数理メディア情報学レポート (3)

情報科学類二年 江畑 拓哉 (201611350)

1 ネットワークの価値生成に関連し次の問いに答えよ。

1.1 べき集合とは何かについて述べよ。集合 S = {a, b, c} について、べき集合 2^S を書き下せ。

べき集合とはすべての部分集合の集合である。
集合 S = {a, b, c} のべき集合は、
ϕ {a} {b} {c} {a, b} {b, c} {c, a} {a, b, c} と言える。

1.2 要素数が n 個から成る集合 S の、べき集合 2^S の要素数がちょうど "2 の n 乗個" になることを示せ。

S の要素数が 1 個のとき、そのべき集合の数は明らかに $2 = 2^1$ (ϕ, a) である。
S の要素数が k 個であるとき、この要素数が 2^k であると仮定する。S の要素数が $k+1$ 個であるとき、この内の k 個の要素についてのべき集合 $S1$ と 残りの 1 個の要素 α を考えると、 S1 のすべての要素 (部分集合) に α の和を取って作った部分集合の集合と、S1 そのものとを和集合にとった場合の要素数は $2 * 2^k = 2^{k+1}$ である (α は S1 そのものには含まれていないことから前者と後者の積集合は空集合である)
またこの和集合は S のべき集合として成り立つ。なぜなら、 α についてそれ以外の要素群すべてとの組み合わせを網羅できていることは S1 の定義から明らかであるし、 α を含まない場合の S の要素についてのべき集合は S1 であると言えるからである。
以上から、要素数 n 個の集合 S のべき集合 2^S の要素数は 2^n 個であると言える。

2 A を n 次の正方行列とするとき次の問いに答えよ。

2.1 A の固有値の存在範囲に関し、ゲルシュゴリンの定理についてのべ、それを証明せよ。

中心が a_{ii} 半径 $r_i = \Sigma \|a_{ij}\|$ の円で囲まれた複素平面内の領域を S_i とする。このとき、行列 $A(a_{ij})$ の全ての固有値 λ_k は和集合 $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ の内部に存在する。すなわち以下を満たす行番号 i が存在する

$$|a_{ii} - \lambda_k| \leqq \Sigma_{i \neq j} |a_{ij}|$$

$\boldsymbol{x}$ s.t. $\boldsymbol{Ax} = \lambda_k \boldsymbol{x}$ となる固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ について、i を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3 \dots)$ の中の絶対値最大の要素 x_i を示す i であるとする。 このとき、 $\boldsymbol{Ax} = \lambda_k \boldsymbol{x}$ の第 i 行について、
$(a_i i - \lambda_k) x_i = -\Sigma_{j \neq i} a_{ij} x_j$ であると言える。

$$|a_{ii} - \lambda_k| \leqq |\Sigma_{i \neq j} a_{ij}|$$
$$|x_j / x_i| \leqq \Sigma_{j \neq i} |a_{ij}| \because |x_j / x_i| < 1$$

これによって、ゲルシュゴリンの定理は証明された。

2.2 行列 A が対角優位であるとき、ヤコビ法について説明しその反復列が収束することを、縮小写像の原理と、ゲルシュゴリンの定理を使って証明せよ。

ヤコビ法とは連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を反復法で解く手法の一つである。
n 次正方行列 A を上三角行列 U、下三角行列 L、対角行列 D に分解すると、$A = L+D+U$ である。これを用いて、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Ax} =& \quad (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{Dx} =& \quad -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} =& \quad \boldsymbol{D}^{-1}((\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) \\
=& \quad \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

上式を n 回反復したものを $\boldsymbol{x}_n$ であるとすると、
$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$
と書くことができる。
これを更に変形すると、 $\Delta \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n$ とおくと、
$\Delta \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n-1})$
とすることができる。
行列 A が対角優位であるとき、$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{D}^{-1}(L + U)$ の固有値の絶対値は 1 よりも小さい。なぜなら $M = (m_{ij})$ の各成分の値は、
$m_{ij} = 0$ if $i = j$
$m_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ otherwise
と表すことができる。ここで $\boldsymbol{M}$ についてゲルシュゴリンの定理を用いて、 λ, $\boldsymbol{x}$ を M に対する固有値と固有ベクトルの対応した組であるとすると、$(\boldsymbol{Mx} = \lambda \boldsymbol{x})$

$$
\begin{aligned}
|m_{ii} - \lambda| \leqq & \quad \Sigma_{j \neq i} |m_{ij}| \\
|\lambda| \leqq & \quad \Sigma_{j \neq i} |m_{ij}| \\
|\lambda| \leqq & \quad \Sigma_{j \neq i} |a_{ij}/a_{ii}| \\
< & \quad 1
\end{aligned}
$$

(a_{ii} は対角優位)
つまり $\boldsymbol{M}$ は縮小写像になることが示され、縮小写像の原理によりこの反復行列の適用によって $\boldsymbol{x}$ は収束することがわかった。

これによって行列 A が対角優位であるときヤコビ法が収束することを示した。

3 以下の２つのうち、少なくとも一方を回答しなさい。

3.1 ハウスドルフの距離の下で、2 つの縮小写像を用意し、その和集合で定義される逐次列を用いてフラクタル図形を生成しなさい。

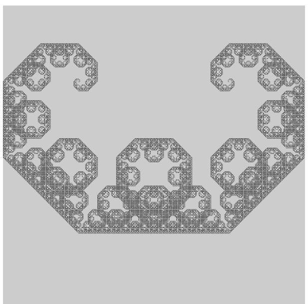
以下のようにレヴィの図形を作成した。用いる写像は以下の２つである。

$$
\begin{aligned}
f_0(z) = & \quad a * z + b * \bar{z} \\
f_1(z) = & \quad c * (z-1) + d * (\bar{z} - 1) + 1
\end{aligned}
$$

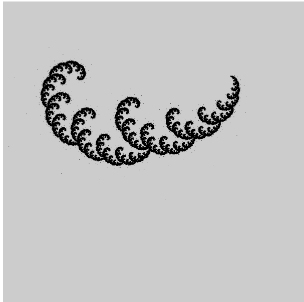
a b c d は複素定数であり、z は複素変数である。z の初期値を i としてこの関数を反復して適用してできた点集合が求めたいフラクタル図形になる。

書いたソースコードとその実行は `https://github.com/MokkeMeguru/fractal-quil` にある。いくつか種類があるが、その内の２つを紹介すると、

パラメータ $[a\ b\ c\ d] = [0.5 + 0.5i \quad 0 \quad 0.5 - 0.5i \quad 0]$

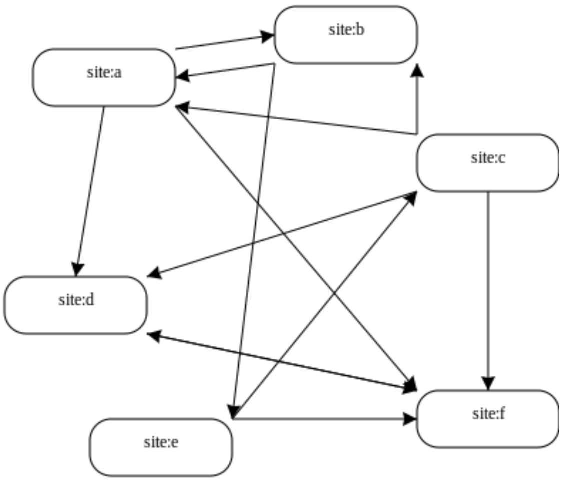


パラメータ $[a\ b\ c\ d] = [0.4614 + 0.4614i \quad 0 \quad 0.622 - 0.192i \quad 0]$



3.2 5つ以上のサイトのリンク状態遷移図を作成し、Google のページランクを計算し、その結果から SEO (Search Engine Optimization) の指針について述べよ。

以下状態遷移図について議論する



確率行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

推移行列 $M = P^T$ であるからこの固有値 λ と それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{V}$ を求めて、

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V = [AB]$ として、

$$A = \begin{pmatrix} -0.32444 + 0.00000i & 0.70711 + 0.00000i & -0.14434 - 0.38188i \\ -0.64889 + 0.00000i & -0.70711 + 0.00000i & 0.57735 + 0.00000i \\ -0.48666 + 0.00000i & 0.00000 + 0.00000i & -0.36084 - 0.19094i \\ 0.00000 + 0.00000i & 0.00000 + 0.00000i & 0.00000 + 0.00000i \\ -0.48666 + 0.00000i & -0.00000 + 0.00000i & -0.07217 + 0.57282i \\ 0.00000 + 0.00000i & 0.00000 + 0.00000i & 0.00000 + 0.00000i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -0.14434 + 0.38188i & -0.00000 + 0.00000i & -0.00000 + 0.00000i \\ 0.57735 - 0.00000i & -0.70711 + 0.00000i & -0.53452 + 0.00000i \\ -0.36084 + 0.19094i & 0.00000 + 0.00000i & -0.26726 + 0.00000i \\ 0.00000 - 0.00000i & 0.70711 + 0.00000i & 0.00000 + 0.00000i \\ -0.07217 - 0.57282i & -0.00000 + 0.00000i & 0.00000 + 0.00000i \\ 0.00000 - 0.00000i & 0.00000 + 0.00000i & 0.80178 + 0.00000i \end{pmatrix}$$

λ は、

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1.00000 + 0.00000i \\ -0.50000 + 0.00000i \\ -0.25000 + 0.66144i \\ -0.25000 - 0.66144i \\ 0.00000 + 0.00000i \\ 0.00000 + 0.00000i \end{pmatrix}$$

最大固有値は λ_1 であるから、これに対応する固有ベクトルは V より以下の V_1 になる。

$$V_1 = \begin{pmatrix} -0.32444 + 0.00000i \\ -0.64889 + 0.00000i \\ -0.48666 + 0.00000i \\ 0.00000 + 0.00000i \\ -0.48666 + 0.00000i \\ 0.00000 + 0.00000i \end{pmatrix}$$

これを正規化することで、

$$V_1 = \begin{pmatrix} -0.16667 \\ -0.33333 \\ -0.25000 \\ 0.00000 \\ -0.25000 \\ 0.00000 \end{pmatrix}$$

これが PageRank となる。（ペロン・フロベニウスの定理より、最大固有値に対する固有ベクトルのすべての成分が負であることは正しい）

SEO はこれの値に基づいて Web ページのランク付けを行い、検索を行った際にこの値が大きい、大まかに言えば多く引用されているページから順番に表示していくことになる。