

6. Übungsblatt

Ausgabe: 01.12.2006 **Abgabe:** 08.12.2006, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 19: Schnittkreuzungen

8 Punkte

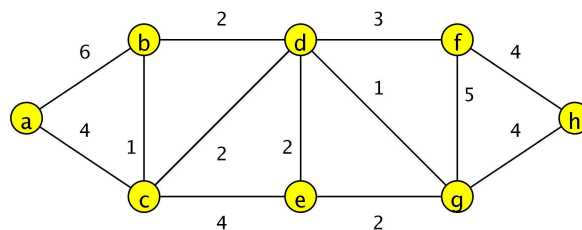
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Man sagt, dass sich zwei Schnitte $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ *kreuzen*, wenn die Mengen $A = S \cap T$, $B = S \cap (V \setminus T)$, $C = (V \setminus S) \cap T$ und $D = (V \setminus S) \cap (V \setminus T)$ alle nicht leer sind. Seien nun $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ zwei sich kreuzende minimale Schnitte mit Gewicht λ .

- (a) Zeigen Sie, dass der Graph, der aus G durch jeweiliges Verschmelzen der Knoten in A, B, C, D entsteht, ein Kreis mit Kantengewichten $\lambda/2$ ist.
- (b) Folgern Sie, dass $(A, V \setminus A), (B, V \setminus B), (C, V \setminus C), (D, V \setminus D)$ ebenfalls minimale Schnitte sind.
- (c) Sei $\{s, t\} \in E$ und seien $(X, V \setminus X)$ und $(Y, V \setminus Y)$ zwei minimale Schnitte von G , die s und t trennen. Zeigen Sie, dass sich diese Schnitte nicht kreuzen.

Aufgabe 20: Algorithmus von Stoer und Wagner

6 Punkte

Berechnen sie mit dem Algorithmus von Stoer und Wagner einen minimalen Schnitt im folgenden Graphen. Kommentieren Sie den Ablauf analog zu dem Beispiel im Skriptum.



[Bitte wenden]

Aufgabe 21: Blutgruppen**6 Punkte**

In einem Krankenhaus soll bestimmt werden, ob die Vorräte an Blutkonserven ausreichend sind, um den Bedarf zu decken. Da im Blut eines Menschen A- und B-Antigene jeweils vorkommen oder nicht, gibt es die Blutgruppen A, B, AB und 0.

Ein Mensch kann eine Blutspende nur empfangen, wenn in seinem eigenen Blut die Antigene der Spende vorkommen, d.h. Menschen mit der Blutgruppe A können Spenden der Gruppen A und 0 empfangen, Menschen mit Blutgruppe B Spenden der Gruppen B und 0, Menschen mit Gruppe 0 nur von Gruppe 0, und Menschen mit AB von allen Gruppen.

- (a) Seien $s_0, s_A, s_B, s_{AB} \in \mathbb{N}_0$ die Anzahlen der vorrätigen und $d_0, d_A, d_B, d_{AB} \in \mathbb{N}_0$ die der benötigten Blutkonserven der entsprechenden Gruppen. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der feststellt, ob man mit den Vorräten den Bedarf decken kann.
- (b) Der Vorrat von 105 Blutkonserven und der Bedarf von 100 sei folgendermaßen verteilt:

Gruppe	Vorrat	Bedarf
0	50	45
A	36	42
B	11	8
AB	8	5

Geben Sie eine Zuordnung von Blutkonserven zu Empfängern an, so dass möglichst viele Empfänger eine Blutspende bekommen.

- (c) Gebrauchen Sie ein MINCUT-Argument, um zu zeigen, dass in (b) nicht alle Empfänger eine Blutspende bekommen können.