Домашнее задание 7, Новиков Герман, 277

Задача 1.

Задача 2.

Задача 3. (Задача 19). При измерении длины стержня, истинная длина которого равна $l > 0$ (и неизвестна), ошибка измерения имеет распределение $N(0, kl)$, где k — известное число. Найти оценку наибольшего правдоподобия для параметра l, построенную на основании независимых измерений $X_1, X_2, ..., X_n$ длины стержня.

Решение: Строим оценку максимума правдоподобия. Выпишем правдоподобие:

$$\mathcal{L}(l\,;\,X_1, \ldots, X_n) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n \mid l) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i \mid l) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi kl}} \exp\left(-\frac{(X_i - l)^2}{2kl}\right)$$

Логарифмируем (ОМП для логарифма правдоподобия будет совпадать с первоначаналньым).

$$\log \mathcal{L} = -\frac{n}{2}\log l + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(X_i - l)^2}{2kl}\right) = -\frac{n}{2}\log l + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(X_i^2 - 2X_i l + l^2)}{2kl}\right)$$

Максимизируем логарифм правдоподобия:

$$0 = \frac{\partial}{\partial l}\log \mathcal{L} = -\frac{n}{2l} + \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{2kl^2} - n\frac{1}{2k}$$

$$nl^2 + nkl - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

И находим окончательно - ОМП для параметра l:

$$\hat{l} = \frac{-k + \sqrt{(k^2 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2)}}{2}$$

Задача 4. (Задача 20) Найти оценки наибольшего правдоподобия и эффективные оценки (если они существуют): а) параметра λ в пуассоновском распределении б) параметра μ в показательном распределении в) параметра p в биномиальном распределении с n испытаниями. Являются ли полученные оценки несмещенными, состоятельными?

Решение:

а) Строим ОМП для λ в пуассоновском распределении:

Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\lambda\,;\,X_1,\ldots,X_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{X_i}\exp(-\lambda)}{X_i!}$$

Логарифм правдоподобия:

$$l=\log\mathcal{L}(\lambda\,;\,X_1,\ldots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}X_i\log\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\log(X_i!)$$

Максимизируем логарифм правдоподобия:

$$0=\frac{\partial}{\partial\lambda}l=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}X_i-n$$

Таким образом:

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

Проверяем:

i) Несмещенность:

$$\mathsf{E}\hat{\lambda}=\mathsf{E}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_i}{n}=\lambda\rightarrow unbiased$$

ii) Состоятельность:

Для состоятельности необходимо, что бы предел

$$\forall\varepsilon>0\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{|\hat{\lambda}-\lambda|<\varepsilon\}=1$$

Доказательство по ЗБЧ: условия одинаковой распределенности, существования мат.ожиданий и убывающих дисперсий:

$$\mathsf{D}\hat{\lambda}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}X_i=\frac{1}{n^2}n\lambda=\frac{\lambda}{n}=O\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty$$

Таким образом, это состоятельная оценка.

iii) Эффективная оценка:

Воспользуемся следствием из неравенства Рао-Крамера:

(R) Для любого $y \in \mathbb{R}_+$ выполнена дифференцируемость $\sqrt{f_\lambda(y)}$ по параметру λ

(RR) Информация Фишера существует, положительна и непрерывна во всех точках.

Следствие : Если в неравенстве Рао-Крамера достигается равенство, то оценка $\hat{\theta}$ эфеективна в классе несмещенных (в нашем частном случае).

Для дважды дифф. по λ:

$$I_n(\lambda) = -\mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}\right) = \mathsf{E}\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}X_i = \frac{n}{\lambda}$$

Но тогда и получаем необходимое равенство:

$$\mathsf{D}\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{I_n(\lambda)}$$

То есть, ОМП $\hat{\lambda}$ - **эффективная**.

б) Строим ОМП для параметра μ в показательном распределении:

$$\mathcal{L}(\mu\,;\,X_1,\dots,X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu \exp\left(-\mu X_i\right)$$

Логарифм правдоподобия:

$$l = \log \mathcal{L}(\mu\,;\,X_1,\dots,X_n) = n\log(\mu) - \sum_{i=1}^{n} \mu X_i$$

Минимизируем логарифм правдоподобия:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} l = \frac{n}{\mu} - \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Получаем ОМП для μ:

$$\hat{\mu} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$$

Проверяем:

i) Несмещенность:

$$\mathsf{E}\hat{\mu} = \mathsf{E}\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$$

Распределение суммы показательно распределенных величин через гамма-распределение:

$$\mathsf{P}_{\sum X_i}(x) = \mathbb{I}(X \geqslant 0)\frac{\mu^n x^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

$$\mathsf{E}\frac{1}{\sum X_i} = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x}\frac{\mu^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \exp{(-\mu x)} dx = \frac{\mu}{n-1}$$

$$\mathsf{E}\hat{\mu} = n\mathsf{E}\frac{1}{\sum X_i} = n\frac{\mu}{n-1} = \frac{n}{n-1}\mu$$

То есть замечаем, что не является несмещенной, однако, является ассимтотически несмещенной.

ii) Состоятельность:

$$\mathsf{D}\hat{\mu} = n^2\mathsf{D}\left(\frac{1}{\sum X_i}\right) = n^2\left(\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sum X_i}\right)^2 - \left(\mathsf{E}\frac{1}{\sum X_i}\right)^2\right)$$

Посчитаем только

$$\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sum X_i}\right)^2 =$$

Аналогично матожиданию, с помощью гамма-функции:

$$= \frac{mu^2}{\Gamma(n)}\Gamma(n-2) = \frac{\mu^2}{(n-1)(n-2)}$$

И для дисперсии:

$$\mathsf{D}\hat{\mu} = \frac{n^2\mu^2}{(n-1)^2(n-2)} = O\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty$$

То есть, аналогично пункту (a) получаем **состоятельность** оценки.

iii) Эффективность:

$$I_n(\mu) = -\mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2}\right) = -\mathsf{E}\left(-\frac{n}{\mu^2}\right) = \frac{n}{\mu^2} \neq \frac{n^2\mu^2}{(n-1)^2(n-2)} = \mathsf{D}\hat{\mu}$$

То есть не является эффективной, однако, при $n \to \infty$ равенство выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{D}\hat{\mu} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\mu^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\mu^2}{n} = \frac{1}{I_n(\mu)}$$

То есть - **ассимптотически эффективная**.

в) Строим ОМП для параметра p в биномиальном распределении:

$$\mathcal{L}(p\,;\,X_1,\ldots,X_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{X_i}(1-p)^{(1-X_i)} = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$$

Логарифм правдоподобия:

$$l = \log\mathcal{L}(p\,;\,X_1,\ldots,X_n) = \log p\sum_{i=1}^{n} X_i + \log{(1-p)}(n-\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

Максимизируем логарифм правдоподобия:

$$0 = \frac{\partial}{\partial p} l = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{(1-p)}(n - \sum_{i=1}^{n} X_i) =$$

$$= 1\sum_{i=1}^{n} X_i - p\sum_{i=1}^{n} X_i - pn + p\sum_{i=1}^{n} X_i$$

И находим ОМП для p:

$$\hat{p} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Проверяем:
i) Несмещенность:

$$\mathsf{E}\hat{p} = \mathsf{E}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}X_i}{n} = \frac{np}{n} = p$$

ii) Состоятельность: Аналогично пункту (a) проверяем убывание к нулю дисперсий (все остальные условия выполнены):

$$\mathsf{D}\hat{p} = \mathsf{D}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathsf{X_i} = \frac{1}{n}p(1-p) = O\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty$$

То есть оценка **состоятельная.**

iii) Эффективная:

Аналогично - используем следствие из неравенства Рао-Крамера:

$$I_n(p) = -\mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 l}{\partial p^2}\right) = -\mathsf{E}\left(-\frac{1}{p^2}\sum X_i - \frac{1}{(1-p)^2}(n - \sum X_i)\right) = -\frac{n}{p} + \frac{n}{(p-1)} = \frac{n}{p(p-1)}$$

Получаем равенство в неравенстве:

$$\mathsf{D}\hat{p}^2 = \frac{p(p-1)}{n} = \frac{1}{I_n(p)}$$

То есть являтеся **эффективной**.

Задача 5. (Задача 40). В результате наблюдения точечного случайного процесса (потока событий) получена выборка $(X_1, ..., X_n)$ моментов появления в нем событий. Предполагая, что наблюдаемый процесс является пуассоновским, найти ММП-оценки для интервала времени между событиями и для интенсивности потока событий.

Решение: ФР интервалов $T = X_{j+1} - X_j, j = \overline{1, n-1}$:

$$F_T(t) = \mathsf{P}(T \leqslant t) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

Плотность: $f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$

Найдём функцию правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\lambda\,;\, X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda X_i) = \lambda^n \exp(-\lambda \sum X_i)$$

Логарифм правдоподобия:

$$l = \log\left(\mathcal{L}(\lambda\,;\,X_1,\ldots,X_n)\right) = n\log\lambda - \lambda\sum X_i$$

Максимизируем логарифм правдоподобия:

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = n\frac{1}{\lambda} - \sum X_i = 0$$

ОМП:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum X_i}$$

Теперь, так как выполнено условие непрерывности функции распределения, оценку для T можно получить используя:

$$\hat{T} = \hat{X_1} = \widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{\sum X_i}{n}$$

Так как промежутки между событиями не зависят от других промежутков.

Задача 6. (Задача 64). Значение сигнала Y на входе некоторого устройства может быть либо нулем, либо единицей. Значение Y недоступно для измерения. На выходе устройства наблюдается (и измеряется) величина X, являющаяся суммой входного сигнала и гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией σ^2.Построить оптимальное байесовское решающее правило для классификации входных сигналов на основании измерения величины X при известных вероятностях $\mathsf{P}\{Y=0\}=p, \mathsf{P}\{Y=1\}=1-p$.

Решение: Найдем апостериорные вероятности классов по формуле:

$$\pi(i|x) = \pi_i(x) = \frac{f_i(x)\pi_i}{\sum\limits_{s=0}^{1}\pi_s f_s(x)},\ \pi_0 = p, \pi_1 = 1-p$$

Где плотности имеют вид:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

В силу того, что вход и выход бинарные $\{0, 1\}$, то линейная функция потерь совпадает с квадратичной и задаётся формулой:

$$l(i|j) = (i - j)^2 = |i - j|$$

В таком случае байесовский принцип сводится к тому, что бы относить объект с характеристикой x к тому классу, апостериорная вероятность которого максимальна (*принцип максимума апостериорной вероятности*):

Забивая на знаменатели, минимизируем только функции:

$$h_j(x) = \sum_{i=1}^{k} l(j|i)\pi_i f_i(x),\ j = \overline{1, k}$$

В нашем случае:

$$h_0(x) = l(0|1)\pi_1 f_1(x),\ \ h_1(x) = l(1|0)\pi_0 f_0(x)$$

Таким образом, решение отнести объект x к первому классу принимается тогда и только тогда, когда $\pi_1 f_1(x) \leqslant \pi_0 f_0(x)/$

Оптимальное байесовское правило δ^* имеет в этом случае вид:

$$\delta^* = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in W_0^* \\ 1, & \text{если } x \in \overline{W_0^*} \end{cases}$$

Где W_1^* выражается через вероятности:

$$W_0^* = \left\{ x : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \leqslant \frac{\pi_0}{\pi_1} \right\}$$

Остается только вычислить эти отношения:

$$\exp\left(-\frac{(-2x + 1)}{2\sigma^2}\right) \leqslant \frac{p}{1 - p}$$

$$\frac{2x - 1}{2\sigma^2} \leqslant \log\left(\frac{p}{1 - p}\right)$$

То есть при $x \leqslant \sigma^2 \log\left(\frac{p}{1-p}\right) + \frac{1}{2}$ нужно выбирать 0, а иначе 1.