Langages et Automates
Grammaires

Engel Lefaucheux

Prépas des INP

Exercices

Donner la grammaire correspondante si l'entrée est un langage, et le langage si l'entrée est une grammaire. On fixe l'axiome S.

1. $$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid aAb \\ B &\rightarrow bBa \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} S &\rightarrow aSa \mid bSb \mid U \\ U &\rightarrow cU \mid \varepsilon \end{aligned}$$
3. $\{ab^n a \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $\{a^{2n} b^n \mid n \in \mathbb{N}$
5. $$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow ab \\ B &\rightarrow BB \end{aligned}$$

Hiérarchie de Chomsky

Type 0 Pas de restrictions sur les règles

Type 1 règles de la forme
$u\ A\ v \ \rightarrow\ u\ w\ v$ avec $A \in N$ et $u, v, w \in (N \cup T)^*$

Type 2 règles de la forme
$A \ \rightarrow\ w$ avec $A \in N$ et $w \in (N \cup T)^*$

Type 3 Toutes les règles sont soit de la forme
$A \ \rightarrow\ a\ B$ ou $A \ \rightarrow\ a$ (grammaire à droite)
soit de la forme
$A \ \rightarrow\ B\ a$ ou $A \ \rightarrow\ a$ (grammaire à gauche)

Hiérarchie de Chomsky

Type 0 Pas de restrictions sur les règles

Type 1 règles de la forme
$u\ A\ v \ \rightarrow\ u\ w\ v$ avec $A \in N$ et $u, v, w \in (N \cup T)^*$

Type 2 règles de la forme
$A \ \rightarrow\ w$ avec $A \in N$ et $w \in (N \cup T)^*$

Type 3 Toutes les règles sont soit de la forme
$A \ \rightarrow\ a\ B$ ou $A \ \rightarrow\ a$ (grammaire à droite)
soit de la forme
$A \ \rightarrow\ B\ a$ ou $A \ \rightarrow\ a$ (grammaire à gauche)

Grammaire de type 0 $\Longleftrightarrow$ Machine de Turing

Hiérarchie de Chomsky

Type 0 Pas de restrictions sur les règles

Type 1 règles de la forme
$u\ A\ v \ \rightarrow\ u\ w\ v$ avec $A \in N$ et $u, v, w \in (N \cup T)^*$

Type 2 règles de la forme
$A \ \rightarrow\ w$ avec $A \in N$ et $w \in (N \cup T)^*$

Type 3 Toutes les règles sont soit de la forme
$A \ \rightarrow\ a\ B$ ou $A \ \rightarrow\ a$ (grammaire à droite)
soit de la forme
$A \ \rightarrow\ B\ a$ ou $A \ \rightarrow\ a$ (grammaire à gauche)

Grammaire de type 0 $\Longleftrightarrow$ Machine de Turing
Grammaire de type ? $\Longleftrightarrow$ Expression régulière

Hiérarchie de Chomsky

Type 0 Pas de restrictions sur les règles

Type 1 règles de la forme
$u\ A\ v \ \rightarrow\ u\ w\ v$ avec $A \in N$ et $u, v, w \in (N \cup T)^*$

Type 2 règles de la forme
$A \ \rightarrow\ w$ avec $A \in N$ et $w \in (N \cup T)^*$

Type 3 Toutes les règles sont soit de la forme
$A \ \rightarrow\ a\ B$ ou $A \ \rightarrow\ a$ (grammaire à droite)
soit de la forme
$A \ \rightarrow\ B\ a$ ou $A \ \rightarrow\ a$ (grammaire à gauche)

Grammaire de type 0 $\Longleftrightarrow$ Machine de Turing
Grammaire de type 3 $\Longleftrightarrow$ Expression régulière

Exercices

Représenter les langages suivant avec une grammaire de type 3

- $baab^*$
- $b(aab)^*$

De quel type est la grammaire
$S \rightarrow aU \mid c$
$U \rightarrow Sb \mid d$
Quel est son langage ?

L_1 et L_2 langages de grammaire G_1 et G_2
Informellement, comment construire une grammaire pour
$L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$ et L_1^*

Exercices

Représenter les langages suivant avec une grammaire de type 3

- $baab^*$
- $b(aab)^*$

De quel type est la grammaire
$S \rightarrow aU \mid c$
$U \rightarrow Sb \mid d$
Quel est son langage ? $\{a^n cb^n, a^{n+1} db^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

L_1 et L_2 langages de grammaire G_1 et G_2
Informellement, comment construire une grammaire pour
$L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$ et L_1^*

Considérez la grammaire $(\{a, b, c\}, \{S\}, R, S)$ où les règles R sont

$$\begin{aligned} S &\rightarrow abS \\ S &\rightarrow bcS \\ S &\rightarrow bbS \\ S &\rightarrow a \\ S &\rightarrow cb \end{aligned}$$

Construisez l'arbre de dérivation des mots *bcbba*, *bbbcbba* et *bcabbbbbcb*.

De quel type est cette grammaire. Existe t'il une grammaire de type supérieur générant le même langage ?

Simplifier une grammaire

$\Rightarrow$ Supprimer les éléments **inutiles** de la grammaire

- Symboles **improductifs**
  - A est improductif s'il n'y a pas de $m \in T^*$ tel que $A \xrightarrow{*} m$
- Symboles **inaccessibles**
  - A est inaccessible s'il n'y a pas de α et β tels que $S \xrightarrow{*} \alpha A \beta$
- ϵ-productions
  - Une ϵ-production est une dérivation telle que $A \xrightarrow{*} \epsilon$
- Production simple
  - $A \rightarrow B$ est une production simple si $A \in N$ et $B \in N$

$\Rightarrow$ Pour toute grammaire, il existe une grammaire équivalente sans symboles improductifs ni inaccessibles, sans ϵ-productions ni productions simples

Élimination des symboles improductifs

- Calcul des symboles productifs (grammaire de type 2 ou 3)
  - Soit $P_1 = \{A \in N \mid \exists w \in T^*, A \to w \in R\}$
  - Tant que $P_i \neq P_{i+1}$
    $P_{i+1} = P_i \cup \{A \in N \mid \exists w \in (T \cup P_i)^*, A \to w \in R\}$

Que contient P_i ?

Élimination des symboles improductifs

- Calcul des symboles productifs (grammaire de type 2 ou 3)
  - Soit $P_1 = \{A \in N \mid \exists w \in T^*, A \to w \in R\}$
  - Tant que $P_i \neq P_{i+1}$
    $P_{i+1} = P_i \cup \{A \in N \mid \exists w \in (T \cup P_i)^*, A \to w \in R\}$

Que contient P_i ?

$\Longrightarrow$ Les symboles de $N \setminus P$ sont improductifs

$\Longrightarrow$ Enlever ces symboles et les règles associées

Élimination des symboles inaccessibles

- Calcul des symboles accessibles (grammaire de type 2 ou 3)
  - Soit $C_1 = \{S\}$
  - Tant que $C_i \neq C_{i+1}$
    $C_{i+1} = C_i \cup \{A \in N \mid \exists u, v \in (N \cup T)^*, X \in C_i, X \to uAw \in R\}$

Que contient C_i ?

Élimination des symboles inaccessibles

- Calcul des symboles accessibles (grammaire de type 2 ou 3)
  - Soit $C_1 = \{S\}$
  - Tant que $C_i \neq C_{i+1}$
    $C_{i+1} = C_i \cup \{A \in N \mid \exists u, v \in (N \cup T)^*, X \in C_i, X \rightarrow uAw \in R\}$

Que contient C_i ?

$\Longrightarrow$ Les symboles de $N \setminus C$ sont inaccessibles.

$\Longrightarrow$ Enlever ces symboles et les règles associées

Élimination des ε-production

▷ Calcul des symboles annulables (grammaire de type 2 ou 3)

- Soit $U_1 = \{A \in N \mid A \to \varepsilon \in R\}$
- Tant que $U_i \neq U_{i+1}$
  $U_{i+1} = U_i \cup \{A \in N \mid \exists u \in (U_i)^*, A \to \alpha \in R\}$

$\Longrightarrow$ Les symboles de U sont annulables.

$\Longrightarrow$ Modification de la grammaire

- Pour $A \in U$, remplacer les règles $X \to uAv$
  par $X \to uAv \mid uv$
- Supprimer les règles $A \to \varepsilon$ (sauf pour S)

Équivalences et productions simples

- Productions simples, dérivations et classes d'équivalences
  - Production simple : toute règle $A \to B$ avec $B \in N$
  - Soit la relation $\geqslant$ telle que $A \geqslant B$ si $A \xrightarrow{*} B$
  - Soit la relation $\approx$ telle que $A \approx B$ si $A \geqslant B$ et $B \geqslant A$
  - **Classes d'équivalences**
    - Si $A \approx B$, tout ce qui est dérivé de A peut l'être de B
    - Relation réflexive, symétrique et transitive
    - L'ensemble des classes est une **partition** de N
- Modification de la grammaire
  - On conserve les productions non-simples
  - Pour chaque classe d'équivalence
    - $\Rightarrow$ Choisir un symbole qui remplace tous les autres
  - $\Rightarrow$ Pour chaque dérivation $A \xrightarrow{*} B$
    - Pour chaque $B \to \beta$, ajouter $A \to \beta$

Exemple de simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow T|U$
  2. $U \rightarrow aYb|V$
  3. $V \rightarrow W$
  4. $X \rightarrow W|a$
  5. $Y \rightarrow Z$
  6. $Z \rightarrow c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs :
  - Symboles accessibles :
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple de simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow T|U$
  2. $U \rightarrow aYb|V$
  3. $V \rightarrow W$
  4. $X \rightarrow W|a$
  5. $Y \rightarrow Z$
  6. $Z \rightarrow c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles :
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple de simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow U$
  2. $U \rightarrow aYb$
  3.
  4. $X \rightarrow a$
  5. $Y \rightarrow Z$
  6. $Z \rightarrow c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\}$ $\Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\}$ $\Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple de simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow U$
  2. $U \rightarrow aYb$
  3.
  4.
  5. $Y \rightarrow Z$
  6. $Z \rightarrow c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple de simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \to U$
  2. $U \to aYb$
  3.
  4.
  5. $Y \to Z$
  6. $Z \to c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions : $\{Z, Y\} \Rightarrow$ modifier 6, 2
  - Productions simples :

Exemple de simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow U$
  2. $U \rightarrow aYb|ab$
  3.
  4.
  5. $Y \rightarrow Z$
  6. $Z \rightarrow c$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions : $\{Z, Y\} \Rightarrow$ modifier 6, 2
  - Productions simples :

Exemple de simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow U$
  2. $U \rightarrow aYb|ab$
  3.
  4.
  5. $Y \rightarrow Z$
  6. $Z \rightarrow c$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\}$ $\Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\}$ $\Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions : $\{Z, Y\}$ $\Rightarrow$ modifier 6, 2
  - Productions simples : $S \rightarrow U$ et $Y \rightarrow Z$ $\Rightarrow$ modifier 1, 2, 5, 6

Exemple de simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow aYb|ab$
  2.
  3.
  4.
  5. $Y \rightarrow c$
  6.
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions : $\{Z, Y\} \Rightarrow$ modifier 6, 2
  - Productions simples : $S \rightarrow U$ et $Y \rightarrow Z \Rightarrow$ modifier 1, 2, 5, 6

Exercice

- Réduire les grammaires suivantes
  - G_1
    - $S \rightarrow bSc|bTc|a|\epsilon$
    - $T \rightarrow U$
    - $U \rightarrow bUc|T$
    - $V \rightarrow U|bc$
  - G_2
    - $S \rightarrow UXT$
    - $T \rightarrow b$
    - $U \rightarrow aV|aXTXb$
    - $V \rightarrow cV|aWT$
    - $W \rightarrow V$
    - $X \rightarrow ab|\epsilon$
    - $Y \rightarrow cZ$
    - $Z \rightarrow aa$

Formes normales

- **Forme normale de Chomsky** : toutes les règles sont de la forme :
  $A \rightarrow BC$ avec $A, B, C \in N$
  ou
  $A \rightarrow a$ avec $a \in T$

- **Forme normale de Greibach** : toutes les règles sont de la forme :
  $A \rightarrow aw$ avec $w \in N^*$

Pour tout langage hors-contexte (notamment les langages réguliers) il existe une grammaire en forme normale de Chomsky et une grammaire en forme normale de Greibach qui le génèrent