

EQUAZIONE DELLA CATENARIA

INTRODUZIONE

Una corda inestensibile ed omogenea, vincolata ai due estremi e lasciata pendere sotto la sola azione del suo peso, si dispone nel piano verticale secondo una curva nota come *catenaria*. L'equazione di una catenaria si scrive, in generale, come

$$y = \mathcal{C}(x; a, x_0, y_0) = y_0 + a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right). \quad (1)$$

Potete verificare che, in questo modello, la coordinata del punto più basso è $(x_0, y_0 + a)$.

Lo scopo di questa esperienza è cercare di capire se e quanto questa semplice schematizzazione descriva bene la realtà in un *setup* sperimentale concreto.

MATERIALE NECESSARIO

- Una corda (oppure un filo o una catena).
- Righello o metro a nastro.
- Smartphone o macchina fotografica digitale.

MISURE ED ANALISI

Campioneremo la posizione della nostra corda in un certo numero di punti attraverso l'analisi di una fotografia digitale del nostro *setup* sperimentale. Una volta trovata la catenaria di *best-fit*, studieremo le deviazioni dei dati sperimentali dal nostro modello attraverso un grafico dei residui.



ANALISI DELL'IMMAGINE

Per misurare le coordinate dei punti di interesse potete aprire l'immagine in matplotlib (come illustrato nell'esempio alla pagina seguente), posizionando il mouse sui punti stessi e leggendo le coordinate sulla barra inferiore della finestra. Se preferite, esiste un certo numero di alternative viabili, tra cui l'utilizzo di un qualsiasi programma di manipolazione di

immagini (e.g., <https://www.gimp.org/>) oppure di una utility apposita come <https://automeris.io/WebPlotDigitizer/>.

Notate che, in questo modo, tutte le vostre coordinate saranno espresse in *pixel*. Per convertire (e misurare il parametro a) in unità fisiche avrete bisogno di ricavare il fattore di scala corrispondente a partire da un elemento di lunghezza nota nella vostra immagine.

Fate attenzione alla stima delle incertezze di misura. Se siete sicuri di riuscire ad identificare con sicurezza il pixel corrispondente al punto di interesse, potete assumere che la misura sia *digitale*, con una risoluzione di 1 pixel. Ma quali sono i fattori che potrebbero invalidare questa assunzione?

FIT E GRAFICO DEI RESIDUI

Una volta eseguito il fit, potete valutare l'accordo tra modello e dati attraverso l'esame del grafico dei residui:

$$r_i = y_i - \mathcal{C}(x; \hat{a}, \hat{x}_0, \hat{y}_0) \quad \text{e} \quad \sigma_{r_i} = \sigma_{y_i}. \quad (2)$$

Se il modello, valutato in corrispondenza dei parametri di *best fit*, fornisce una buona descrizione dei dati, allora i residui debbono oscillare intorno allo zero con fluttuazioni paragonabili all'ampiezza delle barre d'errore. Qualsiasi deviazione indica un potenziale problema con il modello o con la stima delle incertezze (o entrambe).

Cosa concludete dall'analisi del grafico dei residui?

CONSIDERAZIONI PRATICHE

Si consiglia di scegliere una corda (o una catena) con una densità lineare non troppo piccola, ma allo stesso tempo quanto più possibile flessibile (e, ovviamente, omogenea). Sperimentate diverse soluzioni per trovare quella che fa al caso vostro.

La parte più difficile dell'esperienza sarà probabilmente il riuscire a scattare una foto con un'angolazione tale da evitare deformazioni significative nel piano della corda. A questo scopo potete aiutarvi con due o più fili a piombo—o addirittura con una griglia disegnata su un foglio di carta ed appesa opportunamente sullo sfondo (che vi aiuterebbe anche nella conversione tra pixel ed unità fisiche).

Nella stesura della relazione siete caldamente incoraggiati ad essere prodighi di dettagli sul *setup* sperimentale che avete usato (e.g., foto) e a mettere in evidenza le difficoltà che avete incontrato nella misura (e gli accorgimenti che avete utilizzato per superarle).

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib
3 from matplotlib import pyplot as plt
4 from scipy.optimize import curve_fit
5
6 # Visualizzazione dell'immagine in matplotlib---va da se': dovete sostituire il
7 # percorso al file contenente l'immagine con quello appropriato per voi.
8 # Una volta aperta l'immagine in matplotlib potete andare sopra con il mouse e
9 # vedrete la posizione (in pixel) visualizzata sulla barra inferiore della finestra.
10 # Questo vi permette di misurare manualmente la posizione di un numero arbitrario
11 # di punti nell'immagine stessa.
12 file_path = '../figures/catenaria.jpg'
13 plt.figure('Immagine originale')
14 img = matplotlib.image.imread(file_path)
15 plt.xlabel('x [pixels]')
16 plt.ylabel('y [pixels]')
17 plt.imshow(img)
18
19 def catenary(x, a, c, x0):
20     """Modello di catenaria.
21     """
22     return c + a * np.cosh((x - x0) / a)
23
24 # Come prima: usate il percorso al vostro file.
25 file_path = '../macro/data/catenaria.txt'
26 x, y = np.loadtxt(file_path, unpack=True)
27 # Ricordate: il riferimento delle immagini, tipicamente, e' in alto a sinistra,
28 # per cui potreste aver bisogno di cambiare segno alla y.
29 y = -y
30 # Fate attenzione alle incertezze: il valore, qui, e' completamente arbitrario.
31 sigma_y = 3.
32
33 # Grafico principale.
34 fig = plt.figure('Fit e residui')
35 fig.add_axes((0.1, 0.3, 0.8, 0.6))
36 plt.errorbar(x, y, sigma_y, fmt='o')
37 # Fit. Notate che, per far convergere il fit, avrete bisogno di fornire una
38 # stima iniziale ragionevole dei parametri.
39 popt, pcov = curve_fit(catenary, x, y, p0=(1000., -3000., 2300.))
40 a_hat, c_hat, x0_hat = popt
41 sigma_a, sigma_c, sigma_x0 = np.sqrt(pcov.diagonal())
42 print(a_hat, sigma_a, c_hat, sigma_c, x0_hat, sigma_x0)
43 plt.plot(x, catenary(x, a_hat, c_hat, x0_hat))
44 plt.grid(which='both', ls='dashed', color='gray')
45 plt.ylabel('y [u. a.]')
46 # Grafico dei residui.
47 fig.add_axes((0.1, 0.1, 0.8, 0.2))
48 res = y - catenary(x, a_hat, c_hat, x0_hat)
49 plt.errorbar(x, res, sigma_y, fmt='o')
50 plt.grid(which='both', ls='dashed', color='gray')
51 plt.xlabel('x [u. a.]')
52 plt.ylabel('Residuals')
53 plt.ylim(-20.0, 20.0)
54 plt.savefig('catenaria.pdf')
55
56 plt.show()

```