



## **DISEÑO DE FIR**

- Tipos de FIR de fase lineal
- Método por transformada de Fourier
- Método MiniMax
- Método de muestreo en frecuencia



## FILTROS NO RECURSIVOS

Dada la expresión de la función transferencia:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

Respuesta en frecuencia: 
$$\begin{cases} H(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega T} \\ H(e^{j\omega T}) = M(\omega)e^{j\theta(\omega)} \end{cases}$$

Módulo: 
$$M(\omega) = M(-\omega) = |H(e^{j\omega T})|$$

Fase: 
$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega) = \text{Arg}[H(e^{-j\omega T})]$$

Si deseamos imponer la condición de fase lineal

▪ Caso A:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega \quad -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$$

$$\tau_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad \tau_g = -\frac{d[\theta(\omega)]}{d\omega}$$

Condición de retardo de grupo constante:

$$\tau_p = \tau_g = \alpha$$

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)[\cos(n\omega T) - j\sin(n\omega T)]$$

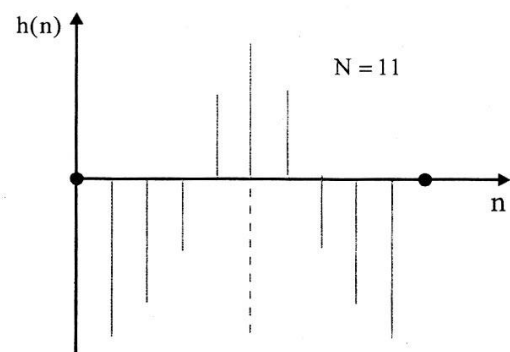
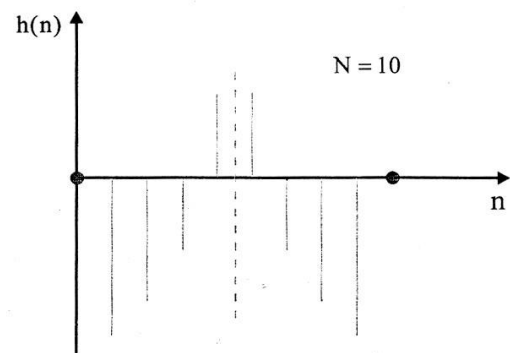
$$\theta(\omega) = \arctg \left[ \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(n\omega T)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(n\omega T)} \right]$$

$$\tg(\alpha\omega) = \frac{\sin(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(n\omega T)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(n\omega T)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\alpha\omega - n\omega T) = 0$$

Solución:

$$\begin{cases} h(n) = h(N-1-n) \\ \alpha = \frac{N-1}{2}T \end{cases}$$



Respuesta al impulso para FIR de fase lineal

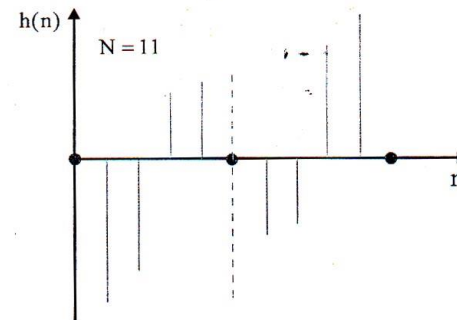
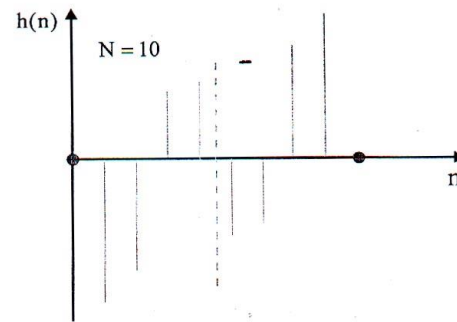
▪ Caso B:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega + \beta$$

Si sólo  $\tau_g = \text{cte}$ , es decir que  $\beta \neq 0$ , llegamos a:

Solución

$$\begin{cases} h(n) = -h(N-1-n) \\ \alpha = \frac{N-1}{2}T \\ \beta = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



RESPUESTA EN FRECUENCIA

Establecemos la siguiente clasificación:

**h(n) simétrico**

N	Tipo	$H(e^{j\omega T})$
Impar	1	$e^{-j\omega T \left[ \frac{N-1}{2} \right]} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(k\omega T)$
Par	2	$e^{-j\omega T \left[ \frac{N-1}{2} \right]} \sum_{k=1}^N b_k \cos \left[ \omega T \left( k - \frac{1}{2} \right) \right]$

**h(n) antisimétrico**

N	Tipo	$H(e^{j\omega T})$
Impar	3	$e^{-j\omega T \left[ \frac{N-1}{2} \right]} \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sen(k\omega T)$
Par	4	$e^{-j\omega T \left[ \frac{N-1}{2} \right]} \sum_{k=1}^N b_k \sen \left[ \omega T \left( k - \frac{1}{2} \right) \right]$

$$a_0 = h \left[ \frac{(N-1)T}{2} \right] \quad a_k = 2h \left[ \left( \frac{N-1}{2} - k \right) T \right] \quad b_k = 2h \left[ \left( \frac{N}{2} - k \right) T \right]$$

## Diseño de FIR

## FORMA GENERAL

$$H(e^{j\omega T}) = H_0(j\omega) e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T} (j)^k$$

siendo:

 $k = 0$  tipos 1 y 2

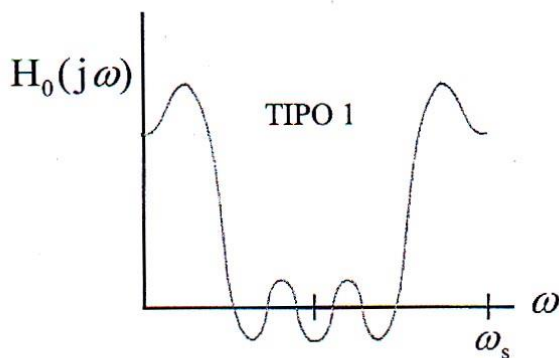
 $k = 1$  tipos 3 y 4

$$H(e^{j\omega T}) = |H_0(j\omega)| e^{-j\theta}$$

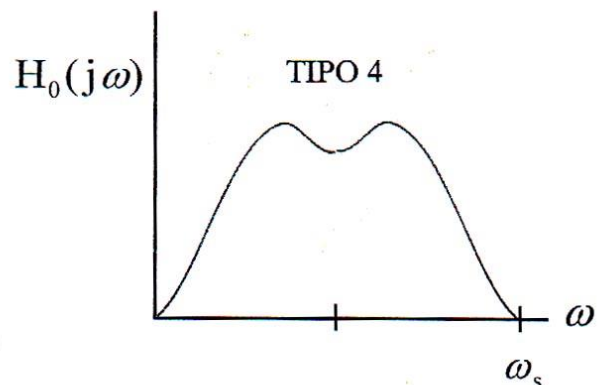
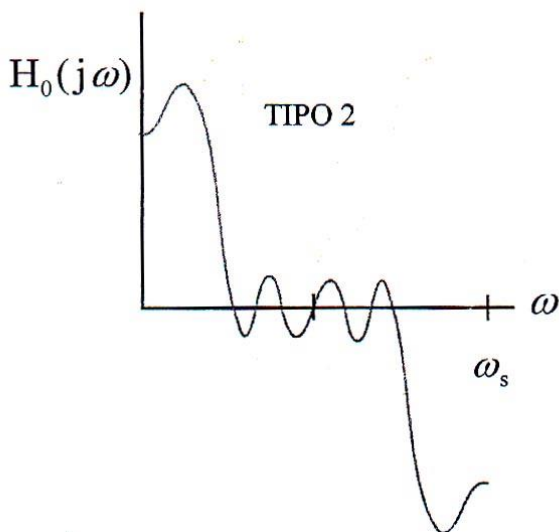
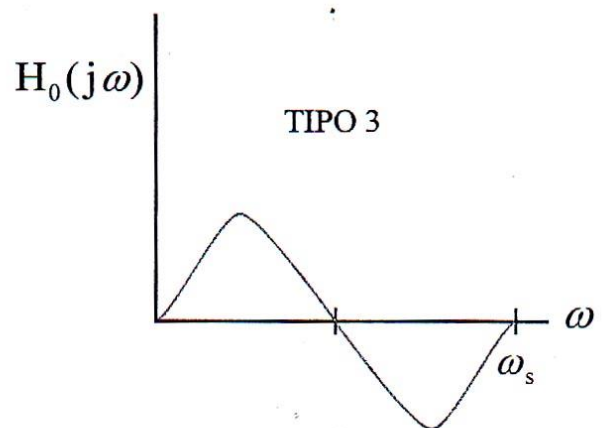
 $H_0(j\omega)$  es real

**Tipos 1 y 2**

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2} \omega T & H_0(j\omega) > 0 \\ -\frac{N-1}{2} \omega T + \pi & H_0(j\omega) < 0 \end{cases}$$


**Tipos 3 y 4**

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \omega T & H_0(j\omega) > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \omega T + \pi & H_0(j\omega) < 0 \end{cases}$$



**Tipo 1 (N par)**

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=0}$$

Sin Restricciones

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=\frac{\omega_s}{2}}$$

Sin Restricciones

Aplicación

- Filtros pasabajos
- Filtros pasabanda
- Filtros pasaaltos
- Filtros rechazabanda
- Multibanda
- 

**Tipo 2 (N impar)**

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=0}$$

Sin Restricciones

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=\frac{\omega_s}{2}}$$

0

Aplicación

- Filtros pasabajos
- Filtros pasabanda

**Tipo 3 (N par)**

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=0} = 0$$

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=\frac{\omega_s}{2}} = 0$$

Aplicación

- Diferenciadores
- Transformadores de Hilbert

**Tipo 4 (N impar)**

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=0}$$

0

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=\frac{\omega_s}{2}}$$

Sin Restricciones

Aplicación

- Diferenciadores
- Transformadores de Hilbert

## DISEÑO DE FILTROS NO RECURSIVOS

### METODOS

1. Usando la Serie de Fourier (Ventanas)
2. Muestreando en el dominio de la frecuencia
3. PARKS McCLELLAN (Minimax, Equiripple o Tchebycheff)

Todos los métodos mencionados permiten hallar un filtro FIR de fase lineal, aunque los resultados difieren en el orden (longitud del filtro) y en los parámetros que logran optimizar.

Se procederá a un estudio de cada método, para poder evaluar mejor las ventajas y desventajas de cada uno.

### 1. DISEÑO USANDO LA SERIE DE FOURIER

Como  $H(e^{j\omega T})$  es periódica podemos desarrollarla como una serie de Fourier

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n)e^{-jn\omega T}$$

siendo

$$h(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{+\frac{\omega_s}{2}} H(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega$$

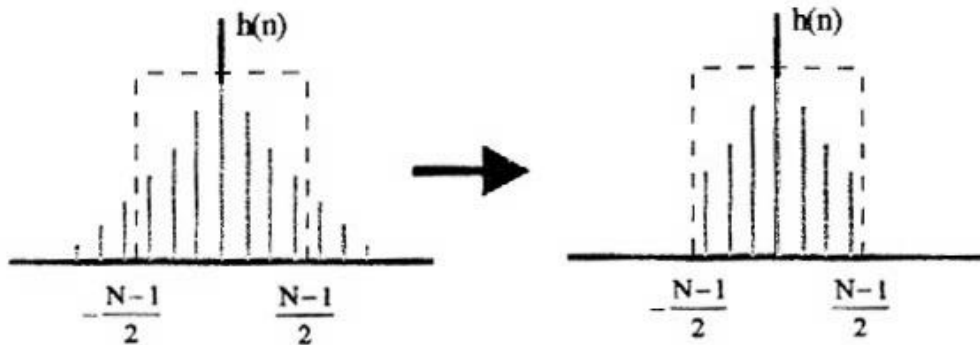
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n)z^{-n}$$

$$h(n) \begin{cases} \text{Infinita} \\ \text{No causal} \end{cases}$$

Trunco la serie

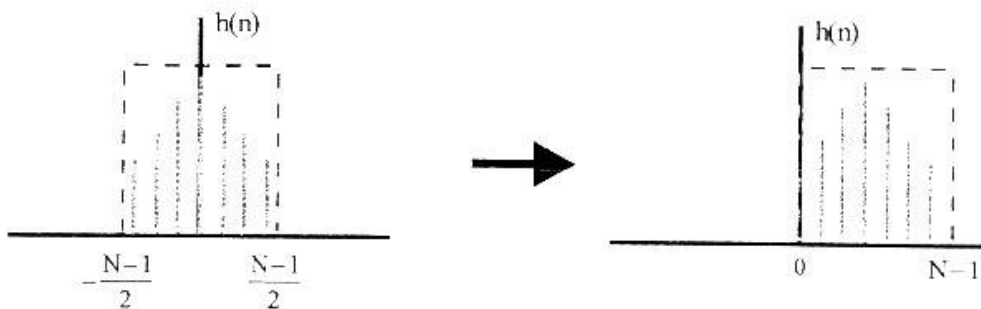
$$h(n) = 0 \quad |n| > \frac{N-1}{2}$$

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} [h(-n)z^n + h(n)z^{-n}]$$



$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} H(z)$$

Causal



Resumiendo

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{a_n}{2} (z^n + z^{-n})$$

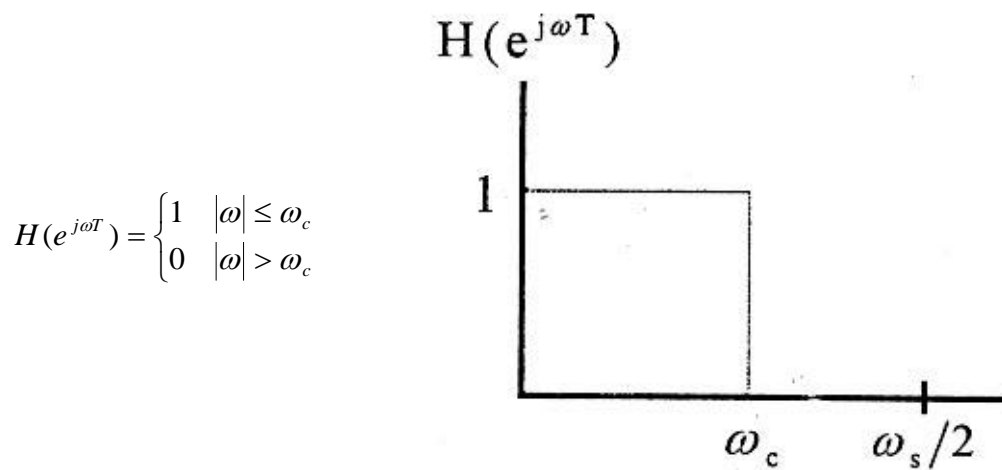
donde  $a_0 = h(0)$  y  $a_n = 2h(n)$

## USO DE VENTANAS

En general la respuesta en frecuencia del filtro ideal es constante por tramos (bandas pasante y atenuada), teniendo discontinuidades entre bandas. En estos casos el desarrollo de Fourier (y la respuesta impulsiva del filtro) tienen infinitos términos. Pero como la  $h(n)$  debe ser finita, debemos truncar el desarrollo de Fourier, lo que trae aparejado como inconveniente la aparición de las oscilaciones de Gibbs. Es que resulta lenta la convergencia de la serie de Fourier.

Veamos un ejemplo concreto:

Supongamos que deseamos diseñar un filtro pasa bajos



$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega T} \quad h(n) = \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} H(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega$$

$$h(n) = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega T} d\omega = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} \sin(n\omega_c T) & n \neq 0 \\ \frac{\omega_s}{2} & n = 0 \end{cases}$$

Truncando la serie

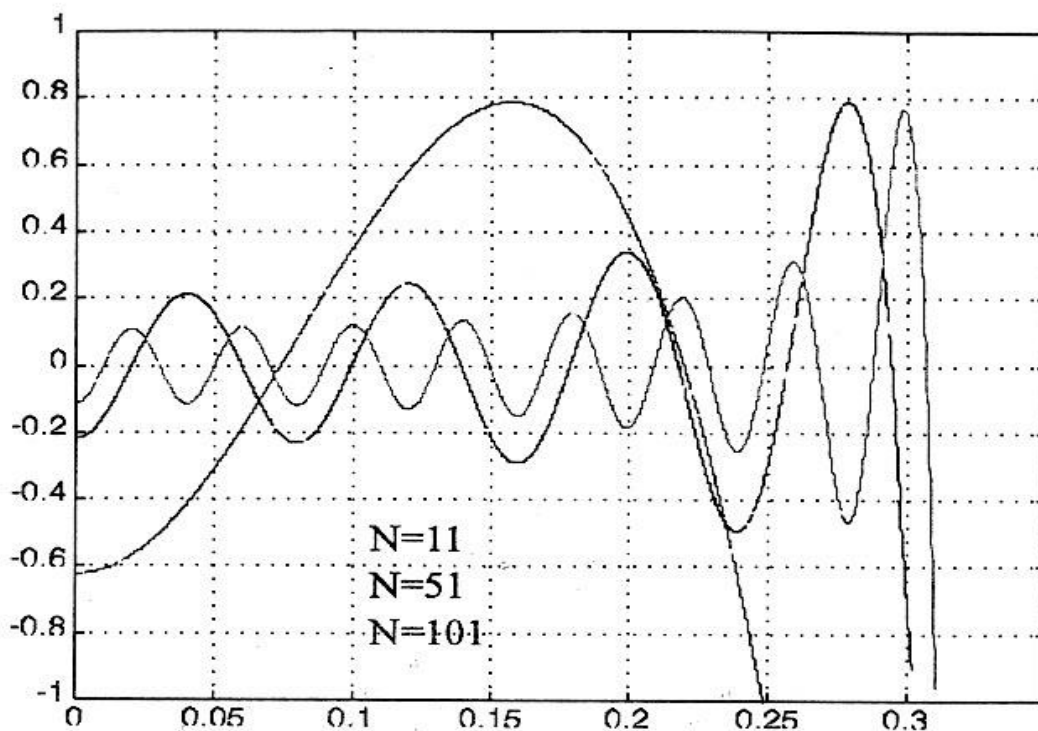
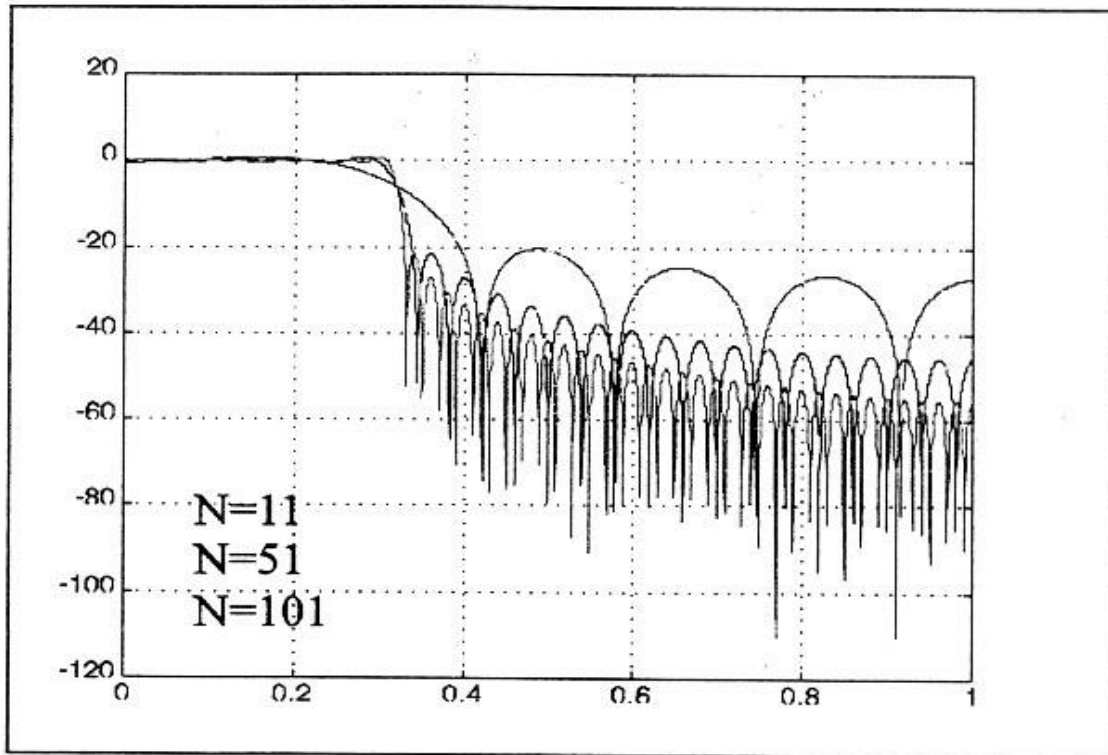
$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} \sin(n\omega_c T) & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ \frac{\omega_s}{2} & n = 0 \end{cases}$$



## Diseño de FIR

### Imponiendo causalidad

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\pi} \operatorname{sen}\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega_c T\right] & 0 \leq n \leq N-1 \\ \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = \frac{N-1}{2} \text{ (N impar)} \end{cases}$$



## Notas:

Como puede verse, hay grandes oscilaciones o ripple a ambos lados de la banda de transición del filtro. La frecuencia de estas oscilaciones aumenta a medida que aumenta  $N$  pero no disminuye la amplitud de los lóbulos a ambos lados de la banda de transición. La banda de transición se hace más angosta conforme aumenta  $N$  pero la atenuación en banda atenuada permanece prácticamente constante (-21 dB).

Una forma alternativa de visualizar el resultado obtenido es considerar el truncado de la respuesta impulsiva del filtro como el producto de la respuesta impulsiva del filtro ideal (de duración infinita) con una función  $w(n)$  a la que llamaremos **ventana rectangular**.

$$h_w(n) = h_d(n)w(n) \quad \text{donde} \quad w(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Multiplicar en el dominio del tiempo dos secuencias discretas es equivalente a realizar la convolución compleja de las transformadas  $Z$  de cada una de ellas.

$$H_w(z) = Z[h_d(n)w(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} H_d(v) W\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$$

donde

$$\begin{aligned} H_d(z) &= Z[h_d(n)] \\ W(z) &= Z[w(n)] \\ H_w(z) &= Z[h_w(n)] \end{aligned}$$

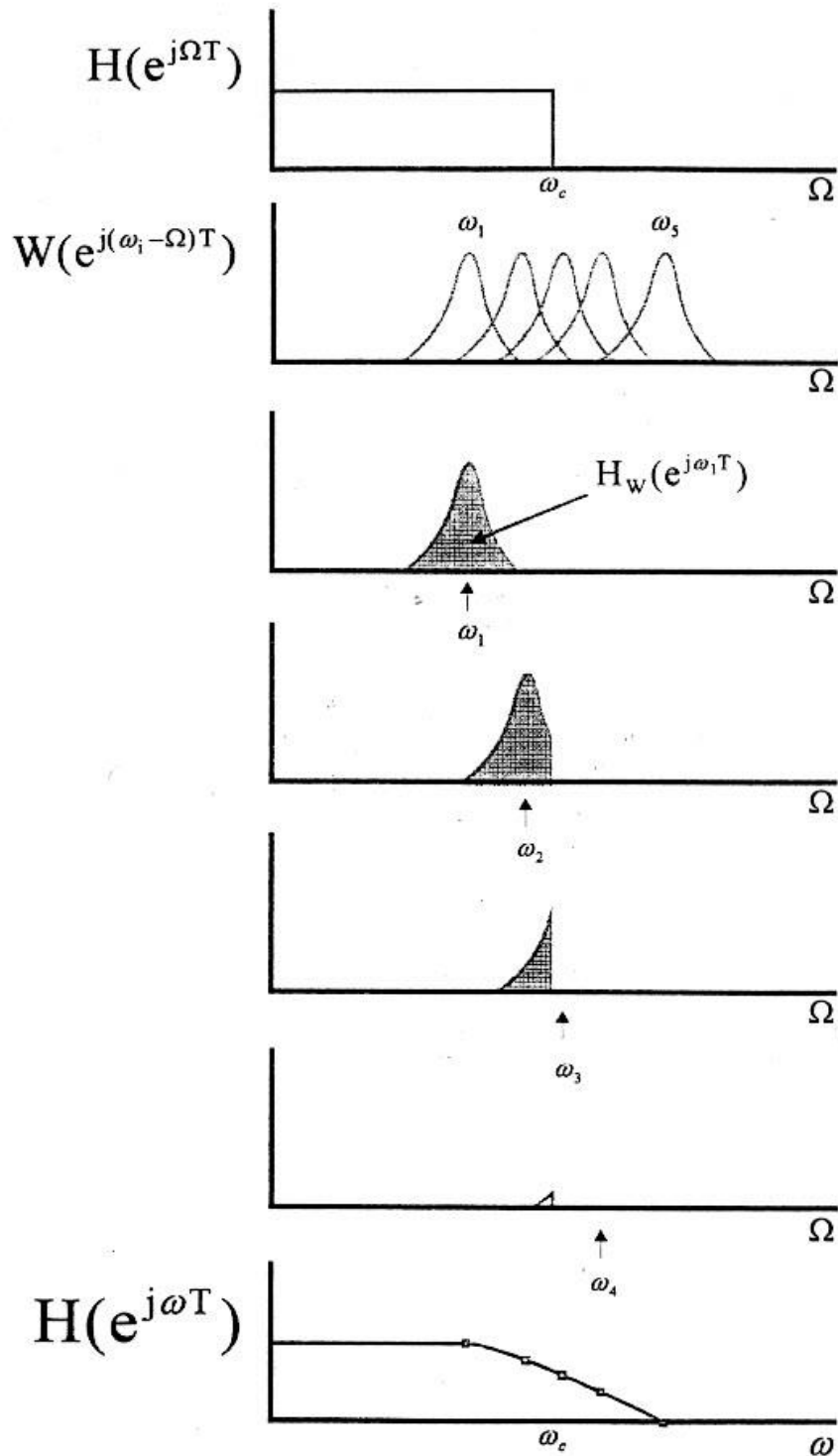
si

$$v = e^{j\Omega T} \quad \text{y} \quad z = e^{j\omega T}$$

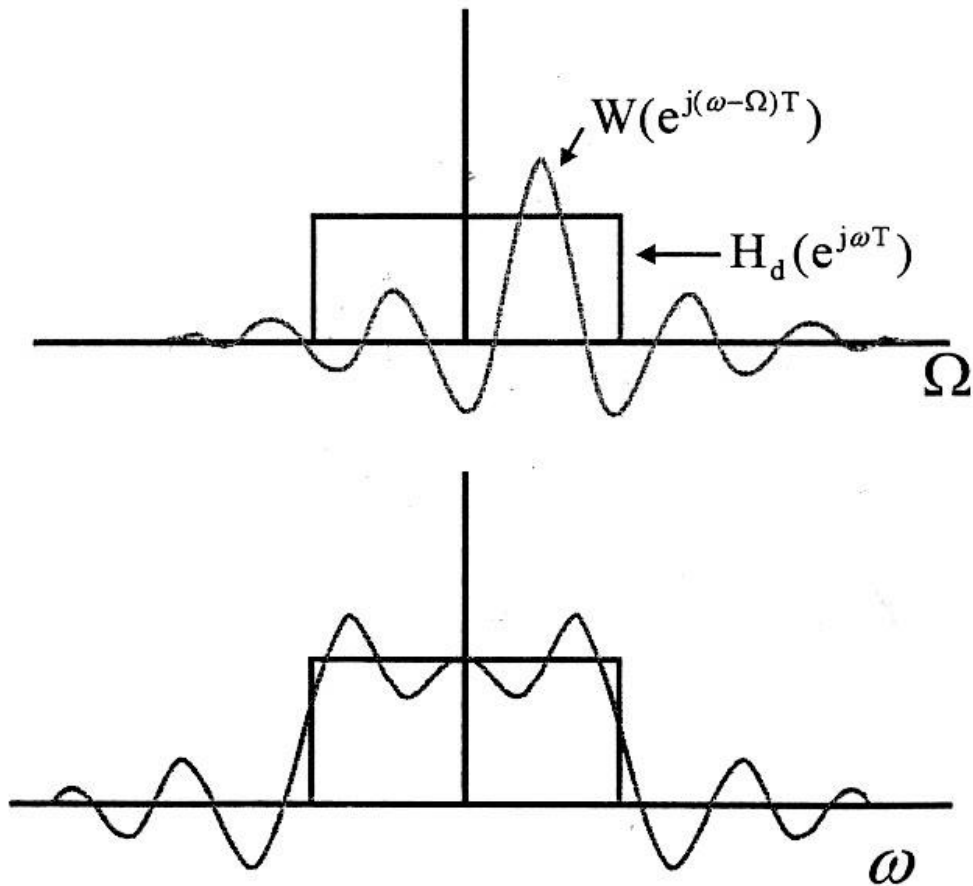
y tanto  $H(v)$  como  $W\left(\frac{z}{v}\right)$  convergen en el círculo de radio uno en el plano  $v$

$$H_w(e^{j\omega T}) = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{T}} H_d(e^{j\Omega T}) W(e^{j(\omega - \Omega)T}) d\Omega$$

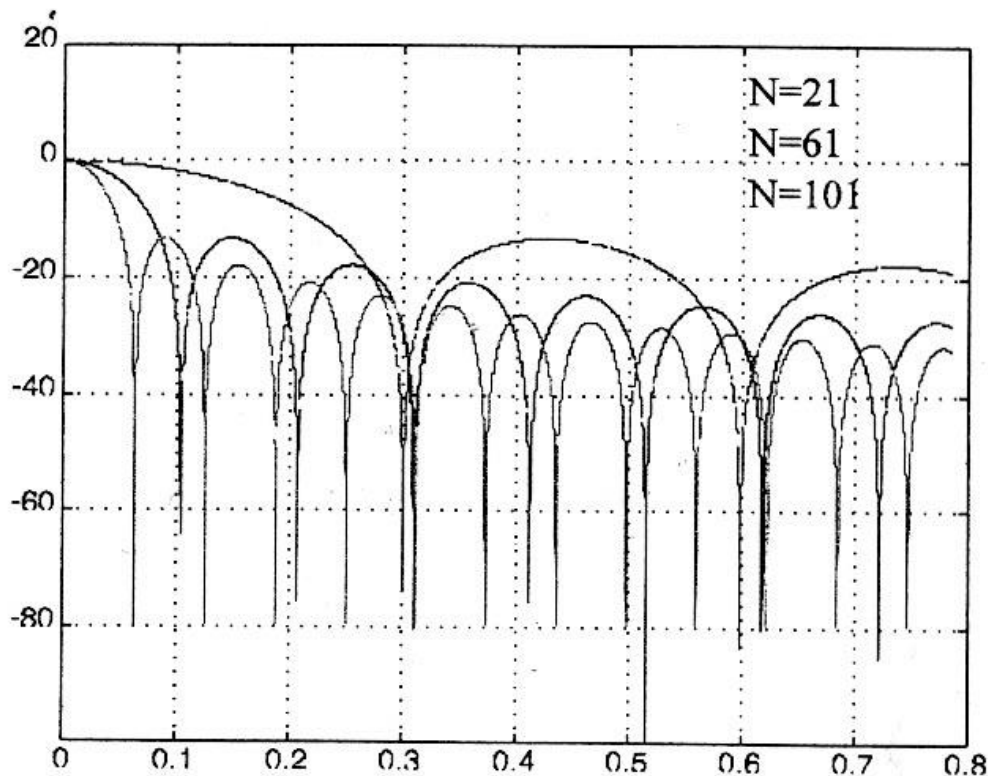
Esta última expresión nos dice que el espectro del filtro se obtiene hallando el área bajo la curva que resulta de multiplicar la respuesta en frecuencia ideal del filtro con la de la ventana para cada valor de  $\omega$ .



En la siguiente figura tenemos la convolución con el espectro de la ventana rectangular. Como puede verse, las oscilaciones de Gibbs provienen del alto ripple que tiene el espectro de la ventana rectangular



## Espectro de la ventana rectangular



Es instructivo analizar el efecto del espectro de la ventana rectangular (trivial) sobre la respuesta en frecuencia del filtro. Como se mencionó antes la respuesta en frecuencia del filtro será la convolución del espectro ideal del mismo  $H_d(e^{j\omega T})$  con el de la ventana  $w(n)$ . El espectro de la ventana será:

$$W(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-jn\omega T} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega T}$$

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = e^{-j\omega T \frac{N-1}{2}} \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega NT}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

donde

$$|W(e^{j\omega T})| = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega NT}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \quad -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$$

y

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega T \frac{N-1}{2} & \text{sen}\left(\frac{\omega NT}{2}\right) \geq 0 \\ -\omega T \frac{N-1}{2} + \pi & \text{sen}\left(\frac{\omega NT}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

El ancho del lóbulo principal (medido al primer cero de  $W(\omega)$ ) es  $\frac{4\pi}{N}$  ( $T=1$ ).

En la figura previa se observa que a medida que  $N$  aumenta el ancho del lóbulo principal y de los secundarios se hace más angosto. En dicha figura el espectro se representó normalizado respecto de  $N$  por lo tanto, en realidad la amplitud de todos los lóbulos aumenta con  $N$ . *Como consecuencia el área debajo de cada uno de ellos permanece prácticamente constante.*

Este comportamiento se puede constatar en la respuesta en frecuencia del filtro puesto que esta última se obtenía a partir de la convolución de  $W(\omega)$  con la respuesta ideal del filtro (área bajo  $W(\omega)$  cte).

De los resultados previos podemos concluir que la atenuación máxima en la banda pasante, como mínima en la banda atenuada ( $\cong 21$  dB) del filtro diseñado con la ventana rectangular no se pueden mejorar. Una forma de mejorar las atenuaciones sería buscar ventana cuyos lóbulos laterales fuesen menores. Eso implica que la ventana en el tiempo decrezca en forma paulatina hasta llegar a cero y no en forma abrupta, como en el caso de la rectangular. Existe una gran variedad de ventanas con estas características. Entre ellas podemos mencionar las siguientes:

Bartlett (o triangular)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Hann

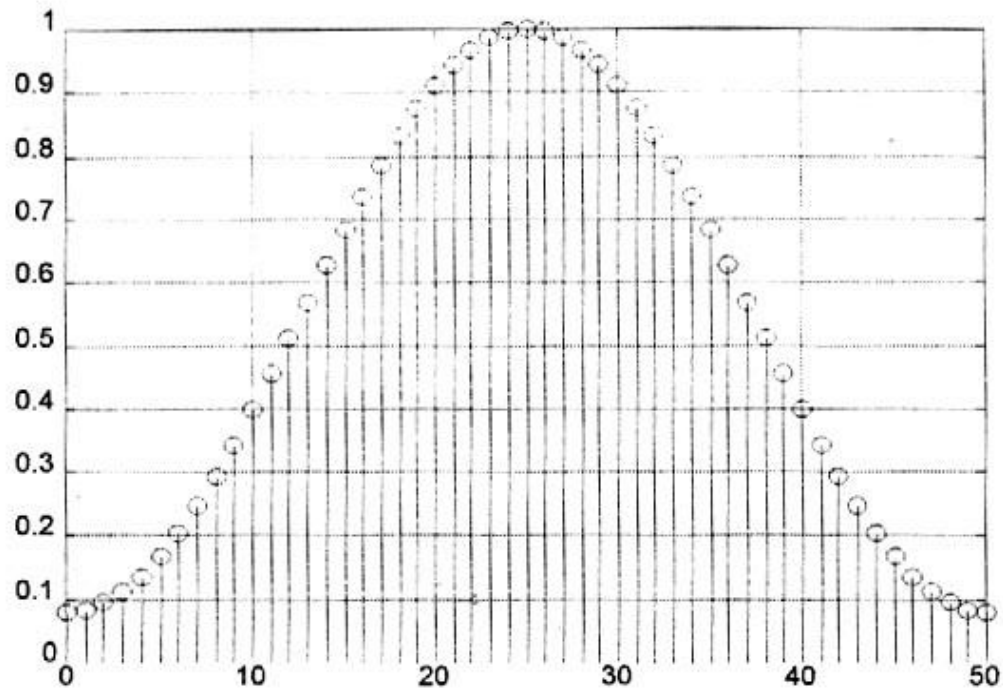
$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Blackman

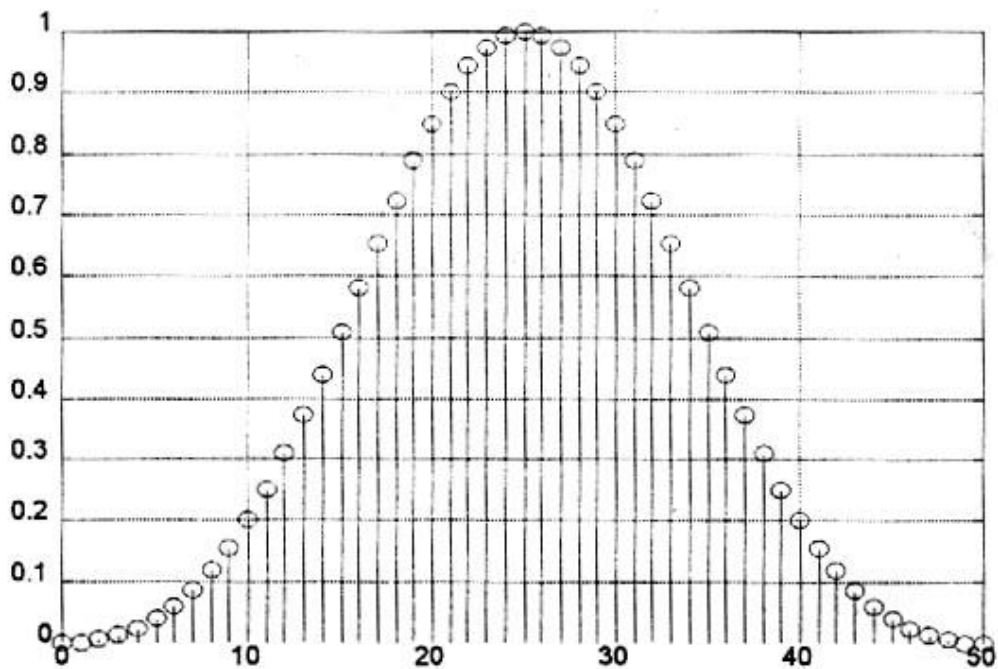


$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

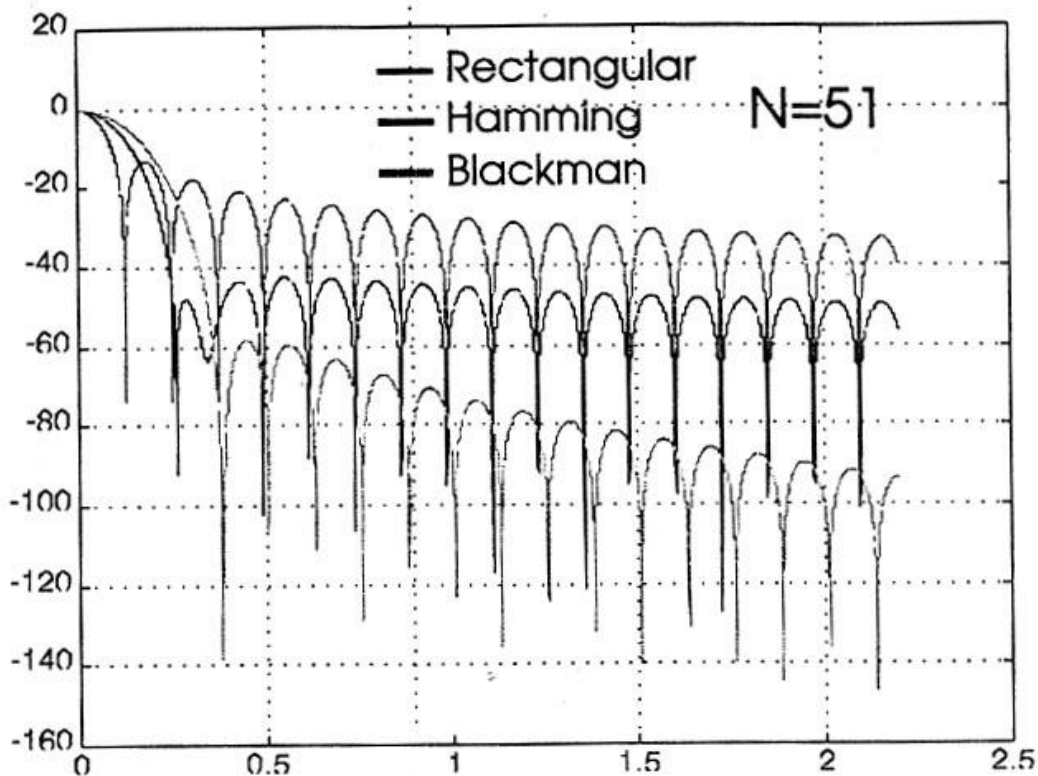
### HAMMING



### BLACKMAN



ESPECTROS DE LAS VENTANAS



Como puede apreciarse la ventana de Hamming tiene un ripple menor que la rectangular mientras que en la de Blackman el ripple es menor que las anteriores.

De esta manera se pueden diseñar filtros con mayor atenuación en la banda atenuada.

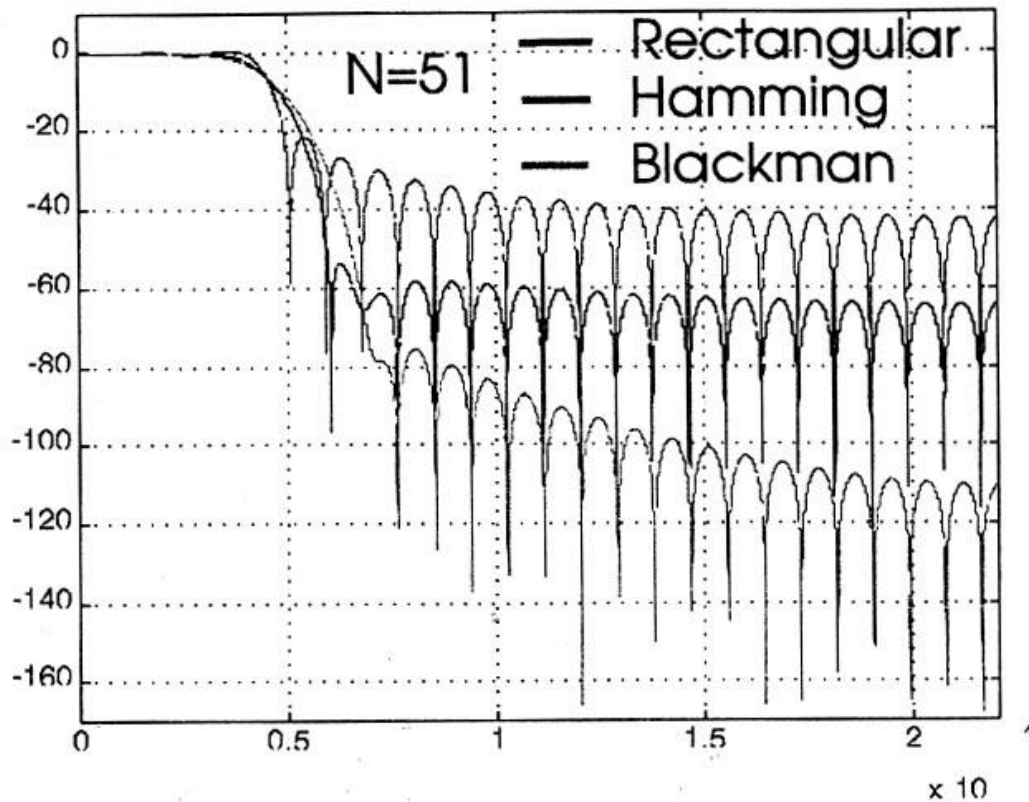
Pero como contrapartida cuanto *menor es el ripple mayor el ancho del lóbulo principal y como consecuencia la banda de transición del filtro es menos abrupta*.

Supongamos que queremos diseñar un filtro que tenga una atenuación dada. El primer paso es buscar la ventana que tenga el ripple apropiado de manera de cumplir con las especificaciones del diseño. Dado que no hay una gran cantidad de ventanas disponibles nos tendremos que conformar con aquella que nos brinde una atenuación igual o mayor a la pedida. Una vez encontrada debemos aumentar el orden del filtro ( $N$ ) para reducir el ancho del lóbulo principal de manera de alcanzar la banda de transición deseada. Como la atenuación pedida raras veces coincide con alguna de las ventanas conocidas, generalmente ocurre que elegiremos una ventana cuya atenuación sea excesiva y por lo tanto tenga un lóbulo principal muy ancho, lo que nos da un filtro cuyo orden es excesivamente alto y por lo tanto no óptimo.



**Ejemplo:**

Filtros pasabajos con distintas ventanas



Ventana	Amplitud del lóbulo lateral (dB)	Ancho del lóbulo principal	Mínima Atenuación en banda atenuada(dB)
Rectangular	-13	$4\pi/N$	-21
Bartlett	-25	$8\pi/N$	-25
Hann	-31	$8\pi/N$	-44
Hamming	-41	$8\pi/N$	-53
Blackman	-57	$12\pi/N$	-74

### **Ventana de Kaiser**

Una ventana que supera los problemas mencionados previamente es la ventana de Kaiser dada por:

$$W_k(nT) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)} & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

donde  $\alpha$  es un parámetro independiente e  $I_0$  es la función de Bessel modificada de orden cero que puede ser aproximada por la siguiente serie de rápida convergencia:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$$

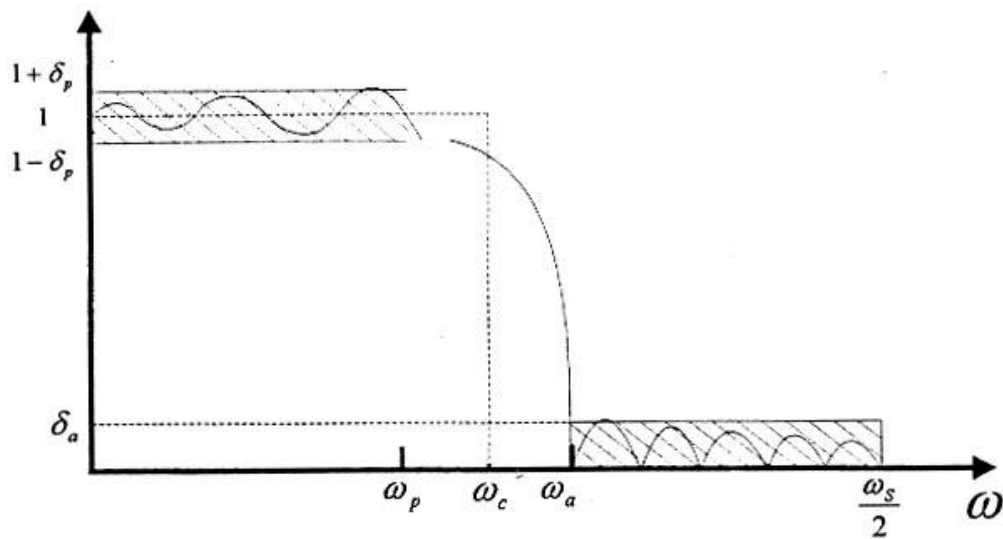
En la ventana de Kaiser el ripple puede ser variado en forma continua desde el valor bajo que tiene la ventana de Blackman hasta el alto valor de la ventana rectangular simplemente variando el parámetro  $\alpha$ .

A medida que aumentamos  $\alpha$  la atenuación en la banda atenuada y el ancho de la banda de transición del filtro se incrementan. Una vez escogido el valor de  $\alpha$  que satisfaga la atenuación requerida en banda atenuada, se finaliza el diseño eligiendo el valor apropiado de  $N$  que nos de la banda de transición deseada.

Kaiser encontró que para una atenuación dada en banda atenuada el producto del ancho de la ventana y la banda de transición del filtro era aproximadamente constante y mínimo. Basándose en este hecho y usando aproximaciones numéricas de la respuesta en frecuencia de la ventana obtuvo expresiones aproximadas para la determinación de  $\alpha$  y  $N$  en función de la atenuación requerida. Con estas expresiones es posible diseñar filtros con el mismo ripple en banda pasante y atenuada.

Antes de presentar estas expresiones veamos como se especifica el filtro en un ejemplo:

## Especificaciones



### Definiciones

$$A_p = 20 \log \left( \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p} \right)$$

$$A_a = -20 \log \delta_a$$

$$B_t = \omega_p - \omega_a$$

## DISEÑO USANDO LA VENTANA DE KAISER

### Datos

Ripple en banda pasante  $\leq A_p'$ ,  $\omega_p$

Atenuación mínima en banda atenuada  $\geq A_a'$ ,  $\omega_a$

1. Hallar  $h(n)$  usando la serie de Fourier (asumir respuesta en frecuencia ideal)

$$H(e^{j\omega T}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_s/2 \end{cases} \quad \text{donde } \omega_c = \frac{\omega_a + \omega_p}{2}$$

2. Elegir  $\delta$  de manera que  $A_p \leq A_p'$  y  $A_a \geq A_a'$  siendo  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\text{Donde} \quad \delta_1 = 10^{-\frac{A_a'}{20}} \quad \delta_2 = \frac{10^{\frac{A_p'}{20}} - 1}{10^{\frac{A_p'}{20}} + 1}$$

## Diseño de FIR

3. Calcular  $A_a = -20 \log \delta$

4. Hallar  $\alpha$  de las siguientes relaciones establecidas por Kaiser (para  $\delta_a = \delta_p = \delta$ )

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{para } A_a \leq 21 \\ 0.5842(A_a - 21)^{0.4} + 0.07886(A_a - 21) & \text{para } 21 < A_a \leq 50 \\ 0.1102(A_a - 8.7) & \text{para } A_a > 50 \end{cases}$$

5. Hallar el menor valor posible de  $N$  (impar) que satisfaga la siguiente relación:

$$N \geq \frac{\omega_s D}{B_t} + 1 \quad \text{donde} \quad D = \begin{cases} 0.9222 & \text{para } A_a \leq 21 \\ \frac{A_a - 7.95}{14.36} & \text{para } A_a > 21 \end{cases}$$

6. Con los valores de  $N$  y  $\alpha$  hallar  $w_k(n)$

7. Finalmente formar:

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} H_w(z) \quad \text{donde} \quad H_w(z) = Z[w_k(n)h(nT)]$$

## EJEMPLO

## Datos

$$\omega_p := 1.5 \quad \omega_a := 2.5 \quad A_p := 0.1 \text{ dB} \quad A_a := 40 \text{ dB} \quad \omega_s := 10$$

$$\omega_c := \frac{\omega_p + \omega_a}{2} \quad \omega_c = 2 \quad T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_s}$$

$$\delta_1 := 10^{-\frac{A_a}{20}} \quad \delta_1 = 1 \cdot 10^{-2}$$

$$\delta_2 := \frac{10^{\frac{A_p}{20}} - 1}{10^{\frac{A_p}{20}} + 1} \quad \delta_2 = 5.7564 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta := \text{if}(\delta_1 > \delta_2, \delta_2, \delta_1) \quad \delta = 5.7564 \cdot 10^{-3}$$

$$A_a := -20 \cdot \log(\delta) \quad A_a = 44.797$$

$$\alpha_1 := 0.5842 \cdot (A_a - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (A_a - 21)$$

$$\alpha := \text{if}[A_a \leq 21, 0, \text{if}[A_a > 50, 0.1102 \cdot (A_a - 8.7), \alpha_1]]$$

$$\alpha = 3.952$$

$$B_t := \omega_a - \omega_p$$

$$D := \text{if}\left(A_a \leq 21, 0.9222, \frac{A_a - 7.95}{14.36}\right) \quad D = 2.566$$

$$N := \text{ceil}\left(\frac{\omega_s \cdot D}{B_t} + 1\right) \quad N := \text{if}(\text{mod}(N, 2) > 0, N, N + 1)$$

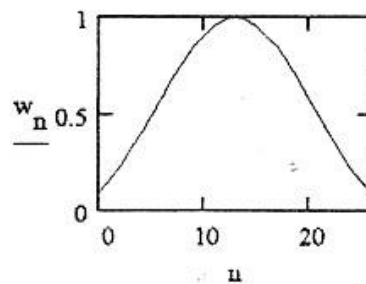
$$N = 27$$

$$k := 1..30$$

$$n := 0..N-1$$

$$w_n = \frac{1 + \sum_k \left[ \frac{1}{k!} \left[ \frac{\alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot \left( n - \frac{N-1}{2} \right)^2}{N-1}}}{2} \right]^k \right]^2}{1 + \sum_k \left[ \frac{1}{k!} \cdot \left( \frac{\alpha}{2} \right)^k \right]^2}$$

$$\text{Kaiser } \alpha = 3.952 \quad N = 27$$



$$h_{d_n} := \text{if} \left[ n = \frac{N-1}{2}, 2 \cdot \frac{\omega_c}{\omega_s}, \frac{1}{\left[ \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \cdot \pi \right]} \cdot \sin \left[ \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \cdot \omega_c \cdot T \right] \right]$$

$$h_n := h_{d_n} \cdot w_n$$

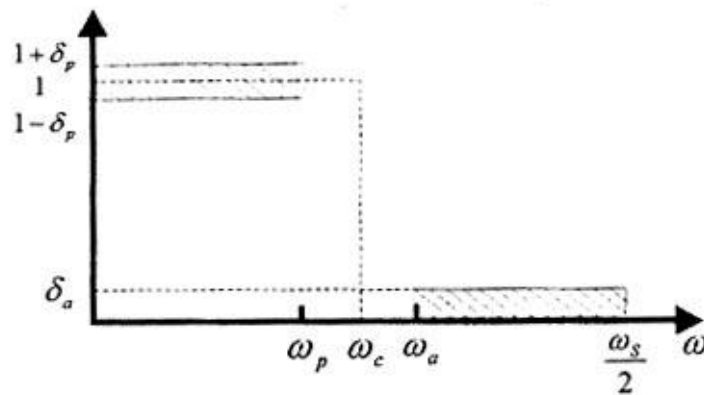
$$h_n := h_{d_n} \cdot w_n$$

WRITEPRN (f\_name) := h<sub>n</sub>

$w_n$	$h_{d_n}$	$h_n$
0.092	-0.014	-0.001
0.154	0.016	0.002
0.227	0.028	0.006
0.309	0	0
0.399	-0.034	-0.013
0.494	-0.023	-0.012
0.59	0.027	0.016
0.684	0.05	0.035
0.771	0	0
0.848	-0.076	-0.064
0.912	-0.062	-0.057
0.96	0.094	0.09
0.99	0.303	0.3
1	0.4	0.4
0.99	0.303	0.3
0.96	0.094	0.09
0.912	-0.062	-0.057
0.848	-0.076	-0.064
0.771	0	0
0.684	0.05	0.035
0.59	0.027	0.016
0.494	-0.023	-0.012
0.399	-0.034	-0.013
0.309	0	0
0.227	0.028	0.006
0.154	0.016	0.002
0.092	-0.014	-0.001

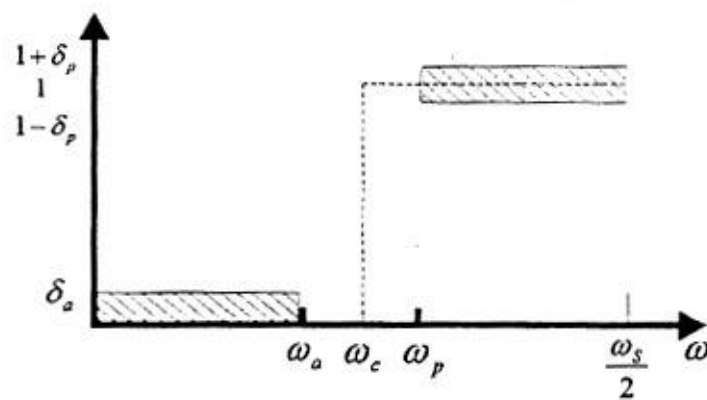
## Ecuaciones generales de diseño

Pasabajos



$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} \sin(n\omega_c T) & n \neq 0 \\ \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = 0 \end{cases}$$

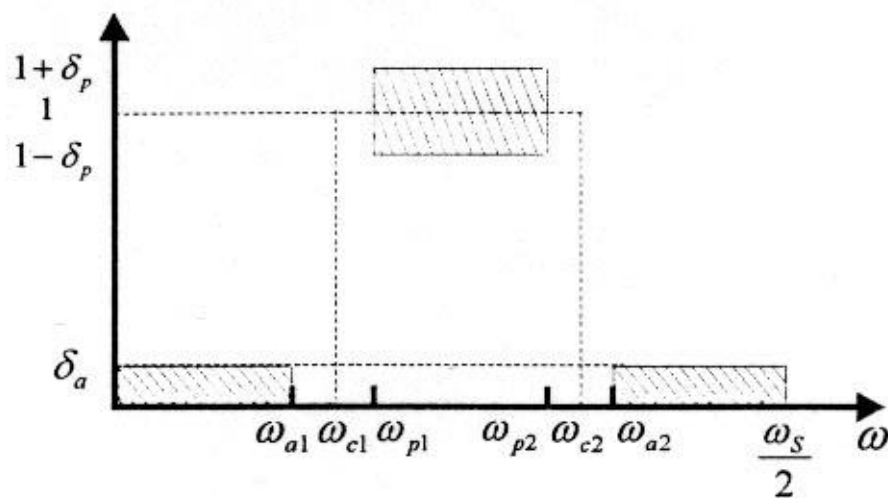
Pasa altos



$$h(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n\pi} \sin(n\omega_c T) & n \neq 0 \\ 1 - \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = 0 \end{cases}$$



## Pasa banda



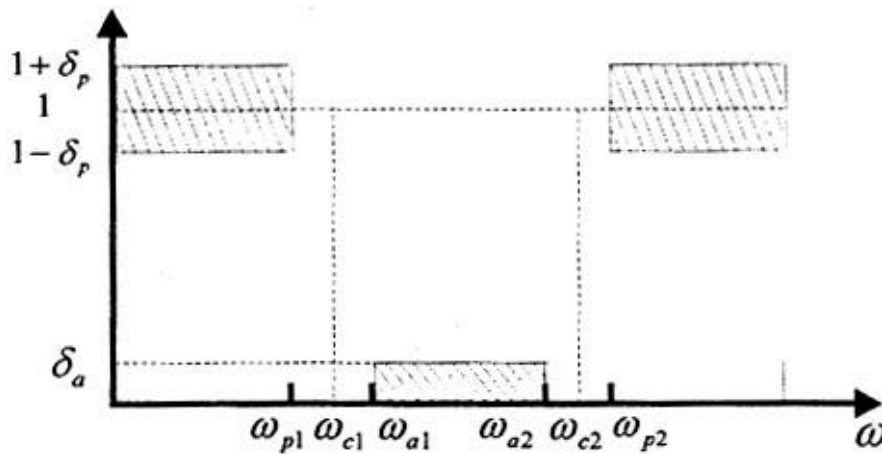
$$h(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n\pi} [\sin(n\omega_{c2}T) - \sin(n\omega_{c1}T)] & n \neq 0 \\ \frac{2}{\omega_s} (\omega_{c2} - \omega_{c1}) & n = 0 \end{cases}$$

Hallamos  $B_{t1} = \omega_{p1} - \omega_{a1}$  y  $B_{t2} = \omega_{a2} - \omega_{p2}$

Tomamos la banda más angosta  $B_{t1} = \min(B_{t1}, B_{t2})$

Con este valor hallamos  $\omega_{c1} = \omega_{p1} - \frac{B_{t1}}{2}$  y  $\omega_{c2} = \omega_{p2} + \frac{B_{t1}}{2}$

## Rechazabanda



$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} [\text{sen}(n\omega_{c1}T) - \text{sen}(n\omega_{c2}T)] & n \neq 0 \\ \frac{2}{\omega_s} (\omega_{c1} - \omega_{c2}) + 1 & n = 0 \end{cases}$$

Hallamos  $B_{t1} = \omega_{a1} - \omega_{p1}$  y  $B_{t2} = \omega_{p2} - \omega_{a2}$

Tomamos la banda más angosta  $B_{t1} = \min(B_{t1}, B_{t2})$

Con este valor hallamos  $\omega_{c1} = \omega_{p1} + \frac{B_{t1}}{2}$  y  $\omega_{c2} = \omega_{p2} - \frac{B_{t2}}{2}$

### Calculo de los coeficientes para un FIR usando la ventana de Kaiser

hold off  
clear

Datos

fs=44100; fp=4000; fa=5000; Ap=0.1 Aa=40

Fp=fp;

#### Calculo de alfa y N

```
deltaa=10^(-.05*Aa);
deltap=(10^(.05*Ap)-1)/(10^(.05*Ap)+1);
delta=min([deltaa,deltap]);
Aa=-20*log10(delta); %Nuevo Aa
```

```
if Aa<= 21
    alfa=0
else if Aa<=50
    alfa=.5842*(Aa-21)^0.4+0.07886*(Aa-21)
else
    alfa=.1102*(Aa-8.7)
end
end
```

```
if Aa<= 21
    D=.9222;
else
    D=(Aa-7.95)/14.36;
end
```

```
N=fs*D/(fa-fp)+1;
N=ceil(N);
```

```
if(N/2-fix(N/2)==0)
    N=N+1;
end
```

#### Calculo de h(n)

```
fp=fp/fs; %Normalizamos respecto de fs
fa=fa/fs;
fc=(fp+fa)/2;
```

```
n=1:(N-1)/2;
h(n)=2*fc*(sin(2*pi*fc*n)/(2*pi*fc*n)); % Genero h(n)
```

```
h=[ h((N-1)/2):-1:1) 2*fc h]; % h(n) Causal
h=h.*kai(N,alfa); % h(n) W_d(n) Multiplico por la ventana de Kaiser
```

```
gain = abs(polyval(h,1)); %Ajuste de la ganancia en continua (S=1) => Z=1
h = h/gain;
```

gain

### Representación grafica de la respuesta en frecuencia

```

W=linspace(0,pi,1000); %Genera un vector de 1000 puntos e
a=1; %h es el denominador, a el numerador (a=1 en un FIR)
[H,W]=freqz(h,a,W); %Calculo el vector H(ejw)
F=(W/(2*pi))*fs; %cambio de escala en el eje x de manera que Ws=1
modulo=abs(H); %Calculo del modulo
fase=angle(H); %Calculo de la fase

```

#### **MODULO**

##### **Bandas pasante y atenuada**

```

v=[0,.5*fs,-80,10]; %Escala del grafico
axis(v);
plot(F,20*log10(modulo)); %Grafico Modulo
grid %Grilla
pause

```

##### **Banda pasante (en detalle)**

```

v=[0,Fp,-1,1]; %Escala del grafico
axis(v);
plot(F,20*log10(modulo)); %Grafico Modulo
grid %Grilla
pause

```

```

%Fase %Escala del grafico
v=[0,.5*fs,-pi,pi];
axis(v);
plot(F,fase) %Grafico Fase
grid %Grilla
pause

```

##### **Salvo coeficientes de h(n) en disco**

```

h=h';
save h.dat h /ascii

```

##### **Genero coeficientes para el dsp**

```

!genfir

```

## 2. Diseño de filtros por el método MiniMax

El diseño de filtros FIR con fase lineal se puede encarar como un problema de aproximación de Chebyshev. Se pueden establecer las condiciones para las cuales el filtro resulta óptimo. Por óptimo se entiende que el error sobre todo el intervalo que se esta aproximando es mínimo. Existen varias técnicas para encontrar los coeficientes de estos filtros óptimos (mínimax). La más popular y ampliamente usada es la propuesta por Parks - McCellan. El término minimax se usa en el sentido que se busca minimizar el error máximo en la banda de interés.

Habíamos visto que la respuesta en frecuencia para los cuatro tipos de filtros FIR de fase lineal estaba dado por:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{-j\omega(\frac{1\pi}{2})L} H^*(e^{j\omega})$$

Con  $L=0$  (Simétrico)  $L=1$  (Antisimétrico) ( $N$  par o impar)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(\omega n) \quad \text{Tipo 1}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos(\omega(n - \frac{1}{2})) \quad \text{Tipo 2}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sen(\omega n) \quad \text{Tipo 3}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} d(n) \sen(\omega(n - \frac{1}{2})) \quad \text{Tipo 4}$$

## Diseño de FIR

Podemos expresar las expresiones anteriores como el producto de dos funciones P y Q. La función Q tiene una dependencia fija en  $w$ , mientras que P es una combinación lineal de cosenos.

Tipo	$Q(w)$	$P(w)$
Tipo1	1	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{a}(n) \cos(\omega n)$
Tipo2	$\cos(\frac{\omega}{2})$	$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{b}(n) \cos(\omega n)$
Tipo3	$\sin(\omega)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{a}(n) \cos(\omega n)$
Tipo4	$\sin(\frac{\omega}{2})$	$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{b}(n) \cos(\omega n)$

Recordar que para los tipos 2 a 4  $Q(w)$  esta restringido a valer cero en  $w=0$  y/o  $w=\pi$ .

Para poner en evidencia como se puede formular el diseño de los filtros FIR de fase lineal como una aproximación de Chebycheff vamos a definir a  $D(w)$  como la respuesta deseada del filtro, a  $W(w)$  como una función que pondera el error de la aproximación y a  $E(w)$  como el error de dicha aproximación.

$$E(w) = W(w)[D(w) - H^*(w)]$$

Si ponemos a  $H^*(w) = P(w)Q(w)$

$$E(w) = W(w)[D(w) - P(w)Q(w)]$$

Dado que Q es una función cuya dependencia de  $w$  es fija (sus coeficientes son constantes), podemos sacar Q como factor común:

$$E(w) = W(w)Q(w)[D(w)/Q(w) - P(w)]$$

Si llamamos a  $D^*=D/Q$  y a  $W^*=W/Q$ . Entonces tenemos que :

$$E=W^* [D^* - P]$$

La aproximación de Chebycheff puede ser ahora reformulada de la siguiente manera: Encontrar los coeficientes  $\{a\sim, b\sim, c\sim, d\sim\}$  que minimicen el valor absoluto máximo del error en toda la banda en la que se realiza la aproximación.

$$\|E\| = \min [\max |E|]$$

### Teorema de alternancia

Un teorema relacionado con este tipo de aproximaciones es el teorema de alternancia. Este teorema establece lo siguiente:

Dado un polinomio  $P(w)$  como la combinación lineal de  $r$  funciones coseno

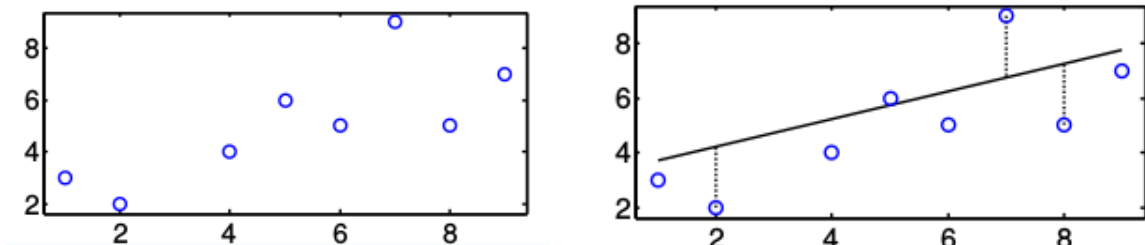
$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n)$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que la aproximación de  $D(w)$  por  $P(w)$  (siendo este último único y óptimo en el sentido Chebycheff) es que la función error  $E(w)$  tenga por lo menos  $r+1$  extremos en el intervalo  $(0, \pi)$  y que sean alternados.

En otras palabras debe haber por lo menos  $r+1$  puntos  $w_i$  en el intervalo  $(0, \pi)$  tal que  $w_1 < w_2 < \dots < w_r < w_{r+1}$  y  $E(w_i) = -E(w_{i+1})$   $i=1 \dots r$  y tal que:

$$|E(\omega_i)| = \max [E(\omega)] \quad \omega \in (0, \pi)$$

Ejemplo: Ajustamos un conjunto de puntos por una recta.



El error toma un valor máximo (extrema) en 2 y es negativo. El siguiente extremo (en 7) debe ser positivo (de lo contrario puedo correr la recta hacia abajo para bajar el error). El siguiente extremo (en 8) debe ser de signo opuesto al anterior de lo contrario basta con rotar la recta para bajar el error.

Basado en este teorema existen varias soluciones posibles al problema, entre ellas las más conocidas son debidas a:

Herrman – Shuessler que resuelven el problema como un sistema no lineal de ecuaciones.

Hostetter-Oppenheim-Siegel que usan un polinomio de interpolación  $H(w)$  cuyas extremos son fijadas de antemano.

Parks-McCellan : Acá se utiliza el algoritmo de intercambio de REMEZ para encontrar los valores de las extremas.

Dado que este último algoritmo es el más usado, vamos a ver como se formula y usa.



## Algoritmo de REMEZ (Parks – McClellan)

El algoritmo se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Se especifica  $D(w)$ ,  $W(w)$  y  $N$
2. Se construye  $D^*(w)$  y  $W^*(w)$ .
3. Se resuelve el problema usando el algoritmo de REMEZ

Se parte de  $r+1$  frecuencias donde ocurren las frecuencias extremas, en donde el error será  $\delta$  con signos alternados. Con estos valores iniciales se construye la siguiente ecuación:

$$E(w_k) = W^*(w)[D^*(w) - P(w)] = (-1)^k \delta \quad k=0,1,\dots,r$$

$$P(w) + [(-1)^k \delta] / W^*(w) = D^*(w) \quad P(w) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n)$$

Expresando esta última ecuación en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \cos(2\omega_0) & \cdots & \cos((r-1)\omega_0) & \frac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos(\omega_1) & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \cos(\omega_r) & & & & \frac{(-1)^r}{\hat{W}(\omega_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(r-1) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}(\omega_0) \\ \hat{D}(\omega_1) \\ \vdots \\ \hat{D}(\omega_r) \end{bmatrix}$$

A partir de este sistema se obtiene  $\delta$  y evaluamos  $|E(\omega)|$  usando  $P(w)$ .

Si  $|E(\omega)| \leq \delta$  para **todo**  $w$  entonces la solución fue encontrada.

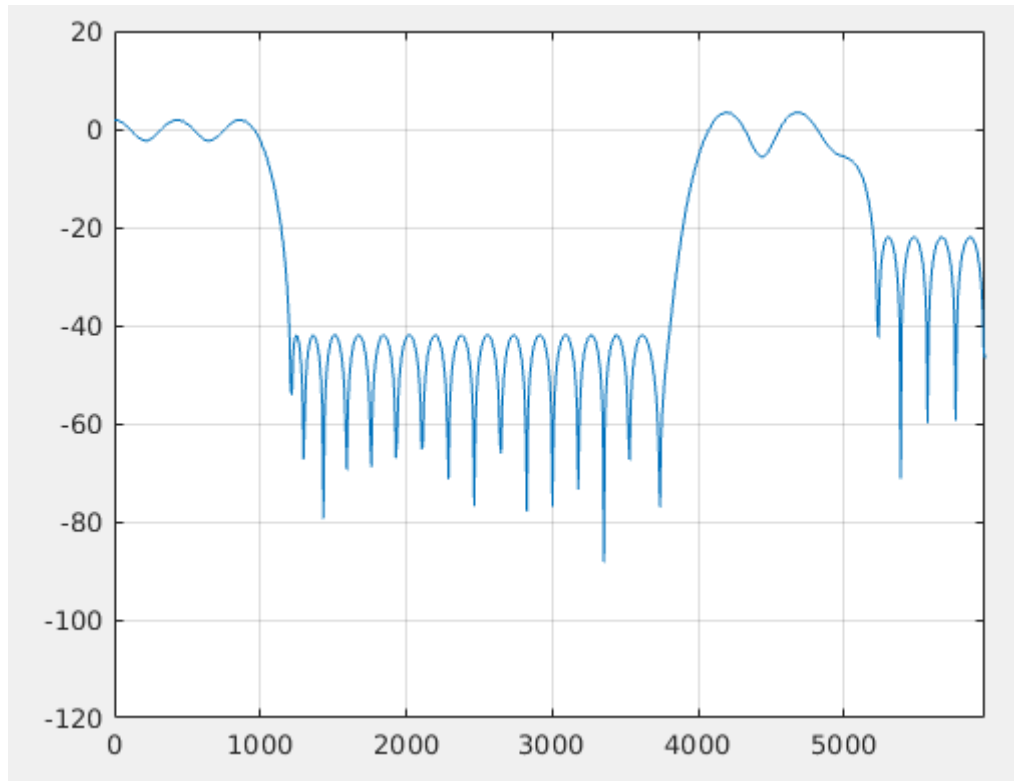
Mientras que si  $|E(\omega)| > \delta$  en por lo menos alguna de las frecuencias entonces se busca un nuevo conjunto de  $r+1$  frecuencias como candidatas.

Los nuevos valores se eligen como los valores picos de la curva de error resultante. Esto hace que  $\delta$  se incremente hasta converger hacia un valor máximo que es justamente el buscado.

## Diseño de FIR

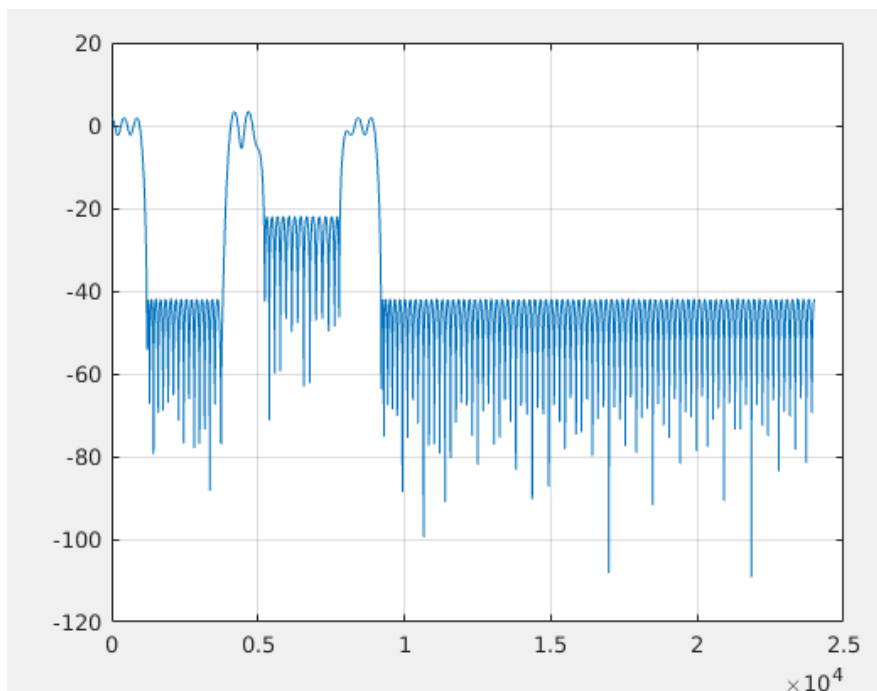
### %Especificaciones

```
fs=48000;
F=[1000 1200 3800 4000 5000 5200 7800 8000 9000 9200 ]; % Band edges
A=[1 0 1 0 1 0 ]; % Ideal Gain
W=[.3, .01, 0.6, 0.1,.3, 0.01 ]; % Weight
```



### %Design

```
[n,fo,mo,w] = firpmord(F,A,W,fs) %Calcula el orden minimo necesario
h = firpm(n+1,fo,mo,w); %Calcula h(n)
```



### 3. Muestreo en frecuencia

Sabemos que un filtro FIR queda totalmente definido si conocemos su respuesta al impulso  $h(n)$ .

Lo mismo ocurre si lo expresamos en función de la DFT de la  $h(n)$  (recordar que el desarrollo en serie de Fourier de la  $H(e^{j\omega T})$  de un FIR tiene por coeficientes a  $h(n)$ ). Así la DFT de la  $h(n)$  estará dada por:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad \text{DFT de } h(n)$$

Por otro lado la IDFT de los  $H(k)$  estará dada por:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad \text{IDFT de } H(k)$$

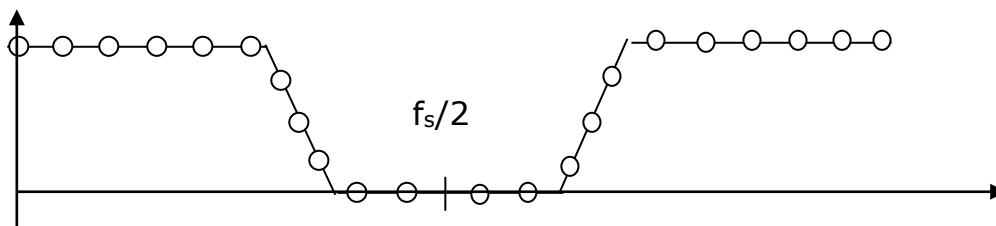
Teniendo en cuenta que:

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}}$$

De esta última expresión queda claro que los  $H(k)$  surgen de muestrear a la  $H(z)$  sobre el círculo unitario y por lo tanto representan muestras de la respuesta en frecuencia del filtro. Estas  $N$  muestras se distribuyen a intervalos iguales sobre el círculo.

Se deduce entonces que podemos diseñar el filtro a partir de estas muestras en frecuencia.

Por ejemplo supongamos que tenemos la siguiente respuesta en frecuencia es la de un pasabajos como el de la figura:



La respuesta en frecuencia del filtro obtenido mediante la IDFT tendrá un error nulo donde están las muestras y un valor finito entre ellas.

Para encontrar la función que interpola entre muestras debemos evaluar la  $H(z)$  obtenida a partir de las muestras sobre el círculo unitario

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

Reemplazando  $h(n)$  por la IDFT de las muestras en frecuencia tenemos:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \right] z^{-n}$$

Intercambiando las sumas tenemos:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j(\frac{2\pi}{N})k} z^{-1}]^n$$

La segunda es una suma geométrica y por lo tanto

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \frac{1 - e^{j2\pi k} z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} \quad \text{pues } e^{j2\pi k} = 1$$

Si evaluamos a esta última expresión en  $|z|=1$  tenemos que :

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T \frac{N-1}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) S(\omega, k)$$

Donde:

$$S(\omega, k) = \pm e^{-j\frac{\pi}{N}k} \frac{\text{sen}[N(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})]}{\text{sen}[(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})]}$$

Es decir que la respuesta en frecuencia del filtro es una combinación lineal de las funciones de interpolación  $S(\omega, k)$ . La forma de esta función es similar a la *sinc*.

Cuando se diseña un filtro pasabajos parte de las muestras estarán en la banda de paso, otras en la de transición y el resto en la banda atenuada.

## Diseño de FIR

Si la plantilla es ideal no hay banda de transición y por lo tanto sólo hay muestras en las demás bandas. En este último caso, el valor del ripple cerca de la transición es alto, debido al fenómeno de Gibbs.

Si se quiere reducir dicho error debemos permitir la existencia de una banda de transición. La cuestión es como ubicar las muestras que caen en dicha banda.

Una posibilidad sería ponerlas sobre una recta entre la banda atenuada y la de paso, pero eso no garantiza que el error obtenido sea el menor posible para un N dado. Para comprender como la existencia de una banda de transición no ideal puede reducir el error es la siguiente:

Los lóbulos laterales de las funciones  $S(\omega, k)$  que acompañan a cada muestra de la banda transición compensan a los lóbulos de las muestras que están fuera esta banda (y que son las responsables del alto error cerca de la banda de transición). La cuestión es que deberíamos encontrar cual debería ser la ubicación óptima de las muestras de la banda de transición para que el error sea mínimo, es decir una solución óptima. Para lograr esto se pueden plantear ecuaciones que relacionen la posición de las muestras en dicha banda con el error. Para la resolución de estas ecuaciones se emplean métodos de programación lineal. Los resultados numéricos de este planteo figuran en tablas (ver anexo al final).

## Diseño

Para proceder al diseño de filtro partimos de  $H_d(j\omega)$  que es la respuesta en frecuencia deseada. Esta función tendrá la siguiente forma general:

$$H_d(j\omega_k) = \sum_{n=0}^P h(n) a_{nk}$$

$\omega_k$  son las frecuencias donde se muestrea  $H_d(j\omega)$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}(k + \alpha) \quad k = 0 \dots P \quad y \quad \alpha = 0, 1/2$$

Los  $a_{nk}$  dependerán de con que tipo de filtro (Tipo 1 – 4) queramos realizar la síntesis. Asumir que  $P=(N-1)/2$  si N es impar y  $P=N/2-1$  si N es par.

Por ejemplo para **N par y simétrico (Tipo2)** tenemos que:

$$a_{nk} = 2 \cos(\omega_k T [\frac{N-1}{2} - n]) \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{NT}$$

Una vez conocidos los  $a_{nk}$  y  $H_d(j\omega_k)$  despejamos los  $h(n)$  de la siguiente ecuación:

$$H_d(j\omega_k) = \sum_{n=0}^P h(n) a_{nk}$$

O en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H_d(j\omega_0) \\ H_d(j\omega_1) \\ \vdots \\ H_d(j\omega_P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0P} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1P} \\ \vdots & & & \\ a_{P0} & a_{P1} & \cdots & a_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(P) \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = \bar{A} * \bar{h}$$

Ejemplo numérico:

Se desea diseñar un filtro pasabajos Tipo 2  $N=4$  tal que la ganancia para  $\omega=0$  sea 1 y para  $\omega=\pi/2$  sea  $1/2$ .

$$H_d(0) = 1 \quad H_d(\pi/2) = 1/2 \quad N = 4 \quad T = 1$$

Para un filtro Tipo 2 los coeficientes  $a_{nk}$  son:

$$a_{nk} = 2 \cos(\omega_k T [\frac{N-1}{2} - n]) \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{NT}$$

$$a_{00} = 2 \cos(0) = 2 \quad a_{01} = 2 \cos(\frac{\pi}{2} \frac{3}{2}) = -\sqrt{2}$$

$$a_{10} = 2 \cos(0) = 2 \quad a_{11} = 2 \cos(\frac{\pi}{2} (\frac{3}{2} - 1)) = \sqrt{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \end{bmatrix}$$

Como se trata de un filtro de fase lineal de orden par, la respuesta impulsiva debe ser simétrica respecto de  $(N-1)/2=1.5$ , es decir que:

$h(0)=h(3)=0.07322$  y  $h(1)=h(2)=0.42677$  y por lo tanto:

$$h(n) = [h(0), h(1), h(1), h(0)]$$

**Ejercicio:** Encontrar la respuesta impulsiva de los siguientes filtros y graficar la respuesta en frecuencia :

- a)  $N=15$   $H_d=1$  para  $k=0,1,2,3$   $H_d=0$  para  $k=4,5,6,7$   
(banda de transición ideal)
- b) En el caso (a) tomar la muestra  $T_4=0.4$  ( $k=4$ ) (óptimo con banda de transición real)

Nota: Para  $N$  impar los  $a_{nk}$  son iguales que para el caso par excepto para  $n=(N-1)/2$  donde  $a_{nk}=1$ .

---

## **ANEXOS**

### **Anexo 1:**

#### **Tablas de diseño para FIR en muestreo en frecuencia**

(ver anexo 3 para entender su generación)

#### *Referencias*

- 1)  $M$  es la longitud del filtro FIR
- 2) las frecuencias equiespaciadas responden a la nomenclatura:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M} (k + \alpha)$$

$M$ impar:	$k = 0, 1, \dots, (M-1)/2$
$M$ par:	$k = 0, 1, \dots, M/2$

- 3)  $BW$  es la cantidad de muestras que corresponden a la banda de paso del filtro
- 4) Minimax: Amplitud relativa en dB del máximo lóbulo secundario
- 5)  $T_1, T_2$ : Amplitud relativa de los coeficientes de la banda de transición buscados respecto a la ganancia en la banda pasante.

### Banda de transición con 1 muestra, $\alpha=0$

**TABLE C.1** Transition Coefficients for  $\alpha = 0$ 

<i>M</i> Odd			<i>M</i> Even		
BW	Minimax	$T_1$	BW	Minimax	$T_1$
<i>M</i> = 15			<i>M</i> = 16		
1	-42.30932283	0.43378296	1	-39.75363827	0.42631836
2	-41.26299286	0.41793823	2	-37.61346340	0.40397949
3	-41.25333786	0.41047636	3	-36.57721567	0.39454346
4	-41.94907713	0.40405884	4	-35.87249756	0.38916626
5	-44.37124538	0.39268189	5	-35.31695461	0.38840332
6	-56.01416588	0.35766525	6	-35.51951933	0.40155639
<i>M</i> = 33			<i>M</i> = 32		
1	-43.03163004	0.42994995	1	-42.24728918	0.42856445
2	-42.42527962	0.41042481	2	-41.29370594	0.40773926
3	-42.40898275	0.40141601	3	-41.03810358	0.39662476
4	-42.45948601	0.39641724	4	-40.93496323	0.38925171
6	-42.52403450	0.39161377	6	-40.85183477	0.37897949
8	-42.44085121	0.39039917	8	-40.75032616	0.36990356
10	-42.11079407	0.39192505	10	-40.54562140	0.35928955
12	-41.92705250	0.39420166	12	-39.93450451	0.34487915
14	-44.69430351	0.38552246	14	-38.91993237	0.34407349
15	-56.18293285	0.35360718			
<i>M</i> = 65			<i>M</i> = 64		
1	-43.16935968	0.42919312	1	-42.96059322	0.42882080
2	-42.61945581	0.40903320	2	-42.30815172	0.40830689
3	-42.70906305	0.39920654	3	-42.32423735	0.39807129
4	-42.86997318	0.39335937	4	-42.43565893	0.39177246
5	-43.01999664	0.38950806	5	-42.55461407	0.38742065
6	-43.14578819	0.38679809	6	-42.66526604	0.38416748
10	-43.44808340	0.38129272	10	-43.01104736	0.37609863
14	-43.54684496	0.37946167	14	-43.28309965	0.37089233
18	-43.48173618	0.37955322	18	-43.56508827	0.36605225
22	-43.19538212	0.38162842	22	-43.96245098	0.35977783
26	-42.44725609	0.38746948	26	-44.60516977	0.34813232
30	-44.76228619	0.38417358	30	-43.81448936	0.29973144
31	-59.21673775	0.35282745			
<i>M</i> = 125			<i>M</i> = 128		
1	-43.20501566	0.42899170	1	-43.15302420	0.42889404
2	-42.66971111	0.40867310	2	-42.59092569	0.40847778
3	-42.77438974	0.39868774	3	-42.67634487	0.39838257
4	-42.95051050	0.39268189	4	-42.84038544	0.39226685
6	-43.25854683	0.38579101	5	-42.99805641	0.38812256
8	-43.47917461	0.38195801	7	-43.25537014	0.38281250
10	-43.63750410	0.37954102	10	-43.52547789	0.3782638
18	-43.95589399	0.37518311	18	-43.93180990	0.37251587
26	-44.05913115	0.37384033	26	-44.18097305	0.36941528
34	-44.05672455	0.37371826	34	-44.40153408	0.36686401
42	-43.94708776	0.37470093	42	-44.67161417	0.36394653
50	-43.58473492	0.37797851	50	-45.17186594	0.35902100
58	-42.14925432	0.39086304	58	-46.92415667	0.34273681
59	-42.60623264	0.39063110	62	-49.46298973	0.28751221
60	-44.78062010	0.38383713			
61	-56.22547865	0.35263062			



**Banda de transición con 2 muestras,  $\alpha=0$** 
**TABLE C.2** Transition Coefficients for  $\alpha = 0$ 

<i>M</i> Odd				<i>M</i> Even			
BW	Minimax	$T_1$	$T_2$	BW	Minimax	$T_1$	$T_2$
<i>M</i> = 15				<i>M</i> = 16			
1	-70.60540585	0.09500122	0.58995418	1	-65.27693653	0.10703125	0.60559357
2	-69.26168156	0.10319824	0.59357118	2	-62.85937929	0.12384644	0.62201631
3	-69.91973495	0.10083618	0.58594327	3	-62.96594906	0.12827148	0.62855407
4	-75.51172256	0.08407953	0.55715312	4	-66.03942485	0.12130127	0.61952704
5	-103.46078300	0.05180206	0.49917424	5	-71.73997498	0.11066284	0.60979204
<i>M</i> = 33				<i>M</i> = 32			
1	-70.60967541	0.09497070	0.58985167	1	-67.37020397	0.09610596	0.59045212
2	-68.16726971	0.10585937	0.59743846	2	-63.93104696	0.11263428	0.60560235
3	-67.13149548	0.10937500	0.59911696	3	-62.49787903	0.11931763	0.61192546
5	-66.53917217	0.10965576	0.59674101	5	-61.28204536	0.12541504	0.61824023
7	-67.23387909	0.10902100	0.59417456	7	-60.82049131	0.12907715	0.62307031
9	-67.85412312	0.10502930	0.58771575	9	-59.74928167	0.12068481	0.60685586
11	-69.08597469	0.10219727	0.58216391	11	-62.48683357	0.13004150	0.62821502
13	-75.86953640	0.08137207	0.54712777	13	-70.64571857	0.11017914	0.60670943
14	-104.04059029	0.05029373	0.49149549				
<i>M</i> = 65				<i>M</i> = 64			
1	-70.66014957	0.09472656	0.58945943	1	-70.26372528	0.09376831	0.58789222
2	-68.89622307	0.10404663	0.59476127	2	-67.20729542	0.10411987	0.59421778
3	-67.90234470	0.10720215	0.59577449	3	-65.80684280	0.10850220	0.59666158
4	-67.24003792	0.10726929	0.59415763	4	-64.95227051	0.11038818	0.59730067
5	-66.86065960	0.10689087	0.59253047	5	-64.42742348	0.11113281	0.59698496
9	-66.27561188	0.10548706	0.58845983	9	-63.41714096	0.10936890	0.59088884
13	-65.96417046	0.10466309	0.58660485	13	-62.72142410	0.10828857	0.58738641
17	-66.16404629	0.10649414	0.58862042	17	-62.37051868	0.11031494	0.58968142
21	-66.76456833	0.10701904	0.58894575	21	-62.04848146	0.11254273	0.59249461
25	-68.13407993	0.10327148	0.58320831	25	-61.88074064	0.11994629	0.60564501
29	-75.98313046	0.08069458	0.54500379	29	-70.05681992	0.10717773	0.59842159
30	-104.92083740	0.04978485	0.48965181				
<i>M</i> = 125				<i>M</i> = 128			
1	-70.68010235	0.09464722	0.58933268	1	-70.58992958	0.09445190	0.58900996
2	-68.94157696	0.10390015	0.59450024	2	-68.62421608	0.10349731	0.59379058
3	-68.19352627	0.10682373	0.59508549	3	-67.66701698	0.10701294	0.59506081
5	-67.34261131	0.10668945	0.59187505	4	-66.95196629	0.10685425	0.59298926
7	-67.09767151	0.10587158	0.59821869	6	-66.32718945	0.10596924	0.58953845
9	-67.05801296	0.10523682	0.58738706	9	-66.01315498	0.10471191	0.58593906
17	-67.17504501	0.10372925	0.58358265	17	-65.89422417	0.10288086	0.58097354
25	-67.22918987	0.10316772	0.58224835	25	-65.92644215	0.10182495	0.57812308
33	-67.11609936	0.10303955	0.58198956	33	-65.95577812	0.10096436	0.57576437
41	-66.71271324	0.10313721	0.58245499	41	-65.97698021	0.10094604	0.57451694
49	-66.62364197	0.10561523	0.58629534	49	-65.67919827	0.09865112	0.56927420
57	-69.28378487	0.10061646	0.57812192	57	-64.61514568	0.09845581	0.56604486
58	-70.35782337	0.09663696	0.57121235	61	-71.76589394	0.10496826	0.59452277
59	-75.94700718	0.08054886	0.54451285				
60	-104.09012318	0.04991760	0.48963264				

**Banda de transición con 1 muestra,  $\alpha=1/2$** **TABLE C.3** Transition Coefficients for  $\alpha = \frac{1}{2}$ 

BW	Minimax	$T_1$
$M = 16$		
1	-51.60668707	0.26674805
2	-47.48000240	0.32149048
3	-45.19746828	0.34810181
4	-44.32862616	0.36308594
5	-45.68347692	0.36661987
6	-56.63700199	0.34327393
$M = 32$		
1	-52.64991188	0.26073609
2	-49.39390278	0.30878296
3	-47.72596645	0.32984619
4	-46.68811989	0.34217529
6	-45.33436489	0.35704956
8	-44.30730963	0.36750488
10	-43.11168003	0.37810669
12	-42.97900438	0.38465576
14	-56.32780266	0.35030518
$M = 64$		
1	-52.90375662	0.25923462
2	-49.74046421	0.30603638
3	-48.38088989	0.32510986
4	-47.47863007	0.33595581
5	-46.88655186	0.34287720
6	-46.46230555	0.34774170
10	-45.46141434	0.35859375
14	-44.85988188	0.36470337
18	-44.34302616	0.36983643
22	-43.69835377	0.37586059
26	-42.45641375	0.38624268
30	-56.25024033	0.35200195
$M = 128$		
1	-52.96778202	0.25885620
2	-49.82771969	0.30534668
3	-48.51341629	0.32404785
4	-47.67455149	0.33443604
5	-47.11462021	0.34100952
7	-46.43420267	0.34880371
10	-45.88529110	0.35493774
18	-45.21660566	0.36182251
26	-44.87959814	0.36521607
34	-44.61497784	0.36784058
42	-44.32706451	0.37066040
50	-43.87646437	0.37500000
58	-42.30969715	0.38807373
62	-56.23294735	0.35241699

**Banda de transición con 2 muestras,  $\alpha=1/2$** 

BW	Minimax	$T_1$	$T_2$
$M = 16$			
1	-77.26126766	0.05309448	0.41784180
2	-73.81026745	0.07175293	0.49369211
3	-73.02352142	0.07862549	0.51966134
4	-77.95156193	0.07042847	0.51158076
5	-105.23953247	0.04587402	0.46967784
$M = 32$			
1	-80.49464130	0.04725342	0.40357383
2	-73.92513466	0.07094727	0.49129255
3	-72.40863037	0.08012695	0.52153983
5	-70.95047379	0.08935547	0.54805908
7	-70.22383976	0.09403687	0.56031410
9	-69.94402790	0.09628906	0.56637987
11	-70.82423878	0.09323731	0.56226952
13	-104.85642624	0.04882812	0.48479068
$M = 64$			
1	-80.80974960	0.04658203	0.40168723
2	-75.11772251	0.06759644	0.48390015
3	-72.66662025	0.07886963	0.51850058
4	-71.85610867	0.08393555	0.53379876
5	-71.34401417	0.08721924	0.54311474
9	-70.32861614	0.09371948	0.56020256
13	-69.34809303	0.09761963	0.56903714
17	-68.06440258	0.10051880	0.57543691
21	-67.99149132	0.10289307	0.58007699
25	-69.32065105	0.10068359	0.57729656
29	-105.72862339	0.04923706	0.48767025
$M = 128$			
1	-80.89347839	0.04639893	0.40117195
2	-77.22580583	0.06295776	0.47399521
3	-73.43786240	0.07648926	0.51361278
4	-71.93675232	0.08345947	0.53266251
6	-71.10850430	0.08880615	0.54769675
9	-70.53600121	0.09255371	0.55752959
17	-69.95890045	0.09628906	0.56676912
25	-69.29977322	0.09834595	0.57137301
33	-68.75139713	0.10077515	0.57594641
41	-67.89687920	0.10183716	0.57863142
49	-66.76120186	0.10264282	0.58123560
57	-69.21525860	0.10157471	0.57946395
61	-104.57432938	0.04970703	0.48900685



## Anexo 2:

### Ejemplo de diseño en MATLAB de un filtro FIR por muestreo en frecuencia

```
T=.1
fs=1/T
format long
%-----
H=[1 1/2]                                     %N=4
N=4
%-----
H=[1 1 1 1 0 0 0 0]                         %N=15
N=15
%-----
T1=0.4
N=15
H=[1 1 1 1 T1 0 0 0]                         %N=15 con T1=0.4
%-----
T1=0.3789795
H=[1 1 1 1 1 1 T1 0 0 0 0 0 0 0 0 0] %N=32 con T1=0.3789795
N=32
%-----
Fp=fs/(N/4);
H=H'
%-----
if rem(N,2)~=0                               %impar
    last=(N-1)/2;
else
    last=N/2-1;
end
%-----
% Calculo de los Ank
for k=0:last
    for n=0:last
        if ((rem(N,2)~=0) & (n==(N-1)/2))    %N impar & n=(N-1)/2
            A(k+1,n+1)=1;
        else
            A(k+1,n+1)=2*cos((2*pi*k/N)*((N-1)/2-n));
        end
    end
end
%-----
A;
h=A\H;
if ((rem(N,2)~=0) & (n==(N-1)/2))    %N impar
    h=[h;h(last:-1:1)];               %(last-1)+1=last no repito h((N-1)/2)
else
    h=[h;h(last+1:-1:1)];             %N par
end
%=====
W=linspace(0,pi,1000);                % genera un vector de 1000 puntos
a=1;

[H,W]=freqz(h,a,W);                  % calculo el vector H(ejw)
```

## Diseño de FIR

---

```
% h es el denominador, a el numerador (a=1 en un FIR)

F=(W/(2*pi))*fs; % cambio de escala en el eje x de manera que Ws=1

modulo=abs(H);
fase=angle(H);

% modulo en veces
v=[0,.5*fs,0,1];
axis(v);
plot(F,modulo);
grid
pause

% modulo en DB
v=[0,.5*fs,-80,10];
axis(v);
plot(F,20*log10(modulo));
grid
pause

% Banda pasante
v=[0,Fp,-1,1];
axis(v);
plot(F,20*log10(modulo));
grid
pause

% Fase
v=[0,Fp,-pi,pi];
axis(v);
plot(F,fase)
grid
pause

% Salvo coeficientes (h(n))
h=h';
save h.dat h /ascii

!genfir                                %Genero coeficientes para el DSP
```

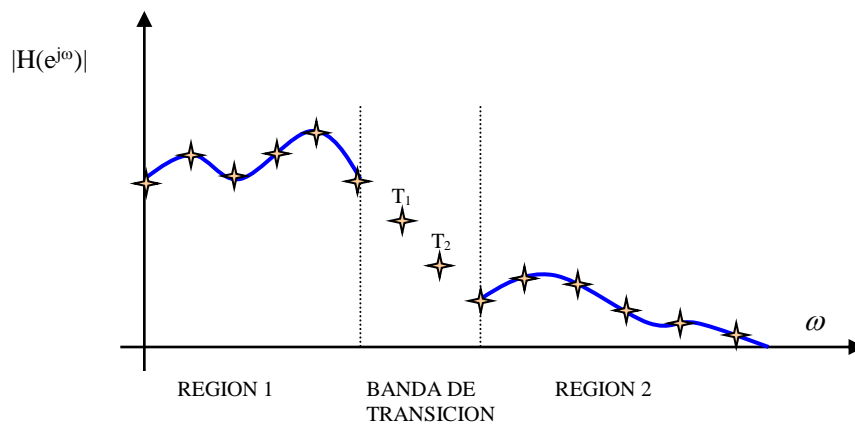
---

**Anexo 3:** Muestreo en frecuencia (desarrollo de la generación de tablas, donde se requieren conocimientos de métodos numéricos)

## Descripción de la solución por optimización

### Desarrollo para dos muestras

Para encontrar los valores óptimos de las muestras de la banda de transición (que no tienen restricciones), vamos a plantear el sistema de ecuaciones que se debe cumplir mediante un ejemplo de dos variables. Partimos de la siguiente curva, que resume las especificaciones de la respuesta en frecuencia.



La curva azul representa la respuesta en frecuencia deseada y las estrellas, las muestras. En particular  $T_1$  y  $T_2$  son las muestras a optimizar.

Queda claro que la cantidad de muestras es el doble de las graficadas, pues  $H(e^{j\omega})$  es simétrica conjugada respecto a  $\omega_s/2$  ( $\omega_s$  es la frecuencia de muestreo del filtro)

Como habíamos visto  $H(e^{j\omega})$  se puede expresar como:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega \frac{(N-1)}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{KM} H(k) S(\omega, k)$$

donde llamamos

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{KM} H(k) S(\omega, k)$$

y  $KM+1$  representan la cantidad de muestras a especificar

En nuestro caso podemos expresar

$$H^*(e^{j\omega}) = B(\omega) + T_1 A_1(\omega) + T_2 A_2(\omega)$$

## Diseño de FIR

Donde  $B(\omega)$  representa la contribución de las muestras fijas y  $A_i(\omega)$ , las contribuciones de las muestras desconocidas.

Para el planteo del problema escribiremos las restricciones que aplican típicamente en el diseño de filtros:

- F<sub>1</sub>**
- a)  $|H^*(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})| \leq \varepsilon$  para  $\omega$  en la región 1
- b) Minimizar  $\{T_1, T_2\}$  el máximo de  $|H^*(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|$  para  $\omega$  en la región 2

Entonces el sistema a resolver se reduce a:

**F<sub>2</sub>**

$$\left. \begin{array}{l} T_1 A_1(\omega_m) + T_2 A_2(\omega_m) \leq \varepsilon - B(\omega_m) + H(e^{j\omega_m}) \\ -T_1 A_1(\omega_m) - T_2 A_2(\omega_m) \leq \varepsilon + B(\omega_m) - H(e^{j\omega_m}) \end{array} \right\} \text{ para } \omega \text{ en la región 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_1 A_1(\omega_m) + T_2 A_2(\omega_m) - T_3 \leq -B(\omega_m) + H(e^{j\omega_m}) \\ -T_1 A_1(\omega_m) - T_2 A_2(\omega_m) - T_3 \leq B(\omega_m) - H(e^{j\omega_m}) \end{array} \right\} \text{ para } \omega \text{ en la región 2}$$

En el sistema precedente  $T_3$  representa el error máximo de la aproximación en la región 2.

## Aplicación para los filtros FIR de fase lineal Tipo I

El filtro FIR cuya  $h(n)$  sea causal, de  $N$  muestras, donde  $N$  es un número natural impar, y simétrica respecto a  $(N-1)/2$ , se conoce como Tipo I. Tiene la particularidad de proveer fase lineal y permite implementar transferencias de filtros pasabajos, pasaaltos, pasabanda y rechazabanda. Por su versatilidad, será entonces el tipo de FIR elegido.

Teniendo en cuenta estas propiedades, la expresión de  $H(e^{j\omega})$  que habíamos obtenido en la fórmula (A) del apéndice 1 se puede llevar a la forma: (ver desarrollo en apéndice 3)

**F<sub>3</sub>**

$$H^*(e^{j\omega}) = \frac{H_0}{N} \frac{\text{sen}(\omega N/2)}{\text{sen}(\omega/2)} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{|H(k)|}{N} \left[ \frac{\text{sen}[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\text{sen}(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{\text{sen}[N(\omega/2 + \pi k/N)]}{\text{sen}(\omega/2 + \pi k/N)} \right]$$

## Deducción de la expresión de la Respuesta en Frecuencia

$$H(z)_{|z=e^{j\omega T}} = \frac{1 - e^{-j\omega TN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{-j\omega T} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}$$

Multiplicando numerador y denominador dentro de la sumatoria por

$$e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$$

$$H(z)_{|z=e^{j\omega T}} = \frac{1 - e^{-j\omega TN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}{e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k} - e^{-j\omega T}}$$

$$e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k} - e^{-j\omega T} = \varphi$$

$$= \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \right] - [\cos(\omega T) - j \cdot \sin(\omega T)]$$

Agrupando tenemos

$$= \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - \cos(\omega T) \right] - j \left[ \sin(\omega T) - \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \right]$$

Como

$$\cos(b) - \cos(a) = 2 \sin\left[\frac{(a+b)}{2}\right] \sin\left[\frac{(a-b)}{2}\right]$$

y

$$\sin(b) - \sin(a) = 2 \cos\left[\frac{(a+b)}{2}\right] \sin\left[\frac{(a-b)}{2}\right]$$

Tenemos

$$\varphi = 2 \cdot \sin\left[\frac{\omega T}{2} + \frac{\pi k}{N}\right] \sin\left[\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi k}{N}\right] + 2j \cdot \cos\left[\frac{\omega T}{2} + \frac{\pi k}{N}\right] \sin\left[\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]$$

Sacando factor común

$$\varphi = 2j \cdot \sin\left[\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi k}{N}\right] \left[ \cos\left[\frac{\omega T}{2} + \frac{\pi k}{N}\right] - j \cdot \sin\left[\frac{\omega T}{2} + \frac{\pi k}{N}\right] \right]$$

$$\varphi = 2j \cdot \sin\left[\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi k}{N}\right] e^{-j\left(\frac{\omega T}{2} + \frac{\pi k}{N}\right)}$$

$$\varphi = 2j \cdot \sin\left[\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi k}{N}\right] e^{-j\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\pi k}{N}}$$

O sea que



$$H(z)_{|z=e^{j\omega t}} = \frac{1 - e^{-j\omega TN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}{2j \cdot \text{sen}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]} e^{-j\frac{\omega t}{2}} e^{-j\frac{\pi k}{N}}$$

$$H(z)_{|z=e^{j\omega t}} = \frac{1 - e^{-j\omega TN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k}}{2j \cdot \text{sen}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]} e^{-j\frac{\omega t}{2}}$$

$$H(z)_{|z=e^{j\omega t}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} e^{+j\frac{\omega t}{2}} (1 - e^{-j\omega NT})}{2j \cdot \text{sen}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]}$$

$$\gamma = \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} (1 - e^{-j\omega NT})}{2j}$$

$$\gamma = \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{j\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega NT}}{2j}$$

Sacando factor común

$$\gamma = e^{-j\frac{\omega NT}{2}} e^{j\frac{\omega T}{2}} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} e^{j\frac{\omega NT}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}} - e^{j\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega NT} e^{j\frac{\omega NT}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j}$$

$$\gamma = e^{-j\frac{\omega NT}{2}} e^{j\frac{\omega T}{2}} \frac{e^{j\frac{\omega NT}{2}} - e^{-j\frac{\omega NT}{2}}}{2j}$$

$$\gamma = e^{-j\frac{\omega NT}{2}} e^{j\frac{\omega T}{2}} \text{sen}\left(\frac{\omega NT}{2}\right)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} e^{-j\frac{\omega NT}{2}} e^{j\frac{\omega T}{2}} \text{sen}\left(\frac{\omega NT}{2}\right)}{\text{sen}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]}$$

$$e^{-j\frac{\omega NT}{2}} e^{j\frac{\omega T}{2}} = e^{j\left(\frac{-\omega NT + \omega T}{2}\right)} = e^{j\left(\frac{\omega T(-N+1)}{2}\right)} = e^{j\omega T \frac{N-1}{2}}$$

$$H(j\omega) = \frac{e^{j\omega T \frac{(N-1)}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} \operatorname{sen}\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} \quad (A)$$

Es decir

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T \frac{N-1}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) S(\omega, k)$$

donde

$$S(\omega, k) = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} \operatorname{sen}\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$

Como

$$\operatorname{sen}(a) = \operatorname{sen}(a - 2k\pi)$$

o bien

$$\operatorname{sen}(a) = \pm \operatorname{sen}(a - k\pi)$$

$$S(\omega, k) = \pm \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} \operatorname{sen}\left(\frac{N\omega}{2} - k\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$

$$S(\omega, k) = \pm \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} \operatorname{sen}\left[N\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$

+ para  $k$  par y - para  $k$  impar

Entonces reconstruimos la respuesta reemplazando en (A)

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T \frac{(N-1)}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{e^{-j\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$

$$H(k) = |H(k)| e^{j\theta(k)} \quad k = 0, 1 \dots N-1$$

$$H(k) = |H(N-k)| \quad k = 0, 1 \dots N-1$$

N Par

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} k \frac{N-1}{2} & k = 0, 1 \dots N/2 - 1 \\ \frac{2\pi}{N} (N-k) \frac{N-1}{2} & k = \frac{N}{2} + 1 \dots N-1 \\ 0 & k = N/2 \end{cases}$$

$$H(N/2) = 0$$

N impar

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} k \frac{N-1}{2} & k = 0, 1 \dots \frac{N-1}{2} \\ \frac{2\pi}{N} (N-k) \frac{N-1}{2} & k = \frac{N}{2} + 1 \dots N-1 \end{cases}$$

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)| e^{-j\frac{2\pi}{N} k \frac{N-1}{2}} & k = 0, 1 \dots N/2 - 1 \\ 0 & k = \frac{N}{2} \\ |H(k)| e^{-j\frac{2\pi}{N} (N-k) \frac{N-1}{2}} & k = \frac{N}{2} + 1 \dots N-1 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}}}{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left[ \sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{|H(k)| (-1)^k}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} - \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \frac{|H(k)| (-1)^k}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} \right]$$

Haciendo  $l=N-k$  en la segunda suma

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}}}{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left[ \sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{|H(k)| (-1)^k}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} - \sum_{l=1}^{N/2-1} \frac{|H(N-l)| (-1)^l}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi(N-l)}{N})} \right]$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}}}{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left[ \frac{H(0)}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{N/2-1} |H(k)| (-1)^k \left( \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})} \right) \right]$$

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} \left[ \frac{H(0)}{N} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega N}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} \left( \frac{\operatorname{sen}[N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})]}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{\operatorname{sen}[N(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})]}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})} \right) \right]$$

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T \frac{(N-1)}{2}} \left[ \frac{H(0)}{N} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega N}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} (-1)^k \left( \frac{\operatorname{sen}[N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})]}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{\operatorname{sen}[N(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})]}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})} \right) \right]$$

Para N par Tipo I

$$H^*(e^{j\omega T}) = \left[ \frac{H(0)}{N} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega N}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} (-1)^k \left( \frac{\operatorname{sen}[N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})]}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{\operatorname{sen}[N(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})]}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})} \right) \right]$$

Análogamente para N impar

$$H^*(e^{j\omega T}) = \left[ \frac{H(0)}{N} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega N}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{|H(k)|}{N} \left( \frac{\operatorname{sen}[N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})]}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{\operatorname{sen}[N(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})]}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})} \right) \right]$$