Herleitung: Effektivwerte

elektret.github.io

December 16, 2013

1 Definition

Der Effektivwert ist die Spannung einer Wechselgröße im zeitlichen Mittel, durch die mit einer Gleichquelle die selbe Leistung an einem Verbraucher abfallen wird: $P_{-} = P_{\sim}$.

Nach dieser Definition wird die Gleichgröße zu einer charakteristischen Eigenschaft der Wechselquelle.

Beispiele: Rechtecksignal: $U_{eff} = \hat{u}$
Sinussignal: $U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ Dreiecksignal: $U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$

Hier sollen eine Gleichspanung U und verschiedene Wechselspannungen $u(t)$ an einem Verbraucher R betrachtet werden: Damit ergibt sich für die Leistungen: $P_{-} = \frac{U^2}{R}$ und $P_{\sim} = \frac{u^2(t)}{R}$

$$\frac{U^2}{R} = \frac{u^2(t)}{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad U^2 = u^2(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad U = \sqrt{u^2(t)}$$

Die Gleichspannung U soll als Eigenschaft der Wechselspannung gesehen werden und wird umbenannt $U_{eff} = U$. Für den Effektivwert wird die Wechselspannung $u^2(t)$ im zeitlichen Mittel betrachtet. Damit gilt: $U_{eff} = \sqrt{\bar{u}^2(t)}$.

Zeitliches Mittel von $u^2(t)$
Die Integrationsgrenzen müssen für eine volle Periode T angegeben werden.

$$\bar{u}^2(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,dt \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,dt}$$

2 Effektivwert einer Rechteckspannung

Die Rechteckspannung ist keine stetige Funktion und springt bei $\frac{T}{2}$ von $\hat{u}$ auf $-\hat{u}$. Daher muss diese zunächst noch genauer definiert werden.

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u} & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -\hat{u} & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

Da das im folgenden gesuchte $u^2(t) = \hat{u}^2$ wieder eine stetige Funktion ist, braucht auf diese Besonderheit hier nicht weiter Rücksicht genommen werden.

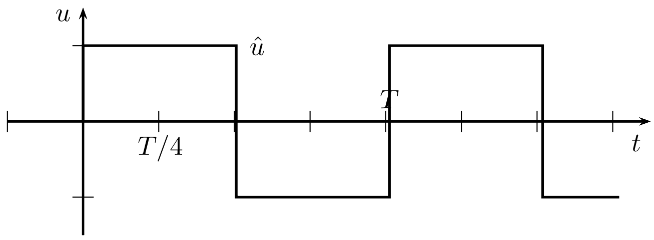

Figure 1: Rechteckspannung

Einsetzen der Rechteckfunktion $u^2(t) = \hat{u}^2$ in die Gleichung für den Effektivwert wie oben gezeigt.

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\, dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} dt}$$

Die benötigte Stammfunktion ist trivial. Die Integrationsgrenzen werden für genau eine Periode $0 \leq t \leq T$ und möglichst günstig gelegt.

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \int_{0}^{T} dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot T} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \hat{u}$$

3 Effektivwert einer Sinusspannung

Die Sinusspannung kann als stetige Funktion ohne Zerlegung des Intervalls sofort aufgeschreiben werden: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(t)$.

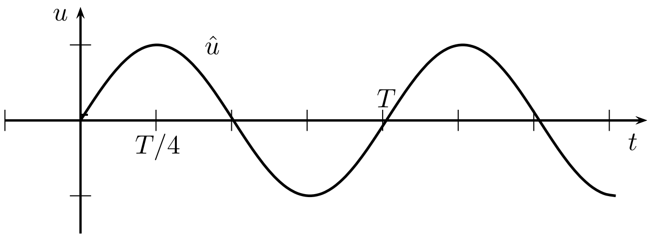

Figure 2: Sinusspannung

Einsetzen der Sinusfunktion $u^2(t) = \hat{u}^2 \cdot sin^2(t)$.

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{u}^2 \cdot sin^2(t)\,dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} sin^2(t)\,dt}$$

Stammfunktion der Sinusfunktion $sin^2(t)$

$$\int sin^2(t)\,dt = \int sin(t) \cdot sin(t)\,dt = -cos(t) \cdot sin(t) + \int cos^2(t)\,dt$$

$$\int sin^2(t)\,dt = -cos(t) \cdot sin(t) + \int 1 - sin^2(t) dt = -cos(t) \cdot sin(t) + \int dt - \int sin^2(t)\,dt$$

$$2 \cdot \int sin^2(t)\,dt = -cos(t) \cdot sin(t) + \int dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \int sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot cos(t) \cdot sin(t)$$

Einsetzen der Stammfunktion in die Gleichung für den Effektivwert. Die Integrationsgrenzen werden für genau eine Periode und möglichst günstig gelegt. Dabei wird hier für die Sinusfunktion $T = 2 \cdot \pi$ und $sin(T) = 0$ ausgenutzt.

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \int_0^T sin^2(t)\,dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{2}[cos(t) \cdot sin(t)]\right]_0^T}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot T\right]} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

4 Effektivwert einer Dreieckspannung

Die Dreieckspannung wird zwar durch eine stetige Funktion beschrieben, diese ist dafür aber nicht differenzierbar. Um über die Funktion integrieren zu können wird diese in drei Teilintervalle zerlegt.

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = 4 \cdot \frac{\hat{u}}{T} \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ u_2(t) = -4 \cdot \frac{\hat{u}}{T} \cdot t + 2 \cdot \hat{u} & \frac{T}{4} < t \leq \frac{3}{4} \cdot T \\ u_3(t) = 4 \cdot \frac{\hat{u}}{T} \cdot t - 4 \cdot \hat{u} & \frac{3}{4} \cdot T < t \leq T \end{cases}$$

$u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ sind dabei Geradengleichungen der Form $u_i = m_i \cdot t + b_i$ mit jeweils einer Nullstelle und dem Punkt der Amplitude bestimmt.

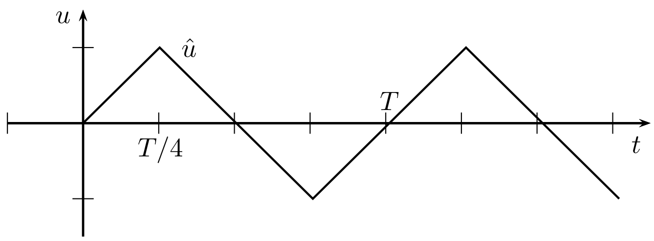

Figure 3: Dreieckspannung

Die benötigten Integrale für die obigen Polynome zu bestimmen wäre mit hohem Aufwand verbunden, daher ist es aus Symmetriegründen günstiger nur viermal über $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ zu integrieren.

Einsetzen der aufsteigenden Flanke $u^2(t) = 16 \cdot \frac{\hat{u}^2}{T^2} \cdot t^2$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} u^2(t)\, dt} \quad \Leftrightarrow \quad U_{eff} = \sqrt{64 \cdot \frac{\hat{u}^2}{T^3} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} t^2\, dt}$$

$$U_{eff} = \sqrt{64 \cdot \frac{\hat{u}^2}{T^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{T^3}{64}} \quad \Leftrightarrow \quad U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

5 Effw. einer Rechteckspannung mit Offset

Einer um die x-Achse schwingenden Rechteckspannung mit der Amplitude $\hat{u}$ bzw. $-\hat{u}$ soll eine Gleichspannung U_0 überlagert werden. Weiter soll noch $U_0 = n_0 \cdot \hat{u}$ in Vielfachen der Rechteckamplitude ausgedrückt werden.

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u} + U_0 \\ U_0 - \hat{u} \end{cases} \qquad u^2(t) = \begin{cases} \hat{u}^2 \cdot (1+n_0)^2 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \hat{u}^2 \cdot (n_0 - 1)^2 & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

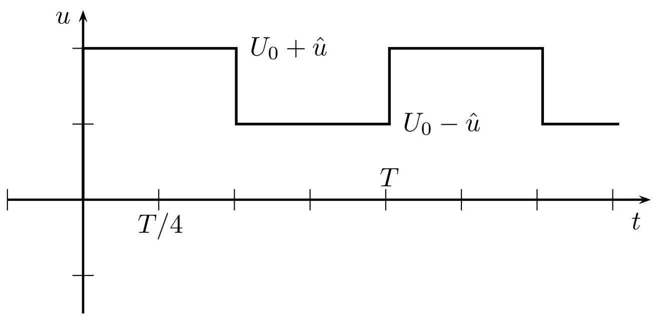

Figure 4: Rechteckspannung mit Offset

Einsetzen der Rechteckfunktion

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2 \cdot (1+n_0)^2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{\hat{u}^2 \cdot (n_0-1)^2}{T} \cdot \int_{\frac{T}{2}}^{T} dt}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2 \cdot (1+n_0)^2}{T} \cdot \frac{T}{2} + \frac{\hat{u}^2 \cdot (n_0-1)^2}{T} \cdot \frac{T}{2}}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{2} \cdot [(1+n_0)^2 + (n_0-1)^2]} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{2} \cdot [2 + 2 \cdot n_0^2]}$$

Zuletzt soll noch $n_0^2 = \frac{U_0^2}{\hat{u}^2}$ ersetzt werden
und der Effektivwert ist gegeben.

$$U_{eff} = \hat{u} \cdot \sqrt{1+n_0^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \hat{u} \cdot \sqrt{1 + \frac{U_0^2}{\hat{u}^2}}$$

6 Effw. einer Sinusspannung mit Offset

Hier soll der Effektivwert einer Sinusspannung berechnet werden, der zusätzlich noch eine Gleichspannung U_0 überlagert ist. So etwas hat man z.B. an der Basis eines Transistors. Möchte man ein niederfrequentes Radiosignal zum Verstärken an die Basis eines NPN-Transistors legen ist es notwenig eine Gleichspannung zu überlagern, da der Transistor zum Leiten immer ein positives Potential gegenüber dem Emitter erwartet.

Für die Gesammtspannung ergibt die Addition von Gleich- und Sinusspannung $u(t) = \hat{u} \cdot sin(t) + U_0$. Weiter soll noch $U_0 = n_0 \cdot \hat{u}$ in Vielfachen der Sinusamplitude ausgedrückt werden.

$$u(t) = \hat{u} \cdot sin(t) + n_0 \cdot \hat{u} \qquad \Leftrightarrow \qquad u(t) = \hat{u} \cdot (sin(t) + n_0)$$

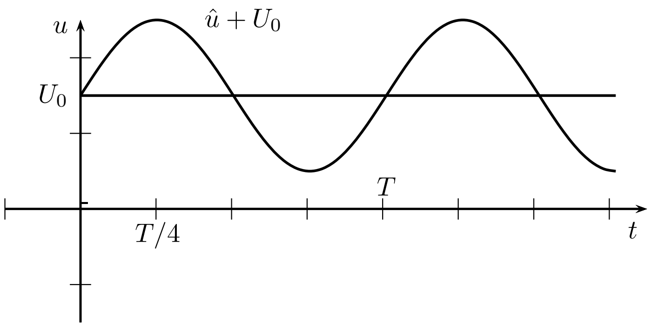

Figure 5: Sinusspannung mit Offset

Einsetzen der Sinusfunktion $u^2(t) = \hat{u}^2 \cdot (\sin(t) + n_0)^2$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(t) + 2 \cdot n_0 \cdot \sin(t) + n_0^2 \, dt}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \left[\int_0^T \sin^2(t)\, dt + n_0^2 \cdot \int_0^T dt\right]} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \left[\frac{T}{2} + n_0^2 \cdot T\right]}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{2} \cdot [1 + 2 \cdot n_0^2]} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot n_0^2}$$

Wird noch $n_0^2 = \frac{U_0^2}{\hat{u}^2}$ ersetzt ist der Effektivwert gegeben.

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{U_0^2}{\hat{u}^2}}$$