Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Dr. S. Cornelsen / C. Pich

7. Übungsblatt

Ausgabe: 08.12.2006 **Abgabe:** 15.12.2006, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 22: Knotenkapazitäten 6 Punkte

Betrachten Sie ein Flussnetzwerk $((V, E), s, t, c)$ mit $c : E \cup V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, in dem es nicht nur Kapazitätsbedingungen für Kanten gibt, sondern bei dem die Menge des Flusses, der in einen Knoten fließt, ebenfalls beschränkt ist. Für einen Fluss $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt also neben den üblichen Bedingungen die Kapazitätsbedingung $\sum_{w:(w,v)\in E} f(w, v) \leq c(v)$ für alle $v \in V$.

Zeigen Sie, dass man einen maximalen Fluss in einem solchen Netzwerk auf einen maximalen Fluss in einem Netzwerk nur mit Kantenkapazitäten zurückführen kann.

Aufgabe 23: Heiratsproblem 8 Punkte

Ein Heiratsvermittler steht vor folgendem Problem: Es gibt endlich viele Jungs, von denen jeder einige Freundinnen hat. Manche Jungs können auch gleiche Freundinnen haben. Es sollen nun möglichst viele Ehen vermittelt werden, so dass jeweils nur befreundete Paare heiraten und am Ende jeder mit maximal einer Person verheiratet ist.

Das Problem lässt sich folgendermaßen formalisieren. Seien V_1 und V_2 zwei disjunkte Mengen und sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein Graph mit einer Kantenmenge $E \subseteq \{\{v_1, v_2\};\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$. Eine Teilmenge $E' \subseteq E$ der Kantenmenge heißt *unabhängig*, falls keine zwei Kanten in E' inzident sind. Sei $\mathcal{U} = \{E' \subseteq E;\ E' \text{ ist unabhängig}\}$. Dann entspricht $\mathcal{U}$ den in einer monogamen Gesellschaft zulässigen Mengen von Eheverbindungen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ ein Unabhängigkeitssystem, aber kein Matroid über E ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ Schnitt von zwei Matroiden ist. Der Schnitt zweier Matroide $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ über einer endlichen Menge M ist dabei definiert als $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. (Hinweis: Betrachten Sie für $i = 1, 2$ die Mengen $\mathcal{U}_i := \{E' \subseteq E;\ \deg_{(V,E')}(v) \leq 1 \text{ für } v \in V_i\}$.)

(c) Geben Sie an, wie man das Heiratsproblem mit Hilfe maximaler Flüsse lösen kann.

Aufgabe 24: Erhöhende Pfade 6 Punkte

Zeigen Sie, dass man einen maximalen Fluss in einem Netzwerk $G = (V, E)$ immer durch eine Folge von höchstens $|E|$ erhöhenenden Pfaden bestimmen kann. (Hinweis: Betrachten Sie Pfade nach Bestimmung des maximalen Flusses.)