1 Ejercicio 1

1.1 Ejercicio 2b de la guia de sistemas discretos

Se pide hallar la ecuacion en diferencias el siguiente diagrama de bloques:

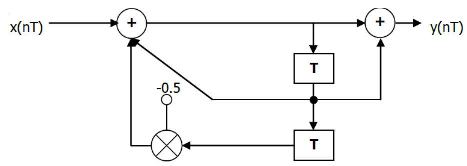


Figure 1: Diagrama en bloques del sistema del Ej:2b

Asumiendo que el sistema esta relajado y que la entrada es causal, lo que quiere decir que:

$$\begin{cases} y(nT) = x(nT) = 0; \quad \forall n < 0 \end{cases}$$

Se tiene el siguiente diagrama en boques luego de aplicarle la transformada Z a la red:

Figure 2: Diagram de bloques del sistema en Z

1.2 Ejercicio 9 de la guia de sistemas discretos

Se pide determinar la respuesta al impulso, al escalon y la respuesta en frecuencia del siguiente sistema de segundo orden:

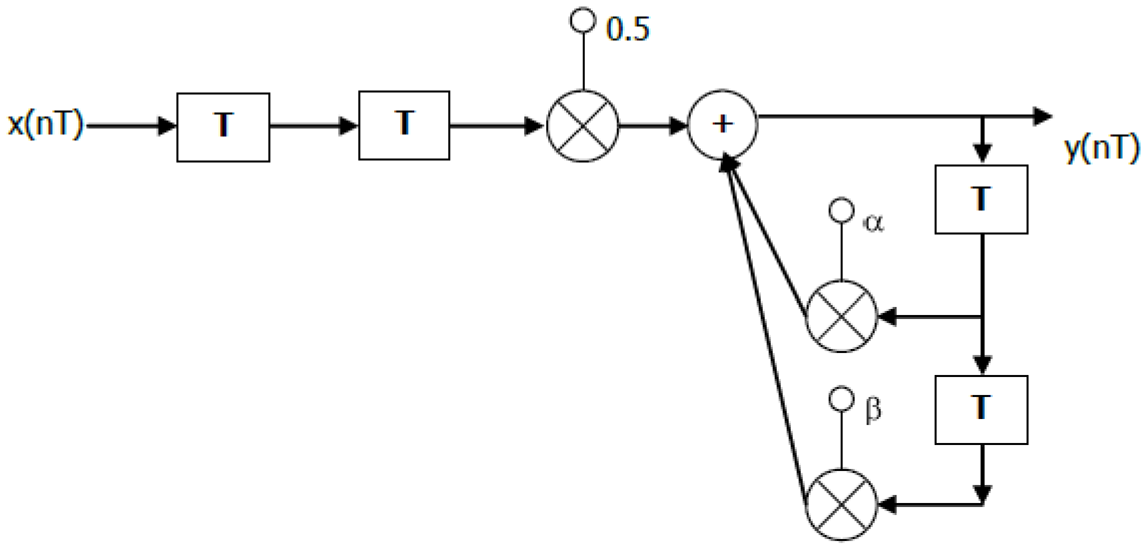


Figure 3: Sistema del ej9 de sistemas discretos

Los valores de α y β son:
a) $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$
b) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$
c) $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$
De dicha red se obtiene la siguiente ecuacion en diferencias:

$$\frac{1}{2}x(nT-2T) + \alpha y(nT-T) + \beta y(nT-2T) = y(nT) \tag{1}$$

Aplicando la transformada Z a la ecuacion 1.2se obtiene la siguiente expresion:

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}[z^2.x(-2) + z.x(-1) + X(z)] + \alpha.z^{-1}[z.y(-1) + Y(z)] + \beta.z^{-2}[z^2y(-2) + z.y(-1) + Y(z)] = Y(z)$$

Donde $X(z)$ e $Y(z)$ son las transformadas Z de $x(n)$ e $y(n)$ respectivamente.

Considerando al sistema relajado(condiciones iniciales nulas) y la entrada como causal la ecuacion anterior se simplifica a:

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}X(z) + \alpha z^{-1}Y(z) + \beta z^{-2}Y(z) = Y(z)$$

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}X(z) = Y(z)[1 - \beta z^{-2} - \alpha z^{-1}]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z^2}{z^2}.\frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\beta z^{-2}-\alpha z^{-1}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{z^2-\alpha z-\beta}$$

Los polos de $H(z)$(transformada Z de la respuesta impulsiva) tienen la siguiente forma:

$$\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2+\beta}$$

Tanto para el caso a), b) y c) los valores de α y β son tales que cumplen que:

$$(\frac{\alpha}{2})^2+\beta < 0 \Longrightarrow z_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm j\sqrt{-[(\frac{\alpha}{2})^2+\beta]}$$

Por conveniencia definimos $\omega = \sqrt{-[(\frac{\alpha}{2})^2+\beta]}$
Se puede reescribir $H(z)$ como:

$$H(z) = \frac{1}{2}.\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Una forma posible de obtener la antitransformada de $H(z)$ es medinte residuos utilizando la siguiente formula:

$$h(n) = u(n).\sum_{i=1}^{M} Res\{H(z).z^{n-1}, z_i\}$$

En este caso las singularidades de $H(z).z^{n-1}$ son:

$$z_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm j\omega \text{ y para n=0} z_3 = 0$$

Los residuos correspondientes son:

- $lim_{z\to z_1}\cancel{(z-z_1)}.\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)} = \frac{1}{2}.\frac{[(\frac{\alpha}{2})+j\omega]^{n-1}}{2j\omega} \overset{Polares}{=} \frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{j(n-1)\theta}$
- $lim_{z\to z_2}\cancel{(z-z_2)}.\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(z-z_1)\cancel{(z-z_2)}} = -\frac{1}{2}.\frac{[(\frac{\alpha}{2})-j\omega]^{n-1}}{2j\omega} \overset{Polares}{=} -\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}$
- $lim_{z\to 0}\cancel{(z)}.\frac{1}{2}.\frac{1}{\cancel{z}(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{z_1.z_2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{z_1.\bar{z_1}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{|z_1|^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{(\frac{\alpha}{2})^2-(\frac{\alpha}{2})^2-\beta} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\beta}$

  Donde $\theta = arctg(\frac{2\omega}{\alpha})$

De dichos residuos se obtiene como expresion de antitransformada:

$$h(n) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\beta}\delta(n) + u(n)[\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{j(n-1)\theta} - \frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}]$$

$$h(n) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta}\delta(n) + u(n).\frac{(\sqrt{-\beta})^{n-1}}{\omega}.(\underbrace{\frac{e^{j(n-1)\theta}-e^{-j(n-1)\theta}}{2j}}_{sin[(n-1)\theta]})]$$

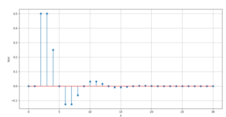
Si evaluamos en n=0 se obtiene que:

$$h(0) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\omega.\sqrt{-\beta}}.sin(-\theta)] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\cancel{\omega}\sqrt{-\beta}}.\frac{\cancel{\omega}}{\sqrt{-\beta}}] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}] = 0$$

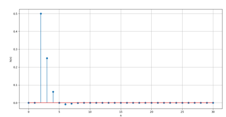
Por lo que se puede reescribir la respuesta impulsiv del sistema como:

$$h(n) = \frac{1}{2\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1} sin[(n-1)\theta].u(n-1) \tag{2}$$

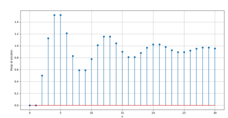
Se realizo un script("Ej9-impulso") para graficar esta respuesta impulsiva para los tres casos a), b) y c), el resultado fue el siguiente:



(a) Item a($\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)



(b) Item b($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)



(c) Item c($\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$)

Figure 4: Graficas de las respuestas impulsivas