

# Langages et Automates Automates (et langages ?)

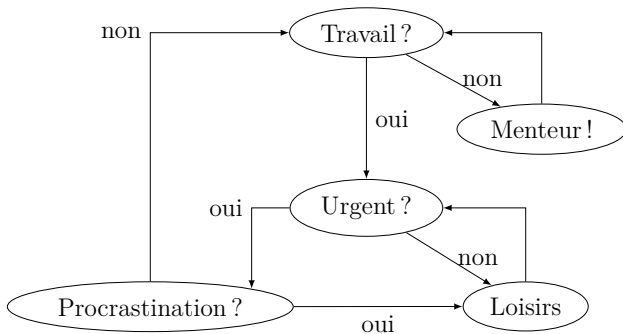
Engel Lefaucieux

Prépas des INP

# Distributeur automatique de billet

Un automate est une machine abstraite

- Inspiré des diagrammes de flux
- Accepte ou rejette des mots
- Utile pour représenter un grand nombre de systèmes



# Objectif de ce cours

- Découvrir la notion d'automate
- Apprendre et manipuler les types d'automates
  - Complet (ou non ?)
  - Déterministe (ou non ?)
  - Avec  $\varepsilon$ -transition (ou non ?)
- Opérations usuelles sur les automates
  - Complémentation
  - Union
  - Concaténation
  - Déterminisation

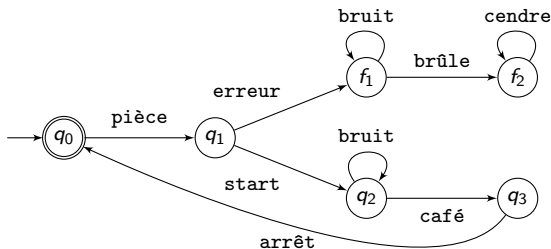
# Plan

- 1 Qu'est-ce qu'un automate
- 2 Propriétés usuelles
- 3 Opérations usuelles

# Outline

- 1 Qu'est-ce qu'un automate
- 2 Propriétés usuelles
- 3 Opérations usuelles

# Représentation graphique



## Représentation graphique d'un automate

- états : représentent l'état actuel du système / où en est l'analyse de l'entrée
- transition : action ou évolution du système / lecture du symbole suivant
- état initial / final : où démarrent et s'arrête la lecture

## Zoom sur les états

⇒ Indique où en est l'analyse d'un mot

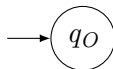
► États : **nœuds**

- **Cercle**
- **Label** :  $q_i$  avec  $i$  un entier



► État **initial**

- Ajout d'une **flèche** devant
- Souvent  $q_0$  (mais pas obligatoire)



► État **final**

- **Double cercle**

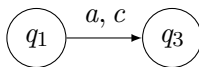


## Zoom sur les transitions

⇒ Indique quelles prochains symboles sont acceptés

► Transitions : **arcs**

- **Arc orienté** (flèche) qui relie deux états
- **Label** : liste (ensemble) de symboles de  $\Sigma$



⇒ Reconnaît le langage  $\{a, c\}$  ou  $\{a\} \cup \{c\}$  (mais pas  $\{a.c\}$  !)

⇒ Si, en  $q_1$ , le prochain symbole est  $a$  ou  $c$ , aller en  $q_3$

► Transition d'un état vers lui-même

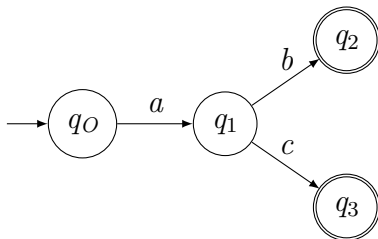


- **Boucle** au dessus d'un état



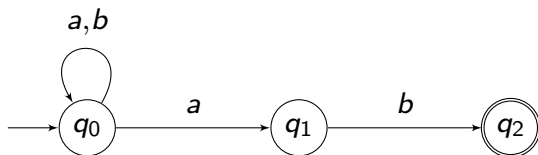
# Reconnaissance d'un mot

- ▶ Chemin suivi au travers d'un automate
  - L'automate **consomme** les symboles
  - Une liste d'état « visités » est établie
  - Arrivée en fin de mot dans l'état final
- ▶ Exemple : mots  $ab$  ou  $ac$



- Langage d'un automate l'ensemble des mots accepté
  - Langage reconnu par un automate = "langage reconnaissable"

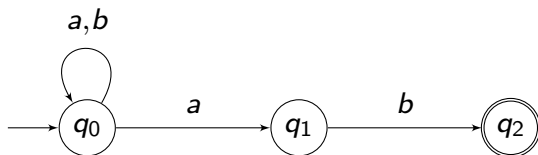
## Possible non-déterminisme



Depuis  $q_0$  en lisant  $a$ , on peut aller soit dans  $q_0$  soit dans  $q_1$

Un mot est accepté s'il existe un cheming acceptant

## Possible non-déterminisme



Depuis  $q_0$  en lisant  $a$ , on peut aller soit dans  $q_0$  soit dans  $q_1$

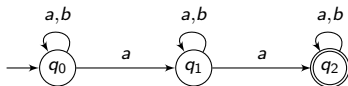
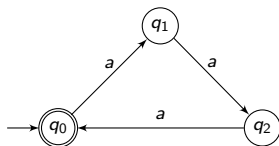
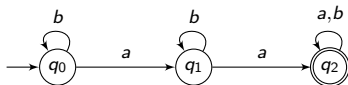
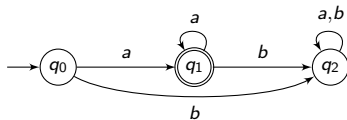
Un mot est accepté s'il existe un cheming acceptant

Le mot  $aaab$  est-il accepté ?

Quel est le langage reconnu par cet automate ?

# Exercices

Quels sont les langages reconnus par les automates suivants :

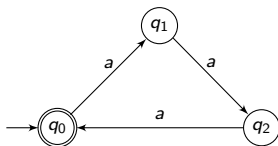


Construire l'automate reconnaissant les mots qui contiennent le facteur *abba*.

## Définition formelle

Un automate est un quintuplet  $\mathcal{A} = \{Q, \Sigma, T, I, F\}$

- États :  $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$
- Alphabet :  $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$
- Transitions :  $T \subseteq Q \times \Sigma \times Q$
- États initiaux  $I \subseteq Q$
- États finaux  $F \subseteq Q$



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{a\}, I = \{q_0\}, F = \{q_0\}$  et  
 $T = \{(q_0, a, q_1), (q_1, a, q_2), (q_2, a, q_0)\}$ .

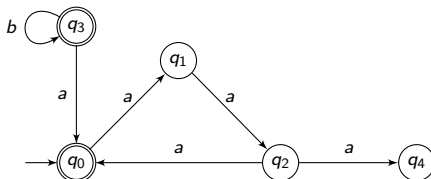
# Outline

- 1 Qu'est-ce qu'un automate
- 2 **Propriétés usuelles**
- 3 Opérations usuelles

## (co)-Accessibilité et émondage

- Un état est accessible s'il existe un chemin depuis un état initial vers cet état.
- Un état est co-accessible s'il existe un chemin depuis cet état vers un état final.
- Un automate est émondé si tous les états sont accessibles et co-accessibles

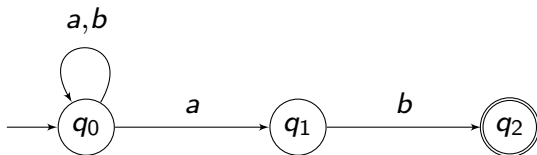
Émonder l'automate suivant :



# Automate complet

- Un automate est complet si pour tout  $a \in \Sigma$ , tout  $q \in Q$  il existe  $q' \in Q$  tel que  $(q, a, q') \in T$ .

L'automate suivant est-il complet ? Peut-on le transformer pour le compléter ?

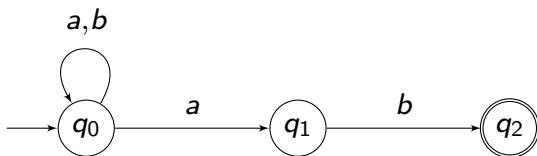




# Automate complet

- Un automate est complet si pour tout  $a \in \Sigma$ , tout  $q \in Q$  il existe  $q' \in Q$  tel que  $(q, a, q') \in T$ .

L'automate suivant est-il complet ? Peut-on le transformer pour le compléter ?

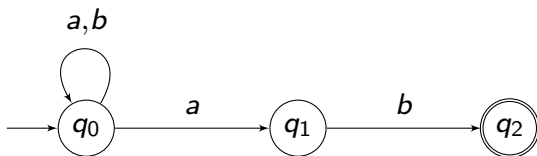


Est-ce que tous les automates sont complétables ?

# Automate déterministe

- Un automate est déterministe si pour tout  $a \in \Sigma$ , tout  $q \in Q$  il existe au plus un état  $q' \in Q$  tel que  $(q, a, q') \in T$ .

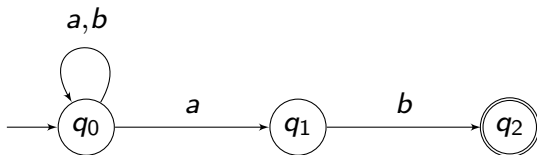
L'automate suivant est-il déterministe ? Peut-on le transformer pour le déterminer ?



# Automate déterministe

- Un automate est déterministe si pour tout  $a \in \Sigma$ , tout  $q \in Q$  il existe au plus un état  $q' \in Q$  tel que  $(q, a, q') \in T$ .

L'automate suivant est-il déterministe ? Peut-on le transformer pour le déterminer ?

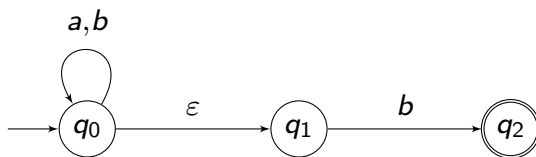


Est-ce que tous les automates sont déterminisables ?

# Automate sans $\varepsilon$ -transition

En théorie, on peut étiquetter des transitions par  $\varepsilon$

Quel langage est reconnu par l'automate suivant ?



Peut-on retirer l' $\varepsilon$  ?

# Outline

- 1 Qu'est-ce qu'un automate
- 2 Propriétés usuelles
- 3 Opérations usuelles

# Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit  $L_1, L_2$  deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$  ?
- $\overline{L_1}$  ?
- $L_1 \cdot L_2$  ?
- $\text{mirroir}(L_1)$  ?
- $L_1 \cap L_2$  ?

# Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit  $L_1, L_2$  deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$  ? ✓
- $\overline{L_1}$  ?
- $L_1 \cdot L_2$  ?
- $\text{mirroir}(L_1)$  ?
- $L_1 \cap L_2$  ?

# Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit  $L_1, L_2$  deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$  ? ✓
- $\overline{L_1}$  ? ✓
- $L_1 \cdot L_2$  ?
- $\text{mirroir}(L_1)$  ?
- $L_1 \cap L_2$  ?



# Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit  $L_1, L_2$  deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$  ? ✓
- $\overline{L_1}$  ? ✓
- $L_1 \cdot L_2$  ? ✓
- $\text{mirroir}(L_1)$  ?
- $L_1 \cap L_2$  ?

# Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit  $L_1, L_2$  deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

- $L_1 \cup L_2$  ? ✓
- $\overline{L_1}$  ? ✓
- $L_1 \cdot L_2$  ? ✓
- $\text{mirroir}(L_1)$  ? ✓
- $L_1 \cap L_2$  ?

# Opérations sur les automates

Quels langages peut-on créer à partir d'automates existants ?

Soit  $L_1, L_2$  deux langages reconnaissables par des automates déterministes. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ?

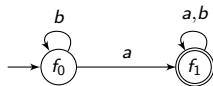
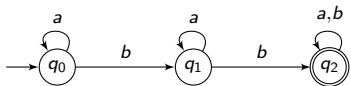
- $L_1 \cup L_2$  ? ✓
- $\overline{L_1}$  ? ✓
- $L_1 \cdot L_2$  ? ✓
- $\text{mirroir}(L_1)$  ? ✓
- $L_1 \cap L_2$  ? ✓

# $L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$  and  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit  $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$ ,  $l_3 = l_1 \times l_2$  et  $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$  si et seulement si  $(q_1, a, q'_1) \in T_1$  et  $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

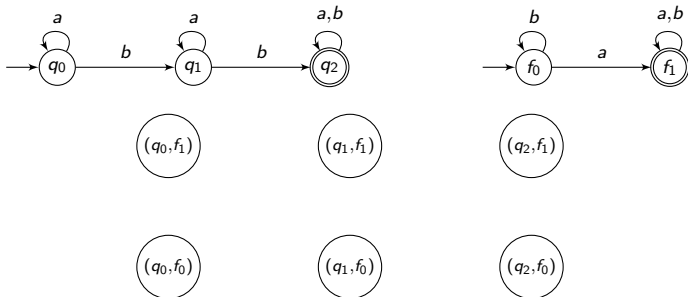


# $L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$  and  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit  $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$ ,  $l_3 = l_1 \times l_2$  et  $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$  si et seulement si  $(q_1, a, q'_1) \in T_1$  et  $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

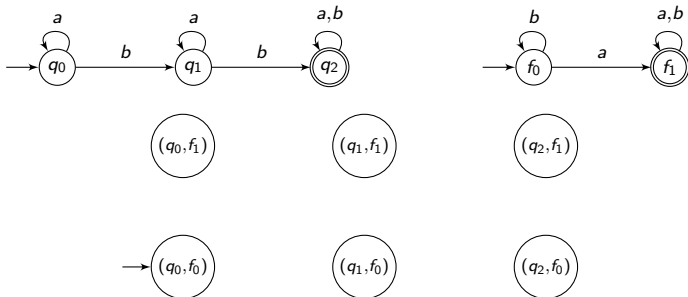


# $L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$  and  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit  $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$ ,  $l_3 = l_1 \times l_2$  et  $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$  si et seulement si  $(q_1, a, q'_1) \in T_1$  et  $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

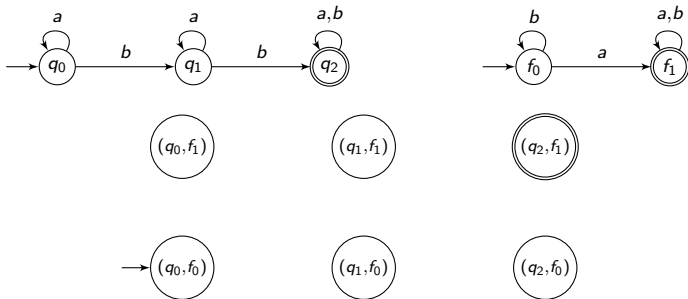


# $L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$  and  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit  $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$ ,  $l_3 = l_1 \times l_2$  et  $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$  si et seulement si  $(q_1, a, q'_1) \in T_1$  et  $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

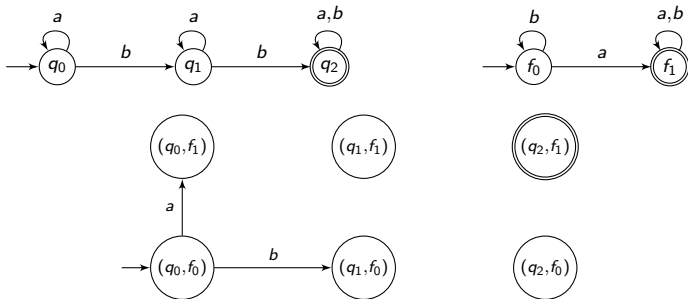


# $L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$  and  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit  $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$ ,  $l_3 = l_1 \times l_2$  et  $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$  si et seulement si  $(q_1, a, q'_1) \in T_1$  et  $(q_2, a, q'_2) \in T_2$



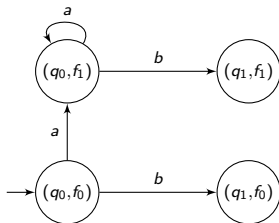
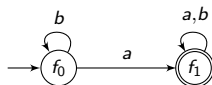
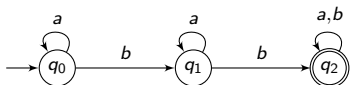


# $L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$  and  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit  $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$ ,  $l_3 = l_1 \times l_2$  et  $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$  si et seulement si  $(q_1, a, q'_1) \in T_1$  et  $(q_2, a, q'_2) \in T_2$

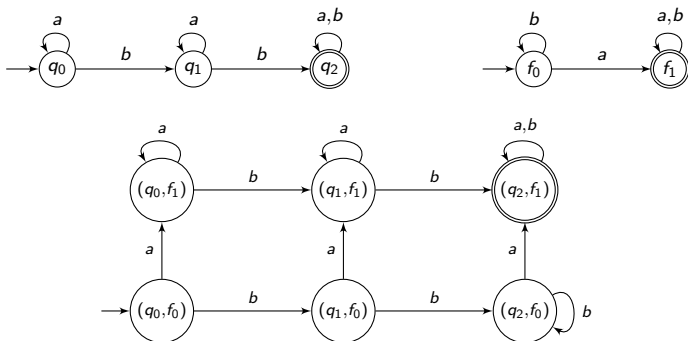


# $L_1 \cap L_2$

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, T_1, l_1, F_1)$  and  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, T_2, l_2, F_2)$

On construit  $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, T_3, l_3, F_3)$

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$ ,  $l_3 = l_1 \times l_2$  et  $F_3 = F_1 \times F_2$
- $((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \in T_3$  si et seulement si  $(q_1, a, q'_1) \in T_1$  et  $(q_2, a, q'_2) \in T_2$



# Exercices

Construire les automates pour les langages suivants

- $L_1 = \{w \mid |w| \text{ est pair}\}$
- $L_2 = (a + b)^*aab(a + b)^*$
- $L_3$  : les mots ne contenant pas le facteur  $aab$
- $\text{mirroir}(L_3) \cap L_1$

Ces automates sont-ils émondés ? Complets ? Sans- $\varepsilon$  ?