Ростовский Корнелиус, 277 группа

Задание №7

Задача №3(Задача 19)

При измерении длины стержня, истинная длина которого равна l $>$ 0 (и неизвестна), ошибка измерения имеет распределение $N(0, kl)$, где k — известное число. Найти оценку наибольшего правдоподобия для параметра, построенную на основании независимых измерений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ длины стержня.

Решение: $X_i = l + \varepsilon_i, i = 1, n$, где $\varepsilon_i \in N(0, kl)$

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i),$$

X$_i \in N(l, kl)$

$$L(x, l) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(kl)^{\frac{n}{2}}} exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2}{2kl}\right)$$

$$lnL(x, l) = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2}{2kl} + \frac{n}{2} ln\left(\frac{1}{2\pi kl}\right) =$$

$$= -\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2}{2kl} - \frac{n}{2} ln(kl2\pi)$$

$$\frac{\partial lnL(x, l)}{\partial l} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2}{kl} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2}{2kl^2} - \frac{n}{2}\frac{1}{l} = 0$$

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i l - 2nl^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i l + nl^2 - nkl = 0$$

$$nl^2 + nkl - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\mathcal{D} = n^2k^2 + 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\hat{l} = \frac{-nk + \sqrt{n^2k^2 + 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{2n} = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4n\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n}}}{2}$$

Задача №4(Задача 20)

Найти оценки наибольшего правдоподобия и эффективные оценки (если они существуют):

а) параметра λ в пуассоновском распределении;

б) параметра μ в показательном распределении;

в) параметра p в биномиальном распределении с n испытаниями.

Являются ли полученные оценки несмещенными, состоятельными?

Решение:

а)Poisson(λ)

$$L(x,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i} e^{-\lambda}}{k_i!}$$

$$lnL(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} ln(\lambda^{k_i} e^{-\lambda}) - C = \sum_{i=1}^{n} k_i ln\lambda + n(-\lambda) - C$$

$$\frac{\partial lnL(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\lambda} - n = 0$$

$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}$ -оценка наибольшого правдоподобия.

$E\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} = \lambda$ - несмещенность (1)

$D\hat{\lambda} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Dk_i = \frac{\lambda}{n} \to 0, n \to \infty$ (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow$ состоятельность

$$\frac{\partial lnL}{\partial \lambda^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\lambda^2}$$

$$M\left(\frac{\partial lnL}{\partial \lambda^2}\right) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} Mk_i = -\frac{n}{\lambda}$$

$D\hat{\lambda} = -\frac{1}{M\left(\frac{\partial lnL}{\partial \lambda^2}\right)} \Rightarrow$ эффективность

б) $Exp(\mu)$

$$L(x,\mu) = \prod_{i=1}^{n} \mu exp(-\mu x_i)$$

$$lnL = \sum_{i=1}^{n} ln(\mu \exp(-\mu x_i)) = nln\mu - \mu \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial \mu} = \frac{n}{\mu} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ - оценка наибольшего правдоподобия

$$E\hat{\mu} = nE\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = n\int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{\mu^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\mu x} dx =$$

$$= \frac{n\mu^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-2} e^{-\mu x} dx = //y = \mu x; dy = \mu dx// =$$

$$= \frac{n\mu^n}{\Gamma(n)} \frac{1}{\mu^{n-1}} \int_0^\infty y^{n-2} e^{-y} dy = \frac{n\mu}{\Gamma(n)} \Gamma(n-1) =$$

$$= \frac{n\mu}{(n-1)!}(n-2)! = \frac{n\mu}{(n-1)}$$

- оценка смещенная, но асимптотически несмещенная (1)

$$D\hat{\mu} = n^2 D\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) = n^2 \left(E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^2 - \left(E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)\right)^2\right)$$

$$E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^2 = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\frac{\mu^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\mu x} dx =$$

$$= \frac{\mu^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-3} e^{-\mu x} dx = \frac{\mu^n}{\Gamma(n)\mu^{n-2}} \int_0^\infty y^{n-3} e^{-y} dy =$$

$$= \frac{\mu^2}{\Gamma(n)} \Gamma(n-2) = \frac{\mu^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$\Rightarrow D\hat{\mu} = \frac{n^2\mu^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2\mu^2}{(n-1)^2} =$$

$$= n^2\mu^2\left(\frac{n-1-n+2}{(n-1)^2(n-2)}\right) = \frac{n^2\mu^2}{(n-1)^2(n-2)} \longrightarrow 0, n \to \infty, (2)$$

Из (1) и (2) следует состоятельность

$$\frac{\partial lnL}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\mu^2} = 0$$

$\Rightarrow$ оценка не эффективна, но асимтотически эффективна

в) Bin(p,n)

$$L(x,p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$lnL = \sum_{i=1}^n x_i lnp + (n - \sum_{i=1}^n x_i)ln(1-p)$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} + \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{p-1} = 0$$

$$p\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i + np - p\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ - оценка наибольшего правдоподобия

$E\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Ex_i = p$ -несмещенность (1)

$D\hat{p} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Dx_i = \frac{p(1-p)}{n} \to 0, n \to \infty$ (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow$ состоятельность

$$\frac{\partial^2 lnL}{\partial p^2 = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2}} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{(p-1)^2}$$

$$M\frac{\partial^2 lnL}{\partial p^2} = -\frac{np}{p^2} - \frac{n-np}{(p-1)^2} = -\frac{n}{p} + \frac{n}{p-1} =$$

$$= \frac{-pn+n+np}{p(p-1)} = \frac{n}{p(p-1)}$$

$\Rightarrow D\hat{p} = -\frac{1}{M\frac{\partial^2 lnL}{\partial p^2}} \Rightarrow$ эффективность

Задача №5 (Задача 40)

В результате наблюдения точечного случайного процесса (потока событий) получена выборка $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ моментов появления в нем событий. Предполагая, что наблюдаемый процесс является пуассоновским, найти ММП- оценки для интервала времени между событиями и для интенсивности потока событий.

Решение:

Задача №6 (Задача 64)

Значение сигнала Y на входе некоторого устройства может быть либо нулем, либо единицей. Значение Y недоступно для измерения. На выходе устройства наблюдается (и измеряется) величина , являющаяся суммой входного сигнала и гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией σ^2 . Построить оптимальное байесовское решающее правило для классификации входных сигналов на основании измерения величины X при известных вероятностях $P\{Y = 0\} = p, P\{Y = 1\} = 1 - p$.

Решение: