2048	57.47 ms	104.95 ms	6.22 sec	1.83	108.16
4096x4096	470.12 ms	568.46 ms	50.06 sec	1.21	106.49
8192x8192	3.76 sec	4.85 sec	6.68 min	1.29	106.56

Figure 9: ベンチマーク Neanderthal Benchmarks より

¹²Arch Linux においては /opt/intel/lib,/opt/intel/mkl/lib

残念ながら本演習では成果物を稼働させるサーバをどのように扱うかについて協議が不足しており、必要とされるライブラリがその環境で入手することが出来るか不明であったため、実装に組み込ませることができなかったものの、実行例の一部をここで紹介することとする。

Listing 1: test-Neanderthal.clj

```

1  (ns test-neanderthal.core
2    (:require
3      [uncomplicate.neanderthal.core :refer :all]
4      [uncomplicate.neanderthal.native :refer :all]
5      [uncomplicate.neanderthal.linalg :refer :all]))
6
7  ;; -----
8  ;; sample1
9  (def a (dge 2 3 [1 2 3 4 5 6]))
10 ;; #RealGEMatrix[double, m:n:2x3, layout:column, offset:0]
11 ;;           ↓           ↓           ↓           ↗
12 ;; →         1.00      3.00      5.00
13 ;; →         2.00      4.00      6.00
14 ;; ↙         ↘           ↘           ↘         ↘
15
16 (def b (dge 3 2 [1 3 5 7 9 11]))
17 ;; #RealGEMatrix[double, m:n:3x2, layout:column, offset:0]
18 ;;           ↓           ↓           ↗
19 ;; →         1.00      7.00
20 ;; →         3.00      9.00
21 ;; →         5.00     11.00
22 ;; ↙         ↘           ↘           ↘         ↘
23
24 (mm a b)
25 ;; #RealGEMatrix[double, m:n:2x2, layout:column, offset:0]
26 ;;           ↓           ↓           ↗
27 ;; →        35.00     89.00
28 ;; →        44.00    116.00
29 ;; ↙         ↘           ↘           ↘         ↘
30
31 ;; -----
32 ;; sample2
33 (def A (dge 3 2 [1 0 1 1 1 2]))
34
35 (def or (qrfp A))
36 ;; #RealGEMatrix[double, m:n:3x2, layout:column, offset:0]

```

```

37 ;;           ↓           ↓           ↵
38 ;; →         1.41      2.12
39 ;; →        -0.00      1.22
40 ;; →        -2.41      3.15
41 ;; └──────────────────┐
42
43 (def r (dge 2 2 (:or or)))
44 ;; #RealGEMatrix[double, m:n:2x2, layout:column, offset:0]
45 ;;           ↓           ↓           ↵
46 ;; →         1.41      2.12
47 ;; →        -0.00      1.22
48 ;; └──────────────────┐
49
50 (def q (org or))
51 ;; #RealGEMatrix[double, m:n:3x2, layout:column, offset:0]
52 ;;           ↓           ↓           ↵
53 ;; →         0.71     -0.41
54 ;; →         0.00      0.82
55 ;; →         0.71      0.41
56 ;; └──────────────────┐
57
58 (def b (dge 3 1 [1 0 -2]))
59
60 (def x (mm (tri (trf r)) (trans q) b))
61 ;; #RealGEMatrix[double, m:n:2x1, layout:column, offset:0]
62 ;;           ↓           ↵
63 ;; →         1.00
64 ;; →        -1.00
65 ;; └──────────┐
66
67 ;; -----
68 ;; sample2 ~another solution~
69 (def A (dge 3 2 [1 0 1 1 1 2]))
70
71 (def b (dge 3 1 [1 0 -2]))
72
73 (def x_ (dge 2 1 (ls A b)))
74 ;; #RealGEMatrix[double, m:n:2x1, layout:column, offset:0]
75 ;;           ↓           ↵
76 ;; →         1.00
77 ;; →        -1.00
78 ;; └──────────┐

```

5 行目までの内容は依存関係の解決である。 Sample1 において単純な行列の足し算を

行っており、Sample2 は QR 分解を用いて $Ax = b$ の解を求めている。そして Sample2 ~ another solution ~ はこれを存在しているライブラリ関数を用いて解いたものである。両者の速度差はこのサイズの行列演算であればほぼないが、大規模サイズの行列であった場合は後者のほうが圧倒的に速い。後者も前者もほぼ直接 Fortran のライブラリである LAPACK¹³ を触っているため、計算途中で結果を取り出している前者のほうが効率が悪いのである。

このコードからわかるように、このライブラリが返す値は必ずしも求めている・求まった解答の形を示していない。この理由は Intel MKL 内のソースコードが与えられたデータのメモリに解答を書き込む性質があるためである。この破壊的代入を行う性質は高速化に大きな貢献をしているとともに、高い副作用と難解さを招いている原因であると考えられるが、このライブラリを利用するためには Intel MKL のドキュメントを精読することや、内部の Fortran による実装を眺める他にない。

4.4 Clojure.core.matrix

先に紹介した 2 つに対してこちらは非常におとなしいライブラリであり、Clojure の標準的な算術関数のラップや行列演算に関するライブラリの基盤を開発している。ライブラリの基盤というのは、Java などのオブジェクト指向言語におけるインターフェースのようなもので、実装すべき関数を先に示しておくことで、それを様々な手法によって実装・更新されていくことで長期的にそのライブラリ群を使うことが出来るという利点がある。本演習では、高速さが持ち味である vectorz-clj や、jblas を用いて実装されている関数が充実している clatrix の 2 つを検討しその両方を利用した。

4.4.1 vectorz-clj

Vectorz-clj は純粋に JVM で動作する高速な行列計算ライブラリを掲げており、導入にかかるコストの低さが魅力的である。問題としては行列の結合・切り出しに関する関数のいくつかの挙動が不自然であることで、その点を除いては後述する clatrix よりも概ね高速に動作する。

4.4.2 clatrix

clatrix は jblas をラップしたライブラリであり、行列計算において必要とされる関数をほぼすべて網羅しており、先述のライブラリで不足した部分を補完するために利用した。このライブラリを利用するためには jblas がインストールされていることが必要であるため、標準的な環境にこれを用いたアプリケーションを実行したとしても正常に動作しない。不足する関数を自力で補完することでこのライブラリを使用しないという選択肢もあるため、よりアルゴリズムの能力を磨いて自力で必要な関数を補完したいと考えている。

¹³Linear Algebra PACKage

4.5 ACM3 (Apache Common Math 3)

計算速度そのものの向上という意味ではこのカテゴリからはやや離れるが、良質なアルゴリズムによって様々な数学に関するライブラリとして ACM3 がある。本演習ではそのうちの、アメーバ法に関する関数を ARMA モデルにおけるパラメータ推定のために利用した。

5 ARIMA モデルによる時系列分析

(S)ARIMA モデルは時系列分析手法の一つであり、本演習の要とも言える機械学習手法である。本演習ではこのモデルとその周辺手法を実装した。

ARIMA モデルは 正確には “Autoregressive integrated moving average model” と呼ばれ、概要は ① I ② AR ③ の 3 要素によって構成されており、この適用できるデータは「非定常過程が見られる」時系列データ¹⁴である。定常過程と非定常過程の違いについては後述する 5.2 単位根検定 で説明を行うが、時系列データには非定常過程を持っている場合が少なからずあり、更に ARIMA モデルを ARMA モデルに変換することは非常に容易であるため ARIMA モデルを実装することによって実質的に定常過程、非定常過程両方の性質を持った時系列データを分析することが出来る。また ARIMA モデルの分析対象はある時系列データ内の時点間の関係である、自己相関¹⁵にある。

また ARIMA モデルの発展として季節階差を削除することを目的とした SARIMA モデルもあるが、こちらは 5.7 SARIMA モデルについて にある理由により開発を中断した。

以降にこのモデルの実装において必要になる知識を紹介する。尚ここで使用する式の書式に関しては 10 付録に記載する。

5.1 BackShift 記法

BackShift 記法とは、記号 “B” という演算子を用いた時系列データを表現するための手法であり、以下のような使われ方をする。[10]

$$(1 - B)Y_t = 1Y_t - BY_t = Y_t - Y_{t-1} \quad (1)$$

$$(1 - B)^2Y_t = (1 - B)(1 - B)Y_t \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1 - B^k)Y_t &= Y_t - B^kY_t \\ &= Y_t - Y_{t-k} \end{aligned} \quad (3)$$

但し Y_t は時系列データを表しており、また今後の説明のため、 t が大きいほど最近のデータであるものとする。

式 (1) は一次階差を表しており、後述する AR モデルでは AR(1) の場合に用いられる。式 (2) は二次階差を表しており、同様に AR(2) の場合に用いられる。式 (3) はある区間を開けて階差を取っており、これは季節階差を取る際等に用いられる。季節階差という考

¹⁴ 「定常過程を持っている」時系列データは ARMA (Autoregressive moving average) モデルでの推定となる

¹⁵ 系列相関ともいう

え方から一旦離れてわかりやすい例を挙げるとすれば、時系列データが月単位のデータであった場合、昨年と今年の差分を取る場合には、 $(1 - B^{12})Y_t$ という形をとることになる。

この記法を用いることで n 次階差や季節階差を表しやすくなり、また関数型言語などにおいてはその実装の手がかりを得ることが出来る¹⁶。

5.2 単位根検定

実世界に存在する多くの時系列データは非定常過程を持っていることが示唆されている。この示唆について Jackknifing multiple-window spectra [15] から有名な一説を引用すると以下ようになる。

Experience with real-world data, however, soon convinces one that both stationarity and Gaussianity are fairy tales invented for the amusement of undergraduates.

- Thomson, 1994

ARIMA モデルでは「非定常な」時系列データを 階差 を取ることによって「定常な」時系列データに変換し ARMA モデルに適用する。ARIMA モデルにおける I 部分には d 次の階差を取るという意味が含まれている。一般にこの階差は一次であるらしいが、実装側では以降に紹介する ADF 検定 をおこなうことで定常性を判定した。またこの他にも、KPSS 検定や Ljung-Box 検定などがあるが、単位根検定という観点から KPSS 検定のみを追加で紹介することとする。

以降における y_t について定義する。 Y_t を議論の時系列データとして、

$$y_t = Y_t - E(Y_t) = Y_t - \mu - \mu_1 t \quad (4)$$

正確ではないが、ここにおける μ は $t = 0$ における時系列データの値、 μ_t は 時系列データの傾きと考えることが出来る。

5.2.1 定常性の性質

ここまで“定常性”という言葉を用いてきたが、この定常性について簡単に触れておく。定常性とは同時分布が時間を通じて変わらないこと¹⁷を意味しており、以下のような性質を持っている。

¹⁶ $(1 - B^n)$ という意味を持つ関数を定義することで理論上 ARIMA モデルに必要な階差に関する関数は満足することが出来る

¹⁷この同時分布が同一であることを持つ時系列過程を特に“強定常である”という

- $E(Y_t) = \mu$
母平均 (population mean) は時点 t に依存しない。
- $Var(Y_t) = \gamma_0$
分散 (variance) は 時点 t に依存しない
- $Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j$
共分散 (covariance)

18

は 時点 t に依存しない

更に $E(Y_t) = \mu \wedge Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j$ のみである場合を特に “弱定常である” という。

逆に非定常過程の時系列データに目を向けたとき、経済学上重要な要素に以下のようなものがある。

- 確定的トレンド (deterministic trend)
 $Y_t = \beta t + \epsilon_t$ where $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ と表され、 $E_{DT}(Y_t) = \beta t$ 、 $Var_{DT}(Y_t) = \sigma^2$ である。こちらは直ちにトレンド定常 (trend stationarity) という形に変形することが出来る。
- 確率的トレンド (stochastic trend) 又は単位根過程
 $(1-B)Y_t = \beta + \epsilon_t$ wherer $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ と表され、 $E_{ST}(Y_t) = \beta t$ 、 $Var_{ST}(Y_t) = t\sigma^2$ である。
確定的トレンドに比べこちらは時間が経過する程に大きな影響を及ぼすことになる。こちらは後述する単位根検定として利用できる ADF 検定や KPSS 検定を行うことで発見することが出来る。
- 構造変化
その時系列が予想しない変化 (経済データであるならば、例えば突発的な戦争や飢餓) を受けた際に起こる。本来はこれに対する検定も用意するべきであったが、どのような条件をフラグとして検定が行われるべきであるかが理解できなかったため実装することができなかった。

¹⁸ $\sigma_{Y_t Y_{t-j}}$ と表すこともある

Simulating DT and ST time series

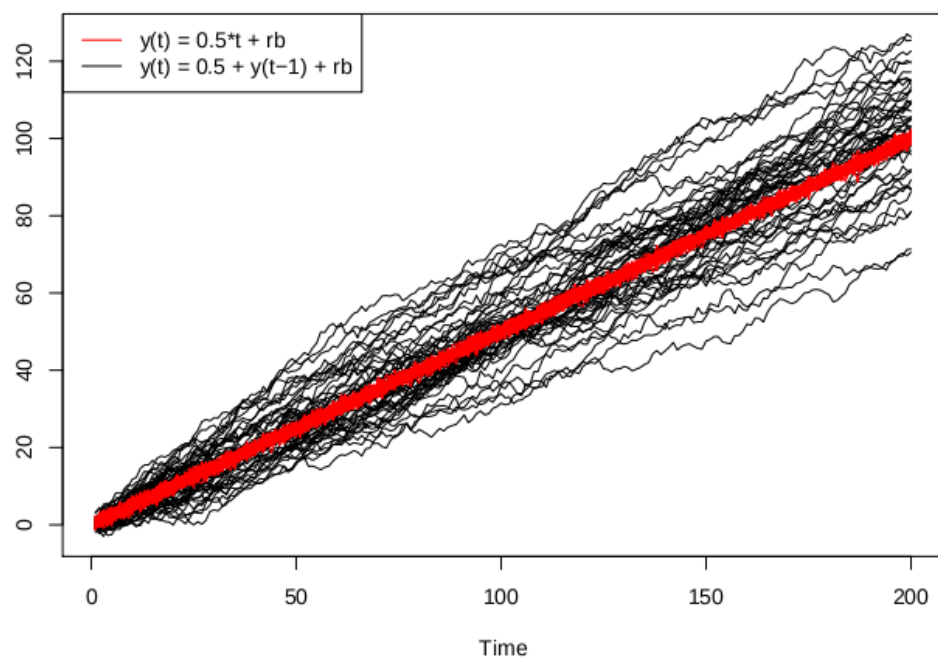


Figure 10: difference between Deterministic and Stochastic trend [5]

5.2.2 ADF 検定

ADF 検定 (Augumented Dickey-Fuller test) は DF 検定 (Dickey-Fuller test) の拡張である。

DF 検定とは Y_t について自己回帰モデル AR(1) を作成し以下の条件を用いて仮説検定を行う手法である。

AR(1) モデル $Y_t = \theta Y_{t-1} + \epsilon_t$ where $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ とする。(AR モデルそのものについては 5.3 AR モデル で解説を行う)

単位根を持っていることを帰無仮説とし、定常であることを対立仮説であるとする。

つまり、帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_A は以下のように定義できる

$$H_0 : \theta = 1 \quad (5)$$

$$H_A : \theta < 1 \quad (6)$$

ここからモデルを変形し、以下の式を立てる。

$$\Delta Y_t = (\theta - 1)y_{t-1} + \epsilon_t \quad (7)$$

上式において、 $\pi = (\theta - 1)$ と置換した場合、帰無仮説と対立仮説は以下のように更新される。

$$H_0 : \pi = 0 \quad (8)$$

$$H_A : \pi < 0 \quad (9)$$

この検定値は簡単な t 検定によって求めることが出来、以下の式によって得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= (\hat{\theta} - 1)/se(\hat{\theta}) \\ &= \hat{\pi}/se(\hat{\pi}) \end{aligned} \quad (10)$$

これを自ら指定した有意水準 (5% 又は 1% であることが多い) において検定する。この検定手法では対立仮説が成り立つならば定常性を認めることが可能である。混乱を招かないために強調するが、この検定における帰無仮説は、“単位根を持っている” ことである。これが棄却されれば “定常である” ことを認めることができる。

また上の場合において、元データの一次階差と取っていることが明らかであるが、この検定で定常であると認められた場合、このデータは 1 次の単位根 があるという。同様に d 次の単位根がある とは、d - 1 次までの単位根検定においてすべて 非定常である と判断され、d 次において初めて 定常である と判断されたことを示している。

DF 検定が AR(1) モデルに対する検定であることにたいして、ADF 検定は AR(n) モデルにまで対象を拡大したものであり、一般式は難解であるため省くが、例えば AR(3) モデルは以下のように示すことが出来る。

$$Y_t = \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \theta_3 Y_{t-3} + \epsilon_t \text{ where } \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (11)$$

$$Y_t - Y_{t-1} = (\theta_1 - 1)Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \theta_3 Y_{t-3} + \epsilon_t \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1)Y_{t-1} \\ &\quad + (\theta_2 + \theta_3)(Y_{t-2} - Y_{t-1}) + \theta_3(Y_{t-3} - Y_{t-2}) + \epsilon_t \\ &= (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1)Y_{t-1} + (\theta_2 + \theta_3) * \Delta Y_{t-1} + \theta_3 \Delta Y_{t-2} + \epsilon_t \end{aligned} \quad (13)$$

これより $\pi = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1)$ において DF 検定と同様に t 検定を行う。

尚この検定にはいくつかの追加要素として、定常過程にある時系列データの平均値を考えるパターンや、時系列データに傾きがある場合を考慮したパターンがある。これらは人為的にデータを確認することで決定するが、R 言語や Python などの ADF 検定ではすべてのパターンを一度に実行している場合がある。これは ADF 検定そのものは計算コストが低いため、すべてのパターンを網羅しても問題がないためである。

5.2.3 KPSS 検定

KPSS 検定 (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test) とは先述の ADF 検定に対して帰無仮説と対立仮説を反転させたものとイメージすることが出来る。この検定においては以下の式を中心に展開する。

$$\begin{aligned} Y_t &= \xi_t + \epsilon_t \\ \text{where } \xi_t &= \xi_{t-1} + v_t \quad v_t \sim iid(0, \sigma_v^2) \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (14)$$

この式における ξ_t はランダムウォークを示している。尚ランダムウォークとは次に現れる値が確率的にランダムであることを示す。また、 ϵ_t はその性質から定常過程を示している。

仮に $\sigma_v^2 = 0$ であるとしたとき、 $\xi_t = \xi_0$ であることから上式に影響を加える要素は ϵ_t のみとなり、つまり Y_t は定常であるとみなすことが出来る。これを用いて上式を変形すると以下ようになる。

$$Y_t = \hat{\mu} + \hat{\epsilon}_t \quad (15)$$

ここで仮説検定を行う。帰無仮説は 定常過程を示している式 (15) であり、つまりは式 (14) における $\sigma_v^2 = 0$ である。対立仮説はこの逆であり、非定常であること、つまり $\sigma_v^2 > 0$ である。

$$H_0 : \sigma_v^2 = 0 \quad (16)$$

$$H_0 : \sigma_v^2 > 0 \quad (17)$$

検定は以下の式を用いて行う。

$$KPSS = 1/T^2 (\sum_{t=1}^T S_t^2) / \hat{\sigma}_\infty^2$$

$$\text{where } S_t = \sum_{s=1}^t \hat{e}_s \quad (18)$$

また上式における $\hat{\sigma}_\infty^2$ とは ϵ_t の長期変動に関する HAC 推定量¹⁹ である。
以下に σ_∞^2 の例を示す。[7]

$$\sigma_\infty^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/TE((\sum_{t=1}^T \epsilon_t)^2)) \quad (19)$$

ADF 検定あったようにこちらにもいくつかのパターンがあり、トレンド定常の場合などの場合に合わせた形に式(14)が存在し、それに伴って仮説検定の内容に多少の変化がある。

実装においては HAC 推定量を実装することができなかったため、KPSS 検定も実装することができなかった。

5.3 AR モデル

AR(p) モデル (自己回帰モデル) は以下の式で表すことが出来るモデルである。重回帰モデルが説明変数の線型結合を用いて関心のある変数を予測していることに対して、自己回帰モデルは説明変数を過去の観測値に置き換えたものであると言える。

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$= c + \sum_{i=1}^p (\phi_i Y_{t-i}) + \epsilon_t$$

$$\text{where } c \text{ is constant}$$

$$\epsilon \sim iid(0, \sigma^2) \quad (20)$$

式からわかるように c は定数項である。

5.4 MA モデル

MA(q) モデル (移動平均モデル) は以下の式で表すことが出来るモデルである。同様に重回帰モデルの説明変数を過去のノイズの重みに置き換えたものであると言える。これとよく似たものに移動平均という手法があるが、移動平均は過去の値のサイクルを推定するために用いられ、MA(q) モデルは将来の値を予測するために用いられる。²⁰

¹⁹特に Newey-West 推定量を用いられることが多い

²⁰移動平均と MA モデルは正確には別のものであり、混同されるべきではない。MA モデル自体は有限インパルス応答に近い発想である。cite:2012 カルマンフィルタの基礎

$$\begin{aligned}
Y_t &= c + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} \\
&= c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^q (\theta_i \epsilon_{t-i})
\end{aligned} \tag{21}$$

5.5 ACF と PACF

ARMA モデルにおいて²¹、AR(p), MA(q) の p, q の値を決定する際の指標となるものに、ACF、PACF がある。この2つはグラフによって視覚化され、この2つのグラフから p, q の値は手動で決定される。²² [13]

5.5.1 ACF

ACF (autocorrelation function) は自己相関係数とも呼ばれ、元データとある時点分だけずらしたデータとの相関係数を計算する。つまり以下の式を計算することになる。尚、 $t-s$ はそのずらした量 (ラグと呼ぶ) である。またこの場合に求まる値を、 $t-s$ 次の ACF と呼ぶことがある。

$$\begin{aligned}
\rho(s, t) &= (E((Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)))/(\sigma_{Y_t} \sigma_{Y_s}) \\
&= (E((Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)))/\sigma^2 \\
&= Cov(Y_t, Y_s)/\sigma^2
\end{aligned} \tag{22}$$

上式では $\sigma_t \sigma_s = \sigma^2$ が成り立っている。これは定常過程を持つ時系列データの分散が時点に依存しないためである。

尚 ACF と PACF には閾値があり、この閾値を超えた値を元に p, q を考えていく。以下にその境界値を求める式を示す。

$$threshold = \pm 2/\sqrt{n} \tag{23}$$

5.5.2 PACF

PACF (partial autocorrelation function) は偏自己相関とも呼ばれ、ある時点とそこからある時点分だけ離れた時点の二点間の、その間の存在の影響も考慮した場合における相関関係である。一般式は複雑であるため、1次、3次の偏自己相関の式を示す。尚、1次の PACF は1次の ACF に等しい。計算の都合上、k 次の偏自己相関を $\phi(k, k)$ と表す。

$$\phi(2, 2) = Cov(Y_t, Y_{t-2}|Y_{t-1})/(\sigma_{Y_t|Y_{t-1}} \sigma_{Y_{t-2}|Y_{t-1}}) \tag{24}$$

$$\phi(3, 3) = Cov(Y_t, Y_{t-3}|Y_{t-1}, Y_{t-2})/(\sigma_{Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}} \sigma_{Y_{t-3}|Y_{t-1}, Y_{t-2}}) \tag{25}$$

²¹ ACF, PACF は定常過程であるデータに適用される

²² R 言語における auto.arima 関数などはこのような手間なしでモデルを決定することが出来るが、これは p, q などの値を元データにかかわらず適当に複数定めモデルを作成し、AIC などを用いて最も良いモデルを選択しているからである。

このように式がラグごとに異なるため、実装上計算には以下の行列式を用いた Durbin-Levinson recursion が用いられることが多い。尚以下の式における ρ_s とは 自己相関 $\rho(s, t)$ を示している。

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(k, 1) \\ \phi(k, 2) \\ \phi(k, 3) \\ \vdots \\ \phi(k, k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \rho(3) \\ \vdots \\ \rho(k) \end{pmatrix} \quad (26)$$

偏自己相関 の値 $\phi(i, j)$ は AR モデルに似た回帰式を得られる。以下の場合 $\phi(2, 2)$ についての例である。

$$\hat{y}_t = \phi(2, 1)y_{t-1} + \phi(2, 2)y_{t-2} + \epsilon_t \quad (27)$$

$$\text{where } \hat{y}_t = Y_t - \mu \quad (28)$$

5.5.3 p, q の決定法

AR(p)、MA(q) モデルの p, q の値を考える際には先述の通り ACF と PACF を用いることがある。この2つのグラフと p, q の関連について簡単に説明する。説明のために具体的なグラフ A, B を以下に示す。

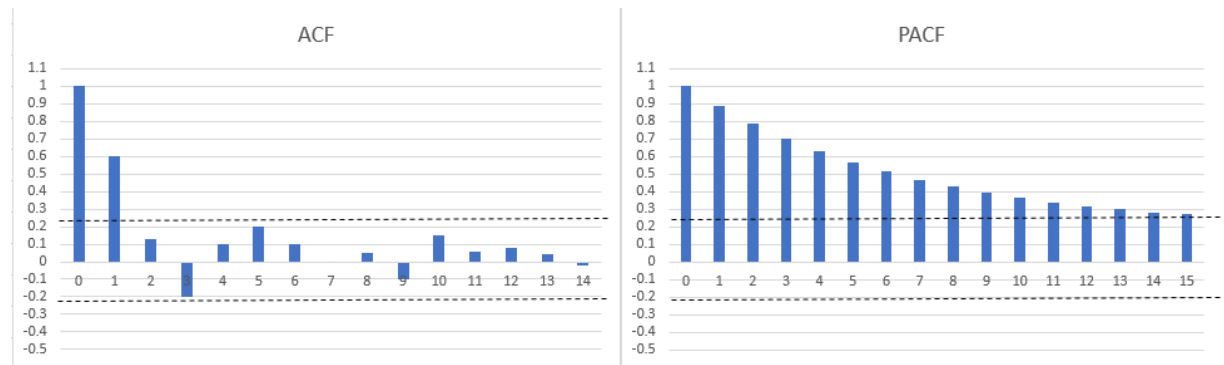


Figure 11: グラフ A

簡潔に言うならば ACF と q、PACF と p が強く関係している。

グラフ A に着目すると、自己相関 の 1 次までの値が閾値を大きく超えていることがわかる。自己相関 はラグ k の共分散であり、偏自己相関 と違って 自己相関 はラグ k-1 やそれ未満の値の影響を考慮していない。よってノイズの重みを示している MA(q) モデルの、q の値が決まると考えることができ、この例で言うならば $q = 1$ であると考えることが出来る。

同様にグラフ B に着目すると、偏自己相関 の 2 次までの値が閾値を大きく超えている

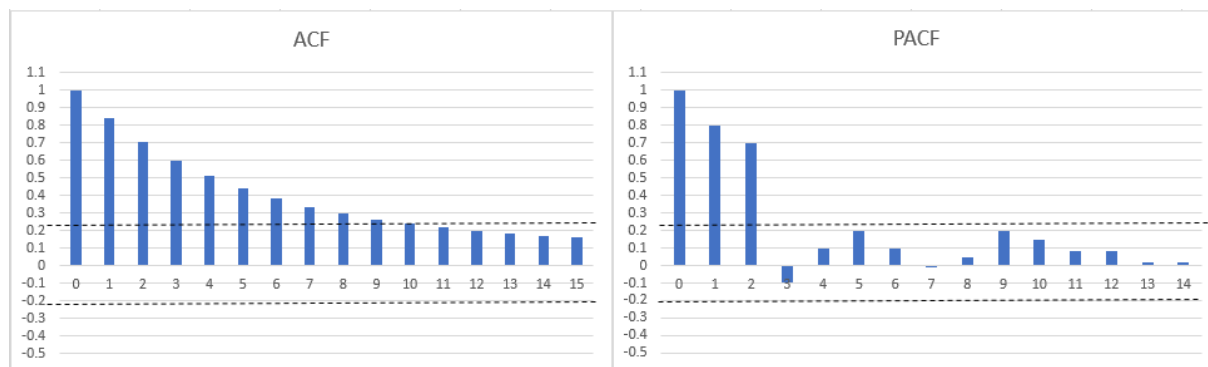


Figure 12: グラフ B

ことがわかる。偏自己相関 で説明したように、偏自己相関 の値は AR モデルに非常に近い形で用いることができ、このことから AR(p) モデルの p の値が決まると考えることができることがわかり、 $p = 2$ がふさわしいことがわかるだろう。²³

尚この p, q の値は観測者によって異なることがあるため、完全な正解があるわけではない。

MA モデルにおける PACF、AR モデルにおける ACF のグラフは先細りの形を示している。これは上に示した 2 つのグラフは極めて理想的な MA / AR モデルを示していることを意味している。ARMA モデルの場合は ACF、PACF は共に先細りの形ではないため、この 2 つのグラフを見て係数 p, q を決定しなければならない。ところが AR モデルと MA モデルを同時に用いる場合、お互いの影響を打ち消し合ってしまう可能性があり、この係数決定は慎重に行わなければならない。ここで階差の次数 d も合わせた詳しい係数の決定基準と性質を以下に示す。[9] 尚ここで用いる“カットオフ”とは、グラフ A の ACF グラフにおける 0 ~ 2 次の自己相関 から 3 次の自己相関 への変化を意味する。

1. その系列の 自己相関 が高い場合にはより高い階差を取る必要がある
2. 1 次の 自己相関 が 0 以下の場合、或いは 自己相関 がすべて小さくパターンが見られない場合には、それ以上の階差を取る必要はない
1 次の 自己相関 が -0.5 以下の値を取っているならば、階差を取りすぎている可能性がある
3. 階差の最もふさわしい次数は、多くの場合、標準偏差が最も低い階差の次数になる

24

²³ 詳しい証明について調べたものの、発見ができなかったため 引用を行ったサイト cite:stat510 に書かれた内容を元に記述した

²⁴ これは階差は一般的には一次であるらしいという事実と反するが、階差が一般的に一次であるらしいという根拠が見つからなかったため検証を行うことができなかった

4. 階差を取らない、つまり 0 次階差を取るようになった モデル は元の時系列データが定常であることを示している。
1 次階差を取るようになったモデルは元の時系列データが何らかの傾向（ランダムウォークや Simple Exponential Smoothing type model²⁵）を持っていると考えられる。
2 次階差を取るようになったモデルは元の時系列データが time-varying trend ²⁶（random trend や Linear Exponential Smoothing type model²⁷）を持っていると考えられる。
5. 階差を取らないモデルは通常定数項を持っている。2 次階差を持つモデルは通常定数項を持たない。
1 次階差を取るモデルで、元の時系列が 0 でない傾きを持っているならば 定数項を考慮する必要がある。
6. 差分を取った時系列の PACF グラフが鋭いカットオフを示している場合、或いは更に 1 次の自己相関が正である場合にはモデルに AR モデルを追加することを検討する必要がある。
AR(p) モデルの p の値はカットオフを示している次数である。(グラフ B ならば $p = 2$)
7. 差分を取った時系列の ACF グラフが鋭いカットオフを示している場合、或いは更に 1 次の自己相関が負である場合にはモデルに MA モデルを追加することを検討する必要がある。
MA(q) モデルの q の値はカットオフを示している次数である。(グラフ A ならば $q = 1$)
8. ARMA モデルが差分を取った時系列に適合する場合には p, q の値をそれぞれ 1 下げた場合のモデルを検証する必要がある。
ARMA(p, q) ならば ARMA(p - 1, q) 、 ARMA(p, q - 1)
特に ARMA モデルのパラメータ推定値が収束するために 10 回以上の 反復を必要とした場合にはこれを行うべきである。
9. AR モデルに単位根が含まれている場合 ²⁸ 、 p の値を 1 下げて階差の次数を 1 上げるべきである。

²⁵単純指数平滑法モデルとも言う

²⁶翻訳が見つけることができなかったため意識をすると、時間的変動傾向

²⁷Brown の線形指数平滑法モデルとも言う

²⁸AR モデル部分のパラメータの合計値が大凡 1 であるとき

10. MA モデルに単位根が含まれている場合²⁹、 q の値を 1 下げて階差の次数を 1 下げるべきである。
11. 長期予測が奇妙な動きを見せている場合には、AR モデルか MA モデルに単位根が存在している可能性がある。

5.6 パラメータ推定

ここまでにおいて ARIMA モデルの係数 p , d , q を決定することが出来る。ここから AR モデル、MA モデルそれぞれにおける、 ϕ 、 θ の値を推測する手法を説明する。このパラメータ推定は最尤推定 (maximum likelihood) や CSS (conditional sum of squares) が用いられるようである。本演習では対数尤度関数に対してアメーバ法を適用してパラメータ推定を行った。これに際しアメーバ法の適用や、対数尤度関数の実装などについては Clojure for Data Science [4] を活用した。

5.6.1 対数尤度関数

本演習では計算の都合上対数尤度関数を用いて最尤推定を行った。対数尤度関数に関しては既存のコードを読んで実装し、実装後に資料 [1] を用いて学習を行った。しかし理解が曖昧な部分が多いため本演習では詳細を示すことができなかった。

5.6.2 アメーバ法

アメーバ法とは Nelder-Mead 法とも呼ばれるパラメータ推定などに用いられる手法であり、本演習では対数尤度関数に対してこれを適用した。

アメーバ法の特徴に目的となる関数の導関数が不要であることがあり、これは本演習における対数尤度関数などの複雑な関数に対して有効なアルゴリズムである。アメーバ法の基本的なアルゴリズムは、反射、収縮、膨張の三種類であり、最適解の存在する位置に向かってアメーバのように近づいていくことからこの名前がついている。

具体的な動きを二次元の図で表したものを引用 [2] すると以下のようになる。 T_i はアメーバの領域を示しており、これは議論の次元数に対して 1 つ多い頂点を持っている (この場合では 2 次元に対して 3 頂点)。番号 i は動きの順番を示しており、反射³⁰、縮小を行いながら収束していることがわかる。拡大についてはこの図では見られない動きであるが、頂点を動かした先がより求めたい最大/最小に近いと判断できた場合に、そのまま頂点を引き伸ばす様子を考えることができる。

本演習では詳しいアルゴリズムの実装については調べず、ACM3 に含まれている関数をそのまま用いた。

²⁹MA モデル部分のパラメータの合計値が大凡 1 であるとき

³⁰反転、或いは移動と考えることも出来る

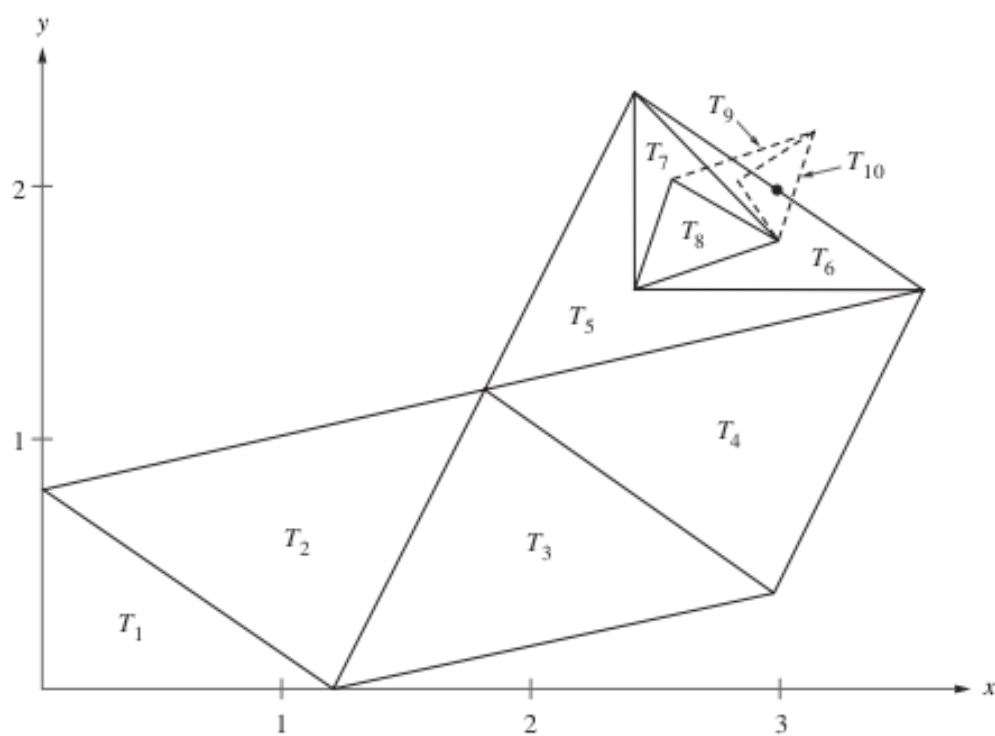


Figure 8.10 The sequence of triangles $\{T_k\}$ converging to the point $(3, 2)$ for the Nelder-Mead method.

Figure 13: アメーバ法の概略図

5.6.3 AIC

AIC (赤池情報量) はモデルの過適合などを判定するための指標であり、求めることができた対数尤度の適合度に対して p, q の値を考慮して計算される。具体的には以下の式を用いた。

$$AIC = 2 * (p + q + 1) - 2 * \log L \quad (29)$$

尚、 L とは対数尤度である。AIC を最小化させることがモデルの適合度を上げることになる。

5.7 SARIMA モデルについて

本演習においては SARIMA (seasonal arima) モデルを作成することが目標であったが、現実のデータにおいて等間隔で周期を持ったものが少ないことが実装中に判明した。例えば、月単位のデータは 1 年周期 (=12ヶ月周期) で階差を取ることが出来るが、週単位のデータは 1 年周期 (= 52.1429) で階差を取ることができない。週単位のデータを近似的に 1 年周期で階差を取る、つまり数年ごとに調整を入れる案も考え実験をしたものの、予測を行った際における調整した分の補完が困難を極めたため実装を中断した。

しかしながら季節階差を取る、という発想自体は間違いではない。具体的にどのような式に基づいて SARIMA モデルが作成されているかを $SARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$ を用いて説明する。尚説明の簡略化のため定数項は無視している。³¹SARIMA(非季節部分のパラメータ p, d, q)(季節部分のパラメータ P, D, Q)-{季節階差のラグ}}

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \phi'_1 B^{12})(1 - B)(1 - B^{12})Y_t = (1 + \theta_1 B)(1 + \theta'_1 B^{12})\epsilon_t \quad (30)$$

- $(1 - \phi_1 B)$
非季節部分の AR(1) モデルの項
- $(1 - \phi'_1 B^{12})$
季節部分の AR(1) モデルの項
- $(1 - B)$
非季節部分の階差
- $(1 - B^{12})$
季節部分の階差

³¹{

- $(1 + \theta_1 B)$
非季節部分の MA(1) モデルの項
- $(1 + \theta'_1 B^{12})$
季節部分の MA(1) モデルの項

6 Clojure/ClojureScript を用いた Web 開発

本演習では開発言語として Clojure/ClojureScript を取り上げた。この 2 言語は Java/JavaScript をカバーした言語であるが、Java/JavaScript とは違い 2 つの言語に大きな差はない。またこの言語は Web 開発に適した言語であり、その WebSocket の質などは極めて優秀であるという比較³²もある。更に Lisp であるという特性から HTML に代表されるマークアップ言語、SQL などのドメイン特化言語を記述することが容易である。また 4 先述のように高速計算も可能であることから ARIMA モデルに関するライブラリ作成、OpenTSDB への接続、バックエンド、フロントエンドを実質一つのシンタックスで開発することができる。

この章では実際に Web 開発で用いたライブラリなどを簡潔に示す。

6.1 Clojure によるバックエンド開発

バックエンド開発は Luminus Framework を用いて行った。その際 Web API としての動作を確認するために Swagger UI を用いた。

6.1.1 Luminus Framework

Luminus Framework とは Clojure の Web 開発に関するライブラリを統合したフレームワークである。ライブラリへのアクセスが極めて単純であり、それぞれのライブラリを好きなライブラリへ置換することも容易であるため、極めて自由度の高いフレームワークとなっている。そういった意味では Luminus はフレームワークと言うよりも推奨ライブラリのライブラリと言った方が近いのかも知れない。また様々なデータベースへのアクセスもサポート³³されており、本演習では SQL として PostgreSQL を用いた。また Luminus には教科書とも言える書籍 [12] があり、これをチュートリアルとして活用することが出来る。

³²[\[https://hashrocket.com/blog/posts/websocket-shootout\]](https://hashrocket.com/blog/posts/websocket-shootout)[Websocket Shootout: Clojure, C++, Elixir, Go, NodeJS, and Ruby]

³³OpenTSDB への接続に関するサポートはなかったため、この部分の一部を自作する必要があった

6.1.2 Swagger UI

Swagger UI とは Swagger Tools と呼ばれる RESTful API を作成するための支援ツール群の一つであり、ブラウザから API の動作を確認することが出来る。本演習では Swagger Tools の一部である Swagger UI のみを用いているが、これは ① 関数型言語の特性の一つとして、データの源泉からデータの変換が終了するまでをひと続きに記述することが容易であるということから、サーバとクライアントのやり取りを行う部分のみを独立して記述することが効率的でないと判断したため ② Clojure の REPL³⁴ 上で開発を行っているためブラウザから API の確認を行う以上の高機能を求めているため ③ Luminus に含まれるライブラリである Compojure-api のサンプルでは Swagger UI を API の確認以上の目的で使用していないためである。

以下に実際に実装で用いた画面例を示す。

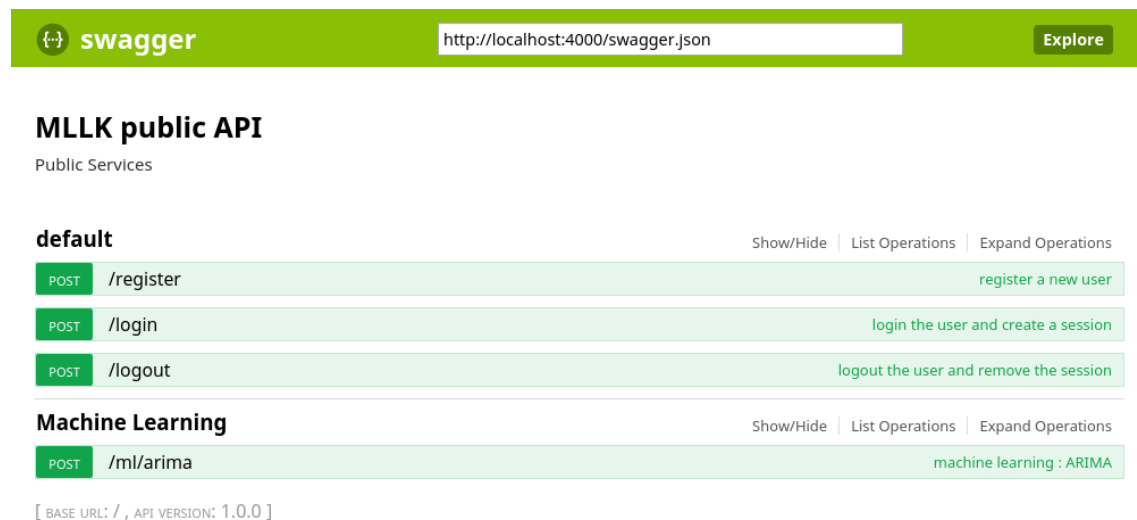



Figure 14: Swagger UI の利用例①

default という部分に含まれる POST メソッドは上から順に①ユーザ登録②ログイン認証③ログアウト、を意味している。これらの項目をクリックすることで必要なクエリやリクエストボディを入力することが出来る欄を開くことが出来る。開発者はここにテストとしてクエリを書き込むことでコードの妥当性を確かめることが出来る。

6.2 ClojureScript によるフロントエンド開発

フロントエンド開発に関しては Luminus Framework ある機能に加え、React.js の ClojureScript ラッパーである Reagent、React に特化された CSS フレームワークである Material UI を用いて作成した。

³⁴Read-Eval-Print Loop 書いたコードを評価することでそれを反映することが出来る


swagger

[Explore](#)

MLLK public API

Public Services

default [Show/Hide](#) [List Operations](#) [Expand Operations](#)

POST

/register

register a new user

Response Class (Status 200)

Model

Example Value

```

{
  "result": "string",
  "message": "string"
}

```

Response Content Type

Parameters

Parameter	Value	Description	Parameter Type	Data Type
UserRegistration	<div>(required)</div> <div></div> <div>Parameter content type: <input type="text" value="application/json"/></div>		body	<div>Model</div> <div>Example Value</div>

```

{
  "name": "string",
  "pass": "string",
  "pass-confirm": "string"
}

```

Try it out!

Figure 15: Swagger UI の利用例①

6.2.1 基本的な開発

Luminus Framework には Reagent を追加するオプションがあり、これを中心にフロントエンド側の開発を行った。またリクエスト処理などは Ajax を用いて実装した。

6.2.2 Reagent

Reagent は React.js の ClojureScript ラッパーである。React.js とは UI を作成するための JavaScript ライブラリであり、ボタンやスライダーなどのコンポーネントを簡単に作成することが出来る。Reagent では HTML との連携を非常に簡単に行えるようになっており非常に見やすいシンタックスを提供する。以下に実際に実装に用いた例を紹介する。

Listing 2: login-form 関数

```
1 (defn login-form []
2   (let [fields (atom {})] ;; 局所変数
3     error (atom nil)]
4     (fn [] ;; 描画時に呼び出される無名関数として定義
5       [c/modal ;; 自作関数であるモーダルウィンドウのコンポーネント呼び出し
6        [:div "MLLK Login"] ;; モーダルのタイトル <div> 要素として記述
7        [:div ;; モーダルの内容
8         [:div.well.well-sm ;; well well-sm は bootstrap のクラス
9          [:strong "* required fields"]]
10         [c/text-input "name" :name "enter a pass user name" fields] ;; 自作のテキストフィ
11         (when-let [error- (:name @error)]
12           [:div.alert.alert-danger error-]) ;; 名前に関するエラーを表示
13         [c/password-input "password" :pass "enter a password" fields]
14         (when-let [error- (:pass @error)]
15           [:div.alert.alert-danger error-])
16         (when-let [error- (:server-error @error)]
17           [:div.alert.alert-danger error-])]
18        [:div ;; <div><button type="button" class="btn btn-primary" ...>...</button><but
19         [:button.btn.btn-primary
20          {:on-click #(login! fields error)} ;; ボタンクリック時の動作を指定 (自作の関数 log
21          "Login"]
22         [:button.btn.btn-danger
23          {:on-click #(session/remove! :modal)}
24          "Cancel"]]])))]
```

一見すると非常に入り組んだ構造に見えるかも知れないが、それは HTML を記述している中に JavaScript を直接埋め込んでいるような記述をしているためである。しかし HTML と JavaScript 部をまとめて記述することで どこに何があるのか という疑問を持

たずに済む。また細かいパーツに関数として分割することが出来るため³⁵ 上例のようにログインフォームのみを独立して記述をすれば全体として大きな構造が必要となっても小さな構造体に問題を分割することが出来る。

以下がこのソースコードを中心にして作成された login-form である。

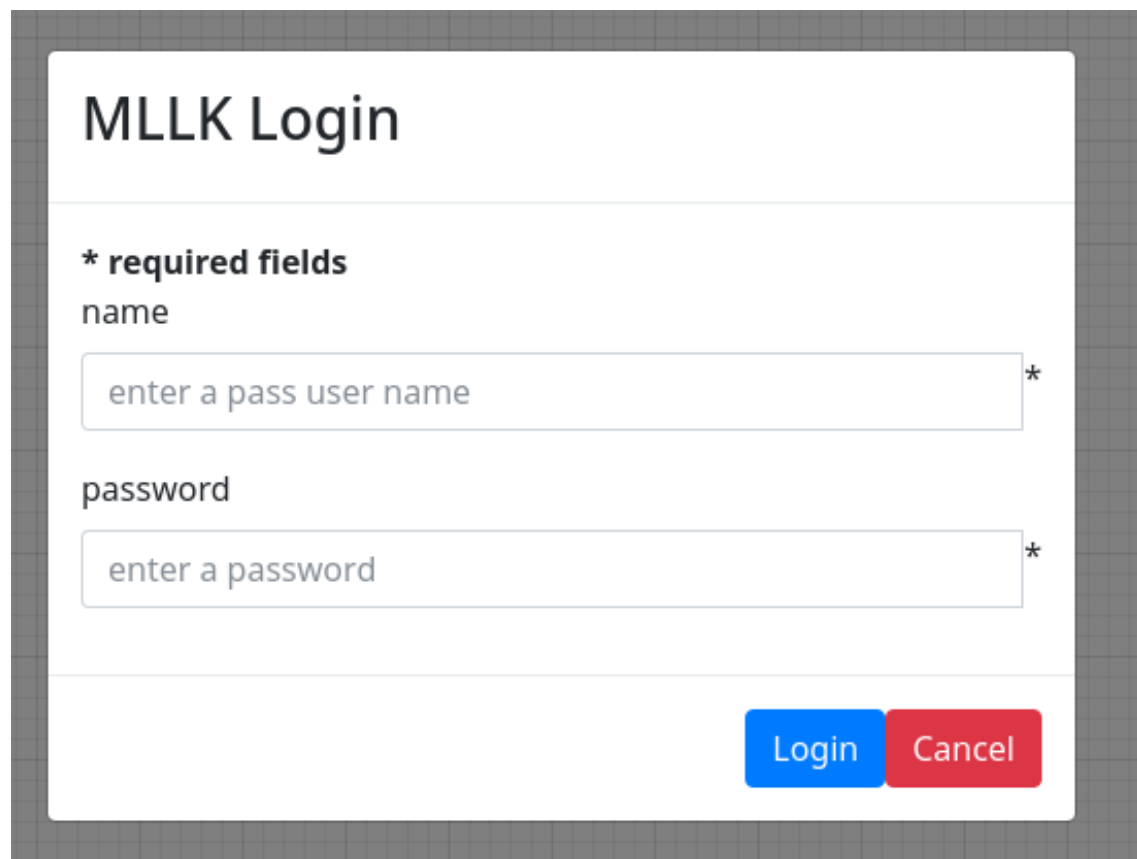


Figure 16: login-form

7 MLLK の開発

本演習では紆余曲折があったものの最終的には MLLK (Machine Learning Learning Kit) という Web アプリケーションのベータ版を開発した。完成まで導くことができなかった原因は、公開に足る性能を達成できなかったこと、アプリケーションの安全性が確立できなかったこと、データベースサーバなどの環境が特別であったため、公開可能なサーバを調達できなかったことである。

³⁵ 正確には関数が評価されるタイミングを考慮する必要がある

7.1 ARIMA モデルライブラリ

5 ARIMA モデルによる時系列分析 に従ってそれぞれの関数を実装した。

7.2 データベース設計

以下の図に従ってデータベースを作成した。以降にそれぞれのテーブルについて説明する。

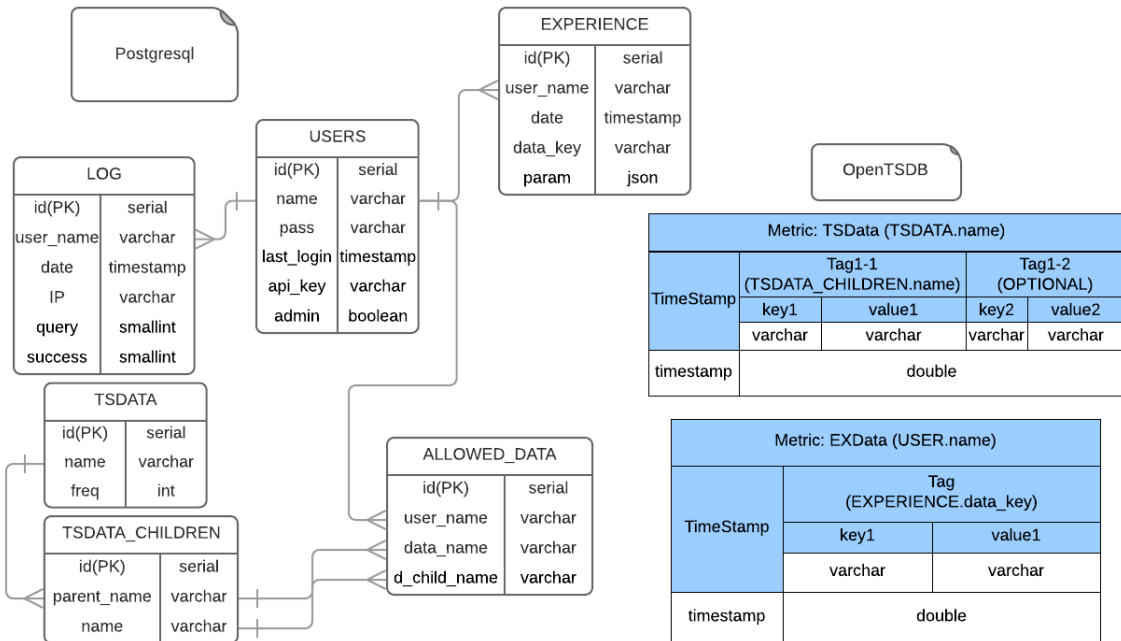


Figure 17: データベースの設計図

7.2.1 Postgresql

SQL サーバとしては Postgresql を採用した。

- USERS

ユーザに関するデータを保存している。name はユーザの名前、pass は暗号化済みのパスワード、last_login は最後のログイン時間、api_key はユーザが持つ Quandl の API キーである。admin は管理者権限で本演習ではすべてのユーザが偽にセットされている。id は主キーであり、これは他のテーブルにも共通している。

- LOG

ユーザが行った情報をまとめるためのテーブルであるが、今回は実際にテーブルの作成のみで実際にテーブルを動かすことはできなかった。query と success はログインなどのクエリと対応付けられた番号が、date にはそのクエリが送られた日時が当てはまる。IP にはユーザがアクセスした端末の IP アドレスが当てはまる。

- TSDATA

例えば “NIKKEI/INDEX” のような時系列データの名称を保存するためのテーブルである。name はその時系列データの名前である。freq はデータの時間的頻度を指定しているが、出来る限り等間隔な時間間隔のデータで、ARIMA モデルの規格化などもあり今回はすべて週ごとを示す “weekly” がセットされている。

- TSDATA_CHILDREN

“close-price” のような TSDATA テーブルで扱うべきではない細かいデータ区分を保存するためのテーブルである。name はその区分を示す名前である。ここにある name と parent_name を用いて OpenTSDB の Metric TSDData に保存された時系列データへのアクセスを行う。³⁶

- ALLOWED_DATA

ユーザごとに扱えるデータに制限をかけるためのテーブルである。これは Quandl が API キーを登録せずともある上限まではデータを入手できるという機能に即するために作成した。

- EXPERIENCE

ユーザの実験データを保存するが、本演習では機能の実装が完了できなかったためテーブルのみの実装になった。date は実行日時、data_key は OpenTSDB の Metric EXData にある タグの value の値である。param には行った機械学習の種類やパラメータが含まれた JSON が当てはまる。

7.2.2 OpenTSDB

時系列データに関しては 5 ARIMA モデルによる時系列分析 にあるとおり、OpenTSDB を用いた。

- TSDData

実際の時系列データを保存するためのデータベースである。本演習ではデータの入手元は Quandl.com のみであった。Metrics には “NIKKEI/INDEX” のような時系列データの名称が当てはまり、タグの key は本演習では混乱を避けるために “type”

³⁶TSDATA の Metric 名は TSDATA テーブルの name , タグの value が TSDATA.CHILDREN テーブルの name に対応している。

に統一されており、そしてタグの value は “close-price” などの時系列データ内のカテゴリが当てはめられている。

- EXData

本演習では実装が終わらず実際に稼働させることはできなかった。Metrics には Postgresql の USERS テーブルの name が当てはまり、タグの key には “key” が、value には Postgresql の EXPERIENCE の data_key が当てはまる。

7.3 バックエンド開発

バックエンドは 6 にあるように、Luminus Framework を中心に開発を行った。作成した ARIMA モデル やそれに関するライブラリや OpenTSDB を用いるための簡易的な API などは別個依存関係に加えた。フロントエンドも含めた³⁷具体的な依存関係は 開発を行っている git @ MokkeMeguru/MLLK にある project.clj にある。

7.4 フロントエンド開発

フロントエンドの開発もバックエンド同様 Luminus を用いて行った。以下に実際の画面をユーザが利用する場面を想定して説明する。

まずユーザはホームとなるページにアクセスし、ユーザ登録画面へと遷移する。

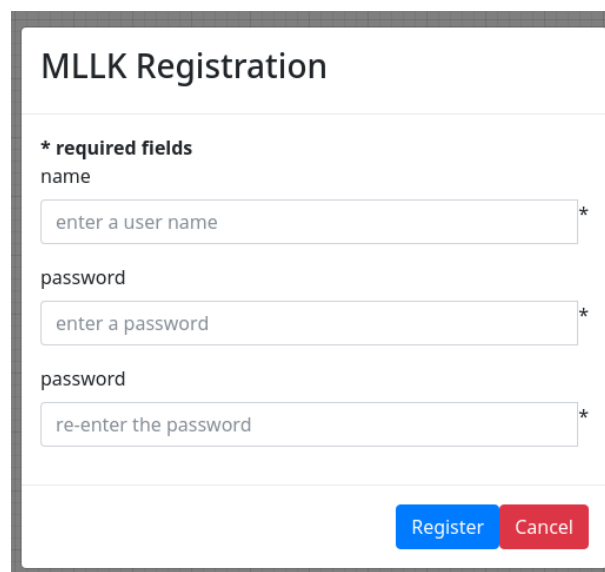


Figure 18: ユーザ登録画面

³⁷バックエンドとフロントエンドは同一のプロジェクトとして作成されている

或いは既にユーザ登録が済んでいるユーザは名前とパスワードを入力しログインすることが出来る。この画面は既に 6.2 ClojureScript によるフロントエンド開発 で紹介済みであるため省略する。

次にユーザは実際に ARIMA モデルを (或いは開発が終了した場合にはそれらの手法を) 実行するためにこれらを行う画面へ遷移する。

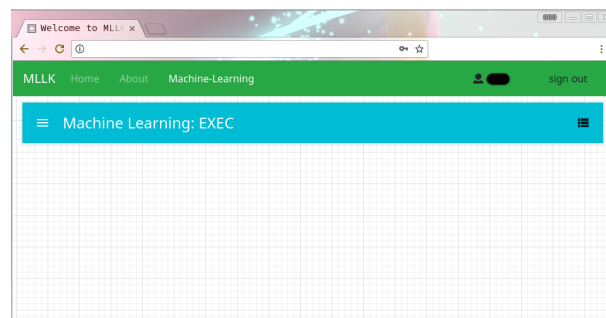


Figure 19: 統計・機械学習手法選択画面

ここで機械学習手法を青枠右側にあるメニューアイコンから呼び出し選択を行う。次に青枠左側にあるメニューアイコンを選択すると以下ようになる。

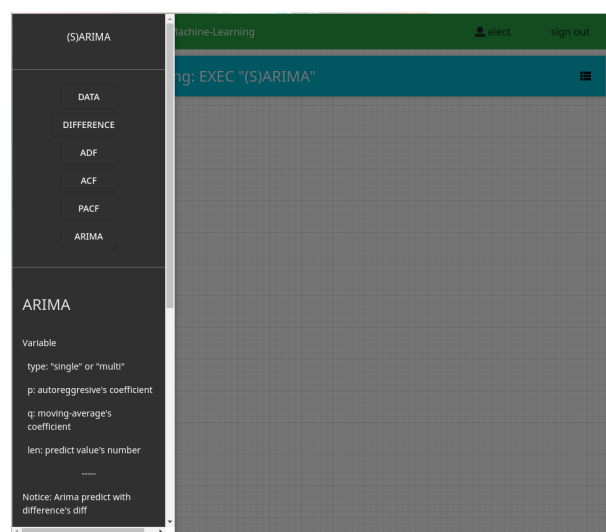


Figure 20: パラメータ設定画面

パラメータを選択する画面である。上にある“DATA”などと書かれているボタンはそれぞれのパラメータを入力する画面へ遷移する (現在は“ARIMA”ボタンを選択した状態)。はじめに大まかな説明がつき、その下に詳しい説明へのリンク (正確な理論が書き上がり次第組み込まれる)、そしてパラメータの入力欄が続いていく。ユーザはこれらの必要な項目の入力が済ませ実行ボタンである“run”ボタンを押す。

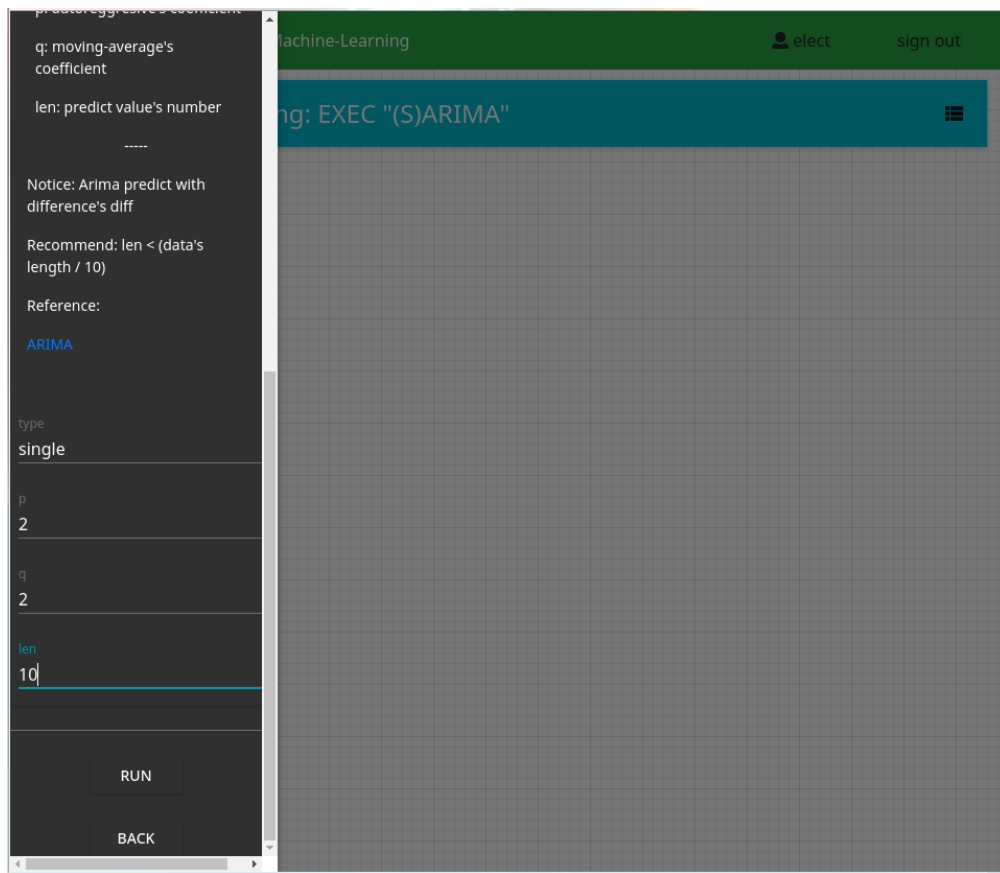


Figure 21: パラメータ入力欄と実行ボタン、説明ページへのリンク

実行することでユーザは以下のような画面を得る。

尚 2018 年 1 月 18 日時点 で出力可能な内容を印刷した pdf を 10 付録に追記する。

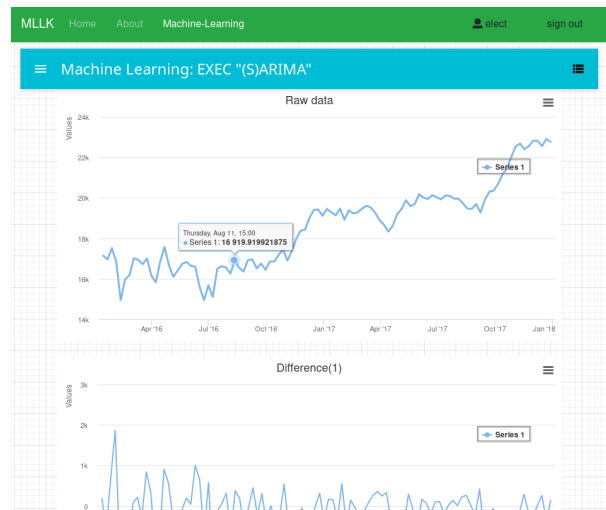


Figure 22: 実行結果画面

8 発展 : ARIMA 推定 と Random Forest による予測

8.1 概要

8.2 実験方法

8.3 実験結果

8.4 考察

9 まとめと今後の課題

ゲームエンジン・グラフィックエンジンの開発 (GPU)、ゲーム画面をデータベースに保存した上で、解析を行う。(ゲームの進行ログではなく、一般的にユーザが見ることになるゲーム画面の遷移から強化学習を行い、ゲーム AI を作成する。) データベースと GPU 計算技術は学ぶことができた。時系列解析について入門することができた。ゲーム AI の入門については昨年度 Common Lisp を用いて学習済みである。

10 付録

10.1 このレポートにおける数式について

このレポートにおける数式表現といくつかの基本的な用語の定義を以下に例と共に示す。

10.1.1 独立同時分布と変数の補足

$$Y_t = \beta t + \epsilon_t \text{ where } \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (31)$$

この式における *where* とは左式における変数の補足を行うことを意味しており、この場合で ϵ_t の意味を補足している。 $iid(\mu, \sigma^2)$ とは独立同時分布 (independent and identically distributed) を意味しており、この確率変数は他の確率変数と同一の分布を持ち、且つそれぞれが独立していることを示している。独立同時分布において共分散、相関係数は 0 である。本レポートにおいてこの式は、平均 μ 、分散 σ^2 に従う³⁸ 独立同時分布という意味を持っている。

これと同様の概念にホワイトノイズというものがあるため、混乱を避けるためこちらも補足を行う。

ホワイトノイズ $\epsilon_t \sim W.N(0, \sigma^2)$ は以下の性質を持っている。

- $E(E_t) = 0$
平均は 0
- $Var(E_t) < infinity$
分散は発散しない
- $Cor(E_t, E_s) = 0$
相関 (correlation)

39

関係はない

ホワイトノイズと独立同時分布の関係は、ホワイトノイズには必ずしも独立性があるわけではないという意味で、独立同時分布のほうがより“強固”であると言える。

10.1.2 標準誤差

$$\hat{\pi} / se(\hat{\pi}) \quad (32)$$

この式における $se(\hat{\pi})$ とは $\hat{\pi}$ についての標準誤差を示している。ここで用いる標準誤差とは最小二乗法で求められる解ベクトル $\hat{\beta}$ の要素 $\hat{\beta}_i = \hat{\pi}$ についての誤差、最小二乗推定量 $\hat{\beta}_i$ に関する標準誤差である。これは回帰の標準誤差とは異なることに注意しなければ

³⁸ $a \sim b$ とは、 a は b という分布に従う という意味である

³⁹ r_{e_t, e_s} と表されることもある

ばならない。以下に回帰に関する標準誤差を示し、その後最小二乗推定量 $\hat{\beta}_i$ に関する標準誤差を示す。

例として以下の式を真のモデルとする。但し u は誤差項であり、平均 0 分散 σ^2 である独立同時分布に従う要素を持つベクトルであるとする。⁴⁰

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{u} \\ \text{where } \mathbf{y}, \mathbf{u} &\text{ is } n * 1 \text{ vector} \\ \mathbf{X} &\text{ is } n * p \text{ matrix} \\ \boldsymbol{\beta} &\text{ is } p * 1 \text{ vector} \\ \mathbf{u} &\sim iid(0, \sigma^2 \mathbf{I}) \\ \mathbf{I} &\text{ is } n * n \text{ identity matrix} \end{aligned} \quad (33)$$

推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ について求まる残差 $\boldsymbol{\epsilon}$ は以下のように表すことが出来る。

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (34)$$

これを用いて残差平方和 SSR⁴¹ は、

$$\begin{aligned} SSR &= \boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (35)$$

と表すことが出来る。これを用いて回帰の標準誤差⁴²は、

$$s^2 = SSR / (n - p) \quad (36)$$

となる。さらにこれを用いることで、最小二乗推定量 $\hat{\beta}_i$ に関する標準誤差は、

$$\begin{aligned} s.e.(\hat{\beta}_i) &= \sqrt{s^2 / S_{XX}^j} \\ \text{where } S_{xx}^j &= ((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})_{jj} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。尚 S_{xx}^j とは x_j から他の変数の影響を取り除いた x_j に固有の平方和である。

⁴⁰ $\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}$ に定数項は含まれているものとする

⁴¹sum of squared residuals

⁴²standard error of regression

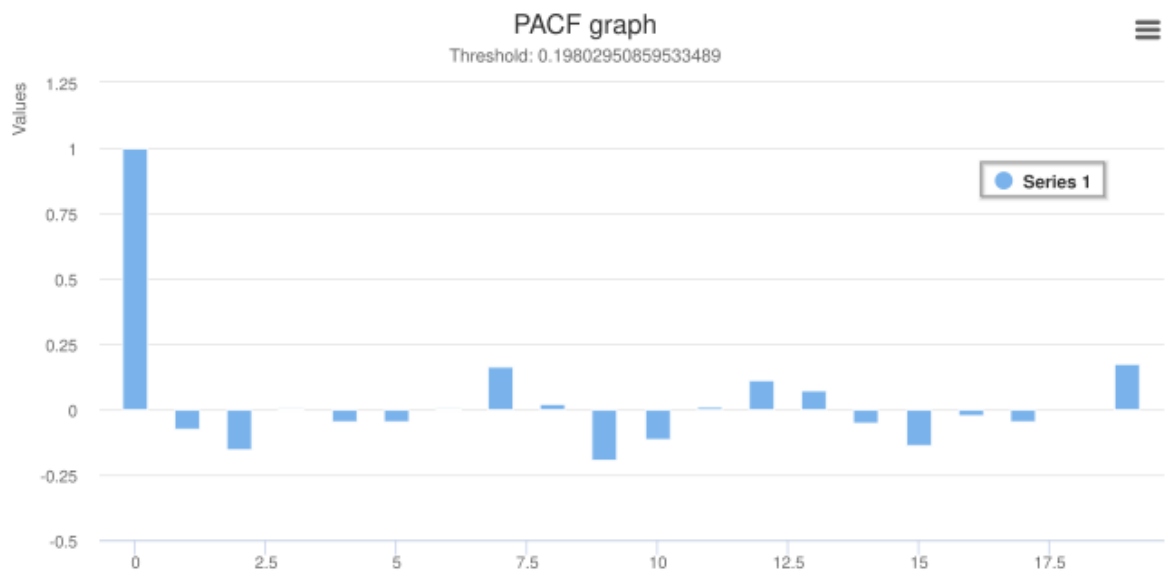
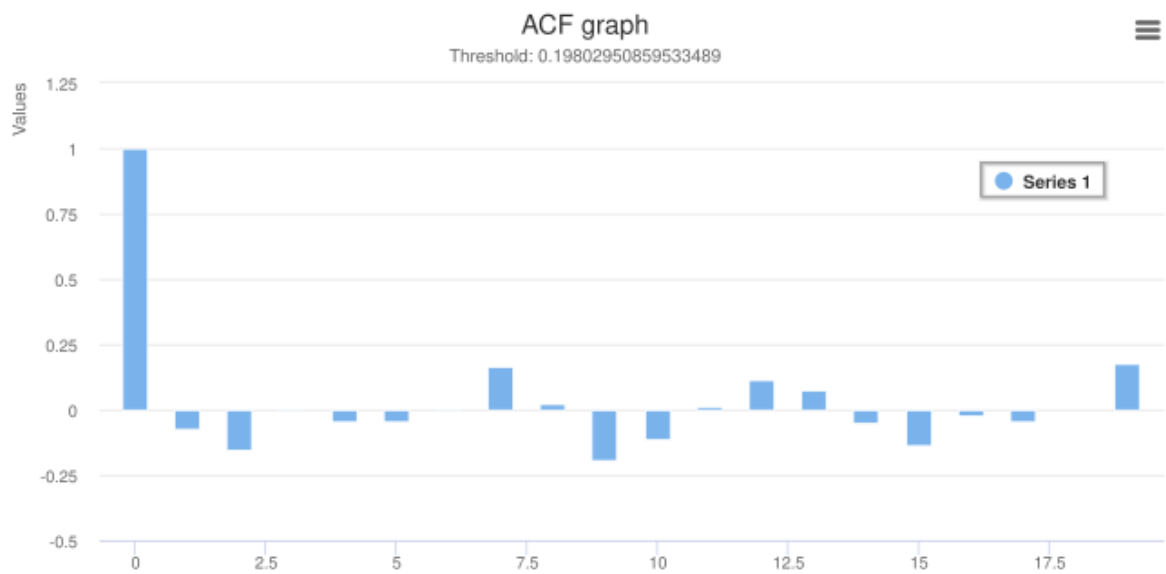
10.2 出力結果

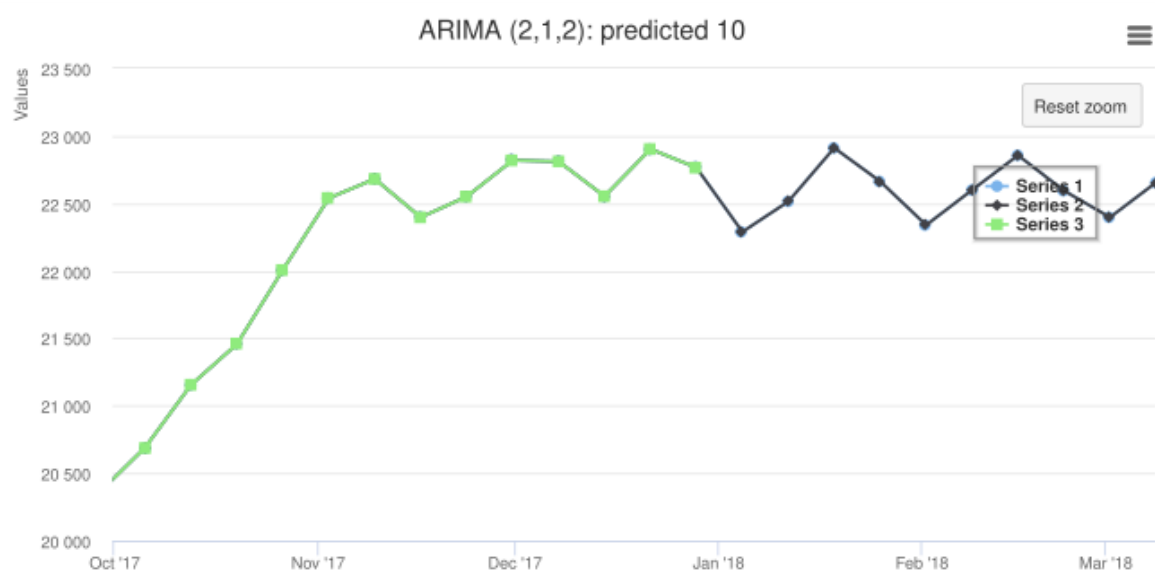


ADF test with 1 difference

ADF value : -0.0692956621564448

Rejected? : False





ARIMA (2,1,2): predicted 10

p : [-0.1200378291226889 -0.8906776451180309]

q : [0.06819048033145769 0.9932921110318496]

aic : 1536.2608441051316

References

- [1] *6.3.3 Parameter Estimation*. URL: http://www.maths.qmul.ac.uk/~bb/TimeSeries/TS_Chapter6_3_3.pdf.
- [2] Jason Cantarella. *Nelder-Mead Method*. URL: <http://www.jasoncantarella.com/downloads/NelderMeadProof.pdf>.
- [3] Jason Dixon. *Monitoring with Graphite. Tracking Dynamic Host and Application Metrics at Scale*. Vol. 290. O'Reilly Media, 2017.
- [4] Henry Garner. *Clojure for Data Science*.
- [5] PhD Hedibert Freitas Lopes. URL: <http://hedibert.org/wp-content/uploads/2015/04/DT-or-ST.pdf>.
- [6] Daniel Higginbotham. *Clojure for the Brave and True. Learn the Ultimate Language and Become a Better Programmer*. No Starch Press.
- [7] Bart Hobijn, Philip Hans Franses, and Marius Ooms. “Generalizations of the KPSS-test for stationarity”. In: *Statistica Neerlandica* 58.4 (2004), pp. 483–502. ISSN: 1467-9574. DOI: 10.1111/j.1467-9574.2004.00272.x. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9574.2004.00272.x>.
- [8] Shantau Kumar. *Clojure High Performance Programing*. Packt Publishing.
- [9] Robert Nau. *Identifying the numbers of AR or MA terms in an ARIMA model*. URL: <http://people.duke.edu/~rnau/411home.htm>.
- [10] George Athanasopoulos Rob J Hyndman. *Forecasting: principles and practice*. OTexts(October 17, 2013).
- [11] Matthew Scarpino. *OpenCL in Action. How to Accelerate Graphics and Computation*. Manning Pubns Co, Nov. 2011.
- [12] Dmitri Sotnikov. *Web Development with Clojure, Second Edition. Build Bulletproof Web Apps with Less Code*. Pragmatic Bookshelf.
- [13] *STAT 510*. URL: <https://onlinecourses.science.psu.edu/stat510/node/33>.
- [14] *The Apache HBaseTM Reference Guide*. Revision 0.94.27. Copyright © 2012 Apache Software Foundation. Dec. 2015.
- [15] D. J. Thomson. “Jackknifing multiple-window spectra”. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1994. ICASSP-94., 1994 IEEE International Conference on*. Vol. vi. Apr. 1994, VI/73–VI/76 vol.6. DOI: 10.1109/ICASSP.1994.389899.

Emacs 26.0.91 (Org mode 9.1.6)