

課題 1

0.1 x が最小二乗問題 $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2$ の解であるとき、かつそのときに限り正規方程式 $A^T Ax = A^T b$ の解であることを示せ。

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|_2 &= (Ax - b)^T(Ax - b) \\ &= (x^T A^T - b^T)(Ax - b) \\ &= x^T A^T Ax - 2x^T A^T b + b^T b \\ \frac{d}{dx} x^T A^T Ax - 2x^T A^T b + b^T b &= 2A^T Ax - 2A^T b\end{aligned}$$

よって $\|b - Ax\|_2$ を最小化するためには、 $A^T Ax = A^T b$ であることが必要であると言える。

0.2 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank } A = n$ の特異値分解は

$$\begin{aligned}A &= U \Sigma V^T, \quad U \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad V \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ U^T U &= I, \quad V V^T = V^T V = I\end{aligned}$$

と表せる。このとき、最小二乗問題 $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ の解は $x = V \Sigma^{-1} U^T b$ であることを示せ。

(1-1) より、

$$\begin{aligned}A^T Ax &= A^T b \\ \Leftrightarrow x &= A^{-1} b \quad \because \text{rank } A = n \\ \Leftrightarrow x &= (U \Sigma V^T)^{-1} b \\ \Leftrightarrow x &= V \Sigma^{-1} U^T b\end{aligned}$$

0.3 行列 A , ベクトル b を

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (2)$$

数理アルゴリズム 演習課題 9 提出日：2017 年 12 月 14 日
201611350 江畑拓哉

とし、最小二乗問題 $\min_x \|b - Ax\|_2$ を特異値分解を用いて解く Scilab プログラムを作成し、解を求めよ。

行列の宣言

```
1 A = [1, 1, 1; 1, 2, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3];
2 b = [4; 5; 6; 7];
```

最小二乗問題を解く関数

```
1 function [x] = solveLSP(U, S, V, b)
2     x = V * inv(S) * U' * b
3 endfunction
```

実行

```
1 [U, S, V] = svd(A, "e")
2 x = solveLSP(U, S, V, b)
```

解

```
1 --> x = solveLSP(U, S, V, b)
2 x =
3
4 3.
5 -0.5
6 1.5
```

1 課題 2

手書き数字の画像データセットである MNIST を用いて手書き数字の画像認識を行う。MNIST の行列データは manaba にアップロードされているため、ダウンロードして用いること。ファイルから得られる行列 X は画像データであり、各列に 1 枚の画像が格納されている。 Y は各画像が属するグループを示している。 $\text{test_}X$, $\text{test_}Y$ はそれぞれテストデータと各画像が属するグループを示している。今回の課題では訓練データとテストデータを 10,000 個ずつ用いる。manaba にアップロードされている showMNISTimg.sci を使用すると行列 X の先頭から i 番目の列に格納されている訓練データを画像として表示することが出来る。

1.1 行列 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{10 \times n}$ に対し、最小二乗問題

$$\min_{W \in \mathbb{R}^{10 \times m}} \|Y - WX\|_F$$

の特異値分解を用いて解く Scilab プログラムを作成せよ。行列 X の特異値を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$ としたとき、 k を $\sigma_k/\sigma_1 \geq 10^{-14}$ を満たすような最大の整数とする。 k 個の特異値とそれぞれの特異値に対応する k 本の特異ベクトルを用いて行列 X の低ランク近似を行うこと。ここでは $m = 784, n = 10,000$ である。

低ランク近似した X を得るための関数

```
1 function [X_k] = getX_k(U, S, V, k, X)
2   X_k = zeros(size(X)(1), size(X)(2));
3   for i=1:k,
4     X_k = X_k + S(i, i) * U(1:$, i) * V(1:$, i)';
5     if S(i, i) < S(1, 1) * 10e-14 then break; end,
6   end
7 endfunction
8 #+end_src scilab
9
10 ブロック最小二乗問題を解くための関数
11 #+begin_src scilab
12 function [W] = solveBLSP(U, i_S, V, Y)
13   W = Y * V * i_S * U';
14 endfunction
```

対角行列の逆行列を求める関数

```
1 function [S_] = inv_(S)
2   S_ = zeros(size(S)(1), size(S)(2))
3   for i=1:rank(S),
4     S_(i, i) = 1/S(i, i)
5   end
6 endfunction
```

実行

```
1 [U, S, V] = svd(X);
2 k = 784;
```

```
3 X_k = getX_k(U, S, V, k, X);
4 [U, S, V] = svd(X_k, "e");
5 W = solveBLSP(U, inv_(S), V, Y);
```

1.2 得られた行列 W を用いてテストデータの画像がどのグループに属するか判定することができる。manaba にアップロードされている check.sci を用いて (2-1) で得られた W に対して処理判定を行い、画像認識の正答率を求めよ。check(W, test __ X, test __ Y) と実行すると正答率を求めることができる。

```
1 --> check(W, test_X, test_Y)
2 ans =
3
4 0.8305
```

1.3 (2-2) では訓練データを 10,000 個用いて画像認識を行ったが、訓練データ数を帰ることで画像認識の正答率は変化する。訓練データ数を行列の先端の列から 1,000, 2,000, ..., 10,000 個としたときの画像認識の正答率を求める Scilab プログラムを作成し、それぞれの訓練データ数における正答率をグラフに描画せよ。

```
1 c = zeros(0);
2 for i=1:10,
3     [U, S, V] = svd(X(1:$, 1:1000*i));
4     k = 784;
5     X_k = getX_k(U, S, V, k, X(1:$, 1:1000*i));
6     [U, S, V] = svd(X_k, "e");
7     W = solveBLSP(U, inv_(S), V, Y(1:$, 1:1000*i));
8     c(i) = check(W, test_X, test_Y);
9 end
10 plot(c, linspace(1000, 10000, 10))
```

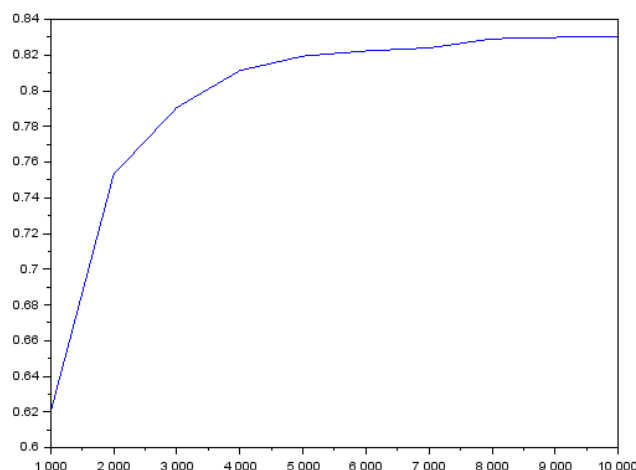


Figure 1: 訓練データ数と正答率のグラフ

1.4 行列 X の低ランク近似を行う際の整数 k を $\sigma_k/\sigma_1 \geq \delta$ を満たすような最大の整数とする。このとき、閾値 δ を $0.005, 0.01, 0.015, \dots, 0.1$ と変えたときの画像認識の正答率を求める Scilab プログラムを作成し、各しきい値に対する正答率をグラフに描画せよ。ただし、訓練データは 10,000 個用いること。

閾値を変更できるようにした低ランク近似の関数

```
1 function [X_k] = getX_k_d(U, S, V, k, X, delta)
2   X_k = zeros(size(X)(1), size(X)(2));
3   for i=1:k,
4     X_k = X_k + S(i, i) * U(1:$, i) * V(1:$, i)';
5     if S(i, i) < S(1, 1) * delta then break; end,
6   end
7 endfunction
8 #+end_src scilab
9
10
11 #+begin_src scilab
12 c = zeros(0);
13 deltas = linspace(0.005, 0.1, 20)
```

数理アルゴリズム 演習課題9 提出日：2017年12月14日
201611350 江畑拓哉

```
14 for i=1:20,  
15     [U, S, V] = svd(X);  
16     k = 784;  
17     X_k = getX_k_d(U, S, V, k, X, deltas(i));  
18     [U, S, V] = svd(X_k, "e");  
19     W = solveBLSP(U, inv_(S), V, Y);  
20     c(i) = check(W, test_X, test_Y);  
21 end  
22 plot(deltas, c)
```

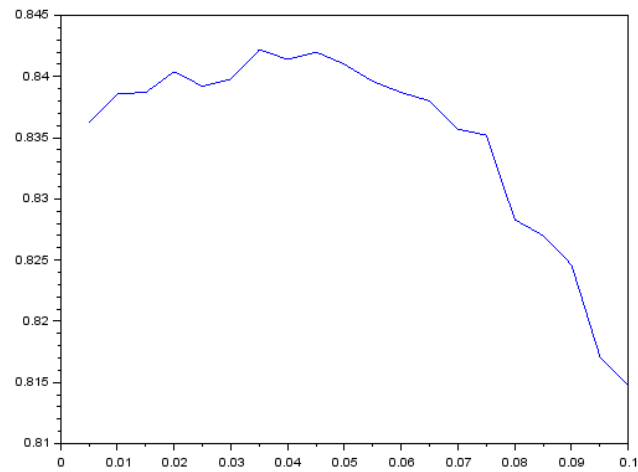


Figure 2: 閾値と正答率のグラフ