# 数理メディア情報学レポート(1)

情報科学類二年 江畑 拓哉 (201611350)

## 1 (線形代数) 以下の語の定義を述べよ

### 1.1 「一次独立」と「一次従属」

数の集合 K におけるベクトル空間 V について考える。
V のベクトル $v_1, v_2, ..., v_k$ に対して、関係式

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_kv_k = 0 \tag{*}$$

をみたす $x_1, x_2, ..., x_k \in K$ が $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$ に限るとき、$v_1, v_2, ..., v_k$ は一次独立であるという。
また、$v_1, v_2, ..., v_k$ が一次独立でないとき、これらは一次従属であるという。
つまり、関係式 (*) を $x_1, x_2, ..., x_k \in K$ が $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$ 以外の値でみたすとき、$v_1, v_2, ..., v_k$ は一次従属であるという。

### 1.2 空間の「基底」と「次元」

V のベクトル $v_1, v_2, ..., v_n$ が一次独立であり、かつ V を生成するとき、$v_1, v_2, ..., v_n$ は V の基底であるという。ここで V を生成するとは、あるベクトル $v_1, v_2, ..., v_n$ について、これらの一次結合によって表されるベクトル全体の集合 $< v_1, v_2, ..., v_n >$ が V に等しいことを示す。
そして V が $< v_1, v_2, ..., v_n >$ を基底に持つとき、V の次元を n とする ($dimV = n$ と書く)。ただし、$V = 0$ のとき、 $dimV = 0$ である。

### 1.3 行列 A に対し

#### 1.3.1 rank(A), null(A), range(A)

行列 A に対して以下の “行に関する基本変形” を定義する。

1. ある行をスカラー倍したものを他の行に加える

2. ある行に 0 でないスカラーをかける

3. ２つの行を入れ替える

これを行ではなく列に対して行ったものを “列に関する基本変形” とし、これらを合わせて “基本変形” とする。

また階段行列とは、以下の 2 つの条件をみたしている行列を示す。

1. 第一行からある行 (ここでこの行を第 r 行とする) までのすべての行ベクトルは零ベクトルではなく、それより下の行はすべて零ベクトルである。

2. $1 \leq i \leq r$ に対して第 i 行ベクトルの成分を左からみていき、最初の 0 でない成分がある列を第 j(i) 列とすれば、それらの列は、それらの列の位置は行が下になるほど右側にずれている。すなわち、$j(1) < j(2) < ... < j(r)$

ここで、行列 A を基本変形して得られる階段行列の零ベクトルではない行ベクトルの数を A の階数といい、rank(A) と表す。

null(A)、ヌル空間（零空間、核空間）とは、$Ax = 0$ をみたすベクトル x の集合を表す。

range(A)、像とは、任意のベクトル x について $Ax = b$ をみたす b の集合を示す。

### 1.3.2 A が「正則」,「正値」、「対称」

A が正則であるとは、A が n 次正方行列であり、$XA = AX = E_n$ となる n 次正方行列 X が存在するということである。

A が正値とは、任意の零ベクトルでないベクトル x について、$z^T Az > 0$ であることを示す。これは A が対称であり、A の固有値が全て正であることに等しい。

A が対称とは、A の転置行列 $A^T$ について、$A^T = A$ ということである。

# 2 (写像、数列、集合)

## 2.1 「単射」と「全射」を定義せよ

写像 $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ について、

任意の $x, x' \in \boldsymbol{X}$ に対して、$x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ であるとき f を単射であるといい、

任意の $y \in \boldsymbol{Y}$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in \boldsymbol{X}$ が必ず存在するとき f を全射であるという。

## 2.2 「逆写像」が存在するための必要十分条件を述べよ

逆写像が存在する必要十分条件は、写像 $f: X \to Y$ が全単射であることである。なぜなら逆写像はfが全単射のときのみ定義されるからである。

## 2.3 数列が「コーシー列」、「収束列」の定義を述べよ

コーシー列とは、以下の条件を満たす収束する数列のことである。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \boldsymbol{N}, \, s.t. \, p, q \ \geq N \ : \ |a_p - a_q| < \epsilon \tag{1}$$

また収束列とは、以下の条件を満たす数列のことである。

$$\exists a \in \boldsymbol{R}, \ \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \boldsymbol{N}, \forall n \in \boldsymbol{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \tag{2}$$

## 2.4 集合に関し次の語を定義せよ

### 2.4.1 「近傍」、「内点」、「境界」、「開集合」

まず位相、位相空間、開集合について順に定義する。
空でない集合 X について議論する。$\boldsymbol{O}$ を X の部分集合系（部分集合の集合）とする。
以下の条件が成り立つとき、$\boldsymbol{O}$ を X の位相という。

1. $\phi, X \in \boldsymbol{O}$

2. $O_1, O_2, ..., O_n \in \boldsymbol{O} \Rightarrow O_1 \bigcap O_2 \bigcap .... \bigcap O_n \in \boldsymbol{O}$

3. 任意の集合 J について、$(\forall \lambda \in J, O_\lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in J} O_\lambda \in \boldsymbol{O}$

そして、集合 X と合わせて、$(X, \boldsymbol{O})$ を X の位相空間という。
また、$\boldsymbol{O}$ に属する集合を X の開集合という。
次に今定義した $(X, \boldsymbol{O})$ について、
$x \in X$ ,U を X の部分集合としたとき、$\exists O \in \boldsymbol{O} s.t. x \in O \subset U$ が成り立つとき、U を x の近傍という。
また A を X の部分集合について、A に含まれる開集合全体の和集合、つまり A の内部に属する点を、A の内点という。また近傍と関連付けるならば、ある集合 M が点 p とその近傍を含むとき、p を M の内点と言える。
境界とは集合 A について、A の内部を除いたものである。

### 2.4.2 「集積点」、「完備」、「稠密」、「閉集合」

集合 X について X の部分集合 A と X の要素 a をおく。次が成立するとき、a を A の集積点という。

$$\forall\epsilon > 0,\ S(a,\epsilon)\bigcup(A-\{a\}) \neq \phi \tag{3}$$

ここで、$S(a,\epsilon)$ を a の $\epsilon$ 近傍といい、以下の条件が成り立つことをいう。

$$S(a,\epsilon) = \{x \in X | d(a,x) < \epsilon\} \tag{4}$$

同様に集合 X について任意のコーシー列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}} \subset X$ が収束するとき、X は完備であるという。換言すれば集合 X のすべての部分集合が上に有界ならば上限を持ち、下に有界ならば下限を持つということになる。
稠密とは X の部分集合として A が、X の各点 x を元として持つか、あるいは集積点として持つときであることを示す。
閉集合とは、その補集合が開集合であることをいう。また別の言い方をすれば X の部分集合 A について A の任意の点列 $\{x_n\}$ が必ず $x \in A$ に収束することをいう。

# 3 (空間、作用素、ノルム)

## 3.1 「距離」、「ノルム」、「内積」の定義を述べ具体例を挙げよ

距離とはある空でない集合 X について $d : X \times X \to Y([0,\infty))$ が以下の条件をみたすならば、d を X 上の距離関数であり Y を距離とできる。$(x \in X, y \in Y)$

1. $d(x,y) \geq 0$ (正値性) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (対称性)
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (最短性)

ノルムとはあるベクトル空間 X について $d : X \to Y([0,\infty))$ が以下の条件をみたすならば、ノルムという。$(a \in \boldsymbol{R})$

1. $d(x) \leq 0$ (正値性) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(ax) = ad(x)$ (線形性)

3. $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$ (最短性)

また、n ノルムを $||x||_n$ と書き表すこともできる。
内積とはあるベクトル空間 X について $d : X \times X \to Y((\infty, \infty))$ が以下の条件をみたすならば、内積という。$(b \in R)$

1. $d(x,x) \leq 0$ (正値性) $d(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $d(x,y) = \overline{d(y,x)}$ (対称性)

3. $d(ax+by,z) = ad(x,z) + bd(y,z)$ (線形性)

## 3.2 「バナッハ空間」、「ヒルベルト空間」の定義を述べよ

バナッハ空間とは、完備性を持ったノルム空間である。
ヒルベルト空間とは、完備性を持った内積空間である。

## 3.3 ベクトルノルムについて以下の問いに答えよ

### 3.3.1 $||x||_p$ を定義し、$||x||_1$ 、$||x||_2$ 、$||x||_\infty$ を各々ベクトル要素を用いて書き下せ

x を n 次元ベクトルと仮定して、この p ノルムは $||x||_p = \sqrt[p]{\Sigma_{i=1}^n x_i^p}$ と定義できる。同様に、$||x||_1 = \Sigma_{i=1}^n x_i$ , $||x||_2 = \sqrt[2]{\Sigma_{i=1}^n x_i^2}$ , $||x||_\infty = \sqrt[\infty]{\Sigma_{i=1}^n x_i^\infty}$

### 3.3.2 上の３つのノルムについて三角不等式が成立することを示せ

三角形の 3 辺を x, y, z とする。p ノルムを用いると三角不等式は $||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$ と表せる。これは上の 3 つのノルムに対して考える。

- 1 ノルム
  実数上の点 x, y について、$x, y \in R^+$ 又は $x, y \in R^-$ であるとき、両辺は等しくなる ($|x+y| = |x| + |y|$ )。片方の要素が 0 の場合も両辺は等しくなる。($|x+0| = |x| = |x| + |0|$) それ以外の場合では、左辺は右辺よりも大きい ($|x+y| < |x-y| = |x| + |y|$)

- 2 ノルム
  $(||a+b||_2)^2 = (a,a) + 2(a,b) + (b,b) = ||a||_2^2 + ||b||_2^2 + 2(a,b) \leq ||a||_2^2 + 2||a||_2||b||_2 + ||b||_2^2 = (||a||_2 + ||b||_2)^2$
  より成立

- $\infty$ ノルム
  ミンコフスキーの不等式より、$||x+y|| \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$。また、$||x||_\infty = \sqrt[\infty]{\Sigma_{i=1}^{n} x_i^\infty}$ より、x の最大の要素 $|x_k|$ 以外を無視することができると考えれば、$||x||_\infty = |x_k|$ であるとできる。この性質を用いて、$||x||_\infty = |x_k|, ||y||_\infty = |y_k|$ とすれば、同様に $||x+y||_\infty = |x_k|$ , $||x+y||_\infty = |y_k|$ のいずれかになると考えられる。すなわち、$||x+y||_\infty = x_k(y_k) \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty = |x_k| + |y_k|$ と考えられる。

## 3.4 以下の不等式を示せ

### 3.4.1 $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt[2]{n}||x||_\infty$

$||x||_\infty = |x_k|$ と近似して (x_k はスカラー量が最大の x の要素)、

$$|x_k| \leq \sqrt[2]{\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt[2]{n}|x_k| \tag{5}$$

$$x_k^2 \leq \Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 \leq n x_k^2 \tag{6}$$

$$x_k^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 + ... + x_n^2 \leq n x_k^2 \tag{7}$$

ここで、$|x_k| \geq |x_i|_{i \in 1,2,...,n}$ であることを用いれば、この式が成立することは明らかである。また、この等式の成立条件は最終式より、x の要素が 1 つの場合のみ (加えるのであれば 0 の場合) である。

### 3.4.2 $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$

前の問と同様に

$$|x_k| \leq \Sigma_{i=1}^{n} x_i \leq n|x_k| \tag{8}$$

$$|x_k| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k| + ... + |x_n| \leq n|x_k| \tag{9}$$

であるから、この式の成立は明らかである。この式の成立条件も前の問と同じく、x の要素が 1 つの場合のみ (加えるのであれば 0 の場合) である。