Natürliche Zahlen und Arithmetik

Leonard Pleschberger

Bernhard Bolzano

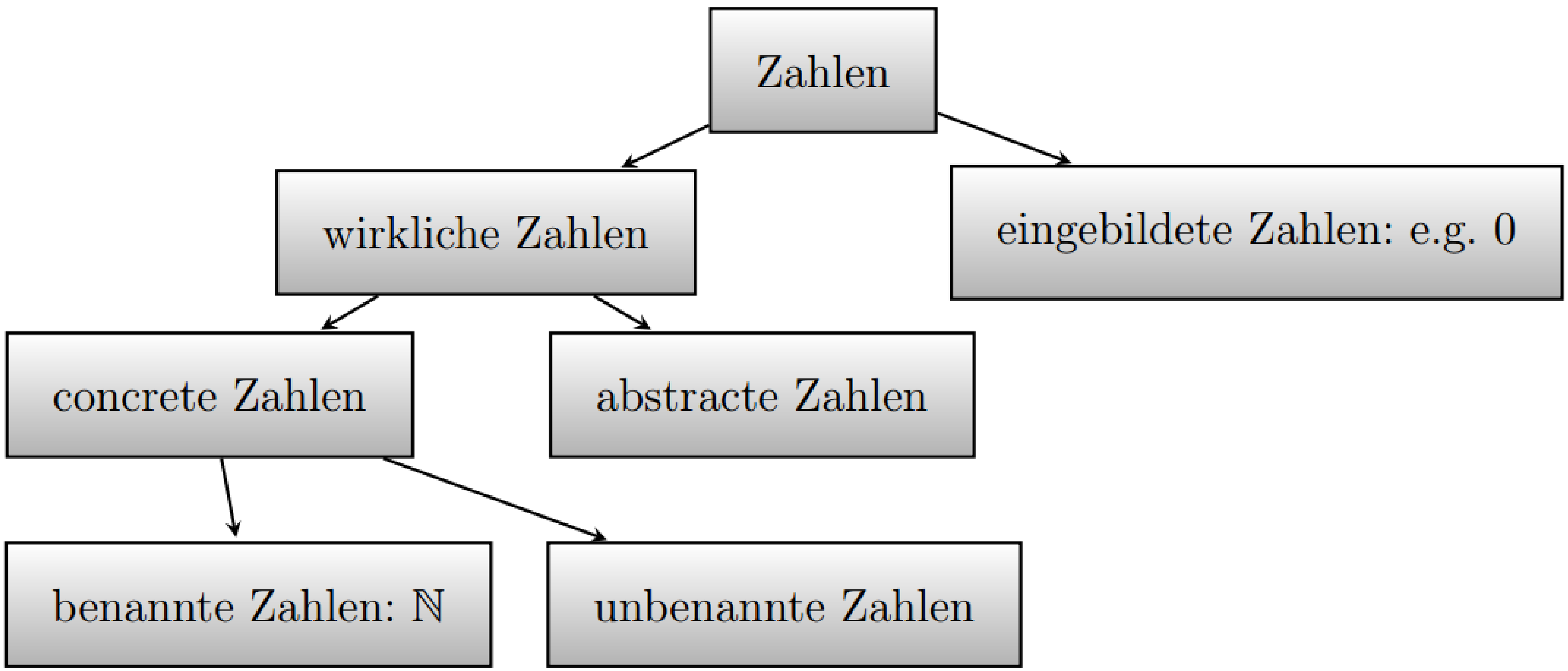
1781-1848

“Reine Zahlenlehre” (183?, Nachlass):

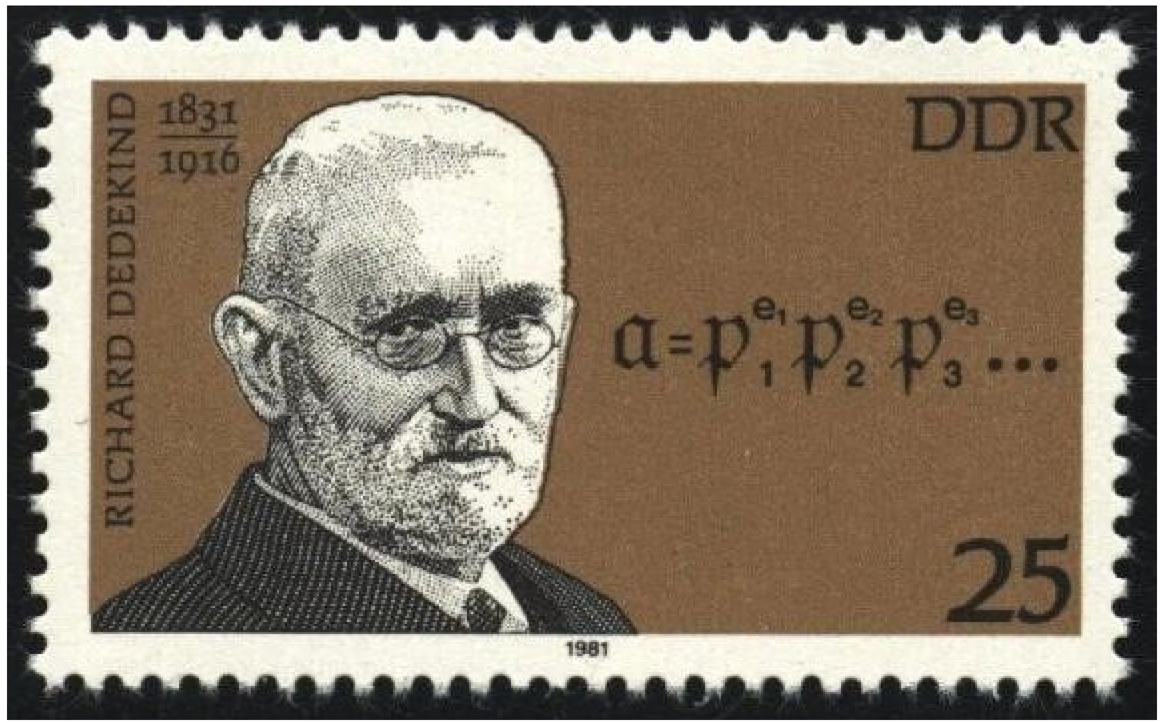
Definition der natürlichen Zahlen durch 1, Eindeutigkeit des Nachfolgers

Tipp: “Paradoxien des Unendlichen” (1847)

Bolzanos Zahlenmodell



Richard Dedekind



1831-1916

“Was sind und was sollen die Zahlen” (1888)

Erste Axiomatisierung der natürlichen Zahlen

„71. Erklärung. Ein System [ie. Menge] N heißt *einfach unendlich*, wenn es eine solche ähnliche [ie. injektive] Abbildung $\phi(N)$ in sich selbst giebt, daß N als Kette (44) eines Elementes erscheint, welches nicht in $\phi(N)$ enthalten ist. Wir nennen dies Element, das wir im Folgenden durch das Symbol **1** bezeichnen wollen, das *Grundelement* von N und sagen zugleich, das einfach unendliche System N sei durch diese Abbildung ϕ *geordnet*. [...], so besteht mithin das Wesen eines einfach unendlichen Systems N in der Existenz einer Abbildung ϕ von N und eines Elementes **1**, die den den folgenden Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ genügen:

$\alpha.[\phi(N) =]N' \prec N$.	[i.e. ϕ ist Endomorphismus]
$\beta.$ $N = 1_0$.	[i.e. Festlegung des Grundelements]
$\gamma.$ Das Element 1 ist nicht in N' enthalten.	[i.e. Eindeutigkeit bis auf Isomorphie]
$\delta.$ Die Abbildung ϕ ist ähnlich.	[i.e. Injektivität]

[...] 73. Erklärung. Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch die Abbildung ϕ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung ϕ zu einander gesetzt sind, so heißen diese Elemente *natürliche Zahlen* oder *Ordinalzahlen* oder auch schlechthin *Zahlen*, und das Grundelement **1** heißt die *Grundzahl* der *Zahlenreihe* N. In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraction) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen.“

Giuseppe Peano

1858-1932

Giuseppe Peano

1858-1932

“Arithmetices pricipia nova methodo exposita” (1889)

Heute gültige Axiomatisierung der natürlichen Zahlen und (Peano-)Arithmetik

“Arithmetices pricipia nova methodo exposita” (1889)

Heute gültige Axiomatisierung der natürlichen Zahlen und (Peano-)Arithmetik

Strukturaxiome

„*Axiomata.*

1. $\mathbf{1} \,\epsilon\, \mathrm{N}$.	[ie. Einselement]
2. $a \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, a = a.$	[ie. Identität]
3. $a, b \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset : a = b \,.\, b = a.$	[ie. Reflexivität]
4. $a, b, c \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset \therefore a = b \,.\, b = c : \supset \,.\, a = c$.	[ie. Transitivität]
5. $a = b \,.\, b \,\epsilon\, \mathrm{N} : \supset \,.\, a \,\epsilon\, \mathrm{N}$.	[ie. Isomorphie]
6. $a \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, a + 1 \,\epsilon\, \mathrm{N}$.	[ie. Nachfolge]
7. $a, b \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset : a = b \,.\, = \,.\, a + 1 = b + 1$	[ie. Eindeutigkeit]
8. $a \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, a + 1 \neg = 1$.	[ie. Startwert]
9. $k \,\epsilon\, \mathrm{K} \therefore 1 \,\epsilon\, k \therefore x \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, x \,\epsilon\, k : \supset_x \,.\, x + 1 \,\epsilon\, k :: \supset \,.\, \mathrm{N} \supset k$.“	[ie. Induktion]

Definition der Zahlen

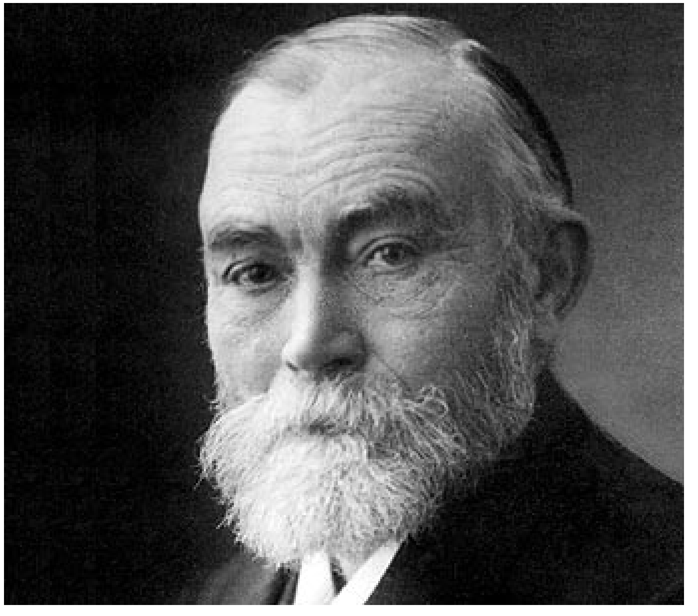
„*Definitiones.*

10. $\mathbf{2} = \mathbf{1} + 1$; $\mathbf{3} = \mathbf{2} + 1$; $\mathbf{4} = \mathbf{3} + 1$; etc. “

Peanos Inspirationsquelle

”Utilius quoque mihi fuit recens scriptum: R. DEDEKIND, Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig, 1888, in quo quaestiones, quae ad numerorum fundamenta pertinent, acute examinantur.“

Gottlob Frege



1848-1925

“Grundlagen der Arithmetik” (1884)

Rückführung der Arithmetik auf die Logik

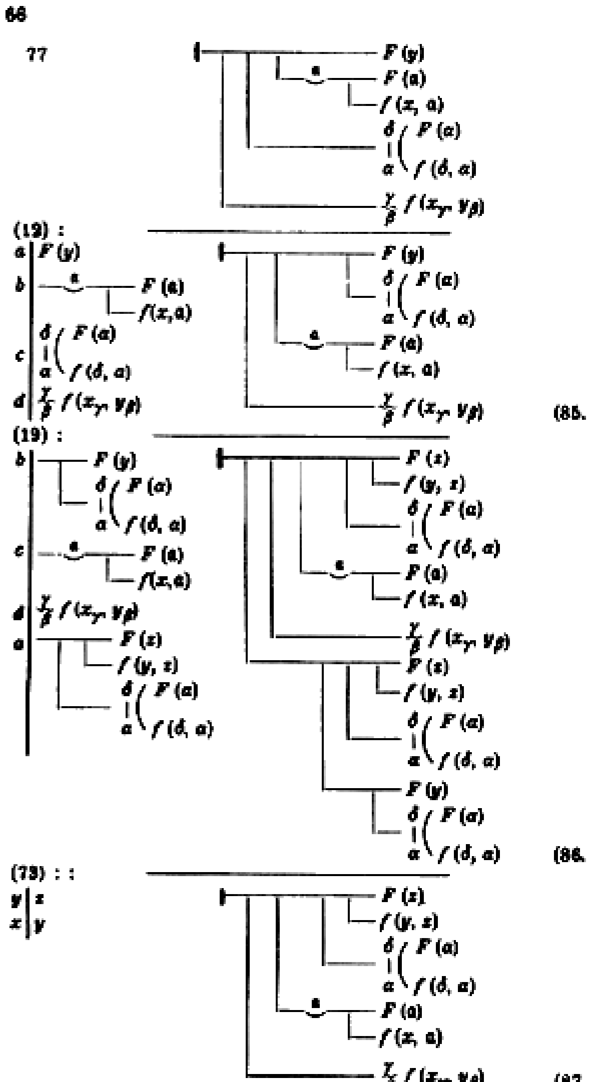
“Grundgesetze der Arithmetik”
(1893/1903)

$$\not{0} := \text{anz } (\text{ext } \boldsymbol{\epsilon}(\neg\, \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon})).$$

$$\not{1} := \text{anz } (\text{ext } \boldsymbol{\epsilon}\ (\boldsymbol{\epsilon} = \not{0})).$$

Zahlen als Anzahlen von Wahrheitswertverläufe

“Begriffsschrift” (1879)
Erste Formalisierung der Logik



Vielen Dank