# Instituto Tecnológico de Buenos Aires

## 22.05 Análisis de Señales y Sistemas Digitales

Guía de Problemas $N^o$ 2

# Transformada Z

*Grupo 2:*

Matías Larroque
Leg. 56597

Tomas Agustín González Orlando
Leg. 57090

Lucero Guadalupe Fernandez
Leg. 57485

Manuel Mollón
Leg. 58023

Ezequiel Vijande
Leg. 58057

*Profesor:*

Daniel Jacoby
Carlos Belaustegui Goitia
Rodrigo Iribarren

Entregado: 4 de Abril de 2019

# Índice

# 1. Ejercicio 1

## 1.1. Ejercicio 2b de la guía de sistemas discretos

Se pide hallar la ecuación en diferencias el siguiente diagrama de bloques:

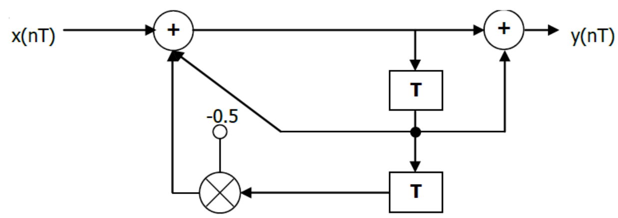



Figura 1: Diagrama en bloques del sistema del Ej:2b

Asumiendo que el sistema esta relajado y que la entrada es causal, lo que quiere decir que:
$\begin{cases} y(nT) = x(nT) = 0; \quad \forall n < 0 \end{cases}$
Se tiene el siguiente diagrama en bloques luego de aplicarle la transformada Z a la red:

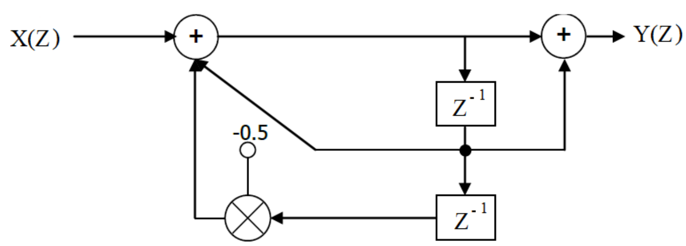



Figura 2: Diagrama de bloques del sistema en Z

De aquí asumiendo condiciones iniciales nulas y llamando $a(z)$ a la señal que sale del primer bloque sumador, se tienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} a(z) = X(z) + z^{-1}a(z) - \frac{1}{2}z^{-2}a(z) \\ Y(z) = a(z)[1 + z^{-1}] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-2}-z^{-1}}X(z) \\ Y(z) = a(z)[1 + z^{-1}] \end{cases} \rightarrow$$

$$Y(z) = X(z)\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-2}-z^{-1}} \rightarrow Y(z)[1 + \tfrac{1}{2}z^{-2} - z^{-1}] = X(z)[1 + z^{-1}]$$

Antitransformando la expresión anterior se llega a:

$$y(nT) + \tfrac{1}{2}y(nT - 2T) - y(nT - T) = x(nT) + x(nT - T)$$

Esta expresión es la misma que se obtuvo en la resolución para la guiá de sistemas discretos.

## 1.2. Ejercicio 9 de la guía de sistemas discretos

Se pide determinar la respuesta al impulso, al escalón y la respuesta en frecuencia del siguiente sistema de segundo orden:

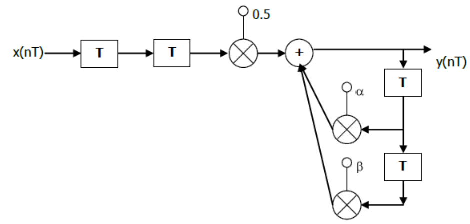



Figura 3: Sistema del ej9 de sistemas discretos

Los valores de $\alpha$ y $\beta$ son:
a) $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$
b) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$
c) $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$
De dicha red se obtiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$\frac{1}{2}x(nT-2T) + \alpha y(nT-T) + \beta y(nT-2T) = y(nT) \tag{1}$$

Para simplificar las cuentas, se normaliza el período a la unidad ($T = 1$) y luego se desnormaliza cuando se llega a los resultados:

$$\tfrac{1}{2}x(n-2) + \alpha y(n-1) + \beta y(n-2) = y(n)$$

Aplicando la transformada Z a la ecuación (1)se obtiene la siguiente expresión:

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}[z^2.x(-2) + z.x(-1) + X(z)] + \alpha.z^{-1}[z.y(-1) + Y(z)] + \beta.z^{-2}[z^2 y(-2) + z.y(-1) + Y(z)] = Y(z)$$

Donde $X(z)$ e $Y(z)$ son las transformadas Z de $x(n)$ e $y(n)$ respectivamente.
Considerando al sistema relajado(condiciones iniciales nulas) y la entrada como causal la ecuación anterior se simplifica a:

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}X(z) + \alpha z^{-1}Y(z) + \beta z^{-2}Y(z) = Y(z)$$

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}X(z) = Y(z)[1 - \beta z^{-2} - \alpha z^{-1}]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z^2}{z^2}.\frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\beta z^{-2} - \alpha z^{-1}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{z^2 - \alpha z - \beta} \tag{2}$$

Los polos de $H(z)$(transformada Z de la respuesta impulsiva) tienen la siguiente forma:

$$\tfrac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} = \tfrac{\alpha}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{\alpha}{2})^2 + \beta}$$

Tanto para el caso a), b) y c) los valores de $\alpha$ y $\beta$ son tales que cumplen que:

$$(\tfrac{\alpha}{2})^2 + \beta < 0 \Longrightarrow z_{1,2} = \tfrac{\alpha}{2} \pm j\sqrt{-[(\tfrac{\alpha}{2})^2 + \beta]}$$

Por conveniencia definimos $\omega = \sqrt{-[(\frac{\alpha}{2})^2 + \beta]}$
Se puede reescribir $H(z)$ como:

$$H(z) = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Una forma posible de obtener la antitransformada de $H(z)$ es mediante residuos utilizando la siguiente formula:

$$h(n) = u(n).\textstyle\sum_{i=1}^{M} Res\{H(z).z^{n-1}, z_i\}$$

En este caso las singularidades de $H(z).z^{n-1}$ son:

$$z_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm j\omega \text{ y para n=0} z_3 = 0$$

Los residuos correspondientes son:

- $lim_{z \to z_1} \cancel{(z - z_1)}.\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)} = \frac{1}{2}.\frac{[(\frac{\alpha}{2})+j\omega]^{n-1}}{2j\omega} \overset{Polares}{=} \frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{j(n-1)\theta}$
- $lim_{z \to z_2} \cancel{(z - z_2)}.\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(z-z_1)\cancel{(z-z_2)}} = -\frac{1}{2}.\frac{[(\frac{\alpha}{2})-j\omega]^{n-1}}{2j\omega} \overset{Polares}{=} -\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}$
- $lim_{z \to 0} \cancel{(z)}.\frac{1}{2}.\frac{1}{\cancel{z}(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{z_1.z_2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{z_1.\bar{z_1}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{|z_1|^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{(\frac{\alpha}{2})^2-(\frac{\alpha}{2})^2-\beta} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\beta}$

  Donde $\theta = arctg(\frac{2\omega}{\alpha})$

De dichos residuos se obtiene como expresión de antitransformada:

$$h(n) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\beta}\delta(n) + u(n)[\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{j(n-1)\theta} - \frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}]$$

$$h(n) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta}\delta(n) + u(n).\frac{(\sqrt{-\beta})^{n-1}}{\omega}.(\underbrace{\frac{e^{j(n-1)\theta}-e^{-j(n-1)\theta}}{2j}}_{sin[(n-1)\theta]})]$$

Si evaluamos en n=0 se obtiene que:

$$h(0) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\omega.\sqrt{-\beta}}.sin(-\theta)] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\cancel{\omega}\sqrt{-\beta}}.\frac{\cancel{\omega}}{\sqrt{-\beta}}] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}] = 0$$

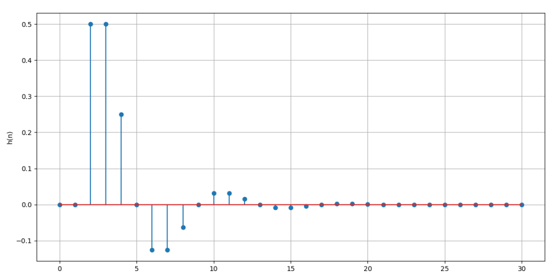
Por lo que se puede reescribir la respuesta impulsiva del sistema como:

$$h(n) = \frac{1}{2\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}sin[(n-1)\theta].u(n-1)$$

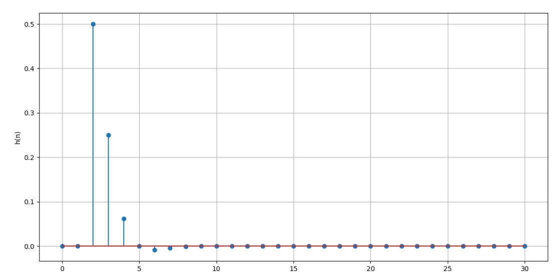
Luego, teniendo en cuenta el período de muestreo T, se reescribe se llega a la forma final de la respuesta como:

$$h(nT) = \frac{1}{2\omega}.(\sqrt{-\beta})^{nT-T}sin[(nT-T)\theta].u(nT-T) \tag{3}$$

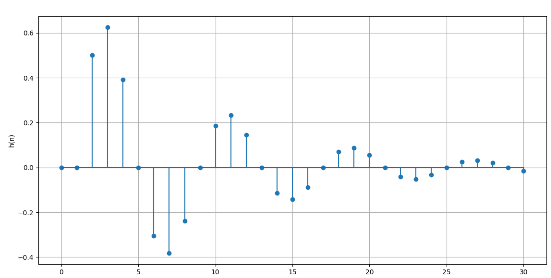
Se realizo un script("Ej9-impulso") para graficar esta respuesta impulsiva para los tres casos a), b) y c), el resultado fue el siguiente:




(a) Item a( $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)




(b) Item b( $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)




(c) Item c( $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$)

Figura 4: Gráficas de las respuestas impulsivas

Como era de esperarse las gráficas obtenidas son iguales a las que se obtuvieron en la resolución para la guiá de sistemas discretos. A su vez se obtienen las siguientes pseudofrecuencias de oscilación para cada item:
a)$f = \frac{1}{8T}$
b) No hay oscilación apreciable
c) $f = \frac{1}{8T}$

### 1.2.1. Respuesta al escalón

Para la respuesta al escalón del sistema se comenzó planteando la forma genérica de la respuesta de un sistema LTI en tiempo discreto:

$$y(n) = (h * u)(n)$$

Transformando ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$Y(z) = H(z).Z\{u(n)\}(z)$$

Donde:

$$Z\{u(n)\}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

Entonces reemplazando la transformada del escalón calculada previamente y $H(z)$ por lo obtenido en (2), se tiene:

$$Y(z) = \frac{1}{2} . \frac{z}{(z-1)(z^2-\alpha z-\beta)}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$Y(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2-\alpha z-\beta} \Rightarrow \frac{z}{2} = A(z^2 - \alpha z - \beta) + B.z(z-1) + C(z-1)$$

$\underline{z = 1}$

$$\frac{1}{2} = A(1-\alpha-\beta) \to A = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}$$

$\underline{z = 0}$

$$0 = -\frac{\beta}{2(1-\alpha-\beta)} - C \to C = -\frac{\beta}{2(1-\alpha-\beta)}$$

$\underline{z = -1}$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1+\alpha-\beta}{2(1-\alpha-\beta)} + 2B + \frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}(1-\alpha-\beta)}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1+\alpha-\beta}{2(1-\alpha-\beta)} - \frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}(1-\alpha-\beta)} = 2B$$

$$\frac{-1+\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-1-\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\cancel{2\beta}}{2(1-\alpha-\beta)} = 2B \to B = -\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}$$

Teniendo en cuenta que:

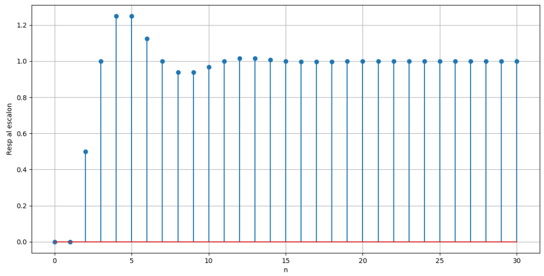
- $Z\{\delta(n-k)\} = z^k$
- $\delta(n-k) * x(n) = x(n-k)$

La antitransformada de $Y(z)$ es:

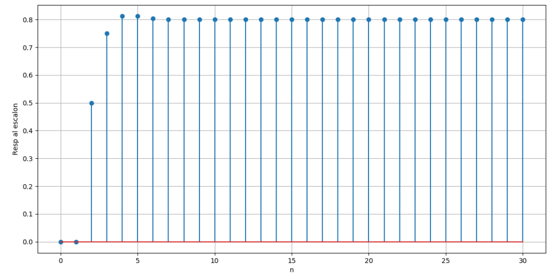
$$y(n) = A.u(n-1) + 2C.h(n) + 2B.h(n-1)$$

$$y(nT) = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)} u(nT-T) - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} h(nT) - \frac{1}{1-\alpha-\beta} h(nT+T) \qquad (4)$$

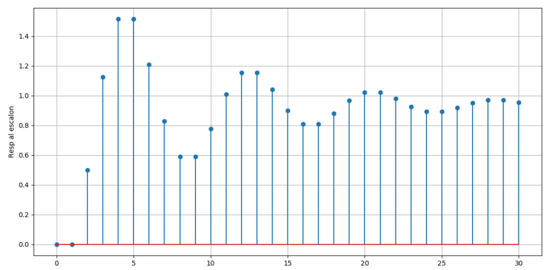
Al igual que para le respuesta impulsiva se realizo un script("Ej9-escalon") para graficar la repuesta al escalón de cada item.




(a) Item A( $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)




(b) Item b( $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)




(c) Item c

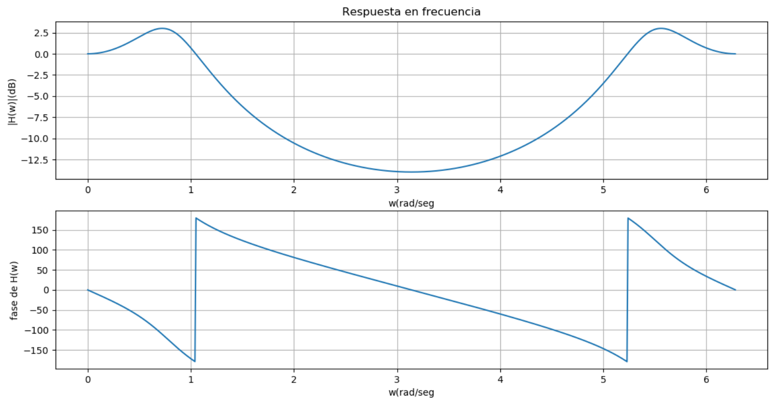
Figura 5: Gráficas de la respuesta al escalon

### 1.2.2. Respuesta en frecuencia

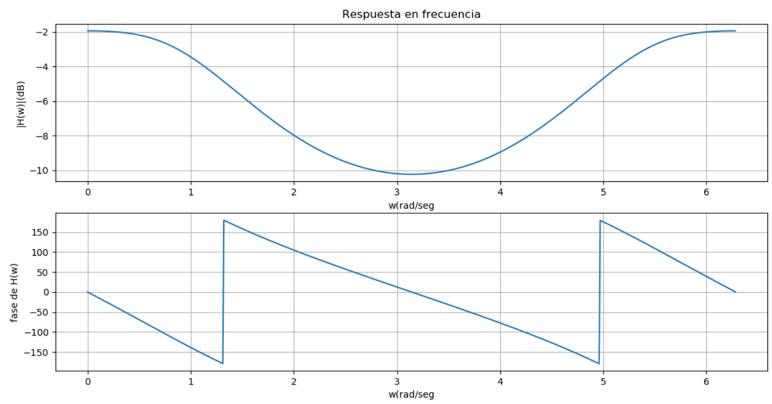
Se puede obtener la respuesta en frecuencia del sistema mediante la $H(z)$ obtenida evaluando la misma en el circulo unitario.

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{j2\omega} - \alpha e^{j\omega} - \beta}$$

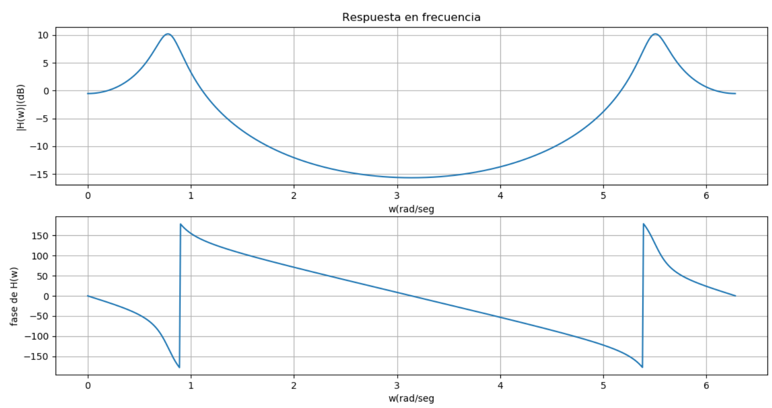
Dicha función transferencia fue simulada y graficada.A continuación se presentan las gráficas obtenidas del script de python 'RespFrecuencia':




(a) Item a( $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)




(b) Item b( $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)




(c) Item c( $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$)

Figura 6: Gráficas de la repuesta en frecuencia

## 2. Ejercicio 3.a

Se pide verificar la estabilidad del siguiente filtro recursivo:

$$H(z) = \frac{z^6}{6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1} \tag{5}$$

Asumiendo que el sistema es causal se tiene que el sistema es estable si se tiene que todas sus singularidades están dentro del circulo unitario($|z| < 1$).

Se define como función característica del sistema a:

$$f(z) = 6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0$$

$$f(z) = z^6 + \frac{5}{6}z^5 + \frac{2}{3}z^4 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \tag{6}$$

Para que el sistema sea estable debe cumplir:

1. Todos los coeficientes de (6) deben ser menor al orden de la misma
2. $|\frac{a_0}{a_n}| < 1$, donde $a_0$ es el coeficiente que acompaña al termino independiente y $a_n$ el que acompaña a $z^n$

Una simple inspección de la f(z) muestra que se cumple la condición 1, en cuanto a la condición 2 $|\frac{a_0}{a_n}| = \frac{1}{6} < 1$. Esto significa que en primera instancia la función característica cumple con las condiciones necesarias.

Como siguiente paso se arman las matrices triangulares correspondientes:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la suma de ambas matrices se obtiene:

$$H_7 = H_1 + H_2 = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Definiendo los determinantes internos de la matriz como:

- $\nabla_1 = 7 > 0$
- $\nabla_3 = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 295 > 0$
- $\nabla_5 = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12383 > 0$

- $\nabla_7 = \begin{vmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 507408 > 0$

El calculo de los determinantes internos de la matriz se realizo con el script de python titulado "Determinantes".

Como la función característica del sistema cumple las condiciones necesarias mencionadas previamente y todos sus determinantes internos son positivos, se concluye que el sistema es estable.

# 3. Ejercicio 6

## 3.1. Item a

Se pide demostrar la siguiente igualdad:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z).H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}$$

demostración:

$$H(z).H(z^{-1}) \overset{definicion}{=} (\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k).z^{-k}).(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).z^{n})$$

$$\overset{distributiva}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).z^{n})h(k).z^{-k} \overset{z=e^{j\omega}}{\rightarrow} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).e^{jn\omega})h(k).e^{-jk\omega}$$

$$\overset{Conjugado}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\overline{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \overline{h(n)}.e^{-jn\omega}})h(k).e^{-jk\omega} \overset{h\epsilon\mathbb{R}}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\overline{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).e^{-jn\omega}})h(k).e^{-jk\omega}$$

$$\overset{definicion}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{H(\omega)}h(k).e^{-jk\omega} = \overline{H(\omega)}.\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k).e^{-jk\omega} \overset{definicion}{=} \overline{H(\omega)}.H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

## 3.2. Item b

Se pide demostrar que el siguiente sistema es un filtro pasa todo(ganancia unitaria para toda frecuencia):

$$H(z) = \frac{1-az+bz^2}{b-az+z^2}$$

demostración:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z).H(z^{-1}) = \frac{(1-az+bz^2)}{b-az+z^2}.\frac{(1-az^{-1}+bz^{-2})}{b-az^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \frac{\cancel{bz^2-(ab+a)z+1+a^2+b^2-(ab+a)z^{-1}+bz^{-2}}}{\cancel{bz^2-(ab+a)z+1+a^2+b^2-(ab+a)z^{-1}+bz^{-2}}},1 = 1$$

## 3.3. Item c

Se pide demostrar que los pares de polos y ceros ocurren en pares recíprocos y conjugados.
demostración:
Se tiene que función transferencia genérica de un sistema puede escribirse como:

$$H(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_0}, \text{ Donde los } b_i \text{ y los } a_i \text{ son reales}(\forall i\epsilon\mathbb{N})$$

Si se define el denominador de la transferencia como f(z) se tiene que los polos del sistema están dados por:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i = 0$$

Asumiendo que $z_j$ es una raíz compleja de $f(z)$, si evaluamos $f(\overline{z_j})$ se llega a que:

$$f(\overline{z_j}) = \sum_{i=0}^{m} b_i \overline{z}_j^i = \sum_{i=0}^{m} b_i \overline{z_j^i} \overset{b_i\epsilon\mathbb{R}}{=} \sum_{i=0}^{m} \overline{b_i}\,\overline{z_j^i} = \sum_{i=0}^{m} \overline{b_i z_j^i}$$

$$= \overline{\sum_{i=0}^{m} b_i z_j^i} \overset{z_j raiz}{=} \overline{0} = 0 \rightarrow \overline{z_j} \text{ también es raíz.}$$

Ya que el numerador también es un polinomio con coeficientes reales aplica la misma deducción.