**Bachelorarbeit Kernfach Philosophie**
**zum Erwerb des Bachelor of Arts (B.A.)**

# Ist Null eine natürliche Zahl?
# $0 \in \mathbb{N}$ ?

Leonard Jobst Eberhard Pleschberger

22. Mai 2019

Prüfer:
Univ.-Prof. Dr. Gerhard Schurz

Philosophische Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

2016089

*Gewidmet*
*Frau Dr. Siegrid S. Süßenbach, verw. Amtsgerichtsrätin*

# Inhaltsverzeichnis

# 0 Einleitung

Die Frage, ob die Null zu den natürlichen Zahlen zu zählen sei oder nicht, wird von Disziplin zu Disziplin, von Dozent zu Dozent, von Epoche zu Epoche unterschiedlich beantwortet.

Diese Fragestellung ist insofern problematisch, als dass hier ein Vorverständnis von „natürlichen Zahlen“ vorausgesetzt wird. Den Begriff der natürlichen Zahl „vollständig“ zu definieren kommt der Beantwortung von Was-ist-Fragen im Sinne Karl Poppers gleich: Was ist eine Zahl und was ist das Natürliche an einer solchen Zahl?
Diese Art von essentialistischen Fragen lehnt Popper neben letzten Erklärgründen generell ab. Dies begründet er schlichtweg damit, dass sich Relationen zwischen zwei verschiedenen Objekten nicht durch die inhärenten Eigenschaften jedes einzelnen Objektes erklären lassen.[1] Wohl sollen strukturelle Eigenschaften von Objekten immer weiter und tiefgründiger erforscht werden, jedoch unter einem relationistischen und nicht (ultimativ) essentialistischen Gesichtspunkt. Dieser Sicht folgt die vorliegende Arbeit und sie setzt ein stipulatives Verständnis der Fragestellung voraus: Ziel der Arbeit ist es eine Explikation der Begriffe „natürliche Zahl“ und „Null“ im Sinne Rudolph Carnaps zu geben.[2] Methodisch werden zwei der vier Kriterien einer adäquaten Explikation dieser Begriffe in der folgenden Arbeit angewendet, viz. extensionale Ähnlichkeit des Explikats zu den Explikanda und Fruchtbarkeit des Explikats.[3]
In den drei Hauptteilen der Arbeit werden systematisch reportative Untersuchungen zu den Begriffen „natürliche Zahl“ und „Null“ vorgenommen, um eine extensionale Ähnlichkeit der Explikate zu gewährleisten:
Im kulturgeschichtlichen Teil 1 („Zur Geschichte der Null“) wird die historische Entstehungs- und Verbreitungsgeschichte der Null und der Zahlen im Allgemeinen - ausgehend von den Hochkulturen Mesopotamiens über den ägyptischen, griechischen, indischen, arabischen und schließlich mitteleuropäischen Raum in einer Zeitspanne von 4500 Jahren - untersucht.
Im mathematikphilosophischen Teil 2 („Das Fundament der Mathematik“) werden die wichtigsten Beiträge zu Arithmetik und Zahlbegriff derjenigen Mathematiker und Philosophen dargestellt, die sich ab Mitte des 19. Jahrhunderts p.Chr.n. bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts p.Chr.n. eingehend mit der Fundierung der Mathematik im Rahmen der Axiomatisierung und im Zuge der Grundlagenkrise auseinandergesetzt haben und deren Arbeiten teils bis heute den Status Quo in diesem Zweig der Philosophie bilden. Die Auswahl der Texte erfolgt primär nach dem Kriterium, ob sich diese explizit mit den natürlichen Zahlen beschäftigen und sekundär, ob sie sich auf die Null beziehen.
Im mathematischen Teil 3 („Verwendung der Null in den mathematischen Disziplinen“) wird untersucht, wie die Null in den beiden großen Strömungen der Mathematik, der Analysis und der Algebra, innerhalb der mathematischen Community Verwendung findet.
Ergänzend zu den reportativen Untersuchungen finden sich Abschnitte mit Zwecküberlegungen zum Zahlbegriff und der Verwendung der Null. Diese Überlegungen dienen methodisch dem

[1] Selbst, wenn man annimmt, dass die beiden Objekte die gleichen Essenzen (im aristotelischen Sinne) besäßen, stellt sich die Frage, warum es nicht genauso viele Essenzen wie Dinge geben könne. Die Wissenschaft folge laut Popper eg. via die Genetik bis heute der Lösung Platos auf diese Frage, viz. dass alle Dinge Kopien von gleichen Formen, resp. Ideen seien. (cf. Popper 1972, 195f.)

[2] cf. Carnap 1959, 12ff.

[3] Die Kriterien der Klarheit und Einfachheit des Explikats sind sowieso erfüllt, da es sich um mathematische Definitionen handelt. (cf. ibid., 15.)

Kriterium der Fruchtbarkeit der untersuchten Explikate. Sie sind am Ende eines jeden Teils noch einmal systematisch dargestellt.

In der nachfolgenden Arbeit werden - entgegen der Konvention das Erscheinungsjahr der Ausgabe, in denen die verwendeten Texte vorkommen, anzugeben - in den Fußnoten die Jahreszahlen angegeben, zu denen die entsprechenden Autoren erstmalig ihre Gedanken publizierten. Dies geschieht aus dem Grund, dass dem Leser hierdurch leichter eine zeitliche Einordnung der Texte der verschiedenen Autoren gelingt, zumal einige Inhalte chronologisch aufeinander aufbauen. Die genauen Angaben zu den verwendeten Ausgaben finden sich explizit im Literaturverzeichnis. Dieser Umstand ist vor allem im Teil 2 der Arbeit zu beachten.

# 1 Zur Geschichte der Null

## 1.1 Die Null bei den Sumerern und Babyloniern

Die Sumerer entwickelten nach heutigem Erkenntnisstand als erste Hochkultur überhaupt eine nennenswerte Mathematik mitsamt Zeichensystem. Sie siedelten um 3000 a.Chr.n. im Raum des heutigen Mesopotamiens.[4] Sie schrieben in Keilschrift auf Tontafeln und besaßen eine „verwirrende Verquickung des Dezimal- mit einem Sexagesimalsystem“.[5] Eine Null war ihnen nicht bekannt.
Kurz vor dem 18. Jahrhundert a.Chr.n. entwickelten die Babylonier, die die Sumerer um 2500 a.Chr.n. ablösten, eine Zahlschrift zu einem sexagesimalen Positionssystem. Die Nichtbesetzung einer Position wurde anfangs durch eine Lücke angedeutet, leere Endpositionen konnten so jedoch nicht kenntlich gemacht werden.[6] Im 3. Jahrhundert a.Chr.n. treten bei verschiedenen Quellen Zeichen zur Kenntlichmachung einer Leerstelle auf: Die Null als Platzhaltersymbol wurde erfunden.[7] Dieses Symbol galt jedoch nicht als eigenständige Zahl oder Menge, sondern tritt nur im Kontext des Positionssystems innerhalb einer Ziffernfolge auf.[8]

Die Null entstand in den frühesten Hochkulturen also als Zeichen aus dem einfachen Bedürfnis heraus, ein flexibles und mächtiges Notationssystem für Zahlen zu besitzen. Hierbei ähnelt diese Art von Null in keiner Weise dem späteren Begriff der Null: Die babylonische Null tritt ausschließlich als Platzhaltersymbol auf und nicht als eigenständige Zahl.

## 1.2 Die Null bei den Ägyptern

Die Ägypter besaßen ein umfangreiches Wissen an Mathematik, vor allem im Bereich der Geometrie, Astronomie und Zeitmessung. Nach den jährlichen Nilüberschwemmungen mussten Grundstücke und Ackergrenzen neu bemessen werden, weshalb die Trigonometrie die führende mathematische Disziplin wurde. Die meisten mathematischen Überlieferungen stammen aus der Zeit des mittleren Reiches (2060 bis 1580 a.Chr.n.).[9] Aus Sicht der meisten Autoren besaßen die Ägypter keinen Begriff von der Zahl Null. In der großen Schenkungsurkunde am Edfutempel (1. bis 2. Jahrhundert a.Chr.n.) taucht in einer Flächeninhaltsapproximation des

[4] cf. Kaplan 2006, 16.
[5] ibid., 17. Das Dezimalsystem könnte aus dem Zählen mit 10 Fingern entstanden sein, das Hexagesimalsystem könnte aus der Tatsache heraus enstanden sein, das die 60 sich besonders gut ohne Rest Teilen lässt (eg. durch 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, etc.).
[6] Neugebauer umreißt die Datierung der Erfindung der Null: „We feel sure that it did not exist, say, before 1500; and we find it in full use from 300 B.C. on.“ (Neugebauer 1957, 27.)
[7] cf. Seife 2002, 21; Ifrah 1992, 176 ff.
[8] Anstelle eines Zeichens für Null verwendeten die Babylonier Umschreibungen, wie: „20 minus 20 ... du weißt ja“ oder „Das Korn ist ausgegangen“. (Ifrah 1992, 180.)
[9] cf. Kaplan 2006, 26f. Die beiden bedeutendsten ägyptischen mathematischen Schriften sind der Moskauer Papyrus (ca. 1890 a.Chr.n.) und der Papyrus Rhind (ca. 1788 bis 1580 a.Chr.n.). Ersterer umfasst bei einer Länge von 5,44 x 0,08 Metern 25 Aufgaben des täglichen Lebens, letzterer 84 Aufgaben auf einer Fläche von 5,34 x 0.33 Metern.

Dreiecks „das Bildzeichen der Negation, die abwehrenden Hände“[10] auf.[11] Dieses Symbol ist aber grundsätzlich kein mathematisches Symbol, sondern tritt vornehmlich als Negationszeichen in nicht-mathematischen Texten auf.

Die Frage, ob die Ägypter eine Null kannten oder nicht hängt davon ab, ob man das Zeichen für die Negation mit der Null identifizieren möchte oder nicht. Die Ägypter besaßen innerhalb ihres Notationssystems für Zahlen kein Platzhaltersymbol und es existierte auch kein Zahlzeichen „0“, mit dem sich rechnen ließe. Da sich die übrigen Zahlen ab der Eins nicht mit einzelnen logischen Symbolen identifizieren lassen, wäre eine Identifizierung der Null mit dem logischen Symbol der Negation eine klares Ausschlusskriterium für die Null von den natürlichen Zahlen.

## 1.3 Die Null in der griechischen Mathematik

Die Hauptvertreter der griechischen Mathematik sind Pythagoras, Euklid und Diophant. Allen war die 0 als Zahl unbekannt.[12] Lediglich in einigen wenigen astronomischen Texten tauchte das Symbol O auf, jedoch nicht als eigenständiges Zahlzeichen.[13] Pythagoras und Euklid beschäftigten sich besonders mit der Geometrie und Diophant mag als erster Algebraiker gelten.

### 1.3.1 Pythagoras

Von Pythagoras (ca. 570 a.Chr.n. bis nach 510 a.Chr.n.) selbst sind keine Schriften erhalten, die Lehre seiner Schule wird jedoch bei Autoren wie eg. Aristoteles wiedergegeben. In diesen externen Quellen gibt es eine starke Vermischung von pythagoreischer und platonischer Lehre, weshalb diese Autoren mit besonderem philologischen Scharfsinn zu lesen und interpretieren sind.[14] Dennoch lässt sich die Zahlenlehre Pythagoras’ im Wesentlichen rekonstruieren.
Die Methaphysik des Aristoteles lässt darauf schließen, dass für die Pythagoreer „die Zahlen mit der sinnlich wahrnehmbaren Wirklichkeit zusammen[fallen].“[15] Für die Pythagoreer ist „der Urstoff, aus dem alles geworden ist und noch immer besteht“[16] die Zahl. Das Erkennen von Analogien, resp. Strukturen in der Welt mag zu der Anschauung geführt haben, zwischen allem bestünde eine Harmonie und diese ließe sich durch Zahlverhältnisse wiedergeben.[17] So legten die Pythagoreer jeder Zahl eine Fülle von besonderen Bedeutungen bei. Eg. wurde die Vierheit[18] besonders verehrt, denn ihre Summe ergibt die vollkommene Zahl 10 und „die konsonanten Intervalle Oktave, Quinte und Quarte“[19] sind in ihr enthalten. Dererlei numerologisch-mystische und naturwissenschaftliche Interpretationen machen deutlich, welchen Stellenwert die Zahl bei den Pythagoreern hat. Sie hielten die Zahlen für „das Erste aller seienden Dinge.“[20] Die Zahl bestünde aus Elementen, dem Geraden und Ungeraden, wobei diese beiden Prinzipien in der

---

[10] Vogel 1958, 66.
[11] Kurt Vogel geht sogar soweit zu behaupten, hier werde bereits mit der Null gerechnet. Die Rechnung besteht in diesem Falle jedoch lediglich aus der Unterlassung einer Addition. Vogel sagt aus: „Es ist kein Zweifel, dass hier mit der ‚Null‘ bereits gerechnet wird!“ (ibid., 66.)
[12] cf. Wells 1990, 21. Die Griechen behandelten Grenzwerte und sehr kleine Größen, „hatten [...] dennoch keinen Begriff von ‚einer Größe, die gegen Null strebt‘“. (ibid.)
[13] cf. Kaplan 2006, 30.
[14] cf. Riedweg 2002, 37ff.
[15] ibid., 39; nach Metaph. A 6, 987b und Metaph. 8, 1083b17
[16] ibid., 108.
[17] cf. Arist. Metaph. 985b27-986a6.
[18] teraktýs, die Reihe der ersten vier Zahlen.
[19] Riedweg 2002, 111.
[20] ibid., 113.

Eins vereint seien.[21] Man könnte das pythagoreische Programm auch als ein modernes Programm der Metrisierung verstehen: Alles ist durch Mathematik via die Zahlen beschreibbar.

Eine Null wird im Kontext der pythagoreischen Zahlenphilosophie nicht erwähnt. Die Null stünde wohl auch diametral im Gegensatz zur Annahme, dass die Zahl Urstoff alles Seienden ist und die Eins sämtliche Prinzipien des Kosmos' in sich vereint. Die Pythagoreische Lehre geht von einem „Etwas“ in der Welt aus und die direkte Identifikation der Zahlen mit den körperlichen Gegenständen lässt eine Null nicht zu, denn die leere Menge ist nicht greifbar. Für den Ansatz alles Seiende in der Welt mit Zahlen beschreiben zu wollen, also für eine vollständige Metrisierung, ist aus diesem Grunde eine Null nicht notwendig.

### 1.3.2 Euklid

Euklid beschäftigte sich in seinem wichtigsten Werk, den „Elementen“, in der Hauptsache mit der Geometrie.[22] In den Büchern VII bis IX widmet er sich zusätzlich der Zahlentheorie und gibt grundlegende Definitionen zum Einheiten- und Zahlbegriff. Demnach ist eine Einheit „das, wonach jedes Ding eines genannt wird“[23] und „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.“[24] Bei dieser Definition bleibt offen, ob die **1** selbst eine Zahl ist, oder lediglich eine Einheit und ob für den Begriff der Zahl der Begriff der Vielheit, also eine Menge mit mindestens zwei Elementen, vorausgesetzt werden muss.
Seine Betrachtung der Zahlen entspringt der geometrischen Auffassung der Proportionen. Die Einheit visualisiert Euklid als Strecke, Zahlenverhältnisse erläutert er vollkommen analog zu Streckenverhältnissen. E.g. ähneln sich die Beweise der Propositionen VII, § 2[25] und X, § 3[26] bis ins Detail. In beiden Fällen soll der größte gemeinsame Teiler (ggT) einerseits zweier Zahlen, welche gemeinsame Primfaktoren besitzen und andererseits zweier Strecken, welche von gemeinsamen Vielfachen der Einheit restlos geteilt werden, gefunden werden. Euklid gibt einen konstruktiven Beweis in Form eines Algorithmus an. Man könnte sogar soweit gehen zu behaupten, Euklid verfolge bei diesen beiden Beweisen den exakt gleichen mathematischen Gedanken und entwickelt diese in zwei unterschiedlichen Kategorien. Euklids Zahlbegriff leitet sich direkt aus der geometrischen Anschauung ab. Es bleibt zu diskutieren, ob er die **1** als Zahl sieht oder nicht, die Null hingegen lässt sich vollkommen von seinen Gedanken ausnehmen.

Euklid betrachtet als Geometer nur das Verhältnis paarweise verschiedene Objekte. Er verwendet für den Vergleich von zwei oder mehr Objekten die Abstandsrelation zwischen diesen Objekten. Da zwei voneinander verschiedene Objekte in einem Raum, versehen mit der (euklidschen) Standardmetrik, stets einen positiven Abstand haben, benötigt er keine Null zur Beschreibung seiner mathematischen Überlegungen.

[21] cf. Arist. Metaph. 985b25-986a2.
[22] Das Werk gilt seit über 2000 Jahren als Standardwerk der elementaren Geometrie.
[23] Thaer 1962, 141.
[24] ibid.
[25] cf. ibid., 143f.
[26] cf. ibid., 215f.

### 1.3.3 Diophant

Diophant lebte vermutlich um die Mitte des 3. Jahrhunderts p.Chr.n. in Alexandria.[27] Seine in Fragmenten überlieferten Werke sind die Arithmetika, eine Schrift über Polygonalzahlen und eine über Porismata.[28] In seiner Arithmetik verwendet er bei Berechnungen positive sowie negative rationale Zahlen. Als Lösungsmenge akzeptiert er jedoch nur positive rationale Ergebnisse.[29] Einen Begriff von der Null besitzt er nicht,[30] obgleich er das konstante Glied, also die nullte Potenz $x^0$ mit $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$ für μόνας (Einheit) bezeichnet.[31] Robert Kaplan zufolge bezeichnet dieser Ausdruck ein Trennsymbol für Zehntausender, $\overset{\circ}{\mu}$ sei zuvor von Astronomen als Symbol für Grad (μοῖρα) verwendet worden.[32] Interesssant ist, dass der von Diophant verwendete Zahlbereich $\mathbb{Q}^{\times}$, die rationalen Zahlen unter Ausnahme der Null als neutralem Element der Addition, unter den Grundrechenoperationen, also auch der Division, abgeschlossen ist. Die Elemenete des Zahlbereichs $\mathbb{Q}^{+}$, die positiven rationalen Zahlen, bezeichnet Diophant als *mögliche* Zahlen (ἀριθμοὶ δυνατοί).[33]

Da Diophant nur spezielle Gleichungen untersuchte und definitorisch über den Begriff der „möglichen Zahlen“ nur positive rationale Lösungen zuließ, benötigt er keine Null zur Beschreibung seiner Mathematik. Das Symbol hat $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$, beziehungsweise das in ihm enthaltene °, besitzt lediglich optische Ähnlichkeit mit unserer heutigen 0.

## 1.4 Die Null bei den Indern und Arabern

Die Null war fester Bestandteil der indischen Arithmetik ab dem 7. Jahrhundert p.Chr.n.[34] Die Inder entwickelten ein dezimales Positionensystem, welches noch heute gebräuchlich ist. In Texten wird die Null entweder durch die Wörter „śūnya“[35] (leer, abweisend) oder „kha“[36] (Loch, Öffnung, Höhle, Luft, Himmel, Leere) ausgedrückt,[37] oder in Zeichen durch einen Punkt oder Kreis.[38]

[27] cf. Bašmakova 1974, 13f. Mit Sicherheit lässt sich sagen, dass er zwischen dem 2. Jahrhundert a.Chr. und dem 4. Jahrhundert p.Chr.n. gelebt haben muss, denn Diophant „erwähnt [...] mehrmals den Mathematiker Hypsikles von Alexandria, der um die Mitte des 2. Jahrhunderts v. u.Z. lebte“ und wird selbst von Theon angeführt, der „um die Mitte des 4. Jahrhunderts“ lebte. Eine genauere Lebensdatierung Diophants wird nur unter Annahme der Hypothese möglich, er habe zu Zeiten Anatolius’ gelebt, welcher „um die Mitte des 3. Jahrhunderts u. Z., mindestens bis 270“ in Alexandria lebte.
Näheres zur Diophant-Forschung findet sich bei Tannery 1893.

[28] Von den dreizehn Büchern der Arithmetica sind sechs erhalten. Die fehlenden Bücher sind wahrscheinlich nach dem ersten Buch einzuordnen. cf. Büchel 1905, 12.

[29] cf. Unger 1843, 22f.

[30] cf. Büchel 1905, 17. Aufgrund des Fehlens einer Null lassen sich Gleichungen wie $(x-4)^2 = 0$ nicht aufstellen, „wie er aber die Gleichungen löst, darüber lassen sich nur Vermutungen aufstellen.“ (ibid.)

[31] cf. Bašmakova 1974, 19.

[32] cf. Kaplan 2006, 28. Das Symbol ° hat sich bis heute als Zeichen für Grad in Physik und Mathematik erhalten.

[33] Unger 1843, 22f. Unger stellt Diophants Lösungselemente unserem heutigen Zahlbegriff gegenüber: „Diophant stellt [...] die beschränkende Bedingung, daß *mögliche Werte aufgefunden werden sollen*, wobei jedoch nicht übersehen werden darf, daß sein Begriff der Möglichkeit nicht übereinstimmt mit dem, was wir reel nennen; denn er zählt die negativen und irrationalen Zahlen eben so, wie die imaginären, zu den unmöglichen Größen. Er verlangt also in allen Fällen, daß positive rationale [...] Zahlen aufgefunden werden sollen.“ (ibid.)

[34] cf. Wußing 1979, 98.

[35] Tropfke 1980, 16. Das Wort sunya tritt bereits 505 p.Chr.n. bei Varahamihira auf. (cf. ibid.)

[36] ibid.

[37] ibid.

[38] cf. Gericke 1970, 47. Wußing nennt die Vermutung, dass die indischen Astronomen das babylonische Lückenzeichen gekannt haben könnten. (cf. Wußing 1979, 98.)

Hier tritt das erste Mal die Null sowohl in Form einer eigenständigen Zahl, mit der gerechnet werden kann, als auch einer Ziffer, die im indischen Dezimalsystem die Rolle eines Platzhaltersymbols übernimmt, auf. Die Benennung der Null mit den indischen Wörtern für „leer“ oder „Loch“ deutet zudem auf ihren Aspekt der Negation hin, viz. dass mit ihr ein Zustand oder ein Ort beschrieben wird, der frei von jeglichem Seienden ist.

Die Araber übernahmen das indische Dezimalsystem ab dem 8. Jahhundert p.Chr.n. Das indische Wort śūnya für Null wurde durch das arabische al-ṡifr übersetzt, was soviel wie „Leere“[39] bedeutet. Die genaue Ausbreitung der indischen Ziffern im arabischen Raum lässt sich schwer rekonstruieren. Ab dem 10. Jahrhundert p.Chr.n. enstanden die ostarabischen Ziffern, die in ähnlicher Form bis heute in den arabischen Ländern erhalten sind.[40] Die Null wurde auch hier als Punkt oder Kreis dargestellt.[41]
Das arabische al-ṡifr wurde zu τζίφρα[42] gräzisiert, resp. zu ciffra, cifra, zephirum oder sciffula latinisiert.[43] Die arabischen Ziffern wurden allmählich in der abendländischen Mathematik gebräuchlich. Wenngleich die westarabische Mathematik nicht das Niveau der ostarabischen besaß, war sie hauptsächlich für die Übermittlung der griechischen, indischen und arabischen Mathematik nach Europa verantwortlich.[44]

## 1.5 Die Null in der abendländischen Mathematik

Bis ins 11. Jahrhundert hinein war die Wissenschaft, speziell auch die Mathematik, in Europa auf einem sehr niedrigen Niveau.[45] Über die iberische Halbinsel gelangten vermehrt Überlieferungen arabischer und griechischer Mathematik nach Europa. 999 wurde Sylvester II. zum Papst gewählt. Er besaß ein großes Interesse an der Mathematik und ihm waren auch die arabischen Ziffern aus Spanien bekannt. Er beschriftete mit ihnen seine Abacus-Rechensteine.[46]
Allgemein sorgte die Berührung der arabischen und europäischen Kultur auf der iberischen Halbinsel für ein Voranschreiten der abendländischen Wissenschaften: In Toledo wurde Mitte des 12. Jahrhunderts ein Institut eingerichtet, in welchem die ersten großen Übersetzungen aus dem Arabischen und Hebräischen ins Lateinische und Spanische angefertigt wurden.[47]
Seit dem 12. Jhd. wurden mächtige italienische Handelsstädte wie Genua, Pisa, Venedig, Florenz und Mailand Hauptaustauschplatz zwischen Orient und Okzident. Leonardo Fibonacci von Pisa verfasste 1202 sein berühmtes Werk „Liber Abbaci“, in welchem er das Ziffernrechnen thematisiert.[48] Der Name „Null“ für 0 lässt sich als erstes 1484 in einem italienischen Rechenbuch finden. [49] Durch Handel und Ausbildung von internationalen Kaufleuten in Zentren wie

[39] Tropfke 1980, 17.
[40] cf. Wußing 1979, 104.
[41] cf. Tropfke 1980, 53.
[42] Durch den byzantinischen Mönch Maximos Planudes. cf. ibid., 17.
[43] cf. ibid., 17.
[44] cf. Wußing 1979, 101.
[45] Wußing vertritt die These, dies läge daran, dass zum einen ab dem 5. Jhd. das Dorf Zentrum der Wirtschaft wurde und zum anderen seit den Kirchenvätern der Glaube das Wissen als Episteme ablöste. cf. ibid., 107.
[46] cf. ibid., 109.
[47] cf. Hofmann 1963, 85f. Damit wurde Toledo gar ein wichtigeres Gelehrtenzentrum als Cordoba. cf. Struik 1948, 102; Lietzmann 1926, 8.
[48] cf. Wußing 1979, 109f. Sein Werk gliedert sich in 15 Kapitel, im ersten stellt er die Ziffern absteigend von 9 bis 1 vor und nimmt die Null, dargestellt als kleines o hinzu. Nouem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1 | Cum his itaque nouem figuris, et cum hoc signo o, quod arabice zephirum appelatur, [...]."[„Die neun Zeichen der Inder sind 9 8 7 6 5 4 3 2 1 | Mit diesen hat man daher neun Zeichen, und mit dem Zeichen: o, welches auf Arabisch zephirum (Ziffer) heißt, [...]“, Übers. d. Verf.]. (Fibonacci 1202, 2.)
[49] cf. Menninger 1979, 217.

Venedig wurden die indischen Ziffern schnell in das übrige Europa getragen.[50]

Aus diesem kulturgeschichtlichen Teil sind folgende Fakten zur Null festzuhalten: Bei den frühesten untersuchten Hochkulturen, den Sumerern, frühen Babyloniern (um 3000 a.Chr.n. bis circa 1500 a.Chr.n.) und alten Ägyptern (Blütezeit derer Mathematik: Mittleres Reich, um 2000 a.Chr.n. bis circa 1500 a. Chr.n.), war eine Null unseres Wissens nach in keiner Weise bekannt. Erst die Entwicklung des babylonischen Zahlzeichensystems ließ aus der Notwendigkeit der Kenntlichmachung des Sprungs von einer Basis zur nächsten ein reines Platzhaltersymbol entstehen (nach 1500 a.Chr.n., jedoch vor 200 a.Chr.n.), noch nicht jedoch eine Null als eigenständige Zahl. In der ägyptischen Mathematik, die vor allem dem praktischen Aspekt der Landvermessung diente, taucht nur an einer einzigen bekannten Stelle sehr spät (circa im 1. oder 2. Jahrhundert a.Chr.n., also weit nach der Blütezeit Ägyptens) in einem Text zur Geometrie das Symbol für die Negation als eine Art von Null auf. Von einer Null als eigenständiges Symbol oder Zahl ist hier nicht zu sprechen. Die Hauptvertreter der griechischen Mathematik – Pythagoras mit seinem Metrisierungsprogramm, Euklid mit seiner Geometrie und Diophant mit seiner definitorisch auf positiv-rationale Lösungsmengen eingeschränkten Algebra – kannten keine Null und benötigten sie für ihre Form der Mathematik auch nicht.
Erst die Inder verwendeten ab dem 6. oder 7. Jahrhundert p.Chr.n. – also über 2000 Jahre nach der Erfindung des babylonischen Zahlzeichensystems – eine Null sowohl im Sinne eines Platzhaltersymbols, als auch einer Zahl, mit der sich rechnen lässt, und betonen den Negationsaspekt der Null durch ihre Benennung mit den indischen Wörtern für „leer“ oder „Loch“. Das mächtige und einfache indische Ziffernsystem war und ist äußerst erfolgreich und eroberte über die Araber (ab dem 10. Jahrhundert p.Chr.n.) die gesamte abendländische Mathematik. Vor allem von den italienischen Handelsstädten des 12. Jahrhunderts ausgehend wurden die arabischen Ziffern mitsamt Null von Kaufleuten im übrigen Europa verbreitet.

50 Durch dieses Ausbildungssystem gelangten auch die noch heutigen gebräuchlichen Bankiers-Begriffe wie Konto, Skonto und Bankrott in unseren Sprachraum. (cf. ibid., 245ff.)

# 2 Das Fundament der Mathematik

Ab Mitte des 19. Jahrhunderts begannen Mathematiker die Grundlagen der Mathematik und somit auch den Zahlbegriff näher zu erforschen. Erste Ansätze finden sich bei **Bernhard Bolzano**, **Hermann von Helmholtz** und **Leopold Kronecker**. Die mathematischen Grundlagen zur Axiomatisierung der Arithmetik schufen **Richard Dedekind** und **Giuseppe Peano**, wobei sich Dedekind vor allem mit dem Zahlbegriff und der Konstruktion reeler Zahlen beschäftigte, indessen Peano einen formalen mathematischen Kalkül ersann. Den Durchbruch erwirkte jedoch **Georg Cantor** mit seiner Begründung der modernen Mengenlehre und der Schöpfung des modernen Ordinalzahlbegriffs.
**Gottlob Frege** entwickelte die axiomatische Fundierung der Mathematik auf Grundlage der Logik in seinen Grundgesetzen der Arithmetik weiter. Alsbald wurde jedoch ein Widerspruch in seinem System abgeleitet: Die Russellsche Antinomie. Zu deren Vermeidung wurden verschiedene Theorien entwickelt:
**Bertrand Russell** ersann seine Typentheorie als Fundierung der Mengenlehre: Sie ist auf hierarchische Stufen von Mengen und Objekten ausgelegt und wird in dem umfangreichen Werk Principia Mathematika ausgebreitet. **Frank Zermelo** entwickelte das heute am meisten verwendete Axiomensystem ZFC (Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem mit Axion of Choice). Ein weiteres System wurde von **Paul Bernays** und **Kurt Gödel** entwickelt: Die Klassen-Mengen-Lehre NBG (von Neumann-Bernays-Gödelsches System) in dem neben Mengen auch echte Klassen auftreten.
Alle obigen Theorien zielen erst darauf ab den Mengenbegriff (und so auch Zahlbegriff), sowie die einfachsten logischen Schlussweisen zu klären, also die grundlegendsten Objekte und Operationen darzustellen.
Bei der Definition der natürlichen Zahlen kommen zwei verschiedene Aspekte des Zahlbegriffs zu tragen: Manche Autoren legen mehr Wert auf die Identifizierung der Zahlen mit Anzahlen von Mengenobjekten und sehen die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen an, andere legen ihr Augenmerk vermehrt auf die (archimedische) Zahleneigenschaft der eindeutigen Anordnung und betrachten die Objekte von $\mathbb{N}$ als Ordinalzahlen. Je nach Auffassung tendieren die Autoren eher zur Annahme, Null sei oder sei keine natürliche Zahl.
Im Folgenden werden die historische und inhaltliche Entwicklung der Fundierung der Mengenlehre durch die genannten Hauptacteure geschildert und deren Auffassung des natürlichen Zahlbegriffs und ihre Einstellung zur Null erläutert.

## 2.1 Bernhard Bolzano (1781 - 1848)

Bolzano definiert in seinen „Paradoxien des Unendlichen“, welche er bereits 1847 begann, die Null zunächst als Zeichen des Ergebnisses der inversen Addition[51]

$$A - A = 0 \tag{i}$$

und als neutrales Element der Addition, resp. Subtraktion:[52]

$$A \pm 0 = A. \tag{ii}$$

Der Null schreibt er nicht die Eigenschaft einer „wirklichen Größe“ zu, sondern lediglich die Kenntlichmachung der Abwesenheit einer solchen im ersten Fall und das Unterlassen einer Operation im zweiten Falle. So wird in (i) der Begriff der Null als (Nicht-)Entität bestimmt und in (ii) der Begriff der (algebraischen) Summation erweitert. Die Multiplikation wird um

$$0 \times A = A \times 0 = 0 \tag{iii}$$

erweitert.[53] Problematisch wird es bei der Division, also der inversen Multiplikation, da

$$B \times (A/B) = (A/B) \times B = A \tag{iv}$$

nur für alle B ungleich Null gilt,[54] in anderen Worten: mit Null darf nicht erweitert werden, resp. darf Null nie Divisor sein. Andernfalls könne man die Gleichheit zweier differenter Zahlen beweisen, resp. die Gleichheit zweier beliebiger ungleicher Mengen. Bolzano weist darauf hin, dass unendlich kleine Größen[55] unter keinen Umständen im Allgemeinen einfach weggelassen werden dürfen. Damit widerspricht er Eulers und Leibniz' Auffassung, $1/\infty$ sei eine bloße Null und $1/0$ ergebe $\infty$.[56]

Bolzano gibt hier also nur eine kontextuelle Definition der Null: Er definiert – im Gegensatz eg. zu Giuseppe Peano – erst algebraische Rechenoperationen und dann die Null aus der Notwendigkeit einer Kenntlichmachung eg. der Differenz zweier gleicher Objekte und nicht erst die Null und hierauf rekursiv aufbauend die natürlichen Zahlen, wie bei anderen Autoren der Fall.

Bereits in der ersten Hälfte der 1830er Jahre definiert Bolzano Zahlen als Glieder einer Reihe, die mit einer Einheit beginnt, zu der weitere Einheiten derselben Art addiert werden. Die Zahlenreihe sieht er durch die zu zählende gleichbleibende Eigenschaft aller Einheiten spezifiziert.[57] Bolzano unterscheidet „wirkliche“[58] und „eingebildete“[59] Zahlen – unter letzteren auch die Null, – erstere teilt er auf in „abstracte Zahlen“[60] und „concrete Zahlen“[61]. Die abstracten Zahlen

[51] Formel aus: Bolzano 1847, 56.
[52] Formel aus: ibid.
[53] Formel aus: ibid., 57
[54] Formel aus: ibid.
[55] Heutzutage wird eine unendlich kleine Größe meist mit $\varepsilon$ bezeichnet, der sogenannte „Epsilontik“-Kalkül ist ein nützliches Werkzeug für viele konstruktivistische Definitionen wie die der Cauchyfolge, welche zum Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{R}$ führt oder gewisse Beweise, e.g. den $\varepsilon/3$ -Beweis. Auch die Infinitesimalrechnung basiert e.g. beim Differenzenquotienten $[f(x) - f(x+\varepsilon)]/\varepsilon$ auf der Annahme unendlich kleiner Größen ungleich Null.
[56] cf. Bolzano 1847, 60f.
[57] cf. Bolzano 183?, 15.
[58] ibid., 22. Bolzano bezeichnet als wirkliche Zahlen diejenigen, welche sich aus dem Zählen von Einheiten ergeben; eingebildete Zahlen sind für ihn „Zahlausdrücke“ (ibid.) wie e.g. 0, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$. (cf. ibid.)
[59] ibid.
[60] ibid., 15.
[61] ibid.

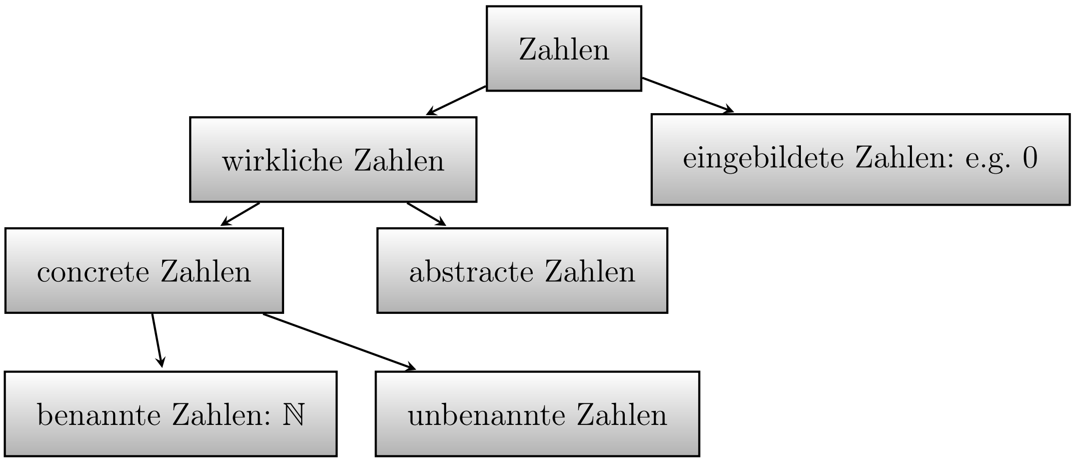


Abbildung 2.1: Bolzanos Zahlenmodell

sind unabhängig von den zu zählenden Gegenständen, sie bezeichnen sozusagen die „Zahlen an sich“,[62] die concreten Zahlen bezeichnen die Anzahl von bestimmten Einheiten.[63] Letztere nennt Bolzano die natürlichen Zahlen.[64] Er führt weitere Gegensatzpaare bei der Bezeichnung von Zahlen an: Die concreten Zahlen teilt er noch auf in unbenannte und benannte Zahlen.[65] Nur die unbenannten Zahlen sind Gegenstand seiner Zahlenlehre. Die Eins als Einheit nimmt er jedoch von diesen aus und zählt nur „wirkliche Mengen“[66], also Zahlen $\geq 2$, hinzu. Der Begriff der Zahl ist für Bolzano unzeitlich, er sieht gerade die abstracten Zahlen somit als absolut und unabhängig von Gegenständen sowie „unserm Erkenntnisvermögen“[67].[68] Interessant ist Bolzanos stark an Frege erinnernde Terminologie: 50 Jahre vor diesem schrieb er, „daß die Null ein bloßer Zahlenbegriff [i.e. eine eingebildete Zahl, Anm. d. Verf.] und zwar ein solcher ist, der gar keinen Gegenstand hat“[69]. Die Definition der natürlichen Zahlen charakterisiert Bolzano ähnlich wie Peano: Eins, Eindeutigkeit, und Nachfolge umschreibt er,[70] eine jede concrete Zahl außer Eins besteht aus endlich vielen Einheiten, die selbst wieder aus endlich vielen Einheiten bestehen können – welch dedekindscher Gedanke![71]

62 Hier drückt sich Bolzano etwas undeutlich aus: Als abstracte Zahl bezeichnet er die „Beschaffenheit, vermöge deren ein jedes dieser Glieder zu einer Zahl wird die es somit behält, wie auch die Gegenstände selbst, die man zu Einheiten annimmt, gewechselt werden mögen“ (ibid.). Vermutlich geht Bolzano von der Existenz einer von Gegenständen unabhängigen Zahlenreihe aus. Bolzano könnte hier die Idee der Zahlenklassen vorweggenommen haben; Jan Berg bemerkt hierzu eine „abstrakte Zahl bezüglich A, die einer konkreten Zahl N bezüglich A entspricht, ist somit eine Beschaffenheit, deren Extension die Menge aller mit N isomorphen konkreten Zahlen bezüglich A ist.“ (Berg 1976, in: Bolzano 183?, 15) Dies entspricht der Aussage, abstracte Zahlen seien Isomorphieklassen bezüglich einer Eigenschaft A.

63 cf. Bolzano 183?, 20.

64 cf. ibid., 15.

65 Erstere bezeichnen Zahlangaben ohne hinzugesetztes gezähltes Objekt(wort), die aber dennoch auf eine konkrete zu zählende Menge bezogen sind, eg. „drei ...“; letztere meinen Zahlangaben mit Objet(wort), eg. „drei Punkte“. (cf. ibid., 23.)

66 ibid., 18.

67 ibid., 30.

68 cf. ibid., 27. Bolzano kritisiert hier eine Position Kants, demnach der Zahlbegriff in Verbindung mit der Zeit zu verstehen sei: „Arithmetik bringt selbst ihre Zahlbegriffe durch successive Hinzusetzung der Einheiten in der Zeit zu Stande, [...].“ (Kant 1783, 53.) Auch Helmholtz kritisiert diese kantianische Sichtweise (cf. 2.2).

69 Bolzano 183?, 22. Die dieses Zitat beinhaltende Bemerkung wurde von Bolzano im Manuskript durchgestrichen, die Begrifflichkeit wird im Weiteren jedoch beibehalten. Jan Berg weist in seiner Einleitung ebenfalls auf die Parallelen zwischen Bolzano und Frege hin, nur dass Bolzano viel früher als letzterer wirkte. (cf. Berg 1976, 8; in: Bolzano 183?)

70 cf. Bolzano 183?, 32ff. Zu Peano cf. 2.4.

71 ibid., 35f. Zu Dedekind cf. 2.3.

## 2.2 Hermann von Helmholtz (1821 - 1894)

Helmholtz kritisiert in seinem Aufsatz „Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet" zunächst die Sichtweise der Kantianer, viz. die Axiome der Arithmetik seien a priori gegebene Sätze. Sie sollen aus derer Sicht die „transzedentale Anschauung der Zeit"[72] in gleicher Weise bestimmen, wie die Axiome der Geometrie den Raum. Helmholtz vetritt die Meinung, die Axiome der Geometrie würden durch Erfahrung entweder bestätigt oder widerlegt, sie seien also keine a priorischen Sätze. Seine empiristische Sicht veranlasst ihn dazu neben den geometrischen auch die arithmetischen Axiome zu untersuchen. Ob er selbst die arithmetischen Axiome mit Zeit in Verbindung bringt oder nicht, bleibt offen, er sieht die Zeitfolge jedoch als „unausweichliche Anschauung unserer inneren Anschauung"[73], also muss geklärt werden, inwieweit die Arithmetik subjektiver oder objektiver Natur ist.[74]
Die früheren Arithmetiker reduzierten den Zahlbegriff stets auf den Begriff der Anzahl, betrachteten also lediglich Kardinalzahlen und ließen die Reihenfolge des Zählens außer Acht. Helmholtz indessen sieht die Arithmetik als psychologische Methode: Die natürlichen Zahlen[75] behandelt er als bloße Zeichen, auf denen konsistente Rechenoperationen ausgeführt werden. Es stellt sich ihm die Frage, inwiefern sich dieses Zeichensystem auf reale Objekte übertragen lässt, also wann zwei Objekte in gewisser Weise gleich sind und unter derselben Größe zusammengefasst werden dürfen und welche physische Entsprechung die Addition hat.[76] Zahlen sieht Helmholtz nämlich aus Einheiten additiv zusammengesetzt und sucht ein entsprechendes Analogon zwischen den physischen Objekten.
Das Zählen sieht er als zeitliches Verfahren, durch welches die Reihenfolge von Bewusstseinsakten gemerkt wird – unabhängig von Zahlzeichen. Das „angeblich ‚Natürliche'"[77] an der von Helmholtz als „gesetzmäßig"[78] bezeichneten Zahlenreihe $\mathbb{N}$ ist seiner Meinung nach nur auf das Feststellen von Anzahlen zu beziehen, bezeichnet also den kardinalen Zahlenaspekt. Er identifiziert diese natürliche Zahlenreihe mit den positiven ganzen Zahlen. Die uns eingeprägte Zahlenreihe des Gedächtnisses, mit der Geschehnisse in einer Reihenfolge erinnert werden sieht er als „Ordnungszahlen"[79] an.[80]
Helmholtz unterscheidet also zwei Aspekte der natürlichen Zahlen: Zum einen den objektiven (kardinalen) Aspekt der Anzahl, zum anderen den Subjektiven (ordinalen) Aspekt des Erinnerns einer Reihenfolge. Die Null zählt für ihn nicht zu den (kardinalen) natürlichen Zahlen. Die Eins bezeichne das Glied der Zahlenreihe, bei dem begonnen wird. Hierdurch werden induktiv durch Nachfolgefunktion und archimedisches Axiom alle Zahlen gebildet. Ein beliebiges Element dieser natürlichen (gegebenen) Zahlenreihe lässt sich wiederum als Eins festhalten und von dort aus lassen sich die folgenden Elemente durchnummerieren, ihrer Ordnung gemäß.[81] Diese

---

[72] Helmholtz 1887, 70.
[73] ibid., 74.
[74] cf. ibid., 73f. Der Editor Paul Hertz hält es für falsch die arithemtischen Axiome mit der Zeit in Verbindung zu setzen, da diese auch auf gleichzeitige oder unzeitliche Gegenstände anwendbar sind. Er schließt, dass die arithemtischen Axiome allgemeinerer Natur sind als die geometrischen. Diese Sicht decke sich auch mit Helmholtz' Theorie des Empirismus. (cf. Hertz 1921, in: Helmholtz 1887, 98.)
[75] Helmholtz bezeichnet die natürlichen Zahlen als „reine Zahlen". (Helmholtz 1887, 72.)
[76] Hertz kommentiert, das Zählen sei ein rein psychisch realisierter Akt – im Gegensatz zur objektiven Geometrie von Gegenständen – und es benötige keine physische Realisation, da auch abstrakte Begriffe gezählt werden können. Dennoch „ist das Psychische in Bezug auf die arithmetischen Axiome dem Physischen vollkommen koordiniert und kommt nur als Objekt unseres Erkennens in Frage." (Hertz 1921, in: Helmholtz 1887, 99.) Die Axiome entsprängen demnach nicht rein der Psyche, sondern seien eine allgemeine Wahrheit in Objekten und erkennendem Subjekt. Hertz behauptet, Helmholtz hätte ebenfalls diese Sichtweise vertreten. (cf. ibid.)
[77] Helmholtz 1887, 73.
[78] ibid.
[79] ibid.
[80] cf. ibid.
[81] Helmholtz bezeichnet diesen Vorgang als „Zählen der Zahlen". (ibid., 75.)

Elemente identifiziert Helmholtz mit unseren subjektiven Vorstellungen, für diese ist demnach nicht das Absolute einer Anzahlbestimmung, sondern die Reihenfolge, in der sie auftreten, entscheidend.[82] Die Ordinalzahlen lässt er ebenso wie die Kardinalzahlen mit der Eins beginnen, die Null ist für ihn also in jedwedem Aspekt kein Element der natürlichen Zahlenreihe.
Hiernach entwickelt Helmholtz den Begriff der Anzahl; die Kardinalzahlen werden also aus den Ordinalzahlen entwickelt.[83] Die Anzahl der Elemente einer Gruppe ist diejenige Ordnungszahl, die mindestens benötigt wird, um jedes Element eineindeutig zu zählen – unbeachtet der Reihenfolge. Algebraisch gesprochen sieht Helmholtz also die Anzahl[84] als kanonische Projektion der Gruppe auf eine bestimmte Äquivalenzklasse, welche aufsteigend bijektiv der Mächtigkeit jeder möglichen abzählbaren Gruppe zugeordnet ist.[85] Die Elemente dieser Gruppen müssen gewissen Kriterien genügen um im obigen Sinne zählbar, also Einheiten, zu sein: „Sie dürfen nicht verschwinden, oder mit anderen verschmelzen, es darf keines sich in zwei teilen, kein neues hinzukommen“[86], die Gruppen und deren Elemente müssen also eindeutig bestimmt sein. Aus dieser Aufzählung folgt, dass Helmholtz die leere Menge nicht für zählbar hält, falls er sie überhaupt betrachtet, da sie ja nur aus einem verschwindenden Element „besteht“. Demnach wäre sie unter kardinalem Gesichtspunkt keine Entität, da nicht mit der natürlichen Kardinalzahlenreihe verknüpfbar. Die Null führt er in der Theorie der Subtraktion als Vorgängerzahl der Eins ein und stellt sie auf eine Stufe mit den negativen Zahlen, die er ebenfalls subtraktiv definiert.[87]
Für die Axiomatisierung und Charakterisierung der natürlichen Kardinal- und Ordinalzahlen bezieht er sich jedoch ausschließlich auf die Begriffe des Zählens (ab Eins) und die induktive Methode der Nachfolgefunktion. Demnach rechnet Helmholtz die Null eindeutig nicht zu $\mathbb{N}$.

[82] cf. ibid.
[83] cf. Hertz 1921, in: Helmholtz 1887, 99f.
[84] Helmholtz bezeichnet die Anzahl auch als „benannte Zahl“ (Helmholtz 1887, 84.) und die Eigenschaft der Menge unter der sich bestimmte Einheiten zusammenfassen lassen als „Bennenung der Zahl“. (ibid.).
[85] Helmholtz verwendet hier den Begriff der Gruppe, aus heutiger mengentheoretischer Sicht würden man den Begriff Menge bevorzugen. Beide Begriffe sind inhaltlich synonym aufzufassen.
[86] ibid. In der Einleitung zu seinen Vorlesungen über theoretische Physik verlangt er gar, dass jeder zu zählende Gegenstand „Eine abgesonderte Existenz besitzt“. (Helmholtz 1903, 29.).
[87] cf. Helmholtz 1887, 83.

## 2.3 Richard Dedekind (1831-1916)

Richard Dedekind beschäftigt sich in seinem bedeutenden Werk „Was sind und was sollen die Zahlen“ von 1888 mit der Axiomatisierung der natürlichen Zahlen. Er definiert eine Vielzahl von Begriffen, welche die Charakterisierung von Mengen und Abbildungen sowie die elementaren Grundrechenoperationen betreffen. Berühmt wurde Dedekind zuvor durch seine Konstruktion der reellen Zahlen durch Schnittbildung von rationalen Zahlen, die sogenannten Dedekindschen Schnitte, welche bis heute Verwendung finden.[88]

Dedekind verfolgt eine logizistische Sichtweise. In seinem ersten Vorwort von 1888 nennt er „die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Theil der Logik“[89] und sieht „den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit“[90]. Für ihn sind die Zahlen reine Erfindungen des Geistes und dienen der Unterscheidbarkeit von Gegenständen. Bereits hier nimmt er die Position ein, dass die Null nicht zu den natürlichen Zahlen zu zählen sei, sondern lediglich eine Erweiterung des Zahlbegriffs - ähnlich den reellen Zahlen - darstellt.[91] In seinem Vorwort zur zweiten unveränderten Auflage von 1893 verweist er auf Freges "Grundlagen der Arithmetik", er sieht jedoch Unterschiede zu diesem, welche in der „Ansicht über das Wesen der Zahl“[92] begründet sind.[93] Dedekind ist einer der wenigen Fundierer der Arithmetik, der explizit eine eindeutige Position zur Null, resp. zur leeren Menge gibt: Er verneint (vehement) die Existenz einer leeren Menge und sieht die Null lediglich als Erweiterung der natürlichen Zahlen an.[94]

Dedekind definiert zunächst (in anderen als den modernen Worten) den Begriff der abzählbar unendlichen Menge.[95] Hierzu betrachtet er eine Menge **S**. Auf dieser definiert er eine injektive Abbildung $\phi : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$. Durch wiederholte Anwendung von $\phi$ auf ein $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ erhält man eine sogenannte Kette. Die gesamte Menge **S** wird bezüglich $\phi$ partitioniert, ie. in disjunkte Klassen an Ketten unterteilt. Betrachtet man eine Teilmenge **A** von **S**, so ist die Vereinigung aller Ketten, die **A** nichtleer schneidet, die Kette $A_0$ von **A** (bezüglich $\phi$).[96] Das Prinzip der vollständigen Induktion sieht er so: Gilt für alle $a$ aus der Teilmenge **A** von **S** die Eigenschaft **E** (Induktionsvoraussetzung) und wenn $\forall\ n \in A_0$ gilt: $\phi(n) =: n'$ hat die Eigenschaft **E** (Induktionsschritt), so besitzen alle Elemente von $A_0$ die Eigenschaft **E**. (S. 15) Bezogen auf die natürlichen Zahlen entspräche $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1 (=: n')$. Ein Menge **S** nennt er unendlich, wenn es eine solche injektive Abbildung gibt, die **S** auf eine echte Teilmenge **R** von **S** abbildet, e.g. unter Annahme der (nicht erforderlichen) Surjektivität ließe sich eine Bijektion zwischen einer Menge und ihrer echten Teilmenge bilden. Die Existenz einer unendlichen Menge beweist er über die Unendlichkeit seiner Gedankenwelt **S**. Jeder Gedanke s', wobei s' $:= \phi(s)$ den Gedanken bedeutet, dass s ein Gedanke sei, gehört wiederum zu **S**. Das Bild s' von s $\in$ **S** ist echte Teilmenge von **S**, da zu **S** auch andere Teile wie das Ich gehören. Nun werden verschiedene Gedanken a, b auf

[88] Zu diesen verweise ich auf sein Werk „Stetigkeit und Irrationalzahlen“ von 1872. Die Dedekindschen Schnitte können zur Vervollständigung einer jeden in sich dichten, strengen Totalordnung (i.e. eine mit einer Ordnungsstruktur versehene dichte Menge) in eine ordnungsvollständige Ordnung hinein angewendet werden. (cf. Dedekind 1872.)

[89] Dedekind 1893, X (Vorwort I).

[90] Dedekind 1893, X (Vorwort I).

[91] cf. Dedekind 1893, Xf (Vorwort I).

[92] Dedekind 1893, XVII (Vorwort II).

[93] Dedekind weist ausdrücklich darauf hin, dass er Freges Schrift, welche bereits 1884 erschien, erst ein Jahr nach Herausgabe seiner Schrift von 1888 kennenlernte. Näheres über den Unterschied zwischen Freges und dem seinigen Zahlbegriff äußert er nicht. (cf. Dedkind 1893, XVII).

[94] Zunächst definiert Dedekind Systeme, vergleichbar mit unserem heutigen Mengenbegriff. Gegen die leere Menge spricht er sich entschieden aus: „Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten.“ (Dedkind 1893, 2.)

[95] cf. Dedekind 1893, 20.

[96] cf. Dedekind 1893, 11f.

verschiedene „Gedanken-Gedanken“ a’ und b’ abgebildet. Es liegt also eine Injektion vor, bei der eine Menge auf ihre echte Teilmenge abgebildet wird.[97] Die Existenz des Ichs neben den Gedanken lässt an Descartes erinnern. Nach seiner Definition der unendlichen Mengen wendet er sich den natürlichen Zahlen zu. Hierzu setzt er ein Grundelement, die **1**, fest und gelangt zu allen übrigen natürlichen Zahlen durch eine bijektive, also injektive und surjektive, Abbildung $\phi$. Die zentrale Passage, welche die erste vollständige Axiomatisierung der natürlichen Zahlen überhaupt darstellt, wird im folgenden zitiert:

> „71. Erklärung. Ein System [ie. Menge] $N$ heißt *einfach unendlich*, wenn es eine solche ähnliche [ie. injektive] Abbildung $\phi(N)$ in sich selbst giebt, daß $N$ als Kette (44) eines Elementes erscheint, welches nicht in $\phi(N)$ enthalten ist. Wir nennen dies Element, das wir im Folgenden durch das Symbol **1** bezeichnen wollen, das *Grundelement* von $N$ und sagen zugleich, das einfach unendliche System $N$ sei durch diese Abbildung $\phi$ *geordnet*. [...], so besteht mithin das Wesen eines einfach unendlichen Systems $N$ in der Existenz einer Abbildung $\phi$ von N und eines Elementes **1**, die den den folgenden Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ genügen:
>
> | | |
> |---|---|
> | $\alpha.[\phi(N) =]N' \prec N$. | [i.e. $\phi$ ist Endomorphismus] |
> | $\beta.\ N = 1_0$. | [i.e. Festlegung des Grundelements] |
> | $\gamma$. Das Element 1 ist nicht in $N'$ enthalten. | [i.e. Eindeutigkeit bis auf Isomorphie] |
> | $\delta$. Die Abbildung $\phi$ ist ähnlich. | [i.e. Injektivität] |
>
> [...] 73. Erklärung. Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch die Abbildung $\phi$ geordneten Systems $N$ von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung $\phi$ zu einander gesetzt sind, so heißen diese Elemente *natürliche Zahlen* oder *Ordinalzahlen* oder auch schlechthin *Zahlen*, und das Grundelement **1** heißt die *Grundzahl* der *Zahlenreihe N*. In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraction) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen.“[98]

Diese Charakterisierung von $N$ (bzw. dem heutig gebräuchlichen „$\mathbb{N}$“) ist die erste vollständige Axiomatisierung der natürlichen Zahlen, basiert jedoch auf einer sehr umständlichen Definition von Ketten als Endomorphieklassen. Die hieraus gewonnene Definition der Unendlichkeit stimmt teils mit Bolzanos Ansichten überein. Ein einfacheres vollständiges logische System stellt Giuseppe Peano ein Jahr später vor.

Für Richard Dedekinds Axiomatisierung der natürlichen Zahlen ist es unerheblich, ob er mit einer Null oder Eins als Grundelement startet und von hier aus rekursiv die übrigen Zahlen definiert. Er legt vor allem auf das Verfahren der vollständigen Induktion Wert und bezeichnet das Element, für welches in der Induktionsannahme die Behauptung bewiesen wird schlichtweg mit **1**. Dass er die Null explizit als Erweiterung der natürlichen Zahlen und nicht als deren Element sieht, könnte damit zusammenhängen, dass er die Existenz einer leeren Menge vehement ablehnt.

---

97 cf. Dedekind 1893, 17f.

98 Dedekind 1893, 20f. [Anm. d. Verf.]

## 2.4 Giuseppe Peano (1858-1932)

Giuseppe Peano axiomatisiert in seinen auf Latein verfassten „Arithmetices principia nova methodo exposita“ von 1889 die natürlichen Zahlen und die grundlegenden Rechenoperationen in einer formalen logischen Sprache. [99]

Zunächst entwickelt er einen logischen Kalkül, der aus Zeichen,[100] Klammern oder Punkten,[101] den logischen Konjunktionen et, non, vel, est aequalis, den logischen Werten verum und falsum, und **c** für est consequentia, resp. **ɔ** für deducitur, besteht. Als logische Propositionen stellt er die geläufigen aussagenlogischen Sätze auf.[102] Propositionen und logische Wahrheitswerte behandelt er formal als gleichartige Objekte. Hiernach führt er $\epsilon$ als Relation *est* ein. „Est“ ist hier sehr allgemein zu verstehen, es drückt eine wie auch immer beschaffene Zugehörigkeit aus: Die Relation $\epsilon$ verbindet Gegenstände **a** mit verschiedenartigen Objekten, eg. $\mathbf{a} \, \epsilon \, \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \, \epsilon \, \mathbf{K}$ (Klasse), $\mathbf{a} \, \epsilon \, \mathbf{P}$ (Proposition).[103]

Nun wendet er sich der Axiomatisierung der natürlichen Zahlen zu. Eine Zahl „numerus“[104] bezeichnet er explizit als „integer positivus“[105], eine Null nimmt er also nicht zu $\mathbb{N}$ hinzu. Peano führt die Bezeichnung **1** für „unitas“[106] und die Nachfolgefunktion **a+1** [107] ein.

Hierauf folgt die Axiomatisierung [108]:

> „*Axiomata.*
>
> 1. $\mathbf{1} \, \epsilon \, \mathrm{N}$ . [ie. Einselement]
> 2. $a \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, a = a.$ [ie. Identität]
> 3. $a, b \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \supset : a = b \, . \, b = a.$ [ie. Reflexivität]
> 4. $a, b, c \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \supset \therefore a = b \, . \, b = c : \supset . \, a = c$ . [ie. Transitivität]
> 5. $a = b \, . \, b \, \epsilon \, \mathrm{N} : \supset . \, a \, \epsilon \, \mathrm{N}$ . [ie. Isomorphie]
> 6. $a \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, a + 1 \, \epsilon \, \mathrm{N}$ . [ie. Nachfolge]
> 7. $a, b \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \supset : a = b \, . = . \, a + 1 = b + 1$ [ie. Eindeutigkeit]
> 8. $a \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, a + 1 \, \neg = 1$ . [ie. Startwert]
> 9. $k \, \epsilon \, \mathrm{K} \therefore 1 \, \epsilon \, k \therefore x \, \epsilon \, \mathrm{N} \, . \, x \, \epsilon \, k : \supset_x . \, x + 1 \, \epsilon \, k :: \supset . \, \mathrm{N} \supset k$ .“ [ie. Induktion]

Das Axiom Nummer 8 schließt explizit eine Null von den natürlichen Zahlen aus, indem den „Startwert“ **1** definiert. Ein neutrales Element der Nachfolgefunktion wird nicht zugelassen.

[99] Peano waren die Schriften Dedekinds bekannt und er erwähnt dessen Werk explizit als Motivation im Vorwort: „Utilius quoque mihi fuit recens scriptum: R. DEDEKIND, Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig, 1888, in quo quaestiones, quae ad numerorum fundamenta pertinent, acute examinantur.“ (Peano 1889, 22.)

[100] lateinischen Kleinbuchstaben, cf. ibid., 24.

[101] „parentheses et puncta“, ibid.

[102] eg. Transitivität, Identität, doppelte Negation, etc., cf. ibid., 25ff.

[103] cf. ibid., 27.

[104] ibid., 34.

[105] ibid.

[106] Einheit; cf. ibid.

[107] „sequens a“, ibid.

[108] Peano 1889, ibid.

Sämtliche Zeichen für alle folgenden natürlichen Zahlen definiert Peano rekursiv[109]:

> „*Definitiones.*
>
> 10. $\mathbf{2} = \mathbf{1} + 1$ ; $\mathbf{3} = \mathbf{2} + 1$ ; $\mathbf{4} = \mathbf{3} + 1$ ; etc. " [Herv. d. Verf.]

Hierauf folgen Definitionen, Theoreme und Beweise zur elementaren Algebra.

Peano schließt die Null dadurch von den natürlichen Zahlen aus, dass er das Zeichen **1** als deren erstes Element definiert. Würde man Peanos **1** wie bei Dedekind einfach nur als Grundelement einer rekursiven Definition sehen, spräche nichts dagegen, die Reihe auch mit der Null beginnen zu lassen. Peano möchte mit seiner Axiomatisierung explizit positive Ganzzahlen definieren. Aus diesem semantischen Verständnis von natürlichen Zahlen heraus entstand wohl diese Form der Definition von $\mathbb{N}$.

## 2.5 Leopold Kronecker (1823–1891)

Leopold Kronecker lässt in seinem Essay „Ueber den Zahlbegriff" von 1887 unter den Begriff der Aritmetik neben der Zahlenlehre auch die Algebra und Analysis fallen. Er glaubt, diese Disziplinen könnten dereinst durch den „im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff"[110] fundiert werden. Diese „Zahlendisziplinen" grenzt er gegen Mechanik und Geometrie ab. Der grundlegende Unterschied zwischen diesen besteht in der Verortung ihrer Gegenstände, viz. dass die Zahlen „*bloss* unseres Geistes Product"[111] seien, wohingegen Raum und Zeit „auch *ausser* unserem Geiste eine *Realität*"[112] haben.[113] Kronecker entwickelt Zahlen aus den Ordinalzahlen, welche als Bezeichnungen gewissen Objektscharen beigelegt werden. Die Gesamtheit aller dieser Bezeichnungen unabhängig von ihrer Reihenfolge nennt er Anzahl.[114] Nun können die Ordinalzahlen selbst wieder Objektscharen sein und gezählt werden. Per Definition der Anzahl wird nun einer bestimmten Menge an Ordinalzahlen eine Kardinalzahl zugeordnet. Diese bezeichnet er „schlechthin als ‚Zahlen'"[115]. Natürlich ist für ihn die Reihenfolge der Zahlen, die sich direkt aus der Anordnung der Ordinalzahlen ergibt.[116] Über die Null sagt Kronecker in diesem Kontext nichts Explizites. Er lässt eine exemplarische Zahlenreihe mit der Eins beginnen, was vermuten lässt, dass er die Null nicht zu den natürlichen Zahlen zählt. Später führt er die Null im Zusammenhang mit negativen Zahlen über Modulorechnung ein. $7 - 9 = 3 - 5$ schreibt er als

$$7 + 9x \equiv 3 + 5x \pmod{x+1}.$$

Er definiert hier $x+1 = 0$ und nennt das auftretende x nicht mehr variabel im Sinne einer substituierbaren (natürlichen) Zahl, sondern eine durch die Operation „modulo" festgelegte Größe.[117] Kronecker umgeht so eine Definition der negativen Zahl durch die Null als additives, neutrales Element. Er betrachtet lediglich die Kongruenz zweier modularer Mengen, was eine direkte

[109] ibid., 34.
[110] Kronecker 1887: 253.
[111] ibid.
[112] ibid.
[113] cf. ibid. Diese Unterscheidung übernimmt Kronecker von Gauß, welche er in einem Brief an Bessel vom 9. April 1830 aufstellt.
[114] Mathematisch gesprochen sieht er Anzahl als eine Klasse von Bijektionen zwischen Elementen einer Menge und den Ordinalzahlen. Zwei Anzahlen sind demnach gleich, wenn die gezählten Objekte einander eineindeutig zuzuordnen sind.
[115] ibid., 254.
[116] cf. ibid., 253ff.
[117] Formel aus: ibid., 260. Genauer müsste es definierend $x + 1 =: 0$ heißen, da er bereits die Addition eingeführt hat und x eine positive ganze Zahl ist. (cf. ibid., 260f.)

Rückführung der algebraischen Summe auf den Zahl-, resp. Anzahlbegriff bedeutet. Ähnlich verfährt er mit der Division.[118] Die Null ist für ihn hier somit ein Zeichen für die Elimination von ganzen Faktoren, über eine Null als eigenständige Zahl schweigt er.

Ähnlich wie Bolzano führt Leopold Kronecker zuerst einen algebraischen Rechenkalkül ein und hiernach die Null aus der Notwendigkeit der Kenntlichmachung der Elimination durch diese Operationen. Er möchte in erster Linie die Arithmetik fundieren und nur zu diesem Zweck widmet er sich der Behandlung des Zahlbegriffs. Er möchte augenscheinlich weniger den philosophischen Aspekt der Natur der Zahlen beleuchten als vielmehr in Hinsicht auf die Analysis und Algebra einen funktionierenden Kalkül der Grundrechenarten aufstellen. Ob die Null für ihn demnach zu den natürlichen Zahlen zu zählen sei oder nicht, ist nicht ersichtlich.

[118] cf. ibid., 260ff.

## 2.6 Gottlob Frege (1848–1925)

Gottlob Frege stellt in seinem Werk „Grundlagen der Arithmetik“ von 1884 sein Grundkonzept der Rückführung der Arithmetik auf die Logik dar, ein Unterfangen, welches er 1893, resp. 1903 in seinen „Grundgesetzen der Arithmetik“ genauestens formalisiert. Seine Motivation ist die exakte Fundierung der Arithmetik anhand des Begriffes der Anzahl.[119]
Zunächst spricht er lediglich von den „positiven ganzen Zahlen“[120], ohne den Begriff der natürlichen Zahl zu verwenden, alsbald wendet er sich in seiner Argumentation jedoch auch der Null zu. John Stuart Mill’s Meinung, Zahlen entsprächen Anschauungen, kontert Frege (indirekt) mit der „Zahl Null“[121]: Wenn die Zahlen der Anschauung entsprächen, so gäbe es wohl keine Null, „denn bis jetzt hat wohl niemand 0 Kieselsteine gesehen oder getastet“[122]. Wenn nun Rechnungen mit der Null einen Sinn haben sollten, „so kann auch das Zeichen 0 nicht ganz sinnlos sein.“[123] Frege hat mit diesem Argument nichts gesagt, aber erstens mit der Null verdeutlicht, dass er einen aus der Anschauung abgeleiteten Zahlbegriff ablehnt und zweitens die Null wie eine Zahl behandelt. Im Folgenden stellt Frege den Anzahlbegriff einiger anderer Autoren vor. Hier fällt auch der Begriff der „natürlichen Zahlen“[124] in Abgrenzung zu negativen und rationalen Zahlen, jedoch ohne eine Definition. Frege wehrt sich im Weiteren gegen die Definition, dass eine Zahl „eine Menge, Vielheit oder Mehrheit“[125] sei. Als Gegenbeispiele nennt er die Null und die Eins, die aus dieser Begrifflichkeit nicht abzuleiten seien.
Tatsächlich sieht er die Anzahl als Sättigung seines Terminus’ „Begriff“und definiert: „Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffs ‚Begriff gleichzahlig dem Begriffe F‘, indem wir einen Begriff F gleichzahlig einem Begriffe G nannten, wenn jene Möglichkeit der beiderseits eindeutigen Zuordnung besteht.“[126] Frege sieht Anzahl also als eine Umfangsklasse, bei der je zwei Mengenelemente **A** und **B** in Relation stehen, wenn es eine Bijektion zwischen deren Elementen gibt.
Die natürlichen Zahlen definiert Frege als Aufeinanderfolge von Anzahl(klassen). Er lässt $\mathbb{N}$ explizit mit der Null beginnen.[127] In seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* definiert er die Anzahl Null formal als[128]

$$\emptyset := \text{anz}\ (\text{ext}\ \boldsymbol{\epsilon}(\neg\ \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon})).$$[129]

Dies gibt er in den Grundlagen wieder mit der Anzahl, die dem „Begriff ‚gleich aber nicht gleich 0‘“[130] zukommt. Unter diesen Begriff fallen keine Gegenstände. Induktiv baut er auf dieser Definition die gesamte natürliche Zahlenreihe auf: Die Eins definiert er wie folgt:[131]

$$\not{1} := \text{anz}\ (\text{ext}\ \boldsymbol{\epsilon}\ (\boldsymbol{\epsilon} = \emptyset)).$$

[119] cf. Frege 1884, 16. „Hier [bei der arithmetischen Axiomatisierung, Anm. d. Verf.] ist es nun vor allem die Anzahl, welche definiert oder als undefinirbar anerkannt werden muss.“ (ibid.)
[120] ibid., 10.
[121] ibid., 21.
[122] ibid.
[123] ibid.
[124] ibid., 33.
[125] ibid., 43.
[126] ibid., 106.
[127] Freges Definition der natürlichen Zahlen ähnelt stark der Peanoschen. Dass er die Null zu den natürlichen Zahlen zählt wird anhand zweier Fundierungspunkte dieser festgesetzt: „Wenn a in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0 folgt, so ist $a = 1$“(ibid., 85.) und „Jede Anzahl ausser der 0 folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf eine Anzahl.“(ibid., 86.)
[128] Frege 1893, 75.
[129] Hierbei bezeichnet $\text{ext}\,\boldsymbol{\epsilon}(\Phi(\boldsymbol{\epsilon}))$ den (Wahrheitswert-)verlauf der Funktion $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$, also das Wahre oder das Falsche (cf. Frege 1893, 36f.), und $\text{anz}(\mathbf{u})$ die Anzahl, die dem (wahren) Begriff $\mathbf{u}$ zukommt. (cf. ibid., 73f.)
[130] Frege 1884, 84.
[131] Frege 1893, 75.

Oder in Worten: „1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe ‚gleich 0' zukommt."[132] Frege unterscheidet strikt zwischen Anzahl und Zahl.
Frege bezieht in seine Definition des Anzahlenbegriffs also explizit die Null mit ein; von ihr ausgehend entwickelt er rekursiv sämtliche Anzahlen. Bezüglich der entstandenen Anzahlenreihe beweist Frege etliche ihr zukommende Eigenschaften, unter anderem die Peanoschen Axiome (eg. Eindeutigkeit der nachfolgenden Anzahl in §66,[133] resp. Eindeutigkeit der vorausgehenden Anzahl in §88,[134] Auszeichnung einer Null in §§98f[135] und Unendlichkeit der Anzahlenreihe in §§120f.[136]) Auch wenn Frege sie nicht als „natürliche Zahlen" bezeichnet, lässt sich seine Anzahlenreihe mit dem natürlichen Zahlbegriff anderer Autoren wie Peano und Dedekind identifizieren.[137] Indessen er den Anzahlenbegriff ausschließlich aus der Logik herleitet, drückt er den Umfang des notwendigerweise auftretenden Wahrheitswertes „das Falsche" mit der Null aus. Sie ist somit elementarer Bestandteil seiner Anzahlentheorie.
Nach Klärung des Anzahlenbegriffs widmet sich Frege im zweiten Teil der Grundgesetze der Arithmetik der Fundierung der Analysis. Er möchte den Begriff der reellen Zahl logisch herleiten. Frege unterscheidet streng zwischen Anzahlen und Zahlen: Erstere „antworten auf die Frage: ‚wie viele Gegenstände einer gewissen Art giebt es?,"[138], letztere bezeichnen Verhältnisse zwischen Gegenständen.[139] Die natürlichen Zahlen sind demnach etwas vollkommen anderes als die ganzen Zahlen: Letztere sind in Gänze andere Objekte als Erstere, nicht bloß deren Erweiterung. [140]

Frege zählt die Null zu den natürlichen Zahlen und klärt en détail sämtliche problematischen Begrifflichkeiten wie Anzahl und Zahl und schafft es, die natürlichen Zahlen von den ganzen Zahlen genau zu trennen.

## 2.7 Betrand Russell (1872-1970)

Betrand Russell umreißt in seinem Werk „Introduction to Mathematical Philosophy" von 1919 einige Grundideen seines von 1910 bis 1913 gemeinsam mit Alfred North Whitehead herausgegebenen umfangreichen Werkes „Principia Mathematica". In diesem dreibändigen Standardwerk der mathematischen Logik wird der Versuch unternommen, die Fundamente der Mathematik - wie die Kardinal- und Ordinalarithmetik sowie die Theorie der Folgen - aus wenigen Axiomen anhand logischer Schlüsse formal herzuleiten, also die gesamte (numerisch-analytische) Mathematik ausschließlich auf der Logik zu fundieren.
Seine Introduction beginnt er mit einer Definition der natürlichen Zahlen, zu welchen er die Null hinzuzählt. Die natürlichen Zahlen ohne Null nennt er „series of whole numbers"[141]. Die natürlichen Zahlen seien die einfachsten anschaulichen Objekte der Mathematik, von denen ausgehend man sich in zwei Richtungen bewegen könne: Zum einen „vorwärts" hin zur komplexen

[132] Frege, 1884, 84. Das Element, welches also dem Begriff „gleich 0" zukommt ist die leere Menge selbst.
[133] cf. ibid., 107f.
[134] cf. ibid., 134f.
[135] cf. ibid., 146ff.
[136] cf. ibid., 175f.
[137] Auch Kutschera identifiziert Freges Anzahlen mit den natürlichen Zahlen. (cf. Kutschera, 120.) Zermelo bemerkt zur Rezension von Freges Grundlagen der Arithmetik durch Georg Cantor, dass Freges Anzahlenbegriff mit Cantors Kardinalzahlenbegriff übereinstimmt.(cf. Zermelo 1932, 441.))
[138] Frege, 1893, 452.
[139] cf. ibid. Frege nennt als Analogie das Längenverhältnis zweier Strecken, in gleicher Weise wie Euklid. Sein Zahlbegriff ist aber im Allgemeinen losgelöst von der Geometrie und trifft auf alle Verhältnisse zwischen zwei messbaren Größen zu.
[140] cf. ibid.
[141] Russell 1919: 7.

höheren Mathematik, zum anderen „rückwärts“ hin zur ebenso schwer zugänglichen Fundierung der Mathematik. Letzteres nennt er Umfang und Aufgabe der mathematischen Philosophie.
Zunächst beschreibt er die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen, welche auf drei „primitive ideas“[142] und fünf „primitive propositions“[143] fußen. Russell möchte nachweisen, dass sich dieser axiomatische Kalkül auf zwei Grundbegriffe und drei Propositionen reduzieren lässt. Die Grundbegriffe sind Null und „successor“. Die Reduktion auf drei Propositionen geschieht nach der Definition des Zahlbegriffs.
Russell kritisiert Peano dahingegehend, dass dessen Kalkül auf eine Vielzahl von Folgen[144] zuträfe, so zum Beispiel auf alle geraden Zahlen, indem man den Begriff „number“ mit der Bedeutung „even number“ versieht, resp. die Begriffe substituiert.[145] Er führt das realistische Argument an, dass die Zahlen sich für das Zählen gewöhnlicher Gegenstände eignen müssen[146] und dass wir ein natürliches Verständnis für die Bedeutung von Zahlen haben. Dieses müsse in eine Definition der natürlichen Zahlen einfließen,[147] er sieht also explizit die Notwendigkeit der Klärung des Begriffs des „Natürlichen“ an den Zahlen.
Russell sieht zwei Klassen[148] als ähnlich an, wenn eine Relation zwischen ihnen möglich ist. Die Anzahl einer Klasse definiert er wiederum selbst als Klasse, viz. als die Klasse aller zueinander ähnlichen Klassen.[149] Hierauf definiert er **Zahl** als (irgend-)etwas, was Anzahl einer Klasse sein kann. Klassen lassen sich entweder extensional (der Anzahl nach) oder intensional (der Eigenschaft nach) auffassen. Russell sieht eine intensionale Definition der Klassen als notwendig, da sich die Extension unmittelbar aus der Intension herleiten lässt, umgekehrt jedoch nicht; der intensionale Begriff birgt also mehr Information als der extensionale.[150]
Aus diesem natürlichen Zahlbegriff lassen sich die drei Propositionen „0 ist eine Zahl“, „Der Nachfolger einer jeden Zahl ist eine Zahl“ und „0 ist nie Nachfolger einer Zahl“ herleiten, mit Eindeutigkeit und Induktion ergeben sich also drei grundlegende Propositionen zur Fundierung der Arithmetik.[151]
Gleich Dedekind verallgemeinert Russell die Induktion auf durch beliebige Relationen induzierte Klassen und sieht die natürlichen Zahlen als Spezialfall dieses Prinzips an. Die Induktion sei keineswegs eine (höhrere) Theorie, sondern eine reine Definition, die es ermöglicht einen mathematischen Beweis zwecks vollständiger Induktion zu führen. Natürliche Zahlen definiert er als Objekte, anhand derer man dieses Beweisverfahren vollziehen kann. Die Induktion sei also das Natürliche an $\mathbb{N}$ und er setzt deshalb die Begriffe „inductive numbers“ und „natural numbers“ gleich. Induktion ist ferner das Prinzip, welches endliche von unendlichen Mengen unterscheidet. Das Induktionsaxiom impliziert also den dedekindschen Existenzsatz des Unendlichen. Russells Sicht ist hier jedoch im Gegensatz zur dedekindschen eine konstruktivistische: Er beweist nicht die Existenz eines aktual Unendlichen über Abbildungen von Mengen in echte Teilmengen, sondern sieht die durch die Nachfolge[funktion] definierten natürlichen Zahlen als

---

142 Russell 1919: 8. Diese drei Grundbegriffe sind Null, Zahl und Nachfolger. Im Original definiert Peano die natürlichen Zahlen beginnend mit der Eins (cf. 2.4). Russell beugt Peanos Axiomatik etwas hin zu seinem Verständnis der natürlichen Zahlen.

143 Russell, 1919, 8. Ersetzt man auch hier die Null durch die Eins ergeben sich die bekannten Peano-Axiome (cf. Peano).

144 Russell verwendet den Begriff „progression“ (Russell 1919: 10.), welcher sowohl Reihe als auch Folge bedeuten kann, in Hinsicht auf unseren Folgenbegriff habe ich letztere Bedeutung gewählt.

145 cf. Russell 1919: 9.

146 „We want our numbers not merely to verify mathematical formulae, but to apply in the right way to common objects.“ (Russel 1919: 11.)

147 „We have allready some knowledge [...] of what we mean by ’1’ and ’2’ and so on, and our use of numbers in arithmetic must conform to this knowledge.“ (Russell 1919: 11.)

148 Anstelle von „class“ ließe sich auch „aggregate“ oder „manifold“ sagen. (cf. Russell 1919: 12.)

149 Also als die Klasse aller Klassen, die denselben Umfang besitzen.

150 cf. Russell 1919: 12.

151 cf. Russell 1919: 18f.

potenziell unendlich an.

Bertrand Russell untersucht den Zahlbegriff an sich und versucht den Begriff des „Natürlichen“ an $\mathbb{N}$ zu klären. Als dieses „Natürliche“ bezeichnet er das Verfahren der Induktion und folgt hier technisch der rekursiven Definition von Peonos Zahlbegriff. Im Gegensatz zu diesem fasst Russell jedoch diese Definition nicht rein extensional auf, sondern intensional: Mit Hilfe der Zahlen müssen sich seiner Meinung nach die Anzahlen von (realen) Objekten beschreiben lassen. Er sieht die Null als eine Zahl an. Das Erkennen der Abwesenheit eines Objektes fällt demnach unter seine Definition von Zählen. Für Russell ist die Null somit eindeutig ein Element der natürlichen Zahlen.

## 2.8 Frank Zermelo (1871-1953) (ZFC)

Das **Z**ermelo-**F**raenkelsche Axiomenstem der Mengenlehre ist das heute üblich verwendete. Es wird mit oder ohne Auswahlaxiom (axiom of **C**hoice) entweder als **ZF** oder **ZFC** bezeichnet. Als Grundvoraussetzung gilt, dass alle mathematischen, wie auch immer gestalteten Objekte (seien es Zahlen, Funktionen, Räume oder Strukturen) als Gesamtheit ein Universum bilden, an welches gewisse Forderungen gestellt werden.[152] Komplizierte Objekte lassen sich stets auf einfache zurückführen. Das Universum besteht also aus Urelementen (oder Atomen) und Mengen, die wiederum aus Urelementen oder Mengen bestehen. Vorteil eines solchen Universums ist es, dass über seine Objekte mittels einer Sprache erster Stufe gesprochen werden kann, da über eine Menge und deren Elemente quantifiziert werden kann. Damit erreicht man, dass „Stufenunterschiede zwischen den mathematischen Objekten (wie z.B. zwischen natürlichen Zahlen und Mengen von natürlichen Zahlen) ignoriert und alle Objekte des Universums gleichsam als Objekte erster Stufe betrachtet“[153] werden können. Die gesamte Mathematik lässt sich somit durch ein Axiomensystem der Mengenlehre auf Basis eines solchen Universums fundieren.[154]
Bei der Axiomatisierung der Mengenlehre via ZF/ZFC wird allgemein auf Urelemente verzichtet. Das einzige ausgezeichnete Urelement ist die leere Menge $\emptyset$. Die natürlichen Zahlen lassen sich leicht mengentheoretisch ersetzen.[155] Im Folgenden das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem mit Erläuterung der einzelnen Axiome:[156]

1. **Existenzaxiom** (**Ex**):

$$\exists x \; x \equiv x$$

Es gibt eine Menge, ie. das Universum ist nichtleer.

2. **Extensionalitätsaxiom** (**Ext**):

$$\forall A, B \; (\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A \equiv B)$$

[152] cf. Ebbinghaus 2007, 110. Zu den Forderungen gehören die Existenz (i) einer Menge a,b zu zwei Objekten a und b, (ii) einer Vereinigungsmenge M $\cup$ N zu zwei Mengen M und N, (iii) einer Umkehrfunktion $f^{-1}$ zu einer injektiven Funktion *f*. (cf. ibid.)
[153] Ebbinghaus 2007, 113.
[154] Das Axiomensystem des Universums wird auch als „Hintergrundmengenlehre“ (Ebbinghaus 2007, 114.) bezeichnet.
[155] cf. Ebbinghaus 2003, 15. Dies geschieht dadurch, dass man die 0 mit $\emptyset$, die 1 mit $\{\emptyset\}$, die 2 mit $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc. identifiziert. (cf. Ebbinghaus 2007, 117.)
[156] Größtenteils wird der Darstellung von ZFC durch Ebbinghaus 2003 gefolgt. Jedoch wird sein „kleines“ Vereinigungsmengenaxiom **$\cup$-Ax** durch das Paarmengenaxiom **Paar** ersetzt, da jenes eine intuitivere Gestalt besitzt.

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Das Extensionalitätsaxiom schließt intensionale Betrachtung von Mengen aus. Hierdurch werden Mengen über ihren Umfang eindeutig bestimmt.

3. **Schema der Aussonderungsaxiome** (**Aus**):

$$\forall x_{1,..,n} \forall X \; \exists A \; \forall a \; (a \in A \leftrightarrow a \in X \wedge \Gamma(a, x_{1,..,n}))$$

Ein Axiomenschema besteht aus unendlich vielen Axiomen, die nach einer bestimmten Regel gebildet werden. Hierdurch wird **ZFC** (abzählbar) unendlich groß.[157] Zu jeder Eigenschaft Γ, lassen sich aus einer beliebigen Menge X diejenigen Elemente zu einer neuen Menge A zusammenfassen, die Γ erfüllen. Die Eigenschaft Γ kann von beliebigen Variablen $x_{1,\dots,n}$ abhängen. Nach **Ext** ist die Menge A wiederum eindeutig bestimmt.

**Beispiel**: Sei X die Menge aller Pflanzenarten.[158] Nun sollen all diejenigen Pflanzenarten a in einer Menge A zusammengefasst werden, die die Eigenschaft $\Gamma(a, x_{1,..,n})$ besitzt, eg. $\Gamma(a, x_{1,..,n}) := a \in x_1 \wedge a \in x_2 \wedge a \notin x_3$, wobei $x_1$ die *Menge aller Blumen*, $x_2$ die *Menge aller Pflanzen mit weißen Blüten* und $x_3$ *Menge aller Rosen* sind. Als Menge A ergeben sich alle weißblütigen Blumen mit Ausnahme der Rosen, also A:={Weiße Lilien, weiße Tulpen, weiße Kamelien,...}.

Aus den Axiomen **Ex**, **Ext** und **Aus** lassen sich bereits fundamentale Sätze und Existenzaussagen ableiten. Wichtig für die Fragestellung ist die Existenz der leeren Menge.

**Satz & Definition**: Die leere Menge =: ∅ existiert und ist eindeutig.
*Beweis*: (*i*) Sei X eine Menge (**Ex**). (*ii.i*) Definiere die Eigenschaft $\Gamma(x) := \neg \; x \in X$, und wende sie auf X an: $\Gamma(X) = \{x \in X | \; x \notin X\} =: \emptyset$ (**Aus**). (*iii*) Die Eindeutigkeit von ∅ folgt direkt aus **Ext**. □

4. **Paarmengenaxiom** (**Paar**):

$$\forall A, B \; \exists C \; \forall D (D \in C \leftrightarrow (D \equiv A \vee D \equiv B))$$

Je zwei Mengen A und B lassen sich zu einer weiteren Menge C := {A,B} zusammenfassen. Insbesondere gilt $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \equiv \{A, \emptyset\} =: \{A\} =: A$, falls $B \equiv \emptyset$.

5. **„Großes" Vereinigungsmengenaxiom** ($\bigcup$**-Ax**):

$$\forall \mathrm{X} \; \exists y \; \forall xz \; (x \in \mathrm{X} \wedge z \in x \rightarrow z \in y)$$

Dieses Axiom sichert die Existenz beliebiger (großer) Vereinigungen von Mengen. Es folgt nicht direkt aus **Ex**, **Ext**, **Aus** und **Paar**, es ist also nicht redundant. Das lässt sich leicht durch die Angabe eines geeigneten Universums beweisen:

**Satz**: Die Axiome **Ex**, **Ext**, **Aus** und **Paar** implizieren nicht $\bigcup$**-Ax**.
*Beweis*: Definiere rekursiv $x_1 := \emptyset$, $x_{n+1} := \{x_n\}$, also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, ...)$, wobei $x_i \neq x_j \; \forall i \neq j$. Definiere nun ein Universum $\mathbb{U}$: Es bestehe aus allen Teilmengen $U_i$ der Menge $M := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, in denen nur endlich viele $x_k$ mit geradem k vorkommen und einer Indexmenge I. Alle $x_n$ liegen in $\mathbb{U}$ und es gelten **Ex** und **Ext**. Mit $X \in U_\alpha, Y \in U_\beta$ gilt auch $X \cup Y \in U_\gamma \subseteq \mathbb{U}$, somit gelten **Aus** und **Paar**. Alle $U_i$ liegen für festes $i$ in $\mathbb{U}$, aber $\bigcup_{ß \in I} U_i \notin \mathbb{U}$. Hieraus folgt die Behauptung. □

[157] Jedes zu ZFC äquivalente System muss unendlich groß sein. (cf. Ebbinghaus 2003, 28 et 166.)
[158] Es wird angenommen, dass eine gewisse Pflanzenart zu sein eine Klasseneigenschaft ist und alle spezifischen Eigenschaften, die eine Pflanze haben kann, eindeutig kategorisierbar sind.

6. **Potenzmengenaxiom** (**Pot**):

$$\forall x \; \exists y \; \forall z \; (z \subseteq x \to z \in y)$$

Das Potenzmengenaxiom sichert die Existenz einer Menge $\mathcal{P}(X)$ zu einer jeden Menge $X$, die alle Teilmengen von $X$ enthält. Dieses Axiom wird als kritisch angesehen: Bei endlichen Mengen ist es unproblematisch, bei unendlichen Mengen hingegen ist es nicht möglich, die Anzahl aller Teilmengen dieser Menge zu bestimmen.[159] So gilt eg. nach der Kontinuumshypothese, dass die Mächtigkeit der Potenzmenge der natürlichen Zahlen gleich der Mächtigkeit der reellen Zahlen ist, also $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| =: \aleph_1$. Ob es überabzählbare Mengen gibt, deren Mächtigkeit zwischen derjenigen der natürlichen und der reellen Zahlen liegt, also ob die Kontinuumshypothese gültig ist, lässt sich in ZFC nicht entscheiden. Solche Fragestellungen zeigen die Grenzen von ZFC auf.

7. **Unendlichkeitsaxiom** (**Inf**):

$$\exists x \; (\emptyset \in x \land \forall z (z \in x \to z \cup \{z\} \in x))$$

Das Unendlichkeitsaxiom sichert die Existenz einer (unendlichen) induktiven Menge. Durch Anwendung von **Aus** gelangen wir zur kleinsten induktiven Menge, die mit

$$\omega := \{x \mid \forall \; Y \; (Y \text{ ist induktiv} \to x \in Y)\}$$

bezeichnet wird. Diese Menge kann nun mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ identifiziert werden. Dies geschieht, wie bei Frege, dadurch, dass zunächst die Null mit der leeren Menge identifiziert wird, also

$$\mathbf{0} := \emptyset,$$

deren Existenz durch **Ex**, **Ext** und **Aus** gesichert ist. Anschließend wird, wie bereits bei Peano, die Nachfolgefunktion

$$\mathbf{n+1} := \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$$

definiert. Die entstandene Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen existiert nach **Inf**.

8. **Schema der Ersetzungsaxiome** (**Ers**):

$$\forall x_{1,..,n} (\forall x \; \exists! y \; \Gamma(x, y, x_{1,..,n}) \to \forall \mathrm{X} \; \exists \mathrm{Y} \; \forall xy \; (x \in \mathrm{X} \land \Gamma(x, y, x_{1,..,n}) \to y \in \mathrm{Y}))$$

Mit den bisherigen Axiomen lassen sich die meisten mengentheoretischen Bedürfnisse begleichen. Es ist aber eg. nicht möglich die Existenz einer Menge, die durch die Verkettung der Potenzmengenoperation entsteht, also eg. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$, zu beweisen.

[159] cf. Ebbinghaus 2003, 35f.

Das Ersetzungsaxiom **Ers** macht das Paarmengenaxiom **Paar** redundant:

**Satz**: **Ex**, **Ext**, **Aus**, $\bigcup$**-Ax**, **Pot**, **Inf** und **Ers** implizieren **Paar**.
*Beweis*: Sei $\mathrm{X} := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Definiere

$$\Gamma(x, y, x_1, x_2) := (x \equiv \emptyset \wedge y = x_1) \vee (x \not\equiv \emptyset \wedge y = x_2).$$

Nach Konstruktion gilt $\forall x\ \exists! y\ \Gamma(x, y, x_1, x_2)$, folglich durch Anwedung von **Ers** auf X

$$\mathrm{X} = \bigcup \emptyset, \{\emptyset\} =: \bigcup_{k=1}^{2} \{x_k\} \xrightarrow{\textbf{Ers}} \{x_1, x_2\} =: \mathrm{Y},$$

und somit **Paar**. □

9. **Fundierungsaxiom** (**Fund**):

$$\forall \mathrm{X}\ (\mathrm{X} \not\equiv \emptyset \rightarrow \exists x\ (x \in \mathrm{X} \wedge \neg \exists y\ (y \in \mathrm{X} \wedge y \in x)))$$

Durch das Fundierungsaxiom schließlich kann die Russellsche Antinomie vermieden werden. Es stellt den hierarchischen Aufbau des Universums sicher. Mengen werden über die $\in$-Relation zueinander in Beziehung gesetzt. Mit den bisherigen Axiomen können zirkuläre Mengen nicht ausgeschlossen werden, also eg.

$$\mathrm{X} = \{x_1, x_2, x_3 \mid x_1 \in x_2, x_2 \in x_3, x_3 \in x_1\}.$$

Durch **Fund** wird sichergestellt, dass jede nichtleere Menge ein minimales Element bezüglich der $\in$-Relation besitzt, also dass die $\in$-Relation eine fundierte Striktordnungsrelation ist.[160]

10. **Auswahlaxiom** (**AC**):

$$\forall \mathrm{X}\ (\forall xy\ (x \in \mathrm{X} \wedge y \in \mathrm{X} \rightarrow x \not\equiv \emptyset \wedge (x \equiv y \vee x \cap\ y \equiv \emptyset) \rightarrow \exists \mathrm{Y}\ \forall x\ (x \in \mathrm{X} \rightarrow \exists z\ (\mathrm{Y} \cap\ x \equiv \{z\}))))$$

Das Auswahlaxiom sichert vor allem die Existenz von Mengen, für die kein Repräsentantensystem angegeben werden kann. So eg. die Existenz einer Zahl $\mathrm{z} \in \mathbb{T} := \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, für die es keinen numerischen Algorithmus gibt.
Meist wird das Auswahlaxiom **AC** von Mathematikern verwendet, da es e.g. Kompaktheitsbeweise in verschiedenen Feldern wie der Maßtheorie oder Funktionalanalysis ermöglicht.

ZFC lässt es offen, ob die Null zu den natürlichen Zahlen gerechnet werden kann oder nicht. Beide Annahmen lassen sich gleichermaßen mit ZFC modellieren. Allein die Tatsache, dass die leere Menge als einziges Urelement ausgezeichnet wird, könnte es durch die naheliegende Identifikation dieser mit der Null nützlich erscheinen lassen, die Null unter den (natürlichen) Zahlbegriff fallen zu lassen. Dies ist jedoch reine Interpretation.

[160] I.e. die Relation induziert eine transitive, irreflexive (für alle Elemente ungleich $\emptyset$) und antisymmetrische wohlgeordnete Menge mit kleinstem Element.

# 3 Verwendung der Null in den mathematischen Disziplinen

## 3.1 Analysis und Funktionentheorie

Klassisch zählt die 0 in der reellen Analysis sowie ihrem komplexen Pendant, der Funktionentheorie, nicht zu den natürlichen Zahlen. Je nach Bedarf wird $\mathbb{N}$ vereinigt 0 als $\mathbb{N}_0$ notiert.
Der zentrale Begriff der Analysis ist die **Konvergenz**, ie. das Verhalten einer Folge oder Funktion im Grenzfall. Der Grenzwertbegriff wird meist über die natürlichen Zahlen eingeführt, ie. über das Verhalten einer Folge, deren Folgeglieder $A_n$ auf Grund einer Regel für jedes n eindeutig festgelegt sind, für immer größer werdendes n ($n \to \infty$). Es ergeben sich zwei Klassen von Folgen: Solche, die konvergieren und solche, die divergieren. Im Falle der **Divergenz** wächst die Folge entweder über alle Grenzen (die Werte werden „unendlich groß“) oder sie nähert sich nie einem eindeutigen Wert beliebig genau. Als Beispiel für erstere Art von Divergenz dient die primitive Folge

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Letztere Art von Divergenz lässt sich repräsentieren durch

$$(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst quadratisch und nimmt (rasch) immer größere Werte an. Die Folge wächst über alle Grenzen. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nimmt die Werte 0 und 1 je unendlich oft an, nähert sich aber nicht eindeutig **einem** Grenzwert.
Im Falle der **Konvergenz** nähert sich die Folge immer mehr einem konstanten Wert, ihrem Grenzwert, an. Als Beispiel möge die Nullfolge

$$(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$$

mit dem Grenzwert 0 gelten. An der Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sieht man leicht, dass diese beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß[161] lässt sie sich in

$$B_g := (B_n)_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n \ gerade}} \text{ und } B_u := (B_n)_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n \ ungerade}}$$

aufteilen, ie. betrachtet man nur die geraden natürlichen Zahlen $n_g$, so erhält man für jedes solches Folgeglied $B_{n_g}$ per Definition den Wert 0, betrachtet man nur die ungeraden natürlichen Zahlen $n_u$, so erhält man für jedes solches Folgeglied $B_{n_u}$ per Definition den Wert 1. Alle Glieder $B_{n_g}$, resp. $B_{n_u}$ ergeben nun für sich wieder die Folge $B_g$, resp. $B_u$, sogenannte Teilfolgen von $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Teilfolgen sind nun per Definition konstant 0, resp. konstant 1 und konvergieren deshalb trivialerweise, $B_g$ gegen 0, $B_u$ gegen 1.
Anhand der häufig auftretenden Nullfolge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erkennt man den Grund für das Ausnehmen der Null aus den natürlichen Zahlen: Durch Null darf nicht geteilt werden, diese elementare Folge wäre also nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, würde man die Null hinzunehmen.

[161] Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge. (Kaballo 2000, 98.)

Desweiteren ist diese Nullfolge ein Hilfsmittel, mit dem infinitesimal kleine Größen erzeugt werden können. Diese Größen nähern sich zusehends der Null, nehmen jedoch nie die Null als Wert an. Mit diesen Größen lässt sich auf eine Weise rechnen, die mit der Null verboten wäre: Man darf durch sie teilen. Dabei sagt der wohldefinierte Ausdruck

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(C_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(C_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \infty$$

nichts über ein aktual Unendliches aus sondern bedeutet lediglich konstruktivistisch: Je weiter man sich mit der Nullfolge der Null nähert, desto größer wird der Gesamtausdruck.
Die Grundkonstruktionen der Funktionentheorie decken sich mit denen der rellen Analysis, jedoch gelangt man alsbald zu stark von der reellen Anschauung abweichenden Sätzen, welche nur im Komplexen $\mathbb{C}$ Gültigkeit haben.[162] Ein vorrangiges Gebiet der Funktionentheorie ist die Untersuchung von Produktreihen. Zur Illustration der besonderen Stellung der Null und der Konflikte, welche sie hervorruft, folgt eine Darstellung des vagen Begriffs der **normalen Konvergenz** von Produktreihen. Der Konvergenzbegriff für Reihen lässt sich nicht ohne Weiteres auf den der Produktreihen übertragen.[163] Sei eine beliebige Produktreihe $P$ der Form

$$P \;:=\; \prod_{i=1}^{\infty} a_i \;,\;\text{eg.}\;\;\sin(\pi z) = \pi z \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{i^2}\right)$$

gegeben, wobei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen ist. Setzt man nun für $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Nullfolge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein, so ließe sich eine Konvergenz des Produkts gegen die Null vermuten. Diese Annahme widerspräche jedoch einem fundamentalen Satz der Algebra, viz. dem **Satz der Nullteilerfreiheit**. Dieser Satz besagt vereinfacht, dass das Produkt zweier Zahlen in einem Körper[164] $\mathbb{K}$ genau dann Null wird, wenn mindestens entweder die eine oder die andere Zahl Null ist. In Zeichen:

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \vee b = 0, \forall\; a, b \in \mathbb{K}$$

Würde des Produkt

$$P_C \;:=\; \prod_{i=1}^{\infty} C_i = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

als Grenzwert im Falle einer Konvergenz den Wert Null annehmen, so würde ein fundamentales Prinzip der Algebra verletzt, ein tunlichst zu vermeidender Widerspruch! Deshalb sagt man, das Produkt $P$ konvergiert genau dann, wenn entweder mindestens ein, aber insgesamt endlich viele $a_i = 0$, oder

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i \;= a \text{ mit } a \neq 0 \text{ und } a \;<\; \infty$$

gilt. Dies ist die Bedingung für die **normale Konvergenz** von Produktreihen. Das Beispiel illustriert das Verhältnis der Null zu infinitesimal kleinen Größen und Operationen auf diesen im wesentlichen verschiedenen Zahlenklassen.

Die natürlichen Zahlen treten in der Analysis nur im Zusammenhang mit dem Verfahren der vollständigen Induktion auf und dabei ist es gleich, ob beim Induktionsanfang mit der Null

[162] Diese Behauptung ist etwas unsauber formuliert: Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist isomorph zum $\mathbb{R}^2$, viele Konzepte der Funktionentheorie lassen sich auch mehr oder minder umständlich reell ausdrücken und verlieren hier natürlich nicht ihre Gültigkeit. Sobald man zur komplexen Analysis in mehreren Veränderlichen übergeht, gestaltet sich eine Übertragung jedoch als praktisch nicht mehr durchführbar.
[163] Zu Reihenbegriff und Reihenkonvergenz cf. Kaballo 2000, 240ff.
[164] Genau: Mit $char(\mathbb{K}) = 0$.

oder der Eins begonnen wird. Um unnötige Fallunterscheidungen zum Beispiel für die oben beschriebenen einfach(st)en Nullfolgen zu vermeiden, werden die natürlichen Zahlen hier meist ohne Null definiert. Für die Analysis scheint es auf Grund der Wichtigkeit solcher Folgen daher insgesamt fruchtbarer zu sein, die Null nicht zu den natürlichen Zahlen zu rechnen.

## 3.2 (Lineare) Algebra

In der Algebra wird die Null von den meisten Autoren und Dozenten zu den natürlichen Zahlen gezählt. Dies ist vor allem der Tatsache geschuldet, dass sie als Repräsentant der leeren Menge für viele Formulierungen „benötigt“ wird.[165]
Ein Ziel der Algebra ist es, gewisse Eigenschaften von bestimmten Mengen miteinander zu vergleichen um allgemeine Sätze für eine möglichst große Klasse an Mengen aufstellen zu können. Hierzu beschreibt man die Eigenschaften von Mengenklassen mit sogenannten **algebraischen Strukturen**, wie eg. Ringen, Gruppen und Körpern. Die natürlichen Zahlen werden zusammen mit den „natürlichen“ Operationen, der Addition und der Multiplikation, gesehen und klassifiziert. Die Menge $\mathbb{N}$ hat zusammen mit den Verknüpfungen + und * die Struktur eines kommutativen Halbringes. Dies bedeutet, dass sowohl ($\mathbb{N}$,+) als auch ($\mathbb{N}$,*) abelsche Halbgruppen sind, ie. Addition und Multiplikation sind je kommutativ und assoziativ sowie zueinander distributiv. Diese Eigenschaften gelten unabhängig von der Tatsache, ob die Null zu $\mathbb{N}$ zählt oder nicht. Die Null besitzt algebraisch gesehen besondere Eigenschaften: Sie ist neutrales Element der Addition (das Nullelement), sowie gleichzeitig absorbierendes Element der Multiplikation. Durch Hinzunahme der Null zu den natürlichen Zahlen werden sie von einem kommutativen Halbring zu einen sogenannten Hemiring ($\mathbb{N}$,+,0,*) erweitert, es kommen also komplexere algebraische Eigenschaften hinzu.[166]
Die Algebra beschäftigt sich mit Strukturen von Mengen und Abbildungen, die lineare Algebra ihrerseits mit linearen Abbildungen in Vektorräumen. Abgebildet werden hier Mengen auf Mengen, kategorisiert durch verschiedene Morphismen. Die Zahlwerte haben algebraisch gesehen nur eine untergeordnete Rolle. Wichtig sind vielmehr die Eigenschaften von Zahlen als Klassen von Objekten. Die Null wird mit der leeren Menge $\emptyset$ identifiziert. Diese ist ein wichtiges Instrument für die Formulierung verschiedener grundlegender Sätze, hier exemplarisch am Beispiel der linearen Algebra erörtert.
Die Null ist oftmals ein Indikator dafür, ob Vektoren **linear unabhängig** voneinander sind, also anschaulich einen Raum aufspannen oder in derselben Dimension liegen. Betrachtet man die Linearkombination dreier Vektoren, eg. $v_1, v_2, v_3, v_i \neq 0 \ \forall \ i \in \{1, 2, 3\} \in \mathbb{R}^3$, so sind diese Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn nur $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (die triviale Lösung) die Gleichung

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

erfüllt. In diesen Fällen spannen die Vektoren den $\mathbb{R}^3$ auf, sie bilden eine Basis des Anschauungsraumes mit der Dimension 3. Sind zwei Vektoren der drei Vektoren linear abhängig, so liegen diese in einer Richtung und die drei Vektoren spannen lediglich einen Raum der Dimension 2, die Euklidische Ebene, auf. Im Falle einer linearen Abhängigkeit aller dreier Vektoren bilden diese zusammen mit einer Skalarmultiplikation lediglich eine Gerade der Dimension 1.
Seien beispielsweise die Vektoren $v_1, v_2, v_3$ gegeben durch

[165] cf. folgende Bemerkung Boschs: „Beibehalten und konsequent genutzt wurde der bewährte Standpunkt, mit $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen einschließlich der 0 zu bezeichnen. Diese Konvention wird in der Literatur leider nicht einheitlich gehandhabt, sie bringt für uns allerdings manche Vereinfachung mit sich, indem sie es an vielen Stellen ermöglich, auf die Hervorhebung trivialer (und daher eigentlich uninteressanter) Ausnahmefälle zu verzichten.“ (Bosch 2009, Einleitung.)

[166] Auch die Eins nimmt als neutrales Element der Multiplikation eine besondere Stellung ein: Sie wird definitiv zu den natürlichen Zahlen gezählt und der Hemiring ($\mathbb{N}$,+,0,*) wird apriori zu einem sogenannten Bewertungshalbring ($\mathbb{N}$,+,0,*,1) erweitert.
Die natürlichen Zahlen ohne die Null könnte man entweder als $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ schreiben, um das Weglassen eines Zahlelements zu kennzeichnen, oder sogar als $\mathbb{N}^\times$, um zu verdeutlichen, dass es keine Null im Sinne eines additiven Inversen gibt. Letztere Schreibweise tritt jedoch praktisch nicht auf und wird in der Regel auf Körper angewendet.

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Aus diesen bildet man die Linearkombination

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Die Gleichung gilt nur für den Fall, dass alle Koeffizienten gleich Null sind. die Vektoren weisen alle in eine andere Dimension und spannen so den $\mathbb{R}^3$ auf. Seien nun $v_1, v_2, v_3$ gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Nun ergibt sich neben der Null für die Linearkombination

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ auch noch die Lösung

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $v_1$ und $v_2$ sind ein Vielfaches voneinander, sie sind linear abhängig, sie befinden sich via Skalarmultiplikation in derselben Geraden. Somit bilden die Vektoren $v_1, v_2, v_3$ „nur" die Basis einer Ebene. Ähnlich erzeugen drei linear abhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ lediglich eine Gerade.
Die Null kann auch ein hinreichendes Kriterium dafür sein, dass eine Abbildung **injektiv** ist.[167] Betrachtet man den Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$, so ist diese injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(f) = 0$ ist. Hierbei bezeichnet der Kern von $f$ die Menge aller Vektoren aus $V$, welche unter $f$ auf die $0 \in W$ abgebildet wird, also $\{v \in V | \ f(v) = 0\}$.
Im ersten Beispiel ist die Null als Zahlwert bedeutend. Nur, wenn alle linear unabhängigen Vektoren in einen Punkt „zusammengezogen" werden, besitzen sie keine Ausdehnung mehr, um einen höherdimensionalen Raum zu erzeugen.
Im zweiten Beispiel betrachtet man die Null vielmehr als Nullraum. Kein anderer Unterraum als der Nullraum verschwindet durch die Abbildung $f$, die Raumdimensionen bleiben unter $f$ erhalten.

Da sich die Algebra mit Rechenoperationen beschäftigt, muss man für die Beantwortung der Frage, ob die Null eine natürliche Zahl ist oder nicht, besonderes Augenmerk auf die Arithmetik legen. Hier kommt der Null eine besondere Rolle zu: Bei der (grundlegenden) Addition nimmt sie die Rolle des neutralen Elements ein, bei der Multiplikation die des absorbierenden Elements. Das diese Objekte in der Algebra meist benötigt werden, eg. zur Definition von Inversen, ist es in dieser mathematischen Disziplin fruchtbar, die Null zu den natürlichen Zahlen zu zählen.

[167] Hierbei ist eine Abbildung $f : V \to W$ injektiv genau dann, wenn $[f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'] \ \forall \ v, v' \in V$ gilt. Injektivität bedeutet also, dass jeder Bildpunkt von $W$ höchstens ein Urbild in $V$ hat. Die Abbildung $f$ ist somit umkehrbar, insofern man $W$ eingeschränkt auf die Bildmenge von $V$ betrachtet, also die Funktion $\tilde{f}^{-1} : W|_{f(V)} \to V$.

# 4 Fazit

Die Beantwortung der Frage, ob die Null zu den natürlichen Zahlen zu zählen sei oder nicht, kann nicht eindeutig beantwortet werden.

Ob eine frühe Hochkultur die Null kannte oder nicht, hängt davon ab, wie heutige Historiker gewisse Zeichen interpretieren: Im Falle der Babylonier entwickelte sich in deren Zahlzeichensystem ein Platzhaltersymbol, welches dieselbe Rolle einnimmt wie die Null in unserem Dezimalsystem. Bei den Ägyptern tritt an einer Stelle das Negationszeichen in einem mathematischen Text auf, an Stelle dessen heute die Null stünde. Die Griechen benötigten keine Null oder schlossen diese implizit über die Definition von „möglichen Zahlen", zu denen die Null nicht zählt, aus. Ob die frühen Hochkulturen die Null nicht kannten oder schlichtweg nicht verwendeten, ist also nicht zu beantworten. Dennoch beleuchtet diese Untersuchung zwei Aspekte, die sich in der heutigen Null vereinen: Die Notwendigkeit der Kenntlichmachung einer „Lücke" bei der Verwendung eines positionellen Zahlensystems und einer Bezeichnung der Negation im mathematischen Kontext. Letztendlich sorgten Einfachheit und Mächtigkeit des Jahrtausende später entwickelten indischen Zahlensystems dafür, dass sich dieses durchsetzte und in der abendländischen Mathematik bis heute die Null als Ziffer verwendet wird. Versuche einer Axiomatisierung des Zahlbegriffs und in diesem Kontext der Definition von natürlichen Zahlen wurden erst sehr viel später unternommen.

Bei den Mathematikern des 19. bis frühen 20. Jahrhunderts p.Chr.n., die sich an einer Axiomatisierung des (natürlichen) Zahlbegriffs, resp. der Arithmetik versuchten, lassen sich grundsätzlich drei Strömungen erkennen:
Bolzano und Kronecker definieren zuerst arithmetische Operationen und danach kontextuell die Null, sobald eine solche durch die beschriebenen Operationen notwendig wird. Dieses Vorgehen ist der Tatsache geschuldet, dass beide primär die Arithmetik fundieren möchten und hierbei bereits von einem vorhandenen Zahlbegriff ausgehen. In diesem Sinne stehen sie der modernen Algebra nahe. Bolzanos weitere Kategorisierung der Zahlen scheint eher willkürlicher Natur zu sein und birgt offenkund keinen größeren Nutzen in sich.
Dedekind, Peano, und Russell definieren in gleicher Weise die Zahlen rekursiv über ein Grundelement und die Nachfolgefunktion. Die Autoren unterscheiden sich diesbezüglich nur in der Einfachheit der Darstellung: Peanos Axiome sind weitaus einfacher und klarer notiert als Dedekinds und wahrscheinlich daher bis heute status quo. Bei allen Autoren können die Zahlen sowohl mit oder ohne Null definiert werden. Die einzelnen Autoren haben indes unterschiedliche Meinungen zu gewissen mathematischen Objekten: Dedekind lehnt die Existenz einer leeren Menge ab. Falls man diese mit der Null identifizieren möchte, so nimmt er letztere wahrscheinlich von den natürlichen Zahlen aus. Peano definiert die Zahlen als positive Ganzzahlen, über die Null äußert er sich nicht. Russell fügt Peanos extensionalen Axiomen noch eine intensionale Bedeutung hinzu, viz. dass man mit den definierten Objekten reale Gegenstände zählen können muss. Da er die Null zu den natürlichen Zahlen rechnet, fällt für ihn das Erkennen der Abwesenheit eines Objektes demnach unter den Begriff Zählen.
Helmholtz, Frege und das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem ZFC versuchen grundlegender den Zahl-, resp. Mengenbegriff zu fundieren. Helmholtz und Frege identifizieren die Zahlen mit dem Begriff der Anzahl von Mengen, wobei Helmholtz psychologistisch vorgeht, indem er die

Kardinalzahlen aus den Ordinalzahlen, welche durch Bewusstseinsakte entstünden, entwickelt, Frege hingegen logizistisch, indem er den Zahlbegriff alleine auf der Logik fundiert. Helmholtz sieht die Null nicht als natürliche Zahl an, da seiner Meinung nach die Anzahl, der die Null entspricht, nicht durch Zählen festgestellt werden kann. Frege hingegen sieht die Null als (natürliche) Zahl an, weil er zunächst seinen Anzahlbegriff rekursiv über die Null als Anzahl der leeren Menge, logisch erzeugt durch Kontradiktion, definiert und anschließend Zahlen mit Anzahlen identifiziert.
Das System ZFC sagt nichts spezielles über die natürlichen Zahlen aus, einzig die Tatsache, dass die leere Menge als Urlement auftritt, sie also nach ZFC existiert, sichert die Existenz einer Null durch Identifikation dieser mit der leeren Menge.

In den mathematischen Disziplinen wird die Null zu den natürlichen Zahlen gerechnet oder nicht, je nachdem wie fruchtbar die jeweilige Definition für das jeweilige Fach ist. In der Analysis wird $\mathbb{N}$ meist ohne die Null definiert, in der Algebra hingegen mit. In beiden Fällen ist es schlichtweg nützlicher die jeweilige Definition zu verwenden, um ungewünschte Fallunterscheidungen und somit überflüssige Arbeit zu vermeiden.

Der für mich entscheidende Aspekt zur Beantwortung der Frage, wie „natürlich" die Null sei, ist die lange Entwicklungsgeschichte dieses Zeichens: Dass der Mensch seit jeher eine Idee vom Fehlen eines Gegenstandes oder der Unterlassung einer Handlung hatte, belegen Worte wie „kein" oder „nicht" in den verschiedensten (e.g. antiken) Sprachen. Die Abstraktion dieses „Nichts" hin zu einer konkreten Zahl, mit der gerechnet werden kann, stellt eine ungeheure Geistesleistung dar, die viele Jahrhunderte der Entwicklung und Akzeptanz brauchte. Auf eine leere Menge kann nicht direkt zugegriffen werden. Deshalb ist die Null dem Menschen im Sinne von Anzahl nicht sensorisch „gegeben", sondern ein reines Produkt des Geistes. Die Tatsache, dass hochzivilisierte Kulturen wie das antike Griechenland oder das römische Reich gänzlich ohne einen Zahlbegriff der Null auskamen und dennoch hervorragende Mathematiker wie Euklid oder Diophant hervorbrachten und sogar einen Pythagoras, der die Zahl als oberstes Prinzip ansah, eine Null aber nicht kannte, lässt mich schließen, dass diese dem Menschen nicht a priori als Zahl gegeben ist. Auch die mehrere Jahrhunderte dauernde Eroberungszeit der Ziffer Null, ausgehend von der indischen bis hin zur modernen europäischen Mathematik, unterstützt diese These. Somit zählt die Null für mich nicht zu den natürlichen Zahlen; also komme ich zu dem Schluss:

$$0 \notin \mathbb{N}$$

# 5 Literaturverzeichnis


**Bašmakova**, Isabella (1974): *Diophant und diophantische Gleichungen.* Basel / Stuttgart: Birkhäuser.

**Berg**, Jan (1976): cf. Bolzano, Bernard (183?).

**Bolzano**, Bernard (183?): *Reine Zahlenlehre.* (Aus dem Nachlass.)
Hrsg. von **Berg**, Jan (1976): *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe* [Reihe II, Nachlass, Band 8]. *Größenlehre II, Reine Zahlenlehre.* Stuttgart / Bad Cannstatt: Friedrich Frommann.

**Bolzano**, Bernard (1847): *Paradoxien des Unendlichen.* (Aus dem Nachlass.)
Hrsg. von **Prîhonski**, Fr. [sic!] (1851): *Paradoxien des Unendlichen.* Leipzig: Reclam.
Nachdruck (1921). Hamburg: Meiner.

**Bosch**, Siegfried (2009): *Lineare Algebra. 4., überarbeitete Auflage.* Berlin: Springer.

**Büchel**, Carl (1912): *Die Arithmetica des Diophant von Alexandria.* Hamburg: Lütcke & Wulff.

**Büchel**, Carl (1905): *Ganzzahlige Werte bei Diophant.* Hamburg: Lütcke & Wulff.

**Carnap**, Rudolf (1959): *Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit.* Wien: Springer.

**Dedekind**, Richard (1893): *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.
Nachdruck (2012). Cambridge / New York: Cambridge University Press.

**Ebbinghaus**, Heinz-Dieter (2003): *Einführung in die Mengenlehre, 4. Auflage.* Berlin / Heidelberg: Spektrum.

**Ebbinghaus**, Heinz-Dieter et al. (2007): *Einführung in die mathematische Logik, 5. Auflage.* Berlin / Heidelberg: Spektrum.

**Fibonacci**, Leonardo (1202): *Liber abaci.* [Teils wird abacus, teils abbacus geschrieben, Anm. d. Verf.]
Hrsg. von **Boncompagni**, Baldassarre (1857): *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano. Publicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano.* Rom: Scienze Mathematiche e Fisiche.

**Frege**, Gottlob (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: Wilhelm Koebner.
Hrsg. von **Thiel**, Christian (1988): *Gottlob Frege: Die Grundlagen der Arithmetik. Auf der Grundlage der Centenarausgabe herausgegeben von Christian Thiel.* Hamburg: Meiner.

**Frege**, Gottlob (1893): *Die Grundgesetze der Arithmetik.* Jena: Hermann Pohle.
Hrsg. von **Müller**, Thomas et al. (2009): *Gottlob Frege. Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Band I und II. In moderne Formelnotation transkribiert und mit einem ausführlichen Sachregister versehen von Thomas Müller, Bernhard Schröder und Rainer Stuhlmann-Laeisz.*. Paderborn: mentis.

**Gericke**, Helmuth (1970): *Geschichte des Zahlbegriffs.* Mannheim: Hochschultaschenbücher-Verlag.

**Helmholtz**, von, Hermann (1887): *Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet.*
Hrsg. von **Hertz**, Paul et al. (1921): *Hermann v. Helmholtz: Schriften zur Erkenntnistheorie.* Berlin: Julius Springer.

**Hertz**, Paul (1921): cf. **Helmholtz**, von, Hermann (1887).

**Hofmann**, Joseph (1963): *Geschichte der Mathematik* [Bd. 1]: *Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes.* Berlin: de Gruyter.

**Ifrah**, Georges (1992): *Die Zahlen. Die Geschichte einer großen Erfindung.* Frankfurt a. M. / New York: Campus.

**Kaballo**, Winfried (2000): *Einführung in die Analysis I.* Heidelberg / Berlin: Spektrum.

**Kant**, Immanuel (1783): *Prologomena zu einer jeden künftigen Metaphysik die als Wissenschaft wird auftreten können.* Riga: Johann Friedrich Hartknoch.

**Kaplan**, Robert (2006): *Die Geschichte der Null.* München / Zürich: Piper.

**Kronecker**, Leopold (1887): *Ueber den Zahlbegriff.*
Hrsg. von **Hensel**, Kurt (1899): *Leopold Kroneckers Werke* [Bd. 3, 1. Halbband].
Nachdruck (1968). New York: Chelsea Publishing Company.

**Kutschera**, von, Franz (1989): *Gottlob Frege.* Berlin: De Gruyter.

**Lietzmann**, W. (sic!) (1926): *Überblick über die Geschichte der Elementarmathematik (Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen. Ergänzungsheft 1).* Leipzig, Berlin: Teubner.

**Menninger**, Karl (1979): *Zahlwort und Ziffer: eine Kulturgeschichte der Zahl. 3. Auflage, unveränderter Nachdruck der 2., neubearbeiteten und erweiterten Auflage von 1958.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

**Neugebauer**, Otto (1957): *The Exact Sciences in Antiquity.* Providence (RI): Brown Univ. Press.

**Peano**, Giuseppe (1889): *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita.*
Hrsg. (1958): *Giuseppe Peano: Opere Scelte Volume II.* Rom: Edizioni Cremonese.

**Popper**, Karl (1994): *Objective Knowledge. An Evolutionary Approach.*. Oxford: Clarendon Press.

**Riedweg**, Christoph (2002): *Pythagoras. Leben Lehre Nachwirkungen.* München: C. H. Beck.

**Russell**, Bertrand (1919): *Introduction to Mathematical Philosophy.*
Neuauflage (2010). New York: Digireads.com.

**Seife**, Charles (2002): *Zwilling der Unendlichkeit.* München: Goldmann.

**Struik**, Dirk (1948): *A concise History of Mathematics. Illustrated with 49 portraits, & texts.* New York: Dover Publications.

**Tannery**, Paul (edt. in 1893): *Diophanti Alexandrini opera omnia cum graecis comentariis.* Leipzig: Teubner.

**Thaer**, Clemens (edt. in 1962): *Euklid. Die Elemente.* Darmstadt: Wissensch. Buchgesellschaft.

**Tropfke**, Johannes (1980): *Geschichte der Elementarmathematik (Bd. I).* Berlin: de Gruyter.

**Unger**, Ephraim (1843): *Kurzer Abriß der Geschichte der Zahlenlehre von Pythagoras bis auf Diophant.* Erfurt: Uckermann.

**Vogel**, Kurt (1958): *Vorgriechische Mathematik I: Vorgeschichte und Ägypten.* Hannover / Paderborn: Schroedel.

**Wells**, David (1990): *Das Lexikon der Zahlen.* Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch Verlag.

**Wußing**, Hans (1979): *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.* Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

**Zermelo**, Frank (1932, Hrsg.): *Georg Cantor: Gesammelte Abhandlungen.* Berlin: Springer.
Nachdruck (1962). Hildesheim: Georg Olms.

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Wörtlich übernommene Sätze oder Satzteile sind als Zitat belegt, andere Anlehnungen hinsichtlich Aussage und Umfang unter Quellenangabe kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und ist nicht veröffentlicht.

Düsseldorf, den 25. Januar 2015