Universität Konstanz — Entwurf und Analyse von Algorithmen
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft — WS 2006/2007
Dr. Sabine Cornelsen / Christian Pich

Satz 1
Sei V eine endliche Menge, $s, t \in V$, $c : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ und $E = \{(u, v) \in V \times V;\ c(u, v) > 0\}$. Wählt man unter den aktiven Knoten immer solche mit größter Höhe h, so ist die Anzahl nicht-saturierender Push*-Operationen im Algorithmus von Goldberg&Tarjan in $\mathcal{O}(|V|^2|E|^{1/2})$.*

Der Beweis wird nach

> Cheriyan und Mehlhorn: *An Analysis of the Highest-Level Selection Rule in the Preflow-Push Max-Flow Algorithm*, Information Processing Letters 69 (1999), 239-242.

geführt. Betrachte die Phasen

$$\underbrace{R}\underbrace{PPPPR}\underbrace{PPP}\underbrace{PPR}\underbrace{PP}\underbrace{P}, \qquad R = \text{Relabel}, P = \text{Push}$$

des Algorithmus zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Veränderungen von

$$H = \max\{h(v);\ v \text{ aktiv}\}.$$

Am Ende einer Phase steht also ein Relabel und H wird erhöht, oder ein Push, das das letzte Element der Höhe H deaktiviert und H wird erniedrigt. Sei $n = |V|$ und $m = |E|$.

Lemma 1
Es gibt höchstens $4n^2$ Phasen.

Beweis: H wird durch Relabel-Operationen höchstens um $2n^2$ erhöht, kann also auch höchstens $2n^2$ mal durch Push-Operationen erniedrigt werden. □

Sei $K > 0$. Eine Phase heiße *billig*, falls sie höchstens K nicht-saturierende Push enthält und *teuer* sonst.

Folgerung 1
Die Anzahl nicht-saturierender Push *in billigen Phasen ist höchstens $4n^2K$ also in $\mathcal{O}(n^2K)$.*

Lemma 2
Die Anzahl nicht-saturierender Push *in teuren Phasen ist in $\mathcal{O}(n^2m/K)$.*

Beweis: Die Menge

$$V_H = \{v \in V;\ h(v) = H\}$$

ändert sich während einer Phase nicht und während einer teuren Phase gilt $|V_H| > K$: Jedes der über K nicht-saturierenden Push wird auf einen aktiven Knoten in V_H angewandt und deaktiviert diesen. Sei

$$D(v) = \{w \in V;\ h(w) \leq h(v)\}$$

Dann gilt immer $0 \leq |D(v)| \leq n$. Betrachte die Potentialfunktion

$$\phi = \sum_{v \text{ aktiv}} \frac{1}{K}|D(v)|$$

Nach der Initialisierung ist $\phi = |\{v \in V \setminus \{s,t\};\ c(s,v) > 0\}| \cdot (n-1)/K \leq n^2/K$. Die Potentialfunktion wird unter den verschiedenen Operationen wie folgt verändert.

Relabel(v) erhöht ϕ um höchstens n/K: nur $|D(v)|$ kann größer werden.

saturierendes Push(v,w) erhöht ϕ um höchstens n/K: nur w kann neu aktiv werden.

nicht-saturierendes Push(v,w) erniedrigt ϕ um mindestens $1/K$, in teuren Phasen um mindestens 1: v wird deaktiviert und nur w kann neu aktiv werden. Es gilt $D(v) = D(w)\dot{\cup}V_H$.

Es gibt höchstens $2n^2$ Relabel und $2nm$ saturierende Push. Die Potentialfunktion wird also ausgehend von $\phi \leq n^2/K$ insgesamt höchstens um $(2n^2 + 2nm)\frac{n}{K}$ erhöht. In einer teuren Phase kann also ϕ höchstens $(n + 2n^2 + 2nm)\frac{n}{K} \in \mathcal{O}(n^2m/K)$ mal durch nicht-saturierende Push erniedrigt werden. □

Für beliebiges $K > 0$ ist die Anzahl nicht-saturierender Push also in $\mathcal{O}(n^2K + n^2m/K)$ und damit (das Minimum wird bei $K = m^{1/2}$ angenommen) in $\mathcal{O}(n^2m^{1/2})$.