1 Usamos la convención de Einstein: sumas implícitas sobre índices repetidos, salvo que se indique lo contrario. Introducimos el pseudotensor de Levi-Civita (de 3er orden, isótropo):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si (i,j,k) es permutación par de (1,2,3)} \\ -1, & \text{si (i,j,k) es permutación impar de (1,2,3)} \\ 0, & \text{si al menos dos subíndices son iguales.} \end{cases}$$

$1 \leq \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k} \leq 3$

a) Demuestre que:

1)
$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr} = \det \begin{pmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{pmatrix},$$

2) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

3) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijl} = 2\,\delta_{kl}$

4) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6$

b) Considere los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y la matriz $C = \{c_{ij}\}$. Demuestre que:

1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$

2) $(\nabla \times \mathbf{a})_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, a_k$, $\left(\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$

3) $|C| \equiv \det C = \varepsilon_{ijk}\, c_{i1}\, c_{j2}\, c_{k3} = \varepsilon_{ijk}\, c_{1i}\, c_{2j}\, c_{3k}$

2 Demostrar las siguientes identidades

a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r} = 3$

b) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{r} = \mathbf{0}$

c) $\boldsymbol{\nabla} r = \hat{\boldsymbol{r}}$ $(r \neq 0)$

d) $\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ $(r \neq 0)$

e) $(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \hat{\boldsymbol{r}} = \mathbf{0}$

f) $\partial_i \partial_j (\frac{1}{r}) = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}$ $(r \neq 0)$

g) $\boldsymbol{\nabla} f(R) = -\boldsymbol{\nabla}' f(R)$

donde $\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$, $r \equiv |\boldsymbol{r}|$, $\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\boldsymbol{\nabla}' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$ y x_i y x_j son dos componentes cualesquiera de $\boldsymbol{r}$.

3 Expresar los versores esféricos, $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, en términos de los versores cartesianos, $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ y $\hat{\boldsymbol{z}}$. Encontrar la transformación inversa.

4 Calcular la circulación del campo

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \alpha\, \frac{\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0|^3} + \beta\, \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3}$$

a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = r_0^2$, $z = r_0$ y donde α, β y $\boldsymbol{r}_0$ son constantes.

$\boxed{5}$ Comprobar el teorema de la divergencia para el campo $\boldsymbol{v} = r^2 \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{r}} + r^2 \cos\phi\, \hat{\boldsymbol{\theta}} - r^2 \cos\theta \sin\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ usando como volumen un octante de la esfera de radio R centrada en el origen. Comprobar el teorema de Stokes utilizando la superficie correspondiente a $r = R$ del mencionado octante.

$\boxed{6}$ Verificar el teorema de la divergencia para el campo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} u(r)$, donde

$$u(r) = q\, \frac{1 - e^{-r/a}}{r}\,,$$

en un recinto esférico de radio R. Analizar el límite $a \to 0$.