Komplexe Zahlen

elektret.github.io

16. Mai 2014

1 Definition

(i) Der Körper $(R, +, \cdot)$ ist ein Unterkörper von C.
(ii) Es gibt ein Element, sodass $i^2 = -1$ ist.
(iii) C ist der kleinste Körper der den Eigenschaften (i) und (ii) genügt.

2 Motivation

Polynome lassen sich—ähnlich wie Zahlen—in nicht weiter reduzible Polynome zerlegen. Dafür gibt es im Folgenden einige Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{Ist reduzibel über } Z\text{: } & x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \\ \text{Irreduzibel über } Z \text{ und } Q\text{, aber reduzibel über } R\text{: } & x^2 - 3 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \\ \text{Ist irreduzibel über } R\text{, aber reduzibel über } C\text{: } & x^2 + 1 = (x+i)(x-i) \\ C\text{: } & x^4 - 2 = (x^2+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}) = (x+i\sqrt[4]{2})(x-i\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2}) \end{aligned}$$

Also nicht alle Polynome zerfallen innerhalb des Zahlenkörpers $(R, +, \cdot)$ in Linearfaktoren. Generell gibt es über R nur zwei Typen irreduzibler Polynome: Lineare Polynome und quadratische Polynome. Über dem Körper der komplexen Zahlen C lässt sich hingegen jedes Polynom n-ten Grades in ein Produkt von genau n Polynomen 1-ten Grades zerlegen.

3 Addition und Vervielfachung

Wie für Vektorräume üblich wird hier zunächst eine Addition und skalare Multiplikation angegeben. Da C mit dem R^2 identifiziert wird, kann die komponentenweise Addition aus letzterem Raum übernommen werden:

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix} \tag{2}$$

Anders ist es mit der Multiplikation, wie im Folgenden deutlich wird. Bis auf das Skalarprodukt ist erstmal keine Multiplikation definiert. Eine komponentenweise Multiplikation ist unerwünscht, da das Produkt zweier Zahlen $a, b \neq 0$, mit $a, b \in R^2$ Null ergeben könnte (Nullteiler). Ein Beispiel: $(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$. Außerdem wird ein Element benötigt, sodass $i^2 = -1$ ist.

4 Drehmatrix

Die Drehmatrix ist eine Orthogonale Matrix, damit ist aufgrund der Isometrie die Gleichung $||Ax|| = ||x||$ bekannt. Das Gleiche gilt auch für die Hintereinanerausführung von A: $||Ay|| = ||y||$ mit $||y|| = ||Ax|| = ||x||$. Die Matrixdarstellung ist durch den Zusammenhang gegeben:

$$Ax = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} x \tag{3}$$

5 Multiplikation

Es sind $a = (x, y)$ und $b = (u, v)$ mit $a, b \in R^2$, dann gibt es eine Multiplikation zwischen zwei Vektoren die eine Drehstreckung beschreibt. Dazu wird die oben genannte Drehmatrix gebraucht und ein Einheitsvektor $e = (1, 0)$:

$$b \cdot a = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Die Winkel α und β sind dabei durch die Vektoren a und b durch einfache trigonometrische Zusammenhänge gegeben:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|a|}, \quad \sin\alpha = \frac{y]}{|a|} \quad \text{bzw.} \quad \cos\beta = \frac{u}{|b|}, \quad \sin\beta = \frac{v}{|b|}$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned} b \cdot a &= \begin{pmatrix} \frac{u}{|b|} & -\frac{v}{|b|} \\ \frac{v}{|b|} & \frac{u}{|b|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{|a|} \\ \frac{y}{|a|} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{xu}{|b||a|} \\ \frac{xv}{|b||a|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{yv}{|b||a|} \\ \frac{yu}{|b||a|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|b||a|} \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Um zusätzlich zu der Drehung eine Streckung zu erhalten wird diese Gleichung mit dem Faktor $|b||a|$ multipliziert. Es ergibt sich dann:

$$|| \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix} || = |b||a|||e|| = ||b \cdot a|| \qquad \text{mit} \qquad ||e|| = 1 \tag{6}$$

6 Schreibweise

Bisher wurden die komplexen Zahlen mit dem R^2 identifiziert und damit auch die Schreibweise von Tupeln zweier Zahlen verwendet. Dies soll sich nun, durch die Einführung der imaginären Einheit, ändern. Es gilt: $a = (x, y)$, $x, y \in R$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Mit der Multiplikation von oben kann der hintere Teil diese Gleichung noch weiter umgeformt werden:

$$y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = yi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zurück zu Gleichung (7) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Und weil jetzt die zweite Komponente Null ist, kann diese auch weggelassen werden. Es ergibt sich dann die kurze Schreibweise: $a = x + iy$, $a \in C$. Dies ist die im Folgenden verwendete Schreibweise. a heißt komplexe Zahl.

7 Das multiplikative Inverse

Gesucht wird eine Zahl $z^{-1} = (u, v)$, also ein multiplikatives Inverses, zu der Zahl $z = (x, y)$ mit $zz^{-1} = 1$. Das Ergebnis entspricht also dem neutralen Element aus der bekannten Multiplikation in R. Kurze Rechnung ergibt:

$$(x, y) \cdot (u, v) = (1, 0)$$
$$(xu - yv, xv + yu) = (1, 0)$$

Es ergeben sich dann zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & xu - yv = 1 & \\ \text{II)} & xv + yu = 0 & \Leftrightarrow \quad v = -\frac{yu}{x} \end{array}$$

Und weiter:

$$\begin{array}{ll} \text{II) in I)} & xu + y\left(\frac{yu}{x}\right) = u\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ & v = -\frac{yu}{x} = -\frac{y}{x}\frac{x}{(x^2+y^2)} = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{array}$$

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \quad \text{mit} \quad (x, y) \neq (0, 0) \tag{9}$$

8 Körper

Die reellen Zahlen werden durch die injektive Abbildung $\varphi : R \to C$ in die komplexen Zahlen abgebildet. Dabei ist $\varphi(x) = (x, 0)$ gegeben. Die Körperaxiome bezüglich der Addition werden aus der Vektoraddition deutlich. Da C/R eine Körpererweiterung ist, lassen sich die Axioma zur Multiplikation und zum Distributivgesetz komponentenweise auf Regeln in R zurückführen.

$$(x, y) + (u, v) = (x, y) \quad \text{mit} \quad (u, v) = (0, 0) \in C \tag{10}$$
$$(x, y) + (u, v) = (0, 0) \quad \text{mit} \quad (u, v) = (-x, -y) \in C \tag{11}$$

Das neutrale Element bezüglich der Addition ist also $(0, 0)$. $(-x, -y)$ das Inverse von (x, y).

$$(x, y) \cdot (u, v) = (x, y) \quad \text{mit} \quad (u, y) = (1, 0) \in C \tag{12}$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (1, 0) \quad \text{mit} \quad (u, v) = (\frac{1}{x}, 0) \in C \tag{13}$$

Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist also $(1, 0)$. Und das inverse Element ergibt sich, wenn in Gleichung (9) $y = 0$ gesetzt wird.

9 Rechenregeln

Für die im Folgenden gezeigten Rechenregeln werden zwei komplexe Zahlen z, w der Form $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gebraucht. Es gilt dann:

$$Re\{z\} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \qquad \Leftrightarrow \qquad z + \bar{z} = 2\,Re\{z\} \tag{14}$$

$$Im\{z\} = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \tag{15}$$

Und weiter:

$$\overline{z + w} = (x + u) - i(y + v) = (x - iy) + (u - iv) = \bar{z} + \bar{w} \tag{16}$$

$$\overline{z \cdot w} = (xu - yv) - i(xv + uy) = (x - iy) \cdot (u - iv) = \bar{z} \cdot \bar{w} \tag{17}$$

10 Eulersche Formel

$$r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r \in R, \quad \varphi \in (-\pi, \pi] \tag{18}$$

Diese Gleichung besagt, dass sämtliche Eigenschaften von $e^{i\varphi}$ auf die Addition von $\cos\varphi$ und $i\sin\varphi$ zurückgeführt werden können. Das diese Gleichung tatsächlich gilt, wird aus der Reihendarstellung der komplexen e-Funktion deutlich. Aufteilung in einen geraden und ungeraden Teil über k gibt:

$$\begin{aligned} e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \end{aligned} \tag{19}$$

Dabei gilt $z = i\varphi$ oder $Re\{z\} = 0$. Wenn es diese Darstallung gibt, dann sind mit den Gleichungen (14) und (15) auch weitere Darstellungen von cos und sin bekannt. Weil sich der Imaginärteil von z duch 2π-periodische Funktionen darstellen lässt, ist dieser 2π-periodisch.

11 Formel von de Moivre und komplexe Wurzel

In der Eulerschen Formel wird eine reelle Zahl komplex potentiert. Was passiert wenn diese resultierende komplexe Zahl wiederum mit einer Zahl $n \in R \setminus 0$ reell potentiert wird geht aus der Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion hervor und heißt Formel von de Moivre:

$$(r \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)})^n = r^n \cdot (\cos(n(\varphi + 2k\pi)) + i\sin(n(\varphi + 2k\pi))) \qquad \text{mit} \qquad k \in N_0$$

Die Umkehrung heißt die n-te komplexen Wurzel einer Zahl $z \in C$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})) \qquad \text{mit} \qquad |z| = r \tag{20}$$

12 Betrag

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{|r|^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = |r| \tag{21}$$

13 Exponentialfunktion

$$\exp(x + iy) = e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y)) \tag{22}$$

Mit den Rechenregeln für $z, w \in C$:

$$(\exp(z)^n)_{n \in R} = \exp(nz) \qquad \text{und} \qquad \exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$$

14 Logarithmusfunktion

Weil die komplexe Exponentialfunktion allgemein nicht injektiv ist, kann es die Umkehrfunktion eigentlich nicht geben. Jedenfalls nicht, wenn man von einem eindeutig bestimmten Funktionswert ausgeht. Sie bildet aber je einen Streifen bijektiv in die komplexe Ebene (ohne den Nullpunkt) ab:

$$G = \{z = x + iy \mid x \in R,\ (2k-1)\pi < y \leq (2k+1)\pi,\ k \in Z\} \tag{23}$$
$$k = 0 \text{ ergibt den Hauptwert des Logarithmus}$$

Literatur

[1] P. Furlan: *Das gelbe Rechenbuch 1*, Dortmund (2012)

[2] Fischer, Lieb: *Funktionentheorie*, Wiesbaden (2008)

[3] Fischer, Reinhard, Sacher: *Einführung in die Algebra*, Stuttgart (1983)