数理アルゴリズム　演習課題 7　 提出日：2017 年 11 月 20 日
201611350 江畑 拓哉

1　課題 1

行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ の特異値分解を

$$A = U\Sigma V^T,\ U^TU = UU^T = I,\ V^TV = VV^T = I$$

とし、 $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ の列ベクトルを左特異ベクトル、 $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の列ベクトルを右特異ベクトル、 $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ の対角要素を特異値とする。このとき、以下の問いに答えよ。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & \cdots & & \end{pmatrix}$$

とする。

1.1

AA^T , A^TA の固有ベクトルが A の左特異ベクトル、右特異ベルトルとそれぞれ一致することを示せ。

$$\begin{aligned} AA^T &= U\Sigma V^TV\Sigma^TU^T \\ &= U\Sigma^2U^T \\ \Leftrightarrow (AA^T)U &= U\Sigma^2 \end{aligned}$$

つまり、

$$(AA^T)\boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2\boldsymbol{u}_i \quad U = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m]$$

であるから、固有ベクトルが左特異ベクトルと一致していることがわかる。

同様に、

$$\begin{aligned} A^TA &= V\Sigma^TU^TU\Sigma V^T \\ &= V\Sigma^2V^T \\ \Leftrightarrow (A^TA)V &= V\Sigma^2 \end{aligned}$$

$$(AA^T)\boldsymbol{v}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{v}_i \quad V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$$

であるから、固有ベクトルが右特異ベクトルと一致していることがわかる。

1.2

行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の特異値を $\sigma_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ とする。このとき、 2n 次行列

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A^H \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

の固有値は $\pm\sigma_1,\ \pm\sigma_2,\ \ldots,\ \pm\sigma_n$ であることを示せ。

問題設定より、

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^T \\ A^H = A^T &= V\Sigma U^T \\ AV &= U\Sigma \\ A^T U &= V\Sigma \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & -V \\ U & U \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^T U & A^T U \\ AV & -AV \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V\Sigma & V\Sigma \\ U\Sigma & -U\Sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V & -V \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V & -V \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & -V \\ U & U \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

よって固有値は $\pm\sigma_1,\ \pm\sigma_2,\ \ldots,\ \pm\sigma_n$ である。

2 課題 2

2.1

spec(A' * A), **spec(A * A')** で求めた固有値、固有ベクトルと、 **svd(A)** で求めた特異値、左特異ベクトル、右特異ベクトルを比較して考察せよ。

行列 A

```
A = [1, 1; 1, 2; 1, 3]
```

特異値分解

```
--> [u, s, v] = svd(A)
 v  =

  -0.4026632   0.9153482
  -0.9153482  -0.4026632

 s  =

   4.0791433   0.
   0.          0.6004912
   0.          0.

 u  =

  -0.3231099   0.8537759   0.4082483
  -0.547507    0.1832195  -0.8164966
  -0.7719042  -0.4873369   0.4082483
```

```
--> [alpha, lambda] =  spec(A' * A)
 lambda  =

   0.3605897   0.
   0.          16.63941

 alpha  =

```

```
  -0.9153482    0.4026632
   0.4026632    0.9153482
```

```
--> [alpha, lambda] =  spec(A * A')
 lambda  =

   4.007D-16    0.           0.
   0.           0.3605897    0.
   0.           0.           16.63941

 alpha  =

  -0.4082483  -0.8537759    0.3231099
   0.8164966  -0.1832195    0.547507
  -0.4082483   0.4873369    0.7719042
```

特異値の 2 乗がおおよそ固有値になっていることがわかる。また、 **spec(A * A')** の特異ベクトルと A の右特異ベクトル、 **spec(A' * A)** の特異ベクトルに転置を取ったものと A の左特異ベクトルが非常に近い値を取っていることがわかる。

2.2

行列 $A = a_{i,j} \in \mathbb{R}^{100\times 10}$ を以下のように定義する。

$$a_{i,j} = |i - j + 1|$$

このとき、べき乗法、逆反復法を $A^T A$ に適用し、A の最大特異値、最小固有値を求めよ。

```
A = zeros(100, 10);
for i = 1:100,
    for j = 1:10,
        A(i, j) = abs(i - j + 1);
    end
end
```

順に、べき乗法、逆反復法を適用した結果である。

```
--> [x, lambda] = powerMethod(ones(10, 1), A' * A)
 lambda  =

   2955489.2

 x  =

   0.3381319
   0.3331766
   0.3282291
   0.323288
   0.3183525
   0.3134223
   0.3084975
   0.3035786
   0.2986665
   0.2937626
--> [lambda, x] = invIterationMethod(ones(10, 1), A' * A)
 x  =

  -0.0482548
   0.1742716
  -0.3094935
   0.4050188
  -0.4560623
   0.4559215
  -0.4046269
   0.308948
  -0.1736266
   0.0479496

 lambda  =

   0.2646018
```

3　課題 3

主成分分析を行い、主成分方向を示した直線を加えてグラフに描画せよ。

```
[lambda, pf, pc] = pca([X- mean(X), Y - mean(Y)])
clf()
scatter(X, Y);
plot2d([0, pf(1, 1)*8], [0, pf(2, 1)*8])
plot2d([0, pf(1, 2)*8], [0, pf(2, 2)*8])
```

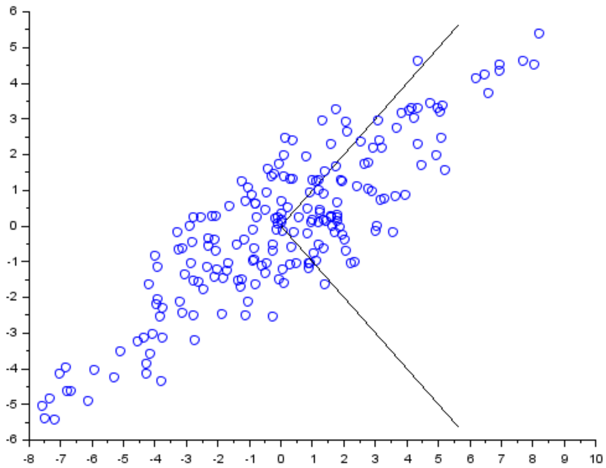

図 1: 主成分分析のグラフ

4　課題 4

4.1

以下の Scilab プログラムで行列 A を生成する。

```
rand("seed",20181109);
U1 = rand(100,10);
V1 = rand(70, 10);
U2 = rand(100, 40);
V2 = rand(70, 40);
A = U1*V1' + 1.0E-5*U2*V2' + 1.0E-10*rand(100,70);
```

このとき、低ランク近似を $k = 1, 2, \ldots n$ に対して行い、それぞれの k でのフロベニウスノルムに関する誤差 $||A - \bar(A)_k||_F$ を計算し、グラフに描画せよ。

低ランク近似を行って、フロベニウスノルムを計算するための関数

```
function [fnorm] = getFNorm(A, k)
  [U, S, V] = svd(A);
  fnorm = 0
  Ak = zeros(size(A)(1), size(A)(2));
  for i=1:k,
    Ak = Ak + S(i, i) * U(1:$, i) * V(1:$, i)'
  end
  for i=1:size(A)(1),
    for j=1:size(A)(2),
      fnorm = fnorm + (A(i, j) - Ak(i, j))^2
    end
  end
  fnorm = fnorm ^ (1/2)
endfunction
```

```
fnorms = zeros(1, 1)
for k = 1:70,
  fnorms(1, k) = getFNorm(A, k);
end
plot2d('nl', fnorms)
```

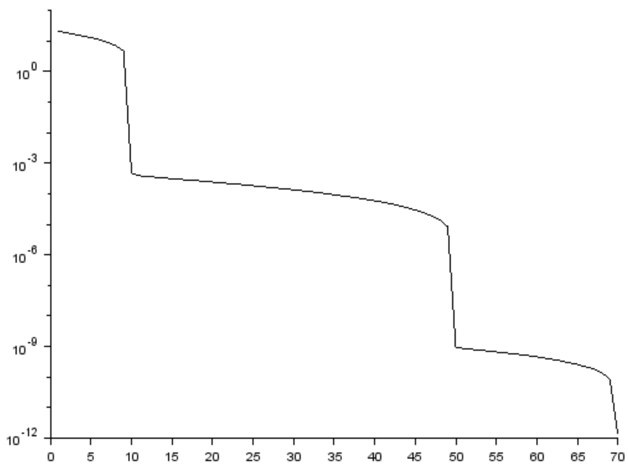

図 2: フロベニウスノルムに関する誤差のグラフ

4.2

(4-1) で計算した、それぞれの k に対するフロベニウスノルムに関する誤差 $||A - \bar{A}_k||_F$ は、

$$\sqrt{\Sigma_{l=k+1}^{n} \sigma_l^2}$$

に一致する。これを (4-1) で用いた行列 A で確認し、上記の値をグラフに描画せよ。

```
fnorms_ = zeros(1, 70);
[U, S, V] = svd(A);
for k = 1:size(A)(2) - 1,
  for l = k+1:size(A)(2),
    fnorms_(1, k) = fnorms_(1, k) + S(l, l)^2;
  end
  fnorms_(1, k) = fnorms_(1, k)^(1/2);
end
plot2d('nl', fnorms_)
```

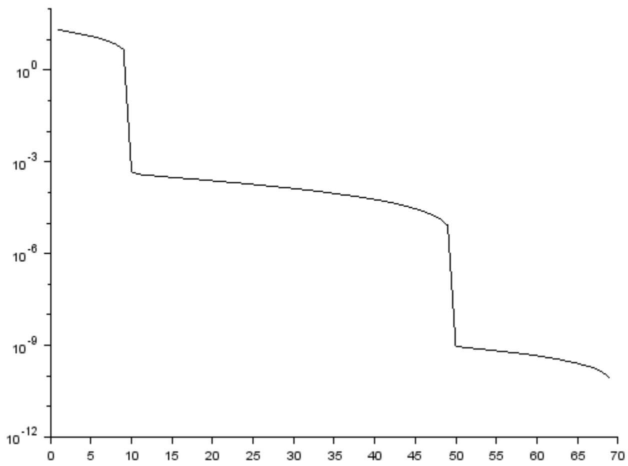

図 3: (4-2) のグラフ