Movimiento armónico amortiguado

Un modelo muy simplificado del movimiento de un electrón en un átomo corresponde al oscilador armónico amortiguado. La dinámica es gobernada por la ecuación:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2 \mathbf{r} - \gamma \dot{\mathbf{r}}, \tag{1}$$

donde el término de amortiguamiento γ viene dado por la pérdida de energía por radiación, que asumiremos pequeña:

$$\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1. \tag{2}$$

Si al tiempo $t = 0$ el electrón se encuentra en reposo en la posición $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, su comportamiento a tiempo t vendrá dado aproximadamente por:

$$\mathbf{r}(t) \simeq \mathbf{a} \cos(\omega_0 t) e^{-\gamma t/2} \qquad t > 0. \tag{3}$$

La velocidad de la partícula

$$\mathbf{v}(t) \simeq -\mathbf{a}\omega_0 \sin(\omega_0 t) e^{-\gamma t/2} \qquad t > 0 \tag{4}$$

tiene la siguiente transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\omega) &= \int_0^\infty dt(-\mathbf{a}\omega_0) e^{i\omega t} \sin(\omega_0 t) e^{-\gamma t/2} &(5)\\
&= \frac{i}{2}\mathbf{a}\omega_0 \int_0^\infty dt \left[-e^{i(\omega-\omega_0+i\gamma/2)t} + e^{i(\omega+\omega_0+i\gamma/2)t} \right] &(6)\\
&= \frac{\mathbf{a}\omega_0}{2} \left[\frac{1}{\omega-\omega_0+i\gamma/2} - \frac{1}{\omega+\omega_0+i\gamma/2} \right]. &(7)
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\omega > 0$, con lo cual ambos términos tienen magnitudes muy diferentes, siendo sólo el primer denominador pequeño. Esto implica que la emisión ocurre mayoritariamente a frecuencias $\omega \simeq \omega_0$, y

$$|\mathbf{v}(\omega)|^2 \simeq \frac{a^2\omega_0^2}{4} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2/4}. \tag{8}$$

Utilizando la integral de los potenciales retardados en el gauge de Lorentz, y considerando la aproximación de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ para el caso en que $r >> a$:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}.\mathbf{r}' + r'^2} = r - \frac{\mathbf{r}}{r}.\mathbf{r}' + O\left(1/r\right), \tag{9}$$

encuentre:

- Expresiones aproximadas para las componentes espectrales de campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}(\omega)$ y $\mathbf{B}(\omega)$.
- La distribución espectral, es decir, la energía radiada por unidad de ángulo sólido y componente de frecuencia ω, $\frac{d^2E}{d\omega d\Omega}$.
- La energía radiada por componente de frecuencia $\frac{dE}{d\omega}$ y la energía total radiada, desde el momento inicial y hasta que la partícula se detiene.
- Cosiderando la energía inicial del sistema y la energía total radiada, encuentre una expresión para el coeficiente de disipación γ correspondiente al amortiguamiento por radiación.