

**Πολυτεχνείο Κρήτης
Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών**



**Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι
ΤΗΛ 302
2η Άσκηση
Αναφορά**

Ομάδα 112:

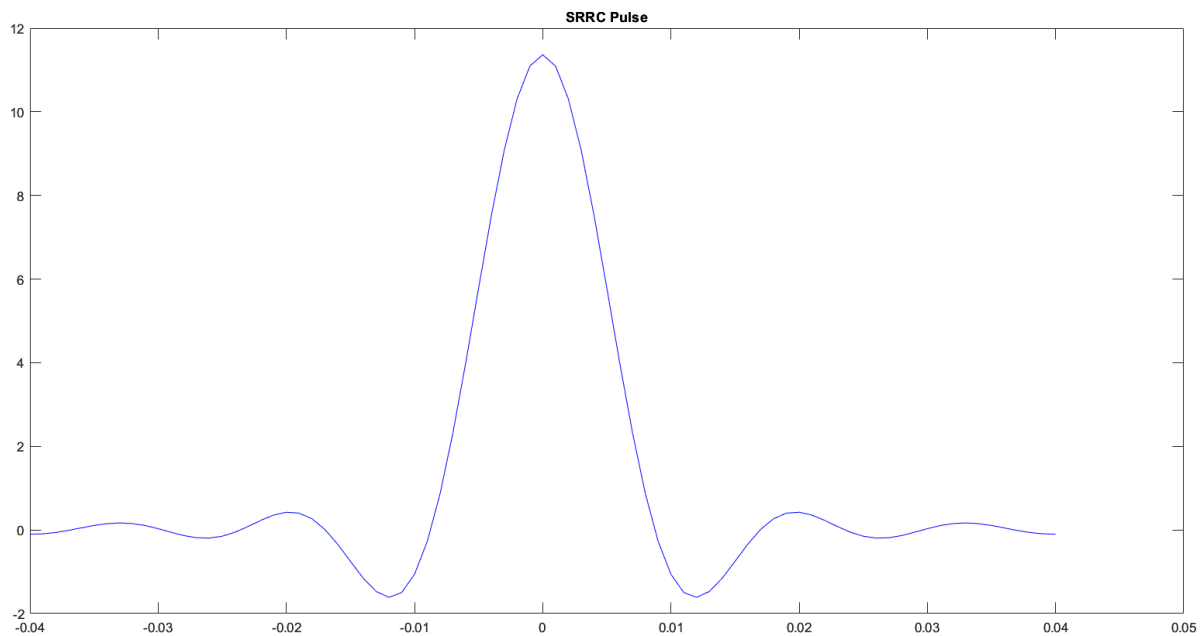
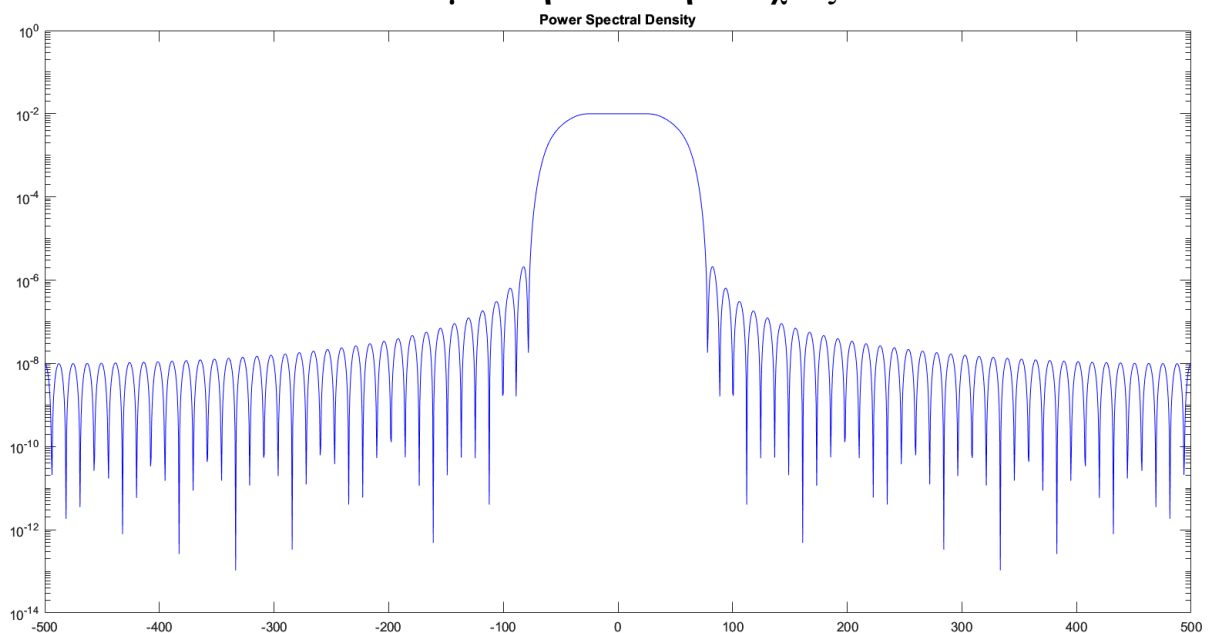
Παπαματθαϊάκη Ηλέκτρα-Δέσποινα (2018030106)

A.

Στο πρώτο μέρος της άσκησης γίνεται μελέτη του φασματικού περιεχομένου PAM κυματομορφών βασικής ζώνης.

A.1

Αρχικά, δημιουργήθηκε ένας παλμός SRRC $\phi(t)$ με τιμές $T = 10^{-2}$, $over = 10$, $T_s = T/over$, $A = 4$ και $a = 0.5$. Στη συνέχεια, υπολογίστηκε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier και σχεδιάστηκε η φασματική πυκνότητα ισχύος.

Παλμός SRRC**Φασματική Πυκνότητα Ισχύος**

Κώδικας Matlab:

```

T = 10^(-2);
over = 10;
Ts = T / over;
A = 4;
a = 0.5;

[phi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a);

figure(1);
plot(t, phi, 'blue');
title('SRRC Pulse');
set(gcf, 'color', 'w');

Nf = 2048;
Fs = 1/Ts;
Fx = -Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;
S = fftshift(fft(phi,Nf)* Ts);

figure(2);
semilogy(Fx, abs(S).^2 , 'blue');
title('Power Spectral Density');
set(gcf, 'color', 'w');

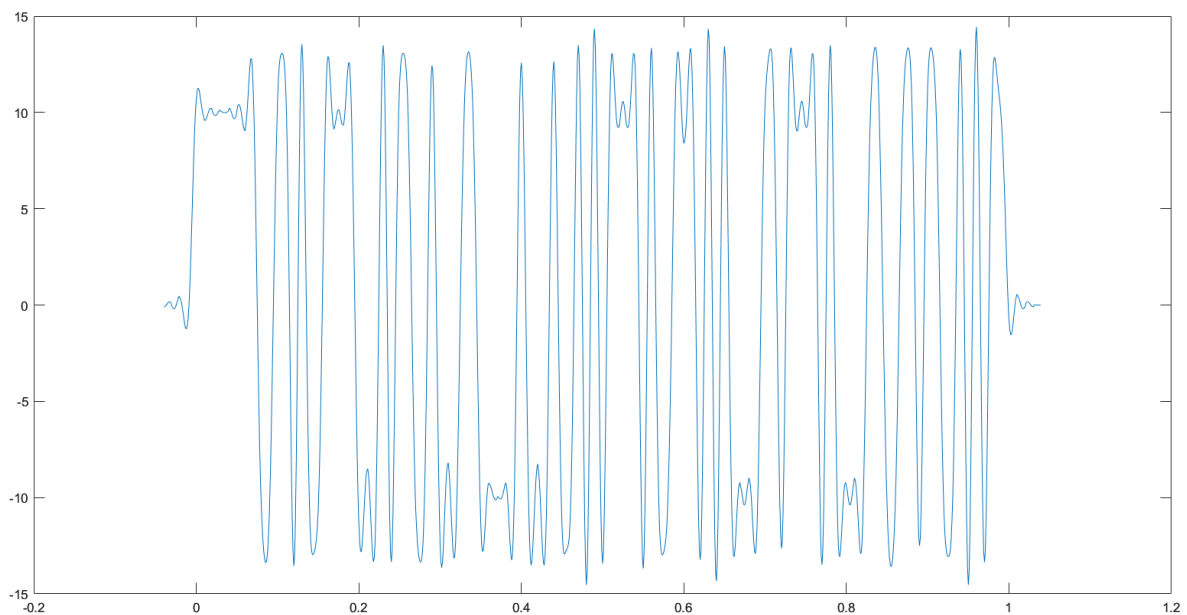
```

A.2

Στο ερώτημα αυτό δημιουργήθηκε ακολουθία $N = 100$ ανεξάρτητων και ισοπίθανων bits $\{b_0, \dots, b_{N-1}\}$, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow +1 \\ 1 &\rightarrow -1 \end{aligned}$$

Η κυματομορφή $\sum_{n=0}^{N-1} X_n \phi(t - nT)$ είναι:



Κώδικας Matlab

```
N = 100;
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;

Xn = bits_to_2PAM(b);
X_delta = 1/Ts*upsample(Xn,over);
t1= 0:Ts:N*Ts*over-Ts;

X = conv(X_delta,phi)*Ts;
tX = t1(1)+t(1):Ts:t1(end)+t(end);

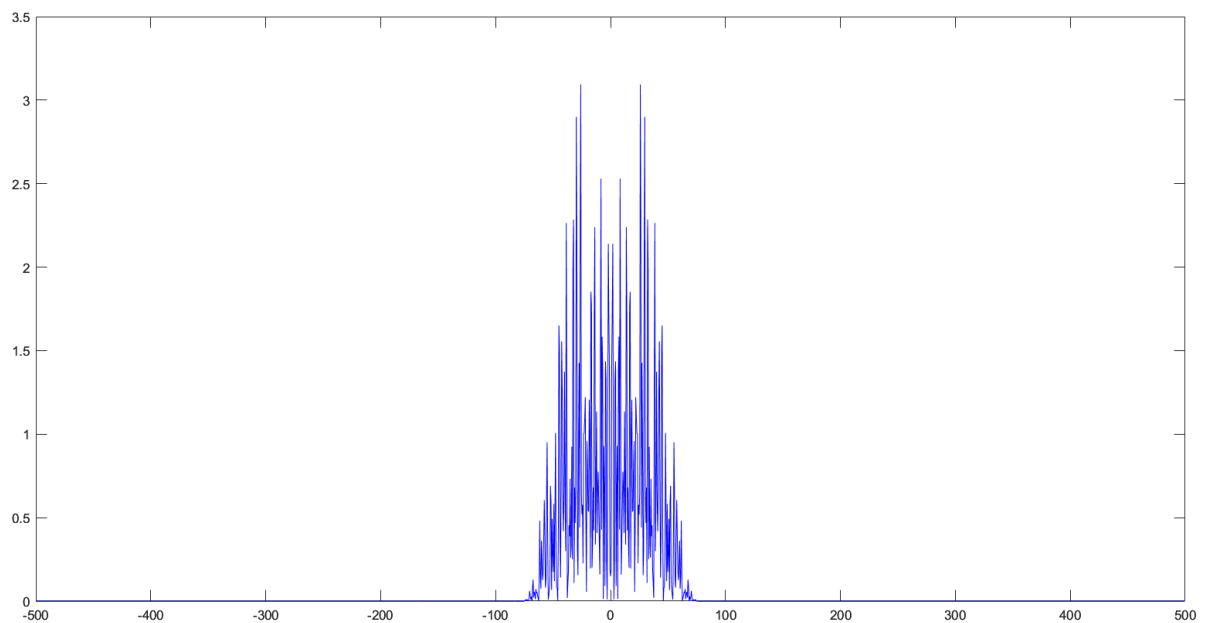
figure(3);
plot(tX,X);
set(gcf, 'color', 'w');
```

A.3

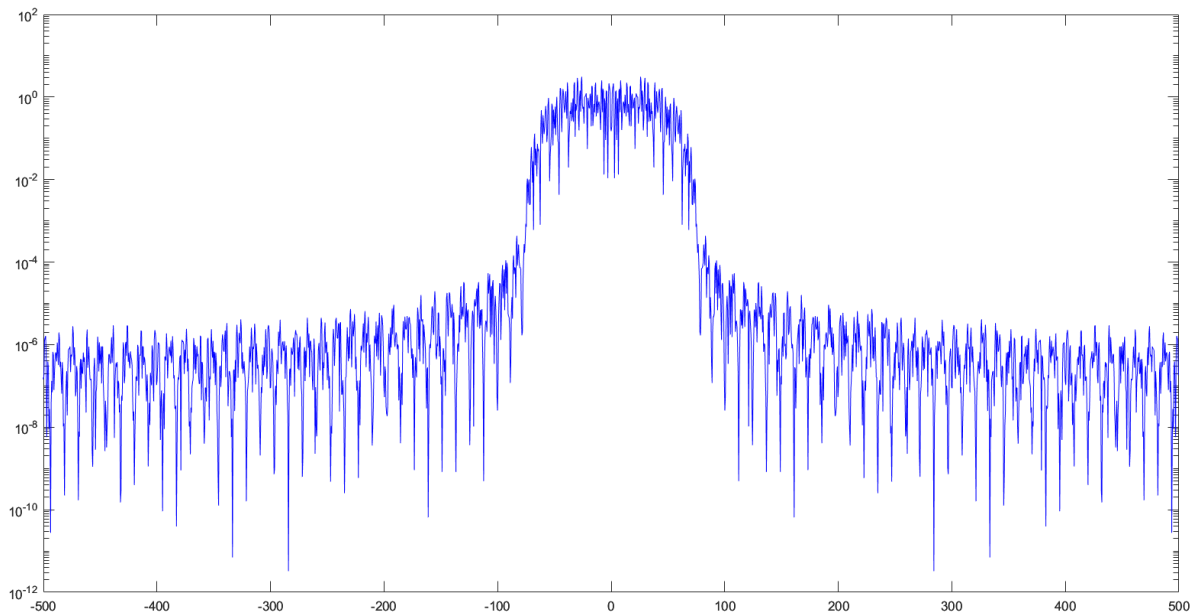
Με χρήση των συναρτήσεων `fft` και `fftshift` υπολογίστηκε το περιοδόγραμμα μιας υλοποίησης της $X(t)$.

$$P_x(F) = \frac{|F[X(t)]|^2}{T_{total}}$$

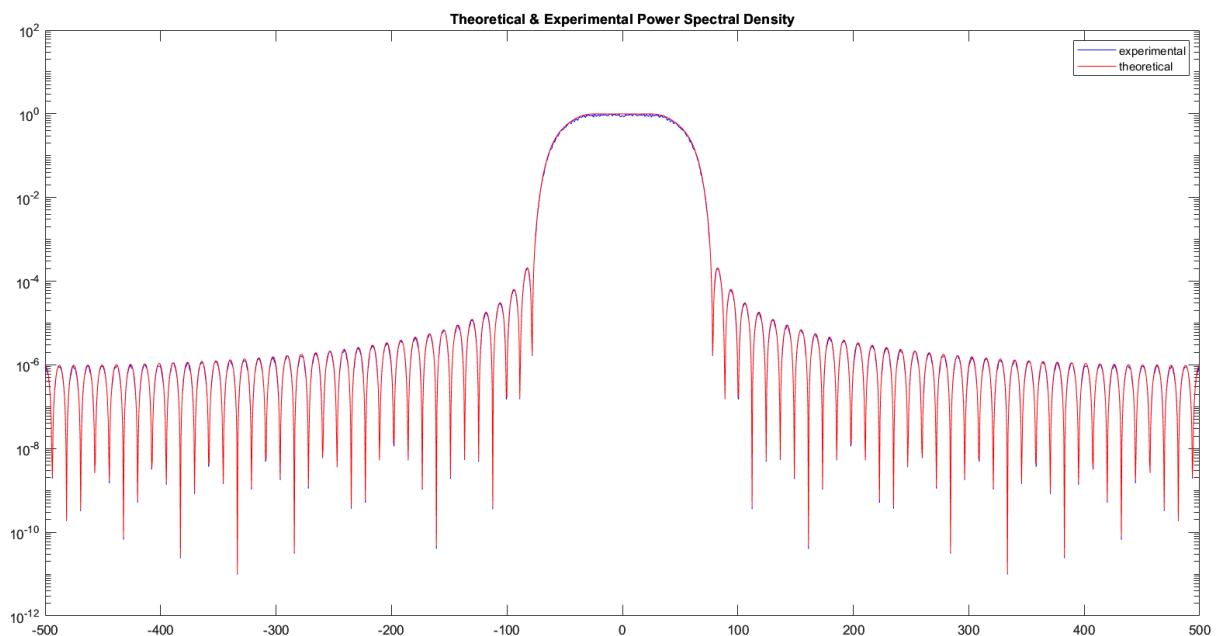
Περιοδόγραμμα με `plot()`



Περιοδόγραμμα με semilogy()



Θεωρητική και πειραματική πυκνότητα ισχύος



Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα με μπλε χρώμα απεικονίζεται η πειραματική τιμή και με κόκκινο η θεωρητική. Όσο αυξάνεται το K και το N η προσέγγιση να γίνεται καλύτερη, καθώς όσο αυξάνονται τα δείγματα, τα bits προστίθενται περισσότερες φορές για ίδιο χρονικό διάστημα άρα έχουμε λιγότερες κυματώσεις.

Κώδικας Matlab:

```
Ttotal = tX(end) - tX(1);
S2 = fftshift(fft(X,Nf)* Ts);
Px = ((abs(S2)) .^ 2) / Ttotal;

% periodogramma me plot
figure(4);
plot(Fx, Px , 'blue');
set(gcf,'color', 'w');

% periodogramma me semilogy
figure(5);
semilogy(Fx, Px , 'blue');
set(gcf,'color', 'w');

Px_sum = 0;
for K = 0:500

    b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
    Xn = bits_to_2PAM(b);
    X_delta = 1/Ts*upsample(Xn,over);
    t1= 0:Ts:N*Ts*over-Ts;
    X = conv(X_delta,phi)*Ts;
    tX = t1(1)+t(1):Ts:t1(end)+t(end);
    Ttotal = tX(end) - tX(1);
    S2 = fftshift(fft(X,Nf)* Ts);
    Px = ((abs(S2)) .^ 2) / Ttotal;
    Px_sum = Px_sum + Px;
end

Px_final = Px_sum / K;

figure(6);
semilogy(Fx, Px_final , 'blue');
set(gcf,'color', 'w');
Sx = (var(Xn)/T) .* (abs(S).^2);

figure(7);
semilogy(Fx, Px_final , 'blue');
hold on
semilogy(Fx, Sx , 'red');
title('Theoretical & Experimental Power Spectral Density');
set(gcf,'color', 'w');
legend('experimental','theoretical');
```

A.4

Για το ερώτημα αυτό κατασκευάστηκε η ακολουθία 4-PAM X_n , για $n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση:

$$00 \rightarrow +3$$

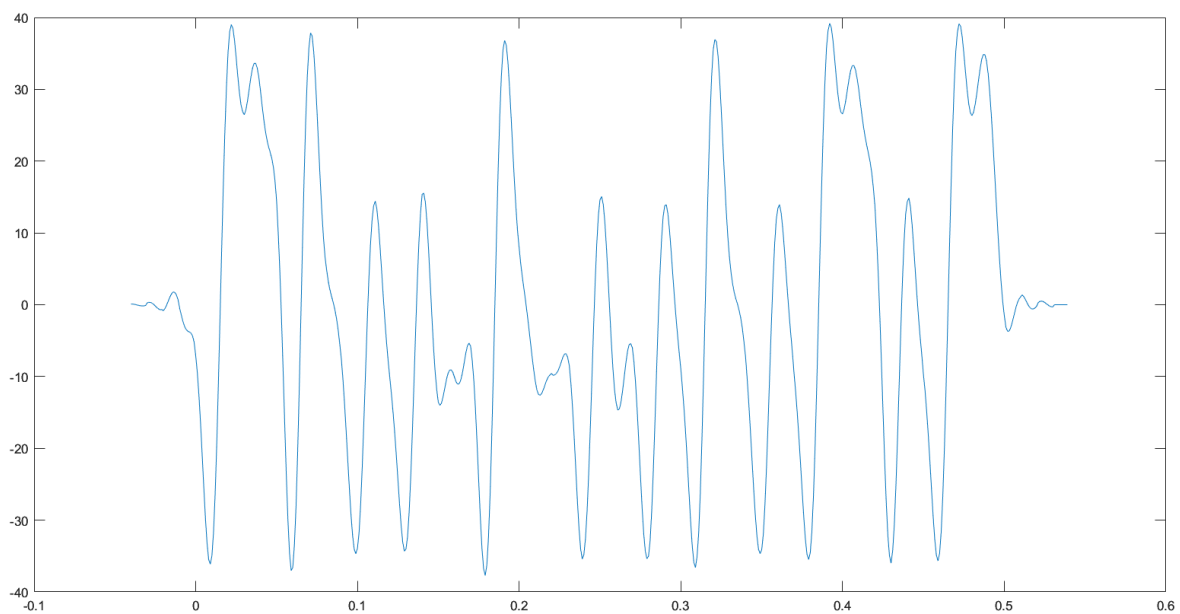
$$01 \rightarrow +1$$

$$11 \rightarrow -1$$

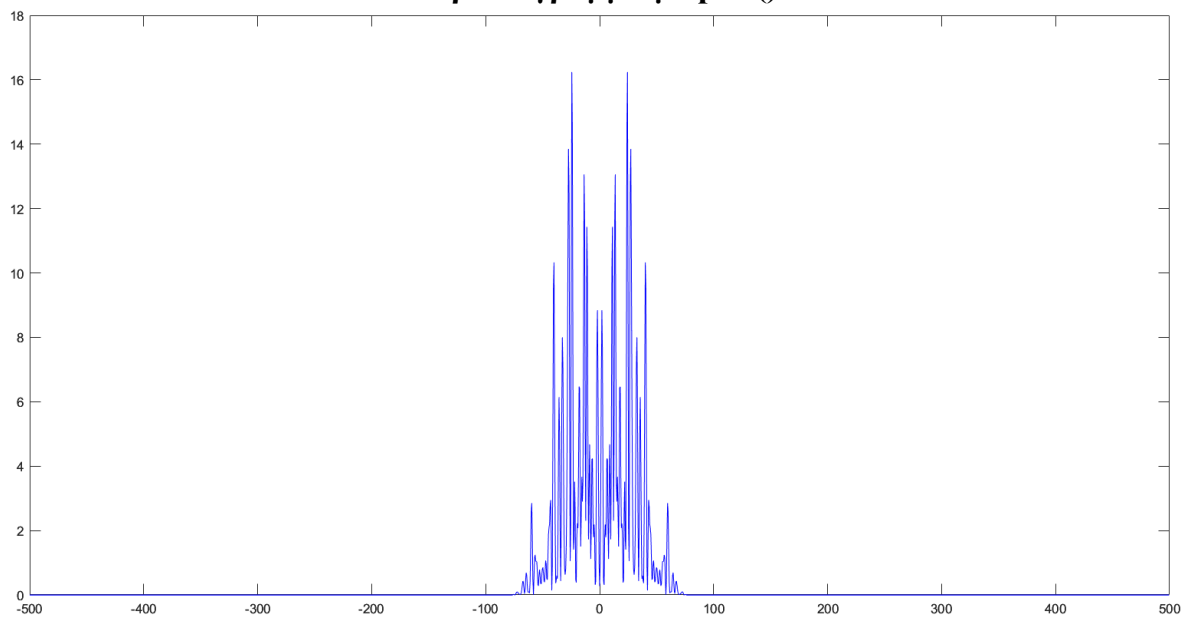
$$10 \rightarrow -3$$

Έπειτα, κατασκευάστηκε η κυματομορφή:

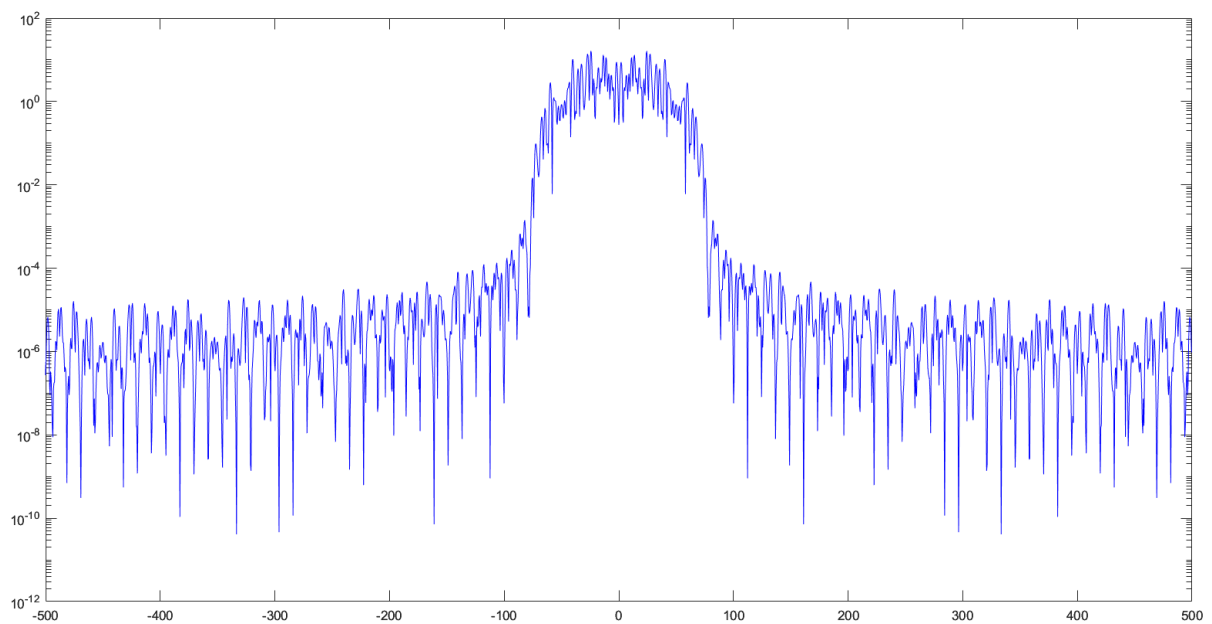
$$X(t) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \phi(t - nT)$$



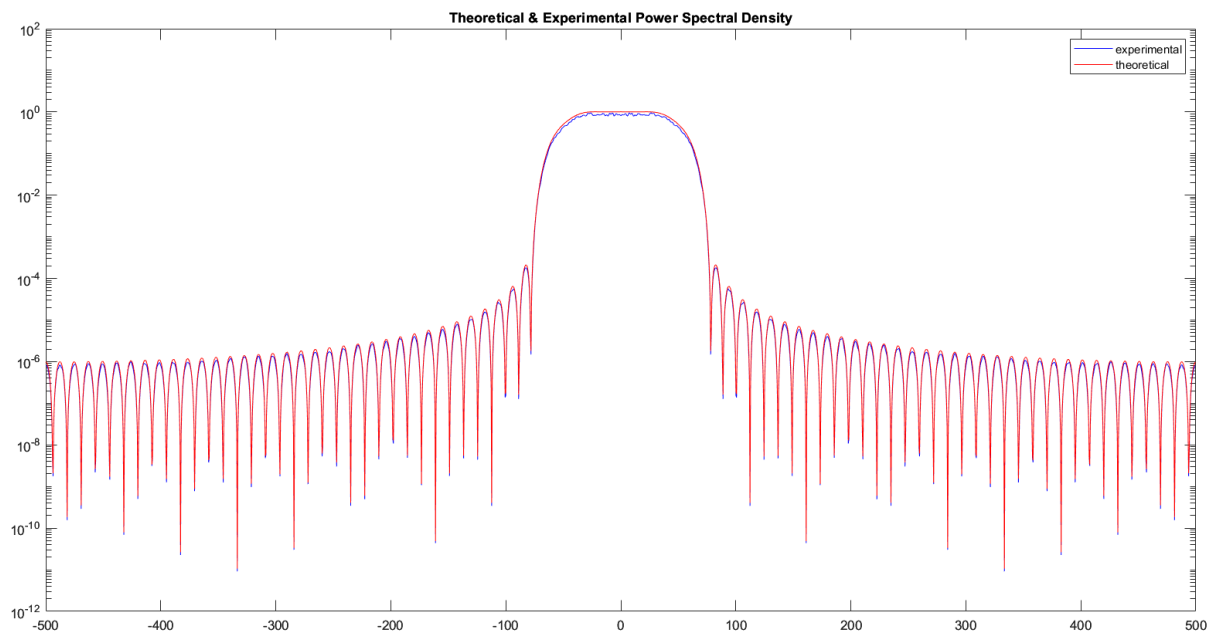
Περιοδόγραμμα με plot()



Περιοδόγραμμα με semilogy()



Θεωρητική και πειραματική πυκνότητα ισχύος



Όπως και προηγουμένως, η πειραματική τιμή είναι με χρώμα μπλε ενώ η θεωρητική με κόκκινο. Η πρώτη φαίνεται να πλησιάζει αρκετά την δεύτερη τιμή.

Επιπλέον, παρατηρείται ότι το εύρος φάσματος της 2-PAM και 4-PAM είναι τα ίδια ενώ το πλάτος της 4-PAM είναι πολύ μεγαλύτερο. Αυτό είναι αναμενόμενο, εφόσον η 4-PAM έχει περισσότερα σύμβολα από την 2-PAM και τα σύμβολα αυτά είναι πιο μακριά από τη αρχή των αξόνων. Αυτό σημαίνει ότι θα χρειαστεί περισσότερη ενέργεια για τα σύμβολα που είναι πιο μακριά από τη αρχή των αξόνων άρα και περισσότερη ισχύ. Γι' αυτό και το πλάτος αυξάνεται. Όσον αφορά το εύρος φάσματος, δεν αλλάζει η περίοδος από την οποία εξαρτάται, άρα δεν μεταβάλλεται.

Κώδικας Matlab:

```
b2 = (sign(randn(N/2, 1)) + 1)/2;
Xn2 = bits_to_4PAM(b2);
X_delta2 = 1/Ts*upsample(Xn2,over);
t2= 0:Ts:(N/2)*Ts*over-Ts;
X2 = conv(X_delta2,phi)*Ts;
tx2 = t2(1)+t(1):Ts:t2(end)+t(end);

figure(8);
plot(tx2,X2);
set(gcf,'color','w');
Ttotal2 = tx2(end) - tx2(1);
S4 = fftshift(fft(X2,Nf)* Ts);
Px2 = ((abs(S4)) .^ 2) / Ttotal2;
```

```
figure(9);
plot(Fx, Px2 , 'blue');
set(gcf, 'color', 'w');

figure(10);
semilogy(Fx, Px2 , 'blue');
set(gcf, 'color', 'w');

Px_sum2 = 0;

for K = 0:500

    b2 = (sign(randn(N/2, 1)) + 1)/2;
    Xn2 = bits_to_2PAM(b2);
    X_delta2 = 1/Ts*upsample(Xn2,over);
    t2= 0:Ts:(N/2)*Ts*over-Ts;
    X2 = conv(X_delta2,phi)*Ts;
    tX2 = t2(1)+t(1):Ts:t2(end)+t(end);
    Ttotal2 = tX2(end) - tX2(1);
    S4 = fftshift(fft(X2,Nf)* Ts);
    Px2 = ((abs(S4)) .^ 2) / Ttotal2;
    Px_sum2 = Px_sum2 + Px2;
end

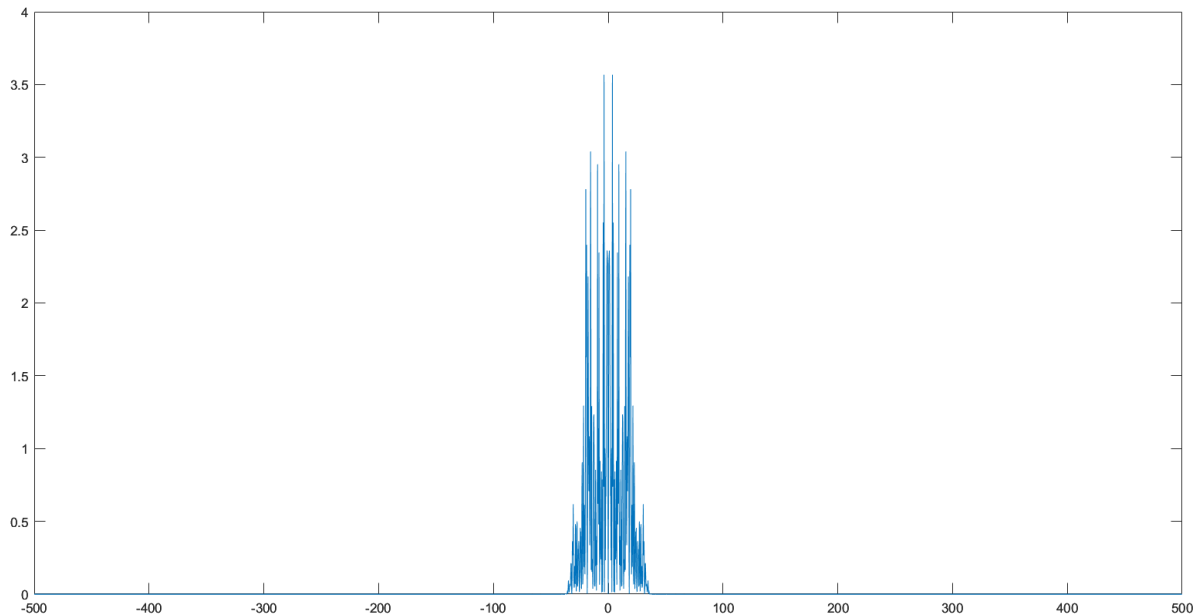
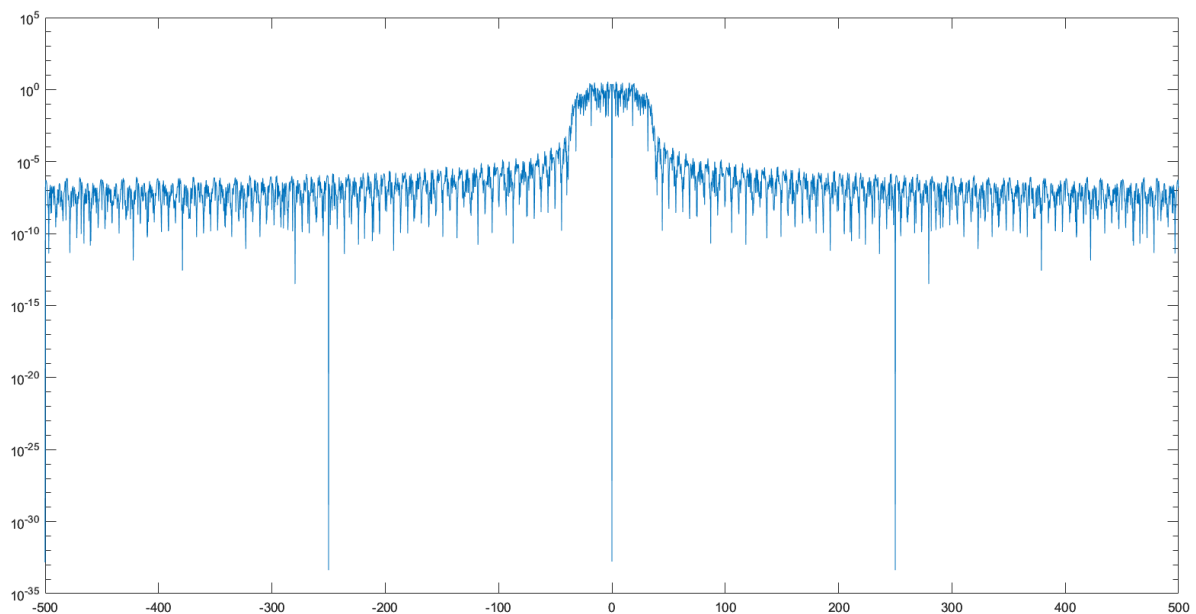
Px_final2 = Px_sum2 / K;

figure(11);
semilogy(Fx, Px_final2 , 'blue');
set(gcf, 'color', 'w');
Sx2 = (var(Xn2)/T) .* (abs(S).^2);

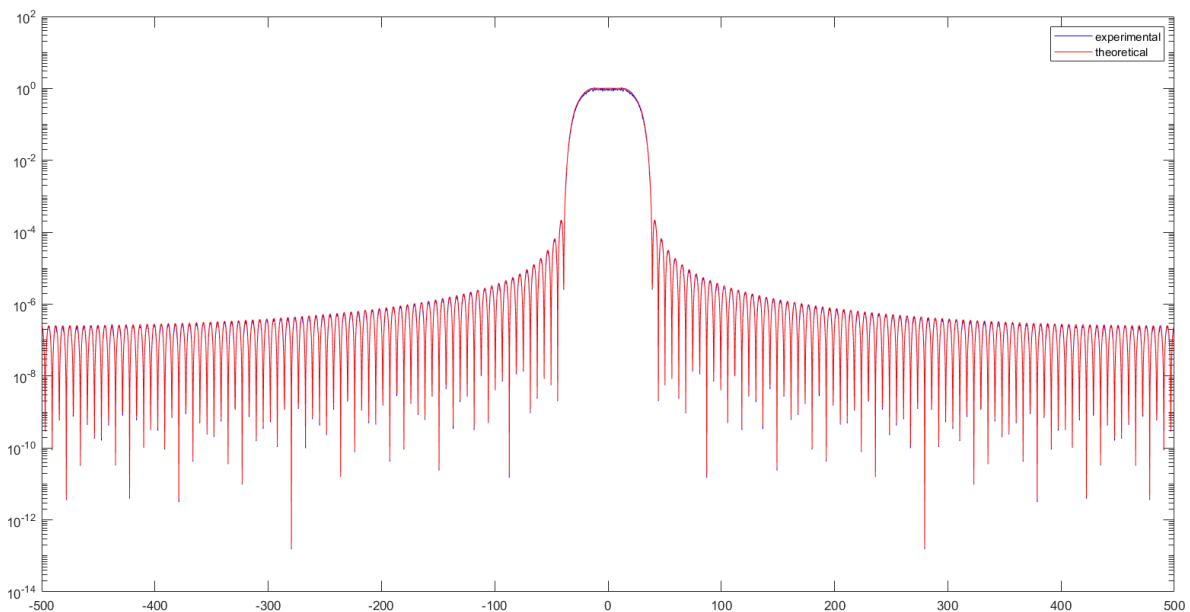
figure(12);
semilogy(Fx, Px_final2 , 'blue');
hold on
semilogy(Fx, Sx2 , 'red');
set(gcf, 'color', 'w');
title('Theoretical & Experimental Power Spectral Density');
legend('experimental','theoretical');
```

A.5

Σε αυτό το ερώτημα, επαναλαμβάνεται το βήμα A.3, θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ και διπλασιάζοντας την παράμετρο `over` για να διατηρηθεί η περίοδος δειγματοληψίας T_s ίση με αυτή των προηγούμενων βημάτων. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

Περιοδόγραμμα με plot()**Περιοδόγραμμα με semilogy()**

Θεωρητική και πειραματική πυκνότητα ισχύος



Παρατηρείται ότι το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή τη περίπτωση υποδιπλασιάζεται σε σχέση με το ερώτημα Α.3. Αυτό συμβαίνει επειδή διπλασιάζεται η περίοδος.

Κώδικας Matlab:

```
T5 = 2*T;
over2 = 2*over;
Ts = T5 / over2;
Nf = 4096;
Fs = 1/Ts;
Fx = -Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;

[phi5, t5] = srroc_pulse(T5, over2, A, a);
S5 = fftshift(fft(phi5,Nf) * Ts);

b5 = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
Xn5 = bits_to_2PAM(b5);
X_delta5 = 1/Ts*upsample(Xn5,over2);
t6= 0:Ts:N*Ts*over2-Ts;

X5 = conv(X_delta5,phi5)*Ts;
tX5 = t6(1)+t5(1):Ts:t6(end)+t5(end);

Ttotal5 = tX5(end) - tX5(1);
S6 = fftshift(fft(X5,Nf) * Ts);
Px5 = ((abs(S6)) .^ 2) / Ttotal5;
```

```

figure(13);
plot(Fx,Px5)
set(gcf,'color','w');

figure(14);
semilogy(Fx,Px5)
set(gcf,'color','w');

Px_sum5 = 0;

for K = 0:500
    b5 = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
    Xn5 = bits_to_2PAM(b5);
    X_delta5 = 1/Ts*upsample(Xn5,over2);
    t6= 0:Ts:N*Ts*over2-Ts;
    X5 = conv(X_delta5,phi5)*Ts; %convolution of ä(t ? kT) with phi gives
    ?(t ? nT)
    tX5 = t6(1)+t5(1):Ts:t6(end)+t5(end);
    Ttotal5 = tX5(end) - tX5(1);
    S6 = fftshift(fft(X5,Nf)* Ts);
    Px5 = ((abs(S6)).^ 2) / Ttotal5;
    Px_sum5 = Px_sum5 + Px5;
end

Px_final5 = Px_sum5 / K(end);

figure(15);
semilogy(Fx, Px_final5 , 'blue');
set(gcf,'color','w');
Sx5 = (var(Xn5)/T5) .* (abs(S5).^2);

figure(16);
semilogy(Fx, Px_final5 , 'blue');
hold on
semilogy(Fx, Sx5 , 'red');
set(gcf,'color','w');
legend('experimental','theoretical');
title('Theoretical & Experimental Power Spectral Density');

```

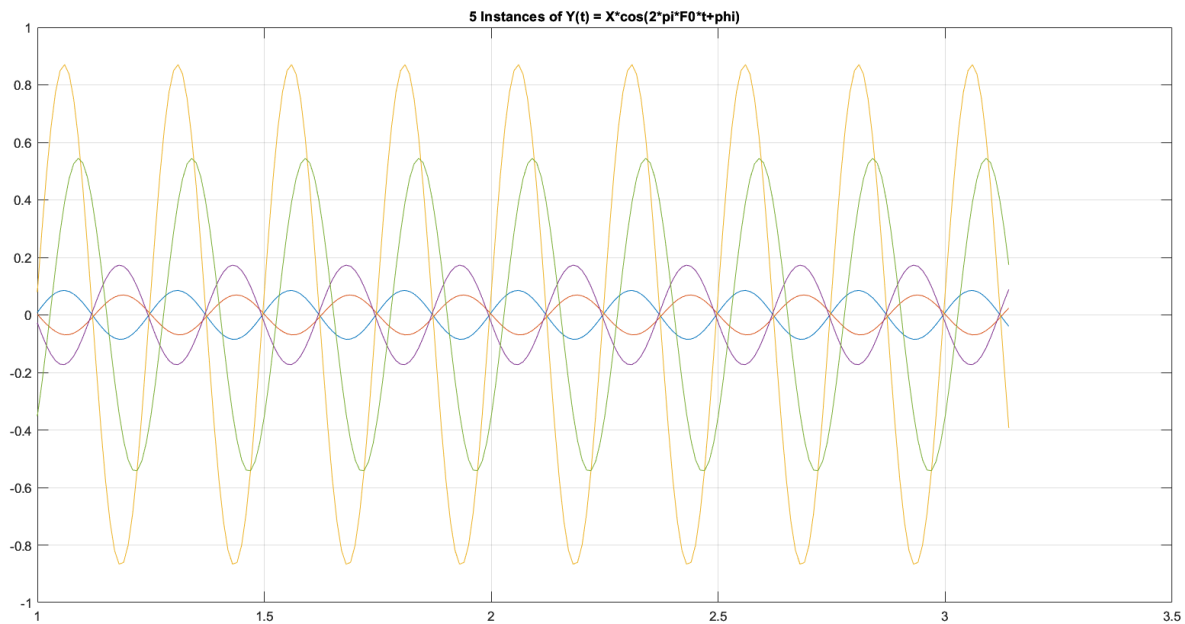
A.6

α. Αν θέλαμε να στείλουμε δεδομένα όσο το δυνατόν πιο γρήγορα για το ίδιο εύρος φάσματος θα επιλέγαμε 4-PAM γιατί μεταφέρει 2 bit ($\log_2(4) = 2$) ανά σύμβολο, ενώ η 2-PAM μεταφέρει 1 bit ανά σύμβολο ($\log_2(2) = 1$), οπότε η πρώτη για τον ίδιο χρόνο μπορεί να μεταφέρει περισσότερα σύμβολα, επομένως έχει μεγαλύτερη ταχύτητα.

β. Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θα επιλέγαμε περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ γιατί για τα ίδια δεδομένα χρησιμοποιείται μικρότερο εύρος φάσματος.

B.**B.1**

Πρωτίστως, ορίστηκε τυχαία η συχνότητα $F_0 = 4 \text{ Hertz}$, καθώς και ο χρόνος από 0 έως 2π . Στη συνέχεια, με ένα for loop δημιουργούνται οι 5 διαφορετικές υλοποιήσεις της $Y(t) = X \cdot \cos(2\pi \cdot F_0 \cdot t + \Phi)$.

**Κώδικας Matlab:**

```
F0 = 4;
t_b = 1:0.01:pi;
% plot 5 instances of the given function
figure(17)
for i=1:5
    X = normrnd(0,1);
    phi_b = 2*pi*rand(1);
    Y = X*cos(2*pi*F0*t_b+phi_b);
    plot(t_b,Y)
    hold on;
end
title('5 Instances of Y(t) = X*cos(2*pi*F0*t+phi)')
grid on;
set(gcf,'color', 'w');
```

B.2

Υπολογίζεται το $E[Y(t)]$ ως εξής:

$$E[Y(t)] = E[X \cdot \cos(2\pi F_0 t + \Phi)] = E[X] \cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \Phi)] \Leftrightarrow$$

$$E[Y(t)] = 0$$

αφού $X \sim N(0,1)$ η μέση τιμή της X είναι 0. Επίσης,

$$R_{YY}(t + \tau, t) = E[Y(t + \tau)Y(t)] \Leftrightarrow$$

$$R_{YY}(t + \tau, t) = E[X \cdot \cos(2\pi F_0 t + \Phi) \cdot X \cdot \cos(2\pi F_0 \cdot (t + \tau) + \Phi)] \Leftrightarrow$$

$$R_{YY}(t + \tau, t) = E[X \cdot X] \cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \Phi) \cdot \cos(2\pi F_0 \cdot (t + \tau) + \Phi)] \quad (1)$$

Εφόσον η μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1, έχουμε:

$$E[X \cdot X] = E[X^2] = \text{var}(X) + E[X]^2 = 1 + 0 = 1$$

Είναι γνωστό από την τριγωνομετρία ότι:

$$\cos(a) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(a + \beta) + \cos(a - \beta))$$

και,

$$R_{YY}(t + \tau, t) = 1 \cdot \frac{1}{2} E[\cos(2\pi F_0 t + \Phi + 2\pi F_0 \cdot (t + \tau) + \Phi) + \cos(2\pi F_0 t + \Phi - (2\pi F_0 \cdot (t + \tau) + \Phi))] \Leftrightarrow$$

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \frac{1}{2} E[\cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0 \tau + 2\Phi) - \cos(2\pi F_0 \tau)] \Leftrightarrow$$

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \frac{1}{2} E[\cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0 \tau + 2\Phi)] - \frac{1}{2} E[\cos(2\pi F_0 \tau)] \Leftrightarrow$$

Επειδή η τυχαία μεταβλητή Φ ακολουθεί κανονική κατανομή στο διάστημα $0, 2\pi$ ισχύει:

$$E[\cos(2\Phi)] = \int_0^{2\pi} \cos(2\Phi) d\Phi = 0.$$

Έτσι,

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \frac{1}{2} E[\cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0 \tau) - \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau)] \Leftrightarrow$$

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \frac{1}{2} (\cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0 \tau) - \cos(2\pi F_0 \tau)).$$

B.3

Για να υπολογίσω την φασματική πυκνότητα ισχύος $S_Y(F)$, αρκεί να βρω το μετασχηματισμό Fourier της $R_Y(\tau)$.

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{T} \int_y R_{YY}(t, t + \tau) dt \Leftrightarrow$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0 \tau) - \cos(2\pi F_0 \tau)) dt$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(4\pi F_0 t) \cos(2\pi F_0 \tau) - \sin(4\pi F_0 t) \sin(2\pi F_0 \tau)) dt - \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) \Leftrightarrow$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4\pi F_0 t) dt - \frac{1}{2} \sin(2\pi F_0 \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(4\pi F_0 t) dt - \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) \Leftrightarrow$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4\pi F_0 t) dt - \frac{1}{2} \sin(2\pi F_0 \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(4\pi F_0 t) dt - \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau).$$

Οπότε, για την φασματική πυκνότητα ισχύος $S_Y(F)$:

$$S_Y(F) = F\{R_Y(\tau)\}.$$