Koaxialleiter
E-Feldstärke, H-Feldstärke

blog.zahlenpresse.de

24. April 2013

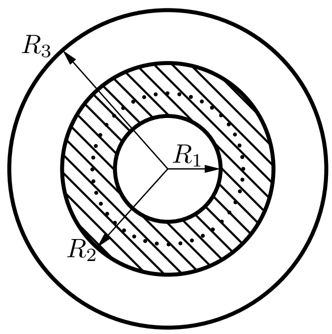

Abbildung 1: Querschnitt vom Koaxialleiter

Für alle Berechnungen in diesem Dokument wird ein Koaxialleiter folgender Konstruktion angenommen: Ein zylindrischer Leiter der Länge l, liegend mit der Mittelpunktsachse, im Zentrum eines kartesischen Koordinatensystem.

Der Bereich $R_0 = 0$ bis R_1 heißt Innenleiter.
Der Bereich R_1 bis R_2 soll Innenraum bzw. Zwischenraum genannt werden.
Der Bereich R_2 bis R_3 heißt Außenleiter.
Der Bereich R_3 bis ∞ ist der den Leiter umgebene Raum und heißt Außenraum.

Dabei wird für alle Leiterteile der Vereinfachung halber die gleiche Permittivität ϵ bzw. Permeabilität μ angenommen.

Auf Innen- und Außenleiter liegen Ladungen gleicher Größe mit entgegengesetzten Vorzeichen. Für die Betrachtung der magnetischen Feldstärke genügen stationäre Größen nicht mehr und die Ladungen werden durch I und $-I$ ersetzt.

1 Elektrische Feldstärke

$$\oint_{\partial G} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_G \rho(r)\, dV$$

$$\oint_{\partial G} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \psi \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n} Q_k = \psi$$

Dieses Integral kann noch vereinfacht werden.
Da eine Hüllfläche $\vec{A}$ um den Leiter im Abstand r von den Feldlinien $\vec{D}$ senkrecht durchsetzt wird haben beide Größen den gleichen Normalenvektor $\vec{n}$. Es ergeben sich dann $\vec{D} = |\vec{D}| \cdot \vec{n}$ und $d\vec{A} = \vec{n}\, dA$, wobei das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ ist und die gesammte Oberfläche genau dem Mantel eines Zylinders entspricht.

$$\psi = \oint_{\partial G} D \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}\, dA \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi = D \oint_{\partial G} dA \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi = D \cdot 2\pi \cdot r \cdot l$$

Mit der rechten Seite ψ des Gaußschen Integralsatzes und $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$ kann die zunächst allgemeine Gleichung für die Feldstärke aufgestellt werden.

$$D(r) = \frac{\psi}{2\pi \cdot r \cdot l} \qquad \Leftarrow \qquad E(r) = \frac{\psi}{2\pi \cdot \epsilon \cdot r \cdot l}$$

Im Weiteren soll die elektrische Feldstärke in einer Fallunterscheidung für den Innen- und Außenraum des Kabels betrachtet werden.

Innenraum ($R_1 \leq r \leq R_2$) : $\psi = Q$
Für den gesammten Innenraum wird die Ladung Q auf dem Innenleiter von der Hüllfläche eingeschlossen.

$$D(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l} \qquad \Leftarrow \qquad E(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot r \cdot l}$$

Außenraum ($R_3 \leq r \leq \infty$) : $\psi = Q - Q = 0$
Für den gesammten Außenraum wird sowohl die Ladung Q auf dem Innenleiter wie auch die Ladung $-Q$ auf dem Außenleiter von der Hüllfläche eingeschlossen.

$$D(r) = 0 \qquad \Leftarrow \qquad E(r) = 0$$

2 Potentialdifferenz im Kabel

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Dieses Integral kann noch vereinfacht werden.
Die elektrische Feldstärke $E(r)$ wurde bereits betragsmäßig für den Zwischenraum bestimmt. Daraus folgt direkt mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der vektorielle Zusammenhang $\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \vec{n}$.

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot r \cdot l} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot r \cdot l} \cdot \vec{n}$$

Der zu integrierende Weg $d\vec{r}$ verläuft genau auf den radialsymmetrischen Feldlinien $\vec{E}$. Beide größen haben wieder den gleichen Normalenvektor $d\vec{r} = \vec{n}\, dr$.

$$\int_{R_1}^{R_2} E \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}\, dr \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Mit der linken Seite U kann die Potentialdifferenz
im Zwischenraum aufgestellt werden:

$$U = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Diese Gleichung kann noch umgeschrieben werden, indem der bekannte Ausdruck $\frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l}$ durch $|\vec{E}| \cdot r$ ersetzt wird.

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot r \cdot l} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} = |\vec{E}| \cdot r$$

$$U = |\vec{E}| \cdot r \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \qquad \Leftrightarrow \qquad E(r) = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Damit ist die elektrische Feldstärke auch in Abhängigkeit der Potentialdifferenz zwischen Innen- und Außenleiter und deren angrenzenden Radien bekannt.

3 Kapazität des Kabels

$$Q = C \cdot U \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \frac{Q}{U}$$

Hier kann U wie oben gezeigt ersetzt werden.
C' ist dabei der auf die Länge l des Kabels bezogene Kapazitätsbelag: $C' = \frac{C}{l}$.

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \frac{2\pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \qquad \qquad C' = \frac{2\pi \cdot \epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

4 Magnetische Feldstärke

$$\oint_{\partial G} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_G \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_{\partial G} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \Theta \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n} I_k = \Theta$$

Dieses Integral kann noch vereinfacht werden.
Verläuft der den Strom einschließende Weg $\vec{r}$ auf den konzentrischen Kreisen des Magnetfeldes $\vec{H}$, Beide Größen haben den gleichen Normalenvektor $\vec{n}$. Es ergeben sich dann $\vec{H} = |\vec{H}| \cdot \vec{n}$ und $d\vec{r} = \vec{n}\, dr$, wobei das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ ist und der gesammte Weg genau dem Umfang eines Kreises entspricht.

$$\Theta = \oint_{\partial G} H \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}\, dr \qquad \Leftrightarrow \qquad \Theta = H \oint_{\partial G} dr \qquad \Leftrightarrow \qquad \Theta = H \cdot 2\pi \cdot r$$

Mit der rechten Seite Θ des Durchflutungsgesetzes kann die zunächst allgemeine Gleichung für die Feldstärke aufgestellt werden.

$$H(r) = \frac{\Theta}{2\pi \cdot r} \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu \cdot \Theta}{2\pi \cdot r}$$

Die Stromdichte soll als homogen angenommen werden und nicht vom Radius r abhängig sein. Weiter sollen die Stromlinien die Fläche $\vec{A}$ senkrecht durchsetzen, sodass beide Größen den gleichen Normalenvektor $\vec{n}$ haben: $\vec{J} = |\vec{J}| \cdot \vec{n}$ und $d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$.

$$I_k = \int_G J \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}\, dA \qquad \Leftrightarrow \qquad I_k = J \int_G dA \qquad \Leftrightarrow \qquad I_k = J \cdot A(r)$$

Für die Durchflutung Θ, also den vom Weg eingeschlossenen Strom, soll im Folgenden, in Abhängigkeit der Stromdichte J und der vom Strom durchsetzen Fläche $A(r)$, eine Fallunterscheidung für die Leiterunterteilung gemacht werden.

Innenleiter $(0 \leq r \leq R_1)$ **:** $\Theta = I \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = J \cdot A(r)$
Für den Innenleiter können J und $A(r)$ bestimmt werden.

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi \cdot R_1^2} \qquad A(r) = \pi \cdot r^2 \qquad \Theta = I \cdot \frac{r^2}{R_1^2}$$

Einsetzen von Θ in die allgemeine Gleichung gibt einen lineraren Anstieg der magnetischen Feldstärke.

$$H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot R_1^2} \cdot r \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot R_1^2} \cdot r$$

Innenraum $(R_1 \leq r \leq R_2)$ **:** $\Theta = I \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = J \cdot A$
Die Stromdichte wird noch immer als homogen angenommen. Die vom Strom durchsetzte Fläche ist konstant, da der Innenstrom in diesem gesammten Bereich für jedes r umschlossen wird.

$$J = \frac{I}{A} \qquad \Theta = \frac{I}{A} \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = I$$

Einsetzen von Θ in die allgemine Gleichung gibt einen Abfall der magnetischen Feldstärke mit $\frac{1}{r}$ im Innenraum.

$$H(r) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Außenleiter $(R_2 \leq r \leq R_3)$ **:** $\Theta = I - I \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = I - J \cdot A(r)$
Da die Ströme im Innen- und Außenleiter entgegengesetzt sind verringert sich die Durchflutung Θ.
Der Strom im Innenleiter wird komplett umschlossen, wärend der Strom im Außenleiter noch genauer berechnet werden muss.

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi \cdot (R_3^2 - R_2^2)} \qquad A(r) = \pi \cdot (r^2 - R_2^2)$$

$$\Theta = I - I \cdot \frac{\pi \cdot (r^2 - R_2^2)}{\pi \cdot (R_3^2 - R_2^2)} \qquad \Theta = I \cdot (1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)})$$

$$\Theta = I \cdot (\frac{(R_3^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)}) \qquad \Theta = I \cdot \frac{(R_3^2 - r^2)}{(R_3^2 - R_2^2)}$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Außenraum $(R_3 \leq r \leq \infty)$ **:** $\Theta = I - I = 0$
Im Außenraum werden Innen- und Außenleiter komplett umschlossen. Damit hebt sich die Durchflutung auf. Die magnetische Feldstärke gibt nach dem Stokesschen Integralsatz:

$$H(r) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = 0$$

5 Selbstinduktion

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \qquad W = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad W = \frac{\mu}{2} \cdot H^2$$

$$W = \frac{\mu}{2} \int_G H^2(r)\, dV \qquad W = \frac{1}{2\mu} \int_G B^2(r)\, dV$$

Durch Gleichsetzen letzterer Gleichung mit $W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$ und Umformung:

$$L = \frac{1}{\mu \cdot I^2} \int_G B^2(r)\, dV$$

Jetzt wird eine Fallunterscheidung für die Induktivität für Innenleiter, Innenraum und Außenleiter gemacht. Im Außenraum ist die Induktivität aufgrund $B = 0$ mit $L = 0$ bekannt. Die Gesamtinduktivität ist die Summe der Einzelinduktivitäten: $L = L_1 + L_2 + L_3$.

Innenleiter $(0 \leq r \leq R_1)$:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot R_1^2} \cdot r \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot R_1^2} \cdot r \qquad B^2(r) = \frac{\mu^2 \cdot I^2}{4\pi^2 \cdot R_1^4} \cdot r^2$$

$$L = \frac{\mu}{4\pi^2 \cdot R_1^4} \int_G r^2\, dV \qquad L = \frac{\mu}{4\pi^2 \cdot R_1^4} \int_G r^2 det(\vec{\Phi}_z, \vec{\Phi}_r, \vec{\Phi}_\varphi)\, d\varphi dr dz$$

$$G = \left\{(\varphi, r, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq R_1,\ 0 \leq z \leq l\right\}$$

Dabei heißt $det(\vec{\Phi}_z, \vec{\Phi}_r, \vec{\Phi}_\varphi)$ Funktionaldeterminante. Diese wird nötig um das Integral in Polarkoordinaten zu lösen. Bisher konnte dies umgangen werden. Damit kann $dV = dxdydz$ in $dV = d\varphi dr dz$ transformiert werden und das magnetisierte Volumen durch den Winkel φ, Radius r und Zylinderhöhe z beschrieben werden. Die Berechung dieser Transformation soll erst beim Innenraum gezeigt werden. Hier soll $det(\vec{\Phi}_z, \vec{\Phi}_r, \vec{\Phi}_\varphi) = r$ angenommen werden.

Nach Einsetzen der Funktionaldeterminante ergibt das Integral:

$$L = \frac{\mu}{4\pi^2 \cdot R_1^4} \int_0^l \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} r^3\, d\varphi dr dz \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{\mu \cdot l}{8\pi}$$

L' ist hier der auf die Länge des Kabels bezogene Induktivitätsbelag: $L' = \frac{L}{l}$.

$$L' = \frac{\mu}{8\pi}$$

Innenraum $(R_1 \leq r \leq R_2)$ **:**

$$H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot r} \qquad\qquad B^2(r) = \frac{\mu^2 \cdot I^2}{4\pi^2 \cdot r^2}$$

$$L = \frac{\mu}{4\pi^2} \int_G \frac{1}{r^2}\, dV \qquad\qquad L = \frac{\mu}{4\pi^2} \int_G \frac{1}{r^2} \cdot det(\vec{\Phi}_z, \vec{\Phi}_r, \vec{\Phi}_\varphi)\, d\varphi dr dz$$

$$G = \left\{ (\varphi, r, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ R_1 \leq r \leq R_2,\ 0 \leq z \leq l \right\}$$

Dabei heißt $det(\vec{\Phi}_z, \vec{\Phi}_r, \vec{\Phi}_\varphi)$ Funktionaldeterminante. Diese wird nötig um das Integral in Polarkoordinaten zu lösen. Bisher konnte dies umgangen werden. Damit kann $dV = dxdydz$ in $dV = d\varphi dr dz$ transformiert werden und das magnetisierte Volumen durch den Winkel φ, Radius r und Zylinderhöhe z beschrieben werden. Im Folgenden wird die Transformation von x, y, z gezeigt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \vec{\Phi}$$

Mit den partiellen Ableitungen nach φ, r, z in den Komponenten.

$$\vec{\Phi}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\Phi}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\Phi}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$det(\vec{\Phi}_z, \vec{\Phi}_r, \vec{\Phi}_\varphi) \qquad \Leftrightarrow \qquad det \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r$$

Nach Einsetzen der Funktionaldeterminante ergibt das Integral:

$$L = \frac{\mu}{4\pi^2} \int_0^l \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, d\varphi dr dz \qquad \Leftrightarrow \qquad L = \frac{\mu \cdot l}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

L' ist dabei der auf die Länge bezogene Induktivitätsbelag: $L' = \frac{L}{l}$.

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Außenleiter ($R_2 \leq r \leq R_3$) :

$$H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$B^2(r) = \frac{\mu^2 \cdot I^2}{4\pi^2 \cdot (R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \frac{(R_3^2 - r^2)^2}{r^2} \qquad L = \frac{\mu}{4\pi^2 \cdot (R_3^2 - R_2^2)^2} \int_G \frac{(R_3^2 - r^2)^2}{r^2}\, dV$$

$$L = \frac{\mu}{4\pi^2 \cdot (R_3^2 - R_2^2)^2} \int_G \left(\frac{R_3^4}{r^2} - 2 \cdot R_3^2 + r^2 \right) \cdot det(\vec{\Phi}_z, \vec{\Phi}_r, \vec{\Phi}_\varphi)\, d\varphi dr dz$$

$$G = \left\{ (\varphi, r, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ R_2 \leq r \leq R_3,\ 0 \leq z \leq l \right\}$$

Die Funktionaldeterminante $det(\vec{\Phi}_z, \vec{\Phi}_r, \vec{\Phi}_\varphi) = r$ wurde bereits gezeigt.

$$L = \frac{\mu}{4\pi^2 \cdot (R_3^2 - R_2^2)^2} \int_G \frac{R_3^4}{r} - 2 \cdot R_3^2 \cdot r + r^3\, d\varphi dr dz$$

Aufgrund der Linearität, kann das Volumenintegral zerlegt werden.

$$L = \frac{\mu}{4\pi^2 \cdot (R_3^2 - R_2^2)^2} \left(R_3^4 \int_G \frac{1}{r}\, d\varphi dr dz - 2 \cdot R_3^2 \int_G r\, d\varphi dr dz + \int_G r^3\, d\varphi dr dz \right)$$

Für die Berechung der einzelnen Integrale ergibt sich dann:

$$R_3^4 \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_3} \int_0^l \frac{1}{r}\, d\varphi dr dz = 2\pi \cdot R_3^4 \cdot \ln \frac{R_3}{R_2} \cdot l$$

$$-2 \cdot R_3^2 \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_3} \int_0^l r\, d\varphi dr dz = -2\pi \cdot R_3^2 \cdot (R_3^2 - R_2^2) \cdot l$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_3} \int_0^l r^3\, d\varphi dr dz = \frac{2\pi}{4} \cdot (R_3^4 - R_2^4) \cdot l$$

Nach Ausklammern von 2π und l ist die Induktivität zunächst gegeben.

$$L = \frac{\mu \cdot l}{2\pi \cdot (R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \left(R_3^4 \cdot \ln \frac{R_3}{R_2} - R_3^2 \cdot (R_3^2 - R_2^2) + \frac{1}{4} \cdot (R_3^4 - R_2^4) \right)$$

$$L = \frac{\mu \cdot l}{2\pi} \cdot \left(\frac{R_3^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{(R_3^2 - R_2^2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(R_3^2 + R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right)$$

Und wieder ist Induktivitätsbelag: $L' = \frac{L}{l}$ gegeben:

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \left(\frac{R_3^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{(R_3^2 - R_2^2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(R_3^2 + R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right)$$