

1 課題 1

1.1 \mathbf{x} が最小二乗問題 $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$ の解であるとき、かつそのときに限り正規方程式 $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ の解であることを示せ。

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 &= (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{x}^T A^T - \mathbf{b}^T)(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \\ \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} &= 2A^T A \mathbf{x} - 2A^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

よって $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$ を最小化するためには、 $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ であることが必要であると言える。

1.2 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank } A = n$ の特異値分解は

$$A = U \Sigma V^T, \quad U \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad V \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ U^T U = I, \quad V V^T = V^T V = I$$

と表せる。このとき、最小二乗問題 $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ の解は $\mathbf{x} = V \Sigma^{-1} U^T \mathbf{b}$ であることを示せ。

(1-1) より、

$$\begin{aligned} A^T A \mathbf{x} &= A^T \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} &= (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} &= (V \Sigma U^T U \Sigma V^T)^{-1} A^T \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} &= (V \Sigma^2 V^T)^{-1} A^T \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} &= V \Sigma^{-2} V^T V \Sigma U^T \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} &= V \Sigma^{-1} U^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

1.3 行列 A , ベクトル \mathbf{b} を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (1)$$

とし、最小二乗問題 $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$ を特異値分解を用いて解く Scilab プログラムを作成し、解を求めよ。

行列の宣言

数理アルゴリズム 演習課題9 提出日：2017 年 12 月 14 日
201611350 江畑拓哉

```
A = [1, 1, 1; 1, 2, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3];  
b = [4; 5; 6; 7];
```

最小二乗問題を解く関数

```
function [x] = solveLSP(U, S, V, b)  
    x = V * inv(S) * U' * b  
endfunction
```

実行

```
[U, S, V] = svd(A, "e")  
x = solveLSP(U, S, V, b)
```

解

```
--> x = solveLSP(U, S, V, b)  
x =  
  
3.  
-0.5  
1.5
```

2 課題2

手書き数字の画像データセットである MNIST を用いて手書き数字の画像認識を行う。MNIST の行列データは manaba にアップロードされているため、ダウンロードして用いること。ファイルから得られる行列 X は画像データであり、各列に 1 枚の画像が格納されている。 Y は各画像が属するグループを示している。 $\text{test_}X$, $\text{test_}Y$ はそれぞれテストデータと各画像が属するグループを示している。今回の課題では訓練データとテストデータを 10,000 個ずつ用いる。manaba にアップロードされている `showMNISTimg.sci` を使用すると行列 X の先頭から i 番目の列に格納されている訓練データを画像として表示することが出来る。

2.1 行列 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{10 \times n}$ に対し、最小二乗問題

$$\min_{W \in \mathbb{R}^{10 \times m}} \|Y - WX\|_F$$

の特異値分解を用いて解く Scilab プログラムを作成せよ。行列 X の特異値を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$ としたとき、 k を $\sigma_k/\sigma_1 \geq 10^{-14}$ を満たすような最

大の整数とする。k 個の特異値とそれぞれの特異値に対応する k 本の特異ベクトルを用いて行列 X の低ランク近似を行うこと。ここでは $m = 784, n = 10,000$ である。

低ランク近似した X を得るための関数

```
function [X_k] = getX_k(U, S, V, k, X)
    X_k = zeros(size(X)(1), size(X)(2));
    for i=1:k,
        X_k = X_k + S(i, i) * U(1:$, i) * V(1:$, i)';
        if S(i, i) < S(1, 1) * 10e-14 then break; end,
    end
endfunction
#+end_src scilab
```

ブロック最小二乗問題を解くための関数

```
#+begin_src scilab
function [W] = solveBLSP(U, i_S, V, Y)
    W = Y * V * i_S * U';
endfunction
```

対角行列の逆行列を求める関数

```
function [S_] = inv_(S)
    S_ = zeros(size(S)(1), size(S)(2))
    for i=1:rank(S),
        S_(i, i) = 1/S(i, i)
    end
endfunction
```

実行

```
[U, S, V] = svd(X);
k = 784;
X_k = getX_k(U, S, V, k, X);
[U, S, V] = svd(X_k, "e");
W = solveBLSP(U, inv_(S), V, Y);
```

- 2.2 得られた行列 W を用いてテストデータの画像がどのグループに属するか判定することができる。manaba にアップロードされている check.sci を用いて (2-1) で得られた W に対して処理判定を行い、画像認識の正答率を求めよ。check(W , test __ X , test __ Y) と実行すると正答率を求めることができる。

```
--> check(W, test_X, test_Y)
ans =

0.8305
```

- 2.3 (2-2) では訓練データを 10,000 個用いて画像認識を行ったが、訓練データ数を帰ることで画像認識の正答率は変化する。訓練データ数を行列の先端の列から 1,000, 2,000, ..., 10,000 個としたときの画像認識の正答率を求める Scilab プログラムを作成し、それぞれの訓練データ数における正答率をグラフに描画せよ。

```
c = zeros(0);
for i=1:10,
    [U, S, V] = svd(X(1:$, 1:1000*i));
    k = 784;
    X_k = getX_k(U, S, V, k, X(1:$, 1:1000*i));
    [U, S, V] = svd(X_k, "e");
    W = solveBLSP(U, inv_(S), V, Y(1:$, 1:1000*i));
    c(i) = check(W, test_X, test_Y);
end
plot(c, linspace(1000, 10000, 10))
```

- 2.4 行列 X の低ランク近似を行う際の整数 k を $\sigma_k/\sigma_1 \geq \delta$ を満たすような最大の整数とする。このとき、閾値 δ を 0.005, 0.01, 0.015, ..., 0.1 と変えたときの画像認識の正答率を求める Scilab プログラムを作成し、各しきい値に対する正答率をグラフに描画せよ。ただし、訓練データは 10,000 個用いること。

閾値を変更できるようにした低ランク近似の関数

```
function [X_k] = getX_k_d(U, S, V, k, X, delta)
    X_k = zeros(size(X)(1), size(X)(2));
    for i=1:k,
        X_k = X_k + S(i, i) * U(1:$, i) * V(1:$, i)';
    end
```

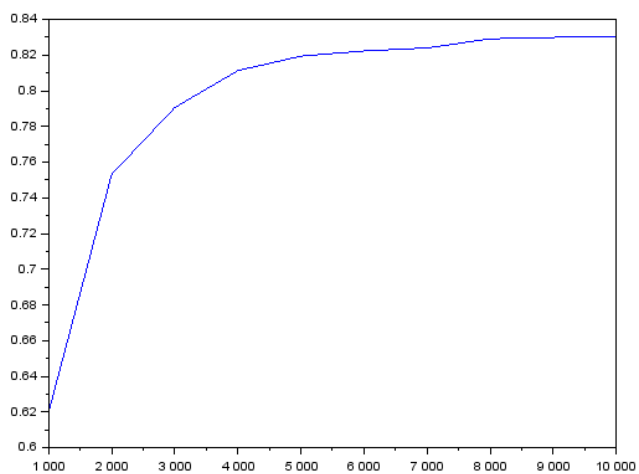


Figure 1: 訓練データ数と正答率のグラフ

```
    if S(i, i) < S(1, 1) * delta then break; end,  
    end  
endfunction  
#+end_src scilab
```

```
#+begin_src scilab  
c = zeros(0);  
deltas = linspace(0.005, 0.1, 20)  
for i=1:20,  
    [U, S, V] = svd(X);  
    k = 784;  
    X_k = getX_k_d(U, S, V, k, X, deltas(i));  
    [U, S, V] = svd(X_k, "e");  
    W = solveBLSP(U, inv_(S), V, Y);  
    c(i) = check(W, test_X, test_Y);  
end  
plot(deltas, c)
```

数理アルゴリズム 演習課題9 提出日：2017 年 12 月 14 日
201611350 江畑拓哉

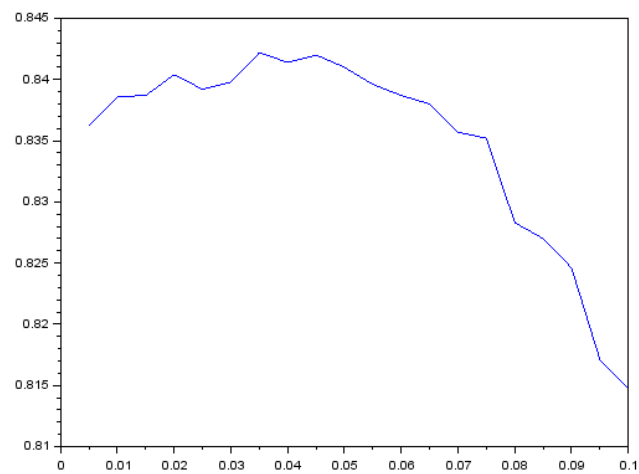


Figure 2: 閾値と正答率のグラフ