

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

22.85 SISTEMAS DE CONTROL

TRABAJO PRÁCTICO N° 3

Quanser - Realimentación de Estados

Grupo 3:

Ezequiel VIJANDE
Leg. 58057

Lucero Guadalupe FERNANDEZ
Leg. 57485

Manuel Fernando MOLLÓN
Leg. 58023

Matías Agustín LARROQUE
Leg. 56597

Robin BERTRAND
Leg. 61739

Tomás Agustín GONZÁLEZ ORLANDO
Leg. 57090

Profesores:

Victor Gustavo NASINI
Cristian Alejo ZUJEW

Entregado: 01 de Noviembre de 2019

1. Introducción

El objetivo de este proyecto es utilizar lo aprendido sobre realimentación de estados para poder controlar la posición angular de una varilla adjunta a un motor. Con el uso de un potenciómetro y un tacómetro como variables de estado, se pudo re-alimentar el circuito (con el uso de Arduino) de tal manera que se pueda controlar la posición de la varilla con un potenciómetro. Para ello se debió calcular la función transferencia de la planta, calcular los coeficientes de realimentación, realizar la simulación correspondiente y llevar acabo físicamente el proyecto y midiendo los parámetros para comparar con la simulación y la teoría.

2. Marco Teórico

2.1. Representación en el espacio de estados

Dado un sistema descrito por una función transferencia $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ cualquiera, la misma puede ser transformada a un sistema matricial descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$X' = A \cdot X + B \cdot U(1)$$

$$Y = C \cdot X + D \cdot U(2)$$

Donde dicho sistema de ecuaciones es denominado el espacio de estados del sistema H . Aquellas ecuaciones descritas por (1) son llamadas entonces "ecuaciones de estados" y aquellas descritas por (2) llevan el nombre de "ecuaciones de salida" del sistema. Existen varias representaciones alternativas en el espacio de estados, pero los métodos de control que se desarrollarán en este trabajo se basan en la representación canónica de variable de fase (FCVF).

De la representación en el espacio de estados del sistema se deriva el siguiente diagrama:

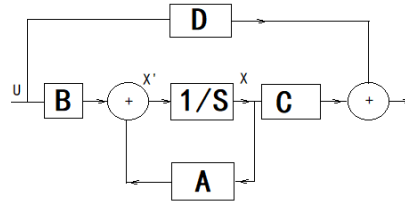


Figure 1: Representación en el espacio de estados

Donde $H(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D$

2.2. Pole placement

Teniendo en cuenta que la función transferencia $H(s)$ del sistema H que se pretende controlar tiene polos definidos por el sistema físico real a utilizar, se intenta luego modificar el sistema mediante realimentaciones para obtener una nueva transferencia $H_{pp}(s)$ cuyos polos estén ubicados en el lugar del plano complejo que se desee.

El método a utilizar es el de pole placement, que consiste en la implementación del siguiente diagrama:

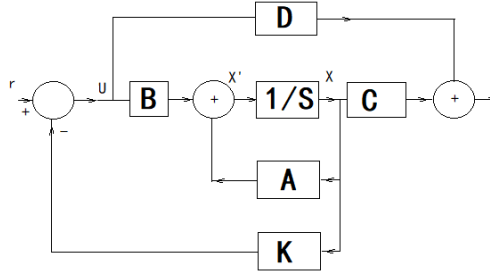


Figure 2: Pole Placement, matriz K a determinar

Para que este método sea realizable, el sistema debe ser controlable, es decir que su matriz de controlabilidad tenga determinante no nulo. Asumimos que esto se cumple para el sistema en cuestión.

El nuevo sistema entonces será regido por las siguientes ecuaciones:

$$X' = (A - B \cdot K) \cdot X + B \cdot r(1)$$

$$Y = (C - D \cdot K) \cdot X + D \cdot r(2)$$

Llamando $A_a = A - B \cdot K$, $B_a = C - D \cdot K$, el sistema se puede expresar como:

$$X' = A_a \cdot X + B \cdot r(1)$$

$$Y = B_a \cdot X + D \cdot r(2)$$

De aquí, los polos de $H_{pp}(s)$ estarán dados por:

$$|s \cdot I - A + B \cdot K| = 0$$

De las ecuación resultante, se podrán fijar los polos en el lugar que se requiera otorgándole a la matriz K los valores apropiados.

Este método permite modificar tanto la estabilidad de un sistema, como el orden del mismo (se podrá disminuir el orden aumentando la distancia de determinados polos al menos una década de los demás polos dominantes). En caso de que $H_{pp}(s)$ describa un sistema de segundo o primer orden, entonces se podrá fijar un nuevo tiempo de establecimiento y overshoot de acuerdo con lo requerido por el sistema de control a implementar. De esta forma, implementando analógica o digitalmente la realimentación K , se podrá controlar al nuevo sistema con los parámetros especificados

2.3. Corrección del error permanente

Se procede a calcular el error permanente de un sistema con transferencia $H_{pp}(s)$ frente a un escalón como entrada.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} 1 - H_{pp}(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} 1 - C \cdot (s \cdot I - A_a)^{-1} \cdot B_a + D$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} 1 - (C - D \cdot K) \cdot (s \cdot I - A + B \cdot K)^{-1} \cdot B + D$$

Este error resulta no necesariamente nulo para cualquier transferencia $H_{pp}(s)$.

Se busca ahora lograr un error permanente nulo en la salida. Para esto se utiliza el siguiente diagrama:

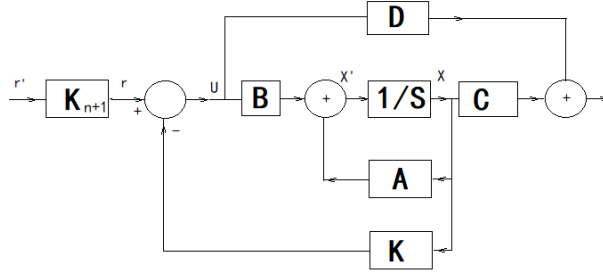


Figure 3: Corrección del error permanente

El error permanente de dicho sistema sigue la fórmula:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} 1 - K_{n+1} \cdot H_{pp}(s)$$

Donde se busca un K_{n+1} específico para el cual el error permanente a la salida sea nulo.

3. Cálculo de la función transferencia

Partiendo de la configuración vista anteriormente, y el circuito equivalente de un motor también presentado en el marco teórico, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} e_a(s) = R_a \cdot I_a + L_a \cdot s \cdot I_a + e_b & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_b = K_b \cdot \omega_m & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_o(s) = J_o \cdot s \cdot \omega_m + B_o \cdot \omega_m & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_o(s) = K_o \cdot I_a & (4) \end{cases}$$

Despreciando L_a ya que esta en el orden de los micro y la frecuencia es muy baja ($f = 50Hz$), y despejando I_a de (1) se obtiene:

$$I_a = \frac{e_a(s) - e_b}{R_a} = \frac{e_a(s) - K_b \cdot \omega_m}{R_a}$$

Igualando (3) y (4) se obtiene:

$$J_o \cdot s \cdot \omega_m + B_o \cdot \omega_m = K_o \cdot I_a$$

Donde se reemplaza la expresión obtenida de I_a :

$$J_o \cdot s \cdot \omega_m + B_o \cdot \omega_m = K_o \cdot \frac{e_a(s) - K_b \cdot \omega_m}{R_a}$$

Despejando $\frac{\omega_m}{e_a}$ obtenemos:

$$H(s) = \frac{\omega_m}{e_a} = \frac{\left(\frac{K_o}{R_a \cdot J_o}\right)}{s + \frac{B_o}{J_o} + \frac{K_o \cdot K_b}{R_a \cdot J_o}}$$

Donde los parámetros pueden ser calculados de la siguiente manera teniendo en cuenta los engranajes ($K_g = 70$):

$$\begin{cases} K_o = K_b \cdot K_g^2 \\ J_o = J_g + K_g^2 \cdot (J_m + J_{tach}) \\ B_o = B_{eqh} + B_{eqi} \end{cases}$$

Reemplazando los valores dados por la hoja de datos, se llega al siguiente resultado numérico:

$$H(s) \approx \frac{3400}{s+27}$$

Esta función transferencia fue corroborada con mediciones en la sección correspondiente.

4. Realimentación de variables de estado

4.1. Representación canónica de variables de fase

Se cuenta con la función transferencia calculada en la sección anterior $H(s) \approx \frac{3400}{s+27}$ para el motor sin controlar, que relaciona la velocidad angular del motor con la tensión aplicada a la entrada del mismo. Se busca luego obtener a partir del sistema conformado por el motor H , un nuevo sistema H_{pp} que permita controlar la posición angular del motor en función de la tensión de entrada de H_{pp} con una velocidad de respuesta elevada.

Para lograr esto, se procede a representar en el espacio de estados al sistema H , como se mencionó en la sección del marco teórico, siguiendo el método de la representación canónica de variables de fase FCVF. Representando al sistema H con una nueva transferencia $H'(s)$ que exprese la posición angular en función de la tensión de entrada, obtenemos $H'(s) = \frac{\theta(s)}{e_a(s)} = \frac{3400}{s \cdot (s+27)}$. Llamando $k_0 = 3400$, $p_0 = 27$, se deriva la siguiente ecuación:

$$e_a \cdot k_0 = \theta \cdot s \cdot (s + p_0)$$

$$e_a \cdot k_0 = \theta'' + \theta' \cdot p_0$$

Si denominamos X_1 y X_2 a las dos variables de estado del sistema de segundo orden H tal que $\theta = X_1$ y $X_1' = X_2$, obtenemos una nueva expresión de la ecuación anterior como:

$$X_2' = e_a \cdot k_0 - X_2 \cdot p_0$$

Reemplazando luego por los valores de k_0 y p_0 , obtenemos entonces:

$$X_2' = 3400 \cdot e_a - 27 \cdot X_2$$

Y de aquí que se deriva la ecuación matricial de estados del sistema:

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + e_a \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3400 \end{bmatrix}$$

Quedan definidas entonces las matrices que siguen la notación definida en el marco teórico, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -27 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3400 \end{bmatrix}$,

Estas matrices serán luego utilizadas para la realimentación por pole Placement, siguiendo también lo fijado en el marco teórico.

4.2. Aplicación del método de Pole Placement sobre el sistema

Siguiendo al marco teórico y utilizando las matrices recién obtenidas, se corre el siguiente código en Matlab:

```
clear all
clc
syms s po k0 k1 k2 k3 kess
A = [0 1; 0 -po];
B = [0; k0];
C = [1/70 0];
Kp = [k1 k2];

pole_placement = s*eye(2,2) - A + B*Kp;
clearvars k0 po k3 %k1 k2
k0 = 3400;
po = 27;

detPP = det(pole_placement);
rPP = roots([1 po+k0*k2 k0*k1])
```

El cual devuelve los polos del sistema H_{pp} en función de las constantes de realimentación k_1 y k_2 . Dichos polos resultan ser:

$$p_a = -1700 k_2 - \frac{\sqrt{11560000 \cdot k_2^2 + 183600 \cdot k_2 - 13600 \cdot k_1 + 729}}{2} - \frac{27}{2}$$

$$p_b = -1700 k_2 + \frac{\sqrt{11560000 \cdot k_2^2 + 183600 \cdot k_2 - 13600 \cdot k_1 + 729}}{2} - \frac{27}{2}$$

Fijando entonces k_1 tal que el discriminante sea nulo, se obtendrá un sistema críticamente amortiguado. El valor de k_1 para el que esto sucede es:

$$k_1 = \frac{11560000 \cdot k_2^2 + 183600 \cdot k_2 + 729}{13600}$$

$$k_1 = 850 \cdot k_2^2 + 13,5 \cdot k_2 + \frac{729}{13600}$$

De aquí, fijando $k_2=0,01$, se obtiene $k_1 = 0,2736$ y $p_a = p_b = -25,5$.

4.3. Cálculo del error permanente

Siguiendo al marco teórico, utilizamos el siguiente código para calcular el error permanente con la nueva constante agregada $k_{ess}=k_3$ de la sección marco teórico.

```
clear all
clc
syms s kess

k0 = 3400;
po = 27;

k2 = 0.01
k1 = 850*k2^2 + 13.5*k2 + 729/13600
pa = -1700*k2-17/2
A = [0 1;0 -po];
B = [0; k0];
C = [1/70 0];
Kp = [k1 k2];

% pole_placement = s*eye(2,2) - A + B*Kp;

AcliPP = A - B*Kp;
ess = 1- kess*C*(inv(s*eye(2,2)-AcliPP))*B
latex(ess)
```

Habiendo obtenido de aquí la expresión del error permanente:

$$e_{ss} = 1 - \frac{1360 \cdot k_{ess}}{7 \cdot (4 \cdot s^2 + 244 \cdot s + 3721)}$$

Nos queda entonces definir $k_{ess} = \frac{7 \cdot 3721}{1360} \approx 19,15$ y tomar el límite para que el error permanente sea nulo.

5. Simulación

Luego de calcular los coeficientes, se prosiguió a realizar la simulación correspondiente. Para ello se usó Simulink. El diagrama realizado es el siguiente:

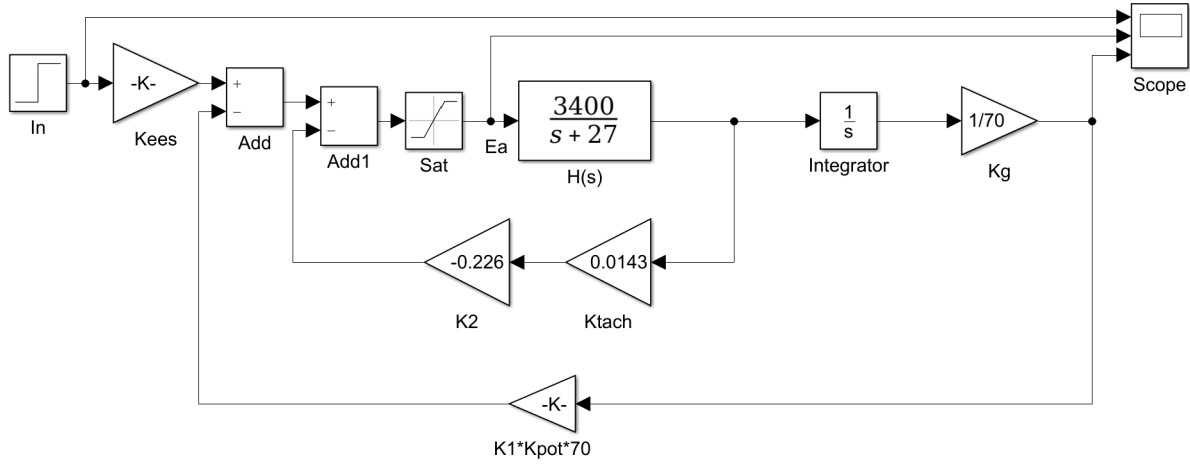


Figura 4: Diagrama de Simulink

Donde se puede ver que la transferencia original calculada $H(s)$ se encuentra presente. De esta salida hay dos ramas, una es seguida de un integrador, que corresponde a pasar de la velocidad angular del motor a la posición angular del motor, ya que se tiene:

$$\omega_m(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Y transformando se llega a:

$$\omega_m(s) = s \cdot \theta(s)$$

$$\frac{\omega_m(s)}{s} = \theta(s)$$

La otra rama va al tacómetro, donde la velocidad angular es reflejada en tensión, siendo una relación lineal entre estas dos:

$$\omega_m(t) = K_{tach} \cdot V_\omega(t)$$

$$\text{Donde se tiene } K_{tach} = \frac{1,5V}{1000RPM} = \frac{1,5}{1000} \cdot \frac{V}{RPM} \cdot \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{RPM}{(\frac{rad}{seg})} = 0,0143 \frac{V}{(\frac{rad}{seg})}$$

Luego del integrador, para obtener la función transferencia a la salida de los engranajes, se multiplica la salida del integrador por $K_g = \frac{1}{15,4} = \frac{1}{70}$. De esta salida también se encuentra el potenciómetro que traduce la posición angular en tensión, donde se tiene $K_{pot} = 35,2 \frac{^\circ}{V} = 35,2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{rad}{V} = 0,614 \frac{rad}{V}$. En el control de Arduino que se explica en la siguiente sección, se incluyó un limitador de tensión por lo que se agregó este bloque en la simulación. La simulación también incluye la constante que corrige el error permanente. Volcando los valores obtenidos en la sección anterior se corrió la simulación, obteniendo el siguiente resultados:

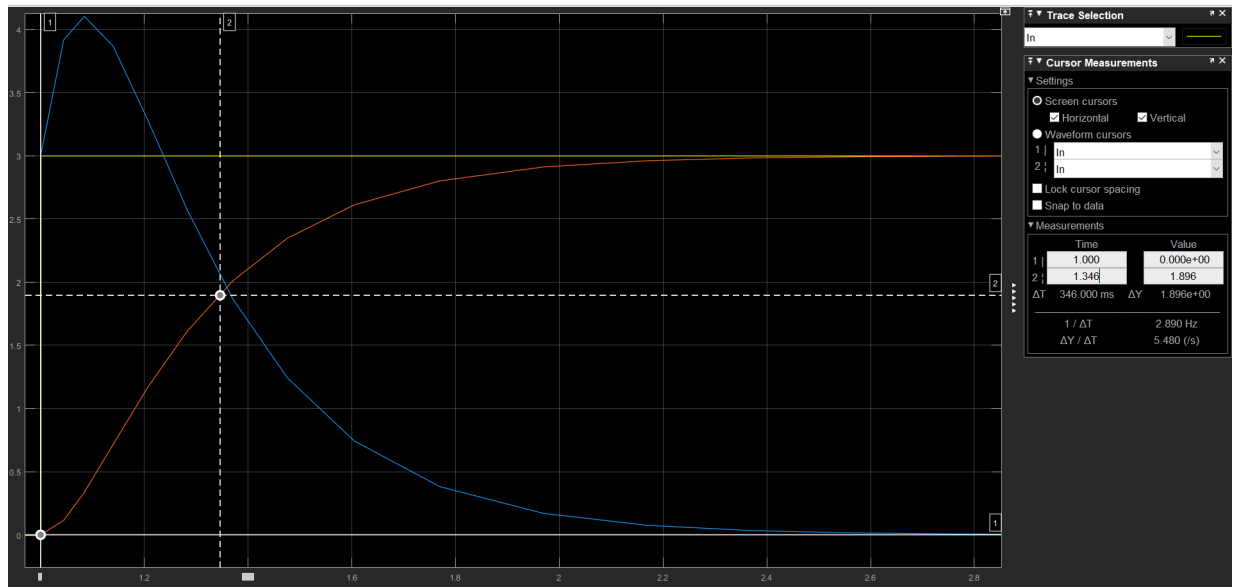


Figura 5: Simulación

Donde la función amarilla es el escalón a la entrada, la función azul la entrada de la función transferencial (E_a) y la función roja la salida del sistema.

Se puede apreciar que la respuesta es críticamente amortiguada como se calculó y tiene error permanente nulo. Además, se calculó la constante de tiempo, siendo esta de $\tau = 346\text{ms}$. De manera que el tiempo de crecimiento es de $T_r = 2,2 \cdot \tau = 761,2\text{ms}$. También se puede apreciar en la simulación la limitación por voltaje en la entrada del motor, de manera que este no se rompa a causa de un sobre-pico alto por parte del control propuesto.

6. Placa Driver

Para poder utilizar el control por Arduino propuesto, se requirió realizar una placa intermedia que cumple varias funciones. Una de estas funciones es alimentar las tres señales de control al Arduino. Una de ellas (A1) es la del potenciómetro del Quanser que mide posición angular, siendo este potenciómetro alimentado con seis volts. La segunda señal (A2) corresponde a un potenciómetro en la placa, el cual se usa para determinar en qué posición se quiere el motor. La última señal (A3) es la proveniente del tacómetro, pero a esta última señal hace falta adaptar el rango de tensiones posibles, para que esta pueda ser alimentada al Arduino con la señal. Esto se logra con un sumador, lo que lleva la tensión de $0V - 10V$ a $0V - 2,5V$. Otra función de la placa incluye la comunicación entre Arduino y el motor a través de un puente H. Este mismo con el uso de una librería de Arduino, se comunican con el motor de manera eficiente. Finalmente, mediante un jumper, se puede elegir el potenciómetro, o elegir insertar una señal analógica desde un generador, de manera de poder medir la respuesta al escalón, a una rampa, etc.

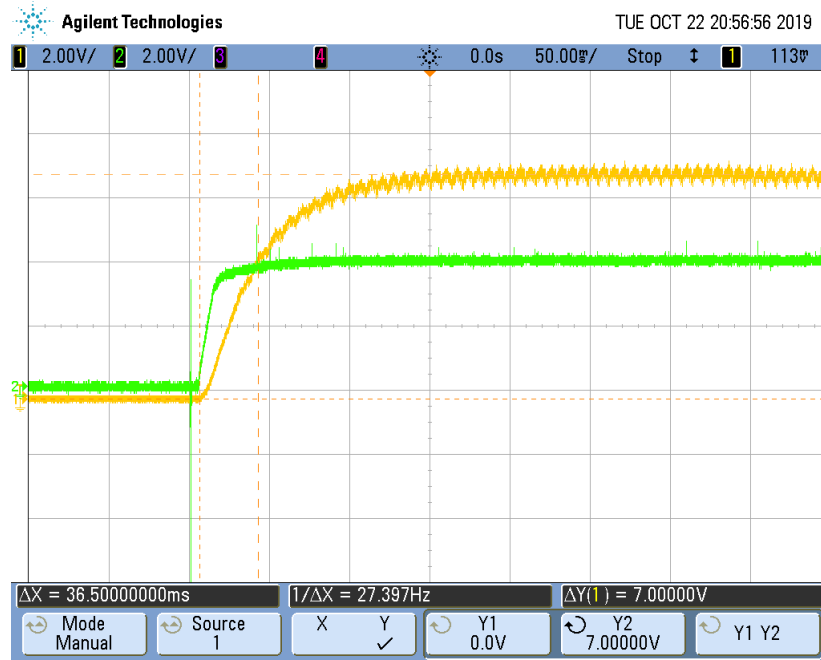
7. Control por Arduino

Como se mencionó anteriormente, se escribió un código con ayuda de una librería para utilizar el puente H en modo PWM y así alimentar al motor la tensión necesaria para el control. En el código se introdujeron las constantes de ganancia para las variables de estado y así efectuar la correcta realimentación de estados. La desventaja de este método es que al utilizar la librería, se setea la tensión mediante una función la cual no recibe como parámetro una tensión, sino una velocidad. En consecuencia, se debió ajustar las constantes de las variables de estado de manera práctica/experimental. Adjunto se encuentra el código escrito para realizar el control.

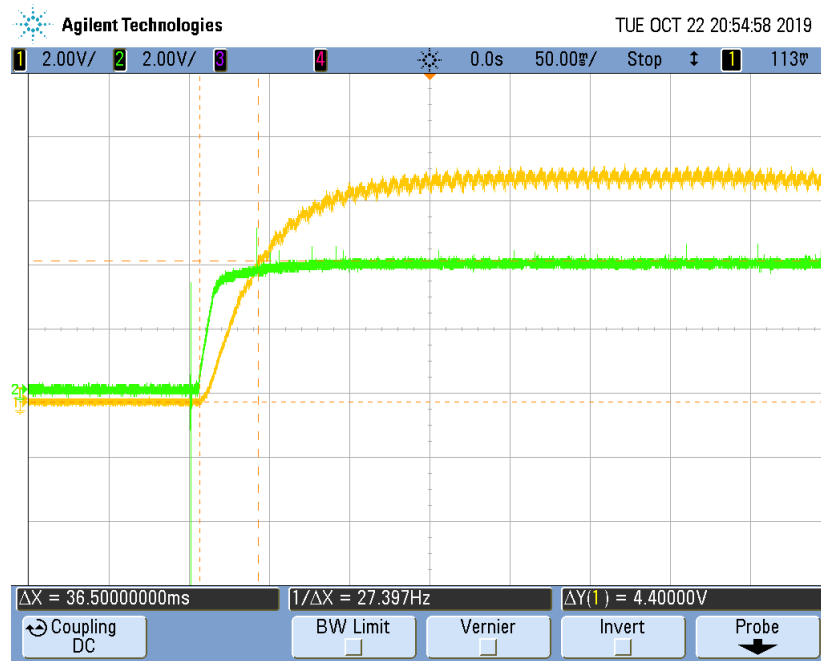
8. Mediciones

8.1. Función de transferencia

Las primeras mediciones tomadas fueron para corroborar que la función transferencia calculada es la correcta. A continuación se midió la respuesta a lazo abierto:



(a) Primer medición



(b) Primer medición

Figura 6: Mediciones a lazo abierto

En la primer medición podemos ver en amarillo la salida del sistema midiendo la velocidad angular del tacómetro. Esta se puede ver que tiene una amplitud de $7V$. Mientras que el escalón de entrada tiene $4,5V$. En consecuencia, la ganancia es de $k = \frac{7V}{4,5V} = 1,56$ veces. Luego, se midió la constante de tiempo τ como el tiempo que se tarda en llegar al 63,2 % del valor final. Es decir a $7V \cdot 0,632 \approx 4,4V$. Esto se puede ver en la segunda medición. observando

que $\tau = 36,5ms$. Por lo que se obtiene la forma final:

$$T(s) = k \cdot \frac{(\frac{1}{\tau})}{s + \frac{1}{\tau}} = 1,56 \cdot \frac{\frac{1}{36,5 \cdot 10^{-3}}}{s + \frac{1}{36,5 \cdot 10^{-3}}} = \frac{42,74}{s + 27,62}$$

Para llegar finalmente a la $H(s)$ calculada teóricamente se debe tener en cuenta el factor de escalamiento del tacómetro para llegar a la verdadera transferencia, por lo que se obtiene:

$$H(s) = \frac{T(s)}{K_{tac}} = \frac{42,74}{s + 27,62} \cdot \frac{1}{0,0143} = \frac{3052,84}{s + 27,62}$$

Donde se puede observar que es muy similar a la calculada teóricamente:

$$\begin{cases} H_{teorica}(s) = \frac{3052,84}{s + 27,62} \\ H_{medida}(s) = \frac{3400}{s + 27} \end{cases}$$

Los errores pueden ser en parte por el hecho de que la entrada no es exactamente una cuadrada, por lo que el tiempo calculados tiene un error inducido.

8.2. Respuesta a distintas entradas

Se procede a medir la respuesta del sistema a distintas entradas, teniendo en cuenta que la medición es de la posición angular del motor (variable a controlar) en este caso y no de la velocidad final como lo fue en la subsección anterior.



Figura 7: Respuesta al escalón



Figura 8: Respuesta a una triangular

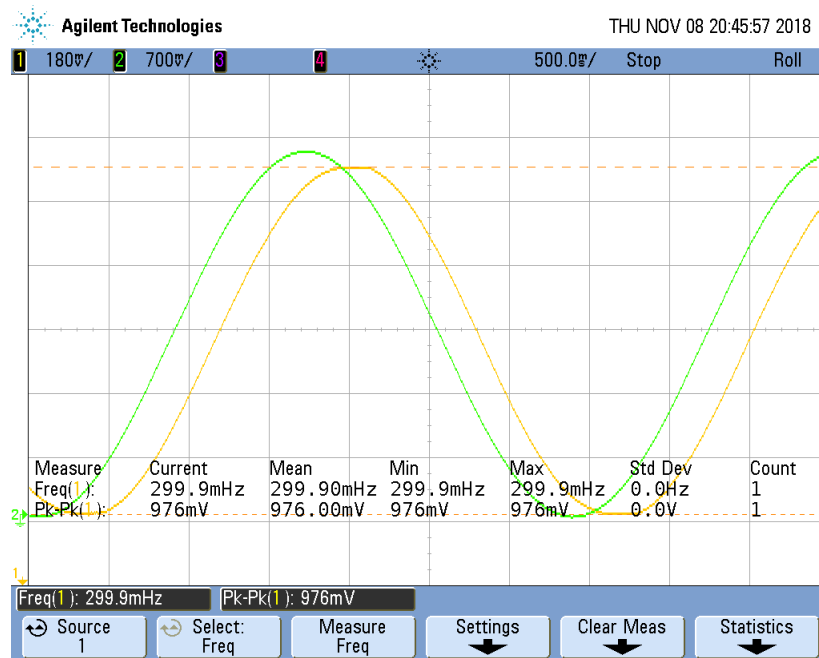


Figura 9: Respuesta a una senoidal

Se observa el comportamiento críticamente amortiguado que se requería y un error permanente prácticamente nulo en la respuesta del motor al escalón.

Se muestra a continuación la respuesta del nuevo sistema al control mediante el uso del potenciómetro (entrada aleatoria).



Figura 10: Control mediante el uso del potenciómetro

9. Comparación y Conclusiones

Se logra implementar un sistema de control que cumpla con error permanente nulo en su respuesta al escalón y que tenga tiempo de respuesta mínimo mediante la utilización de pole Placement y de una ganancia agregada en la entrada, conservando así el orden del sistema del motor original. Si bien los resultados obtenidos son aceptables, se considera la posibilidad de utilizar control integral para otros sistemas de control ya que no requerirán el proceso de ajustar la constante de la ganancia de entrada para que se ajuste exactamente a los valores de las constantes de realimentación que se lograron implementar y no las teóricas.