数理アルゴリズム　演習課題 6　 提出日：2017 年 11 月 20 日
201611350 江畑 拓哉

# 1　課題 1

## 1.1

$\lambda$ が A の固有値のとき、 $\dfrac{1}{\lambda}$ は $A^{-1}$ の固有値である。
$\boldsymbol{a}_\lambda$ は 固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルとする。

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{a}_\lambda &= \lambda\boldsymbol{a}_\lambda \\
\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_\lambda &= A^{-1}\lambda\boldsymbol{a}_\lambda \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}_\lambda &= A^{-1}\boldsymbol{a}_\lambda \ \because \lambda \neq 0
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{1}{\lambda}$ は $A^{-1}$ の固有値である。

## 1.2

P を n 次の正則行列とする。このとき、A の固有値と $P^{-1}AP$ の固有値は一致する。

$\boldsymbol{x}$ を 固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルとする。

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \lambda\boldsymbol{x} \\
\Leftrightarrow PA\boldsymbol{x} &= \lambda P\boldsymbol{x} \\
\Leftrightarrow PAP^{-1}\boldsymbol{y} &= \lambda PP^{-1}\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{x} = P^{-1}\boldsymbol{y} \\
\Leftrightarrow PAP^{-1}\boldsymbol{y} &= \lambda\boldsymbol{y} \qquad \because PP^{-1} = I
\end{aligned}
$$

よって両者の固有値は一致する。

## 1.3

A が実対象行列のとき、相異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する。

## 1.4

$\sigma$ を A の固有値でない複素数、I を単位行列とする。このとき、 $\lambda$ が A の固有値ならば、 $\dfrac{1}{\sigma - \lambda}$ は $(\sigma I - A)^{-1}$ の固有値である。

$\boldsymbol{x}$ は $\lambda$ に対する固有ベクトルとする。 $\sigma$ は A の固有値ではないので、 $\sigma I - A \neq 0$ であることを利用して、

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \lambda\boldsymbol{x} \\ \sigma\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} &= \sigma\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} \\ \Leftrightarrow (\sigma I - A)\boldsymbol{x} &= (\sigma - \lambda)\boldsymbol{x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma - \lambda}\boldsymbol{x} &= (\sigma I - A)^{-1}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

よって $(\sigma I - A^{-1})$ の固有値は $\dfrac{1}{\sigma - \lambda}$ である。

## 2 課題 2

### 2.1

べき乗法の Scilab プログラムを作成し、行列 A の絶対値最大固有値 $\lambda$ とそれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

行列 A と初期ベクトル $\boldsymbol{x}^{(0)}$ (それぞれ A, x _ 0 とした)

```
A = [2, 1, 0; 1, 2, 1; 0, 1, 2]
x_0 = [1; 1; 1]
```

べき乗法の関数

```
function [x, lambda] = powerMethod(x_0, A)
    x = x_0
    while 1==1 do
        w = A * x
        x = w / norm(w)
        lambda = (x' * (A * x)) / (x' * x)
        if 10^-5 > norm(A * x - lambda * x) then break end
    end
endfunction

[x, lambda] = powerMethod(x_0, A)
```

最大固有値 $\lambda$ とそれに対応する近似固有ベクトル $\boldsymbol{x}^{(k)}$ (それぞれ、 lambda , x とした)

```
--> [x, lambda] = powerMethod(x_0, A)
 lambda  =

   3.4142136

 x  =

   0.5000004
   0.7071063
   0.5000004
```

## 2.2

100 x 100 の五重対角行列 A に対してべき乗法を適用し、絶対値最大固有値を求めよ。

行列 A と $\boldsymbol{x}^{(0)}$ (それぞれ、A, x _ 0 とした。)

```
A = diag(repmat(3, 100, 1), 0) ..
 + diag(repmat(2, 99, 1), 1) + diag(repmat(2, 99, 1), -1) ..
 + diag(repmat(1, 98, 1), 2) + diag(repmat(1, 98, 1), -2);

x_0 = repmat(1, 100, 1);
```

べき乗法を適用した。

```
[x, lambda] = powerMethod(x_0, A);
lambda
```

求められた最大固有値 $\lambda$

```
--> lambda
 lambda  =

   8.9942446
```

## 3 課題 3

逆反復法によって固有値・固有ベクトルを求める。

行列 A

```
A = [1, 1, 1, 1; 1, 2, 2, 2; 1, 2, 3, 3; 1, 2, 3, 4]
```

逆反復法の関数

```
function [lambda, x, Rs] = invIterationMethod(x_0, A)
x = x_0;
count = 1
Rs = zeros(1, 1)
while 1 == 1 do
  w = inv(A) * x
  x = w / norm(w)
  lambda = (x' * (A*x)) / (x' * x)
  r = norm(A * x - lambda * x)
  Rs(1, count) = r
  count = count + 1
  if r <= 10^-5 then break end
  end
endfunction
```

初期ベクトル　(x とした)

```
x = repmat(1, 4, 1)
```

関数の適用と、求められた近似固有値とそれに対応する近似固有ベクトル $\boldsymbol{x}^{(k)}$ (それぞれ、 lambda, x)

```
--> [lambda, x, Rs] = invIterationMethod(x, A);
--> lambda
--> x
 lambda  =

```

```
    0.2831186
 x  =

    0.4285619
  -0.6565513
    0.5773179
  -0.2279894
```

反復ごとの残差の値をグラフに描画せよ。

```
plot2d(Rs)
```

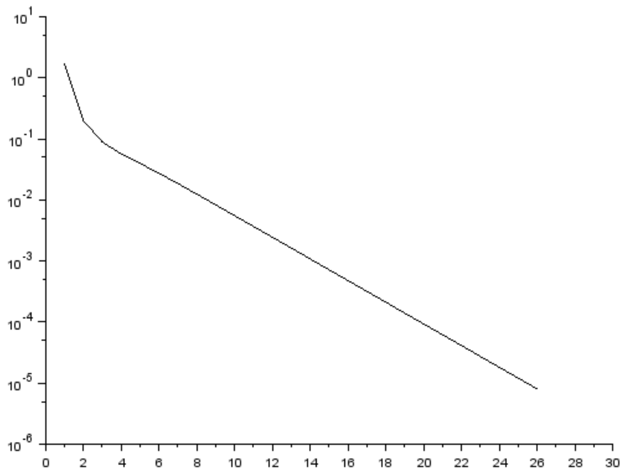


図 1: 残差のグラフ

# 4　課題 4

## 4.1

シフト付き逆反復法を行い、それぞれのシフトでの反復回数をグラフに描画せよ。

シフト付き逆反復法の関数

```
function [count, lambda] = shiftInvIterationMethod(sig, A, x_0)
x = x_0;
```

```
I_ = eye(size(A)(1), size(A)(2));
count = 1
while 1==1 do
    w = inv(sig * I_ - A) * x;
    x = w / norm(w);
    lambda = (x' * (A * x)) / (x' * x);
    r = norm(A * x - lambda * x);
    if r <= 10^-5 then break end
    count = count + 1;
end
endfunction
```

(2-2) でも用いた行列と、初期ベクトル　(それぞれ A, x _ 0)

```
A = diag(repmat(3, 100, 1), 0) ..
 + diag(repmat(2, 99, 1), 1) + diag(repmat(2, 99, 1), -1) ..
 + diag(repmat(1, 98, 1), 2) + diag(repmat(1, 98, 1), -2);

x_0 = repmat(1, 100, 1);
```

```
Idxs = linspace(2.0, 3.0, 101);
Cs = zeros(1, 1)
Ls = zeros(1, 1)
Count = 1
for c = Idxs,
    [count, lambda] = shiftInvIterationMethod(c, A, x_0)
    Cs(1, Count) = count
    Ls(1, Count) = lambda
    Count = Count + 1
end

plot2d(Cs, Idxs)
```

### 4.2

```
plot2d(Ls, Idxs)
```

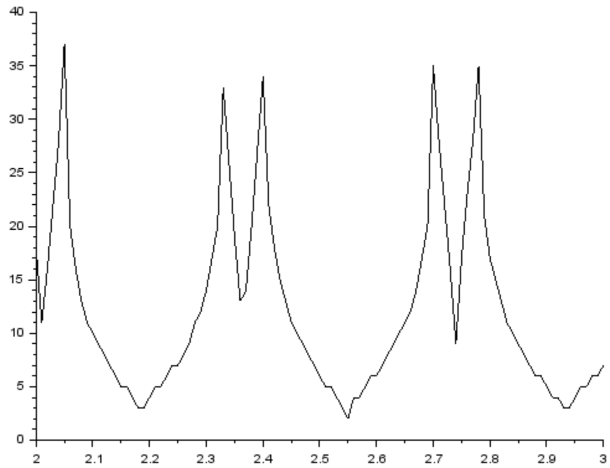


図 2: 反復回数のグラフ

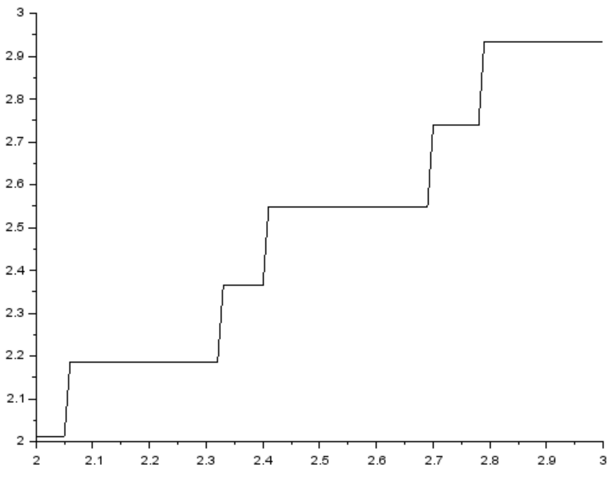


図 3: 近似固有値のグラフ