Kinematika

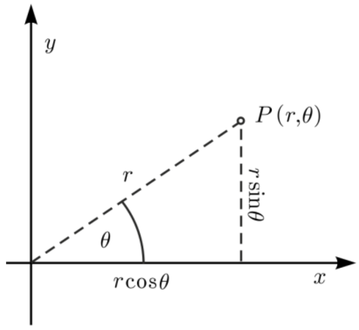
Síkbeli és térbeli mozgások

Koordinátarendszer: Valamilyen egyértelműen meghatározható ponthoz rögzített vonatkoztatási rendszer. Tetszőlegesen vehetjük fel, úgy érdemes, hogy egyszerűsödjön a számolás.

Típusai 2 dimenzióban:

- Derékszögű koordinátarendszer
- <u>Polár koordinátarendszer</u>

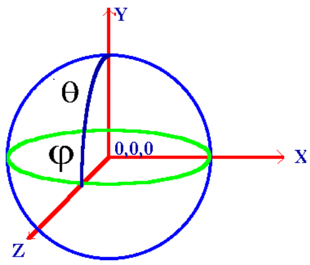
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tg\Theta = \frac{y}{x}$$



Típusai 3 dimenzióban:

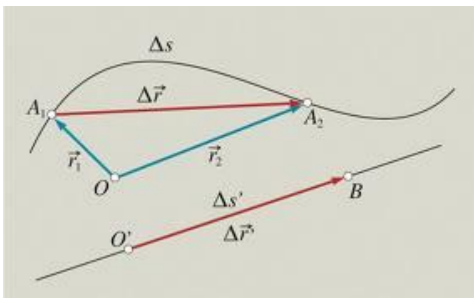
- Derékszögű koordinátarendszer
- Henger koordinátarendszer
-
- <u>Gömbi koordinátarendszer</u>

$$x = r \cdot sin(\theta) \cdot cos(\varphi)$$
$$y = r \cdot sin(\varphi) \cdot sin(\theta)$$
$$z = r \cdot cos(\theta)$$



Helyvektor (r): Az origó és P pont közötti irányított szakasz. A koordinátarendszertől függ a dimenziójának a száma. Mindig csak adott koordinátarendszerben értelmezhető, de ott egyértelmű. A mozgásokat a helyvektorral írjuk le. A cél az, hogy minden időpillanatban ismert legyen a helyvektor.

Elmozdulást leíró fogalmak:



- Pálya: helyzetvektor elmozdulása az időben
- Elmozdulásvektor: a kezdős és végpont közötti vektor. (egyenes szakasz, a legrövidebb távolság)
  $$\Delta r = r2 - r1$$
- Út: A1 és A2 pont között adott pályán megtett távolság

$$s \triangleq \lim_{\Delta \underline{r} \to 0} \sum_{A1}^{A2} \Delta \underline{r} = \int_{r1}^{r2} d\underline{r}$$

SI mértékegysége a [m].

Az elmozdulásvektor lehet 0, ha az út nem 0, például, ha a kezdőpontba jutottunk vissza.

Síkbeli és térbeli sebesség

Átlagsebesség:

$\underline{v}_{átl} \triangleq \frac{\Delta r}{\Delta t}$ így könnyen felveheti a 0 értéket, ha ugyanoda jutunk vissza.

Pillanatnyi sebesség:

$$\underline{v} \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}\ , \underline{v} = \dot{\underline{r}}(t)$$

A pillanatnyi sebesség is vektormennyiség.
Ha nincsen külön jelző a sebesség előtt, akkor a pillanatnyi sebességet értjük.
A pillanatnyi sebesség mindig a pálya érintősébe mutat.
SI mértékegysége a [m/s].

A sebességet az elmozdulás idő szerinti deriváltjaként definiáltuk. Azonban az elmozdulásvektor felbontható (ha derékszögű koordinátarendszert nézünk) x, y, z irányú egységvektorok lineáris kombinációjára is. Ilyenkor mindhárom tagot kell deriválni, de mivel szorzatok emiatt nem csak az együtthatókat kell lederiválni, hanem az egységvektorokat is le kéne, de mivel az egységvektorok nem változnak az időben, így 0 értékűek lesznek.

$$\underline{v} = \frac{dx}{dt} * \underline{\check{x}} + \frac{dy}{dt} * \underline{\check{y}} + \frac{dz}{dt} * \underline{\check{z}} + x * \frac{d\underline{\check{x}}}{dt} + y * \frac{d\underline{\check{y}}}{dt} + z * \frac{d\underline{\check{z}}}{dt}$$

Ez azonban polár koordinátarendszerre már nem igaz.

Síkbeli és térbeli gyorsulás

Átlagos gyorsulás:

$$\underline{a}_{átl} \triangleq \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

$$\underline{a} \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt}$$

Ha nincsen külön jelző a gyorsulás előtt, akkor a pillanatnyi gyorsulást értjük.
SI mértékegysége a [m/s^2]

Amennyiben ismert a test helyvektora, sebessége, gyorsulása, akkor a mozgás minden időpillanatban felírható!

Hajítások, egyenes vonalú egyenletes mozgások

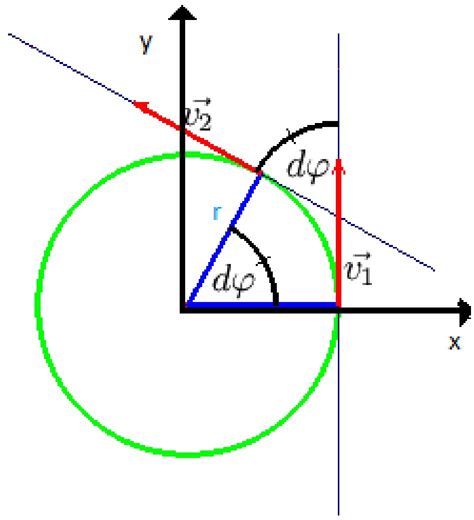
Most csak a 2 dimenziós hajításokkal foglalkozunk, ahol a légellenállás elhanyagolható, és a gravitációs gyorsulás állandó (9,81 m/s^2).

A szabadon eső testek mozgásának komponensei függetlenek, ezt még Galilei mondta ki. Vagyis a mozgás során végig különválasztható, és külön kezelhető az x és az y irányú komponensek.

Így minden komponens esetében tulajdonképpen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a test.

$a = állandó$
$v(t) = \int_0^{t'} a * dt = at' + c1$; ha $v(0) = v_0$ => $v(t) = a * t + v_0$
$x(t) = \int_0^{t'} v(t) * dt = \int_0^{t'} (at + v_0) * dt = \frac{1}{2} a * t^2 + v_0 * t + x_0$

Körmozgás



Ha egy test pályája kör alakú, akkor körmozgásról beszélünk.

Szögelfordulás:

$$\varphi \triangleq \frac{s}{r} \, [rad]$$

Sebesség:

Mindig az érintő irányba mutat, különben letérne a pályáról.

Gyorsulás:

Mindenképp van radiális, középpont felé mutató gyorsulása, hiszen, a sebességvektor folyamatosan változik. Ezt hívjuk centripetális gyorsulásnak (a_{cp}).
Ha a sebességvektor nagysága állandó, és csak az iránya változik, akkor egyenletes körmozgásról beszélünk, ha a nagysága is változik az időben, akkor gyorsuló a körmozgás.
Ha gyorsuló a körmozgás, akkor van érintőirányú komponense is a gyorsulásvektornak. (a_t).

A centripetális gyorsulás:

Iránya a középpont felé mutat, hiszen *d*$\underline{v}$ vektor határhelyzetben párhuzamossá válik a helyvektorral.

Határhelyzetben: $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \approx \frac{\Delta s}{r}$

A definíció: $a_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} * \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} * v = \frac{v^2}{r}$

Szögsebesség:

Axiális vektor, vagyis a mozgás síkjára merőlegesen mutat a jobb kéz szabálynak megfelelően.

$$\underline{|\omega|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt}$$

Egyéb összefüggések:

$$\omega * r = r * \frac{d\Theta}{dt} = \frac{r * \frac{ds}{dr}}{dt} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$\underline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = v * \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta t} = v * \omega$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = r * \omega^2 = v * \omega$$

Dinamika

Newton törvények

I. törvény (tehetetlenség törvénye): Minden test megtartja mozgásállapotát (egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban marad), amíg más test erővel nem hat rá.

Következményei:

- Nyugalom és az egyenes vonalú mozgás semmiben sem különbözik, a nyugalom csak egy speciális eset.
- Nem hat erő, az azzal is megfeleltethető, ha erők eredője 0.
- Erő hatására gyorsulni fog a test, de nem minden test egyforma mértékben (tehetetlen tömeg).

Erőtörvények:

- 1, Erős kölcsönhatás: közelható erő, erősség: 1
- 2, Elektromágneses erők: közelható erő, erősség: 10^{-2}
- 3, Gyenge kölcsönhatás: távolható erő, erősség: 10^{-13}
- 4, Gravitációs erő: távolható erő, erősség: 10^{-38}

Inerciarendszer: Def: Minden rendszer, ahol érvényes Newton első törvénye. Ezek a rendszerek egymáshoz képest nyugalomban vannak, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.
Newton törvények minden inerciarendszerben azonosan érvényesülnek, így nincsen kitüntetett rendszer (relativitás elve). Egy fizikai leírás akkor megfelelő, hogyha minden inerciarendszerben azonos alakú.

II. törvény: Rendszer impulzusváltozásához erő kell. $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$. Továbbgondolva, ha a tömeg állandónak tekinthető (nem relativisztikus eset / hétköznapi eset): $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} = m * \frac{d\underline{v}}{dt} = m * \underline{a}$.

SI mértékegysége az erőnek a N (newton).

Tömegek:
A gyorsuláshoz erő kell, azonban a különböző testek különböző módon reagálnak, gyorsulnak ugyanazon erő hatására (gondolatkísérlet). Ezt a tömeget hívjuk tehetetlen tömegnek.
Tömeget azonban egyszerűbb mérni, hogyha a testre ható erőket 0-vá tesszük, a gravitációs erőt kiegyensúlyozzuk. Ez a statikai tömegmérés. Súlyos tömegnek nevezzük, ha csak a gravitációs erővel szemben határozzuk meg a tömeget. $\underline{F} = m * \underline{g}$.
Eötvös József mérései 10^{-9}-es pontossággal igazolták, hogy a súlyos és tehetetlen tömeg aránya 1. Majd Einstein mondta ki, hogy a két féle tömeg teljesen ekvivalens.

Impulzus, lendület: $\underline{p} = m * \underline{v}$. Mértékegysége SI-ben: kg*m/s.

III. törvény: (Erő-ellenerő törvénye): Ha A és B test erőt gyakorol egymásra, akkor az A által a B-re kifejtett erő ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú, mint a B által az A-ra kifejtett erő.

$$F_{A\to B} = -F_{B\to A}$$

Ez minden 2 tömeges rendszerre igaz, ha több tömeges a rendszer, akkor minden két test között páronként ez felírható.

A két erő egyszerre és ugyanannyi ideig hat. Azonban a támadáspontjuk különböző! Másik testre hatnak.

IV törvény (Erőhatások függetlenségének elve): Ugyanabban a pontban ható erők helyettesíthetők 1 erővel, a vektori összegzés szabályai szerint. Másképpen: az erők szuperponálhatók.

Erőtörvények:

- Nehézségi erő: $\underline{F} = m * \underline{g}$
- Rugóerő: $\underline{F} = -k * \underline{x}$
- Gravitációs erő: $\underline{F} = \gamma \frac{m1 * m2}{r^2} * \underline{r_e}$
- Súrlódási erő: $\underline{F_s} = \mu * F_{ny}$

Súrlódási erők: 2 érintkező test között (az egyik lehet a talaj is) súrlódási erő lép fel.

Csúszó:

A csúszó súrlódási erő az érintkező felületek közös érintősíkjába esik.
Iránya ellentétes az adott test másik testhez viszonyított relatív sebességével.
Az erő arányos a testek közötti nyomóerővel, és az arányossági tényező a csúszó súrlódási együttható (μ_{cs}). Az együttható függ az anyagi minőségtől.
Hétköznapi esetekben ez az erő állandó.
Az erő nem függ az érintkező felületek nagyságától.

Tapadási:

Akkor értelmezhető, ha a testek relatív sebessége 0.
Nagysága mindig akkora, hogy a test nyugalomban maradjon. És Iránya is ehhez igazodik.
Általában nagyobb a tapadási súrlódási együttható, mint a csúszási, emiatt indul meg hírtelen a húzott test.

Mechanikai Munka

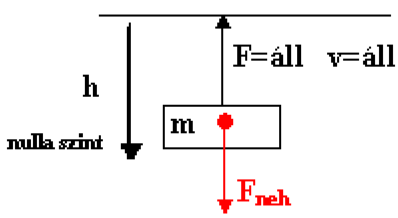
Def: F erő munkája az erő elmozdulás irányába eső összetevőjének és a test elmozdulásának szorzata. Jele W. SI mértékegysége: J (joule). $W = \underline{F} * \underline{s} = \underline{|F|} * \cos\Theta * \underline{|s|}$. Skaláris mennyiség, emiatt a 2 vektor skaláris szorzatát nézzük.

Lehet pozitív és negatív is a bezárt szögtől függően. 0°-90°-ig pozitív. 90°-180°-ig negatív.

Gravitációs erő munkája:

Ha tartunk egy testet és leejtük az mozogni kezd, vagyis a gravitáció pozitív munkát végez.
Emeléskor azonban mi fektetünk be munkát a gravitációs erőtér ellenében.

$$W = \underline{F} * \underline{h} = \underline{|F|} * \cos 180° * \underline{|h|} = -mgh$$



Változó erő munkája:

A teljes utat elemi kis szakaszokra bontjuk, ahol már az erő állandónak tekinthető.
Egy kis elemi szakasz munkája: $\Delta W = \underline{F} * \underline{\Delta x}$. A teljes szakaszra: $W = \sum_{i=0}^{n} \underline{F} * \underline{\Delta x_i}$.
Ha kellően finom a felosztás: $W = \lim_{\Delta xi \to 0} \sum_{i=0}^{n} \underline{F} * \underline{\Delta x_i} = \int_a^b \underline{F}(x) * d\underline{x}$.

Lineáris rugótörvény (Hook törvény):

Ha kihúzzuk a rugót, akkor a rugóerő ezzel ellentétesen, befele hat, míg amikor összenyomjuk a rugót akkor szintén ellentétesen, de már kifele hat. Emiatt a rugóerő: $\underline{F} = -k * \underline{x}$. A munkája pedig: $W = \int_0^x -kx * dx = -\frac{1}{2} * k * x^2$.

Munkatétel:

A test mozgási energiájának változása megegyezik a testen végzett munkával.
Egyenletes gyorsuláskor:
$x = \frac{1}{2} a * t^2 + v_0 * t + x_0$, és $v = a * t + v_0$.
Utóbbiból az időt kifejezve: $t = \frac{v - v_0}{a}$.
Behelyettesítve első egyenletbe: $(x - x_0) = \frac{v - v_0}{a} * v_0 + \frac{1}{2} * a * \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$.
Átrendezve: $v^2 - {v_0}^2 = 2 * a * (x - x_0)$.
Beszorozva m/2-vel: $\frac{1}{2} * m * v^2 - \frac{1}{2} * m * {v_0}^2 = m * a * (x - x_0)$.
Ami pont a munkatétel: $\Delta K = \Delta W$.

Ha nem egyenletes a gyorsulás:
$\underline{F} = m * \underline{a} = m * \underline{\ddot{r}}$.
Mindkét oldalt szorova v-vel ($\underline{\dot{r}} - al$). -> $m * \underline{\dot{r}} * \underline{\ddot{r}} = \underline{\dot{r}} * F$.
Ahol: $\underline{\dot{r}} * \underline{\ddot{r}} = \frac{1}{2} * \frac{d}{dt} (\dot{r}^2)$.
Így: $m * \frac{1}{2} * \frac{d}{dt} (\dot{r}^2) = \underline{\dot{r}} * F$.
Amit kiintegrálva éppen a minkatételt kapjuk.

Energia

Def: A testek fizikai állapotát egy adott pillanatban leíró mennyiség. Energia egy skalár mennyiség, amely csak pozitív értékű lehet.
SI mértékegysége a J (joule).

Mozgási energia:

Jele: K
Képlete: $K = \frac{1}{2} * m * v^2$
Változó erő hatására: $\underline{F} = m * \underline{a} = m * \frac{\Delta v}{\Delta t}$.
Az erő munkája: $W = \int_a^b F(x) * dx = \int_a^b m * \frac{dv}{dt} * dx = \int_a^b m * \frac{dv}{dx} * \frac{dx}{dt} * dx = \int_a^b m * \frac{dv}{dx} * v * dx = \int_a^b m * v * dv = \frac{1}{2} * m * v_a^2 - \frac{1}{2} * m * v_b^2$.
vagyis bármilyen erőhatás esetén elegendő a kezdeti és végállapotot megnézni. Így kiszámítható az erő munkája, és az energiaváltozás.

Potenciális energia, helyzeti energia:

Rendszeren munkát végezve nem biztos, hogy gyorsulni fog, de ezek után magára hagyva munkát végezhet. Ilyenkor a külső erő munkája a helyzeti energiát növeli.
Jele: U.
Például: ha egy tárgyat megemelünk, majd megtartunk, nem változik a mozgási energiája, de ha elengedjük, akkor munkát is tud végezni a rendszer, pl.: meghajt egy kereket.
A 0 potenciálú helyet tetszőlegesen választhatjuk.
Ekvipotenciális vonalaknak, felületnek azon pontok halmaza, ahol a potenciális energia azonos. Pl.: 2 dimenzióban gravitációs erőtérnél koncentrikus körök.

Rugóenergia:

Azzal, hogy összenyomunk, vagy széthúzunk egy rugót mi munkát végzünk, ami később visszanyerhető (ha felveszi az alapállapotát a rugó). Tehát a rugó képes energiát tárolni. Ennek mértéke ugyanakkora, mint amekkora munkát belefektettünk: $W = \int_0^x -kx * dx = -\frac{1}{2} * k * x^2 = U_r$
Uygyanaz mint a potenciális energia, emiatt is jelölik szintén U-val.
Az összenyomott és a kihúzott rugó energiája is ugyanakkora

Termikus energia, belső energia:

Így nevezzük a mechanikában a disszipatív erők által végzett munkát. (Disszipatív erőket lásd: Erők típusai) Mechanikában nem visszanyerhető.
Leggyakrabban a súrlódási erő munkája okoz termikus energiaváltozást:
$\Delta E_t = F_s * \Delta x$.

Ezek alapján már egy külső erő munkája nem csak a kinetikus energia megváltozását okozhatja, hanem a potenciális, rugó, és belső energiát is.

$$W_k = \Delta K + \Delta U_p + \Delta U_r + \Delta E_t$$

Erők típusai

Konzervatív erők:

Def: Ha két pont közötti mozgás során az erő által végzett munka független a pálya alakjától. Képletileg: $\int_a^b \underline{F} * dr = állandó$, $W_{A \to B} = -W_{A \to B}$.
Például: Rugóerő, Gravitációs erő.

Centrális erők:

Def: Bármilyen irányt véve a térben, az erő hatásvonala mindig a középpont és test között van, nagysága pedig a távolságtól függ.
A centrális erők konzervatívak.
Például: Gravitációs erő, elektrosztatikus erők.

Disszipatív erők:

Def: Ha a munka függ a pálya alakjától.
Például: Súrlódási erő.

Konzervatív rendszer:

Def: Ha csak konzervatív erők hatnak.

Ilyenkor definiálhatunk potenciális energiafüggvényt, ami a konzervatív erők ellenében végzett munka.

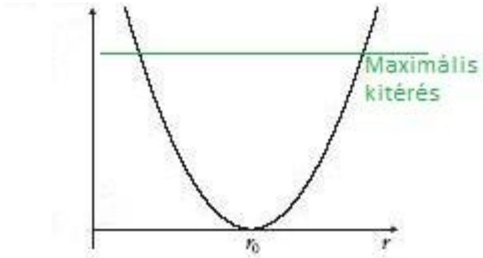
$$U(r) = W_{-F} = -\int_{ro}^{r1} \underline{F}(r) * d\underline{r}$$

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}, ha\ 1\ dimenziós\ mozgás$$

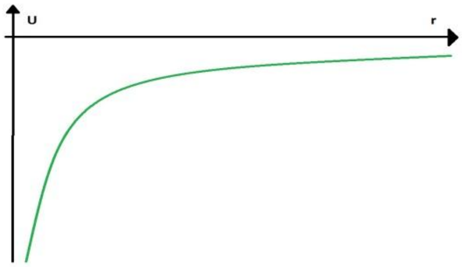
$$\underline{F}(\underline{r}) = -grad(U), ha\ több\ dimenziós\ mozgás$$

Minden konzervatív erőhöz létezik egy potenciális energiafüggvény amire ez teljesül
A 0 szintet szabadon választhatjuk meg.
Általában Digrammokon is ábrázoljuk a potenciális energiafüggvényt.

Példa: Rugó potenciális energiája:
Szélső esetben maximális a potenciális energia, míg a kinetikus energia 0. Középső helyzetben pedig a potenciális energia 0, és kinetikus energia maximális. (Erről még lesz szó az energiamegmaradásnál.)



Példa: centrális erőtér (pl gravitációs erőtér): Ilyenkor negatív a potenciális energia, mert középpontban nehéz lenne értelmazni, így a végtelenbe helyezik a 0 pontot.



Állapotok (ha végtelenben van a 0 pont):

- Kötött állapot, ha potenciális energia <0
- Szabad állapot, ha pontenciális energia >0

Energiamegmaradás

Axióma, vagyis nem kell bizonyítani, de eddig minden tapasztalat ezt mutatja.

Mechanikai energimegmaradás:
Tétel: Ha adott egy elszigetelt rendszer, ahol csak konzervatív erők hatnak, akkor a konzervatív erők által végzett munka egyenlő a potenciális energia negatív megváltozásával.

$$\sum W = -\Delta U$$

A munkatétellel összetéve megkapjuk, hogy a kinetikus és a potenciális energia átalakulhat egymásba.

$$\Delta K = -\Delta U$$

Kibővített energiamegmaradás tétele:
Ha hatnak disszipatív erők is, akkor a külső erő munkája megegyezik a kinetikus, potenciális, és termikus energia megváltozásával.

Teljesítmény

Def: Az erő munkájának idő szerinti deriváltja. „A munka gyorsasága”.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \underline{F} * \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \underline{F} * \underline{v}$$

Skaláris mennyiség.

SI mértékegysége a W (watt).

Impulzusmegmaradás

Nem konzervatív rendszerben is érvényes tétel.

Például ütközésekkor használjuk fel.

Tétel: egy zárt rendszer impulzusa állandó.

Bizonyítás:

Newton III. törvénye ütközéskor: $\underline{F}_{A \to B} = -\underline{F}_{B \to A}$.

Newton II. törvényével összefűzve: $\frac{d}{dt} * (m1 * \underline{v1}) = -\frac{d}{dt} * (m2 * \underline{v2})$.

Átalakítva: $\frac{d}{dt} * (m1 * \underline{v1} + m2 * \underline{v2}) = \frac{d}{dt} * (\underline{p}1 + \underline{p}2) = 0$

Ez pedig csak akkor lehet, hogyha az impulzus összege állandó.

Erőlökés:

$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$ -> $\underline{F} * dt = d\underline{p}$

Pillanatnyi erőhatást menetét nem tudjuk kimérni, emiatt gyakran kell helyettesítenünk egy átlag erővel, ami Δt ideig hat. Ennek a veszélye, hogy a valóságban sokkal nagyobb erők is felléphetnek, mint az átlag.

Impulzus olyankor is megmarad amikor nem csak a sebesség, hanem a tömeg is változik.

Rakétamozgás:

A rakéta, és az üzemanyag (gáz) tekinthető egy zárt rendszernek, emiatt érvényes rá az impulzusmegmaradás tétele.

A rakéta a mozgásával a kiáramló gáz impulzusváltozását kompenzálja.

Rakétamozgás egyenlete:

$$F * \Delta t = p - p_0$$

Ahol p az aktuális impulzusa a rakétának, p_0 pedig a kezdeti.

Az F erő a gravitációs erő, amit leküzd a rakéta, valamint a rakéta és a gáz impulzusait kifejtve (a sebesség és a tömeg is változhat!):

$$-m * g * \Delta t = [(m + \Delta m_r) * (v + \Delta v) + (\Delta m_g) * (v - v_g)] - m * v$$

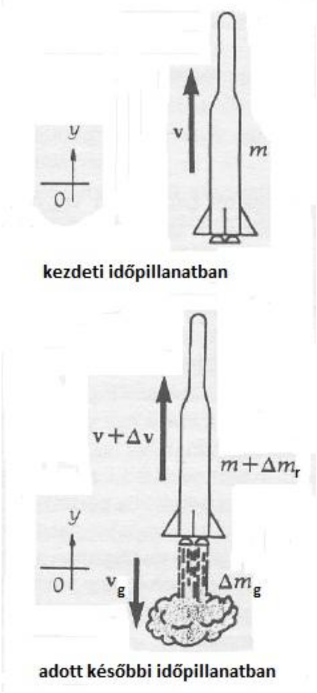
A rakéta tömegének változása pont -1-szerese a kiáramló gáz tömegének.

$$-m * g * \Delta t = [(m + \Delta m) * (v + \Delta v) - (\Delta m) * (v - v_g)] - m * v$$

Felbontva a zárójeleket:

$$-m * g * \Delta t = m * \Delta v + \Delta m * \Delta v + \Delta m * v_g$$

Osztva Δt-vel, m-el ,valamint határértéket véve (Δ-ból deriválás lesz. és $\Delta m * \Delta v$ eltűnik):



kezdeti időpillanatban

adott későbbi időpillanatban

$-g = \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} * \frac{1}{m}(v_g + \Delta v)$

A rakéta gyorsulása: dv/dt:

$$\boldsymbol{a = -\frac{v_g}{m} * \frac{dm}{dt} - g}$$

Látszik, hogy akkor lesz pozitív a gyorsulás, hogyha $-\frac{v_g}{m} * \frac{dm}{dt} > g$, vagyis, hogyha:

$\frac{dm}{dt} < 0$, vagyis csökken a rakéta tömege.

Kiintegrálva a 2 oldalt, hogy egyszerűbb legyen:

$$\boldsymbol{v = v_g * \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - g * t}$$

Gravitáció, Bolygómozgás

Kepler törvények:

1, Bolygók ellipszis pályán mozognak, aminek egyik fókuszpontja a Nap.

2, A helyvektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területet súrol. (Napközelben gyorsabban, Naptávolban lassabban halad a bolygó.)

3, $\frac{T^2}{R^3} = állandó$, ahol T a keringési idő, R az átlagos távolság a Naptól.

Bizonyítása körpályára: $F_g = F_{cp}$ => $\gamma * \frac{m*M}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$ => $\gamma * \frac{M}{r^2} = \omega^2 * r$ =>$\omega^2 * r^3 = \gamma * M$=>$\frac{(2*\Pi)^2}{T^2} * r^3 = \gamma * M$=>$\frac{T^2}{R^3} = állandó$

Newton tömegvonzási törvény:

2 részecske között $F = -\gamma * \frac{m1*m2}{r^2}$ nagyságú erő hat. Mindkettőre hat 1-1 erő, és a másik felé mutat.

Gravitációs potenciális energia:

Gravitációs mező: egységnyi tömegre ható gravitációs erő:

$$\underline{g} = -\gamma * \frac{M}{r}$$

Gravitációs tér konzervatív erőtér. Potenciális energiafüggvénye:

$$U_g = \int_{\infty}^{r} \gamma * M * m * \frac{dr}{r^2} = -\gamma * \frac{M * m}{r}$$

Ebből a gravitációs erőtér munkája (mgh) is kihozható:

$$\Delta U_{g=} - \gamma * M * m * \frac{y}{(R + y) * R}$$

Mivel y sokkal kisebb mint R, emiatt elmanyagolható, és akkor már meg is kaptuk mgh-t, mivel h azonos y-al.

Szökési sebesség:

Kötött állapotból szabad állapotba jutó test sebességét nevezzük szökési sebességnek. Vagyis: $U_0 + K_0 = U(\infty) + K(\infty) = 0$

Felírva a potenciális, és kinetikus energiákat: $-\gamma * \frac{M*m}{r} + \frac{1}{2} * m * v^2 = 0$

Ebből: $v = \sqrt{\frac{2*\gamma*M}{R}}$, ami a Földön kb. 11,2km/s

Ütközések

Makroszkópikus esetben 2 esetről beszélhetünk, amikor fizikailag ütköznek, ilynekor az impulzusmegmaradás tétele igaz lesz, valamint amikor csak közel haladnak el egymáshoz, ilyenkor a gravitációs erőtörvényeket kell felírni.

Mikroszkópikus esetben csak szóródásról beszélhetünk, vagyis rövid idő alatt nagy erő hat a részecskékre, de nem találkoznak.

Általunk vizsgált a makroszkópikus valódi ütközésnek 2 szélső esete van, a tökéletesen rugalmas, és a tökéletesen rugalmatlan ütközés. Azonban a 2 között bármilyen átmeneti ütközés előfordulhat a valóságban.

Tökéletesen rugalmas ütközéskor az ütközés után a testek különböző sebességgel haladnak tovább. Nincsenek disszipatív erők, így a mechanikai energiamegmaradás tétele, és az impulzusmegmaradás tétele is teljesül.

$$m1 * v1 + m2 * v2 = m1 * u1 + m2 * u2$$

$$\frac{1}{2} * m1 * v1^2 + \frac{1}{2} * m2 * v2^2 = \frac{1}{2} * m1 * u1^2 * \frac{1}{2} * m2 * u2^2$$

Tökéletesen rugalmatlan ütközéskor a két test összetapad, és azonos sebességgel haladnak tovább. Ilyenkor csak az impulzusmegmaradás tétele érvényes.

$$m1 * v1 + m2 * v2 = (m1 + m2) * u$$

Több tömeges rendszerek

Tömegközéppont:

Def:

$$\underline{r}_{tkp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \underline{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

A nevezőben tulajdonképpen az egész rendszer össztömege van.

A tömegközéppont sebességét ennek az idő szerinti deriválásával kapjuk:

$$\underline{v}_{tkp} = \frac{d\underline{r}_{tkp}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \underline{v_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

A tömegközéppont gyorsulását pedig a kétszeres deriváltból kapjuk:

$$\underline{a}_{tkp} = \frac{d^2\underline{r}_{tkp}}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \underline{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Tömegközéppont tétel:

A rendszer úgy mozog, mintha a tömegközéppontba pontba lenne összesűrítve a az összes tömeg, és mintha arra hatna az eredőerő.

Példa: A tüzijáték. A tömegközéppont ugyanúgy parabolapályát ír le, hiába robban darabokra út közben.

Bizonyítás:

Newton II. törvénye egyik pontra: $m * \underline{\ddot{r}} = Fk + \sum_{i \neq j} F_{ij}$, ahol Fk a külső erő.

Newton II. törvénye mindegyik pontra: $\sum_{i=1}^{n} m_i * \underline{\ddot{r_i}} = \sum_{i=1}^{n} Fk_i + \sum_i \sum_{i \neq j} F_{ij}$.

Azonban a belső erők kölcsönösen kiejtik egymást, így marad: : $\sum_{i=1}^{n} m_i * \underline{\ddot{r_i}} = \sum_{i=1}^{n} Fk_i$.

Amibe ha behelyettesítjük a tömegközéppont gyorsulásának definícióját:

$$M * \ddot{\underline{r}}_{tkp} = \sum_{i=1}^{n} Fk_i$$

A tömegpontok mozgási energiáját a külső és belső erők is meg tudják változtatni. Például egy összenyomott rugó szétlök 2 autót.
Azonban a mechanikai energiamegmaradás még itt is érvényes (ha csak konzervatív erők hatnak):

$$\Delta K + \Delta U_{külső} + \Delta U_{belső} = állandó$$

A pontrendszer mozgási energiáját nem csak az egyes pontok mozgási energiájának összegeként tudjuk felírni. Hanem vehetjük a tömegközéppont sebességét (v tkp), és a tömegközépponthoz képesti sebességeit (v') a pontoknak.

$$\underline{v}_i = \underline{v}'_i + \underline{v}_{tkp}$$

A Galilei tarnformációt alkalmaztuk.

$$K_{rendszer} = \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^{n} m_i * \left(\underline{v}'_i + \underline{v}_{tkp}\right)^2$$

$$K_{rendszer} = \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^{n} m_i * \left(\underline{v}'^2_i + (2 * \underline{v}'_i * \underline{v}_{tkp}) + \underline{v}^2_{tkp}\right)$$

A középső tag a tömegközéppont definíciója miatt 0. Így:

$$K_{rendszer} = \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^{n} m_i * \underline{v}'^2_i + \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^{n} m_i * \underline{v}^2_{tkp}$$

A bal oldali tömegközépponti rendszerbeni mozgási energia.

A jobb oldali pedig a tömegközéppont mozgási energiája.

$$K_{rendszer} = K_{belső} + K_{TKP}$$

Impulzusmomentum, perdület

Impulzusmomentumnak nevezzük egy tömeg helyvektorának és impulzusának vektoriális szorzatát.

$$\underline{L} = \underline{r} \, x \, \underline{p}$$

Impulzusmomentum tétel:

A forgatónyomatékok vektori eredője egyenlő a impulzusmomentum időbeli megváltozásával.

Bizonyítás:

Newton II. törvénye: $\underline{F} = m * \ddot{\underline{r}}$.

Mindkét oldalt vektroiálisan szorozva r-el: $\underline{r} \, x \, \underline{F} = m * (\underline{r} \, x \, \ddot{\underline{r}})$.

Mivel: $\underline{r} \, x \, \ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} * (\underline{r} \, x \, \dot{\underline{r}})$, és $\underline{r} \, x \, \underline{F} = \underline{M}$ így az egyenlet:

$M = \frac{d}{dt} * (\underline{r} \, x \, m * \dot{\underline{r}})$, ami: $M = \frac{d}{dt} * (\underline{r} \, x \, \underline{p})$,

Az $\underline{r} \, x \, \underline{p}$-t impulzusmomentumnak nevezzük, jele: $\underline{L}$.

Vagyis végül a tétel algebrai alakja:

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{M}$$

Impulzusmomentum tétel több tömeges rendszerek esetében:

Bizonyítás:

Newton II. törvénye: $m * \ddot{\underline{r_i}} = \underline{F_i} + \sum_{j=i} \underline{F_{ij}}$.

Mindkét oldalt vektroiálisan szorozva r-el: $m * (\underline{r_i}\ x\ \ddot{\underline{r_i}}) = \underline{F_i} + \sum_{j=i} \underline{F_{ij}}$.

Mivel: $\underline{r}\ x\ \ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} * (\underline{r}\ x\ \dot{\underline{r}})$, így az egyenlet:

$\frac{d}{dt} * \left(\underline{r_i}\ x\ m * \dot{\underline{r_i}}\right) = \underline{r_i}\ x\ \underline{F_i} + \sum_{j \neq i} \underline{r_i}\ x\ \underline{F_{ij}}$.

Az összes pontra nézve:

$$\frac{d}{dt} * \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{r_i}\ x\ m * \dot{\underline{r_i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i}\ x\ \underline{F_i} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \underline{r_i}\ x\ \underline{F_{ij}}$$

Az utolsó (dupla szummás tag 0, hiszen a egyes erők és helyvektor különbségek párhuzamosak lesznek. Mivel: $F_{ij} = -F_{ji}$, és így $\underline{r_i}\ x\ \underline{F_{ij}} + \underline{r_j}\ x - \underline{F_{ij}}$, ami tovább egyenlő: $\left(\underline{r_i} - \underline{r_j}\right)\ x\ \underline{F_{ij}}$, ami a párhuzamosság és az $\underline{r_i} = \underline{r_j}$ miatt 0.

Tehát az eredeti egyenlet egyszerűsödik:

$$\frac{d}{dt} * \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{r_i}\ x\ m * \dot{\underline{r_i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i}\ x\ \underline{F_i}$$

ami:

$$\frac{d}{dt} * \sum_{i=1}^{n} \underline{L_i} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M_i}$$

Centrális erők esetén a perdület állandó, mert a forgatónyomaték 0, hiszen az erők és az elmozdulásvektor párhuzamosak, így vektoriális szorzatuk 0.

Kiterjedt test

Ha már nem közelíthető 1 tömegpontként egy test, akkor kiterjedt testekről beszélünk. A kiterjedt test mind transzlációs mozgást (eddigi mozgások), mind rotációs mozgást (saját tengelye körüli forgást) képes végezni.

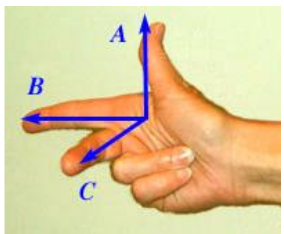
Merev testnek nevezünk egy kiterjedt testet, ha a részecskék megtartják a kezdetben meghatározott helyüket a tömegközépponthoz képest (röviden: nincsen deformáció).

Forgatónyomaték:

a Forgatónyomaték egyenlő az erő és az erőkar (tengely és támadáspont közötti távolság) vektoriális szorzatával:

$$\underline{M} = \underline{r}\ x\ \underline{F}$$

$$\left|\underline{M}\right| = \left|\underline{r}\right| * \left|\underline{F}\right| * \sin\Theta$$



Az SI mértékegysége: Nm (newton-méter).

Az irányát a jobb kéz szabállyal tudjuk meghatározni:

$$\underline{C} = \underline{A}\ x\ \underline{B}$$

Impulzusmomentum, Perdület:

Impulzusmomentumnak nevezzük egy tömeg helyvektorának és impulzusának vektoriális szorzatát.

$$\underline{L} = \underline{r}\ x\ \underline{p}$$

A perdület irányát szintén a jobb kéz szabálynak megfelelően tudjuk megállapítani.
A perdület a rotáció síkját is kijelöli emiatt.
Perdület időbeli megváltozása egyenlő a forgatónyomatékok eredőjével.

$$\frac{\Delta \underline{L}}{\Delta t} = \underline{M_e}$$

Tehetetlenségi nyomaték:

Nem egyformán hajlandóak elkezdeni a testek forogni, erre használjuk a tehetlenségi nyomaték fogalmát.
Jele: I.
Def:

$$I = \sum m_i * r_i^2$$

Egy test mindig a legangyobb tehetetlenségű tengelye körül forog, mert a perdület vektor a forgástengelyhez tartana, ha magára hagyjuk, és engedjük.
A tehetetlenségi nyomaték és perdület közötti kapcsolat (ha szimmetria tengely körül forgunk):

$$\underline{L} = I * \underline{\omega}$$

Néhány test tehetetlenségi nyomatéka:

- Vékony gyűrű vagy vékonyfalú henger geometriai tengelye körül forgatva: $\sum m_i * r_i^2$.
- Tömör henger geometriai tengelye körül forgatva: $\sum \frac{1}{2} * m_i * r_i^2$.
- Tömör gömb geometriai tengelye körül forgatva: $\sum \frac{2}{5} * m_i * r_i^2$.
- Vékony rúd egyik vége körül forgatva: $\sum \frac{1}{3} * m_i * r_i^2$

Egyensúlyának feltétele, hogy a forgatónyomatékok és az erők összege is 0 legyen. Ekkor érvényes a mechanikai energiamegmaradás is a rendszerben.

Forgómozgás

Alapfogalmak:

szögelfordulás: $\Theta = \frac{s}{r}, radiánban$
szögsebesség: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt}$, mértékegység SI-ben: rad/s
szöggyorsulás: $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

Hasonlóság a transzlációs mozgásokhoz:

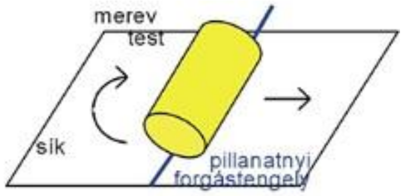
Θ≈s: szögelfordulás kb út.
ω≈v: szögsebessség kb sebesség.
α≈a: szöggyorsulás kb gyorsulás.

$s = s_0 + v_0 * t + \frac{1}{2} a * t^2$ ≈≈≈ $\Theta = \Theta_0 + \omega_0 * t + \frac{1}{2} \alpha * t^2$
$v = v_0 + a * t$ ≈≈≈ $\omega = \omega_o + \alpha * t$
$\underline{p} = m * \underline{v}$ ≈≈≈ $\underline{L} = I * \underline{\omega}$ (szimmetria tengely körül)
$K = \frac{1}{2} * m * v^2$ ≈≈≈ $E = \frac{1}{2} * I * \omega^2$
$\underline{F} = m * \underline{a}$ ≈≈≈ $\underline{M} = \Theta * \underline{\alpha}$

Rotációs energia:

$$E = \frac{1}{2} * \Theta * \omega^2$$

Tiszta gördülés:



Amikor egy kiterjedt test úgy forog, hogy közben nem csúszik meg a talajon, akkor tiszta gördülésről beszélünk. Ilyenkor a test és a kényszerfelület egymással érintkező pontjainak eredő sebessége mindig nulla.
A felső pont sebessége pedig megegyezik a tömegközéppont sebességével: $2 * v_{tkp} = v_{felső} = 2 * r * \omega$. Ez adja meg a test transzlációs, és rotációs mozgása közti kapcsolatot. Egyébként a felső pont a forgás során cikluois pályát ír le.

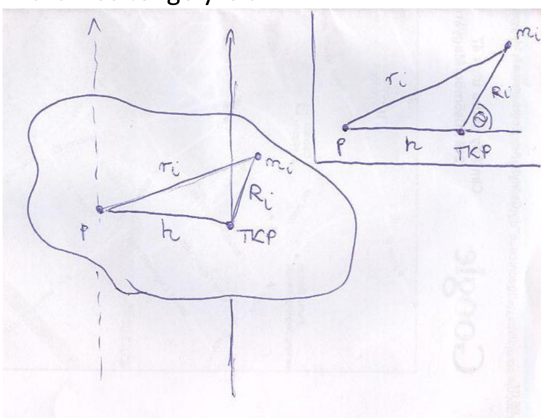
Forgó testen végzett munka:

$$\Delta W = F_é * \Delta s = F_é * r * \Delta\Theta = M * \Delta\Theta$$

$$W = \int_{\Theta 1}^{\Theta 2} M * d\Theta$$

Steiner-tétel:

Ha egy test egyik forgástengelyének ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát, akkor könnyen kiszámíthatjuk egy másik, az előzővel párhuzamos tengelyre a tehetetlenségi nyomatékot:



$$I_p = I_{tkp} + m * h^2$$

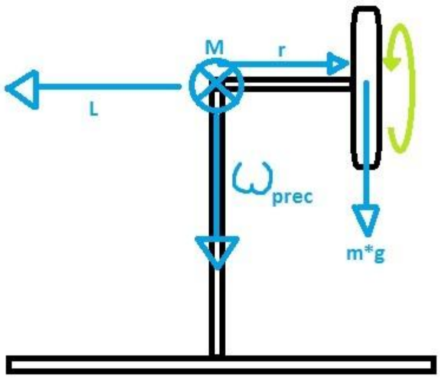
ahol h az ismert és kiszámítandó tengely közti távolság, m a test teljes tömege.
Bizonyítás:

Koszinusz tétel miatt:
$r_i^2 = R_i^2 + h^2 - 2 * R_i * h * \cos\gamma_i$
$r_i^2 = R_i^2 + h^2 + 2 * R_i * h * \cos\Theta_i$
Tehetetlenségi nyomaték:
$I_p = \sum m_i * r_i^2$
$I_p = \sum m_i * R_i^2 + \sum m_i * h^2 + \sum m_i * 2 * R_i * h * \cos\Theta_i$
Azonban az utolsó szumma pont a tömegközéppont definíciója, így 0 lesz.
Tehát: $I_p = \sum m_i * R_i^2 + \sum m_i * h^2 = I_{tkp} + m * h^2$

Pörgettyű effektus, precesszió:

Ha egy vízszintesen forgó testet megtámasztunk, akkor az lassan vizszintes síkban forogni kezd. Ezt nevezzük pörgettyű effektusnak.
A forgás során a perdülete folyamatosan változik:
$\Delta L = L * \Delta\Theta$
A perdület változását a nehézségi erő fogatónyomatéka okozza: $\underline{|M|} = m * g * r$

$$\underline{|M|} = \frac{|\Delta \underline{L}|}{\Delta t} = L * \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = L * \omega_{prec}$$



Vagyis:

$$\underline{|M|} = m * g * r = L * \omega_{prec}$$
$$\omega_{prec} = \frac{m * g * r}{L}$$

Jelentőssége: Lendkerekek, giroszkóp.

Gyorsuló koordinátarendszerek

Ha két koordinátarendszer gyorsul egymáshoz képest, akkor a Newton törvények nem írhatók fel ugyanolyan alakban. Hiszen, ha az álló rendszerben gyorsulásnak érzékelt mozgást (a) fel akarjuk írni egy hozzá képest gyorsuló rendszerben (a_r), akkor nem elég abban a gyorsulást (a') megmérni, hanem a kettőt össze kell adni: $a = a' + a_r$.

Ezek után, ha fel akarnánk írni Newton II. törvényét, akkor egy fiktív erő fellépését is tapasztaljuk:

$$m * a - m * a_r = m * a'$$

A középső erő a valóságban nem létezik, de ha tehetetlenségi erőként kezeljük, akkor visszakapjuk a az eredeti Newton egyenletet.

Példa: a gyorsuló buszban a kapaszkodó hátrafele kileng. Kívülről nézve látjuk az okát, hiszen a busz gyorsul, így az erők vízszintes irányú komponensei összességében nem 0-k. A buszról nézve, azonban nem látszana, hogy miért hajlik el, emiatt feltételezzük ezt a fiktív erőt.

Forgó koordinátarendszerben is hasonló a helyzet, mivel ezek is gyorsuló koordinátarendszernek minősülnek az inerciarendszerekhez képest-

Centrifugális erő:

Ha egy forgó asztalon egy golyó van, és az asztallal együtt forog, akkor kívülről szemlélődve azt tapasztaljuk, hogy hat rá a centripetális erő, és emiatt forog az asztallal együtt.

Azonban, ha beleülünk az asztal koordinátarendszerébe, akkor azt tapasztaljuk, hogy a golyó áll. De tudjuk, hogy a centripetális erő ekkor is hat rá. Emiatt, hogy az erők eredője 0 legyen, feltételezzük, hogy hat rá még egy erő, a centrifugális erő, ami ugyanolyan nagyságú, mint a centripetális, csak kifele hat.

$$F_{cf} = -m * (\underline{\omega} \, x \, (\underline{\omega} \, x \, \underline{v}))$$

Coriolis-erő:

Ha egy forgó asztal koordinátarendszerében ülünk, akkor egy elengedett golyó nem egyenesen hagyja el az asztalt, hanem ferde pályát ír le, ami miatt feltételezzük a Coriolis-erőt.

Az erőt az alábbi képlettel tudjuk megadni:

$$F_c = -2m * (\underline{\omega} \, x \, \underline{v})$$

Az irányát a vektori szorzás jobb kéz szabályával kaphatjuk meg, de figyeljünk a – előjel miatt ellentétes irányt kell venni.

A Föld is nagyon jó példa erre, hiszen ha elindulunk az északi sark felé, akkor mindig jobbra térít minket a Coriolis-erő.

A Coriolis-erő a földön legegyszerűbben egy Foucault-ingával mutatható ki: ez egy olyan inga, mely hosszú időn keresztül leng, és ez által láthatóvá válik a lengési sík elfordulása. A hatás az sarkokon a legerősebb, hiszen ott merőlegessé válik az $\underline{\omega}$ és a $\underline{v}$, míg az egyenlítőn megszűnik a hatása, mert párhuzamosak lesznek.

A Coriolis-erő felelős a ciklonok kialakításában is fontos szerepet játszik, ez alakítja ki az irányukat.

Speciális relativitáselmélet

A speciális relativitáselmélet csak inerciarendszerekkel foglalkozik, vagyis a koordinátarendszerek nem gyorsulhatnak egymáshoz képest.

Galilei-transzformáció

Ha két koordinátarendszer egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, akkor, ha át akarunk térni az álló (vessző nélküli paraméterek) rendszerből a mozgóba (vesszős paraméterek), akkor a helyvektorokat transzformálni kell:

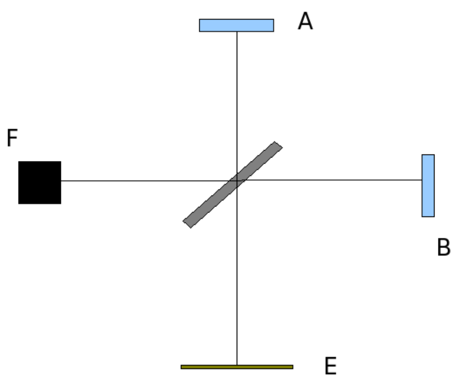
$$\underline{r}(t) = \underline{R}_0 + v * t + \underline{r}'(t)$$

Ahol R_0 a két koordinátarendszer kezdeti távolsága, és v az egymáshoz képesti sebességük.
Ilyenkor a Newton törvények alakja állandó, hiszen: $m * \ddot{\underline{r}} = \underline{F}$ és ha kétszer lederiváljuk idő szerint a felső képletet:

$$\dot{\underline{r}}(t) = v + \dot{\underline{r}}'(t)$$
$$\ddot{\underline{r}}(t) = \ddot{r}'(t)$$

vagyis tényleg azonos alakúak lesznek.

Michelson – Morley kísérlet



A kísérletben meg akarták mérni a Föld sebességét, úgy, hogy félig áteresztő tükrön keresztül vezetnek fénynyalábot 1-1 tükörre (A és B), ahonnan visszaverődve szintén áthaladva a félig áteresztő tükrön interferencia lépne fel (E detektornál). Ugyanis a függőlegesen haladó fénysugárra semmilyen késleltetés nem hatna, a vízszintesen haladót viszont befolyásolná a Föld forgása.

Azonban semmilyen eltérést nem tapasztaltak.

Speciális relativitáselmélet axiómái:

- **„Relativitás elve.” Minden inerciarendszer egyenrangú. A fizikai törvények azonos alakúak bármely rendszerben.**
- **„Fénysebesség (jele: c) állandósága.” A vákuumbeli fénysebesség minden inerciarendszerben azonos.**

Lorentz-transzformáció

Egyes eseményeket különböző helyről megfigyelve másképpen, vagy máskor érzékeljük. Általában emberi tartományokban nincsen szükség erre a transzformációra, hiszen a hatása csekély, azonban relativisztikus sebességek (fénysebességgel összemérhető nagyságrendű sebességek) esetén már számolni kell vele.

Mozgó rendszerben a más időben, de azonos helyen történt eseményeket a nyugvó megfigyelő más helyen látja. De a mozgó koordinátarendszerben egy időben lévő, de különböző helyen történt eseményeket a nyugvó megfigyelő különböző időben látja. Példa erre a vonat. Ha valaki vacsorázik a vonaton és az állomásról figyeljük, akkor más helyen látjuk, hogy hol eszi a levest és hogy hol a főételt, mert folyamatosan közeledik a vonat. Azonban ha egyszerre ketten esznek levest, valaki a vonat elején, más a vonat végén, akkor az állomásról nézve az elől lévő embert hamarabb látjuk enni, mint a végében lévőt (közeledésnél).

Ezt jól szemléltethetjük a Minkowski-eljárással, amikor is a mozgó koordinátarendszerben felvesszük az eseményeket (idő és hely szerint), majd a tengelyeket megfelelően elforgatva megkapjuk az álló koordinátarendszerben érzékelt eseményeket.

Képletileg a transzformáció:

Innentől kezdve a sima paramétereket az álló koordinátarendszerbeli értéknek, a vesszős paramétereket a mozgó koordinátarendszerbeli értékeknek vesszük! A két koordinátarendszer pedig v sebességgel mozog egymáshoz képest. A helykoordináták és az időkoordináták is különbözőek már a két rendszerben, de van 1 pillanat, amit mindkettőben a 0 időnek lehet venni.
Tegyük fel, hogy a két rendszer tengelyei párhuzamosak egymással és a test, amit vizsgálunk csak az x tengely mentén mozog.

Ha fel akarjuk írni a helykoordináták értékeit a másik rendszer paramétereivel, akkor transzformációt kell végrehajtani rajta:

$$x = \lambda * (x' + v * t')$$
$$x' = \lambda * (x - v * t)$$
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

az első axióma miatt azonos minden rendszerben a λ transzformáció!

Ha egy l hosszú rúd nyugszik az álló koordinátarendszerben és azt a mozgóból nézzük, akkor mást érzékelünk, és ez fordított esetben is igaz:

$$l1 = x_2 - x_1 = \lambda * (x'_2 - x'_1)$$
$$l2 = x'_2 - x'_1 = \lambda * (x_2 - x_1)$$

Az idők is másképp telnek:

$$t = \frac{x}{c}$$
$$t' = \frac{x'}{c}$$

Ezek alapján a teljes transzformáció:
Állóból a mozgó rendszerbe való áttéréskor:

$$x' = \frac{x - v * t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} * x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Mozgóból az álló rendszerbe való áttérés:

$$x = \frac{x' - v * t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' - \frac{v}{c^2} * x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nyugalmi hossz

Abban a rendszerben mért a hosszt, ahol a test nyugszik, nevezzük nyugalmi hossznak. Ez egy invariáns paraméter, amely az adott testre jellemző.

Minden más rendszerből mérve a hosszt rövidebb értéket kapunk, ezt nevezzük hossz kontrakciónak.

Példa:

Ha az álló rendszerben nyugszik a test:

$$l_0 = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l' = l_0 * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

valóban kisebb lett a mért érték.

Ha mozgó rendszerben nyugszik a test:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = l_0 * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

itt is kisebb lett a mért érték.

Saját idő

Ha az események közötti időt abban a rendszerben mérjük, ahol az időméréshez egy óra kell, és abban a rendszerben számolunk tovább velük, akkor azt saját időnek nevezzük.

Ha a mozgó rendszerben történik 2 esemény, akkor a köztes idő:

$$\Delta t'_0 = t'_2 - t'_1$$

Ez a saját idő.

Ha ezt az álló rendszerből mértük volna:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Amint láthatjuk a másik rendszerben mért idő mindig hosszabb lesz:

$$\Delta t > \Delta t'_0$$

Ezt nevezzük idő dilatációnak.

A saját időt képesek vagyunk 1 órával mérni, azonban szükség lehet esetleg több órára, akkor azokat szinkronizálni kell. A szinkronizálást úgy tudjuk elvégezni, hogy abban a rendszerben vagyunk, ahol az eseményeket meg akarjuk figyelni, és a két órához képest nem mozgunk. Ha átlépünk egy másik rendszerbe, ahol már az órák is mozognak, onnantól kezdve lehetetlen a szinkronizálás, hiszen ahogy mozognak felénk, máskor pillantjuk meg őket, és elcsúsznak.

Kauzalitás

Nincsen olyan rendszer, ahol előbb lenne az okozat, és aztán csak az ok.

Ha az álló rendszerben történik 2 esemény (t1 és t2 időben, x1 és x2 helyen), amelyek nem függetlenek, és aminek a terjedési sebessége C, akkor az álló rendszerben:

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{x_2 - x_1}{C}$$

Ezt a mozgó rendszerből figyelve:

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} * x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

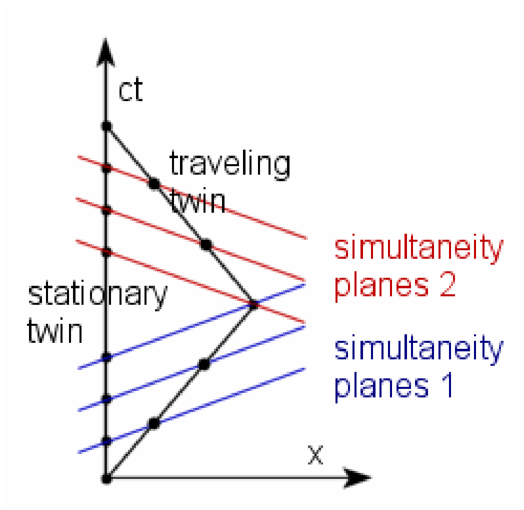
$$t'_2 = \frac{(t_1 + \Delta t) - \frac{v}{c^2} * x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_1 + \frac{x_2 - x_1}{C} - \frac{v}{c^2} * x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ha a kettő között eltelt időre vagyunk kíváncsiak a mozgó rendszerben:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{x_2 - x_1}{C} - \frac{v}{c^2} * x_2 + \frac{v}{c^2} * x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(x_2 - x_1) * (\frac{1}{C} - \frac{v}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ez csak akkor lehet kisebb mint 0, (vagyis hogy előbb legyen az okozat aztán az, hogyha $\left(\frac{1}{C} - \frac{v}{c^2}\right)$lesz kisebb mint 0. Azonban ilyenkor $\frac{1}{C} < \frac{v}{c^2} \quad => \quad C > \frac{c^2}{v} = c$ Vagyis a hatás terjedési sebessége gyorsabb lenne mint a fénysebesség, ami nem lehet.

Ikerparadoxon



Ez egy különös jelenség a speciális relativitáselméletben, amely ha két megfigyelő összehangolt órákkal ugyanabból a pontból indulva különböző mozgást végez, akkor következő találkozásukkor az óráik nem feltétlenül fogják ugyanazt mutatni. (Ez az idődilatáció jelenségén alapul: a mozgó óra lassabban jár, mint az álló.)

A megfogalmazása az, hogyha egy ikerpár egyik tagja elutazik fénysebesség közeli sebességgel egy csillagig majd vissza, akkor az elutazott tag fiatalabb lesz mint a Földön maradt társa.

Példa:

Az egyik testvér 0,8c-vel haladva elmegy egy l =4 fényévre lévő csillagig és vissza, míg a testvére a Földön marad.

A Földön ez alatt 10 év telik el: $t = \frac{x}{v} = \frac{2*4*c}{0,8c} = 10\ év$

Azonban ha áttérünk a mozgó testvér szemszögébe, akkor Lorentz transzformációt kell végrehajtani:

$$x' = l' = l_0 * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2 * 4 * c * \sqrt{1 - 0,8^2} = 4,8\ fényév$$

$$t' = \frac{x'}{v} = \frac{4,8c}{0,8c} = 6\ év$$

Tehát amíg a testvér a Földön 10 évet öregszik, addig az utazó 6-t.

Relativisztikus dinamika

Az impulzus megmaradás törvénye relativisztikus esetben is érvényes marad, azonban itt is alkalmaznunk kell a Lorentz-transzformációt.

Például: Ha két egymással szembe menő, egymás mellett elhaladó hajóból kidobnak két labdát, amik ütköznek, akkor az egyik hajóból úgy látják, hogy a másik labda sokkal gyorsabban halad, mégis lezajlik az ütközés, és mindkét hajó ugyanakkor kapja el a saját labdáját. Emiatt szükséges a Lorentz transzformáció.

$$\underline{p} = \frac{m * \underline{u}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A képlet értelmében úgy is számolhatunk, mintha a tömeg szenvedne változást, ahogy gyorsítjuk a testet egyre nagyobb lesz a tömege.

Sebességösszegzés:

Ha két relativisztikus sebességű űrhajó mozog, akkor nem számolhatunk a szokásos sebesség-összefüggésekkel, hanem relativisztikusan kell számolni.

Ha az egyik űrhajó balra mozog v-vel, a másik jobbra u-val. És mi a balra mozgóból szeretnénk megfigyelni a másik űrhajót, akkor az ott érzékelt sebességet megkapjuk:

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\lambda * (dx - v * dt)}{\lambda * (dt - \frac{v}{c^2} * dx)}$$

a tört számlálóját és nevezőjét is osztva dt-vel:

$$u' = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v * \frac{dx}{dt}}{c^2}} = \frac{u - v}{1 - \frac{v * u}{c^2}}$$

ebbe a képletbe behelyettesítve megkapjuk a másik űrhajó sebességét az egyikből nézve.

Tömegek:

Az előbb már említettem, hogy a mozgás során nő a testek tömege (számottevő hatása csak relativisztikus esetben van).

A tömeg és az energia között egy képlet mutatja a kapcsolatot:

$$E = \frac{m_0 * c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m * c^2$$

Ahol m0 az úgynevezett nyugalmi tömeg, ami azt jelenti, hogyha nem mozog a test, akkor ekkora a mérhető tömege. Az m pedig már a mozgás során lévő tömeg.

A $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ közelíthető $1 + \frac{1}{2} * \frac{v^2}{c^2}$ –el, amit ha alkalmazunk:

$$\frac{m_0 * c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 * c^2 + \frac{1}{2} * m_0 * v^2$$

Ahonnan már látható is, hogy az $m_0 * c^2$ az a nyugalmi energia, az $\frac{1}{2} * m_0 * v^2$ pedig a kinetikus energia (kis sebességeknél érvényes a közelítés).

Az impulzus és az energia kapcsolata:

Fontos még megemlíteni, az impulzus és az energia közti kapcsolatot relativisztikus esetben:

$$E = c * \sqrt{m_0^2 * c^2 + p^2}$$

ahol c a fénysebesség, m_0 a nyugalmi tömeg, és p az impulzus.

Általános relativitáselmélet

Az általános relativitáselmélet már a gyorsuló koordinátarendszerekkel is foglalkozik.

2 Axiómára épít:

- 1, A fizikai törvények minden rendszerben azonos alakúak.
- 2, A súlyos és a tehetetlen tömeg azonos.

Rezgések

Bármilyen fizikai mennyiség végezhet rezgést (nem csak a mechanikában van értelmezve, például: elektromos rezgőkör (RLC)).

Rezgőmozgás definíció: Rezgőmozgásnak nevezzük, ha egy fizikai mennyiség periodikusan ugyanazt az értéket veszi fel.

Csillapított rezgés definíció: Ha a fizika mennyiség változása csökken, de periodikusan hasonló változáson megy át.

Harmonikus rezgések

Def: Olyan rezgések, amelyek időben szinuszosan vagy koszinuszosan periodikusak.

Bármilyen rezgés összeállítható harmonikus rezgések összegeként.

Az egyenlete:

$$x(t) = A * \cos \omega t + \varphi_0$$

A: az amplitúdója (maximális kitérése) a rezgésnek.

ω: a körfrekvencia ($\omega = 2\pi * f$, vagyis a frekvencia 2π-szerese).

f: frekvencia ($f = \frac{1}{T}$ ahol T a periódusidő).

T: periódusidő, vagyis mennyi ideig tart egy rezgés.

φ_0: a kezdő fázisszög, vagyis más néven a fázis.

2 féle módon is felírható egy rezgés:

$$x(t) = A * \sin \omega t + B * \cos \omega t$$
$$x(t) = C * \sin(\omega t + \varphi_0)$$

a kettő írásmód könnyen átalakítható egymásba, hogyha kibontjuk az alsót trigonometrikus azonosságokkal:

$$C * \sin \omega t * \cos \varphi_0 + C * \cos \omega t * \sin \varphi_0$$

Innen láthatjuk, hogy

$$C * \cos \varphi_0 = A, C * \sin \varphi_0 = B$$
$$C^2 * \cos^2 \varphi_0 = A^2, C^2 * \sin^2 \varphi_0 = B^2$$
$$A^2 + B^2 = C^2$$

tehát: $C = \sqrt{A^2 + B^2}, \varphi_0 = arctg(\frac{B}{A})$.

Anharmonikus rezgések

Minden rezgés felírható harmonikus rezgések összegeként. A Fourier-sor technikájával:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} * \sum_{k=1}^{\infty} (a_k * \cos k\omega_0 x + b_k * \sin k\omega_0 x)$$

és az a_k-k:

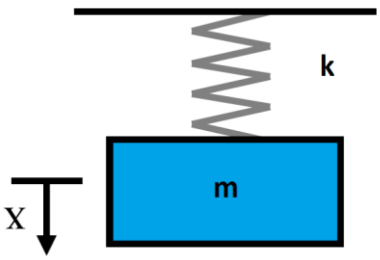
$$a_k = \frac{2}{T} * \int_0^T x(t) * \cos(k * \omega_0 * t) * dt$$

a b_k-k:

$$b_k = \frac{2}{T} * \int_0^T x(t) * \sin(k * \omega_0 * t) * dt$$

és a harmonikus rezgéseknél tárgyalt módon fel lehetne írni 1 darab sinusként is.

Tömegpont harmonikus rezgése



Ha egy rugóra függesztett testet kihúzunk, majd elengedjük, akkor, ha a közegellenállástól eltekintünk harmonikus rezgést végez.
Newton II. törvénye szerint: $m * \ddot{x} = F = -kx$
rugóállandó befolyásolja a frekvenciát: $\frac{k}{m} = \omega^2$
így a mozgás egyenlete: $\boldsymbol{\ddot{x} = -\omega^2 * x}$**.**

Erre az egyenletre megoldás csak a szinusz és a koszinusz, valamint tetszőleges lineáris kombinációjuk lehet a megoldás, ugyanis csak ezek a függvények teljesítik azt a tulajdonságot, hogy második deriváltjuk megegyezik önmaguk -1-szeresével.
A amplitúdót és a fázist pedig a kezdeti feltételek szabják meg. (Például, van-e kezdősebessége a testnek, vagy kihúztuk-e (ilyenkor ez lesz az amplitúdó)).
Ha az eredi szöveg szerint, kihúzzuk a testet x_0 távolságra a nyugalomból majd elengedjük, akkor a mozgásegyenlet: $x(t) = x_0 * \cos \omega t$.

Energiaviszonyok

A lineáris oszcillátor mozgásegyenletéből kiindulva: $\ddot{x} = -\omega^2 * x$.
Mindkét oldalt beszorozva $\dot{x}$-al (v-vel): $\dot{x} * \ddot{x} = -\omega^2 * \dot{x} * x$,
ahol: $\dot{x} * \ddot{x} = \frac{d}{dt} * \left(\frac{1}{2} * \dot{x}^2\right)$ és $\dot{x} * x = \frac{d}{dt} * \left(\frac{1}{2} * x^2\right)$
így az egyenletet 1 oldalra rendezve: $\frac{d}{dt} * \left(\frac{1}{2} * \dot{x}^2 + \frac{1}{2} * \omega^2 * x^2\right) = 0$-ra jutunk.
Vagyis a zárójelbeli tag állandó: $\frac{1}{2} * \dot{x}^2 + \frac{1}{2} * \omega^2 * x^2 = \frac{1}{2} * v^2 + \frac{1}{2} * \omega^2 * x^2 = állandó$

Rugó esetében $\frac{k}{m} = \omega^2$ és az egyenletet, ha beszorozzuk m-vel, akkor megkapjuk az energiaviszonyokat:

$$\frac{1}{2} * m * v^2 + \frac{1}{2} * k * x^2 = állandó$$

vagyis a kinetikus és rugóenergia összesítve nem változik.

Csillapított rezgés

Ilyenkor már számba vesszük a közegellenállást is, tehát a tömegpont rezgését valamilyen hatás lassítja (pl.: közegellenállás). A csillapítás általában sebességfüggő. $F = -\beta * v$.

Ekkor a lineáris oszcillátor egyenlete módosul:

$$\sum F = m * a = -k * x - \beta * v$$

$$m * \ddot{x} = -k * x - \beta * \dot{x}$$

Átrendezve az egyenletet, ha $\frac{k}{m} = {\omega_0}^2$ ahol ω_0 a test saját körfrekvenciája, valamint $\frac{\beta}{m} = 2 * \gamma$ nevezzük át.

$$\ddot{x} + 2 * \gamma * \dot{x} + {\omega_0}^2 * x = 0$$

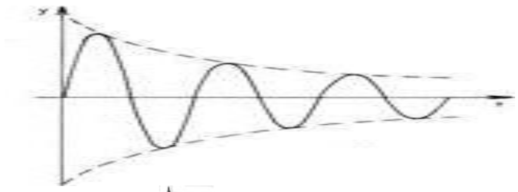
Erre az egyenletre csak az $e^{\lambda t}$típusú függvény lehet megoldás, mivel első és második megoldása is hasonlít önmagára. $f'(t) = \lambda * e^{\lambda t}, f"(t) = \lambda^2 * e^{\lambda t}$.
Behelyettesítve:

$$e^{\lambda t} * (\lambda^2 + 2 * \gamma * \lambda + {\omega_0}^2) = 0$$

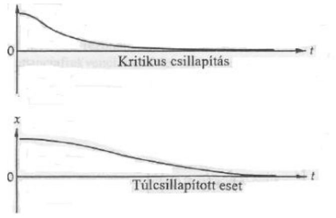
Mivel $e^{\lambda t}$ sose lehet 0, így a másodfokú egyenletnek kell 0-nak lennie. Így az egyenlet megoldásai:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}$$

Vizsgáljuk meg az eseteket:



Ha kicsi a közegellenállás fékezőereje, akkor $\gamma < \omega_0$, és ilyenkor egy exponenciálisan csillapodó szinuszos vagy koszinuszos rezgést kapunk.



Ha nagyobb a közegellenállás, és $\gamma = \omega_0$ vagy $\gamma > \omega_0$ akkor túlcsillapított rezgésnek nevezzük, és sosem tér ki a függvény a x tengely alá.

Kényszerrezgések

Ha a rugón mozgó test csillapított rezgést végezne önmagától (ω_0 körfrekvenciával), azonban valamilyen külső periodikus erővel (ω_k frekvenciájú) beavatkozunk, és rezgésben tartjuk a testet, olyankor beszélhetünk kényszerrezgésről.
Ilyenkor a rezgés a kényszerítőerő frekvenciáján alakul ki (hiszen az tartja fent a rezgést), és a rezgést végző test ehhez alkalmazkodik.

A mozgás egyenlete ilyen esetben:

$$\sum F = m * a = -k * x - \beta * v + F_k(t) \; ahol \; F_k(t) = F_0 * \cos \omega_k t$$

Ha: $\frac{k}{m} = {\omega_0}^2$ és $\frac{\beta}{m} = 2 * \gamma$ akkor az egyenlet:

$$\ddot{x} + 2 * \gamma * \dot{x} + {\omega_0}^2 * x = \frac{F_0 * \cos \omega_k t}{m}$$

Rezonanciajelenségnek nevezzük azt, amikor egy kényszerrezgést végző test amplitúdója hirtelen megnő. Ez akkor következik be, ha a kényszerrezgés frekvenciája közel van, vagy megegyezik a test saját frekvenciájával (vagyis amin akkor rezegne, ha magára hagynánk). Tervezéskor ezt a jelenséget kerülni kell, bár vannak kivételek, amikor pont ezt a jelenséget használjuk ki, pl.: elektromos rezgőkör.

Rezgések összeadása

Ha egy test egyszerre két féle rezgést is végez, akkor ezeket a rezgéseket helyettesíthetjük 1 rezgéssel, illetve fordítva is igaz, hogy a rezgést felbonthatjuk komponensekre.

Egyirányú és azonos frekvenciájú rezgések:

Ha $x_1 = A_1 * \cos \omega t + \varphi_1$ és $x_2 = A_2 * \cos \omega t + \varphi_2$, akkor az eredőjük:
$x_e = x_1 + x_2 = A_1 * \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 * \cos(\omega t + \varphi_2)$, amit trigonometrikus azonosságokkal átalakítva:

$$x_e = B * \cos(\omega t) + \alpha$$

Tehát az eredő rezgés is harmonikus és a frekvenciája is megegyezik az eredeti rezgésekével, de az amplitúdó és a fázisa változhat!

Egyirányú, de különböző frekvenciájú rezgések:

Ha a két frekvencia (és körfrekvencia) aránya racionális szám, akkor eredő rezgés is periodikus rezgés marad.

Bizonyítás:

$x_1 = A_1 * \cos \omega_1 t$ és valamekkora fázissal eltolva $x_2 = A_2 * \cos \omega_2 t + \varphi$

A rezgések periodikusak T periódusidővel(n1 és n2 egészek):

$\omega_1 * t = \omega_1 * (t + T) - n1 * 2 * \pi \,;;;\, \omega_2 * t + \varphi = \omega_2 * (t + T) + \varphi - n2 * 2 * \pi$

Egyszerűsítve az egyenleteket:

$$0 = \omega_1 * T - n1 * 2 * \pi \,;;;\, 0 = \omega_2 * T - n2 * 2 * \pi$$

Egymással osztva a 2 egyenletet:

$$\frac{n1 * 2 * \pi}{n2 * 2 * \pi} = \frac{\omega_1 * T}{\omega_2 * T}$$

ahonnan már látszik is, hogy:

$$\frac{n1}{n2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Tehát ha racionális szám a két frekvencia hányadosa, akkor az eredő rezgés is periodikus.

Ez az állítás fordítva is igaz, tehát ha az eredő rezgés periodikus, akkor felbontható 2 különböző frekvenciájú rezgésre, amiknek, a frekvenciáinak a hányadosa racionális szám.

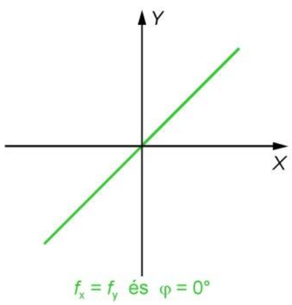
Merőleges, de azonos frekvenciájú rezgések:

Ha egymásra merőlegesek a rezgések, akkor az a test az eredő rezgése során ellipszis pályát fog bejárni.

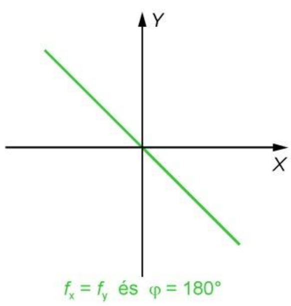
Speciális esetek ha:

- Az amplitúdójuk megegyezik és a fáziskülönbség 90°, akkor kör alakú lesz a pálya.
- A két rezgés közötti fázis 90° akkor szabályos ellipszis lesz a pálya.
- A két rezgés azonos fázisban is van, vagy 180° fázis eltérése, akkor a két rezgés egy egyenes mentén fog rezegni. (Ha az amplitúdók megegyeznek, akkor 45°-os szöget fog bezárni ez az egyenes.)

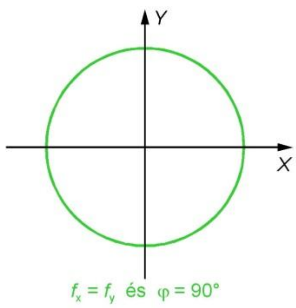
tgα = B/A



tgα = - B/A



A = B



Különböző irányú és különböző frekvenciájú rezgések:

Ha a két frekvencia aránya racionális szám, akkor valamikor visszatér magába a pálya, vagyis zárt görbét fog alkotni. Ha nem, akkor sose tér vissza.

Lebegés

Lebegésnek nevezzük azt a jelenséget, amikor egy rezgés amplitúdója az időben hol erősödik, hol gyengül, de a frekvenciája állandó.

Ez a jelenség akkor jöhet létre, hogyha 2 egyirányú, azonos amplitúdójú, de különböző frekvenciájú rezgés összegződik, azonban a frekvenciák nagyon közeliek egymáshoz.
Legyen $x_1 = a * \cos \omega_1 t$ és $x_2 = a * \cos \omega_2 t + \varphi$a két rezgés. Összegük a trigonometrikus azonosságok után: $x_e = a * \left[\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} * t + \frac{\varphi}{2}\right) * \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} * t + \frac{\varphi}{2}\right)\right]$. Ahogy látjuk $\omega_1 + \omega_2$ nagy frekvenciájú része lesz az eredőnek, míg $\omega_1 - \omega_2$lesz a kis frekvenciáért (erősödért-gyengülésért) felelős rész

A lebegés periódusideje megegyezik a 2 frekvencia különbségének reciprokjával.

$$T_l = \frac{1}{f1 - f2}$$

Hullámok

Definíció: A tér egy adott helyén történő változás később, a tér egy másik pontjában ugyanúgy megjelenik.

Lényegében minden hullámmozgás energiát és impulzust szállít a tér egyik pontjából a másikba, anélkül, hogy a tömeg is eljutna egyik pontból a másikba. (Például Newton-inga.)

Típusai

- Rezgés iránya szerint:
    - Longitudinális: a pontok mozgása egy síkba esik a hullám terjedésével. Pl.: hanghullámok.
    - Transzverzális: a pontok mozgása merőleges hullám terjedésének irányára. Pl.: elektromágneses hullámok, húron terjedő hullám.
- Közeg dimenziója szerint:
    - 1D: pl.: gumiszalagon, húron hullám.
    - 2D: pl.: vízfelszín
    - 3D: pl.: hanghullámok

Leírása

Most csak az egydimenziós hullámokra térek ki részletesen, de a legtöbb állítás igaz több dimenziós hullámok esetén is.

Leírására olyan periodikus függvényt kell keresni, aminek a paramétere az idő és valamilyen irány és abban számított terjedési sebesség:

$$f\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

Olyan függvényt keresünk, ami x1 helyen t1 időpillanatban és x2 helyen t2 pillanatban ugyanazt az értéket veszi fel.

$$f\left(t1-\frac{x1}{c}\right)=f\left(t2-\frac{x2}{c}\right)$$

Ha csak a paramétereket vesszük, akkor:

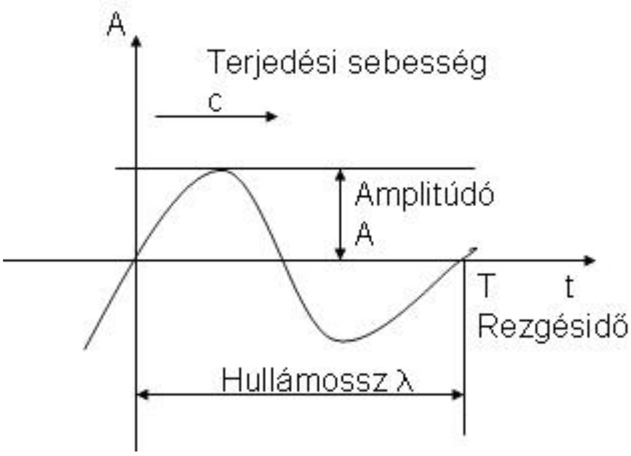
$$t1-\frac{x1}{c}= t2-\frac{x2}{c}$$

$$(t1-t2)*c=x2-x1$$

ebből már látjuk, hogy a hullámot a terjedési sebességével (c) lehet legjobban leírni, mert az állandó marad adott közegben.

A hullámot még jellemzik:

- Periódusidő (T): az az idő, amíg a tér egy pontja ugyanabba a fázisba kerül újra, a hullám terjedése során.
- Frekvencia (f): a periódusidő reciprokja.
- Hullámhossz (λ): a tér két legközelebbi olyan pontjának távolsága, ahol a mozgás ugyanabban a fázisban van.
- Amplitúdó (A): kitérés mértéke.
- Hullámszám (k): k = 2*π/λ



- Körfrekvencia (ω): a frekvencia 2π-szerese.

A hullámjellemzők közötti kapcsolatok:

$$f = \frac{1}{T} \qquad c = \lambda * f \qquad k = \frac{2*\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2*\pi*f \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

Síkhullám

Olyan hullám, amely egy egyenes mentén terjed, a hullámfrontja egy sík.

A leíró függvénynek már nem csak egy idő és egy távolság paraméter szükséges, hanem egy irány (egységvektor) is, amely mutatja, hogy melyik irányban terjed a hullám.

$f\left(t - \frac{\underline{e}*\underline{x}}{c}\right)$, ahol $\underline{x} = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$ és $\underline{\mathrm{e}} = \{\mathrm{e_x}, \mathrm{e_y}, \mathrm{e_z}\}$

Így az egységvektor egyértelműen kijelöli a síkot is.

Hullámegyenlet

Adott valamilyen $f\left(t - \frac{\underline{e}*\underline{x}}{c}\right)$ hullámegyenlet. Jelöljük: $t - \frac{\underline{e}*\underline{x}}{c} = u$

A függvény idő szerinti deriváltjait nézve:

$\frac{\partial u}{\partial t} = 1$mindig, mert síkot kijelölő vektor nem szól bele az időbe, és t' = 1.

A deriváláskor a lánc szabályt kell alkalmazni:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} * \frac{\partial u}{\partial t} \quad => \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} * \frac{\partial u}{\partial t} \quad => \quad \boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2}}$$

A függvény hely szerinti deriváltjait nézve:

$\frac{du}{dx} = -\frac{e_x}{c}$ mert ilyenkor csak a síkot kijelölő vektort kell figyelembe venni.

A deriváláskor a lánc szabályt kell alkalmazni:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} * \frac{\partial u}{\partial x} \quad => \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{df}{du} * \frac{e_x}{c}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2} * \frac{\partial u}{\partial x} \quad => \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} * \frac{{e_x}^2}{c^2}$$

A tér mindhárom irányában ugyanez lesz a hely szerinti derivált, csak a megfelelő egységvektort kell beírni. Azonban olyankor az egységvektorok önmagukkal vett skalár szorzata marad az egyenlet jobb oldalán, ami kiesik:

$$\boldsymbol{\Delta(f)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{d^2 f}{du^2} * \frac{e_x^2 + e_x^2 + e_x^2}{c^2} = \boldsymbol{\frac{d^2 f}{du^2} * \frac{1}{c^2}} = \boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} * \frac{1}{c^2}}$$

Tehát a teljes hullámegyenlet, aminek az f függvénynek eleget kell tenni:

$$\boldsymbol{\frac{1}{c^2} * \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta(f)}$$

Harmonikus hullámok

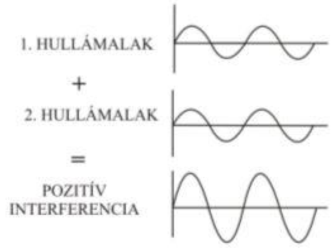
Egy hullámot akkor nevezünk harmonikus hullámnak, hogyha ilyen alakra hozható a leírófüggvénye:

$$f = f_0 * \cos\left[\omega * \left(t - \frac{\underline{e} * x}{c}\right) + \varphi_0\right]$$

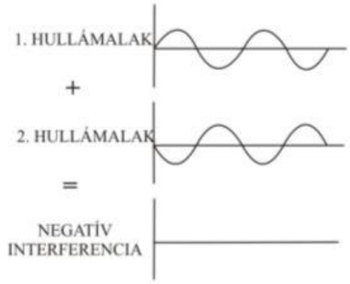
Amit egyszerűsítve, ha a hullámszám $k = \frac{\omega}{c}$, és abból vektort képzünk: $\underline{k} = \frac{\omega}{c} * \underline{e}$ (ha csak 1 dimenzióról beszélünk, akkor nincsen külön értelme vektorokról beszélni):

$$\boldsymbol{f_0 * \cos[\omega * t - \underline{k} * \underline{x} + \varphi_0]}$$

Hullámok összeadása



Azonos frekvenciájú hullámoknál, ha a fázisuk azonos, akkor a két hullám erősíti egymást, és a közös hullám amplitúdója a két hullám amplitúdójának összege lesz. A frekvencia nem változik.
Ha a két amplitúdó megegyezik, a frekvenciájuk azonos, és azonos fázisúak, akkor kétszeres lesz az amplitúdó.



Azonos frekvenciájú hullámoknál, ha a fázisuk ellentétes, akkor a két hullám gyengíti egymást és az közös hullám amplitúdója a két hullám amplitúdójának a különbsége lesz. A frekvencia nem változik.
Ha a két amplitúdó megegyezik, a frekvenciájuk azonos, és ellentétes fázisúak, akkor kioltják egymást, és eltűnik a hullám.

Állóhullámok

Adott két hullám valamilyen amplitúdóval, azonos frekvenciával, de ellentétes irányban terjednek, akkor összeadásukból létrejöhet az állóhullám.

Ilyen helyzet akkor jöhet létre leggyakrabban, hogyha valamilyen felületről visszaverődik a hullám, és saját magával találkozik, saját magával hoz létre interferenciát.
Rögzített végről való (kemény) visszaverődéskor a beérkező hullámmal ellentétes fázisban verődik vissza.
Nyitott végről való (lágy) visszaverődéskor a beérkező hullámmal azonos fázisban verődik vissza.

Adott 2 hullám: $f_1 = f_0 * \cos[\omega * t - \underline{k} * \underline{x} + \varphi_1]$ és $f_2 = f_0 * \cos[\omega * t - \underline{k} * \underline{x} + \varphi_2]$.
Az eredő hullám: $f_e = f_1 + f_2 = f_0 * (\cos[\omega * t - \underline{k} * \underline{x} + \varphi_1] + \cos[\omega * t - \underline{k} * \underline{x} + \varphi_2])$.
Trigonometrikus azonosságok után (cosα+cosβ):

$$f_e = 2 * f_0 * \cos\left[\omega * t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right] * \cos\left[\underline{k} * \underline{x} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right]$$

Láthatóan szétválnak az időt (1. koszinusz) és a teret (2. koszinusz) leíró paraméterek.
Lesznek csomópontok, ahol nem rezeg egyáltalán a szalag, máshol pedig maximális kilengést tapasztalunk

Doppler-hatás

Doppler-hatás akkor alakul ki, hogyha a hullámforrás és a megfigyelő egymáshoz képest mozognak. Ilyenkor a hullám frekvenciája, és a hullámhossza változik.

Közeledéskor:

Az érzékelt frekvencia (f’) magasabb lesz, míg az érzékelt hullámhossz (λ’) rövidebb.

Ha a forrás mozog és a megfigyelő áll és v sebességgel közelednek egymáshoz, akkor a hullámhossz rövidül (több hullámba „ütközik bele” a megfigyelő).

$$\lambda' = \lambda - v * t$$

A frekvencia is módosul emiatt (növekszik):

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - v * t}$$

Mivel: $t = \frac{1}{f}$ és $\lambda = \frac{c}{f}$ így:

$$f' = \frac{c}{\frac{c}{f} - v * \frac{1}{f}} = \frac{c * f}{c - v} = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}} \approx \left(1 + \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right) * \mathrm{f}$$

tehát magasabb lesz a frekvencia.

Ha a megfigyelő mozog és a forrás áll és v sebességgel közelednek egymáshoz, akkor a frekvencia módosul.

$$f' = \frac{c}{\lambda} + \frac{v}{\lambda}$$

$$f' = f + f * \frac{v}{c}$$

$$f' = \left(1 + \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right) * \mathrm{f}$$

Az eredmény ugyanaz a két esetben.

Távolodáskor:

Az érzékelt frekvencia (f’) alacsonyabb lesz, míg az érzékelt hullámhossz (λ’) hosszabb.

Csak ha a forrás mozog és a megfigyelő áll esetét vezetem csak le.

A távolodás miatt a megfigyelő kevesebb hullámba „ütközik bele”:

$$\lambda' = \lambda + v * t$$

A frekvencia is módosul emiatt (csökken):

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda + v * t}$$

Ugyanazon okok miatt, mint közeledéskor:

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}}$$

tehát kisebb lesz a frekvencia.

Ha mind a megfigyelő, mind a forrás is mozog, akkor is csak a relatív sebességük számít. Azonban, ha ismert az álló helyzethez képesti Doppler-effektus, akkor a két hatást egyszerűen összeadva megkapjuk a megfigyelő által érzékelt hullámhosszt, és frekvenciát.

Termodinamika

Nagyszámú részecskéből álló rendszerek atomjainak mozgását, és állapotait nem tudjuk leírni, mert nem ismertek a kezdeti feltételek. Emiatt más, makroszkopikus mennyiségekre kell hagyatkoznunk, amit az érzékszerveinkkel tudunk érzékelni.

Hőmérséklet

Mérése a hosszváltozáson, hőtáguláson (pl.: higanyos hőmérő), vagy akár az ellenállás változásán (pl.: digitális hőmérő) alapulhat. Annyi biztos, hogy a hőmérséklet változása valamilyen más fizikai mennyiség változását is okozza, amit megmérve következtethetünk a hőmérsékletre.

Termikus érintkezésbe hozott testek hőmérséklete kiegyenlítődik. Ez a termodinamika 0-ik főtétele.

Pontos leíráshoz kellenek skálák:
A skálák a jég olvadását, és a víz forrását veszik alapul, ugyanis ezek „stabil” hőmérsékletek, ugyanis amíg végbe nem megy, a folyamat addig nem változik.

- Fahrenheit skála: a jég olvadása = 32°F, a víz forrása = 212°F.
- Celsius skála: a jég olvadása = 0°C, a víz forrása = 100°C.
- Reauinur skála: a jég olvadása = 0°R, a víz forrása = 80°R.
- Abszolút hőmérsékleti skála: a jég olvadása = 273,1K, a víz forrása = 373,1K
- A skálák közötti átváltás:

$$n°C = 0{,}8 * n°R = (1{,}8 * n + 32)°F = (n + 273{,}1)K$$

Az abszolút hőmérsékleti skála:

Tudósok azt tapasztalták, hogy a dugattyúba bezárt gázok nyomásának és térfogatának szorzata $p * V$ állandó, ha az anyagmennyiség és hőmérséklet állandó. Így ideális hőmérséklet mérésére. Azonban innentől kezdve nem a víz olvadása az alapmennyiség, hanem az abszolút hőmérsékletet tudják megmérni.
Mérések során még egy módosító konstanssal is számoltak:

$$p * V = R * T$$

amiről kiderült, hogy minden gázra igaz, hogyha 1 mólnyi van a gázból.
Az R emiatt az egyetemes gázállandó lett, értéke: R = 8,31 J/K.
Innentől kezdve a termodinamikában minden hőmérsékleti értéket Kelvinben kell érteni!!!

Ideális gáz

Ideális gáz jellemzői:

Emberi tartományokban minden gáz ideálisnak tekinthető, csak nagyon alacsony hőmérsékletek esetén kell másképp számolni velük.

- Nincsen kölcsönhatás a részecskék között, csak ütköznek egymással.
- Nem cseppfolyósodnak.
- Kitöltik a rendelkezésre álló teret.
- Méretük elhanyagolható a tároló edény méretéhez képest.
- Nagy a részecskeszám.

Egyetemes gáztörvény

Az egyetemes gáztörvény:

(Amely tulajdonképpen összefoglalja a korábbi megfigyeléseket (Boyle–Mariotte-törvényt, és a két Gay-Lussac-törvényt).

$$\boldsymbol{p * V = n * R * T}$$

Ahol p a gáz nyomása, V a térfogata, n a mol-szám (hány mólnyi gáz van benne), R az egyetemes gázállandó (8,31J/K), T a gáz hőmérséklete.

Anyagmennyiség:

Az anyagmennyiség a mértékegysége a mol. Ez $6*10^{23}$ db részecskét jelent bármilyen anyagból. Ezt a számot nevezzük Avogadro-számnak (Na).

Minden anyagnak van egy meghatározható moláris tömege, vagyis, hogy 1 mól gáz hány gramm (vigyázzunk, itt gramm az alap mértékegység, és nem az SI-beli kg!!!).

$m = n * M$, ahol m a tömeg, n a mol-szám, M a moláris tömeg.

Ha a részecskék számát elosztjuk az Avogadro-számmal, akkor megkapjuk a mol-számot: $\frac{N}{Na} = n$, ahol N a részecskék száma.

Az egyetemes gáztörvény egy másik alakja:

Ha a mol-szám helyett a részecskék számával számolunk és bevezetjük a Boltzmann-állandót, aminek jele k:

$$k = \frac{R}{Na}$$

ahol R az egyetemes gázállandó, Na pedig az Avogadro-szám. Az új állandó értéke: $1{,}38*10^{-23}$.

Így az egyenlet:

$$p * V = N * k * T$$

Ezeket a törvényeket tekinthetjük a gázok állapotegyenletének is, mert minden állapotában igaz az ideális gázokra, ahol az állapotváltozók a nyomás a térfogat, és a hőmérséklet. Vagyis ha az állapotváltozók közül ismert kettő, akkor a harmadik kiszámítható. (Speciális esetben, ha az egyik állandó, akkor a másik kettő egymásból kiszámítható, ha két állapotban is megmérjük a változót.)
Ezek az egyenletek azonban csak egyensúlyi helyzetben igazak, az állapotváltozóknak csak statikus esetben van értelmük, a makroszkopikus megközelítés miatt.
Emiatt csak statikus, vagy kvázi statikus eseteket vizsgálunk, amikor is a változás olyan hosszú idő alatt, megy végbe, hogy a rendszer minden időpillanatban egyensúlyban van.

Termodinamika I. főtétele

Az első főtétel tulajdonképpen a mechanikai energia-megmaradás általánosítása, kiegészítése. A mechanikában csak munkavégzéssel lehetett változtatni egy test energiáját, azonban pl.: ha 2 különböző hőmérsékletű vasdarabot egymás mellé teszünk, akkor a hidegebb felmelegszik, a melegebb lehűl, energiát ad át, de még sincs munkavégzés.

Az I. főtétel:

$$\boldsymbol{dE = \Delta W + \Delta Q}$$

vagyis a test belső energiájának megváltozása megegyezik a rajta végzett munkával és a környezetből való hő közléssel.

A munkát akkor tekintjük pozitívnak, ha a gázt összenyomjuk (csökken a térfogata), vagyis ha mi végzünk munkát a gázon. Negatív pedig akkor, hogyha a gáz tágul, (vagyis a gáz végez pozitív munkát a környezeten). Mint láthatjuk a gázon végzett munka (W) (a mi munkánk), és a gáz által végzett munka (W') egymás ellejtettjei: $W' = -W$.

A hőközlést pozitívnak tekintjük, hogyha a gáz felmelegszik, és negatívnak, hogyha lehűl. A hő mértékegysége a J (joule), vagyis látszik, hogy energia jellegű mennyiség.
(Régebben kalóriában mérték, ami az az energia, ami 14,5°C-ről 15,5°C-re növeli 1dm^3 víz hőmérsékletét. Rövidebben, ami 1°C-vel növeli a víz hőmérsékletét.)

Zárt rendszernek tekintjük a gázt (dugattyút), hogyha se mechanikai munkát nem tudunk végezni rajta, és hőt sem tudunk vele közölni. Félig zárt a rendszer, hogyha lehet hőcsere, de mechanika munkavégzés nem. És nyílt a rendszer, hogyha mindkettő lehetséges.

Az első főtétel ideális gázokra:

Az ideális gáz kinyomhatja a dugattyút, ilyenkor pozitív munkát végez a környezeten, $F = p * A$ erőt tud kifejteni (ahol p a nyomás, A a felület). Munkavégzése ilyenkor: $W' = p * A * dx = p * W$. A rendszeren végzett munka ennek a -1-szerese. Ezt behelyettesítve a főtételbe:

$$dE = \Delta Q - p * dV$$

Hőkapacitás

Definíció: Mennyi energiát kell befektetnünk ahhoz, hogy 1K-el felmelegedjen.

Jele C.

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

azonban így minden testnek különböző lenne a hőkapacitása, attól függően, hogy mennyi részecske van benne.

Emiatt bevezették a fajhőt és a molhőt:

Definíció: 1 egységnyi anyagnak (egy mólnak, vagy egységnyi tömegnek) mennyi energia kell 1K-el történő felmelegítéshez.

$$C_{mol} = \frac{1}{n} * \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$
$$C_m = \frac{1}{m} * \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Ideális gázon, azonban különböző a molhő, ha állandó térfogat mellett vagy állandó nyomás mellett mérjük.

Állandó térfogaton vett molhő (v-vel jelezzük indexben):

Ilyenkor a dV = 0, az első főtétel módosul: $dE = \Delta Q$.

A molhő definíciójába beírva: $C_{mol} = \frac{1}{n} * \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{1}{n} * \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta T}$

$$C_v = \frac{1}{n} * \frac{dE}{dT} = \frac{1}{n} * \frac{\partial E}{\partial T}$$

Állandó nyomáson vett fajhő (p-vel jelezzük indexben):

Ilyenkor az első főtétel: $dE = \Delta Q - p * dV$.

Ahol: $d(p * V) = V * dp + p * dV$-t beírva megfelelően jobb oldalra:

$dE = \Delta Q - d(p * V) + V * dp$.

$d(E + p * V) = \Delta Q + V * dp.$

Az $E + p * V$-t nevezzük entalpiának, és jele H. Valamint mivel állandó a nyomás így:

$dH = \Delta Q$

Így a molhő definíciója: $C_{mol} = \frac{1}{n} * \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{1}{n} * \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta T}$

$$C_p = \frac{1}{n} * \frac{dH}{dT} = \frac{1}{n} * \frac{\partial H}{\partial T}$$

A kétféle molhő közötti kapcsolat:

$$C_p = C_v + R$$

vagyis állandó nyomáson több energiát kell befektetni a melegítéshez.

Bizonyítása:

Ideális gázra: E =E(T), csak a hőmérséklet függvénye.

$C_v = \frac{1}{n} * \frac{dE}{dT}$ átalakítva: $C_v * n = \frac{dE}{dT}$ vagyis: $E(T) = n * C_v * T$, mivel a C_v széles tartományban állandó.

Ideális gázra: H =H(T), csak a hőmérséklet függvénye.

$H = E + p * V = n * C_v * T + n * R * T = n * T * (C_v + R).$

így beírva állandó térfogaton vett molhőbe: $C_p = \frac{1}{n} * \frac{dH}{dT} = \frac{1}{n} * n * (C_v + R).$

Ekvipartíció tétele:

Az energia egyenletes oszlik egy minden „mód” között. X-Y-Z irányú mozgás és forgás között.

Ez alapján a gázok rendelkeznek szabadsági fokokkal, ami azt jelenti, hogy „hány féle módon” tudnak energiát tárolni. Ennek a jele f. Egyatomos gáz esetében ez a szám 3, míg kétatomos gáz esetében ez a szám 5. Ezekkel is ki lehet fejezni a kétféle fajhőt:

$$C_v = \frac{f}{2} * R$$

$$C_p = \frac{f + 2}{2} * R$$

Ideális gáz belső energiája

A Gay-Lussac kísérletek alapján, amikor is akár gáz nyomását akár a térfogatát változtatta a gáznak, az nem melegítette fel a körülötte lévő vizet. Vagyis se nem végzett munkát se nem adott át hőt. Így az I. főtétel értelmében a gáz belső energiája nem változhatott.

Ez alapján meg is állapította, hogyha az anyagmennyiség és hőmérséklet állandó, akkor

$$p_1 * V_1 = p_2 * V_2 = állandó$$

tehát a gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ.

Folyamatok

Adiabatikus folyamat:

Definíció: olyan folyamat, ahol nincsen hőcsere a környezettel: ΔQ = 0.

Ilyenkor az I. főtétel módosul:

$$\boldsymbol{dE = -p * dV = W = -W'}$$

Tehát rendszeren végzett munka megegyezik a belső energiaváltozással.

Ezt tovább alakítva, felhasználva az állapotegyenleteket bebizonyítható, hogy adiabatikus esetben:

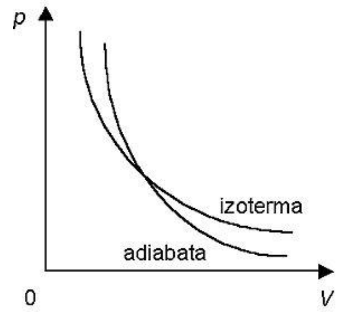
$$\boldsymbol{p * V^k = \text{á}llandó => p_1 * V_1{}^k = p_2 * V_2{}^k}$$

k a fajhő viszony: $k = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f}$.

A képletet tovább alakítva: $p * V^k = p * V * V^{k-1} = n * R * T * V^{k-1}$.

Mivel n és R is állandó, így adiabatikus esetben:

$$\boldsymbol{T * V^{k-1} = \text{á}llandó}$$



Adiabatikus folyamatnak tekinthetőek a hirtelen végbemenő folyamatok, például a biciklipumpálás.

A p-V diagramon az adiabatikus folyamatot adiabatával szemléltetjük, ami egy magas hatványú hiperbolának felletethető meg.

Izotermikus folyamat:

Definíció: Olyan folyamat, amely során a hőmérséklet nem változik.

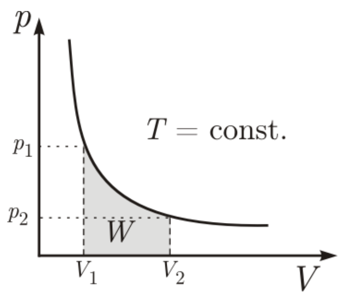
Emiatt a gáz belső energiája is állandó: dE = 0.

Ilyen esetben az I. főtétel:

$$\boldsymbol{\Delta Q = p * dV = W' = -W}$$

vagyis a gáz hőfelvétele megegyezik a gáz által végzett munkával.

a p-V diagramon az ilyen folyamatot izotermával szemléltetjük, ami egy alacsony hatványú hiperbola.



A p-V diagram alatti terület (integrál) mutatja meg a felvett hőt:

$$Q = \int_{V1}^{V2} p * dV = \int_{V1}^{V2} \frac{n * r * T}{V} * dV = n * R * T * [\ln(V_2) - \ln(V_1)]$$

tehát a hő, ami a gáz által végzett munka izotermikus esetben, ha az első pontból a 2-ik pontba megy:

$$\boldsymbol{W' = Q_{1 \to 2} = n * R * T * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

Izochor folyamat:

Definíció: Olyan folyamat, amelynek során a rendszer térfogata nem változik: dV = 0.

Ilyen esetben az I. főtétel:

$$dE = \Delta Q$$

A p-V diagramon függőleges vonalnak felel meg.

Izobár folyamat:

Definíció: Olyan folyamat, amelynek során a rendszer nyomása állandó marad: dp=0.

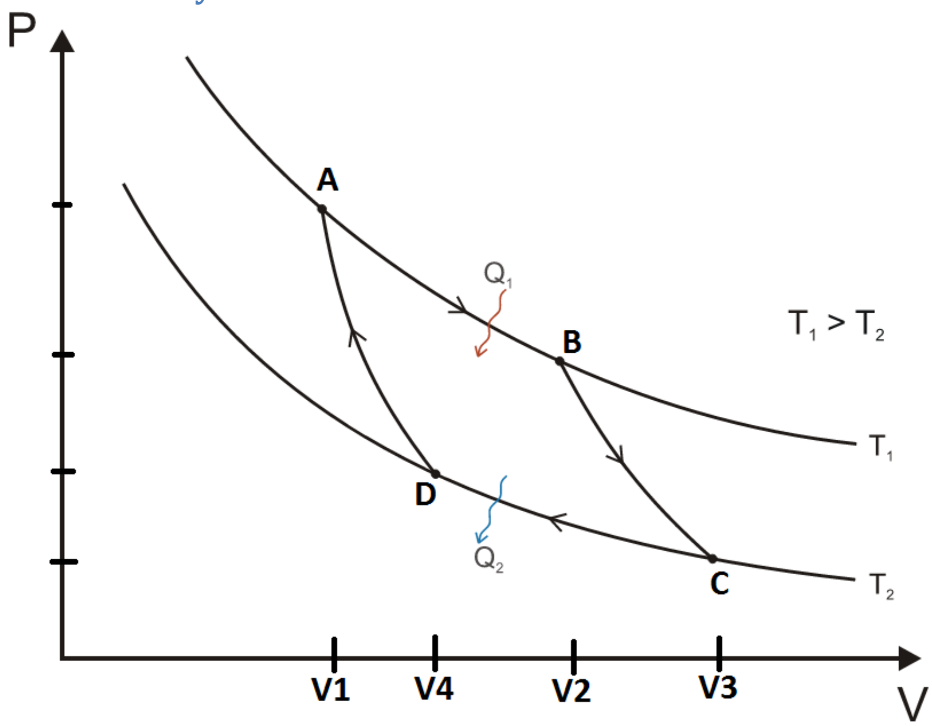
Ilyen esetben az első főtétel nem változik:

$$dE = \Delta Q - p * dV$$

azonban a térfogatváltozást könnyű mérni.

A p-V diagramon vízszintes vonalnak felel meg.

Carnot-féle körfolyamat



A folyamat először egy izotermikus tágulásból áll (A->B), majd egy adiabatikus tágulásból (B->C), utána egy izotermikus összehúzódásból (C->D), végül egy adiabatikus összehúzódásból (D->A).

Ebben az irányban egy hőerőgépet fog megvalósítani, úgyhogy a rendszer által végzett munkát (W')-t próbáljuk meg kiszámolni.

1, Az izotermikus tágulás során:

A rendszer felvesz hőt (Q1), ami megegyezik a rendszer által végzett munkával:

$$Q_{AB} = n * R * T_1 * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = W'_{AB}$$

Itt a rendszer által végzett munka pozitív lesz.

2, Az adiabatikus tágulás során:

A rendszer belső energiájának a változása egyezik meg a rendszeren végzett munkával adiabatikus esetben:

$$\Delta E = E_c - E_B = n * c_v * (T_2 - T_1) = W_{BC}$$
$$n * c_v * (T_1 - T_2) = W'_{BC}$$

Itt is pozitív munkát végez a rendszer.

3, Az izotermikus összehúzódás:

$$Q_{CD} = n * R * T_2 * \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = W'_{CD}$$

itt már negatív a rendszer által végzett munka, vagyis mi végzünk a rendszeren munkát az összenyomással.

4, Az adiabatikus összehúzódás:

$$n * c_v * (T_2 - T_1) = -n * c_v * (T_1 - T_2) = W'_{DA}$$

itt is negatív a rendszer által végzett munka.

A rendszer által végzett munka a körfolyamat során:

$$W_{kör} = n * R * T_1 * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + n * c_v * (T_1 - T_2) + n * R * T_2 * \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) - n * c_v * (T_1 - T_2)$$

Az adiabatikus munkák pont kiejtik egymást.

A térfogatok arányai is azonosak, mert az adiabatákon:

$$T_1 * {V_2}^{k-1} = T_2 * {V_3}^{k-1}$$
$$T_1 * {V_1}^{k-1} = T_2 * {V_4}^{k-1}$$

osztva egymással a két egyenletet.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

A körfolyamat munkája:

$$W_{kör} = n * R * T_1 * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + n * R * T_1 * \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

a jobb oldali tagot -1-el szorozva, majd összevonva:

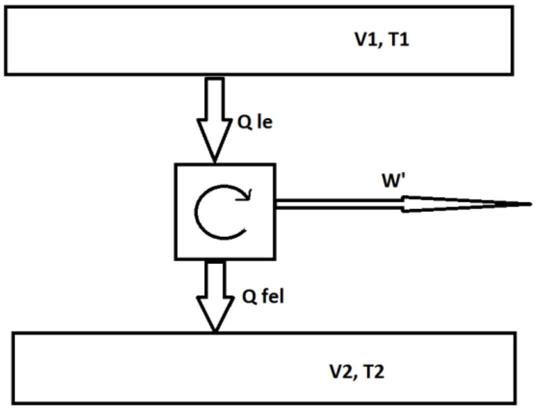
$$\boldsymbol{W_{kör} = n * R * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) * (T_1 - T_2)}$$

A hatásfoka a gépnek:

$$\eta = \frac{W_{kör}}{Q_{felvett}} = \frac{W_{kör}}{Q_{AB}} = \frac{n * R * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)(T_1 - T_1)}{n * r * T_1 * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

A Carnot-folyamat tehát egy hőerőgépet valósít meg, melynek során az első szakaszban kell vele hőt közölnünk, a 3-ik szakaszban pedig összenyomnunk, és ez alatt lead hőt. A hőerőgép hatásfoka annál jobb lesz, minél magasabb a T1 hőmérséklet és minél alacsonyabb a T2 hőmérséklet.



A hőerőgép hatásfoka:

$$\eta = \frac{Q_{fel} + Q_{le}}{Q_{fel}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

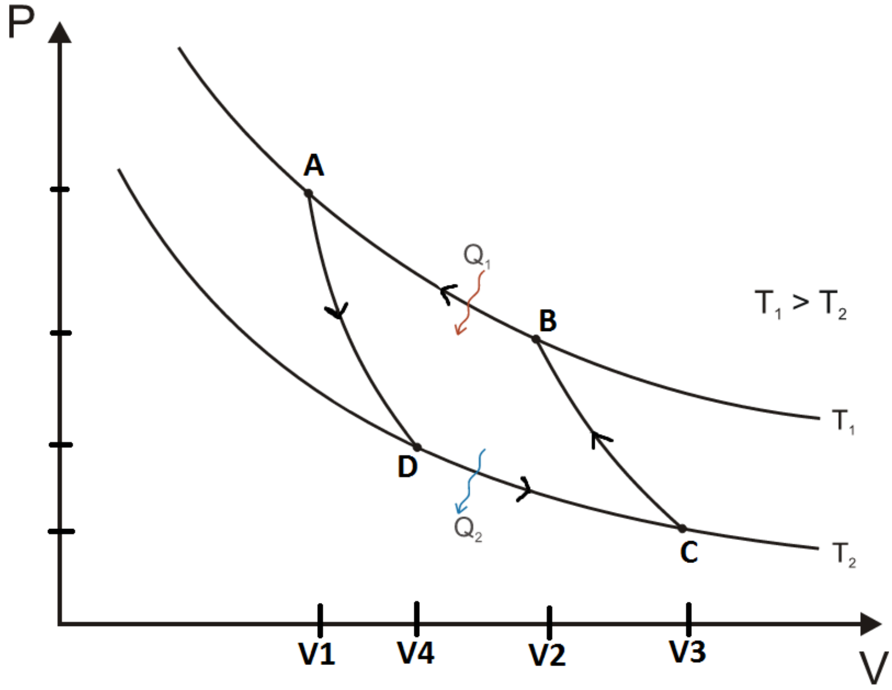
(a Q_{le} valójában negatív értékű!)

A működés során:

$$Q_{le} = W' + Q_{fel}$$

vagyis az elvont hőt munkára fordítja és másik tartályba közöl még hőt.

Fordított Carnot-féle körfolyamat



A fordított Carnot-féle körfolyamat tulajdonképpen ugyanaz a folyamat csak megfordítva. Ilyenkor a gép akár hűtőként akár hőszivattyúként is tud működni.

A folyamat először egy adiabatikus tágulásból (D->A), majd egy izotermikus tágulásból (A->B), utána egy adiabatikus összehúzódásból (B->C), végül izotermikus összehúzódásból (C->D) áll.

Mivel most nem hőerőgépként üzemel, hanem valamilyen egyéb gépként, emiatt az általunk befektetett munkát számoljuk ki.

1, Adiabatikus tágulás során:

$$n * c_v * (T_2 - T_1) = W_{AD}$$

negatív munkát végzünk.

2, Izotermikus tágulás során:

$$n * R * T_2 * \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = W_{DC}$$

negatív munkát végzünk.
Itt vesz fel hőt a gép.

3, Adiabatikus összehúzódás során:

$$n * c_v * (T_1 - T_2) = W_{CB}$$

itt már pozitív munkát végzünk.

4, Izotermikus összehúzódás során:

$$n * R * T_1 * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = W_{BA}$$

itt is pozitív munkát végzünk.
Itt ad le hőt a gép.

Az előzőekhez hasonló módon, a rendszeren végzett munka ugyanaz lesz, mint a hőerőgépnél a rendszer által végzett munka:

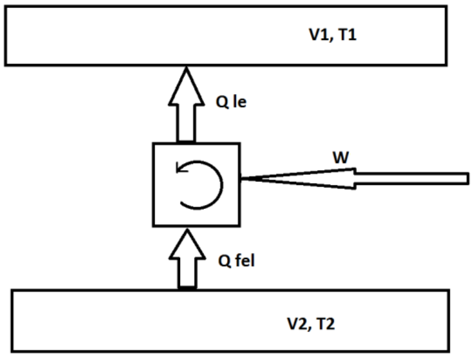
$$W_{kör} = n * R * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) * (T_1 - T_2)$$

A hűtőgépnél és a hőszivattyúnál nem hatásfokról beszélünk, hanem jósági tényezőről.

Hőszivattyú esetén:

A jósági tényező: a magasabb hőmérsékleten (T_1-n) mennyi hőt ad le, osztva a körfolyamatba fektetett munkánkkal.

$$\varepsilon = \frac{|Q_{le}|}{W_{kör}} = \frac{n * R * T_1 * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{n * R * \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) * (T_1 - T_2)} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$



Hőszivattyúzáskor tehát a jósági tényező:

$$\varepsilon_{hőszivattyú} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

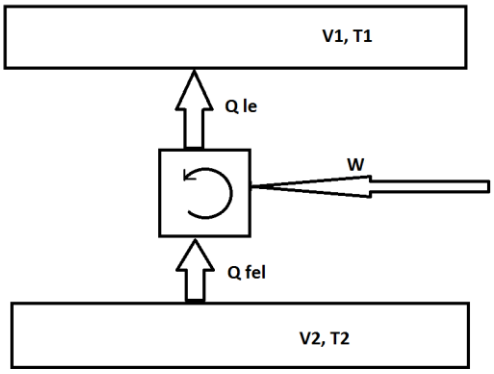
Az átvitt (leadott) hő pedig megegyezik az elvont hővel és a befektetett munkával:

$$Q_{le} = Q_{fel} + W$$

Hűtőgép esetén:

A jósági tényező: az alacsonyabb hőmérsékleten (T_2-n) felvett hő, osztva a körfolyamatba fektetett munkánkkal.

$$\varepsilon = \frac{|Q_{fel}|}{W_{kör}} = = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$



Nagyon hasonlít a jósági tényező a hőszivattyúhoz, csak akkor a magas hőmérsékleten leadott hő a lényeg, a hűtőgép esetén pedig az alacsony hőmérsékleten elvont hő.

Az elvont hő pedig megegyezik a leadott hő és a befektetett munka különbségével:

$$Q_{le} - W = Q_{fel}$$

Tetszőleges körfolyamatok

Redukált hők:

A Carnot hőerőgépnél láthattuk, hogy $\frac{Q_{fel}+Q_{le}}{Q_{fel}} = \frac{T_{magas}-T_{alacsony}}{T_{magas}}$ (a Q_{le} valójában negatív értékű) ezt az egyenletet átrendezve:

$$\frac{Q_{fel}}{T_{magas}} + \frac{Q_{le}}{T_{alacsony}} = 0$$

ezeket a Q/T hányadosokat nevezzük redukált hőknek.

Az egyenlőség csak reverzibilis (megfordítható) folyamatoknál igaz. Az irreverzibiliseknél (megfordíthatatlan) kisebb vagy egyenlő lehet csak 0-val, ugyanis olyankor a $\frac{Q_{fel}+Q_{le}}{Q_{fel}} \leq \eta = \frac{T_{magas}-T_{alacsony}}{T_{magas}}$ így a redukált hők:

$$\frac{Q_{fel}}{T_{magas}} + \frac{Q_{le}}{T_{alacsony}} \leq 0$$

Ha ezeket az összes redukált hőre, és nem csak kettőre alkalmazzuk, akkor megkapjuk a Clausisus-féle egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0$$

vagyis a redukált hők összege kisebb vagy egyenlő 0-val és 0 csak reverzibilis folyamatnál lehet.

Finomítva az összeadást integrált kapunk a körfolyamatra:

$$\oint \frac{\Delta Q}{T} \leq 0$$

Tetszőleges körfolyamat felbontható nagyon apró kis Carnot-féle körfolyamatokra, amikre már ismerjük a redukált hők összegét.

A körfolyamatot 2 fő részre bontjuk, az egyik, ahol felvesz hőt a rendszer a másik, ahol lead.(Itt már abszolút értékét vesszük a hőknek, így a leadott hőket negatív előjellel kell venni.)

$$0 \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = \sum_{j=0}^{n} \frac{|\Delta Q_j|}{T_j} - \sum_{k=0}^{n} \frac{|\Delta Q_k|}{T_k}$$

A felvettek közül (j-sek) a legnagyobb hőmérsékletet véve ($T_m = T_1$) és mindig azzal behelyettesítve, valamint a leadottak közül (k-sok) a legkisebb hőmérsékletet ($T_a = T_2$) véve alulról tudjuk becsülni az előző képletet.

$$\frac{|Q_{fel}|}{T_{magas}} - \frac{|Q_{le}|}{T_{alacsony}} \leq 0$$

Ezt átrendezve:

$$\frac{T_{alacsony}}{T_{magas}} \leq \frac{|Q_{le}|}{|Q_{fel}|}$$

Így megvizsgálva bármilyen körfolyamat hatásfokát:

$$\eta_{tetsz} = \frac{|Q_{fel}| - |Q_{le}|}{|Q_{fel}|} = 1 - \frac{|Q_{le}|}{|Q_{fel}|} \leq 1 - \frac{T_{alacsony}}{T_{magas}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_{Carnot}$$

Vagyis a legjobb hatásfoka a Carnot-féle hőerőgépnek van!

Termodinamika II. főtétele

A természetben a folyamatok általában csak 1 irányban játszódnak le. Pl.: ha leesik a kő, akkor felmelegszik, de olyan sose fordul elő, hogy magától lehűl a kő és felugrik.

Ritka esetben lehet megfordítható folyamatot végezni. Pl.: speciális szűrőkkel előbb összekeverjük a két féle gázt, majd újra széthúzva a szűrőket megint szétválasztjuk külön a kétféle gázt.

Reverzibilis folyamat:

Definíció: a folyamat reverzibilis, ha a rendszert valamilyen A állapotból bizonyos állapotsorozaton keresztül átviszünk B állapotba, majd ugyanezen az állapotsorozaton keresztül visszavisszük az A állapotba, akkor a környezeten semmilyen változás nem tapasztalható.

Példa: a Carnot-féle körfolyamat ideális gázoknál.

A termodinamika II. főtétele:
„A folyamatok mindig úgy mennek végbe, hogy a rendezetlenséget növeljék”.

Kelvin-féle megfogalmazás:

Nem lehetséges olyan körfolyamat, amely során egy hőtartályból elvont hő, minden egyéb hatás nélkül, teljes egészében munkavégzésre fordítható.

Clausius-féle megfogalmazás:

Nem lehetséges olyan körfolyamat melynek során egy hidegebb testből önként hő menne át egy melegebb testbe.

A két megfogalmazás ekvivalens.

Ha létezne a Kelvin-féle gép, akkor az általa előállított munkával üzemeltetnénk egy Carnot-féle hőszivattyút, ami egy hidegebb tartályból vinne át hőt a melegebb tartályba (amiből a Kelvin-gép veszi az energiát), és pont annyi hőt szivattyúzna át, hogy sose hűljön le az a tartály. Ilyenkor önmagától menne át hő a hidegebből a melegebbe.

Fordítva, ha önmagától átmenne hő a hidegebb tartályból a melegebbe, akkor egy Carnot-féle hőerőgépet működtetve a két tartály között, pont elérhető lenne, hogy a Carnot gép ugyanannyi hőt adjon le a hidegebb tartálynak, mint amennyi átszivárog a melegebbe. Ilyenkor azonban a melegebből elvont hő teljes egészében munkára lenne fordítható.

Entrópia

A redukált hőknél beszéltünk a Clausius-féle egyenlőségről:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0$$

$$\oint \frac{\Delta Q}{T} \leq 0$$

az egyenlőség csak reverzibilis esetben áll fent.

Vizsgáljunk meg két különböző folyamatot A és B pontok között, ahol mind az 1. mind a 2. irányban is reverzibilis folyamat, és az egyik A-ból B-be a másik B-ből A-ba vezessen:

$$0 = \oint \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = \int_A^{B} {}^{1} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} + \int_B^{A} {}^{2} \frac{\Delta Q_{rev}}{T}$$

átéve az egyik integráljelet, és a határokat megcserélve(-1-szeres lesz az érték).

$$\int_A^{B} {}^{2} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = \int_A^{B} {}^{1} \frac{\Delta Q_{rev}}{T}$$

Amint azt látjuk, az integrálás nem függ az útvonaltól, csakis a kezdő és végponttól.

Valamint minden folyamathoz létezik egy függvény, ami ugyanezt adja, és ez a függvény az ***entrópia***.

$$\int_A^{B} {}^{2} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = \int_A^{B} {}^{1} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = S(B) - S(A)$$

Az entrópia függvény jele S, és csak a folyamat kezdő és végpontjától függ. Egy másik alakja a definíciónak: $\frac{\Delta Q_{rev}}{T} = dS$.

Az entrópia növekedésének elve:

Ha a két folyamat közül az egyik irreverzibilis akkor már nem egyenlő lesz nullával a redukált hők összege, hanem kisebb lesz 0-nál

$$0 \geq \oint \frac{\Delta Q}{T} = \int_{A}^{irrev\ B} \frac{\Delta Q}{T} + \int_{B}^{rev\ A} \frac{\Delta Q_{rev}}{T}$$

Áttéve a reverzibilis folyamat integrálját, a határokat megcserélve:

$$S(B) - S(A) = \int_{A}^{rev\ B} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} \geq \int_{A}^{irrev\ B} \frac{\Delta Q}{T}$$

Az irreverzibilis esetre koncentrálva:

$$\int_{A}^{irrev\ B} \frac{\Delta Q}{T} \leq S(B) - S(A)$$

$$\boldsymbol{\frac{\Delta Q}{T} \leq dS}$$

Ezt szokták a II. főtétel analitikus alakjának is nevezni.

Az elv szerint zárt rendszerben (nem lehet se munkavégzés se hőcsere), az entrópia csak növekedni tud, ha magára hagyjuk a rendszert. Ha elérte az entrópia a maximumát, akkor lesz a rendszer egyensúlyban. Hétköznapi megfogalmazása ennek a tételnek, hogy a magára hagyott rendszerben a folyamatok csak abban az irányban zajlanak le, amerre nő a rendezetlenség.

Kinetikus gázelmélet (röviden)

A kinetikus gázelmélet kapcsolatot teremt a gázok mikroszkopikus és makroszkopikus jellemzői között. Mikroszkopikus jellemző a részecskék átlagos sebessége, és tömege. Makroszkopikus jellemző a hőmérséklet, a nyomás vagy a térfogat.

Bebizonyítható, hogy a nyomás és a részecskék sebessége közötti kapcsolat:

$$p = \frac{1}{3} * \rho * \bar{v}^2$$

ahol p a gáz nyomása, ρ a sűrűsége, és v a részecskék átlagos sebessége.

Ha a nyomást felírjuk $\rho = \frac{N*m}{V}$ alakban, ahol N a részecskék száma, m egy részecske tömege, és V az egészgáz térfogata, akkor megkaphatjuk a p*V szorzatot is.

$$p * V = \frac{1}{3} * N * m * \bar{v}^2$$

Ezt az egyenletet az ideális gáz állapotegyenletébe (egyetemes gáztörvénybe) beírva.

$$p * V = N * k * T = \frac{1}{3} * N * m * \bar{v}^2$$

N-el osztva a jobb oldalon, majdnem 1 részecske mozgási energiája szerepel. Beszorozva ½-el az egyenletet:

$$\frac{1}{2} * k * T = \frac{1}{3} * K_{részecske}$$

Ebből már könnyen megkaphatjuk a hőmérsékletet: $T = \frac{2}{3*k} * K_{részecske}$ (ahol K az átlagos kinetikus energia) és láthatjuk, hogy a hőmérséklet a részecskék mozgási energiájától függ. Emiatt van az, hogy az abszolút hőmérsékleti skálán (Kelvin skálán) nincsen negatív hőmérséklet, hiszen a mozgási energia sosem vehet fel negatív értéket. Az abszolút 0K pedig azt jelenté, hogy minden részecske mozgása leállna, emiatt a 0K sem érhető el, de tetszőlegesen megközelíthető.

A kinetikus gázelmélet nagy áttörése nem csak az abszolút hőmérsékleti skála fontosságának alátámasztása volt, hanem az is, hogy bármilyen makroszkopikus állapotot fel lehet írni a részecskék mikroszkopikus jellemzőivel is, hiszen az egyetemes gáztörvényben szereplő p*V szorzatot és a hőmérsékletet is fel tudtuk írni.

Tartalom