Instituto Tecnológico de Buenos Aires

22.05 Análisis de Señales y Sistemas Digitales

Guía de Problemas *N^o^* 2

Transformada Z

Grupo 2:

Matías Larroque
Leg. 56597

Tomas Agustín González Orlando
Leg. 57090

Lucero Guadalupe Fernandez
Leg. 57485

Manuel Mollón
Leg. 58023

Ezequiel Vijande
Leg. 58057

Profesor:

Daniel Jacoby
Carlos Belaustegui Goitia
Rodrigo Iribarren

Entregado: 4 de Abril de 2019

Índice

1. Ejercicio 1 **2**
1.1. Ejercicio 2b de la guía de sistemas discretos 2
1.2. Ejercicio 9 de la guía de sistemas discretos 2
1.2.1. Respuesta al escalón 4
1.2.2. Respuesta en frecuencia 6

2. Ejercicio 3.a **7**

3. Ejercicio 6 **8**
3.1. Item a 8
3.2. Item b 9
3.3. Item c 9

1. Ejercicio 1

1.1. Ejercicio 2b de la guía de sistemas discretos

Se pide hallar la ecuación en diferencias el siguiente diagrama de bloques:

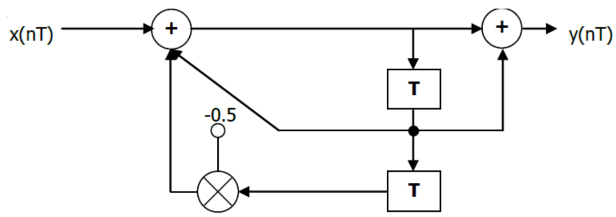


Figura 1: Diagrama en bloques del sistema del Ej:2b

Asumiendo que el sistema esta relajado y que la entrada es causal, lo que quiere decir que:
$\left\{ y(nT) = x(nT) = 0; \quad \forall n < 0 \right.$
Se tiene el siguiente diagrama en bloques luego de aplicarle la transformada Z a la red:

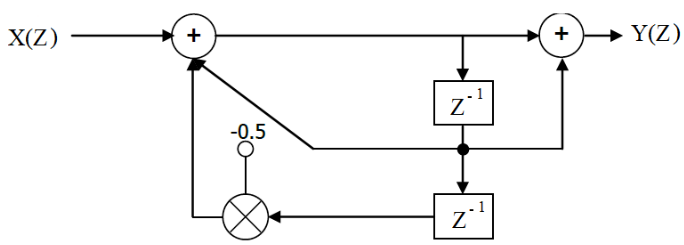


Figura 2: Diagrama de bloques del sistema en Z

De aquí asumiendo condiciones iniciales nulas, se llega a la ecuación en Z del sistema:

$$Y(z) = 2 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} - \frac{1}{2} \cdot Y(z) \cdot z^{-2} + X(z) \cdot z^{-1} + X(z)$$

1.2. Ejercicio 9 de la guía de sistemas discretos

Se pide determinar la respuesta al impulso, al escalón y la respuesta en frecuencia del siguiente sistema de segundo orden:

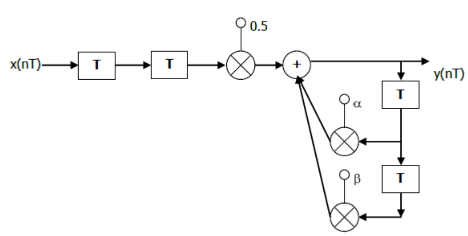


Figura 3: Sistema del ej9 de sistemas discretos

Los valores de α y β son:
a) $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$
b) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$
c) $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$
De dicha red se obtiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$\frac{1}{2}x(nT-2T)+\alpha y(nT-T)+\beta y(nT-2T)=y(nT) \tag{1}$$

Para simplificar las cuentas, se normaliza el período a la unidad ($T=1$) y luego se desnormaliza cuando se llega a los resultados:

$$\tfrac{1}{2}x(n-2)+\alpha y(n-1)+\beta y(n-2)=y(n)$$

Aplicando la transformada Z a la ecuación (1)se obtiene la siguiente expresión:

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}[z^2.x(-2)+z.x(-1)+X(z)]+\alpha.z^{-1}[z.y(-1)+Y(z)]+\beta.z^{-2}[z^2y(-2)+z.y(-1)+Y(z)]=Y(z)$$

Donde $X(z)$ e $Y(z)$ son las transformadas Z de $x(n)$ e $y(n)$ respectivamente.
Considerando al sistema relajado(condiciones iniciales nulas) y la entrada como causal la ecuación anterior se simplifica a:

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}X(z)+\alpha z^{-1}Y(z)+\beta z^{-2}Y(z)=Y(z)$$

$$\tfrac{1}{2}z^{-2}X(z)=Y(z)[1-\beta z^{-2}-\alpha z^{-1}]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{z^2}{z^2}.\frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\beta z^{-2}-\alpha z^{-1}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{z^2-\alpha z-\beta} \tag{2}$$

Los polos de $H(z)$(transformada Z de la respuesta impulsiva) tienen la siguiente forma:

$$\tfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}=\tfrac{\alpha}{2}\pm\sqrt{(\tfrac{\alpha}{2})^2+\beta}$$

Tanto para el caso a), b) y c) los valores de α y β son tales que cumplen que:

$$(\tfrac{\alpha}{2})^2+\beta<0 \Longrightarrow z_{1,2}=\tfrac{\alpha}{2}\pm j\sqrt{-[(\tfrac{\alpha}{2})^2+\beta]}$$

Por conveniencia definimos $\omega=\sqrt{-[(\frac{\alpha}{2})^2+\beta]}$
Se puede reescribir $H(z)$ como:

$$H(z)=\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Una forma posible de obtener la antitransformada de $H(z)$ es mediante residuos utilizando la siguiente formula:

$$h(n)=u(n).\textstyle\sum_{i=1}^{M}Res\{H(z).z^{n-1},z_i\}$$

En este caso las singularidades de $H(z).z^{n-1}$ son:

$$z_{1,2}=\tfrac{\alpha}{2}\pm j\omega \text{ y para n=0} z_3=0$$

Los residuos correspondientes son:

- $lim_{z\to z_1}\cancel{(z-z_1)}.\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)}=\frac{1}{2}.\frac{[(\frac{\alpha}{2})+j\omega]^{n-1}}{2j\omega}\overset{Polares}{=}\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{j(n-1)\theta}$
- $lim_{z\to z_2}\cancel{(z-z_2)}.\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(z-z_1)\cancel{(z-z_2)}}=-\frac{1}{2}.\frac{[(\frac{\alpha}{2})-j\omega]^{n-1}}{2j\omega}\overset{Polares}{=}-\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}$
- $lim_{z\to 0}\cancel{(z)}.\frac{1}{2}.\frac{1}{\cancel{z}(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{1}{2}.\frac{1}{z_1.z_2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{z_1.\bar{z_1}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{|z_1|^2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{(\frac{\alpha}{2})^2-(\frac{\alpha}{2})^2-\beta}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{\beta}$

  Donde $\theta=arctg(\frac{2\omega}{\alpha})$

De dichos residuos se obtiene como expresión de antitransformada:

$$h(n) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\beta}\delta(n) + u(n)[\frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{j(n-1)\theta} - \frac{1}{j4\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}]$$

$$h(n) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta}\delta(n) + u(n).\frac{(\sqrt{-\beta})^{n-1}}{\omega}.(\underbrace{\frac{e^{j(n-1)\theta}-e^{-j(n-1)\theta}}{2j}}_{sin[(n-1)\theta]})]$$

Si evaluamos en n=0 se obtiene que:

$$h(0) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\omega.\sqrt{-\beta}}.sin(-\theta)] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\cancel{\omega}\sqrt{-\beta}}.\frac{\cancel{\omega}}{\sqrt{-\beta}}] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}] = 0$$

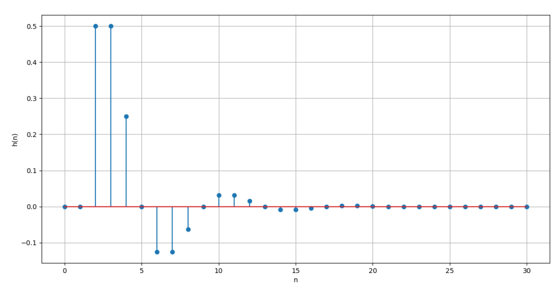
Por lo que se puede reescribir la respuesta impulsiva del sistema como:

$$h(n) = \frac{1}{2\omega}.(\sqrt{-\beta})^{n-1}sin[(n-1)\theta].u(n-1)$$

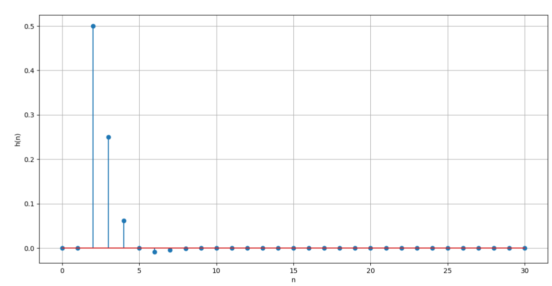
Luego, teniendo en cuenta el período de muestreo T, se reescribe se llega a la forma final de la respuesta como:

$$h(nT) = \frac{1}{2\omega}.(\sqrt{-\beta})^{nT-T}sin[(nT-T)\theta].u(nT-T) \tag{3}$$

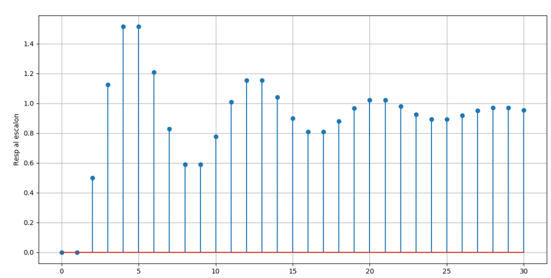
Se realizo un script("Ej9-impulso") para graficar esta respuesta impulsiva para los tres casos a), b) y c), el resultado fue el siguiente:



(a) Item a($\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)



(b) Item b($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)



(c) Item c($\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$)

Figura 4: Gráficas de las respuestas impulsivas

1.2.1. Respuesta al escalón

Para la respuesta al escalón del sistema se comenzó planteando la forma genérica de la respuesta de un sistema LTI en tiempo discreto:

$$y(n) = (h * u)(n)$$

Transformando ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$Y(z) = H(z).Z\{u(n)\}(z)$$

Donde:

$$Z\{u(n)\}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

Entonces reemplazando la transformada del escalón calculada previamente y $H(z)$ por lo obtenido en (2), se tiene:

$$Y(z) = \frac{1}{2}.\frac{z}{(z-1)(z^2-\alpha z-\beta)}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$Y(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2-\alpha z-\beta} \Rightarrow \frac{z}{2} = A(z^2 - \alpha z - \beta) + B.z(z-1) + C(z-1)$$

$\underline{z = 1}$

$$\frac{1}{2} = A(1-\alpha-\beta) \to A = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}$$

$\underline{z = 0}$

$$0 = -\frac{\beta}{2(1-\alpha-\beta)} - C \to C = -\frac{\beta}{2(1-\alpha-\beta)}$$

$\underline{z = -1}$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1+\alpha-\beta}{2(1-\alpha-\beta)} + 2B + \frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}(1-\alpha-\beta)}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1+\alpha-\beta}{2(1-\alpha-\beta)} - \frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}(1-\alpha-\beta)} = 2B$$

$$\frac{-1+\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-1-\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-2\cancel{\beta}}{2(1-\alpha-\beta)} = 2B \to B = -\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}$$

Teniendo en cuenta que:

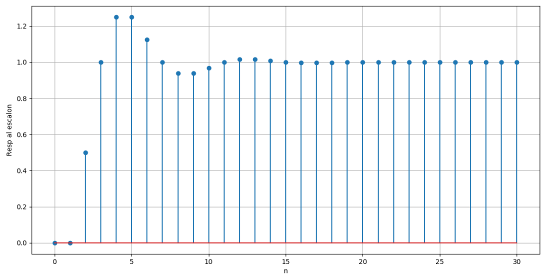
- $Z\{\delta(n-k)\} = z^k$
- $\delta(n-k) * x(n) = x(n-k)$

La antitransformada de $Y(z)$ es:

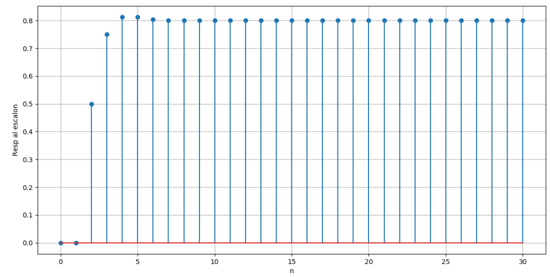
$$y(n) = A.u(n-1) + 2C.h(n) + 2B.h(n-1)$$

$$y(n) = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)} u(n-1) - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} h(n) - \frac{1}{1-\alpha-\beta} h(n+1) \tag{4}$$

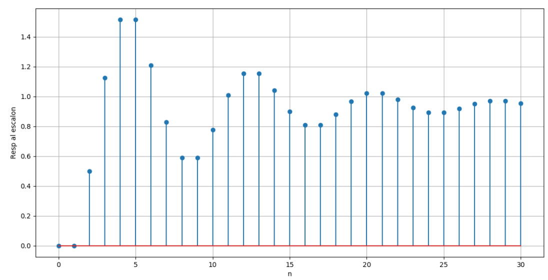
Al igual que para le respuesta impulsiva se realizo un script("Ej9-escalon") para graficar la repuesta al escalón de cada item.



(a) Item A($\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)



(b) Item b($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)



(c) Item c

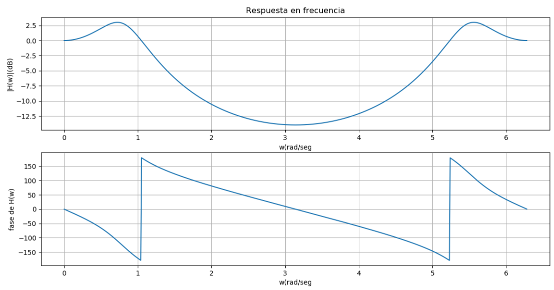
Figura 5: Gráficas de la respuesta al escalon

1.2.2. Respuesta en frecuencia

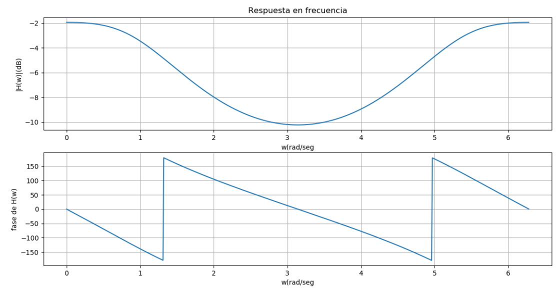
Se puede obtener la respuesta en frecuencia del sistema mediante la $H(z)$ obtenida evaluando la misma en el circulo unitario.

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{j2\omega} - \alpha e^{j\omega} - \beta}$$

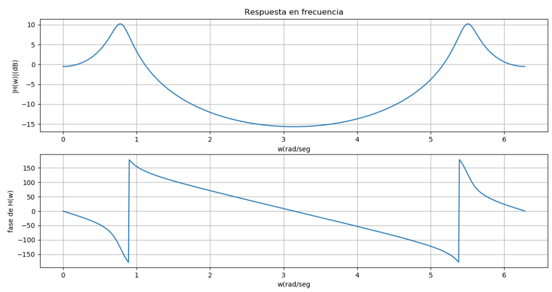
Dicha función transferencia fue simulada y graficada.A continuación se presentan las gráficas obtenidas del script de python 'RespFrecuencia':



(a) Item a($\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$)



(b) Item b($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{8}$)



(c) Item c($\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -\frac{25}{32}$)

Figura 6: Gráficas de la repuesta en frecuencia

2. Ejercicio 3.a

Se pide verificar la estabilidad del siguiente filtro recursivo:

$$H(z) = \frac{z^6}{6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1} \tag{5}$$

Asumiendo que el sistema es causal se tiene que el sistema es estable si se tiene que todas sus singularidades están dentro del circulo unitario($|z| < 1$).

Se define como función característica del sistema a:

$$f(z) = 6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0$$

$$f(z) = z^6 + \frac{5}{6}z^5 + \frac{2}{3}z^4 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \tag{6}$$

Para que el sistema sea estable debe cumplir:

1. Todos los coeficientes de (6) deben ser menor al orden de la misma
2. $|\frac{a_0}{a_n}| < 1$, donde a_0 es el coeficiente que acompaña al termino independiente y a_n el que acompaña a z^n

Una simple inspección de la f(z) muestra que se cumple la condición 1, en cuanto a la condición 2 $|\frac{a_0}{a_n}| = \frac{1}{6} < 1$. Esto significa que en primera instancia la función característica cumple con las condiciones necesarias.

Como siguiente paso se arman las matrices triangulares correspondientes:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la suma de ambas matrices se obtiene:

$$H_7 = H_1 + H_2 = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Definiendo los determinantes internos de la matriz como:

- $\nabla_1 = 7 > 0$
- $\nabla_3 = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 295 > 0$
- $\nabla_5 = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12383 > 0$
- $\nabla_7 = \begin{vmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 507408 > 0$

El calculo de los determinantes internos de la matriz se realizo con el script de python titulado "Determinantes".

Como la función característica del sistema cumple las condiciones necesarias mencionadas previamente y todos sus determinantes internos son positivos, se concluye que el sistema es estable.

3. Ejercicio 6

3.1. Item a

Se pide demostrar la siguiente igualdad:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z).H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}$$

demostración:

$$H(z).H(z^{-1}) \overset{definicion}{=} (\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k).z^{-k}).(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).z^{n})$$

$$\overset{distributiva}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).z^{n})h(k).z^{-k} \overset{z=e^{j\omega}}{\rightarrow} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).e^{jn\omega})h(k).e^{-jk\omega}$$

$$\overset{Conjugado}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \overline{h(n)}.e^{-jn\omega})}h(k).e^{-jk\omega} \overset{h\epsilon\mathbb{R}}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n).e^{-jn\omega})}h(k).e^{-jk\omega}$$

$$\overset{definicion}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{H(\omega)} h(k).e^{-jk\omega} = \overline{H(\omega)}. \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k).e^{-jk\omega} \overset{definicion}{=} \overline{H(\omega)}.H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

3.2. Item b

Se pide demostrar que el siguiente sistema es un filtro pasa todo(ganancia unitaria para toda frecuencia):

$$H(z) = \frac{1-az+bz^2}{b-az+z^2}$$

demostración:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z).H(z^{-1}) = \frac{(1-az+bz^2)}{b-az+z^2}.\frac{(1-az^{-1}+bz^{-2})}{b-az^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \cancel{\frac{bz^2-(ab+a)z+1+a^2+b^2-(ab+a)z^{-1}+bz^{-2}}{bz^2-(ab+a)z+1+a^2+b^2-(ab+a)z^{-1}+bz^{-2}}}, 1 = 1$$

3.3. Item c

Se pide demostrar que los pares de polos y ceros ocurren en pares recíprocos y conjugados.
demostración:
Se tiene que función transferencia genérica de un sistema puede escribirse como:

$$H(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_0}, \text{ Donde los } b_i \text{ y los } a_i \text{ son reales}(\forall i \epsilon \mathbb{N})$$

Si se define el denominador de la transferencia como f(z) se tiene que los polos del sistema están dados por:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i = 0$$

Asumiendo que z_j es una raíz compleja de $f(z)$, si evaluamos $f(\overline{z_j})$ se llega a que:

$$f(\overline{z_j}) = \sum_{i=0}^{m} b_i \overline{z}_j^i = \sum_{i=0}^{m} b_i \overline{z_j^i} \overset{b_i \epsilon \mathbb{R}}{=} \sum_{i=0}^{m} \overline{b_i} \overline{z_j^i} = \sum_{i=0}^{m} \overline{b_i z_j^i}$$

$$= \overline{\sum_{i=0}^{m} b_i z_j^i} \overset{z_j raiz}{=} \overline{0} = 0 \rightarrow \overline{z_j} \text{ también es raíz.}$$

Ya que el numerador también es un polinomio con coeficientes reales aplica la misma deducción.