Der Steinsche Interpolationssatz für analytische Operatorfamilien
Seminar zur reellen Analysis bei Prof. Dr. Axel Grünrock
Referent: Leonard Pleschberger

Der Steinsche Interpolationssatz ist eine Erweiterung des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin. Während im letzteren Satz die Stetigkeit eines linearen Operators T untersucht wird, dürfen im ersteren die Operatoren T_z zusätzlich von einem komplexen Parameter z abhängen.
Prinzipiell geht es bei Interpolation um die Frage, ob ein L^p- und L^q-stetiger Operator auch L^r-stetig ist, für alle $p < r < q$.

Voraussetzungen

Funktionenräume und Parameter: Es seien (X, μ), (Y, ν): σ-endliche Maßräume, sowie $z \in \bar{\mathbb{S}}$ mit $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.
$T_z : \text{EndlicheTreppenfunktionen(X)} \times \bar{\mathbb{S}} \to \text{MessbareFunktionen}(Y), (f, z) \mapsto g.$

Endliche Treppenfunktionen: Für alle Funktionen $f := \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}$ auf X und $g := \sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\beta_j} \chi_{B_j}$ auf Y (Polarkoordinaten) gelte $\mu(A_k), \nu(B_j) < \infty$.

Linearität: T_z sei für festes $z \in \bar{\mathbb{S}}$ linear.

Endlichkeit: Für alle beschränkten $A \in X, B \in Y$ gelte $\int_Y |T_z(\chi_A)\chi_B \, d\nu| < \infty$.

Analytizität: Für alle f, g sei $z \mapsto \int_Y T_z(f) g \, d\nu$ analytisch auf $\mathbb{S}$ und stetig auf $\bar{\mathbb{S}}$.

Wachstumsbedingung I: Es existiere ein $\tau_0 \in [0, \pi)$ und ein $C_{f,g} \in \mathbb{R}$, sodass $\log |\int_Y T_z(f) g \, d\nu| < C_{f,g} e^{\tau_0 |\operatorname{Im} z|}$ gilt.

Hilfssatz

Der Beweis des Steinschen Interpolationssatzes basiert auf einer Verallgemeinerung von Jacques Hadamards 3-Geraden-Lemma:

Lemma. *Es sei F analytisch auf $\mathbb{S}$ und stetig auf $\bar{\mathbb{S}}$. Für eine Konstante $K < \infty$ und ein $\tau_0 \in [0, \pi)$ gelte die Wachstumsbedingung*

$$\log |F(z)| \leq K e^{\tau_0 |\operatorname{Im} z|}$$

für alle $z \in \bar{\mathbb{S}}$. Dann gilt für $0 < x < 1$ und $y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|F(x+iy)| \leq \exp\left\{\frac{\sin(\pi x)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\log |F(0+it+iy)|}{\cosh(\pi t) - \cos(\pi x)} + \frac{\log |F(1+it+iy)|}{\cosh(\pi t) + \cos(\pi x)}\right] dt\right\}.$$

Hauptaussage

Theorem (Elias Stein, 1956)**.** *Eine analytische Familie von linearen Operatoren $\{T_z\}_{z \in \bar{\mathbb{S}}}$ erfülle das obige Setting. Zusätzlich gelte für zwei Funktionen $M_{0,1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ und ein $\tau_1 \in [0, \pi)$ die Wachstumsbedingung II, d.h.*

$$\sup_{-\infty < y < \infty} e^{-\tau_1 |y|} \log M_{0,1}(y) < \infty.$$

Für $1 \leq p_{0,1}, q_{0,1} \leq \infty$ gelten für alle endlichen Treppenfunktionen f auf X die Stetigkeitsbeziehungen

$$||T_{0+iy}(f)||_{L^{q_0}} \leq M_0(y) ||f||_{L^{p_0}},$$
$$||T_{1+iy}(f)||_{L^{q_1}} \leq M_1(y) ||f||_{L^{p_1}}.$$

Das Reziproke von p und q werde für $0 < \vartheta < 1$ durch die Konvexkombinationen

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q} := \frac{1-\vartheta}{q_0} + \frac{\vartheta}{q_1}$$

definiert. Dann gilt für alle endlichen Treppenfunktionen f auf X die Beziehung

$$||T_\vartheta(f)||_{L^q} \leq M(\vartheta) ||f||_{L^p}$$

mit der Funktion

$$M(\vartheta) = \exp\left\{\frac{\sin(\pi\vartheta)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\log M_0(t)}{\cosh(\pi t) - \cos(\pi\vartheta)} + \frac{\log M_1(t)}{\cosh(\pi t) + \cos(\pi\vartheta)}\right] dt\right\}.$$

Somit besitzt T_θ eine eindeutige stetige Erweiterung von $L^p(X, \mu)$ nach $L^q(Y, \nu)$.

Beweis. Es folgt eine Beweisskizze.

Schritt 1: Definition einer Hilfsfunktion $F(z), z \in \bar{\mathbb{S}}$.

Es werden endliche Treppenfunktionen

$$f := \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \quad \text{und} \quad g := \sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\beta_j} \chi_{B_j}$$

mit paarweise disjunkten $A_k \in X$, $B_j \in Y$, $a_k, b_j > 0$ und $\alpha_k, \beta_j \in \mathbb{R}$ betrachtet, wobei $||f||_{L^p} = ||g||_{L^{q'}} = 1$ gelte. Diese werden via

$$P(z) := \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z \quad \text{und} \quad Q(z) := \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1}z$$

von $z \in \bar{\mathbb{S}}$ abhängig gemacht, und zwar durch die Definitionen

$$f_z := \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \quad \text{und} \quad g_z := \sum_{j=1}^{n} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j}.$$

Nun definiert man Funktion

$$F(z) := \int_Y T_z(f_z) g_z \, d\nu.$$

Diese ist wegen der Linearität und Endlichkeitsbedingung von T_z wohldefiniert.

Schritt 2: $F(z)$ erfüllt die Voraussetzungen des verallgemeinerten 3-Geraden-Lemmas.

Wegen der Analytizität von T_z ist $F(z)$ analytisch auf $\mathbb{S}$ und stetig auf $\bar{\mathbb{S}}$. Aus der Wachstumsbedingung I folgt für ein $\tau_0 \in [0, \pi)$ und eine Konstante $C(A_k, B_j)$ die Ungleichung

$$\log |F(z)| \leq K e^{\tau_0 |\operatorname{Im} z|}$$

mit einer Konstanten

$$K = \log(mn) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (C(A_k, B_j) + (\frac{p}{p_0} + \frac{p}{p_1}) |\log a_k| + (\frac{q'}{q'_0} + \frac{q'}{q'_1}) |\log b_j|).$$

Somit sind die Voraussetzungen des verallgemeinerten 3-Geraden-Lemmas erfüllt und es gilt

$$|F(x+iy)| \leq \exp\left\{\frac{\sin(\pi x)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\log|F(0+it+iy)|}{\cosh(\pi t)-\cos(\pi x)}+\frac{\log|F(1+it+iy)|}{\cosh(\pi t)+\cos(\pi x)}\right]dt\right\}.$$

Schritt 3: $|F(0+iy)|$ wird gegen $M_0(y)$ und $|F(1+iy)|$ gegen $M_1(y)$ abgeschätzt.

Mit den Identitäten

$$\begin{aligned}||f_{0+iy}||_{L^{p_0}} &= ||f||_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} = 1 = ||g||_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_0}} = ||g_{0+iy}||_{L_{q'_0}},\\ ||f_{1+iy}||_{L^{p_1}} &= ||f||_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} = 1 = ||g||_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_1}} = ||g_{1+iy}||_{L_{q'_1}}\end{aligned}$$

folgen zusammen mit Hölder und den Voraussetzungen des Satzes die Abschätzungen

$$\begin{aligned}|F(0+iy)| &\leq ||T_{0+iy}||_{L^{q_0}}||g_{0+iy}||_{L^{q'_0}} \leq M_0(y)||f_{0+iy}||_{L^{p_0}}||g_{0+iy}||_{L^{q'_0}} = M_0(y),\\ |F(1+iy)| &\leq ||T_{1+iy}||_{L^{q_1}}||g_{1+iy}||_{L^{q'_1}} \leq M_1(y)||f_{1+iy}||_{L^{p_1}}||g_{1+iy}||_{L^{q'_1}} = M_1(y).\end{aligned}$$

Damit erhält man die behauptete Ungleichung

$$\begin{aligned}|F(x)| &\leq \exp\left\{\frac{\sin(\pi x)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\log M_0(t)}{\cosh(\pi t)-\cos(\pi x)}+\frac{\log M_1(t)}{\cosh(\pi t)+\cos(\pi x)}\right]dt\right\}\\ &= M(x).\end{aligned}$$

Nun gilt

$$F(\vartheta) = \int_Y T_\vartheta(f)g\,d\nu.$$

Insgesamt folgt

$$||T_\vartheta(f)||_{L^p} \leq M(\vartheta)||f||_{L^q}.$$

□

Der verallgemeinerte 3-Geraden Satz von Hadamard

Satz. Es sei F holomorph auf $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ und stetig auf $\bar{\mathbb{S}}$. Es gelte für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\tau_0 \in [0, \pi)$ die Wachstumsbedingung

$$\log |F(z)| \leq K e^{\tau_0 |\operatorname{Im} z|}.$$

Dann gilt für $z = x + iy$ mit $x \in (0,1)$ und $y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|F(x+iy)| \leq \exp\left\{\frac{\sin(\pi x)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\log|F(0+it+iy)|}{\cosh(\pi t) - \cos(\pi x)} + \frac{\log|F(1+it+iy)|}{\cosh(\pi t) + \cos(\pi x)}\right] dt\right\}.$$

Beweis:

Das Poisson-Integral

Motivation (Dirichlet-Randwertproblem). Gegeben sei eine stetige Funktion f auf ∂D, dem Rand der offenen Einheitskreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Gesucht wird eine Funktion $F \in C(\bar{D})$, die zum einen harmonisch auf D ist, d.h. es gelte $\Delta F = 0$ in D; zum anderen stimme sie mit f auf ∂D überein, also $F|_{\partial D} = f$.

Das **Poisson-Integral** liefert nun eine Lösung zu diesem Problem. Es ist für $f \in L^1(\partial D, \mathbb{R})$ definiert als Faltungsoperator

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R},\ F(re^{i\vartheta}) = P[f](re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t) f(t)\, dt.$$

mit positivem, symmetrischen **Poisson-Kern**

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}.$$

Der Poisson-Kern mit transferiertem Argument lässt sich darstellen als

$$P_r(\vartheta - t) = \operatorname{Re}\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\vartheta - t) + r^2},\ z = re^{i\vartheta}.$$

Harmonisch auf D: Ins Poisson-Integral eingesetzt ergibt dies

$$P[f](z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(t)\,dt\right].$$

Obiges Integral lässt sich als (insbesondere holomorphe) Potenzreihe für sämtliche $z \in D$ darstellen. Holomorphe Funktionen sind harmonisch, denn mit dem Wirtinger-Kalkül $\partial = 1/2(\partial_x - i\partial_y)$ und $\bar{\partial} = 1/2(\partial_x + i\partial_y)$ gilt

$$\Delta f = 4\partial\bar{\partial}f.$$

Nun ist f holomorph auf D genau dann, wenn $\bar{\partial}f = 0$ gilt und in diesem Falle ist f automatisch harmonisch auf D. Also ist $P[f]$ harmonisch auf D.

Stetig in ∂D: Der Poisson-Kern bildet eine approximative Einheit, d.h. es gelten

- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt,$
- $\lim_{r\to 1}\int_{\delta<|t|\leq\pi}|P_r(t)|\,dt = 0$ $(\forall\delta > 0)$.

Somit kovergiert $P[f](re^{i\vartheta})$ gleichmäßig auf $\bar{D}$ gegen $f(1\cdot e^{i\vartheta})$ für $r \to 1$ und somit ist die Funktion

$$Hf(re^{i\vartheta}) := \begin{cases} f(e^{i\vartheta}), & r = 1, \\ P[f](re^{i\vartheta}), & r \in [0,1) \end{cases}$$

stetig auf ganz $\bar{D}$.

Poissonsche Integralformel

Andererseits gilt für $re^{i\vartheta} = z \in D$ die **Poissonsche Integralformel**

$$F(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1^2 - r^2}{1^2 - 2\cdot 1\cdot r\cos(\vartheta - t) + r^2}f(t)\,dt.$$

Bisher wurde als Gebiet die offene Einheitskreisscheibe $D = B_1(0)$ betrachtet. Es können auch Bälle um den Ursprung mit beliebigem Radius R betrachet werden. Hierzu werden die 1en in obigem Integranden durch Rs ersetzt. Legt man nun ein $f \in C(B_R(0), \mathbb{R})$ fest, so kann es innerhalb von $B_R(0)$ durch das Poisson-Integral

$$P_{\frac{r}{R}} * f(Re^{it}) = F(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2\cdot R\cdot r\cos(\vartheta - t) + r^2}f(Re^{it})\,dt,\ r < R$$

stetig mit harmonischem Innern fortgesetzt werden.

Subharmonische Funktionen

Eine Funktion $u : B_R(0) \to \mathbb{R}$ heißt **subharmonisch**, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $-\infty \leq u(z) < \infty$,
- u ist oberhalbstetig, d.h. die Menge $\{z : u(z) > \alpha\}$ ist offen für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,
- Für alle $\bar{B}_r(a) \subset B_R(0)$ gilt $u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\vartheta})\, d\vartheta \neq -\infty$.

Für diese gilt folgendes

Lemma (Maximumsprinzip für subharmonische Funktionen). Es seien eine subharmonische Funktion $u \in C(\bar{B}_R(0), \mathbb{R})$ und eine Funktion $U \in C(\bar{B}_R(0), \mathbb{R})$ mit harmonischem Innern gegeben. Es gelte $u(z) \leq U(z)$ für alle $z \in \partial B_R(0)$. Dann gilt $u(z) \leq U(z)$ für alle $z \in \bar{B}_R(0)$.

Insbesondere gilt für eine harmonische Funktion $u : D \to \mathbb{C}$ mit der Poissonschen Integraldarstellung

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - t) + r^2}\, dt, \ (r < R < 1).$$

Konforme Abbildungen

Eine **konforme Abbildung** L ist eine biholomorphe, winkeltreue Funktion. Eine biholomorphe Abbildung $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist also konform, wenn für alle $z, \zeta \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$\cos(\angle z\zeta) = \frac{\langle z, \zeta \rangle_{\mathbb{C}}}{|z||\zeta|} = \frac{\langle h(z), h(\zeta) \rangle_{\mathbb{C}}}{|h(z)||h(\zeta)|}$$

gilt.

Im Folgenden betrachten die Abbildung

$$h : D \to \mathbb{S},\ h(\zeta) := \frac{1}{\pi i} \log \left| i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right|.$$

Diese ist als Komposition von konformen Abbildungen ihrerseits wieder konform.

$\log|\cdot|$ ist subharmonisch

Die Funktion $\log|f| = \operatorname{Re}\log(f)$ ist für $f \neq 0$ harmonisch, da Realteile von holomorphen Funktionen harmonisch sind. Insbesondere ist in diesem Fall $\log|\cdot|$ subharmonisch. Desweiteren ist $\log|\cdot|$ mit dem Maximumsprinzip für subharmonische Funktionen beschränkt.

Setze $\log|f| = -\infty$ für $f = 0$. Nun muss nachgewiesen werden, dass $\log|f|$ in der Nähe dieser Nullstellen subharmonisch ist. Betrachten wir die Funktion

$$v := -\log|\cdot|,$$

so muss die Eigenschaft $v(0) \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(0 + re^{i\vartheta})\,d\vartheta$ gezeigt werden. Hierzu approximieren wir $v(0)$ durch Funktionen

$$v_s(0) := \min\{s, v(0)\}.$$

Mit dem monotoner Konvergenz / Satz von Beppo Levi gilt

$$\begin{aligned}
\infty &> v(0) \\
&= \lim_{s\to\infty} v_s(0) \\
&\geq \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_s(0 + re^{i\vartheta})\,d\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(0 + re^{i\vartheta})\,d\vartheta.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\log|\cdot|$ subharmonisch.

Rechnungen

Mit dem Maximumsprinzip für subharmonische Funktionen folgt

$$\log|F(h(z))| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(h(Re^{i\varphi}))| \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\vartheta - \varphi) + \rho^2}\,d\varphi,$$

für $z = \rho e^{i\vartheta}$ mit $|z| = \rho < R$.

Mit der Voraussetzung folgt

$$\log|F(h(\zeta))| \leq Ke^{\tau_0|\operatorname{Im}\zeta|} \leq K\frac{|1+\zeta|^{\frac{\tau_0}{\pi}}}{|1-\zeta|^{\frac{\tau_0}{\pi}}} =: K\lambda(\zeta),$$

wobei $\lambda(\zeta)$ über den Kreis $|\zeta| = 1$ integrierbar ist.

Mit dominierter Konvergenz / Satz von Lebesgue folgt für $z = \rho e^{i\vartheta}$ mit $R \longrightarrow 1$

$$\log|F(h(z))| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(h(Re^{i\varphi}))| \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\vartheta-\varphi)+\rho^2}\, d\varphi,$$

Für $x = h(\rho e^{i\vartheta})$ gilt

$$\rho e^{i\vartheta} = h^{-1}(x) = \frac{e^{\pi i x}-i}{e^{\pi i x}+i} = \frac{\cos(\pi x)}{1+\sin(\pi x)}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Mit ρ und ϑ wie in obiger Formel folgt

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\vartheta-\varphi)+\rho^2} = \frac{\sin(\pi x)}{1+\cos(\pi x)\sin(\pi x)}$$

und somit

$$\log|F(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\pi x)}{1+\cos(\pi x)\sin(\pi x)} \log|F(h(e^{i\varphi}))|\, d\varphi.$$

Obiges Integral wird in die Bereiche $[-\pi, 0]$ und $[0, \pi]$ gesplittet. Exemplarisch gilt mit Substitution

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(\pi x)}{1+\cos(\pi x)\sin(\pi x)} \log|F(h(e^{i\varphi}))|\, d\varphi\\ =&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\cosh(\pi t)-\cos(\pi x)} \log|F(it)|\, dt.\end{aligned}$$

Ähnliche Rechnungen und Summation ergeben schließlich

$$|F(x+iy)| \leq \exp\left\{\frac{\sin(\pi x)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\log|F(0+it+iy)|}{\cosh(\pi t)-\cos(\pi x)} + \frac{\log|F(1+it+iy)|}{\cosh(\pi t)+\cos(\pi x)}\right]dt\right\}.$$

q.e.d.