Langages et Automates
Introduction et quelques mots sur les langages

Engel Lefaucheux

Prépas des INP

Organisation du cours

- 8 CM de 1h30
- 5 TD en demi-groupe
- L'ensemble des slides se trouve sur ma page web
  https://elefauch.github.io/

Objectifs du cours

- Méthodologie et approche scientifique :
  - La modélisation mathématique de problèmes informatiques.
  - L'analyse des modèles mathématiques.
- Connaissances spécifiques :
  - Plusieurs formalismes de modélisation (expression régulière, automates,...)
  - Les capacités de ces modèles, ainsi que leurs limitations.

Objectif du jour

- Définir ce qu'est un langage
- Apprendre à créer et manipuler un langage
  - Opérations sur les mots et les langages
- Langage régulier
  - Expression régulière
  - Critères de régularité

Plan

Outline

Qu'est-ce qu'un langage ?

- Un nombre incroyable de langage
  - Français, anglais, chinois, Russe,...
  - Braille, SMS, Morse,...
  - Pascal, Ocaml, C++, Python,...
- Origine du langage
  - Parlé ≈ -50000 ?
  - Écrit ≈ -6000 (écriture cunéiforme)
  - Informatique : 1951, A0
- Un langage est *structuré*:
  - Symboles (lettre, hiéroglyphe, chiffre,...)
  - Mots
  - Ordonnancement (phrase, structure "`if, then, else`", ...)

L'importance des règles

- Sans règle, tout est un langage
- L'ensemble des nombres premiers.
- Les programmes Python qui compilent correctement.
- L'ensemble des théorèmes mathématiquement vrai.

Résoudre un problème, c'est identifier un langage.

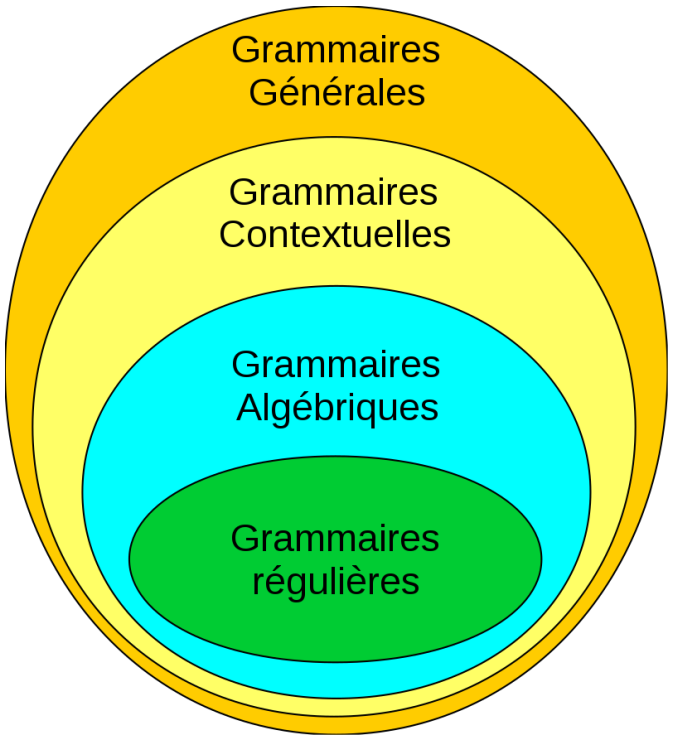
Entrée : un système $\mathcal{A}$
Question : $\mathcal{A}$ satisfait-il la propriété P ?

Entrée : un mot $\mathcal{A}$
Question : est-ce que $\mathcal{A}$ appartient au langage L_P ?

$\longrightarrow$ Certains langages ne sont pas étudiables !

Hiérarchie des langages (Chomsky, 1956)

Chomsky propose des limitations pour différentes grammaires, définissant ainsi des classes de langages formels



Les grammaires Générales ne sont pas toute puissantes.
$\longrightarrow$ Machine de Turing

Langage et machine

- L'**automate** (ordinateur) « comprend » un langage que l'ingénieur lui soumet :
  - Comme une **commande** (« ordre »)
  - Il « **reconnaît** » ou « **accepte** » un langage
  - Il ne « reconnaît pas » ou « n'accepte pas » les autres langages
- Ceci a besoin d'être formalisé pour :
  - Créer de **nouveaux langages**, sous certaines contraintes :
    - **Efficacité** : rapidité des traitements
    - **Expressivité** : capacité à formuler des « choses »
    - **Précision** : degré de contrôle sur ce que fait la machine
  - Savoir à l'avance **si un message** / code **sera reconnu** ou non par l'automate (sinon : erreurs)

Exemple d'un langage

Comment modéliser les exécutions d'un système simple ?

- Attribuer un symbole ou mot à chaque action du système
- N'autoriser que les ordres correspondant au système.

Comment représenter l'achat d'une baguette ou d'un croissant dans une boulangerie ?

- *entrer*, *commander_pain*, *commander_croissant*, *payer*, *sortir*

Exemple d'un langage

Comment modéliser les exécutions d'un système simple ?

- Attribuer un symbole ou mot à chaque action du système
- N'autoriser que les ordres correspondant au système.

Comment représenter l'achat d'une baguette ou d'un croissant dans une boulangerie ?

- *entrer*, *commander_pain*, *commander_croissant*, *payer*, *sortir*
- *entrer commander_pain payer sortir*

Exemple d'un langage

Comment modéliser les exécutions d'un système simple ?

- Attribuer un symbole ou mot à chaque action du système
- N'autoriser que les ordres correspondant au système.

Comment représenter l'achat d'une baguette ou d'un croissant dans une boulangerie ?

- *entrer*, *commander_pain*, *commander_croissant*, *payer*, *sortir*
- *entrer commander_pain payer sortir*
  ou
  entrer commander_croissant payer sortir

Exemple d'un langage (2)

Nous voulons modéliser une machine à café possédant les propriétés suivantes :

- Si à l'arrêt, on peut cliquer sur un bouton pour l'activer.
- En cours de fonctionnement, la machine fait du bruit pendant une durée aléatoire.
- Si la machine a été activé, elle va éventuellement produire du café et s'éteindre.

Quels symboles / mots pour ce modèle ?

Exemple d'un langage (2)

Nous voulons modéliser une machine à café possédant les propriétés suivantes :

- Si à l'arrêt, on peut cliquer sur un bouton pour l'activer.
- En cours de fonctionnement, la machine fait du bruit pendant une durée aléatoire.
- Si la machine a été activé, elle va éventuellement produire du café et s'éteindre.

Quels symboles / mots pour ce modèle ?

Quelles phrases représentent un bon fonctionnement du modèle ?

Outline

Comment construit-on un langage ?

- Description extentionnelle : $\{\text{mot}_1, \text{mot}_2, \text{mot}_3\}$
- Description intentionnelle : "tous les mots qui..."
- Description définitoire : $\{xyz \mid z = yx\}$
- Par opération sur des langages déjà définis

$\longrightarrow$ une structure d'anneau pour les langages

L'alphabet, une brique de base

Alphabet Σ : l'ensemble fini des élèments minimaux du langage

- Lettre : $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$
- Playstation : $\Sigma = \{haut, bas, gauche, droite, \square, \ldots\}$
- $\Sigma = \{abc, a, tub\}$
- $\Sigma = \emptyset$

Pas de répétitions ni d'ordre : $\{a, b, c, b\} = \{a, b, c\}$

Mot = concaténation de symboles

On fixe un alphabet Σ,

- Tout élément de Σ est un mot
- Concaténation : Si w et v sont des mots, alors $w \cdot v$ est un mot
  - Associativité : $w \cdot (v \cdot u) = (w \cdot v) \cdot u$
  - Non-commutativité : $0 \cdot 1 \neq 1 \cdot 0$
- ε représente le mot vide
  - $w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w$
- w^n représente le mot $\underbrace{w \cdot w \ldots w \cdot w}_{n \text{ times}}$

Pour $\Sigma = \{abc, a, tub\}$, $a \cdot abc \cdot a \cdot tub$ est un mot

On omettra souvent le $\cdot$ quand l'alphabet ne crée pas d'ambiguité:

Pour $\Sigma = \{a, b, c\}$, $a \cdot b \cdot c \cdot b = abcb$

Sous-mots et taille d'un mot

Si $z = uvw$

- u est un préfixe de z
- w est un suffixe de z
- u, v et w sont des facteurs de z.

Taille du mot z

- Notée $|z|$
- Nombre d'éléments dans z
- $|a \cdot l \cdot e \cdot s \cdot t \cdot o \cdot r \cdot m| = 8$
- $|\varepsilon| = 0$
- $|z| = |u| + |v| + |w|$

Combien existe t-il de mots de taille 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$?

Langages = Ensemble de mots

Tout ensemble de mots de Σ est un langage sur Σ.

Si L_1 et L_2 sont des langages, alors

- Union : $L_1 \cup L_2$ est un langage
  - $\{a, b, c, ab\} \cup \{a, b, cd\} = \{a, b, c, ab, cd\}$
  - associative et commutative
- Intersection : $L_1 \cap L_2$ est un langage
  - $\{a, b, c, ab\} \cap \{a, b, cd\} = \{a, b\}$
  - associative et commutative
- Différence : $L_1 \setminus L_2$ est un langage
  - $\{a, b, c, ab\} \setminus \{a, b, cd\} = \{c, ab\}$
  - non-associative et non-commutative

Autres opérations sur les langages

- concaténation : $L_1 \cdot L_2$ est un langage
  - Tout mot de L_1 concaténé à un mot de L_2
  - $\{a, b, c, ab\} \cdot \{a, b, cd\} =$
    $\{aa, ab, acd, ba, bb, bcd, ca, cb, ccd, aba, abb, abcd\}$
  - associative, non-commutative

- Puissance : L_1^n pour n entier est un langage
  - Correspond à $\underbrace{L_1 \cdot L_1 \ldots L_1 \cdot L_1}_{n \text{ times}}$

Étoile de Kleene

L^* est l'ensemble des mots obtenus par concaténation arbitraire

- $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots$
- Aussi appelé itéré ou fermeture de L
- $\{a, b\}^*$ est l'ensemble des mots écrits dans l'alphabet $\{a, b\}$
- idempotent : $(L^*)^* = L^*$
- $L^0 = \varepsilon \in L^*$
- $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$

Exercice

Quel langage est décrit par les structures suivantes :

- $(\{a, b\} \setminus \{a\}) \cup \{a\}$
- $(\{a, b\} \cap \{a\}) \cup \{a\}$
- $\{a, b\}^2 \cap \{a\}^*$

Est-ce que les mots suivants appartiennent au langage $(\{a, b\} \cdot \{\varepsilon, r\})^*$

- ε
- a
- $babar$

Outline

Un formalisme pour générer certains langages

Expressions régulières

- Parfois appellées expressions rationnelles
- Génère un langage "régulier"

Définition récursive sur un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

- ε, a et b sont des expressions régulières pour $\{\varepsilon\}$, $\{a\}$ et $\{b\}$
- Si r_1 et r_2 sont des expressions régulières générant L_1 et L_2, alors
  - $r_1 \cdot r_2$ génère $L_1 \cdot L_2$
  - $r_1 + r_2$ génère $L_1 \cup L_2$
  - r_1^* génère L_1^*
  - (r) est une expression régulière génèrant L_1

$\longrightarrow$ les parenthèses servent à ordonner l'application des opérations

Quelques exemples

Quelles langages pour les expressions régulières suivantes :

- $(a+b)^*$
- $a+b^*$
- $a(a)^*$
- $(a^*b^*)^*$
- $(a+ab^*a)^*$

Quelles expressions rationnelles pour les langages suivants :

- les mots n'ayant que des a ou que des b
- $\{am, bm, an, cn\}$
- les mots de $\{a, i, m, o, u\}^*$ ayant *miaou* en facteur
- $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Le cas des regexp

En pratique (sur ordinateur)

- l'alphabet est implicite (tous les caractères)
- raccourcis syntaxiques:

`.`	pour un caractère quelconque
`[a-z]`	pour $a\|b\|c\|\ldots\|z$
`[^abc]`	pour un caractère autre que `a`, `b` ou `c`
`\s`	pour les caractères d'espacement
`a?`	pour $\epsilon\|a$ (au plus un `a`)
`a+`	pour aa^* (au moins un `a`)
`e{50}`	pour $\mathcal{L}(e)^{50}$
`^` et `$`	pour début et fin de ligne

- possibilité de nommage de blocs et substitution de texte

Exemples

- `[0-9]{10}` dénote l'ensemble des numéros de téléphone
- `[a-z]+@[a-z]+[.][a-z]{3}` dénote des courriels
- `<[^>]*>` dénote les balises html (e.g. `<h1 class="first">`)

- https://regex101.com/

Expression régulière pour la machine à café

Rappelons l'exemple de la machine à café :

- Si à l'arrêt, on peut cliquer sur un bouton pour l'activer.
- En cours de fonctionnement, la machine fait du bruit pendant une durée aléatoire.
- Si la machine a été activé, elle va éventuellement produire du café et s'éteindre.

Quel expression régulière représente son comportement ?

Encore une modélisation

Un système de contrôle d'accès à un bâtiment fonctionne selon les règles suivantes :

- Une personne commence par badger son badge pour s'identifier.
- Si le badge est valide, elle peut entrer immédiatement. Sinon, elle doit effectuer une validation manuelle auprès du personnel.
- Après validation (automatique ou manuelle), elle doit ouvrir la porte pour accéder au bâtiment.
- La porte peut rester ouverte temporairement pour d'autres personnes déjà validées, mais elle finit toujours par se refermer automatiquement.

Modélisez les séquences possibles d'interactions avec ce système en utilisant une expression régulière.

Outline

Une règle d'or

Si des relations existent entre les exposants apparaissant dans la description du langage, alors celui-ci n'est pas régulier.

- $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n + m\}$

ne sont pas réguliers.

Plusieurs critères formels de non-régularité

- Théorème de Myhill-Nerode (complexe)
- Lemme de l'étoile (simple, mais ne marche pas tout le temps)

Lemme de l'étoile

Theorem

Soit L un langage régulier. Il existe un entier N tel que tout mot w de L de longueur $|w| \geq N$ possède une factorisation $w = xyz$ avec $0 < |y|$ telle que

1. $0 < |xy| \leq N$ *et*
2. $xy^n z \in L$ *pour tout entier* $n \geq 0$.

Lemme de l'étoile

Theorem

Soit L un langage régulier. Il existe un entier N tel que tout mot w de L de longueur $|w| \geq N$ possède une factorisation $w = xyz$ avec $0 < |y|$ telle que

1. $0 < |xy| \leq N$ *et*
2. $xy^n z \in L$ *pour tout entier* $n \geq 0$.

Quid de $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Exercice

Les langages suivants sont-ils réguliers ?

- $\{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$
- $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$
- Le langage des palindromes
- $(ab)^* \cap \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
- $ab(a+b)^* \cap \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$

Quelques références

Quelques liens vers des documents ayant aidé à réaliser ce cours :

- https://perso.liris.cnrs.fr/christine.solnon/langages.pdf
- http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_autom.pdf
- https://pageperso.lis-lab.fr/frederic.olive/Materiel/langagesL2/cours.pdf
- https://damien.nouvels.net/fr/enseignement
- https://www.i3s.unice.fr/ nlt/cours/licence/it/s6_itdut_poly.pdf