

Домашнее задание 3. Группа 277, осень 2015

Задача 1. 8-го января 2003 года в New York Times были сообщены следующие данные из штата Мэриленд: в случае, если происходило убийство афроамериканца, было вынесено 14 смертных приговоров для преступника, а в 641 случае смертных приговор не последовало. В случае, если происходило убийство белого, то в 62 случаях был вынесен смертный приговор и в 594 случаях не был. Проанализируйте эти данные, используя статистические техники, и интерпретируйте результаты.

Задача 2 (Задача номер 59). Построить критерий для проверки гипотезы $H_1 : p = \frac{1}{2}$ при альтернативной гипотезе $H_2 : p \neq \frac{1}{2}$ по результатам восьми испытаний, подчиняющихся схеме Бернулли. Вероятность ошибки первого рода α положить равной 0,05.

Указание. Очевидно, что существует не один способ проверки этих гипотез.

Задача 3 (Задача номер 3). Пусть X_1, \dots, X_n — простая выборка, полученная из абсолютно непрерывного распределения с плотностью f . Найти:

- Функцию плотности совместного распределения вариационного ряда $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$.
- Совместное распределение $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$, при условии, что X_i имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Вычислить также их математические ожидания, дисперсии и корреляцию.

Задача 4 (Перестановочные тесты). Пусть X_1, \dots, X_n — простая выборка, полученная из F_X , а Y_1, \dots, Y_m из F_Y . Проверяется гипотеза $H_0 : F_X = F_Y$. Пусть T — некоторая статистика (например разность средних по подвыборкам), посчитанная по $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$. Пусть $N = n + m$. Для всех $N!$ перестановок рассчитаем для данной выборки значения $T_1, \dots, T_{N!}$. В условиях нулевой гипотезы все $N!$ этих значений равновероятны (Более строго: если в условиях H_0 дается только вариационный ряд, то реализация выборки есть одна случайная перестановка этих значений). Введем равномерное распределение P_0 на всех $N!$ перестановках. Придумать естественный тест для проверки гипотезы H_0 с

$$\text{p-value} = \frac{1}{N!} \sum_{j=1}^{N!} \mathbf{1}[T_j > T].$$

Задача 5 (Критерий инверсий). Пусть X_1, \dots, X_n — простая выборка, полученная из абсолютно непрерывного распределения. Говорят, что элементы X_i, X_j (их реализации) образуют инверсию, если $i < j$, но в вариационном ряду X_i стоит правее X_j . Пусть статистика T_n считает число инверсий в выборке.

- Найти математическое ожидание и дисперсию T_n .
- Построить точный (неасимптотический) тест для проверки гипотезы H_0 , заключающейся в том, что исходная выборка простая. Точное распределение используемых статистик выводить не надо.
- Используя предельную теорему, построить асимптотический тест для проверки гипотезы H_0 .

Указание. Воспользуйтесь логикой перестановочных тестов и используйте аппарат производящих функций.

Задача 6. Проанализируйте данные о возрасте и доходах по ссылке:

<http://lib.stat.cmu.edu/DASL/Datafiles/montanadat.html>

Задача 7 (Задача номер 36). За первый час счетчиком зарегистрировано 150 событий пуассоновского потока, за следующие два часа — 250 событий. Была ли постоянной интенсивность наступления событий в единицу времени в течение всех трех часов наблюдения (уровень значимости α принять равным 0,05).