Mathematische Parallelität: Zerfallsgesetz, Kondensatorentladung

zahlenpresse.de

January 15, 2013

1 Zerfallsgesetz

Grundlegend für folgende Betrachtungen ist die Aktivität A mit der die zerfallende Stoffmenge pro Zeiteinheit $A = \frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ beschrieben wird. Damit stellt sie ebenso, wie die Stromstärke $I = \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t}$ eine Geschwindigkeit dar.

Gleichzeitig hängt die Aktivität proportional mit der Teilchenanzahl zum Zeitpunkt t zusammen. Proportionalitätsfaktor ist die Zerfallskonstante λ. Die DGL erhält man durch Gleichsetzen.

$$A = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\frac{dN}{dt} \qquad A = \lambda \cdot N(t)$$

Die Zerfallskonstante λ wird durch ihren Kehrwert die Lebensdauer $\frac{1}{\tau}$ ersetzt.

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot N(t)$$

Durch Trennung der Veränderlichen wird die Differentialgleichung gelöst.

$$\frac{1}{N(t)}\, dN = -\frac{1}{\tau}\, dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \frac{1}{N(t)}\, dN = -\int \frac{1}{\tau}\, dt$$

Der beim Integrieren entstandene natürliche Logarithmus auf der linken Seite wird durch Exponentieren mit der e-Funktion aufgelöst.

$$\ln(N(t)) = -\frac{t}{\tau} + c \qquad \Leftrightarrow \qquad N(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{c} \qquad \Leftrightarrow \qquad N(t) = e^{c} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die Konstante e^c wird abgespalten und zu N_0 umbenannt.
Zuletzt wird noch $\frac{1}{\tau} = \lambda$ wieder zurück ersetzt.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \Leftrightarrow \qquad N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

2 Kondensatorentladung

Der folgenden mathematischen Beschreibung soll eine Parallelschaltung zwischen Kondensator C und einem ohmschen Widerstand R zugrunde liegen. Ausgehend von der Proportionalität zwischen Q und U wird die Differentialgleichung für die Kondensatorentladung aufgestellt.

$$Q = C \cdot U$$

Dabei kann U ersetzt werden durch $U = R \cdot I$ und die gesammte Gleichung nach I aufgelöst werden.

$$Q = C \cdot R \cdot I \qquad \Leftrightarrow \qquad I = \frac{1}{R \cdot C} \cdot Q$$

Gleichzeitig kann die Stromstärke auch über die übliche Definition ausgedrückt werden. Die DGL erhält man durch Gleichsetzen.

$$I = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = -\frac{dQ}{dt} \qquad I = \frac{1}{R \cdot C} \cdot Q(t)$$

Das Produkt $R \cdot C$ hat dabei die Dimension einer Zeit $[R \cdot C] = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s$ und soll in Analogie zum Zerfallsgesetz zu $\tau = R \cdot C$ umbenannt werden.

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R \cdot C} \cdot Q(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot Q(t)$$

Durch Trennung der Veränderlichen wird die Differentialgleichung gelöst.

$$\frac{1}{Q(t)}\, dQ = -\frac{1}{\tau}\, dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \frac{1}{Q(t)}\, dQ = -\int \frac{1}{\tau}\, dt$$

Der beim Integrieren entstandene natürliche Logarithmus auf der linken Seite wird durch Exponentieren mit der e-Funktion aufgelöst.

$$\ln(Q(t)) = -\frac{t}{\tau} + c \qquad \Leftrightarrow \qquad Q(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{c} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q(t) = e^{c} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die Konstante e^c wird abgespalten und zu Q_0 umbenannt.
Zuletzt wird noch $\tau = R \cdot C$ wieder zurück ersetzt.

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$