Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Dr. S. Cornelsen / C. Pich

Entwurf und Analyse von Algorithmen
WS 2006/2007

12. Übungsblatt

Ausgabe: 26.01.2007 **Abgabe:** 02.02.2007, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 38: Linienschnitte — 6 Punkte

Gegeben sei eine Menge von n Liniensegmenten in der Ebene.

(a) Wieviele Schnittpunkte kann es höchstens geben? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(b) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man eine Menge von n Liniensegmenten erzeugen kann, die tatsächlich so viele Schnitte hat.

(c) Wieviele Schnittpunkte kann es höchstens geben, wenn die Geraden alle senkrecht oder waagerecht sind und Aufeinanderliegen nicht als Schnitt gezählt wird? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 39: Lichtschranken — 8 Punkte

Sie wollen einen Raum im Museum durch Lichtschranken sichern. Dazu werden für Sie zunächst auf dem Fußboden n Laser und n Fotozellen fest eingebaut, so dass keine 3 der $2n$ Objekte auf einer Geraden stehen.

Die Laser sollen dann von Ihnen so ausgerichtet werden, dass jeder Laser genau eine Fotozelle trifft und jede Fotozelle von genau einem Laser getroffen wird. Um Probleme zu vermeiden, wollen Sie die Laser so ausrichten, dass sich die Strahlen von je zwei Lasern auf dem Weg zu ihrer Fotozelle nicht kreuzen.

(a) Zeigen Sie, dass man (bei bereits gegebener Anordnung der Laser und Fotozellen) in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit eine Gerade g durch einen Laser und eine Fotozelle finden kann, so dass die Anzahl der Laser auf einer Seite von g der Anzahl der Fotozellen auf der gleichen Seite entspricht.

(b) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der (wieder bei bereits gegebener Anordnung der Objekte) eine Zuordnung von Lasern auf Fotozellen mit den gewünschten Eigenschaften findet. Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.

[Bitte wenden]

Aufgabe 40: Polygone **6 Punkte**

Diesmal soll unter einem *Polygon* $P = p_1, \ldots, p_n$ eine stückweise lineare geschlossene Kurve in der Ebene verstanden werden, die aus den Strecken $\overline{p_i p_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$ und $\overline{p_n p_1}$ – den *Seiten* des Polygons – besteht. Die Punkte $p_1, \ldots, p_n$ heißen *Ecken* des Polygons.

Ein Polygon heißt *einfach*, wenn es ein injektives Bild des Einheitskreises ist. Ein einfaches Polygon zerteilt die Ebene in zwei Teile: einen beschränkten Teil, das *Innere* des Polygons, und einen unbeschränkten Teil, das *Äußere* des Polygons.

(a) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit testet, ob eine gegebene Folge von Punkten in der Ebene die Folge der Ecken eines einfachen Polygons ist.

(b) Entwerfen Sie Algorithmus, der in $\mathcal{O}(n)$ testet, ob ein gegebener Punkt p im Inneren eines einfachen Polygons liegt.