



# **Eine erweiterte stochastische Euler-Lagrangesche Darstellung der Navier-Stokes-Gleichungen**

Masterarbeit in Mathematik

Leonard Jobst Eberhard Pleschberger

Mathematisches Institut der  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Juni 2018

Betreuung:  
Univ.-Prof. Dr. Jürgen Saal  
Univ.-Prof. Dr. Peter Kern

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Verwendete Sätze und Objekte</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Stochastische Analysis: <math>dB_t</math></b>	<b>4</b>
1.1	Quadratische Variationsprozesse . . . . .	4
1.2	SDEs und Itô-Doeblin-Formeln . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Die Helmholtz-Projektion: <math>P</math></b>	<b>11</b>
<b>III</b>	<b>Stochastische Version der Navier-Stokes-Gleichungen</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>Stochastische Euler-Lagrangesche Darstellungen von PDEs</b>	<b>15</b>
3.1	Inviskose Burgers-Gleichung . . . . .	15
3.2	Viskose Burgers-Gleichung . . . . .	18
3.3	Euler-Gleichungen . . . . .	19
3.4	Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Beweis mittels des Itô-Kalküls</b>	<b>21</b>
4.1	Beweis des Hauptresultats . . . . .	21
4.2	Invertierbarkeit der Molekülbewegung $X$ . . . . .	24
4.3	Verwendete Identitäten . . . . .	26
4.4	Voraussetzungen für die verallgemeinerte Itô-Formel . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Beweis durch Konstruktion pfadweiser Lösungen</b>	<b>37</b>
5.1	Beweis des Hauptresultats . . . . .	37
5.2	Verwendete Identitäten . . . . .	41
5.3	Voraussetzungen für die verallgemeinerte Itô-Formel . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Erweiterte Girsanov-Darstellung</b>	<b>46</b>
<b>IV</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>48</b>

## Teil I

# Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine stochastische Euler-Lagrangesche Darstellung der Grundgleichungen der Hydrodynamik, den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, bewiesen. Der Beweis erfolgte in [Constantin 2001] zunächst für die inkompressiblen Euler-Gleichungen und wurde anschließend in [Constantin 2008] auf die Navier-Stokes-Gleichungen erweitert. Die Methode ergibt einen eigenständigen lokalen Existenzbeweis für Anfangswerte in Hölderräumen, dargelegt in [Iyer 2006]. Die Darstellung ermöglicht es von einer makroskopischen Sichtweise der Dynamik einer Flüssigkeit auf die Molekülebene zu wechseln. Die Stochastik kommt dadurch ins Spiel, dass der dissipative Diffusionsteil der Navier-Stokes-Gleichungen in eine Brownsche Bewegung übersetzt wird. Diese modelliert standardnormalverteilte Kollisionen der Flüssigkeitsmoleküle.

Es werden zwei Beweise für die Darstellung gegeben. In beiden werden maßgeblich Methoden der stochastischen Analysis verwendet, insbesondere ein verallgemeinerter Itô-Kalkül, welcher in [Kunita 1990] dargestellt ist. Im II. Teil wird eine kurze Wiederholung der wichtigsten Sätze und Objekte gegeben, die in den Beweisen verwendet werden. Die Helmholtzprojektion wurde im Zuge der Analysis-Vorlesungen bei Herrn Professor Jürgen Saal eingeführt. Einiges hierzu findet sich auch in [Galdi 2011]. Die Definition der *BMO*-Seminormen stammt aus [Giga 2010]. Die Theorie zur stochastischen Analysis und den SDEs entstammt den Stochastik-Vorlesungen bei Herrn Professor Peter Kern und den Büchern [Behrends 2013], [Karatzas 1998], [Klenke 2013], [Mörters 2010], [Øksendal 2003] und [Shreve 2008]. Im III. Teil geht es um die stochastische Euler-Lagrangesche Darstellung selbst. Zunächst wird im einleitenden Kapitel 3 das Prinzip dieser Darstellung erläutert. Es ergeben sich Darstellungen für die Burgers-, Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen. Anschließend erfolgt in Kapitel 4 der erste Beweis des Hauptresultats. Er erfolgt durch Rechnungen im verallgemeinerten Itô-Kalkül. Die Theorie der Diffusionsprozesse ergibt insbesondere die Invertierbarkeit des Lagrangeschen Molekülflusses  $X$ , dargelegt in [Ikeda 1989]. Der zweite Beweis erfolgt in Kapitel 5. Hier wird zunächst von Lösungen einer SDE ausgegangen und man gelangt anschließend pfadweise zu den Navier-Stokes-Gleichungen. Im 6. Kapitel wird die Darstellung mittels der Girsanov-Transformation, dargestellt in [Øksendal 2003], dahingehend ver-

ändert, dass der Driftterm in der Lagrange-Funktion durch Maßwechsel im Wahrscheinlichkeitsraum wegfällt und man so ausschließlich eine Brownsche Bewegung als Molekülbewegung erhält.

### Zur Notation

In der vorliegenden Arbeit wird das Symbol  $v$  für die Geschwindigkeit verwendet. Das übliche  $u$  lässt sich dadurch begründen, dass es für das lateinische *velocitas* steht. Exemplarisch lässt sich der Sachverhalt am Genitiv Plural *velocitatum* verdeutlichen. Da in der Antike stets in Versalien geschrieben wurde, galt die Schreibweise *VELOCITATVM*. Die Symbole  $u$  und  $v$  wurden beide wie im letzten Satz mit  $V$  bezeichnet. Heutige Ausgaben sind meist in Minuskeln verfasst. Um für obigen Umstand Sorge zu tragen, ist es vor allem in den Oxford-Ausgaben seitens der Philologen üblich, sowohl das  $v$  als auch das  $u$  als  $u$  zu schreiben. Für das Beispielwort ergibt sich somit die Schreibweise *ue-locitatum* und dadurch ist die Bezeichnung  $u$  für das Geschwindigkeitsfeld, die *uelocitas*, gerechtfertigt. Da jedoch Latein als wissenschaftliche lingua franca im Laufe des 20. Jahrhunderts zugunsten von Englisch in die Bedeutungslosigkeit entschwand, wird im nachfolgenden Text das  $v$  in Anlehnung an das englische *velocity* verwendet.

Ferner werden für eine Funktion  $j$ -Regularität im Ort und  $k$ -Regularität in der Zeit meist mit dem Symbol  $C_x^j C_t^k$  bezeichnet.

Der inverse Lagrangesche Molekülfluss  $X^{-1}$  wird in der Originalarbeit mit einem  $A$  bezeichnet. In Anlehnung an die übliche Konnotation  $f(x) = y$ , beziehungsweise  $x = f^{-1}(y)$  wird nachfolgend der inverse Molekülfluss mit  $Y$  bezeichnet.

### Danksagung

Herrn Professor Saal möchte ich für meine analytische Ausbildung danken und vor allem für das Interesse an der Hydrodynamik, das er in mir geweckt hat. Herrn Professor Kern danke ich für die stochastische Ausbildung, die mir zuteil wurde und mir stets Freude bereitet hat.

Desweiteren möchte ich meiner Familie, die mich während meiner Studien unterstützt hat, Dank aussprechen, allen voran meiner Schwester India und meinen Eltern Achim und Yvonne. Unter meinen Freunden mag ich vor allem Marc Booten, Nils Bostelmann, Stephan Koch und Jens Schachmann danken.

## Teil II

# Verwendete Sätze und Objekte

## 1 Stochastische Analysis: $dB_t$

Das Itô-Integral ist eine Erweiterung des Riemann-Stieltjes-Integrals auf Integratoren von unbeschränkter Variation. Damit wird es insbesondere möglich gegen eine Brownsche Bewegung zu integrieren.

### 1.1 Quadratische Variationsprozesse

Variationsprozesse dienen im nachfolgenden Itô-Kalkül dazu, Störungen im Sinne des Rauschens einer Brownschen Bewegung zu codieren: Wann immer Prozesse von unbeschränkter Variation in den Formeln als Integratoren auftreten, wird es notwendig einen stochastischen Korrekturterm mit hinzuzunehmen. Durch das Zittern des Prozesses kommt nämlich beim Integrieren noch etwas mehr an Masse hinzu als bei Funktionen von beschränkter Variation. Nun möchte man einen Wert zur Verfügung haben, der beschreibt, wie viel Masse dieses Zittern zusätzlich auf die Waage bringt. Dies führt zu folgendem Begriff:

**Definition 1.1.** Die **quadratische Variation** eines Prozesses  $X$  ist definiert als

$$\langle X \rangle_t := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left( X(t_{k+1}^{(n)}) - X(t_k^{(n)}) \right)^2 \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} \cdots < t_n^{(n)} \leq t \right\}.$$

Im Gegensatz zur Totalvariation werden also hier die Abstände der Stützstellenwerte quadratisch aufsummiert. Zunächst wird festgehalten, dass „gutartige“ Funktionen von beschränkter Variation tatsächlich kein Rauschen beinhalten.

**Satz 1.2.** Es sei  $X$  eine Funktion von beschränkter Variation. Dann gilt

$$\langle X \rangle_t = 0.$$

Mittels der quadratischen Variation lässt sich die quadratische Kovariation zweier Funktionen wie folgt definieren:

**Definition 1.3.** Die **quadratische Kovariation** zweier Prozesse  $X$  und  $Y$  wird durch die Polarisationsformel

$$\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}(\langle X + Y \rangle_t + \langle X - Y \rangle_t)$$

definiert. Als Funktion in der Zeit aufgefasst heißt obiges Objekt **(quadratischer) Variationsprozess**.

Der folgende Satz besagt, dass die quadratische Kovariation nur dann nicht verschwindet, wenn beide involvierten Prozesse tatsächlich von unbeschränkter Variation sind.

**Satz 1.4.** *Es seien  $X$  und  $Y$  stochastische Prozesse. Falls mindestens einer der beiden Prozesse von beschränkter Variation ist, gilt für deren quadratische Variation f.s.*

$$\langle X, Y \rangle_t = 0.$$

Für die praktische Berechnung der quadratischen Variation zweier Itô-Integrale gilt folgende wichtige Rechenregel:

**Satz 1.5.** *Es seien  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung und  $F$  sowie  $G$   $L^2$ -Prozesse. Dann gilt f.s.*

$$\left\langle \int_0^t F(s) dB_s, \int_0^t G(s) dB_s \right\rangle_t = \delta_{j,k} \int_0^t F^{(j)}(s) \cdot G^{(k)}(s) ds.$$

Da der Zusammenhang  $B_t = \int_0^t 1 dB_s$  gilt, ergibt dieser Satz für die quadratische Variation zweier  $n$ -dimensionaler Brownscher Bewegungen für  $1 \leq j, k \leq n$  automatisch

$$\langle B_t^{(j)}, B_t^{(k)} \rangle_t = \delta_{j,k} \cdot t.$$

Dies bedeutet, dass die Brownsche Bewegung zwar von unbeschränkter Variation, jedoch für festes  $t \geq 0$  von beschränkter quadratischer Variation ist. Deshalb ist dieser Variationsbegriff der richtige für die Analysis von stochastischen Prozessen, wie im nächsten Abschnitt ersichtlich werden wird.

Ein Brownsches Semimartingal  $X$  ist ein Prozess, der sich in einen Anteil von beschränkter Variation  $BV(X)$  und ein Itô-Integral mit Brownscher Bewegung als Integrator zerlegen lässt. Letzterer heißt Martingalteil. Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt folgende Rechenregel für die quadratische Variation zweier solcher Brownscher Semimartingale:

**Korollar 1.6.** Es seien  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung sowie  $X = BV(X) + \int_0^t F(s)dB_s$  und  $Y = BV(Y) + \int_0^t G(s)dB_s$  zwei Brownsche Semimartingale. Dann gilt für deren quadratische Variation f.s.

$$\langle X, Y \rangle_t = \delta_{j,k} \int_0^t F^{(j)}(s) \cdot G^{(k)}(s) ds.$$

Es spielen also nur die Martingalanteile, nicht jedoch die Anteile von beschränkter Variation eine Rolle bei der Berechnung der quadratischen Variation.

## 1.2 SDEs und Itô-Doebelin-Formeln

Eines der Hauptanwendungsgebiete, in dem das Itô-Integral auftritt, ist die Theorie der **stochastischen Differentialgleichungen (SDEs)**, bzw. **stochastischen Integralgleichungen (SIEs)**. Zunächst ein

**Beispiel 1.7.** Eine der bekanntesten stochastischen Funktionen ist der **Itô-Prozess**, der als Lösung  $X$  der SIE

$$X(x, t) = X(x, 0) + \int_0^t b(X(x, s), s)ds + \int_0^t \sigma(X(x, s), s)dB_s$$

definiert ist. Sein Anfangswert werde mit  $X_0 := X|_{t=0}$  bezeichnet. Das Riemann-Integral  $\int_0^t b(X(s), s)ds$  beschreibt die Richtung, in die er sich zeitlich entwickelt und wird **Drift** genannt. Hinzu kommt ein Rauschen durch das Itô-Integral  $\int_0^t \sigma(X(x, s), s)dB_s$  mit **Dispersionskoeffizient**  $\sigma(X(x, s), s)$ , der beschreibt, wie stark das Rauschen ausgeprägt ist.

Nun kommt die Differentialschreibweise ins Spiel. Obige Gleichung wird hierbei geschrieben als

$$dX(x, t) = b(X(x, t), t)dt + \sigma(X(x, t), t)dB_t. \quad (1)$$

Der Begriff „Differential“ bezieht sich also auf die Differentiale der Integrale und nicht auf den vermeintlichen Differentialoperator  $d$  in  $dX$ . Dieser ist stets als

$$dX(x, t) = X(x, t) - X(x, 0)$$

zu lesen. In der Tat kann es vorkommen, dass der Prozess  $X$ , wie zum Beispiel die Brownsche Bewegung, in der Zeit nirgendwo differenzierbar ist.

In Anbetracht dieses Sachverhalts wird nun die wichtigste Rechenregel für das Itô-Integral eingeführt. Diese wird als **Itô-Formel** bezeichnet und ist im Prinzip nichts anderes als eine stochastische Version der analytischen Kettenregel

$$(f(g))' = f'(g)g'.$$

Nun wird jedoch als innere Funktion anstelle von  $g$  ein stochastischer Prozess  $X$  eingesetzt. Es stellt sich heraus, dass obige Kettenregel für Prozesse mit Anteilen von unbeschränkter Variation nicht gültig ist, es gilt also mit der „Ableitung“



$d$  im Sinne von Beispiel 1.7 leider

$$df(X) \stackrel{i.A.}{\neq} f'(X)dX.$$

Um das Rauschen des Prozesses  $X$  zu codieren, benötigt man noch einen zusätzlichen stochastischen Korrekturterm. Dieser ist durch die quadratische Variation des Prozesses gegeben. Diese Korrektur stellt einen echten Unterschied zwischen klassischer und stochastischer Analysis dar. Festgehalten wird dieses Prinzip im folgenden

**Satz 1.8** (Itô-Doeblin-Formel<sup>1</sup>). *Es sei  $f \in C^2(\mathbb{R})$  eine deterministische Funktion. Für einen stochastischen Prozess  $X$  gilt dann*

$$f(X) = f(X_0) + \int_0^t f'(X) dX + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X) d\langle X \rangle_s.$$

*In Differentialschreibweise (im Sinne von Beispiel 1.7) lässt sich die Formel darstellen als*

$$df(X) = f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)d\langle X \rangle_t.$$

Setzt man für den Prozess  $X$  die eindimensionale Brownsche Bewegung  $(B_t)_{t \geq 0}$  ein, so erhält man wegen  $B_0 = 0$ ,  $\mathbb{P}$ -f.s., und  $\langle B \rangle_t = t$ ,  $\mathbb{P}$ -f.s., beispielsweise

$$\begin{aligned} f(B_t) &= f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) d\langle B \rangle_s \\ &= f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Die Itô-Formel lässt sich natürlich auch auf  $n$  Dimensionen verallgemeinern. Hierbei wird die Itô-Formel komponentenweise angewendet und anschließend werden alle Vektoren aufsummiert. Es gilt der folgende

---

<sup>1</sup> Wolfgang Doeblin (1915-1940), geb. Döblin, Sohn des Autors Alfred Döblin („Berlin Alexanderplatz“), entwickelte bereits vor Itô eine Version dieser berühmten Formel. Dass sein Name über Jahrzehnte nicht mit dem Theorem in Verbindung gebracht wurde, ist u.a. einem wahren Wissenschaftskrimi geschuldet. Döblin musste auf Grund seiner jüdischen Herkunft 1933 nach Frankreich fliehen und forschte unter Maurice Fréchet über Wahrscheinlichkeitstheorie. Er nannte sich fortan Doeblin. 1938 musste er seinen Militärdienst als Infanteriesoldat antreten. Während dieser Zeit forschte er unvermindert weiter. 1940 schickte er einen versiegelten Umschlag an die Pariser Académie des Sciences, welcher eine Version dieser Formel beinhaltete. Als die deutschen Truppen anrückten, erschoss er sich am 21. Juni 1940, um einer Gefangenschaft zu entgehen. Der Umschlag blieb seitdem versiegelt in den Archiven der Académie unter Verschluss. Erst im Jahre 2000 wurde der Umschlag auf Geheiß der Nachkommen geöffnet und offenbarte die großartige Arbeit Doeblins, die unter den denkbar widrigsten Umständen entstand. Ihm zu Ehren wird die Itô-Formel seither auch Itô-Doeblin-Formel genannt.

**Satz 1.9** (Mehrdimensionale Itô-Doeblin-Formel). *Es sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  eine deterministische Funktion und  $X$  ein  $n$ -dimensionaler stochastischer Prozess. Dann gilt die  $n$ -dimensionale Itô-Formel*

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \partial_{x_j} f|_X dX^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \int_0^t \partial_{x_j} \partial_{x_k} f|_X d\langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_s.$$

*In Differentialschreibweise (im Sinne von Beispiel 1.7) lautet die Formel schlicht*

$$df(X) = \nabla f|_X dX + \frac{1}{2} \Delta f|_X d\langle X \rangle_t.$$

Neben dieser stochastischen Kettenregel gibt es auch noch eine stochastische Produktregel. Hierbei handelt es sich um eine gewöhnliche Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

der man aufgrund der Stochastik wieder einen quadratischen Variationsterm hinzufügt. Es ergibt sich der

**Satz 1.10** (Itô-Produktregel). *Es seien  $X$  und  $Y$  zwei  $n$ -dimensionale stochastische Prozesse. Dann gilt für die Itô-Ableitung im Sinne von Beispiel 1.7 von  $X \cdot Y$  die Formel*

$$X \cdot Y = X_0 \cdot Y_0 + \int_0^t Y dX + \int_0^t X dY + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s.$$

*Durch Verwendung der Differentialschreibweise gelangt man zu*

$$d(X \cdot Y) = Y dX + X dY + d\langle X, Y \rangle_t.$$

Das Hauptwerkzeug zum Nachweis der stochastischen Euler-Lagrangeschen Darstellungen der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ist eine **Verallgemeinerung der Itô-Formel**. Bei den bisherigen Itô-Formeln wurde immer die Itô-Ableitung einer äußeren deterministischen Funktion  $f$  und einem inneren stochastischen Prozess  $X$  gebildet, also  $df(X)$ . Jetzt betrachten wir zwei ineinandergeschachtelte stochastische Prozesse  $Y$  und  $X$  und wollen deren Itô-Ableitung  $dY(X)$  berechnen. Um das Rauschen des äußeren Prozesses zu codieren, wird ein weiterer quadratischer Variationsprozess fällig. Dies wird festgehalten im folgenden

**Satz 1.11** (Verallgemeinerte Itô-Formel). *Es sei  $Y$  ein  $C_x^2 C_t^1$ -Semimartingal mit lokalen Charakteristiken von der Klasse  $B^1$ , die sich als Dichten eines Riemann-Integrals darstellen lassen. Weiterhin sei  $X$  ein reellwertiges  $C_t^0$ -Semimartingal. Dann gilt für die Itô-Ableitung von  $Y(X)$  die Formel*

$$\begin{aligned} Y(X(t), t) - Y_0(X_0) &= \int_0^t \partial_s Y|_X ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \partial_{x_j} Y|_X dX^{(j)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \int_0^t \partial_{x_j x_k}^2 Y|_X d\langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_s + \sum_{j=1}^n \left\langle \int_0^t \partial_s \partial_{x_j} Y(X) ds, X^{(j)} \right\rangle_t. \end{aligned}$$

In Differentialschreibweise lässt sie sich verjüngen zu

$$dY(X) = Y(X) + \nabla Y|_X dX + \frac{1}{2} \Delta Y|_X d\langle X \rangle_t + \langle \nabla Y|_X, X \rangle_t.$$

*Beweis.* Der Beweis befindet sich in [Kunita 1990], Theorem 3.3.1, Seite 93. Die Definition der lokalen Charakteristiken wird zu Beginn des Beweises von Satz 5.3 gegeben. Dies hat den Sinn, dass man dort direkt ein passendes Beispiel zur Hand hat.  $\square$

Für eine SDE gibt es folgende Kriterien, um Existenz und Eindeutigkeit ihrer Lösung zu garantieren:

**Satz 1.12** (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für SDEs). *Gegeben sei ein stochastisches Anfangswertproblem*

$$dX(t) = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dB_t, \quad X|_{t=0} = X_0$$

mit Driftvektor  $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , Dispersionsmatrix  $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , einer  $n$ -dimensionalen Brownschen Bewegung  $B_t$  und einer von  $B_t$  stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen  $X_0$ . Die Abbildungen  $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, X) \mapsto b(t, X)$  sowie  $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, X) \mapsto \sigma(t, X)$  seien messbar.

Dann besitzt das Problem starke Lösungen, falls obige SDE die Lipschitz-Bedingung

$$\|b(x, t) - b(y, t)\| + \|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)\| \leq L\|x - y\|$$

erfüllt. Genügt die SDE zusätzlich der Wachstumsbedingung

$$\|b(x, t)\|^2 + \|\sigma(x, t)\|^2 \leq L^2(1 + \|x\|^2)$$

für ein  $L > 0$ , für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und alle  $t \geq 0$ , so ist die Lösung eindeutig.

## 2 Die Helmholtz-Projektion: P

Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die Bewegung von Flüssigkeiten. Dass es sich um Flüssigkeiten und nicht um Gase handelt, wird durch die Bedingung der Divergenzfreiheit ausgedrückt, d.h.

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Der andere Bestandteil der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ist eine Evolutionsgleichung. Dies bedeutet, dass die Veränderung der ursprünglichen Funktion, also des Anfangswerts  $v_0$ , durch deren Zeitableitung und zusätzliche auf die Funktion einwirkenden Terme ausgedrückt wird. In der Tat beinhaltet die Gleichung

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v - \mu \Delta v + \nabla p = 0$$

eine Zeitableitung und sonstige Terme, die zum Teil von  $v$  abhängen. Eine Methode solche Gleichungen zu behandeln, ist der operatortheoretische Zugang. Hierbei werden alle Terme bis auf die Zeitableitung in einem Operator  $A$  zusammengefasst, um zum Cauchy-Problem

$$\dot{v} = Av$$

zu gelangen. In Analogie zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen stellt sich nun die Frage, ob ein Ausdruck wie

$$T(t) := \exp(tA) \tag{2}$$

existiert. Es stellt sich heraus, dass die Evolutionsgleichung genau dann wohlgestellt im Sinne von Hadamard ist, wenn die Familie  $(T(t))_{t \geq 0}$  in Gleichung (2) eine stark stetige Halbgruppe ist, die vom Operator  $A$  wie oben erzeugt wird. Die Halbgruppentheorie beschäftigt sich u.a. mit der Frage, wann  $A$  eine solche stark stetige Halbgruppe erzeugt.

Um solche Techniken anwenden zu können, muss die betreffende Evolutionsgleichung aber zuerst in Form eines Cauchy-Problems formuliert werden. Zunächst linearisiert man die Navier-Stokes-Gleichungen durch Weglassen der unangenehmen Nichtlinearität  $(v \cdot \nabla)v$ . Diese wird später als Störung interpretiert, die sich dann mit einem Fixpunktargument behandeln lässt.

Diese linearisierten inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ergeben für  $\mu = 1$  die Stokes-Gleichungen

$$\dot{v} - \Delta v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Nun muss der Ausdruck  $-\Delta v + \nabla p$  und am besten in einem Rutsch gleich mit die Bedingung  $\operatorname{div} v = 0$  in Form eines Operators  $Av$  gebracht werden, um zur gewünschten Cauchy-Struktur zu gelangen. Hierbei muss man bedenken, dass ein Operator, wie auch jede Funktion, nicht nur durch seine Abbildungsvorschrift, sondern vor allem auch durch seinen Definitionsbereich bestimmt ist. Es ist also notwendig einen geeigneten Grundraum für die Stokes-Gleichungen zu definieren. Da die Divergenzfreiheit zu allen Zeiten gefordert ist, muss

$$0 = (\operatorname{div} v)|_{t=0} = \operatorname{div}(v|_{t=0}) = \operatorname{div} v_0$$

gelten. Der Anfangswert muss somit divergenzfrei sein. Für  $L^p$ -Funktionen existiert ein Teilraum, der diese Divergenzfreiheit erfüllt, gegeben in folgender

**Definition 2.1.** Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zu  $p \in [1, \infty)$  werden die divergenzfreien, bzw. solenoidalen  $L^p$ -Vektorfelder definiert durch

$$L_\sigma^p(\Omega) := \overline{C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)}^{L^p} = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} v \text{ kompakt}, \operatorname{div} v = 0\}}^{L^p}.$$

Der  $L^p$ -Abschluss kann gebildet werden, weil die Testfunktionen für  $p < \infty$  dicht in  $L^p$  liegen, also

$$C_c^\infty \xhookrightarrow{d} L^p, \quad C_{c,\sigma}^\infty \xhookrightarrow{d} L_\sigma^p$$

gelten.

Der folgende Satz besagt, dass sich  $L^p$ -Vektorfelder orthogonal in divergenzfreie Vektorfelder und Gradientenfelder zerlegen lassen.

**Satz 2.2** (Hauptsatz der Vektoranalysis). *Für  $1 < p < \infty$  gilt die Helmholtz-Zerlegung*

$$L^p(\mathbb{R}^n) = L_\sigma^p(\mathbb{R}^n) \oplus G_p(\mathbb{R}^n).$$

Hierbei sei  $G_p$  der Raum der Gradientenfelder. Mit der Bezeichnung  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  für den Raum der temperierten Distributionen, also den Dualraum der Schwartz-

oder schnell fallenden Funktionen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , wird dieser definiert durch

$$G_p(\mathbb{R}^n) := \overline{\{\nabla p : p \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \nabla p \in L^p(\mathbb{R}^n)\}}^{L^p}.$$

Nun stellt sich die Frage, mit welcher Vorschrift man den  $L^p(\mathbb{R}^n)$  auf den  $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$  projizieren kann. Die Regel hierzu ist gegeben durch folgende

**Definition 2.3.** Die **Helmholtz-Projektion**  $P$  ist über ihr Symbol, d.h. ihre Darstellung im Fourierraum, definiert durch

$$P : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p_\sigma(\mathbb{R}^n), \quad Pv := \mathcal{F}^{-1} \left[ I + \frac{i\xi i\xi^T}{|\xi|^2} \right] \mathcal{F}v.$$

Da dieses Symbol eine Kombination von Riesz-Operatoren ist, kann mit dem Satz von Mikhlin gezeigt werden, dass es ein Fourier-Multiplikator und somit  $L^p$ -stetig ist.

Die Bedingung der Divergenzfreiheit lässt sich also durch die Helmholtzprojektion ausdrücken. Zugleich gilt

$$P\nabla p = 0.$$

Dies kommt uns gut zupass, denn durch diese Tatsache können wir uns durch Anwendung der Helmholtz-Projektion des Druckgradientens entledigen. In den gewünschten Operator  $A$  des Cauchy-Problems muss noch der Laplace-Operator  $\Delta$  eingebracht werden. Dessen Definitionsbereich ist der Sobolev-Raum  $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ . Nach Anwenden des Laplace-Operators gelangt man also in den  $L^p$  und kann anschließend die Helmholtzprojektion anwenden. Insgesamt erhält man die

**Definition 2.4.** Der Stokes-Operator  $A_\sigma$  wird definiert durch

$$A_\sigma := P\Delta, \quad D(A_\sigma) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^p_\sigma(\mathbb{R}^n).$$

Insgesamt erhält man die Stokes-Gleichung in Form eines Cauchy-Problems als

$$\dot{v} - P\Delta v = 0, \quad v|_{t=0} = v_0$$

und die Halbgruppentheorie kann auf diese Gleichung angewendet werden.

Als Definitionsbereich werden in der vorliegenden Arbeit  $C^{\geq 2, \alpha}$ -Räume betrachtet. Diese werden in [Iyer 2006] mit periodischen Randbedingungen wie folgt definiert:

**Definition 2.5.** Es sei  $I = [0, L]^n$  ein Würfel mit der Seitenlänge  $L$  im  $\mathbb{R}^n$ . Die  $C^{k, \alpha}$ - oder Hölder-Räume werden definiert durch

$$C^{k, \alpha} := \left\{ v : \|v\|_{k, \alpha} := \sum_{|m| \leq k} L^{|m|} \sup_I |D^m v| + \sup_{x \neq y, x, y \in I} L^\alpha \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Der Satz 4.9 liefert lokale Existenz für periodische Randbedingungen. In diesem Fall ist die  $L^p$ -Integrierbarkeit von  $v$  gewährleistet und die oben eingeführte Helmholtz-Projektion ist dann im  $L^p$ -Sinne zu verstehen.

Betrachtet man hingegen den Ganzraum mit Decay-at-Infinity-Bedingung, so muss in obiger Definition der kompakte Würfel  $I$  durch den  $\mathbb{R}^n$  ersetzt werden. Es ergibt sich die Norm

$$\|\cdot\|_{C^{k, \alpha}(\mathbb{R}^n)} := \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x \neq y, x, y \in \mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Nun gilt leider keine  $L^p$ -Integrierbarkeit für  $p < \infty$  mehr. Daher muss man sich auf einen anderen Raum als den  $L^p$  berufen, um die Stetigkeit der Helmholtz-Projektion zu erhalten. Hierzu betrachtet man die  $BMO$ -Räume, die über folgende Seminorm definiert sind:

**Definition 2.6.** Die *Bounded-Mean-Oscillation*-, bzw.  $BMO$ -Seminorm ist definiert durch

$$\|u\|_{BMO} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\rho > 0} \left( \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} |u - u_\#| dx \right).$$

Hierbei bezeichne  $B_\rho(x)$  die offene Kugel um  $x$  mit Radius  $\rho$  und  $u_\#$  bezeichne den Mittelwert von  $u$  in  $B_\rho(x)$ , gegeben durch

$$u_\#(x) := \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{|B_\rho(x)|} u(y) dy.$$

Die Helmholtz-Projektion ist stetig in  $BMO$  und wegen

$$L^\infty \hookrightarrow BMO$$

ist sie für Decay-at-Infinity-Randbedingungen im  $BMO$ -Sinne aufzufassen.

## Teil III

# Stochastische Version der Navier-Stokes-Gleichungen

## 3 Stochastische Euler-Lagrangesche Darstellungen von PDEs

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein realitätsnahes Modell für die Dynamik von Fluiden, d.h. von Flüssigkeiten und Gasen. In dieser Arbeit wird der Beweis einer stochastischen Euler-Lagrangeschen Darstellung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, basierend auf dem Artikel [Constantin 2008] vorgestellt. Durch die Inkompressibilität werden diese zur Grundgleichung der Flüssigkeitsdynamik.

Um das Prinzip dieser stochastischen Darstellung zu erläutern, werden in diesem Abschnitt zunächst analoge Darstellungen einfacherer hydrodynamischer Grundgleichungen beschrieben, welche zusammengesetzt die kompletten Navier-Stokes-Gleichungen ergeben. Die nachfolgenden Gleichungen mögen stets als Anfangswertprobleme mit bekanntem Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v|_{t=0} = v_0 \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $k \geq 1$ , aufgefasst werden.

### 3.1 Inviskose Burgers-Gleichung

Die einfachste der nachfolgenden Grundgleichungen ist die **inviskose Burgers-Gleichung**, die durch

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v = 0 \tag{3}$$

gegeben ist. Mit dem Punkt in  $\dot{v}$  werde stets die Zeitableitung von  $v$  bezeichnet. Somit beschreibt  $\dot{v}$  die zeitliche Veränderung des Geschwindigkeitsfeldes, sprich: das Beschleunigungsfeld eines Fluids. Durch diese Zeitableitung wird obige wie auch die nachfolgenden Gleichungen zu einer sogenannten Evolutionsgleichung. Desweiteren beschreibt  $(v \cdot \nabla)v$  die nichtlineare Konvektion der Flüssigkeit, die den Transport der Flüssigkeitsmoleküle durch den Raum in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Nun kann man nicht nur das oben beschriebene Strömungsverhalten des gesamten Fluids zu allen Zeiten betrachten. Man kann auch die Geschwindig-



keitsfelder an zwei festen Zeitpunkten festhalten und die Bewegung eines jeden einzelnen Fluidmoleküls von einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n \times \{t = t_1\}$  zu einem anderen Punkt  $y \in \mathbb{R}^n \times \{t = t_2\}$  beschreiben. Meist handelt es sich im Folgenden um die Fluidmolekülbewegung vom bekannten Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v_0$  hin zum Geschwindigkeitsfeld  $v(t)$  zum Zeitpunkt der späteren Beobachtung  $t > 0$ . Diese Molekülbewegung wird beschrieben durch die deterministische Gleichung

$$X(x, t) = x + \int_0^t v(x, s) ds =: y.$$

In diesem einfachen Modell bewegt sich ein Fluidmolekül vom Raumpunkt  $x$  aus linear in Richtung des Geschwindigkeitsvektors  $v(x, t)$  zum Punkt  $y$ , denn physikalisch herrscht prinzipiell der Zusammenhang

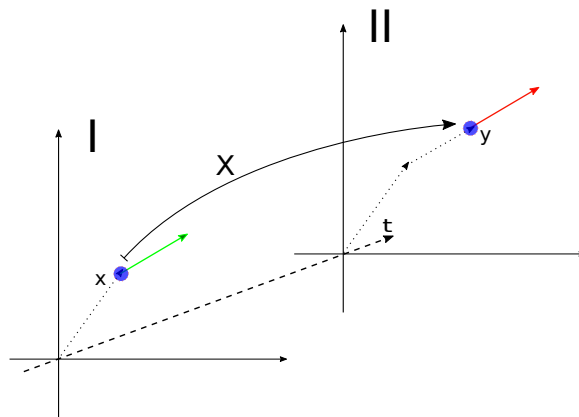
$$\partial_t^2 \text{ Ort} = \partial_t \text{ Geschwindigkeit} = \text{Beschleunigung}.$$

Somit beschreibt das Integral  $\int_0^t v(x, s) ds$  lediglich eine Verschiebung, also einen Transport, der Geschwindigkeit in Richtung des Geschwindigkeitsvektors. Um nun die Geschwindigkeit am Punkt  $y \in \mathbb{R}^n \times \{t\}$  zum Zeitpunkt  $t > 0$  zu bestimmen, benötigt man eine Regel, um diese aus dem vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v_0$  und der bekannten Molekülbewegung  $X$  zu gewinnen. In diesem Falle gilt

$$v(y, t) = v_0(Y(y, t)), \tag{4}$$

wobei  $Y := X^{-1}$  hier wie im Folgenden das räumliche Inverse von  $X$  bezeichne. Betrachtet man die Gleichung (4) genauer, so ergibt sich folgende Logik: Man möchte zum Zeitpunkt  $t$  wissen, wie der Geschwindigkeitsvektor  $v(y, t)$  der Flüssigkeit an einer gewissen Stelle  $y$  lautet. Dazu verfolgt man via  $Y(y, t)$  den Pfad des sich am Ort  $y$  befindlichen Flüssigkeitsmoleküls zurück zum Startpunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , man schaut also, wo das Molekül herkam, und überträgt den bekannten Geschwindigkeitsvektor  $v_0(x)$  aus dem Koordinatensystem  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  an den Ort  $v(y, t)$  in dem Koordinatensystem  $\mathbb{R}^n \times \{t \geq 0\}$ . Somit erhält man durch Kenntnis von  $v_0$  und  $X$  vollständige Information über das Verhalten des Fluids zum Zeitpunkt  $t \geq 0$ .

Das Prinzip lässt sich in folgender Graphik veranschaulichen. Dabei sei im Koordinatensystem  $\mathbf{I} = \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}$  das Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v_0$  vorgegeben, das Koordinatensystem  $\mathbf{II} = \mathbb{R}^2 \times \{t > 0\}$  beinhalte das zum Zeitpunkt  $t > 0$  gesuchte Geschwindigkeitsfeld  $v|_{t>0}$ . Der blaue Punkt bezeichne ein Flüssigkeitsmolekül, der grüne Pfeil die gegebene Anfangsgeschwindigkeit im Punkt  $x$  und der rote Pfeil die gesuchte Geschwindigkeit an der Stelle  $y = X(x, t)$ .



### 3.2 Viskose Burgers-Gleichung

Betrachtet man nun das komplexere Modell der **viskosen Burgers-Gleichung**, bei der neben dem Transport der Moleküle auch die Viskosität, also die Zähigkeit des Fluids, eingeht, so muss man zur inviskosen Burgers-Gleichung einen dissipativen negativen Laplace-Operator hinzufügen. Für  $\mu \geq 0$  erhält man

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v - \mu \Delta v = 0.$$

Auf molekularer Ebene kommt hier die Stochastik ins Spiel: Das Interagieren der Moleküle wird dadurch modelliert, dass jene sich standardnormalverteilt treffen und dadurch in ihren Bahnen abgelenkt werden. Diesen neuen Umstand codiert man dadurch, dass man der Molekülbewegung  $X$  ein Rauschen durch Addition einer Brownschen Bewegung  $B_t$  hinzufügt. Es ergibt sich

$$X(x, t) = x + \int_0^t v(x, s) ds + \sqrt{2\mu} B_t =: y.$$

Ein Fluidpartikel bewegt sich somit nicht mehr linear durch den Raum, sondern wird durch eine sogenannte Itô-Diffusion, d.h. obigem Objekt, beschrieben. Durch das Hinzufügen der Brownschen Bewegung wird die PDE zu einer dissipativen PDE. Das heißt, dass kinetische Energie zu Gunsten ungeordneter thermischer Energie umgewandelt wird. Das Ziehen des Erwartungswertes, also

$$v(y, t) = \mathbb{E}[v_0(Y(y, t))] \tag{5}$$

macht diesen chaotischen Umstand wett in dem Sinne, dass hierdurch die diversen Pfade der einzelnen Moleküle zu einem glatten makroskopischen Fluidfluss gemittelt werden.

### 3.3 Euler-Gleichungen

Verfeinern wir nun das Modell der inviskosen Burgers-Gleichung nicht in Hinsicht auf die Zähigkeit eines Fluids, was zur viskosen Burgers-Gleichung führt, sondern ziehen den Druck  $p$  in Betracht, so muss der inviskosen Burgers-Gleichung ein Druckgradient  $\nabla p$  additiv hinzugefügt werden. Der Umstand des Vorliegens einer Flüssigkeit, also eines inkompressiblen Fluids, wird durch eine weitere Gleichung, nämlich die Divergenzfreiheit, ausgedrückt. Es ergeben sich die **Euler-Gleichungen**

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Peter Constantin zeigte in [Constantin 2001], dass diese Gleichungen in Euler-Lagrangescher Manier wie folgt ausgedrückt werden können: Die Molekülbewegung  $X$  belässt man linear, also wird

$$X = id + \int_0^t v(s) ds$$

beibehalten. Die Regel, um aus dem Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v_0$  und der Molekülbewegung  $X(t)$  das fragliche Geschwindigkeitsfeld  $v(t)$  zu gewinnen, muss nun manipuliert werden, um den Druck  $p$  auszudrücken. Dazu wird auf der rechten Seite von Gleichung (4) ein Gradient der inversen Molekülbewegung, also  $\nabla Y(t)$ , hinzumultipliziert. Dies führt zu

$$v(y, t) = \nabla Y(t) \cdot v_0(Y(t)) \tag{6}$$

Zur Inkompressibilität, also  $\operatorname{div} v = 0$ , gelangt man durch Anwendung der Helmholtz-Projektion  $P$ , die auf divergenzfreie Vektorfelder projiziert. Man erhält

$$v(y, t) = P[\nabla Y(y, t) \cdot v_0(Y(y, t))].$$

### 3.4 Navier-Stokes-Gleichungen

Um zu den kompletten inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen zu gelangen, also die Dynamik einer Flüssigkeit mit Transport, Viskosität und Druck zu modellieren, wird nun den Euler-Gleichungen ein Diffusionsterm  $-\mu\Delta v$  hinzugefügt, wie beim Übergang von der nichtviskosen zur viskosen Burgers-Gleichung. Insgesamt erhält man die kompletten **inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen**

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v - \mu\Delta v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

In der stochastischen Euler-Lagrange-Darstellung wird dieser Umstand wie beim Übergang von der inviskosen zur viskosen Burgers-Gleichung dadurch ausgedrückt, dass der Molekülbewegung  $X$  eine Brownsche Bewegung und der Regel für  $v$  multiplikativ ein Gradient  $\nabla Y$  hinzugefügt wird. Anschließend wird der Erwartungswert gezogen. Es ergibt sich die komplette stochastische Euler-Lagrange-Darstellung

$$v(y, t) = \mathbb{E}[\nabla Y(y, t) \cdot v_0(Y(y, t))],$$

$$X(x, t) = x + \int_0^t v(x, s) ds + \sqrt{2\mu} B_t =: y,$$

die Peter Constantin und Gautam Iyer in [Constantin 2008] bewiesen.

Insgesamt lässt sich das Prinzip der stochastischen Euler-Lagrangeschen Darstellung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in folgender Tabelle verdeutlichen:

	Konvektion	Druck	Viskosität	Inkompressibilität
$0 = \dot{v}$	$+(v \cdot \nabla)v$	$+\nabla p$	$-\mu\Delta v,$	$\operatorname{div} v = 0$
$v =$	$v_0(Y)$	$\nabla Y \cdot$	$\mathbb{E}[\cdot]$	$P$
$X =$	$id + \int_0^t v ds$		$+\sqrt{2\mu} B_t$	

## 4 Beweis mittels des Itô-Kalküls

### 4.1 Beweis des Hauptresultats

Im Folgenden wird ein Beweis des Hauptresultats der Arbeit gegeben. Die technischen Details werden in den nachfolgenden Abschnitten behandelt. Gezeigt wird der folgende

**Satz 4.1.** *Zu einem Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v_0(x) \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $k \geq 1$ , sei die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes  $v(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Flüssigkeit beschrieben durch das stochastische Euler-Lagrangesche System*

$$\begin{aligned} v(y, t) &= \mathbb{E}P[\nabla Y(y, t) \cdot v_0(Y(y, t))], \\ X(x, t) &= x + \int_0^t v(x, s) ds + \sqrt{2\mu} B_t =: y. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne  $Y := X^{-1}$  das räumliche Inverse der Molekülbewegung  $X$ , der Operator  $P$  die Helmholtz-Projektion und  $B_t$  die  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung. Dann ist diese stochastische Darstellung von  $v$  äquivalent zu den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, gegeben durch

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v - \mu \Delta v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0$$

mit dem gleichen Anfangswert  $v_0$ .

*Beweis.* Der Beweis wird mit Hilfe des Itô-Kalküls erbracht. Beginnen wir hierzu mit der Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld

$$v = \mathbb{E}P[\nabla Y \cdot v_0(Y)]. \quad (7)$$

Zunächst wird die rechte Seite ohne Erwartungswert und Helmholtz-Projektion betrachtet. Definiere

$$w := \nabla Y \cdot v_0(Y). \quad (8)$$

Wird nun die Itô-Ableitung dieses Ausdrucks gebildet, muss die gewöhnliche Produktregel angewendet und zusätzlich eine stochastische Korrektur als Variationsterm eingebracht werden. Man erhält mit Satz 1.10 über die Itô-Produktregel die SDE

$$dw = v_0(Y) \cdot d\nabla Y + \nabla Y \cdot dv_0(Y) + d\langle \nabla Y, v_0(Y) \rangle_t. \quad (9)$$

Für die weitere Rechnung benötigt man nun Identitäten für  $dY$  und  $dv_0(Y)$ . Das nachfolgende Lemma 4.5 und Korollar 4.7 liefern hierzu die stochastischen partiellen Differentialgleichungen

$$dY = -(v \cdot \nabla)Y dt + \mu \Delta Y dt - \sqrt{2\mu} \nabla Y dB_t, \quad (10)$$

$$dv_0(Y) = -(v \cdot \nabla)v_0(Y) dt + \mu \Delta v_0(Y) dt - \sqrt{2\mu} \nabla v_0(Y) dB_t. \quad (11)$$

Das Einsetzen dieser Identitäten in die Gleichung (9) ergibt zusammen mit Lemma 4.8 den Ausdruck

$$w = w_0 + [-(v \cdot \nabla)w + \mu \Delta w - (\nabla^T v)w] dt - \sqrt{2\mu} \nabla w dB_t. \quad (12)$$

Wenden wir uns nun wieder der ursprünglichen Gleichung (7) des Geschwindigkeitsfeldes zu. Da Gradienten durch die Helmholtz-Projektion verschwinden und Helmholtz-Projektion und Erwartungswert kommutieren, lässt sich  $v$  schreiben als

$$\begin{aligned} v &= \mathbb{E}P[w] \\ &= P\mathbb{E}[w] \\ &= P(\mathbb{E}[w] + \nabla q) \\ &= P\mathbb{E}[w + \nabla q]. \end{aligned}$$

Hier bezeichne  $q = q(x, t)$  eine deterministische Funktion. Nun wird (12) in obige Gleichung substituiert. Da der Anfangswert  $v_0$  deterministisch ist, folgt  $\mathbb{E}[w_0] = \mathbb{E}[v_0] = v_0$ . Da das Itô-Integral ein Martingal ist, besitzt es per Definition einen konstanten Erwartungswert. Damit gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \sqrt{2\mu} \nabla w dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^0 \sqrt{2\mu} \nabla w dB_s\right] = 0.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} v &= \mathbb{E}[w_0 + [-(v \cdot \nabla)w + \mu \Delta w - (\nabla^T v)w]dt - \sqrt{2\mu} \nabla w dB_t] + \nabla q \\ &= v_0 + \mathbb{E}\left[\int_0^t [-(v \cdot \nabla)w + \mu \Delta w - (\nabla^T v)w]ds\right] + \nabla q, \quad \text{div } v = 0. \end{aligned}$$

Ferner gilt in Erwartung

$$w = v - \nabla q.$$

Eingesetzt führt dies zu

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \mathbb{E} \left[ \int_0^t -(v \cdot \nabla)(v - \nabla q) + \mu \Delta(v - \nabla q) - (\nabla^T v)(v - \nabla q) ds \right] + \nabla q \\ &= v_0 + \mathbb{E} \left[ \int_0^t -(v \cdot \nabla)v + \mu \Delta v \, ds \right] - \nabla p \\ &= v_0 + \int_0^t -(v \cdot \nabla)v + \mu \Delta v - \nabla p \, ds, \quad \operatorname{div} v = 0. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert konnte in der letzten Zeile entfallen, da  $v$  und  $p$  deterministisch sind. Der Druck  $p$  wird wie folgt durch  $q$  gewonnen:

$$p = q - \int_0^t (v \cdot \nabla)q - \mu \Delta q + \frac{1}{2}|v|^2 \, ds.$$

Durch zeitliches Differenzieren auf beiden Seiten folgen die behaupteten inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v - \mu \Delta v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Da ausschließlich Identitäten verwendet wurden, gilt die Rechnung auch in die Rückrichtung. □



## 4.2 Invertierbarkeit der Molekülbewegung $X$

Im Beweis wird vermehrt das räumliche Inverse von  $X$  verwendet, welches mit  $Y = X^{-1}$  bezeichnet wird. Damit die Argumentation durchgeht, muss zuerst einmal geklärt werden, ob ein solches  $Y$  überhaupt für alle Zeiten existiert. Die Invertierbarkeit des Flusses  $X$  ergibt sich aus der Theorie der Diffusionsprozesse. Eine Darstellung seiner Jacobi-Matrix bietet der folgende

**Satz 4.2.** *Es sei  $X = X(x, t, \omega)$  eine Lösung des stochastischen Anfangswertproblems*

$$dX = b(X, t)dt + \sigma(X, t)dB_t, \quad X|_{t=0} = id.$$

*Dann kann eine Modifikation von  $X$  gewählt werden, sodass die Funktion  $x \mapsto X(x, t, \omega)$  ein Diffeomorphismus auf  $\mathbb{R}^n$  ist. Die Jacobi-Matrix  $J = J_X(x, t, \omega)$  von  $X$  ist gegeben als Lösung von*

$$J = I + \int b'(X)Jdt + \int \sigma'(X)JdB_t \quad (13)$$

*Hierbei bezeichne  $I$  die Einheitsmatrix.*

*Beweis.* Der Beweis befindet sich in [Ikeda 1989], Theorem 2.3, Seite 266.  $\square$

Für die Molekülbewegung  $X$  ergibt sich somit direkt folgende Konsequenz:

**Korollar 4.3.** Die Determinante der Jacobi-Matrix  $J_X = J_X(x, t)$  des Flusses  $X = vt + \sqrt{2\mu}dB_t$  lautet

$$\det(J_X) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} v \, ds\right) = 1 > 0$$

Insbesondere ist damit der Fluss  $X$  für alle Zeiten invertierbar, d.h. es existiert das räumliche Inverse  $Y := X^{-1}$  für alle  $t \geq 0$ .

*Beweis.* Die Darstellung (13) der Jacobi-Matrix von  $X$  mit  $b = v$  und  $\sigma = \sqrt{2\mu}$  ergibt

$$\begin{aligned} J_X &= I + b'(X)J_Xdt + \sigma'(X)J_XdB_t \\ &= I + \nabla v \cdot J_Xdt. \end{aligned}$$

Bildet man die zeitliche Ableitung auf beiden Seiten, folgt

$$\dot{J}_X = \nabla v \cdot J_X.$$

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ergibt als Lösung

$$J_X = \exp\left(\int_0^t \nabla v \, ds\right).$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass für jede beliebige Matrix  $A$  die Identität

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Spur}(A)) > 0$$

gilt. Angewendet auf die obige Jacobimatrix  $J_X$  folgt somit

$$\begin{aligned} \det(J_X) &= \exp\left(\text{Spur}\left(\int_0^t \nabla v \, ds\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^n \int_0^t \partial_{x_j} v^{(j)} \, ds\right) \\ &= \exp\left(\int_0^t \text{div } v \, ds\right) = 1 > 0. \end{aligned}$$

Die letzte Identität ergibt sich aus der Forderung der Divergenzfreiheit von  $v$ . Der Satz über die lokale Invertierbarkeit sichert insgesamt die Existenz von  $Y = X^{-1}$  für alle Zeiten.  $\square$

*Bemerkung 4.4.* Da die Determinante der Jacobi-Matrix von  $X$  gleich 1 ist, ist die Abbildung lokal volumenerhaltend. Dies ist von einer Flüssigkeitsbewegung schließlich auch anschaulich zu erwarten.

### 4.3 Verwendete Identitäten

Im Beweis des Theorems 4.1 werden stochastische partielle Differentialgleichungen als Identitäten für die Itô-Ableitungen des inversen Flusses  $Y := X^{-1}$  verwendet. Die folgenden beiden Lemmata stellen die hierzu benötigten Rechnungen vor.

**Lemma 4.5.** *Es sei  $Y = X^{-1}$  das räumliche Inverse des Molekülflusses  $X$  aus Satz 4.1. Die Itô-Ableitung  $dY$  ist gegeben durch die stochastische partielle Differentialgleichung*

$$dY = -(v \cdot \nabla)Y dt + \mu \Delta Y dt - \sqrt{2\mu} \nabla Y dB_t.$$

*Beweis.* Das Hauptwerkzeug, um die SPDE zu erlangen, ist die verallgemeinerte Itô-Formel aus Satz 1.11. Diese ermöglicht es nicht nur die Itô-Ableitung einer deterministischen Funktion  $f$  von einem stochastischen Prozess  $X$ , also  $df(X)$  zu berechnen, sondern auch Ableitungen von zwei ineinandergeschachtelten stochastischen Prozessen, nämlich  $dY(X)$ .

Es gelte  $\mu = 1/2$ . Zunächst sei bemerkt, dass  $Y(X)(x, t) = x$  für alle  $t \geq 0$  gilt, denn  $Y$  bezeichnet das räumliche Inverse von  $X$ . Das Anwenden der verallgemeinerten Itô-Formel auf  $Y(X)$ , deren Voraussetzungen in Satz 5.3 geklärt werden, ergibt für  $0 \leq t' \leq t$  daher

$$\begin{aligned} 0 &= x - x = Y(X)(t) - Y(X)(t') \\ &= \int_{t'}^t \partial_s Y|_X ds + \sum_{j=1}^n \int_{t'}^t \partial_{x_j} Y|_X dX^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \int_{t'}^t \partial_{x_j, x_k}^2 Y|_X d\langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_s \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^n \langle \nabla Y^{(j)}|_X, X^{(k)} \rangle_t. \end{aligned}$$

Da  $t$  und  $t'$  beliebig sind, diese also auch beliebig nahe beieinander liegen können, gilt obige Aussage auch punktweise. Somit können wir in der nachfol-

genden Rechnung  $Y|_X$  durch  $Y = Y(x)$  ersetzen. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= x - x = Y(X(t), t) - Y(X(0), 0) \\
&= \int_0^t \partial_s Y ds + \nabla Y dX + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \delta_{j,k} \int_0^t \partial_{x_j, x_k}^2 Y d\langle X \rangle_s + \langle \nabla Y, X \rangle_t \\
&= Y(t) - Y(0) + \nabla Y[v dt + dB_t] + \frac{1}{2} \Delta Y dt + \langle \nabla Y, X \rangle_t \\
&= Y(t) - Y(0) + [(v \cdot \nabla)Y + \frac{1}{2} \Delta Y] dt + \nabla Y dB_t + \langle \nabla Y, X \rangle_t.
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile wurde die Identität  $dX = v dt + \sqrt{2\mu} dB_t$  verwendet. Als Identität, Riemann-Integral, bzw. Variationsprozess sind alle Summanden bis auf  $Y(t)$  und  $\nabla Y dB_t$  von beschränkter Variation. Daher lässt sich  $Y$  durch Umstellen der Gleichung schreiben als

$$Y = BV - \nabla Y dB_t, \quad (14)$$

wobei die Funktion  $BV$  von beschränkter Variation ist. Hierdurch können wir nun den Variationsprozess  $\langle \nabla Y, X \rangle_t$  explizit ausrechnen. Nur die Martingalan-teile von  $X$  und  $Y$  gehen hierbei ein, vgl. Korollar 1.6. Es gilt

$$\langle \nabla Y, X \rangle_t = \langle -\Delta Y dB_t, X_t \rangle_t = \langle -\Delta Y dB_t, dB_t \rangle_t = -\Delta Y dt.$$

Setzt man dies nun in die erste Gleichung ein, so ergibt sich mit der Notation  $dY = Y(t) - Y(0)$  die stochastische partielle Differentialgleichung

$$dY + (v \cdot \nabla)Y dt - \frac{1}{2} \Delta Y dt + \nabla Y dB_t = 0,$$

die behauptet wurde. □

**Lemma 4.6.** Sei  $f = f(x, t) \in C_x^2 C_t^1$  eine Funktion und  $Y = X^{-1}$  das räumliche Inverse des Molekülflusses  $X$  aus Satz 4.1. Die Itô-Ableitung von  $f(Y)$  ist gegeben durch die stochastische partielle Differentialgleichung

$$df(Y) = \dot{f}(Y) dt - (v \cdot \nabla) f(Y) dt + \mu \Delta f(Y) dt - \sqrt{2\mu} \nabla f(Y) dB_t.$$

*Beweis.* Zunächst wird auf  $f(Y)$  die mehrdimensionale Itô-Doebelin-Formel (Satz 1.9) angewendet. Es gelte  $\mu = 1/2$ . Da nachfolgend die unteren Integralgrenzen beliebig gewählt werden können, gelten die folgende Aussagen punktweise wie

im Beweis von Lemma 4.5. Es gilt

$$df(Y) = \dot{f}(Y)dt + f'(Y)dY + \frac{1}{2}f''(Y)d\langle Y \rangle_t. \quad (15)$$

Um den Variationsprozess  $\langle Y \rangle_t$  zu berechnen, verwenden wir wieder die Zerlegung

$$Y = BV - \nabla Y dB_t$$

aus Gleichung (14) im Beweis von Lemma 4.5 mit einem Anteil von beschränkter Variation  $BV$ . Da für die Berechnung der quadratischen Variation der Anteil von beschränkter Variation wieder außer Acht gelassen werden kann, folgt

$$d\langle Y \rangle_t = \langle -\nabla Y dB_t, -\nabla Y dB_t \rangle_t = \Delta Y dt.$$

Zur weiteren Berechnung wird nun die Darstellung

$$dY = -(v \cdot \nabla)Y dt + \mu \Delta Y dt - \nabla Y dB_t$$

aus Lemma 4.5 betrachtet. Ersetzt man nun  $\langle Y \rangle_t$  und  $dY$  in Gleichung (15) durch obige Identitäten, erhält man

$$\begin{aligned} df(Y) &= \dot{f}(Y)dt + f'(Y)[-(v \cdot \nabla)Y dt + \frac{1}{2}\Delta Y dt - Y' dB_t] + \frac{1}{2}f''(Y)\Delta Y dt \\ &= \dot{f}(Y)dt - v \cdot f'(Y)Y' dt - f'(Y)Y' dB_t + \frac{1}{2}[f''(Y)\Delta Y + f'(Y)\Delta Y]dt. \end{aligned}$$

Der zweite und dritte Summand folgen der einfachen Kettenregel, der letzte Summand folgt der Struktur

$$(f(g))'' = (f'(g) \cdot g')' = f''(g) \cdot g' \cdot g' + f'(g) \cdot g''.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$df(Y) = \dot{f}(Y)dt - (v \cdot \nabla)f(Y)dt + \frac{1}{2}\Delta f(Y)dt - \nabla f(Y)dB_t,$$

was zu zeigen war.  $\square$

Die benötigte Identität (11) für  $dv_0(Y)$  im Beweis von Theorem 4.1 ergibt sich damit direkt, indem man in Lemma 4.6  $f$  durch  $v_0$  ersetzt. Dies führt zu

**Korollar 4.7.** Es seien  $v_0 \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $k \geq 1$  das Anfangsgeschwindigkeitsfeld des Navier-Stokes-Anfangswertproblems und  $Y = X^{-1}$  das räumliche Inverse der Molekülbewegung  $X$  aus Satz 4.1. Die Itô-Ableitung  $dv_0(Y)$  ist gegeben durch die stochastische partielle Differentialgleichung

$$dv_0(Y) = -(v \cdot \nabla)v_0(Y)dt + \mu\Delta v_0(Y)dt - \sqrt{2\mu} \nabla v_0(Y)dB_t.$$

Als letzte Rechnung muss noch die Identität (12) gezeigt werden, d.h.

**Lemma 4.8.** *Es seien  $v_0 \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $k \geq 1$  und  $Y = X^{-1}$  das räumliche Inverse der Molekülbewegung  $X$  aus Satz 4.1, sowie  $w = \nabla Y \cdot v_0(Y)$  wie in Gleichung (8) gegeben. Dann gilt die stochastische partielle Differentialgleichung*

$$dw = d[\nabla Y \cdot v_0(Y)] = [-(v \cdot \nabla)w + \mu \Delta w - (\nabla v)w]dt - \sqrt{2\mu} \nabla w dB_t.$$

*Beweis.* Zunächst werden die  $w$ -Terme in der rechten Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} dw &= -(v \cdot \nabla)w \, dt \\ &\quad + \mu \Delta w \, dt \\ &\quad - (\nabla^T v)w \, dt \\ &\quad - \sqrt{2\mu} \nabla w \, dB_t \end{aligned}$$

erweitert. Zur besseren Übersicht wurden die einzelnen Summanden zeilenweise notiert.

*Erste Zeile:* Mit der Produktregel gilt

$$(v \cdot \nabla)w = (v \cdot \nabla)[\nabla Y \cdot v_0(Y)] = (v \cdot \nabla)\nabla Y \cdot v_0(Y) + \nabla Y \cdot (v \cdot \nabla)v_0(Y).$$

*Zweite Zeile:* Mit der Schreibweise  $\Delta = \nabla \nabla = \nabla^2$  folgt vermöge der Leibnizregel

$$\Delta w = \nabla^2[\nabla Y \cdot v_0(Y)] = \nabla^2 \nabla Y \cdot v_0(Y) + 2\nabla^1 \nabla Y \cdot \nabla^1 v_0(Y) + \nabla Y \cdot \nabla^2 v_0(Y).$$

*Dritte Zeile:* Mit der Operatorenschreibweise  $\nabla Y \cdot \nabla v = (\nabla v \cdot \nabla)Y$  gilt die Identität

$$(\nabla^T v)w = (\nabla^T v)[\nabla Y \cdot v_0(Y)] = v_0(Y) \cdot [(\nabla v \cdot \nabla)Y].$$

*Vierte Zeile:* Durch Verwenden der Produktregel ergibt sich die Gleichung

$$\nabla w = \nabla[\nabla Y \cdot v_0(Y)] = \nabla \nabla Y \cdot v_0(Y) + \nabla Y \cdot \nabla v_0(Y).$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned}
dw = & -[(v \cdot \nabla) \nabla Y \cdot v_0(Y) + \nabla Y \cdot (v \cdot \nabla) v_0(Y)] dt \\
& + \mu [\nabla^2 \nabla Y \cdot v_0(Y) + 2 \nabla^1 \nabla Y \cdot \nabla^1 v_0(Y) + \nabla Y \cdot \nabla^2 v_0(Y)] dt \\
& - [v_0(Y) \cdot [(\nabla v \cdot \nabla) Y]] dt \\
& - \sqrt{2\mu} [\nabla \nabla Y \cdot v_0(Y) + \nabla Y \cdot \nabla v_0(Y)] dB_t.
\end{aligned}$$

Umsortieren führt zu

$$\begin{aligned}
dw = & \nabla Y [-(v \cdot \nabla) v_0(Y) dt + \mu \Delta v_0(Y) dt - \sqrt{2\mu} \nabla v_0(Y) dB_t] \\
& + v_0(Y) [-(\nabla v \cdot \nabla) Y dt - (v \cdot \nabla) \nabla Y dt + \mu \Delta \nabla Y dt - \sqrt{2\mu} \nabla \nabla Y dB_t] \\
& + 2\mu \nabla \nabla Y \nabla v_0(Y) dt.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.5 gilt die Identität

$$[dv_0(Y)] = [-(v \cdot \nabla) v_0(Y) dt + \mu \Delta v_0(Y) dt - \sqrt{2\mu} \nabla v_0(Y) dB_t].$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned}
dw = & \nabla Y [dv_0(Y)] \\
& + v_0(Y) [-(\nabla v \cdot \nabla) Y dt - (v \cdot \nabla) \nabla Y dt + \mu \Delta \nabla Y dt - \sqrt{2\mu} \nabla \nabla Y dB_t] \\
& + 2\mu \nabla \nabla Y \nabla v_0(Y) dt.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt durch Anwenden der Itô-Produktregel (Satz 1.10)

$$\begin{aligned}
dw = & d[\nabla Y \cdot v_0(Y)] \\
= & \nabla Y [dv_0(Y)] + v_0(Y) d[\nabla Y] + d\langle \nabla Y, v_0(Y) \rangle_t.
\end{aligned}$$

Damit die gewünschte Identität herauskommt, muss nun also noch

$$\begin{aligned}
& v_0(Y) d[\nabla Y] + d\langle \nabla Y, v_0(Y) \rangle_t \\
= & v_0(Y) [-(\nabla v \cdot \nabla) Y dt - (v \cdot \nabla) \nabla Y dt + \mu \Delta \nabla Y dt - \sqrt{2\mu} \nabla \nabla Y dB_t] \\
& + 2\mu \nabla \nabla Y \nabla v_0(Y) dt
\end{aligned}$$



gezeigt werden. Durch Anwenden der Produktregel gilt

$$\begin{aligned} & v_0(Y) d[\nabla Y] \\ &= v_0(Y) [-(\nabla v \cdot \nabla) Y \, dt - (v \cdot \nabla) \nabla Y \, dt + \mu \Delta \nabla Y \, dt - \sqrt{2\mu} \, \nabla \nabla Y \, dB_t]. \end{aligned}$$

Schließlich sieht man die Identität

$$d\langle \nabla Y, v_0(Y) \rangle_t = 2\mu \nabla \nabla Y \nabla v_0(Y) \, dt$$

wie folgt ein: Aus der Gleichung (14) mit allgemeinen  $\mu$  folgt

$$Y = BV - \sqrt{2\mu} \, \nabla Y \, dB_t,$$

und somit gilt

$$\nabla Y = BV - \sqrt{2\mu} \, \nabla \nabla Y \, dB_t.$$

Aus Korollar 4.7 folgt

$$\begin{aligned} dv_0(Y) &= -(v \cdot \nabla) v_0(Y) \, dt + \mu \Delta v_0(Y) \, dt - \sqrt{2\mu} \, \nabla v_0(Y) \, dB_t \\ &= BV - \sqrt{2\mu} \, \nabla v_0(Y) \, dB_t. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne  $BV$  jeweils die Anteile von beschränkter Variation. Da nur die Martingalteile zur quadratischen Kovariation beitragen (vgl. Korollar 1.6), folgt unter Verwendung von Satz 1.5 die gewünschte Identität

$$\begin{aligned} d\langle \nabla Y, v_0(Y) \rangle_t &= (-\sqrt{2\mu}) \nabla \nabla Y \cdot (-\sqrt{2\mu}) \nabla v_0(Y) \, dt \\ &= 2\mu \nabla \nabla Y \nabla v_0(Y) \, dt, \end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. □

#### 4.4 Voraussetzungen für die verallgemeinerte Itô-Formel

Für die Anwendbarkeit der verallgemeinerten Itô-Formel auf  $Y(X)$  müssen einige analytische und stochastische Eigenschaften dieser ineinandergeschachtelten Funktionen nachgewiesen werden. Wichtig hierfür ist das folgende lokale Existenzresultat für die stochastische Euler-Lagrangesche Darstellung der Navier-Stokes-Gleichungen:

**Satz 4.9.** *Es sei  $v_0 \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $k \geq 1$ , und zugleich divergenzfrei. Dann existieren eine Zeit  $T(k, \alpha, L, \|v_0\|_{k+1,\alpha})$ , die unabhängig von der Viskosität ist, und zwei Funktionen  $\lambda, v \in C([0, T], C^{k+1,\alpha})$ , sodass  $v$  und  $X = id + \lambda$  das stochastische Euler-Lagrangesche Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} v(y, t) &= \mathbb{E}P[\nabla Y(y, t) \cdot v_0(Y(y, t))], \\ X(x, t) &= x + \int_0^t v(x, s) ds + \sqrt{2\mu} B_t =: y \end{aligned}$$

mit  $Y = X^{-1}$  erfüllen. Desweiteren existiert eine Konstante  $U(k, \alpha, L, \|v_0\|_{k+1,\alpha})$ , sodass für alle  $t \in [0, T]$  die Ungleichung  $\|v(t)\|_{k+1,\alpha} \leq U$  gilt. Hierbei steht  $L > 0$  für die Periodenlänge bei periodischen Randbedingungen. Die Aussagen gelten auch auf dem Ganzraum mit hinreichend starken Decay-at-Infinity-Randbedingungen.

*Beweis.* Der Beweis befindet sich in [Iyer 2006], Theorem 2.1. □

Daraus resultiert der folgende

**Satz 4.10.** *Es sei ein Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v_0 \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $k \geq 1$ , und nach Satz 4.9 eine Lösung  $v = v(t, x) \in C([0, T], C^{k+1,\alpha})$  der stochastischen Euler-Lagrangeschen Darstellung gegeben. Dann ist  $Y = X^{-1}$  ein  $C_x^2 C_t^0$ -Semimartingal und besitzt lokale Charakteristiken von der Klasse  $B^1$ . Desweiteren ist  $X$  ein  $C_x^1 C_t^0$ -Semimartingal. Insbesondere ist damit die verallgemeinerte Itô-Formel auf  $Y(X)$  anwendbar.*

*Beweis.* Zunächst wird nachgewiesen, dass  $X$  ein  $C_x^2 C_t^0$ -Semimartingal und somit insbesondere  $C_x^1 C_t^0$  ist. Mit dem Satz über die lokale Invertierbarkeit, der im Satz 4.2 verwendet wurde, um die globale Invertierbarkeit von  $X$  zu garantieren, überträgt sich dann die Regularität auf  $Y$ . Die gewünschte Semimartingaleigenschaft folgt direkt aus den Darstellungen für  $X$  und  $Y$ . Anschließend werden die lokalen Charakteristiken von  $Y$  betrachtet. Die Funktion  $Y$  besitzt zwei Arten lokaler Charakteristiken: Lokale Charakteristiken einerseits des Martingalanteils

und andererseits des Anteils von beschränkter Variation. Ersterer ist die Dichte des Variationsprozesses des Martingalteils, letzterer die Dichte des Anteils von beschränkter Variation. Beide lokalen Charakteristiken müssen von der Klasse  $B^1$  sein, d.h. die Seminorm

$$||b||_{1,K} := \sup_{x \in K} \frac{|b(x)|}{1+|x|} + \sup_{x \in K} |b'(x)| + \sup_{x,y \in K} |b'(x) - b'(y)|$$

erfüllen, damit der gesamte Prozess von der Klasse  $B^1$  ist.

**Schritt 1:**  $X$  und  $Y$  sind  $C_x^2 C_t^0$ .

Für die Regularität von  $X = id + v \, dt + \sqrt{2\mu} dB_t$  wird nachgewiesen, dass die einzelnen Summanden des Prozesses jeweils  $C_x^2 C_t^0$  sind. Offensichtlich gilt  $id \in C_x^2 C_t^0$ . Da  $\sqrt{2\mu} B_t$  nicht von  $x$  abhängt, gilt  $\partial_x B_t = \partial_{xx} B_t \equiv 0$ , also  $\sqrt{2\mu} B_t \in C_x^2(\mathbb{R}^n)$ . Desweiteren ist die Brownsche Bewegung stetig in der Zeit, also gilt  $\sqrt{2\mu} B_t \in C_x^2 C_t^0$ . Dadurch, dass die Lösung nach Voraussetzung  $C([0, T], C^{k+1, \alpha})$  für  $k \leq 1$  ist, gilt  $\int_0^t v \, ds \in C_x^2 C_t^0$ . Wie eingangs beschrieben folgt mit dem Satz über die lokale Invertierbarkeit, dass auch  $Y = X^{-1}$  ein  $C_x^2 C_t^0$ -Prozess ist.

**Schritt 2:**  $X$  und  $Y$  sind Semimartingale.

Damit  $X$  ein Semimartingal ist, muss sich der Prozess zerlegen lassen in

$$X = id + \int_0^t v \, ds + \sqrt{2\mu} B_t = BV(X) + M(X),$$

wobei  $BV$  sowie  $\partial_x BV$  von beschränkter Variation sind und  $M = M(x, t)$  ein lokales Martingal ist. Letztere Eigenschaft ist für  $M := \sqrt{2\mu} B_t$  erfüllt, da dies bekanntermaßen ein Martingal, also insbesondere auch ein lokales Martingal ist. Fasst man die nachfolgenden Integrale als Riemann-Stieltjes-Integrale auf, sind die Prozesse

$$BV := id + \int_0^t v \, ds \quad \text{und} \quad \partial_x BV = \int_0^t \partial_x v \, ds$$

zudem wegen der Monotonie ihrer Integratoren von beschränkter Variation. Eine Darstellung der Funktion  $Y$  lässt sich wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned}
X(Y)(x) &= x = Y + \int_0^t v(Y, s) ds + \sqrt{2\mu} B_t \\
&\Leftrightarrow \\
Y &= x - \int_0^t v(Y, s) ds - \sqrt{2\mu} B_t.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Semimartingaleigenschaft für  $Y$  mit den Definitionen

$$\tilde{B}V(Y) := - \int_0^t v(Y(s), s) ds, \quad \tilde{M}(Y) := id - \sqrt{2\mu} B_t.$$

**Schritt 3:**  $Y$  besitzt lokale Charakteristiken von der Klasse  $B^1$ .

Die lokale Charakteristik des Martingalanteils  $\tilde{M} = id - \sqrt{2\mu} B_t$  ist hier die Dichte des Variationsprozesses von  $M(x, t)$  und  $M(y, t)$  für  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Es gilt

$$\langle \tilde{M}(x, t), \tilde{M}(y, t) \rangle_t = \langle x - \sqrt{2\mu} B_t, y - \sqrt{2\mu} B_t \rangle_t = 2\mu \cdot t = \int_0^t 2\mu dt.$$

Also ist  $2\mu$  die lokale Charakteristik des Martingalanteils  $\tilde{M}$ . Die Klasse  $B^1$  ist über gewisse Seminormen definiert. Da die lokale Charakteristik hier konstant ist, lässt sie sich in der Seminorm gleichmäßig gegen eine Konstante abschätzen. Damit folgt, dass  $\tilde{M}$  eine lokale Charakteristik von der Klasse  $B_b^1$  ( $b$  = „bounded“) besitzt und somit von der Klasse  $B^1$  ist.

Die lokale Charakteristik des Anteils von beschränkter Variation ist hier die Dichte von  $\tilde{B}V = - \int_0^t v(Y(s), s) ds$ . Sie ist somit definiert als

$$b(x, t) := -v(Y(t), t).$$

Um die Klasse  $B^1$  zu garantieren, muss die Beschränktheit der nachfolgenden Seminorm nachgewiesen werden. Sei hierzu  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beliebiges Kompaktum. Zudem kommt hier die Voraussetzung  $v = v(t, x) \in C([0, T], C^{k+1, \alpha})$  für  $k \geq 1$  ins Spiel. Da wie oben gezeigt  $Y \in C_x^2$  ist und nach Voraussetzung  $v \in C_x^{\geq 2}$  gilt und stetige Funktionen auf einem Kompaktum ihr Minimum und Maximum

annehmen, folgt

$$\begin{aligned}
& \|b\|_{1,K} \\
&:= \sup_{x \in K} \frac{|b(x)|}{1+|x|} + \sup_{x \in K} |b'(x)| + \sup_{x,y \in K} |b'(x) - b'(y)| \\
&= \sup_{x \in K} \frac{|v(Y(x))|}{1+|x|} + \sup_{x \in K} |v'(Y(x))Y'(x)| + \sup_{x,y \in K} |v'(Y(x))Y'(x) - v'(Y(y))Y'(y)| \\
&\leq C < \infty, \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Somit gilt ebenfalls  $b \in B_b^1$ , also insbesondere  $b \in B^1$  und alle Behauptungen sind gezeigt.  $\square$

## 5 Beweis durch Konstruktion pfadweiser Lösungen

In diesem Abschnitt wird ein alternativer Beweis des Hauptresultats in Satz 4.1 gegeben.

### 5.1 Beweis des Hauptresultats

**Satz.** Zu einem Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v_0(x) \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $k \geq 1$ , sei die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes  $v(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Flüssigkeit beschrieben durch das stochastische Euler-Lagrangesche System

$$\begin{aligned} v(y, t) &= \mathbb{E}P[\nabla Y(y, t) \cdot v_0(Y(y, t))], \\ X(x, t) &= x + \int_0^t v(x, s)ds + \sqrt{2\mu}B_t =: y. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne  $Y := X^{-1}$  das räumliche Inverse der Molekülbewegung  $X$ ; der Operator  $P$  die Helmholtz-Projektion und  $B_t$  die  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung. Dann ist diese stochastische Darstellung von  $v$  äquivalent zu den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, gegeben durch

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v - \mu \Delta v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0$$

mit dem gleichen Anfangswert  $v_0$ .

*Beweis.* Es gelte  $\mu = 1/2$ . Als erstes wird eine Funktion  $v^\omega$  als Geschwindigkeitsfunktion  $v$  definiert, deren Ortsargument  $x$  um eine  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung  $B_t$  transferiert wird, also

$$v^\omega(x, t) := v(x + B_t(\omega), t).$$

Zu bemerken ist, dass die Brownsche Bewegung  $B_t$  unabhängig vom Ort ist, die Störungen sind also gleichmäßig im Raum verteilt. Mittels dieser Funktion wird nun die SDE

$$dZ = v^\omega(Z, t)dt = v(Z + B_t(\omega), t)dt \tag{16}$$

mit Anfangswert  $Z_0 = id$  gebildet.

Da  $v \in C_x^{\geq 2}$  ist, existiert mit dem Mittelwertsatz zu  $x \neq y$  ein  $\xi \in \overline{xy}$ , so dass

$$\begin{aligned} & |v^\omega(x, t) - v^\omega(y, t)| \\ &= |v(x + B_t, t) - v(y + B_t, t)| \\ &= \nabla v(\xi, t) |x + B_t - y - B_t| \\ &= \nabla v(\xi, t) |x - y| < \infty \end{aligned}$$

gilt. Also ist  $v^\omega$  Lipschitzsch im Ort mit Lipschitzkonstante  $L := \nabla v(\xi, t)$ . Somit existieren zu obigem stochastischen Anfangswertproblem (16) mittels Satz 1.12 Lösungen  $Z$ . Die Funktion

$$X(x, t, \omega) := Z(x, t, \omega) + B_t(\omega)$$

erfüllt zudem die Lagrange-SDE aus dem Satz vermöge

$$\begin{aligned} dX &= d[Z + B_t] \\ &= dZ + dB_t \\ &= v^\omega dt + B_t. \end{aligned}$$

Das räumliche Inverse von  $Z$  werde von nun an mit  $W := Z^{-1}$  bezeichnet. Dieses existiert, denn es gilt

$$\begin{aligned} X(W(x - B_t, t), t) &= Z(W(x - B_t, t), t) + B_t \\ &= x - B_t + B_t \\ &= x, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass mit der Translation  $\tau_y f(x) = f(x - y)$  und  $Y = X^{-1}$  wie im Satz

$$Y = \tau_{B_t} W = W(\cdot - B_t)$$

gilt. Nach Satz 4.2 existiert dieses  $Y$  und somit auch  $W$  auf dem Ganzraum für alle Zeiten.

Nun wird die Funktion

$$w^\omega := \mathbb{P}[(\nabla^T W)v_0(W)]$$

definiert. Diese sieht schon fast aus wie die ersehnte Euler-Darstellung aus dem Satz, nämlich

$$v = \mathbb{E}P[(\nabla^T Y)v_0(Y)].$$

In der Tat unterscheiden sich  $W$  und  $Y$  lediglich um eine Translation. Somit unterscheiden sich auch  $w^\omega$  und  $v$  nur durch eine Translation und den Erwartungswert, ersichtlich durch

$$\begin{aligned} v &= \mathbb{E}P[(\nabla^T Y)v_0(Y)] \\ &= \mathbb{E}P[(\nabla^T \tau_{B_t} W)v_0(\tau_{B_t} W)] \\ &= \mathbb{E}P[\tau_{B_t} \{(\nabla^T W)v_0(W)\}] \\ &= \mathbb{E}\tau_{B_t} P[(\nabla^T W)v_0(W)] \\ &= \mathbb{E}\tau_{B_t} w^\omega. \end{aligned}$$

Nun erfüllt  $w^\omega$ , wie in Korollar 5.2 gezeigt wird, das System

$$\begin{aligned} \dot{w}^\omega + (v^\omega \cdot \nabla)w^\omega + (\nabla^T v^\omega)w + \nabla q^\omega &= 0, \\ \operatorname{div} w^\omega &= 0, w^\omega|_{t=0} = v_0. \end{aligned}$$

Jetzt wird auf  $\tau_{B_t} w^\omega$ , also  $v$  ohne den Erwartungswert, die verallgemeinerte Itô-Formel angewendet. Die Anwendbarkeit wird in Satz 5.3 gezeigt. Es gilt

$$\begin{aligned} &w^\omega(x - B_t, t) - w^\omega(x - B_0, 0) \\ &= w^\omega(x - B_t, t) - v_0(x) \\ &= \dot{w}^\omega|_{x-B_t} dt - \nabla w^\omega|_{x-B_t} dt + \frac{1}{2} \Delta w^\omega|_{x-B_t} dt + \langle \nabla w^\omega|_{x-B_t} dt, x - B_t \rangle_t. \end{aligned}$$

Der zweite Summand fällt wegen der Divergenzfreiheit von  $w^\omega$  weg. Desweiteren entfällt der quadratische Kovarianzterm, da  $w^\omega \in C_t^1$  und somit von beschränkter Variation ist; aus obigem System folgt nämlich, dass  $\dot{w}^\omega$  existiert. Wendet man den Erwartungswert auf die Gleichung an, folgt

$$\begin{aligned} &v(x, t) - v_0(x) \\ &= \mathbb{E}[w^\omega(x - B_t, t) - v_0(x)] \\ &= \mathbb{E}[\dot{w}^\omega|_{x-B_t} dt] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} \Delta w^\omega|_{x-B_t} dt\right] \\ &= \mathbb{E}[\dot{w}^\omega|_{x-B_t} dt] + \frac{1}{2} \Delta v dt. \end{aligned}$$



Nach Korollar 5.2 gilt

$$\dot{w} + (v \cdot \nabla)w + (\nabla^T v)w + \nabla q = 0.$$

Dies wird nun in die linke Seite der behaupteten Identität eingesetzt. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^t \dot{w}^\omega |_{x=B_s} ds \right] &= -\mathbb{E} \left[ \int_0^t [(v^\omega \cdot \nabla)w^\omega + (\nabla^T v^\omega)w^\omega + \nabla q^\omega]_{x=B_s, s} ds \right] \\ &= -\mathbb{E} \left[ \int_0^t (v \cdot \nabla)[\tau_{B_t} w^\omega] + (\nabla^T v)[\tau_{B_t} w^\omega] + \nabla[\tau_{B_t} q^\omega] ds \right] \\ &= -\int_0^t (v \cdot \nabla)v + (\nabla^T v)v + \nabla \mathbb{E}[\tau_{B_t} q^\omega] ds \\ &= -\int_0^t (v \cdot \nabla)v + \nabla p \, ds, \end{aligned}$$

wobei der Druck durch

$$p = \frac{1}{2}|v|^2 + \mathbb{E}[\tau_{B_t} q^\omega]$$

gewonnen wird. Eingesetzt ergibt dies schließlich

$$v(x, t) - v_0(x) = -\int_0^t [(v \cdot \nabla)v - \frac{1}{2}\Delta v + \nabla p] \, ds.$$

Das Anwenden der Zeitableitung auf beiden Seiten und die Tatsache, dass

$$\operatorname{div} w^\omega = 0$$

sowie

$$v = \mathbb{E}[\tau_{B_t} w^\omega]$$

gelten, führen schließlich für allgemeines  $\mu$  zum behaupteten inkompressiblen Navier-Stokes-Anfangswertproblem

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v - \sqrt{2\mu}\Delta v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{t=0} = v_0.$$

Da ausschließlich Identitäten verwendet wurden, gilt die Rechnung auch in die Rückrichtung. □

## 5.2 Verwendete Identitäten

**Lemma 5.1.** *Zu einem divergenzfreien Geschwindigkeitsfeld  $v$  werde der Prozess  $X$  definiert durch das stochastische Anfangswertproblem*

$$\dot{X} = v(X), \quad X_{t=0} = id.$$

*Es bezeichne  $Y := X^{-1}$  das räumliche Inverse von  $X$ . Zudem sei eine Funktion  $w$  definiert durch*

$$w := P[(\nabla^T Y)u].$$

*Hierbei erfülle die Funktion  $u$  zu einem Anfangswert  $u_0$  die Evolutionsgleichung*

$$\mathcal{D}u := \dot{u} + (v \cdot \nabla)u = \Gamma$$

*mit der Materialableitung  $\mathcal{D}$ . Dann existiert eine Funktion  $q$ , sodass  $w$  das System*

$$\begin{aligned} \dot{w} + (v \cdot \nabla)w + (\nabla^T v)w + \nabla q &= (\nabla^T Y)\Gamma, \\ \operatorname{div} w &= 0, \quad w_0 = Pu_0. \end{aligned}$$

*erfüllt.*

*Beweis.* Dadurch, dass Gradienten durch die Helmholtzprojektion verschwinden, lässt sich  $w$  schreiben als

$$\begin{aligned} w &= P[(\nabla^T Y)u] \\ &= P[(\nabla^T Y)u - \nabla \tilde{q}] \\ &= P[u^T(\nabla Y) - \nabla \tilde{q}]. \end{aligned}$$

Mit der Produktregel folgt

$$\mathcal{D}w = P[\mathcal{D}u^T \cdot \nabla Y + u^T \cdot \mathcal{D}\nabla Y - \mathcal{D}\nabla \tilde{q}]. \quad (17)$$

Möchte man die Operatoren  $\mathcal{D}$  und  $\nabla$  kommutieren, so wird ein Korrekturterm fällig. Dieser wird durch den Kommutator

$$[\mathcal{D}, \nabla]f := \mathcal{D}(\nabla f) - \nabla(\mathcal{D}f)$$

der Operatoren bestimmt. Es gilt

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}, \nabla]f &= \mathcal{D}(\nabla f) - \nabla(\mathcal{D}f) \\
&= (v \cdot \nabla)\nabla f - \nabla[(v \cdot \nabla)f] \\
&= (v \cdot \nabla)\nabla f - (v \cdot \nabla)\nabla f - \nabla^T v \nabla f.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathcal{D}(\nabla f) = \nabla(\mathcal{D}f) - \nabla^T v \nabla f.$$

Wendet man dies auf die Gleichung (17) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}w &= \mathcal{D}u^T \cdot \nabla Y + u^T \cdot \mathcal{D}\nabla Y - \mathcal{D}\nabla \tilde{q} \\
&= \Gamma^T \nabla Y + u^T \nabla(\mathcal{D}Y) - u^T (\nabla^T v) \nabla Y + (\nabla^T v) \nabla \tilde{q} - \nabla \mathcal{D}\tilde{q} \\
&= (\nabla^T Y) \Gamma - (\nabla^T v)(u \nabla Y + \nabla \tilde{q}) - \nabla \mathcal{D}\tilde{q} \\
&= (\nabla^T Y) \Gamma - (\nabla^T v)w - \nabla q.
\end{aligned}$$

In der Rechnung wurde einerseits in der letzten Zeile die Notation  $q := \mathcal{D}\tilde{q}$  verwendet; andererseits fällt der Ausdruck  $u^T \nabla(\mathcal{D}Y)$  in der zweiten Zeile weg. Dies liegt daran, dass die Materialableitung die Lagrangesche Richtungsableitung entlang der Trajektorie  $X$  aus Sicht des mitfließenden Beobachters bedeutet. Die Richtungsableitung des inversen Flusses  $Y = X^{-1}$  ist damit 0.

Die Divergenzfreiheit von  $w = P[(\nabla^T Y)u]$  ist wegen der Helmholtzprojektion klar und  $w_0 = Pu_0$  folgt direkt aus der Definition.  $\square$

Setzt man in obigem Lemma  $\Gamma = 0$  und  $u = v_0(Y)$ , so ergibt sich direkt folgendes

**Korollar 5.2.** Zu einem divergenzfreien Geschwindigkeitsfeld  $v$  werde der Prozess  $X$  definiert durch das stochastische Anfangswertproblem

$$\dot{X} = v(X), \quad X_{t=0} = id.$$

Es bezeichne  $Y := X^{-1}$  das räumliche Inverse von  $X$ . Zudem sei eine Funktion  $w$  definiert durch

$$w := P[(\nabla^T Y)v_0(Y)].$$

Hierbei erfülle die Funktion  $u$  zu einem Anfangswert  $u_0$  die Evolutionsgleichung

$$\mathcal{D}v_0(Y) := \partial_t v_0(Y) + (v \cdot \nabla)v_0(Y) = 0$$

mit der Materialableitung  $\mathcal{D}$ . Dann existiert eine Funktion  $q$ , sodass  $w$  das System

$$\begin{aligned} \dot{w} + (v \cdot \nabla)w + (\nabla^T v)w + \nabla q &= 0, \\ \operatorname{div} w &= 0, \quad w_0 = Pv_0 \end{aligned}$$

erfüllt.

### 5.3 Voraussetzungen für die verallgemeinerte Itô-Formel

**Satz 5.3.** *Es sei ein Anfangsgeschwindigkeitsfeld  $v_0 \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $k \geq 1$ , und nach Satz 4.9 eine Lösung  $v = v(t, x) \in C([0, T], C^{k+1,\alpha})$ , der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen gegeben. Dann ist*

$$w^\omega = w(x + B_t(\omega), t) = P[(\nabla^T Y(x + B_t(\omega), t))v_0(Y(x + B_t(\omega), t)))]$$

*ein  $C_x^2 C_t^0$ -Semimartingal und besitzt lokale Charakteristiken von der Klasse  $B^1$ . Desweiteren ist  $f(x, t, \omega) := x - B_t(\omega)$  ein  $C_x^1 C_t^0$ -Semimartingal. Insbesondere ist damit die verallgemeinerte Itô-Formel auf  $w^\omega(x - B_t(\omega), t) = w^\omega(f(x, t, \omega), t)$  anwendbar.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

**Schritt 1:**  $w^\omega$  ist ein  $C_x^2 C_t^0$ -Semimartingal.

Es gilt  $w^\omega(x, t) = w(x + B_t(\omega), t)$ . Falls nun  $w \in C_x^2 C_t^0$  ist, gilt dies auch für  $w^\omega$ , denn einerseits ist die Brownsche Bewegung ortsunabhängig und fällt somit auch beim Nachdifferenzieren weg, andererseits ist diese stetig in der Zeit. Nach Satz 4.9 gilt

$$v = \mathbb{E}[\tau_{B_t} w^\omega] = \mathbb{E}[w] \in C_x^2 C_t^0.$$

Da der Erwartungswert nur auf  $\omega$  wirkt, beeinflusst er die Regularität in Ort und Zeit nicht negativ und somit folgt  $w \in C_x^2 C_t^0$ . Aus der Gleichung

$$\dot{w} + (v \cdot \nabla)w + (\nabla^T v)w + \nabla q = 0$$

aus Korollar 5.2 wird wie im Beweis des Hauptsatzes  $w^\omega \in C_t^1$  ersichtlich und somit ist  $w^\omega$  von beschränkter Variation. Insbesondere ist damit  $w^\omega$  ein Semimartingal mit konstantem Martingalanteil.

**Schritt 2:**  $f$  ist ein  $C_x^1 C_t^0$ -Semimartingal.

Die Aussage liest man an

$$f(x, t, \omega) = x - B_t(\omega)$$

wegen der Ortsunabhängigkeit der Brownschen Bewegung direkt ab.

**Schritt 3:**  $w^\omega$  besitzt lokale Charakteristiken von der Klasse  $B^1$ .

Wie in Schritt 1 dargelegt ist  $w \in C_t^1$  und somit Lipschitzsch und insbesondere von beschränkter Variation. Damit wird der Martingalanteil konstant und es müssen nur die lokalen Charakteristiken des Anteils von beschränkter Variation, also von  $w^\omega$  selbst betrachtet werden. Diese lokale Charakteristik ist

$$b = \dot{w}^\omega.$$

Nach den Schritten 1 und 2 gilt  $b \in C_x^2 C_t^0$ , da  $w^\omega \in C_t^1$ . Da stetige Funktionen auf einem Kompaktum ihr Minimum und Maximum annehmen, folgt

$$\begin{aligned} & \|b\|_{1,K} \\ &:= \sup_{x \in K} \frac{|b(x)|}{1+|x|} + \sup_{x \in K} |b'(x)| + \sup_{x,y \in K} |b'(x) - b'(y)| \\ &= \sup_{x \in K} \frac{|\dot{w}^\omega(x)|}{1+|x|} + \sup_{x \in K} |(w^\omega(x))'| + \sup_{x,y \in K} |(w^\omega(x))' - (w^\omega(y))'| \\ &\leq C < \infty, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Somit gilt  $b \in B_b^1$  ( $b$  = „bounded“), also insbesondere  $b \in B^1$  und alle Behauptungen sind gezeigt.  $\square$

## 6 Erweiterte Girsanov-Darstellung

Die Molekülbewegung  $X$  ist ein Itô-Prozess. Mittels des Satzes von Girsanov kann der Drift-Term unter Maßwechsel im Wahrscheinlichkeitsraum wegtransformiert werden. Es soll also für  $\mu = \frac{1}{2}$  der Prozess

$$X = id + \int_0^t v ds + B_t$$

zu einem Prozess

$$X = id + \tilde{B}_t$$

transformiert werden, wobei  $\tilde{B}_t$  eine Brownsche Bewegung auf einem anderen Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Hinreichend für die Anwendbarkeit der Girsanov-Transformation ist die **Novikov-Bedingung**

$$\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T |v|^2 ds)] < \infty.$$

Daher setzen wir im Folgenden  $[t \mapsto v(x, \cdot) \in L^2([0, \infty))]$  voraus, denn dann ist die Novikov-Bedingung global erfüllt wegen

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T |v|^2 ds)] \\ & \leq \mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2} \int_0^\infty |v|^2 ds)] \\ & = \exp(\frac{1}{2} \int_0^\infty |v|^2 ds) < \infty. \end{aligned}$$

Somit ist nach dem Satz von Girsanov  $X$  eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})^{\otimes \mathbb{R}_0^+}$ , wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  wie folgt definiert ist:

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}[\chi_A \cdot M_T], \forall A \in \mathcal{F}_T,$$

wobei  $\mathcal{F}_T$  die natürliche Filtrierung der Brownschen Bewegung meint. Hierbei ist

$$M_t := \exp(\int_0^t v dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v|^2 ds)$$

nach Novikov ein  $\mathbb{Q}$ -Martingal für alle  $t \geq 0$ .

Die stochastische Euler-Lagrange Darstellung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen für  $\mu = \frac{1}{2}$ , d.h.

$$\begin{aligned} v(y, t) &= \mathbb{E}P[\nabla Y(y, t) \cdot v_0(Y(y, t))], \\ X(x, t) &= x + \int_0^t v(x, s) ds + B_t =: y \end{aligned}$$

lässt sich somit mit obigen Wahrscheinlichkeitsräumen auch darstellen als

$$v = \mathbb{E}P[\nabla Y \cdot v_0(Y)], \quad X = id + \tilde{B}_t.$$



## Teil IV

# Literaturverzeichnis

### Artikel:

[Constantin 2001]: Peter Constantin: An Eulerian-Lagrangian Approach for Incompressible Flows: Local Theory. *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), No. 2, 263-78.

[Constantin 2008]: Peter Constantin und Gautam Iyer: A Stochastic Lagrangian Representation of the 3-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **61** (2008), No. 3, 330-45.

[Iyer 2006]: Gautam Iyer: A Stochastic perturbation of inviscid flows. *Comm. Math. Phys.* **266** (2006), No. 3, 631-45.

### Monographien:

[Behrends 2013] Ehrhard Behrends: Markovprozesse und stochastische Differentialgleichungen. Vom Zufallsspaziergang zur Black-Scholes-Formel. Springer Spektrum, Wiesbaden (2013).

[Galdi 2011] G. P. Galdi: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations (2. Auflage). Springer Science + Business Media, New York (2011).

[Giga 2010] Mi-Ho Giga, Yoshikazu Giga und Jürgen Saal: Nonlinear Partial Differential Equations. Asymptotic Behavior of Solutions and Self-Similar Solutions. Birkhäuser / Springer, New York (2010).

[Ikeda 1989] Nobuyuki Ikeda und Shinzo Watanabe: Stochastic differential Equations and Diffusion Processes (2. Auflage). North-Holland Publishing Company, Amsterdam Oxford New York / Kodansha Scientific Books, Tokyo (1989).

[Karatzas 1998] Ioannis Karatzas und Steven Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus (2. Auflage). Springer-Verlag, New York (1998).

[Klenke 2013] Achim Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie (3. Auflage). Springer Spektrum, Berlin Heidelberg (2013).

[Kunita 1990] Hiroshi Kunita: Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[Mörters 2010] Peter Mörters und Yuval Peres: Brownian Motion. Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[Øksendal 2003] Bernt Øksendal: Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications (6. Auflage). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2003).

[Shreve 2008] Steven E. Shreve: Stochastic Calculus for Finance II (2. Auflage). Springer Science + Business Media, New York (2008).

Hiermit versichere ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Düsseldorf, im Juni 2018

Leonard J. E. Pleschberger