

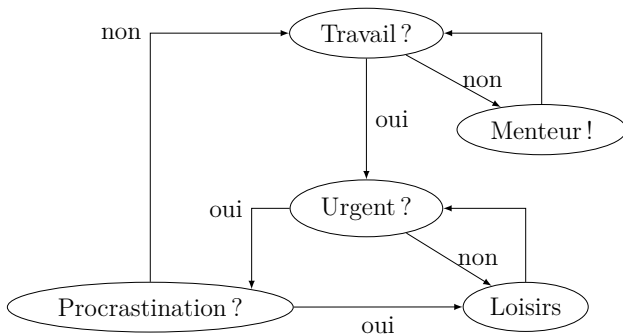
Langages et Automates Automates (et langages ?)

Engel Lefaucieux

Prépas des INP

L'automate: une machine abstraite

- Inspiré des diagrammes de flux
- Accepte ou rejette des mots
- Utile pour représenter un grand nombre de systèmes



Objectif de ce cours

- Découvrir la notion d'automate
- Apprendre et manipuler les types d'automates
 - Complet (ou non ?)
 - Déterministe (ou non ?)
 - Avec ε -transition (ou non ?)
- Opérations usuelles sur les automates
 - Complémentation
 - Union
 - Concaténation
 - Déterminisation

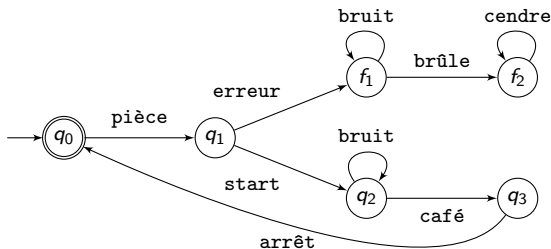
Plan

- 1 Qu'est-ce qu'un automate
- 2 Propriétés usuelles
- 3 Opérations usuelles

Outline

- 1 Qu'est-ce qu'un automate
- 2 Propriétés usuelles
- 3 Opérations usuelles

Représentation graphique



Représentation graphique d'un automate

- états : représentent l'état actuel du système / où en est l'analyse de l'entrée
- transition : action ou évolution du système / lecture du symbole suivant
- état initial / final : où démarrent et s'arrête la lecture

Zoom sur les états

⇒ Indique où en est l'analyse d'un mot

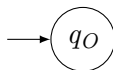
► États : **nœuds**

- **Cercle**
- **Label** : q_i avec i un entier



► État **initial**

- Ajout d'une **flèche** devant
- Souvent q_0 (mais pas obligatoire)



► État **final**

- **Double cercle**

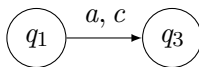


Zoom sur les transitions

⇒ Indique quelles prochains symboles sont acceptés

► Transitions : **arcs**

- **Arc orienté** (flèche) qui relie deux états
- **Label** : liste (ensemble) de symboles de Σ



⇒ Reconnaît le langage $\{a, c\}$ ou $\{a\} \cup \{c\}$ (mais pas $\{a.c\}$!)

⇒ Si, en q_1 , le prochain symbole est a ou c , aller en q_3

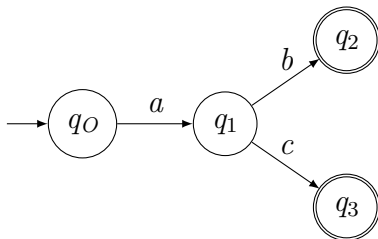
► Transition d'un état vers lui-même



- **Boucle** au dessus d'un état

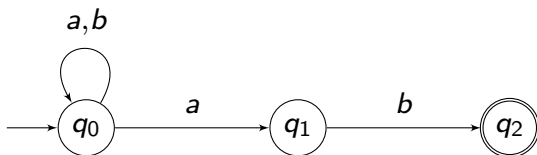
Reconnaissance d'un mot

- ▶ Chemin suivi au travers d'un automate
 - L'automate **consomme** les symboles
 - Une liste d'état « visités » est établie
 - Arrivée en fin de mot dans l'état final
- ▶ Exemple : mots ab ou ac



- Langage d'un automate l'ensemble des mots accepté
 - Langage reconnu par un automate = "langage reconnaissable"

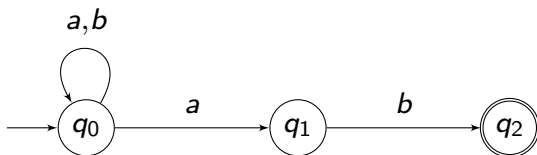
Possible non-déterminisme



Depuis q_0 en lisant a , on peut aller soit dans q_0 soit dans q_1

Un mot est accepté s'il existe un chemin acceptant

Possible non-déterminisme



Depuis q_0 en lisant a , on peut aller soit dans q_0 soit dans q_1

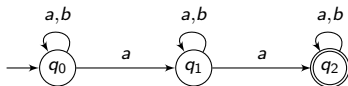
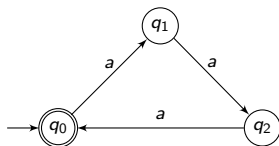
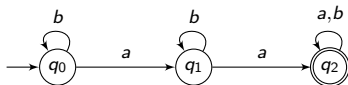
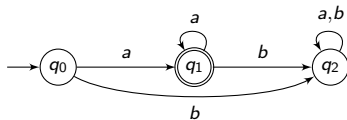
Un mot est accepté s'il existe un chemin acceptant

Le mot $aaab$ est-il accepté ?

Quel est le langage reconnu par cet automate ?

Exercices

Quels sont les langages reconnus par les automates suivants :

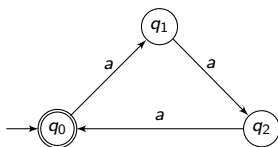


Construire l'automate reconnaissant les mots qui contiennent le facteur *abba*.

Définition formelle

Un automate est un quintuplet $\mathcal{A} = \{Q, \Sigma, T, I, F\}$

- États : $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$
- Alphabet : $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$
- Transitions : $T \subseteq Q \times \Sigma \times Q$
- États initiaux $I \subseteq Q$
- États finaux $F \subseteq Q$



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{a\}, I = \{q_0\}, F = \{q_0\}$ et
 $T = \{(q_0, a, q_1), (q_1, a, q_2), (q_2, a, q_0)\}$.

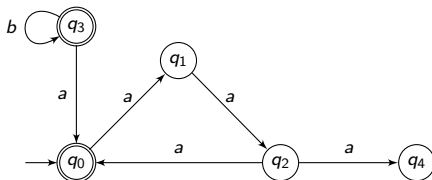
Outline

- 1 Qu'est-ce qu'un automate
- 2 Propriétés usuelles
- 3 Opérations usuelles

(co)-Accessibilité et émondage

- Un état est accessible s'il existe un chemin depuis un état initial vers cet état.
- Un état est co-accessible s'il existe un chemin depuis cet état vers un état final.
- Un automate est émondé si tous les états sont accessibles et co-accessibles

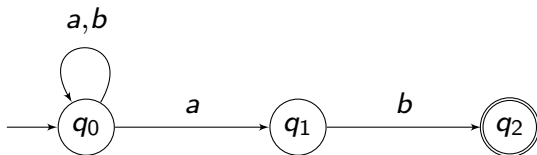
Émonder l'automate suivant :



Automate complet

- Un automate est complet si pour tout $a \in \Sigma$, tout $q \in Q$ il existe $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$.

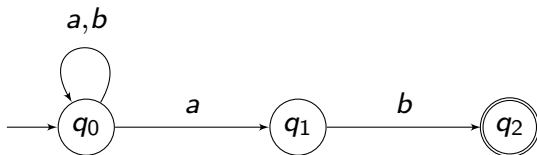
L'automate suivant est-il complet ? Peut-on le transformer pour le compléter ?



Automate complet

- Un automate est complet si pour tout $a \in \Sigma$, tout $q \in Q$ il existe $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$.

L'automate suivant est-il complet ? Peut-on le transformer pour le compléter ?

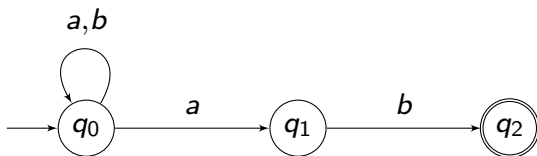


Est-ce que tous les automates sont complétables ?

Automate déterministe

- Un automate est déterministe si pour tout $a \in \Sigma$, tout $q \in Q$ il existe au plus un état $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$.

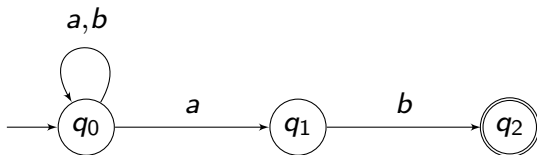
L'automate suivant est-il déterministe ? Peut-on le transformer pour le déterminer ?



Automate déterministe

- Un automate est déterministe si pour tout $a \in \Sigma$, tout $q \in Q$ il existe au plus un état $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$.

L'automate suivant est-il déterministe ? Peut-on le transformer pour le déterminer ?

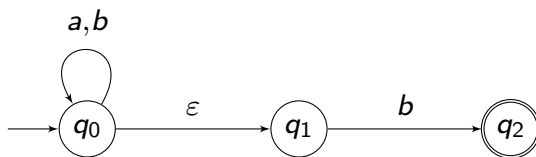


Est-ce que tous les automates sont déterminisables ?

Automate sans ε -transition

En théorie, on peut étiqueter des transitions par ε

Quel langage est reconnu par l'automate suivant ?



Peut-on retirer l' ε ?

Outline

- 1 Qu'est-ce qu'un automate
- 2 Propriétés usuelles
- 3 Opérations usuelles

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$?
- $\overline{L_1}$?
- $L_1 \cdot L_2$?
- $(L_1)^*$?
- $\text{miroir}(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$? ✓
- $\overline{L_1}$?
- $L_1 \cdot L_2$?
- $(L_1)^*$?
- $\text{miroir}(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$? ✓
- $\overline{L_1}$? ✓
- $L_1 \cdot L_2$?
- $(L_1)^*$?
- $\text{miroir}(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$? ✓
- $\overline{L_1}$? ✓
- $L_1 \cdot L_2$? ✓
- $(L_1)^*$?
- $\text{miroir}(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$? ✓
- $\overline{L_1}$? ✓
- $L_1 \cdot L_2$? ✓
- $(L_1)^*$? ✓
- $\text{miroir}(L_1)$?
- $L_1 \cap L_2$?

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$? ✓
- $\overline{L_1}$? ✓
- $L_1 \cdot L_2$? ✓
- $(L_1)^*$? ✓
- $\text{miroir}(L_1)$? ✓
- $L_1 \cap L_2$?

Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit L_1, L_2 deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

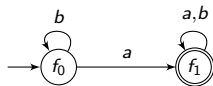
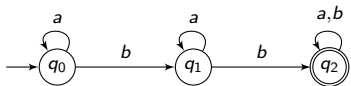
- $L_1 \cup L_2$? ✓
- $\overline{L_1}$? ✓
- $L_1 \cdot L_2$? ✓
- $(L_1)^*$? ✓
- $\text{miroir}(L_1)$? ✓
- $L_1 \cap L_2$? ✓

$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $l_3 = l_1 \times l_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q'_1) \in T_1$ et $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

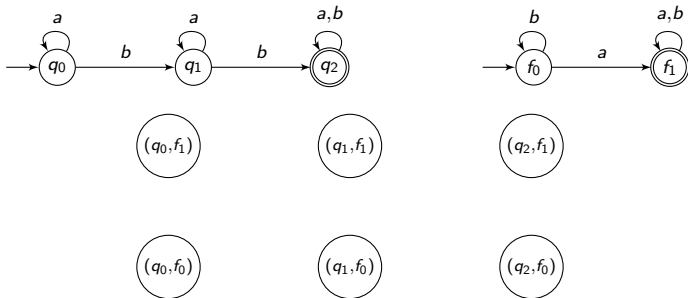


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $l_3 = l_1 \times l_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q'_1) \in T_1$ et $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

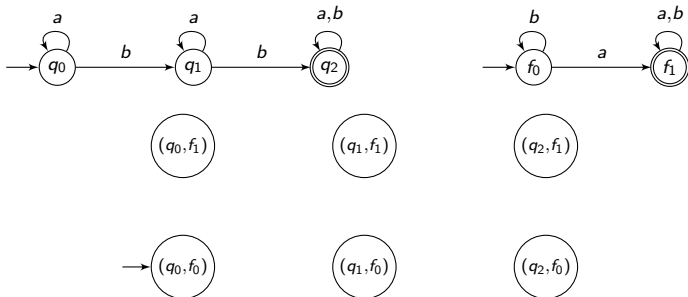


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $l_3 = l_1 \times l_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q'_1) \in T_1$ et $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

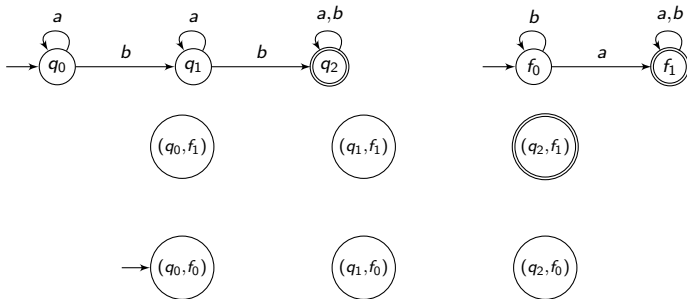


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $l_3 = l_1 \times l_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q'_1) \in T_1$ et $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

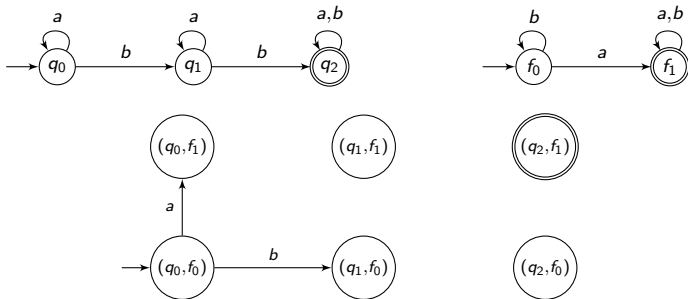


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $l_3 = l_1 \times l_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q'_1) \in T_1$ et $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

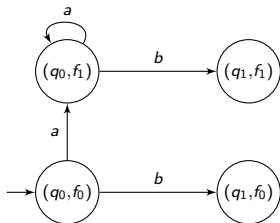
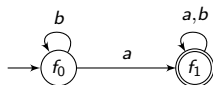
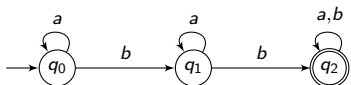


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $l_3 = l_1 \times l_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q'_1) \in T_1$ et $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

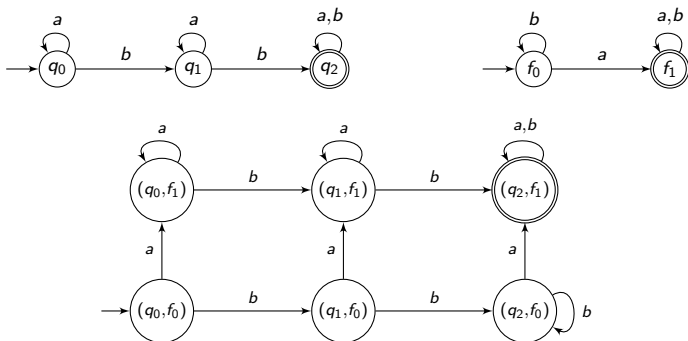


$L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$ and $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, $l_3 = l_1 \times l_2$ et $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$ si et seulement si $(q_1, a, q'_1) \in T_1$ et $(q_2, a, q'_2) \in T_2$



Exercices

Construire les automates pour les langages suivants

- $L_1 = \{w \mid |w| \text{ est pair}\}$
- $L_2 = (a + b)^*aab(a + b)^*$
- L_3 : les mots ne contenant pas le facteur aab
- $\text{mirroir}(L_3) \cap L_1$

Ces automates sont-ils émondés ? Complets ? Sans- ε ?