数理アルゴリズム　演習課題 5　提出日：2017 年 11 月 20 日
201611350 江畑 拓哉

1　課題 1

1.1

実対称行列 $A = A^T$ の固有値はすべて実数であることを示せ。

A に対する固有値の一つを λ とし、これに対する固有ベクトルを $\boldsymbol{a}_\lambda$ とする。このとき、 $A\boldsymbol{a}_\lambda = \lambda\boldsymbol{a}_\lambda$ が成立する。
ここで、両辺に共役転置を取ると、 $\bar{\boldsymbol{a}_\lambda}^T A = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{a}_\lambda}^T$ となる。 (A が実対称行列のとき、 $\bar{A}^T = A$)
すると、 $\lambda\bar{\boldsymbol{a}_\lambda}^T\boldsymbol{a}_\lambda = \bar{\boldsymbol{a}_\lambda}^T\lambda\boldsymbol{a}_\lambda = \bar{\boldsymbol{a}_\lambda}^T A\boldsymbol{a}_\lambda = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{a}_\lambda}^T\boldsymbol{a}_\lambda$ となり、
$(\lambda - \bar{\lambda})\bar{\boldsymbol{a}_\lambda}\boldsymbol{a}_\lambda = 0$

ここで、 $\boldsymbol{a}_\lambda \neq 0$ より、$\lambda = \bar{\lambda}$
すなわち、 $A = A^T$ の固有値はすべて実数であるといえる。

1.2

λ は $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の固有値であることと、 $det(A - \lambda I) = 0$ は等価であることを示せ。

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

よってある $\lambda_i = \lambda$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) が成り立つので、 λ は固有値になる。

固有方程式をもち出なさいのであれば、

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} &\neq 0 \\ \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow det(A - \lambda I) &= 0 \end{aligned}$$

よって λ は固有値である。

2　課題 2

n 個あるページにおいて、ページ j から ページ j へジャンプする確率を $p_{i,j}$ とする。ただし、リンクが有るページはすべて等しい確率でジャンプするものとする。確率遷移行列 $P = p_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の各列の要素が 1, つまり各 j に対して $\Sigma_i p_{i,j} = 1$ とする。

2.1

図 1 で示される 6 ページ間のリンクを表現するような確率遷移行列 P を与えよ。

```
P = [0 0 1 0 0 0,
     0 0 0 1/2 0 1/2,
     0 1/2 0 1/2 0 0,
     1 0 0 0 0 1/2,
     0 1/2 0 0 0 0,
     0 0 0 0 1 0];
```

2.2

反復式 (1) を用いることで (2-1) で与えた行列 P に関するページランクベクトル $\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

```
P = [0 0 1 0 0 0,
     0 0 0 1/2 0 1/2,
     0 1/2 0 1/2 0 0,
     1 0 0 0 0 1/2,
     0 1/2 0 0 0 0,
     0 0 0 0 1 0];
alpha = 0.85;

n = size(P)(1);
x = 1/n;
x = repmat(x, n, 1);
v = x;
e = 1;
e = repmat(e, n, 1);

R = zeros(1, 1);
count = 1;
R(count) = 100;
while R(count) >= 10^-4,
  R(count + 1) = 1/norm(x) * norm((alpha * P + (1 - alpha) * v * e') * x - x);
  x = alpha * P * x + (1 - alpha) * v;
  count = count + 1;
```

```
end
R = R(2:count);
```

```
x  =

  0.1925529
  0.170509
  0.1971406
  0.2344972
  0.0974652
  0.1078352
```

2.3

(2-2) で反復式 (1) を用いて計算された各反復での

$$\frac{1}{||\boldsymbol{x}^{(k)}||_2}||[\alpha P + (1-\alpha)\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}^T]\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^k||_2$$

の値をグラフに描け。

```
plot2d('nl', R)
```

2.4

(2-2) で得られたページランクベクトルに基づき、ページ番号を人気順に挙げよ。

```
[y, k] = gsort(x);
k
```

```
k  =

  4.
  3.
  1.
  2.
  6.
  5.
```

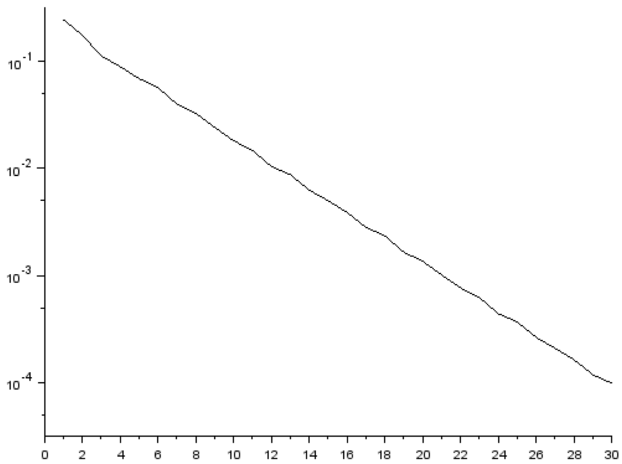

図 1: 各反復での値についてのグラフ

3　課題 3

3.1

　ページランクベクトルの更新式を用いることで、生成した行列 P に関するページランクベクトルを計算し、各反復での

$$\frac{1}{||\boldsymbol{x}^k||_2}||[\alpha P+(1-\alpha)\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}^T]\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}||_2$$

の値をグラフに描け。

ページランクを計算するための関数を作成した。

```
function [R, count, x] = mypagerank(P, alpha),
n = size(P)(1);
x = 1/n;
x = repmat(x, n, 1);
v = x
e = 1;
e = repmat(e, n, 1);

R = zeros(100, 1);
count = 1;
R(count) = 100;
```

```
while R(count) >= 10^-4,
  R(count + 1) = 1/norm(x) * norm((alpha * P + (1 - alpha) * v * e') * x - x);
  x = alpha * P * x + (1 - alpha) * v;
  count = count + 1;
end
R = R(2:count)
count = count - 1
endfunction
```

作成された生成される確率遷移行列 P を "matrixP.sci" に保存した。

```
load('matrixP.sci');
alpha = 0.85;
[R, count, x] = mypagerank(P, alpha);
plot2d('nl',R);
```

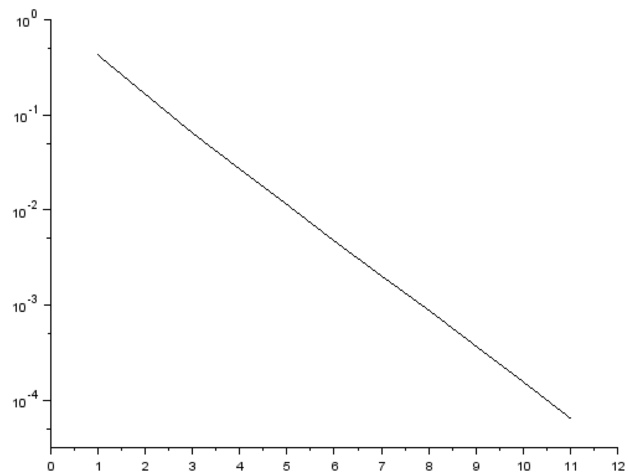

図 2: 各反復での値のグラフ

3.2

(3-1) で得られたページランクベクトルに基づき、ページ番号を人気順に上か 3 つ挙げよ。

```
[k, l] = gsort(x);
l(1:3)
```

```
--> l(1:3)
 ans  =

   601.
   802.
   662.
```

3.3

(3-1) において、 α の値を $\alpha = 0.5, 0.55, 0.6, \ldots, 0.95$ と変更したときの収束までの反復回数をグラフに描け。

```
alphas = linspace(0.5, 0.95, 10)
Rs = zeros(1, 1)
c = 1
for alpha = alphas,
    alpha
    [R, count, x] = mypagerank(P, alpha);
    Rs(1, c) = count;
    c = c + 1;
end
plot2d(Rs)
```

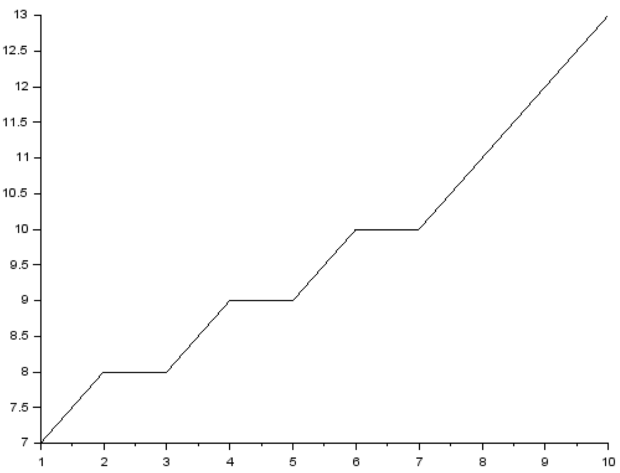

図 3: 反復回数のグラフ