Домашнее задание 6, Новиков Герман, 277

Задача 1. Пусть наблюдается одно измерение из распределения Бернулли с неизвестным параметром θ. Допустимые значения параметра $\Theta = \{\theta_1 = \frac{1}{4}, \theta_2 = \frac{3}{4}\}$.

Множество решающих правил $D = \{d_1, d_2, d_3\}$. Функция потерь $L(\theta_i, d_j)$ задана следующими значениями:

$$L(\theta_1, d_1) = L(\theta_2, d_2) = 0,$$

$$L(\theta_1, d_3) = L(\theta_2, d_3) = \frac{1}{2},$$

$$L(\theta_1, d_2) = 1,$$

$$L(\theta_2, d_1) = 4.$$

Найти все байесовские решения.

Решение: В данном случае для каждого x возможны 3 решения, а множество значений x содержит 2 точки $\{0, 1\}$. Следственно возможно всего 9 решающих функции $\delta_k, k = \overline{1,9}$

$$(\delta_k(0), \delta_k(1)) = (d_i, d_j)_{i,j=\overline{1,3}}$$

Функция риска:

$$R(\delta_k, \theta) = \mathsf{E}_\theta L(\delta_k(X), \theta) = L(\delta_k(0), \theta)(1-\theta) + L(\delta_k(1), \theta)\theta, \theta = \theta_1, \theta_2$$

Для каждой решающей функции находим вектор риска:

$$R(\delta_k, \theta_1), R(\delta_k, \theta_2)), k = \overline{1,9}$$

Их числовые значения($d_1 : d_1, d_2, d_3; d_2 : d_1, d_2, d_3; d_3 : d_1, d_2, d_3$):

$$(0,4), (\frac{1}{4}, 1), (\frac{1}{8}, \frac{11}{8}) \,;\, (\frac{3}{4}, 3), (1,0), (\frac{7}{8}, \frac{1}{8}) \,;\, (\frac{3}{8}, \frac{25}{8}), (\frac{5}{8}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Очевидно из сравнимых мы можем выбрать наиболее предпочтительные - следственно можем отбросить $(\frac{3}{8}, \frac{25}{8})$ и $(\frac{3}{4}, 3)$.

Теперь, предполагая априорное распределение на Θ: $\pi(\theta_1) = \alpha, \pi(\theta_2) = 1 - \alpha$ вычисляем для каждого допустимого правила байесовские риски $r(\delta_i) = R(\delta_i, \theta_1)\alpha + R(\delta_i, \theta_2)(1-\alpha)$ для тех правил, которые мы не отбросили:

$r(\delta_1) = 0\alpha + (1-\alpha)4$
$r(\delta_2) = \frac{1}{4}\alpha + (1-\alpha)1$
$r(\delta_3) = \frac{1}{8}\alpha + (1-\alpha)\frac{11}{8}$
$r(\delta_4) = 1\alpha + (1-\alpha)0$
$r(\delta_5) = \frac{7}{8}\alpha + (1-\alpha)\frac{1}{8}$
$r(\delta_6) = \frac{5}{8}\alpha + (1-\alpha)\frac{1}{2}$
$r(\delta_7) = \frac{1}{2}\alpha + (1-\alpha)\frac{1}{2}$
и находим байесовское решение:
$\delta^* = argmin_\delta \delta$
Что есть просто кусочно линейная функция
$\delta^* = r(\delta_2)I(\alpha \in [0, \frac{9}{10}]) + r(\delta_4)I(\alpha \in (\frac{9}{10}, \frac{31}{32}]) + r(\delta_1)I(\alpha \in (\frac{31}{32}, 1])$

Задача 2. Рассматривается задача оценивания неизвестной вероятности успеха θ по наблюдению числа успехов X в n испытаниях Бернулли. Функция потерь задана:

$$L(\theta, \hat{\theta}) = \frac{(\hat{\theta} - \theta)^2}{\theta(1-\theta)},$$

а априорное распределение параметра является равномерным на интервале $(0, 1)$.

Найти байесовское решающее правило. Является ли оно минимаксным?

Решение:

Для заданного априорного распределения $\pi(\theta)$ находим апостериорное распределение $\pi(\theta|x)$:

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x,\theta)\pi(\theta)}{f(x)} = \frac{\theta^x(1-\theta)^{n-x}1}{\mathsf{E}f(x;\theta)} = \frac{\theta^x(1-\theta)^{n-x}}{\int\limits_0^1 \theta^x(1-\theta)^{n-x}d\theta}$$

Дальше находим полную среднюю потерю по формуле:

$$r(\delta) = \int \left(\int L(\delta(x), \theta)\pi(\theta|x)d\theta \right) f(x)dx, \;\; L(\delta(x), \theta) = \frac{(\delta(x) - \theta)^2}{\theta(1-\theta)}$$

Окончательно получаем:

$$r(\delta) = \int \left(\int \frac{(\delta-\theta)^2}{\theta(1-\theta)} \frac{\theta^x(1-\theta)^{n-x}}{\int\limits_0^1 \theta^x(1-\theta)^{n-x} d\theta} d\theta \right) \int\limits_0^1 \theta^x(1-\theta)^{n-x} d\theta dx$$

Теперь байесовское решение можно найти как:

$$\delta^* = argmin_\delta(r(\delta))$$

Просто проинтегрировав, находим δ, как минмум этой функции, что и будет баейсовским решением.

!**Я отправлю эту часть (подсчёты) в понедельник, если можно, потому что мне рано утром в воскресенье нужно уезжать и приеду поздно ночью.**

Задача 3. Простая выборка $(X_1, ..., X_n)$ получена из равномерного распределения на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$. С помощью метода моментов построить оценки θ_1, θ_2. Могут ли они быть оптимальными?

Решение: Ищем оценку для вектора параметров $\theta = [\theta_1, \theta_2]$, будем использовать два первых момента:

$$M_1 = \mathsf{E}_\theta X_1 = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \; and \; M_2 = \mathsf{E}_\theta X_1^2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} t^2 \frac{1}{\theta_2-\theta_1} dt = \frac{\theta_2^3-\theta_1^3}{3(\theta_2-\theta_1)} = \frac{\theta_2^2+\theta_1\theta_2+\theta_1^2}{3}$$

Выражаем значения θ_1 и θ_2 через M_1 и M_2:

$$\theta_1 = 2M_1 - \theta_2, \; M_2 = \frac{\theta_2^2 + \theta_2(2M_1-\theta_2) + (2M_1-\theta_2)^2}{3}$$

И получаем:

$$\theta_2 = M_1 - \sqrt{3(M_2 - M_1^2)}, \; \theta_1 = M_1 + \sqrt{3(M_2 - M_1^2)}$$

Теперь, подставляя вместо истинных моментов выборочные, получаем искомые ответы:

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{n}\sum X_i; \; \hat{M}_2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2$$

Получаем

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum X_i - \sqrt{3(\frac{1}{n}\sum X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum X_i)^2)}$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum X_i + \sqrt{3(\frac{1}{n}\sum X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum X_i)^2)}$$

Достаточной статистикой является, как уже было получено на семинаре $T = (T_1, T_2) = (X_{(1)}, X_{(n)})$, но наша функция является функцией не только $(X_{(1)}, X_{(n)})$, но и всех остальных членов, слдственно по Теореме Рао-Блекуэлла-Колмогорова, не является оптимальной.

Задача 4. По простай выборке $X_1, ..., X_n$ из распределения $F(\theta, x)$ построить несмещенную оценку его характеристической функции. Является ли она состоятельной?

Решение: Общая формула для характеристической функции:

$$\Psi_X(t) = \mathsf{E}[e^{itX}] = \int e^{itX} dF_X(\theta, x)$$

Построим выборочную характеристическую функцию:

$$\hat{\Psi}_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{itX_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{itX_1}$$

Проверим, является ли она несмещенной:

$$\mathsf{E}[\hat{\Psi}_X(t)] = \mathsf{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{itX_1}] = \frac{1}{n}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{n} e^{itX_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}e^{itX_1} = \frac{1}{n} n\mathsf{E}e^{itX_1} = \mathsf{E}e^{itX_1} = \Psi_{X_1}(t) = \Psi_X(t)$$

То есть оценка является несмещенной.

Состоятельность:

Обозначим частичные суммы $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} e^{itX_1}$, При этом каждый элемент суммы есть независимая случайная величина с математическим ожиданием $M = \mathsf{E}e^{itX_1} = \Psi_X(t)$.

Мы хотим $\forall \varepsilon, \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\hat{\Psi}_X(t) - \Psi_X(t)| < \varepsilon\} = 1$

Где $\hat{\Psi}_X(t) = S_n$

Добавим и вычтем в модуле $+M - M$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|S_n - M + M - \Psi_X(t)| < \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|S_n - M| + |M - \Psi_X(t)| < \varepsilon\}$$

Второй модуль тождественно равен нулю. Для первого - в силу независимости, существования матожиданий и одинаковой распределенности - по закону больших чисел выполнено:

$$\forall\varepsilon \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|S_n - M| < \varepsilon\} = 1$$

Таким образом, получаем, что оценка состоятельная.