1 Ejercicio 1

1.1 Ejercicio 2b de la guia de sistemas discretos

Se pide hallar la ecuacion en diferencias el siguiente diagrama de bloques:

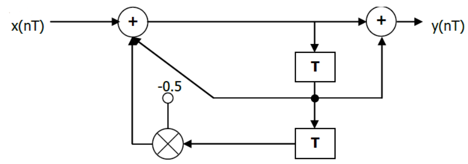


Figure 1: Diagrama en bloques del sistema del Ej:2b

Asumiendo que el sistema esta relajado y que la entrada es causal, lo que quiere decir que:
$\left\{ y(nT) = x(nT) = 0; \quad \forall n < 0 \right.$
Se tiene el siguiente diagrama en boques luego de aplicarle la transformada Z a la red:

Figure 2: Diagram de bloques del sistema en Z

1.2 Ejercicio 9 de la guia de sistemas discretos

Se pide determinar la respuesta al impulso, al escalon y la respuesta en frecuencia del siguiente sistema de segundo orden:

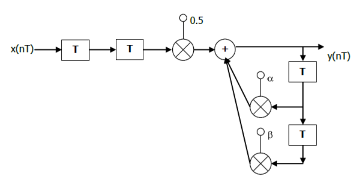


Figure 3: Sistema del ej9 de sistemas discretos

Los valores de α y β son:
a) $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$
b) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$
c) $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$
De dicha red se obtiene la siguiente ecuacion en diferencias:

$$\frac{1}{2}x(nT - 2T) + \alpha y(nT - T) + \beta y(nT - 2T) = y(nT) \tag{1}$$

Para simplificar las cuentas, se normaliza el período a la unidad ($T = 1$) y luego se desnormaliza cuando se llega a los resultados:

$$\tfrac{1}{2}x(n - 2) + \alpha y(n - 1) + \beta y(n - 2) = y(n)$$

Aplicando la transformada Z a la ecuacion (1)se obtiene la siguiente expresion:

$$\frac{1}{2}z^{-2}[z^2.x(-2)+z.x(-1)+X(z)]+\alpha.z^{-1}[z.y(-1)+Y(z)]+\beta.z^{-2}[z^2y(-2)+z.y(-1)+Y(z)]=Y(z)$$

Donde $X(z)$ e $Y(z)$ son las transformadas Z de $x(n)$ e $y(n)$ respectivamente.

Considerando al sistema relajado(condiciones iniciales nulas) y la entrada como causal la ecuacion anterior se simplifica a:

$$\frac{1}{2}z^{-2}X(z)+\alpha z^{-1}Y(z)+\beta z^{-2}Y(z)=Y(z)$$

$$\frac{1}{2}z^{-2}X(z)=Y(z)[1-\beta z^{-2}-\alpha z^{-1}]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{z^2}{z^2}.\frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\beta z^{-2}-\alpha z^{-1}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{z^2-\alpha z-\beta} \tag{2}$$

Los polos de $H(z)$(transformada Z de la respuesta impulsiva) tienen la siguiente forma:

$$\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2+\beta}$$

Tanto para el caso a), b) y c) los valores de α y β son tales que cumplen que:

$$(\frac{\alpha}{2})^2+\beta<0\Longrightarrow z_{1,2}=\frac{\alpha}{2}\pm j\sqrt{-[(\frac{\alpha}{2})^2+\beta]}$$

Por conveniencia definimos $\omega=\sqrt{-[(\frac{\alpha}{2})^2+\beta]}$

Se puede reescribir $H(z)$ como:

$$H(z)=\frac{1}{2}.\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Una forma posible de obtener la antitransformada de $H(z)$ es medinte residuos utilizando la siguiente formula:

$$h(n)=u(n).\sum_{i=1}^{M}Res\{H(z).z^{n-1},z_i\}$$

En este caso las singularidades de $H(z).z^{n-1}$ son:

$$z_{1,2}=\frac{\alpha}{2}\pm j\omega \text{ y para n=0} z_3=0$$

Los residuos correspondientes son:

- $lim_{z\to z_1}\cancel{(z-z_1)}.\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)}=\frac{1}{2}.\frac{[(\frac{\alpha}{2})+j\omega]^{n-1}}{2j\omega}\overset{Polares}{=}\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{j(n-1)\theta}$
- $lim_{z\to z_2}\cancel{(z-z_2)}.\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(z-z_1)\cancel{(z-z_2)}}=-\frac{1}{2}.\frac{[(\frac{\alpha}{2})-j\omega]^{n-1}}{2j\omega}\overset{Polares}{=}-\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}$
- $lim_{z\to 0}\cancel{(z)}.\frac{1}{2}.\frac{1}{\cancel{z}(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{1}{2}.\frac{1}{z_1.z_2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{z_1.\bar{z_1}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{|z_1|^2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{(\frac{\alpha}{2})^2-(\frac{\alpha}{2})^2-\beta}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{\beta}$

  Donde $\theta=arctg(\frac{2\omega}{\alpha})$

De dichos residuos se obtiene como expresion de antitransformada:

$$h(n)=-\frac{1}{2}.\frac{1}{\beta}\delta(n)+u(n)[\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{j(n-1)\theta}-\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}]$$

$$h(n)=\frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta}\delta(n)+u(n).\frac{(\sqrt{-\beta})^{n-1}}{\omega}.(\underbrace{\frac{e^{j(n-1)\theta}-e^{-j(n-1)\theta}}{2j}}_{sin[(n-1)\theta]})]$$

Si evaluamos en n=0 se obtiene que:

$$h(0)=\frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\omega.\sqrt{-\beta}}.sin(-\theta)]=\frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\cancel{\omega}\sqrt{-\beta}}.\frac{\cancel{\omega}}{\sqrt{-\beta}}]=\frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}]=0$$

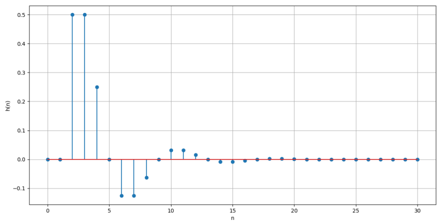
Por lo que se puede reescribir la respuesta impulsiva del sistema como:

$$h(n)=\frac{1}{2\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}sin[(n-1)\theta].u(n-1)$$

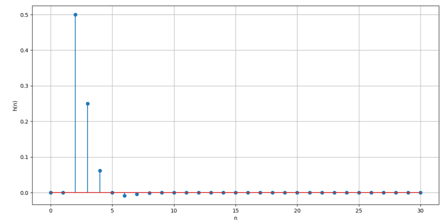
Luego, teniendo en cuenta el período de muestreo T, se reescribe se llega a la forma final de la respuesta como:

$$h(nT) = \frac{1}{2\omega}.(\sqrt{-\beta})^{nT-T} sin[(nT-T)\theta].u(nT-T) \tag{3}$$

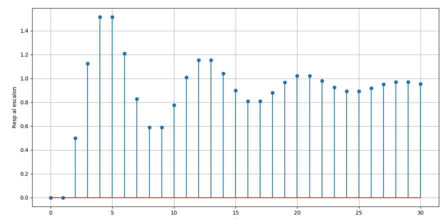
Se realizo un script("Ej9-impulso") para graficar esta respuesta impulsiva para los tres casos a), b) y c), el resultado fue el siguiente:



(a) Item a($\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)



(b) Item b($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)



(c) Item c($\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$)

Figure 4: Graficas de las respuestas impulsivas

1.2.1 Respuesta al escalon

Para la respuesta al escalon del sistema se comenzo planteando la forma generica de la respuesta de un sistema LTI en tiempo discreto:

$$y(n) = (h * u)(n)$$

Transformando ambos lados de la ecuacion se obtiene:

$$Y(z) = H(z).Z\{u(n)\}(z)$$

Donde:

$$Z\{u(n)\}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

Entonces reemplazando la tranformada del escalon calculada previamente y $H(z)$ por lo obtenido en (2), se tiene:

$$Y(z) = \frac{1}{2}.\frac{z}{(z-1)(z^2-\alpha z-\beta)}$$

Decomponiendo en fracciones simples:

$$Y(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2-\alpha z-\beta} \Rightarrow \frac{z}{2} = A(z^2-\alpha z-\beta) + B.z(z-1) + C(z-1)$$

$\underline{z = 1}$

$$\frac{1}{2} = A(1-\alpha-\beta) \rightarrow A = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}$$

$\underline{z=0}$

$$0 = -\frac{\beta}{2(1-\alpha-\beta)} - C \rightarrow C = -\frac{\beta}{2(1-\alpha-\beta)}$$

$\underline{z=-1}$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1+\alpha-\beta}{2(1-\alpha-\beta)} + 2B + \frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}(1-\alpha-\beta)}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1+\alpha-\beta}{2(1-\alpha-\beta)} - \frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}(1-\alpha-\beta)} = 2B$$

$$\frac{-1+\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-1-\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\cancel{2\beta}}{2(1-\alpha-\beta)} = 2B \rightarrow B = -\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}$$

Teniendo en cuenta que:

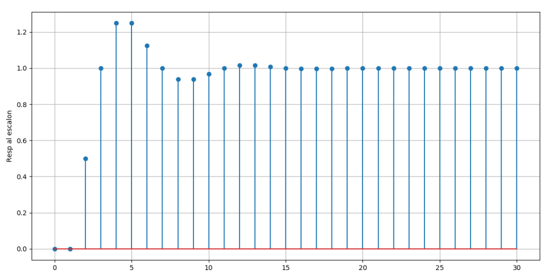
- $Z\{\delta(n-k)\} = z^k$
- $\delta(n-k) * x(n) = x(n-k)$

La antitransformada de $Y(z)$ es:

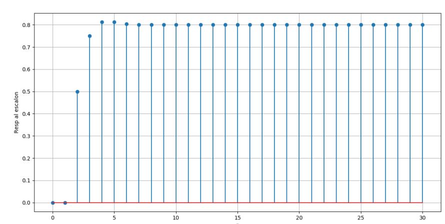
$$y(n) = A.u(n-1) + 2C.h(n) + 2B.h(n-1)$$

$$y(n) = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}u(n-1) - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}h(n) - \frac{1}{1-\alpha-\beta}h(n+1) \tag{4}$$

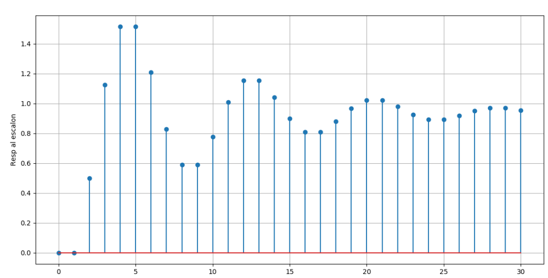
Al igual que para le respuesta impulsiva se realizo un script("Ej9-escalon") para graficar la repuesta al escalon de cada item.



(a) Item A($\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)



(b) Item b($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)



(c) Item c

Figure 5: Graficas de la respuesta al escalon

2 Ejercicio 3.a

Se pide verificar la estabilidad del siguiente filtro recursivo:

$$H(z) = \frac{z^6}{6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1} \tag{5}$$

Asumiendo que el sistema es causal se tiene que el sistema es estable si se tiene que todas sus singularidades estan dentro del circulo untario($|z| < 1$).

Se deinfe como funcion caracteristica del sistema a:

$$f(z) = 6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0$$

$$f(z) = z^6 + \frac{5}{6}z^5 + \frac{2}{3}z^4 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \tag{6}$$

Para que el sistemaa sea estable debe cumplir:

1. Todos los coeficientes de (6) deben ser menor al orden de la misma
2. $|\frac{a_0}{a_n}| < 1$, donde a_0 es el coeficiente que acompana al ttermino independiente y a_n el que acompana a z^n

Una simple inspeccion de la f(z) muestra que se cumple la condicion 1, en cuanto a la condicion 2 $|\frac{a_0}{a_n}| = \frac{1}{6} < 1$. Esto significa que en primera instancia la funcion caracteristica cumple con las condiciones necesarias.

Como siguiente paso se arman las matrices triangulares correspondientes:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la suma de ambas matrices se obtiene:

$$H_7 = H_1 + H_2 = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Definiendo los ddeterminantes internos de la matriz como:

- $\nabla_1 = 7 > 0$
- $\nabla_3 = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 295 > 0$
- $\nabla_5 = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12383 > 0$

- $\nabla_7 = \begin{vmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 507408 > 0$

El calculo de los determinantes internos de la matriz se realizo con el script de python titulado "Determinantes".

Como la funcion caracteristica del sistema cumple las condiciones necesarias mencionadas previamente y todos sus determinantes internos son positivos, se concluye que el sistema es estable.

3 Ejercicio 6

3.1 Item a

Se pide demostrar la siguiente igualdad:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z).H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}$$

demostracion:

$$H(z).H(z^{-1}) \overset{definicion}{=} (\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k).z^{-k}).(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).z^{n})$$

$$\overset{distributiva}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).z^{n})h(k).z^{-k} \overset{z=e^{j\omega}}{\rightarrow} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).e^{jn\omega})h(k).e^{-jk\omega}$$

$$\overset{Conjugado}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \overline{h(n)}.e^{-jn\omega})}h(k).e^{-jk\omega} \overset{h\epsilon\mathbb{R}}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).e^{-jn\omega})}h(k).e^{-jk\omega}$$

$$\overset{definicion}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{H(\omega)}h(k).e^{-jk\omega} = \overline{H(\omega)}.\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k).e^{-jk\omega} \overset{definicion}{=} \overline{H(\omega)}.H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

3.2 Item b

Se pide demostrar que el siguiente sistema es un filtro pasa todo(ganancia unitaria para toda frecuencia):

$$H(z) = \frac{1-az+bz^2}{b-az+z^2}$$

demostracion:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z).H(z^{-1}) = \frac{(1-az+bz^2)}{b-az+z^2}.\frac{(1-az^{-1}+bz^{-2})}{b-az^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \cancel{\frac{bz^2-(ab+a)z+1+a^2+b^2-(ab+a)z^{-1}+bz^{-2}}{bz^2-(ab+a)z+1+a^2+b^2-(ab+a)z^{-1}+bz^{-2}}}.1 = 1$$

3.3 Item c