

# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

## 22.85 SISTEMAS DE CONTROL

### TRABAJO PRÁCTICO DE LABORATORIO N° 1

---

# PLL

---

*Grupo 5:*

Matías LARROQUE  
Leg. 56597

Lucero Guadalupe FERNANDEZ  
Leg. 57485

Manuel MOLLÓN  
Leg. 58023

Ezequiel VIJANDE  
Leg. 58057

Tomás Agustín GONZÁLEZ ORLANDO  
Leg. 57090

Robin BERTRAND  
Leg. 61739

*Profesor:*

Victor Gustavo NASINI  
Cristian Alejo ZUJEW

Entregado: 27 de Septiembre de 2019

# Índice

1. Introducción	2
2. Resumen y Objetivos	2
3. Cálculo teórico	2
4. Resultados	5
5. Conclusiones	8

# 1. Introducción

En el siguiente informe se presenta el análisis y los resultados obtenidos de utilizar un PLL (Phase Locked Loop) como demodulador de una señal modulada en FM. Un PLL es un sistema retroalimentado que puede ser modelado por el siguiente diagrama en bloques:

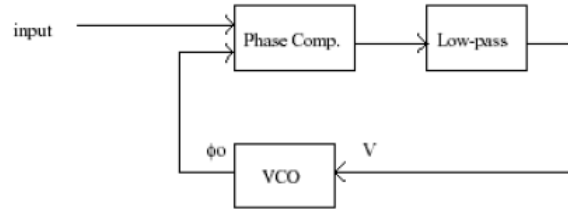


Figura 1: Diagrama en bloques genérico de un PLL

En términos generales un PLL se utiliza para detectar cambios de fase en la señal de entrada y otorgar una salida proporcional a los mismos. El primer bloque del diagrama es el comparador de fase cuya salida luego se filtra y se usa como entrada de un VCO(Voltage Controlled Oscillator) que proporciona una señal con frecuencia proporcional a la diferencia de fase detectada. La realimentación del sistema permite que la fase de la señal a la salida del VCO se “enganche” a la fase de la señal de entrada.

## 2. Resumen y Objetivos

## 3. Cálculo teórico

El circuito a analizar se puede modelar como el siguiente diagrama en bloques:

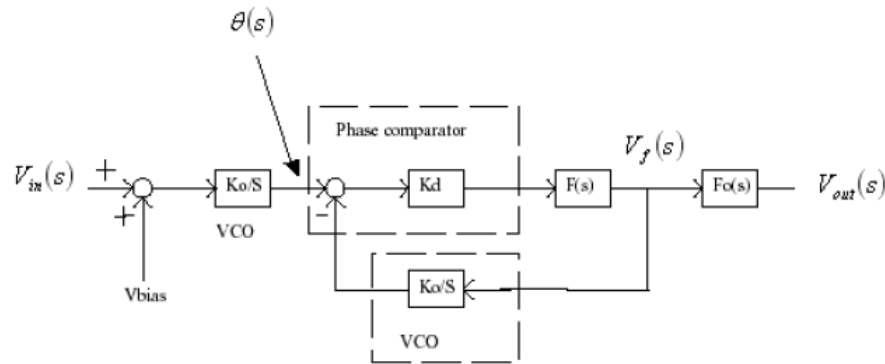


Figura 2: Diagrama en bloques del circuito

Analizando el diagrama en bloques por partes se pueden sacar distintas ganancias dentro del esquema. De la figura (2) se tiene que la ganancia del modulador FM es:

$$\frac{\theta(S)}{V_{in}(S)} = \frac{K_0}{S} \quad (1)$$

Tomando:

$$\alpha = K_d F(S) \text{ y } \beta = \frac{K_0}{S}$$

Para el PLL en cuestión se tiene que la ganancia es:

$$\frac{V_f(S)}{\theta(S)} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} = \frac{\alpha}{1+\alpha\beta} = \frac{K_d F(S)}{1 + \frac{K_d K_0 F(S)}{S}}$$

$$\frac{V_f(S)}{\theta(S)} = \frac{K_d F(S) S}{S + K_d K_0 F(S)} \quad (2)$$

La transferencia  $F(S)$  corresponde al filtro pasabajos utilizado. Analizando el caso de filtros pasabajos pasivos, utilizando resistencias y capacitores, se analizan las siguientes dos configuraciones:

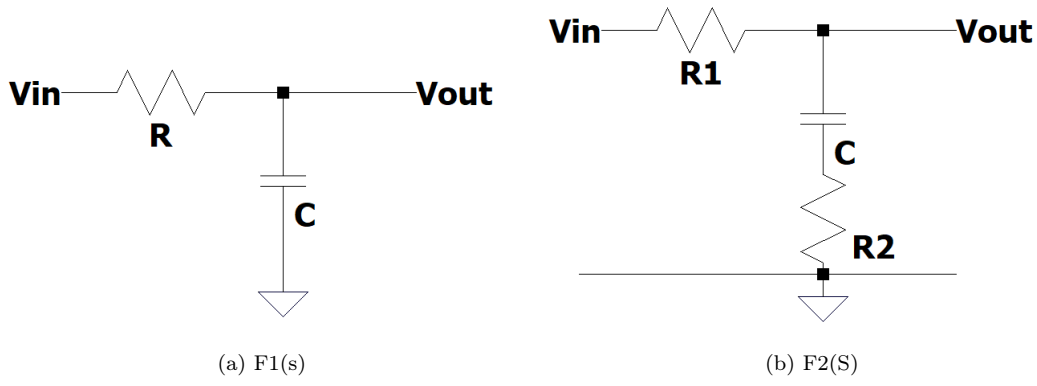


Figura 3: Configuraciones analizadas para  $F(S)$

Para ambos filtros, la transferencia se obtiene haciendo simplemente un divisor de impedancias. Para la primera configuración se tiene:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$

$$F_1(S) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} + 1}; \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (3)$$

Para la segunda configuración, se despeja a su vez:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{sC} + R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{S \cdot C \cdot R_2 + 1}{S \cdot (R_1 + R_2) \cdot C + 1}$$

$$F_2(S) = \frac{S \cdot \tau_2 + 1}{S(\tau_1 + \tau_2) + 1}; \tau_1 = C \cdot R_1, \tau_2 = C \cdot R_2 \quad (4)$$

Se procede a calcular la ganancia  $\frac{V_f(S)}{\theta(S)}$  para las distintas configuraciones posibles de  $F(s)$ :

■ Con  $F(s) = F_1(s)$ :

$$\frac{V(s)}{\theta(S)} = \frac{K_d \cdot s}{\frac{s}{\omega_0} + 1} \cdot \frac{1}{s + \frac{K_d \cdot K_0}{\frac{s}{\omega_0} + 1}} = \frac{K_d \cdot s}{\frac{s}{\omega_0} + 1} \cdot \frac{\frac{s}{\omega_0} + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + s + K_d \cdot K_0}$$

$$\frac{V(s)}{\theta(S)} = \frac{K_d \cdot s}{\frac{s^2}{\omega_0} + s + K_d \cdot K_0} \quad (5)$$

Reescribiendo la expresión (5) se puede obtener cuál es el factor de amortiguamiento del sistema:

$$k \cdot \frac{s}{(\frac{s}{\omega_c})^2 + \frac{2\xi}{\omega_c} s + 1} = \frac{\cancel{K_d}}{\cancel{K_d} K_0} \cdot \frac{s}{(\frac{s}{\sqrt{\omega_0 K_d K_0}})^2 + \frac{1}{K_d K_0} s + 1}$$

De la expresión anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{K_0} \\ \omega_c &= \sqrt{\omega_0 K_d K_0} \\ \frac{2\xi}{\omega_c} &= \frac{1}{K_d K_0} \rightarrow \xi = \frac{\omega_c}{2K_d K_0} \\ \xi &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0}{K_d K_0}} \end{aligned} \quad (6)$$

■ Con  $F(s) = F_2(s)$ :

$$\frac{V(s)}{\theta(S)} = K_d \cdot s \cdot \frac{s \cdot \tau_2 + 1}{s(\tau_1 + \tau_2) + 1} \cdot \frac{1}{s + \frac{K_d \cdot K_0 \cdot (s \cdot \tau_2 + 1)}{s \cdot (\tau_1 + \tau_2) + 1}} = \frac{K_d \cdot s \cdot (s \cdot \tau_2 + 1)}{s^2 \cdot (\tau_1 + \tau_2) + s + s \cdot \tau_2 \cdot K_d \cdot K_0 + K_d \cdot K_0}$$

$$\frac{V(s)}{\theta(S)} = \frac{K_d \cdot s^2 \cdot \tau_2 + K_d \cdot s}{s^2 \cdot (\tau_1 + \tau_2) + s \cdot (1 + K_d \cdot K_0 \tau_2) + K_d \cdot K_0} \quad (7)$$

Al igual que para el caso anterior reescribimos la expresión para hallar el factor de amortiguamiento del sistema:

$$k \cdot \frac{s^2 \tau_2 + s}{(\frac{s}{\omega_c})^2 + \frac{2\xi}{\omega_c} s + 1} = \frac{\cancel{K_d}}{\cancel{K_d} K_0} \cdot \frac{s^2 \tau_2 + s}{\left( \frac{s}{\sqrt{\frac{K_d K_0}{\tau_1 + \tau_2}}} \right)^2 + \frac{1 + K_d K_0 \tau_2}{K_d K_0} s + 1}$$

De la ecuación anterior se obtiene que los parámetros son:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{K_0} \\ \omega_c &= \sqrt{\frac{K_d K_0}{\tau_1 + \tau_2}} \\ \frac{2\xi}{\omega_c} &= \frac{1 + K_d K_0 \tau_2}{K_d K_0} \rightarrow \xi = \frac{\omega_c}{2} \cdot \frac{1 + K_d K_0 \tau_2}{K_d K_0} \\ \xi &= \frac{1 + K_d K_0 \tau_2}{2\sqrt{K_d K_0 (\tau_1 + \tau_2)}} \end{aligned} \quad (8)$$

Para el filtro pasabajos a la salida del circuito se utilizó un filtro pasivo RC como el de la primera configuración por lo que:

$$F_0(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_p} + 1} \quad (9)$$

Entonces la transferencia completa del circuito para el caso  $F(s) = F_1(s)$ :

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{K_0}{s} \cdot \frac{V_f(s)}{\theta(s)} \cdot F_0(s) = \frac{K_d K_0}{\frac{s^2}{\omega_0} + s + K_d K_0} \cdot \frac{1}{\frac{s}{\omega_p} + 1} = \frac{K_d K_0}{\frac{s^3}{\omega_0 \omega_p} + s^2 (\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_p}) + s(1 + \frac{K_d K_0}{\omega_p}) + K_d K_0}$$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{K_d K_0}{\frac{s^3}{\omega_0 \omega_p} + s^2 \frac{\omega_p + \omega_0}{\omega_0 \omega_p} + s \frac{\omega_p + K_d K_0}{\omega_p} + K_d K_0} \quad (10)$$

y para el caso  $F(s) = F_2(s)$ :

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{K_0}{s} \cdot \frac{V_f(s)}{\theta(s)} \cdot F_0(s) = \frac{K_d \cdot K_0 \cdot s \cdot \tau_2 + K_d \cdot K_0}{s^2 \cdot (\tau_1 + \tau_2) + s \cdot (1 + K_d \cdot K_0 \tau_2) + K_d \cdot K_0} \cdot \frac{1}{\frac{s}{\omega_p} + 1} =$$

$$\frac{K_d \cdot K_0 \cdot s \cdot \tau_2 + K_d \cdot K_0}{s^3 \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{\omega_p} + s^2 (\frac{1 + K_d K_0 \tau_2}{\omega_p} + \tau_1 + \tau_2) + s (\frac{K_d K_0}{\omega_p} + 1 + K_d K_0 \tau_2) + K_d K_0}$$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{K_d K_0 \tau_2 s + K_d K_0}{s^3 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\omega_p} + s^2 \frac{1 + K_d K_0 \tau_2 + \omega_p (\tau_1 + \tau_2)}{\omega_p} + s \frac{K_d K_0 + \omega_p (1 + K_d K_0 \tau_2)}{\omega_p} + K_d K_0} \quad (11)$$

## 4. Resultados

Se calculó numéricamente la función transferencia, obteniéndose para el caso  $F1(s)$ :

$$H1(s) = \frac{2,9,10^6}{5,6,10^{-12}s^3 + 1,1,10^{-5}s^2 + 2,6s + 2,9,10^6}$$

A partir de las mediciones se midió la constante  $K_0$ , ver figura 4. El valor obtenido fue de  $K_0 = 921352 \text{ rad/s/V}$ . También se calculó el coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0,092$  y la frecuencia natural de los polos conjugados  $w_o = 0,54,10^6 \text{ rad/s}$ .

Lo mismo se repitió para el caso del filtro con transferencia  $F2(s)$ , resultando en un amortiguamiento de  $\xi = 0,537$  y una frecuencia natural de  $w_o = 0,498,10^6 \text{ rad/s}$ .

La transferencia total en este caso resultó en:

$$H2(s) = \frac{5,28s + 2,9,10^6}{6,6,10^{-12}s^3 + 1,5,10^{-5}s^2 + 7,9s + 2,9,10^6}$$

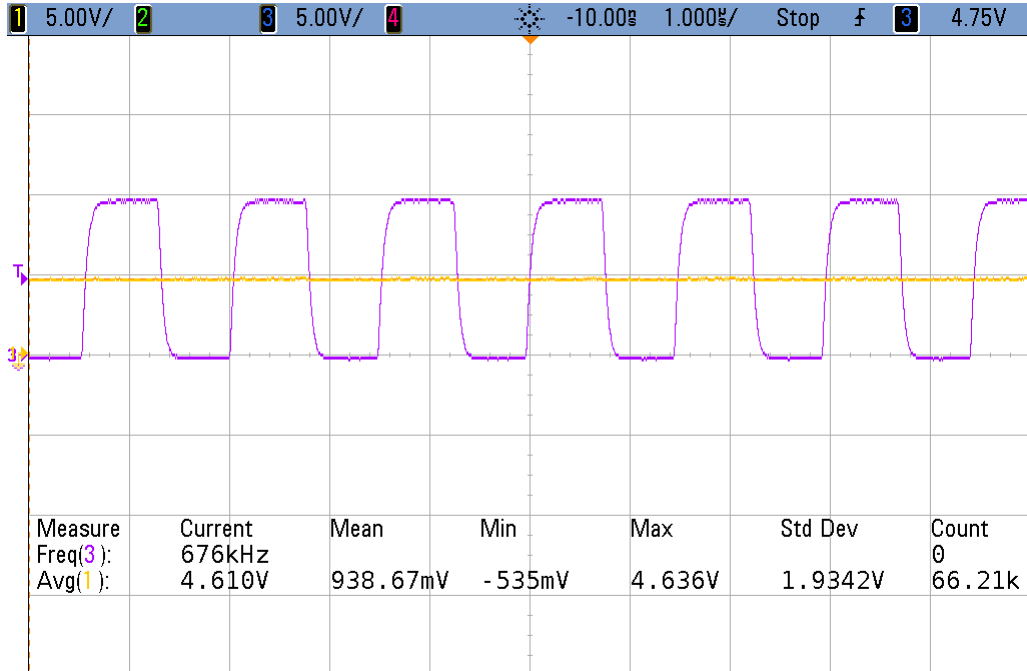


Figura 4: Medición del  $K_0$ .

Se midió la respuesta al escalón y se comparó con la simulación, las cuales se muestran a continuación:

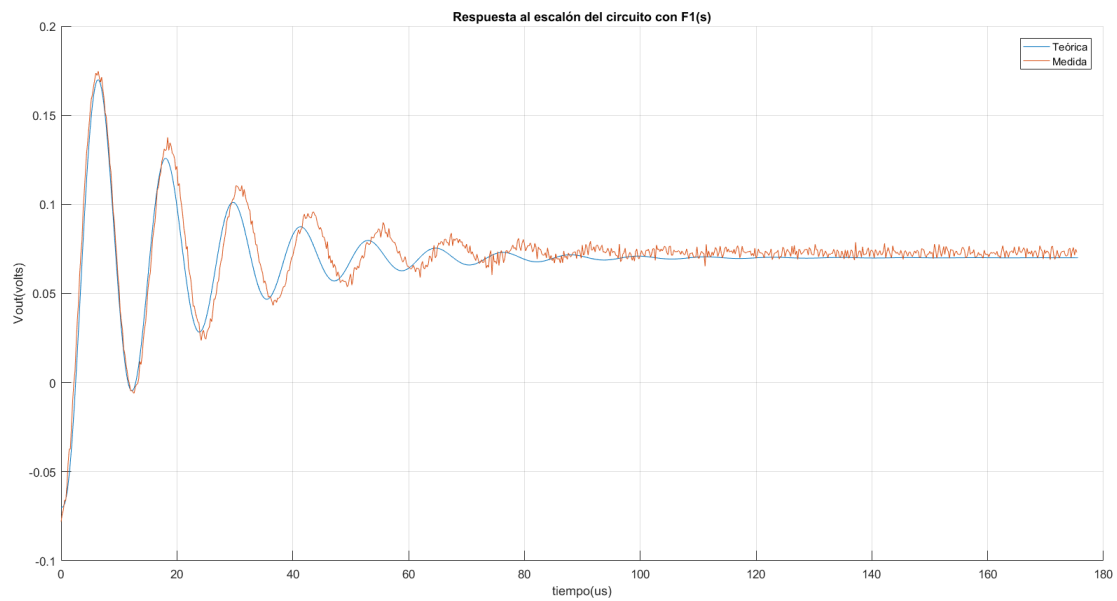


Figura 5: Medición y simulación de la respuesta al escalón con F1(s).

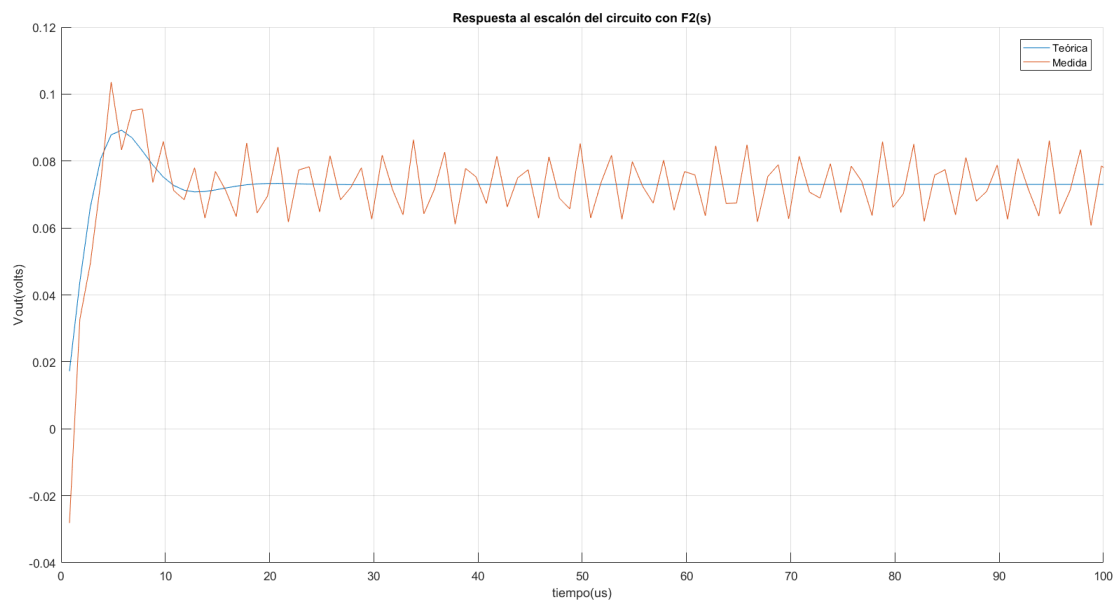


Figura 6: Medición y simulación de la respuesta al escalón con F2(s)

En el segundo caso, se ve la influencia del coeficiente de amortiguamiento mayor a  $1/2$ , lo que ocasiona un subamortiguamiento menor que en el primer caso, con un  $\xi < 0,1$ .

Si se desea un amortiguamiento de  $\xi = 0,5$ , el valor de la resistencia en serie con el capacitor debe ser de  $1,65k\Omega$ . A continuación se muestra la influencia de dicha resistencia sobre el amortiguamiento del sistema.

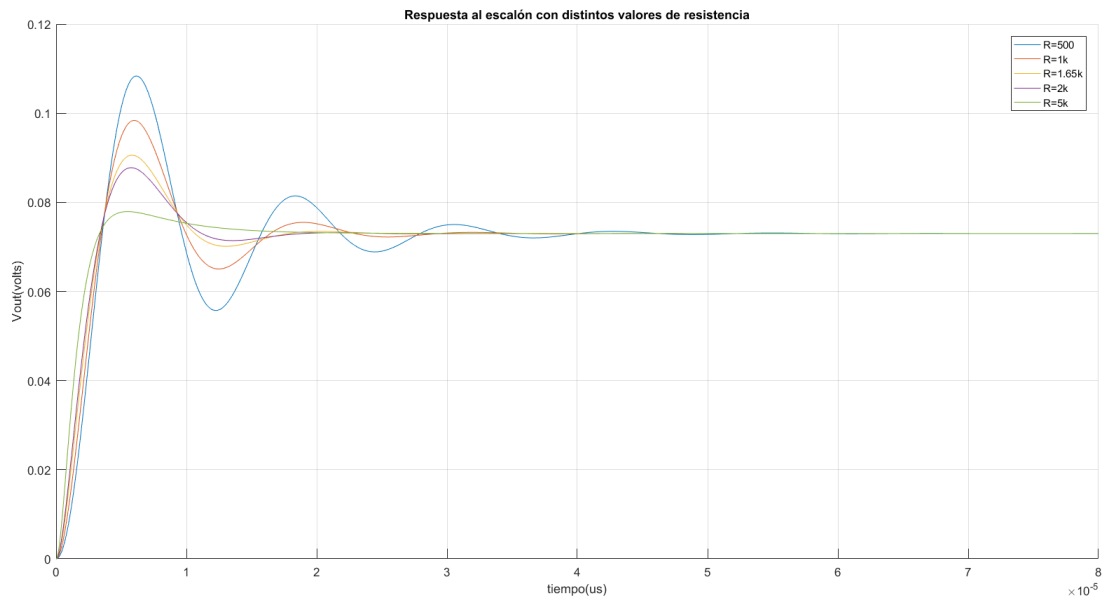


Figura 7: Simulación de la respuesta al escalón para distintos valores de resistencias.

Esto se verificó además experimentalmente, con un jumper cortocircuitando la resistencia mencionada.



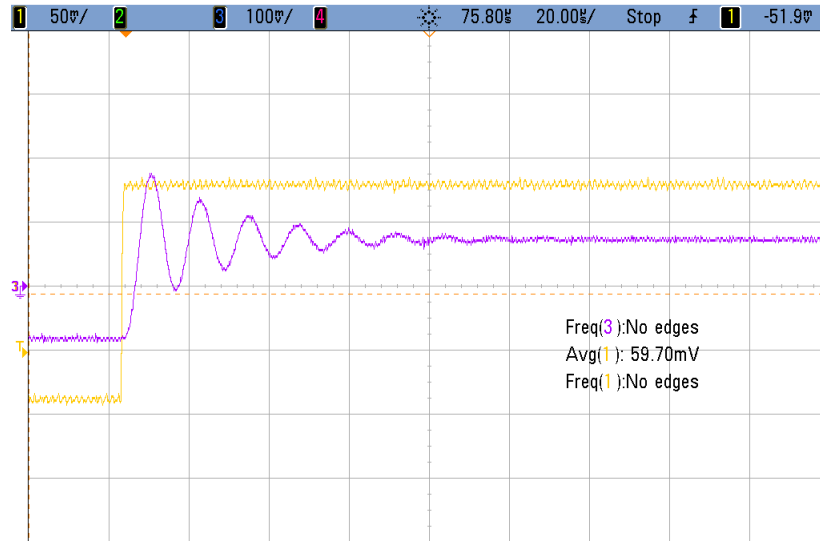


Figura 8: Con resistencia de  $1,65k\Omega$  en serie.

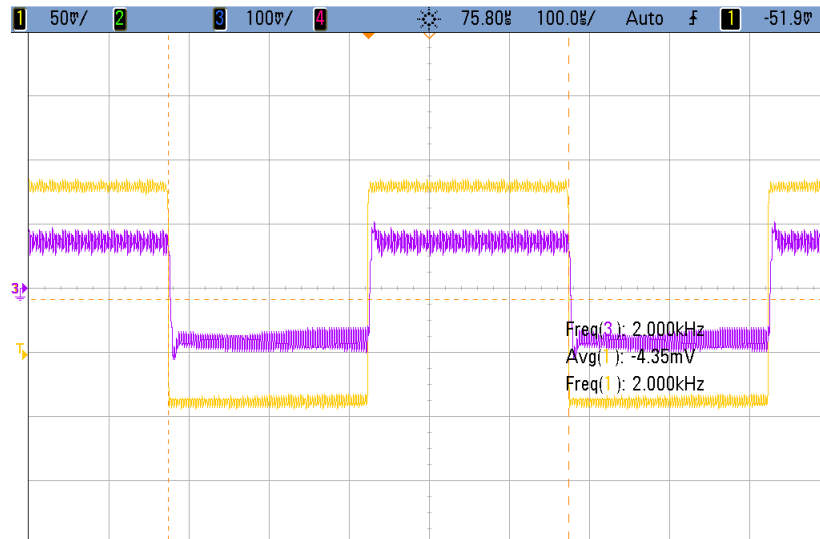


Figura 9: Sin resistencia en serie.

## 5. Conclusiones

Se consiguió satisfactoriamente obtener los parámetros del PLL, condiciéndose los cálculos teóricos con los calculados numéricamente y simulados mediante MATLAB, como así también, se verificó experimentalmente la función de la resistencia en serie al capacitor, que modifica el coeficiente de amortiguamiento del circuito. Además, se deduce que el filtro a la salida se utiliza para filtrar la señal de la portadora cuando se utiliza al PLL para demodular FM.