Distribución delta de Dirac

Varias de las fórmulas incluidas en la siguiente recopilación fueron extraídas de *Modern Electrodynamics*, A. Zangwill, (Cambridge University Press, 2012), *Quantum Mechanics* Cohen-Tannoudji y C., Diu, B. & Laloe, F. , Vol. 1. (Wiley, 1991).

Consideremos una distribución en una dimensión $D_a(x)$ fuertemente localizada alrededor de un dado punto $x = a$. Al evaluar la convolución entre dicha distribución con una función $f(x)$ que varía lentamente en un entorno de $x = a$, podremos aproximar:

$$(f * D) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_a(x) dx \simeq f(a) \int_{-\infty}^{\infty} D_a(x) dx = f(a)$$

El caso límite que daría la igualdad exacta en la ecuación anterior independientemente de la elección de f corresponde a la delta de Dirac $\delta(x - a)$, que definimos (informalmente) como:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

o bien

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) dx \qquad \forall \qquad f(x).$$

Ejemplos de distribuciones que tienen a la delta de Dirac como caso límite son:

$$\delta(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sin mx}{\pi x} \tag{1}$$

$$\delta(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{\sqrt{\pi}} \exp(-m^2x^2) \tag{2}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{3}$$

Un ejemplo de aplicación corresponde al considerar la densidad de masa de una partícula puntual de masa m posicionada en $\mathbf{r}_0$. Utilizando la delta de Dirac, la misma puede escribirse como $\rho(\mathbf{r}) = m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = m\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$. En el cálculo del momento de inercia, utilizando la fórmula integral para un sistema de densidad de masa $\rho(\mathbf{r})$ respecto al eje $\hat{z}$ tenemos:

$$\begin{aligned} I = \int_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dV &= m \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz (x^2 + y^2)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), \\ &= m(x_0^2 + y_0^2) = mr_\perp^2 \end{aligned}$$

que corresponde con la fórmula usual del momento de inercia para la masa puntual.

Algunas propiedades de la delta:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\, \frac{du}{|\alpha|} \\ \delta(\alpha x) &= \frac{\delta(x)}{|\alpha|} \\ x\delta(x) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{dx}\delta(x-x')dx &= -\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x'} \\ \delta(x-x') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')}\end{aligned}$$

A veces, llegamos a expresiones donde el argumento de la delta es una función de la variable a integrar. Para estos casos es útil la expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|},$$

donde los puntos x_i corresponden a los ceros de la función g.

Delta de Dirac en tres dimensiones:

La misma se define considerando la integral sobre un volumen V:

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \begin{cases} f(\mathbf{r}') & \mathbf{r}' \in V \\ 0 & \mathbf{r}' \notin V \end{cases}$$

o bien: $\delta(\mathbf{r}) = 0$ si $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, donde:

$$\int_V d^3r\delta(\mathbf{r}) = 1 = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} = \mathbf{0} \in V \\ 0 & \mathbf{r} = \mathbf{0} \notin V \end{cases}$$

En cartesianas:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

En coordenadas curvilíneas, se considera el elemento de volumen, tal que en coordenadas cilíndricas tenemos:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{\rho}$$

y en esféricas:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{r^2\sin\theta}$$

Para el caso especial $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ consideramos:

$$\int_0^{\infty} dr\delta(r) = 1.$$