Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Dr. S. Cornelsen / C. Pich

Entwurf und Analyse von Algorithmen
WS 2006/2007

3. Übungsblatt

Ausgabe: 10.11.2006 **Abgabe:** 17.11.2006, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 9: Amortisierte Analyse — 6 Punkte

Ein m-Bit-Binärzähler sei als Feld z der Länge m repräsentiert, wobei das niederwertigste Bit an Stelle 0 steht. Der Binärzähler unterstützt die Operationen:

`reset` Setzt alle Werte des Feldes z auf 0 zurück, und

`inc` Erhöht den Wert des Zählers um 1.

Die Operation `inc` sei folgendermaßen implementiert: Zu Beginn wird der Variablen i der Wert 0 zugewiesen. Falls $z[i]$ den Wert 1 hat, wird $z[i]$ eine 0 zugewiesen, i um eins erhöht und der Schritt wiederholt. Ansonsten, d.h. $z[i]$ enthält eine 0, wird $z[i]$ eine 1 zugewiesen und die Operation beendet.

Schätzen Sie die Laufzeit von einer `reset`-Operation und n `inc`-Operationen ab, indem Sie

(a) für jede Operation einzeln die worst-case Laufzeit betrachten, und

(b) eine amortisierte Analyse durchführen.

Aufgabe 10: Graustufenbilder — 6 Punkte

Graustufenbilder seien gegeben als $(m \times n)$-Matrizen mit den Werten $\{1, 2, \ldots, k\}$ (den Graustufen). Zwei Bildpunkte (i_1, j_1) und (i_2, j_2) heißen *benachbart*, wenn sie den gleichen Grauwert haben und $|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| \leq 1$ gilt. Der transitive Abschluss dieser symmetrischen Relation ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation entsprechen den zusammenhängenden Regionen gleichen Grauwerts im Bild.

(a) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Bestimmung der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation auf der Basis von Union-Find, der mit $\mathcal{O}(m \cdot n)$ Union- und Find-Operationen auskommt.

(b) Formulieren Sie eine Invariante für Ihren Algorithmus, aus der die Korrektheit ersichtlich wird (ähnlich einer Induktionsvoraussetzung).

[bitte wenden]

Aufgabe 11: Mengenverwaltung mit Listen **8 Punkte**

Außer mit Arrays und Bäumen kann man disjunkte Mengen und deren Vereinigungen auch mit verketteten Listen realisieren: Jede Menge wird als eigene Liste repräsentiert, die aus Einträgen der Form (Element, Mengenindex, Zeiger zum nächsten Eintrag) besteht. Außerdem verwaltet man zu jeder solchen Liste einen Zeiger zum ersten und zum letzten Eintrag, so dass man bei $\textsc{Union}(x, y)$ die Liste von x an die von y hängen und die Mengenindizes im Anhängsel auf y setzen kann. Die Zahl der Operationen ist n, die der Elemente in $\mathcal{O}(n)$.

(a) Geben Sie Pseudocode für die Operationen Makeset, Find und Union an.

(b) Zeigen Sie, dass es Folgen von n Operationen gibt, so dass die Laufzeit in $\Theta(n^2)$ liegt.

Dies kann man aber beheben, indem man in der Union-Operation immer die Mengenindizes der *kleineren* der beiden Mengen aktualisiert. Dazu muss man sich zusätzlich für jede Liste ihre Länge merken.

(c) Geben Sie Pseudocode für die Operationen Makeset, Find und Union an.

(d) Zeigen Sie, dass die Laufzeit in $\mathcal{O}(n \log n)$ ist