Grothendieck-Universen

Bachelorarbeit

Vorgelegt von

Leonard Jobst Eberhard Pleschberger

aus Meerbusch

Angefertigt am
Mathematischen Institut
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

02. Juni 2015

Betreuer: Prof. Dr. Stefan Schröer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorgelegten Abschlussarbeit untersuchen wir Grothendieck-Universen, sogenannte stark unerreichbaren Kardinalzahlen und die Beziehung zwischen diesen beiden mathematischen Objekten. Die Theorie der Grothendieck-Universen

Im ersten Teil der Arbeit definieren wir zunächst gewisse Mengen als Grothendieck-Universen und geben zwei solcher Universen explizit an. Anschließend leiten wir einige Sätze über mengentheoretische Operation innerhalb von Grothendieck-Universen her und kommen zum Schluss, dass Grothendieck-Universen unter den üblichen mengentheoretischen Operationen, insbesondere Potenzmengenbildung, abgeschlossen sind. Zum Ende des ersten Teils führen wir das Universen-Axiom (A$\mathscr{U}$) ein. Es besagt, dass eine jede Menge Element eines Grothendieck-Universums ist.

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns der Bildung des Ordinal- und Kardinalzahlbegriffs. Zunächst betrachten wir Ordnungsrelationen. Hieraus erhalten wir den Begriff der Wohlordnung und leiten einige Sätze über diese Strukturen her. Schließlich gelangen wir zum Hauptsatz der Theorie der Wohlordnungen. Demnach sind zwei Wohlordnungen entweder einander isomorph, oder die eine ist einer gewissen echten Teilmenge der anderen isomorph. Anschließend übersetzen wir Wohlordnungen nach John von Neumann in transitive Mengen, die wir Ordinalzahlen nennen. Bei den Ordinalzahlen ist die Ordnungsinformation der ursprünglichen Wohlordnung noch bewahrt. Vergessen wir diese Information gelangen wir zur Kardinalität einer Menge, ie. die Anzahl ihrer Elemente. Wir wählen auf kanonische Weise die kleinste Ordinalzahl aus der Äquivalenzklasse aller gleichmächtigen Ordinalzahlen. Diesen Repräsentanten nennen wir Kardinalzahl und definieren stark unerreichbare Kardinalzahlen mit gewissen Eigenschaften. Wir beschließen diesen Teil mit dem Axiom von den stark unerreichbaren Kardinalzahlen (ASU). Demnach wird jede Kardinalzahl von einer stark unerreichbaren Kardinalzahl majorisiert.

Im dritten und letzten Teil der Arbeit betrachten wir eine Verallgemeinerung der vollständigen Induktion auf beliebige Wohlordnungen, die transfinite Induktion. Mit diesem Beweisverfahren können wir im Anschluss ein Theorem zeigen, dessen Beweis den restlichen Schlussteil einnimmt. Er besagt, dass das Universen-Axiom (A$\mathscr{U}$) und das Axiom von den stark unerreichbaren Kardinalzahlen (ASU) äquivalent sind. Der Beweis ist etwas aufwändiger, deshalb sind die einzelnen Richtungen in mehrere Schritte unterteilt. Für die Hinrichtung rechnen wir die Axiome für stark unerreichbare Kardinalzahlen nach. Für die Rückrichtung konstruieren wir uns zu einer beliebigen Menge zunächst ein Objekt $\mathscr{U}$ und zeigen dann, dass es sich hierbei auch tatsächlich um ein Grothendieck-Universum handelt.

Für den gesamten Teil 1, Teil 2.3 und Theorem 3.2 stütze ich mich hauptsächlich auf den Eintrag über Grothendieck-Universen im SGA4 [1]. Die Theorie der Wohlordnungen habe ich aus verschiedenen Quellen zusammengestellt. Genannt seien vor allem [4], [5], [6] und [7]. Sonstige Zitate sind im Text belegt.

1 Grothendieck-Universen

1.1 Definition von Grothendieck-Universen

Grothendieck-Universen werden u.a. eingeführt, um Zahlbereiche zu gewinnen, die groß genug sind, um in ihnen alle üblichen mathematischen Operationen durchführen zu können. Auf diese Weise kann eg. die Einführung von echten Klassen zur Umgehung von Mengenparadoxien vermieden werden. Basierend auf der üblichen Mengenlehre definieren wir ein Universum wie folgt:

Definition 1.1. (Grothendieck-Universum)

Eine Menge $\mathscr{U}$ heißt *(Grothendieck-)Universum*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(U.1)	$x \in \mathscr{U}$ und $y \in x \Rightarrow y \in \mathscr{U}$	(Transitivität)
(U.2)	$x, y \in \mathscr{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathscr{U}$	(Paarmenge)
(U.3)	$x \in \mathscr{U} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathscr{U}$	(Potenzmenge)
(U.4)	$(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ ist Familie von Elementen aus $\mathscr{U}$ und $\mathrm{I} \in \mathscr{U} \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} x_\alpha \in \mathscr{U}$.	(Vereinigung)

Man könnte noch die Bedingung „(U.5) $x, y \in \mathscr{U} \Rightarrow (x, y) \in \mathscr{U}$ “ in die Definition aufnehmen. Diese folgt aber direkt aus (U.2) vermöge der Kuratowskischen Notation $(x, y) := \{\{x, y\}, \{x\}\}$ und dem noch folgenden Satz 1.3 (iii).

Es gibt nur wenige Grothendieck-Universen, die explizit angegeben werden können. Im folgenden geben wir ein triviales und ein nichttriviales Beispiel für Grothendieck-Universen explizit an:

Beispiele 1.2. (Explizite Grothendieck-Universen)

(i) Laut Bourbaki ist die leere Menge ein Universum, welches mit $\mathscr{U}_0$ bezeichnet wird.

(ii) Es bezeichne $\mathcal{W}$ die Menge aller endlichen sowie nichtleeren Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{$„ { “, „ } “, „ , “, „ $\emptyset$ “$\}$. Ein Wort $\mathrm{W} \in \mathcal{W}$ heißt *signifikant*, wenn es folgende rekursive Bedingungen über die Wortlänge n erfüllt:

a) Für $n = 1$ ist einzig $\emptyset$ signifikant.

b) Ein Wort $\mathrm{W} \in \mathcal{W}$ der Länge n ist nur dann signifikant, wenn es $p \geq 2$ verschiedene signifikante Wörter $w_1, w_2, ..., w_p$ gibt, deren Wortlängen je echt kleiner n sind, so dass gilt:

$$\mathrm{W} = \{w_1, w_2, ..., w_p\}.$$

Nun bezeichnen wir mit $\mathscr{U}_1 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, ...\}$ die Menge aller signifikanten Wörter. Mit jedem signifikanten Wort $\mathrm{W} \in \mathscr{U}_1$ können wir klarerweise ein Objekt aus der Mengenlehre bezeichnen, indem wir semantisch das Zeichen „ $\emptyset$ “ als die Menge $\emptyset$ definieren. Die syntaktisch gleiche Konstruktion wird uns wieder in Beispiel 2.12 begegnen.

Wir sehen leicht, dass $\mathscr{U}_1$ die Bedingungen (U.1) bis (U.4) erfüllt und somit ein Universum ist. Alle Elemente von $\mathscr{U}_1$ sind endlich und $\mathscr{U}_1$ selbst ist abzählbar und zugleich auch das kleinste unendliche Universum.

1.2 Operationen in Grothendieck-Universen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit Mengenoperationen in Grothendieck-Universen beschäftigen. Wir werden sehen, dass ein Grothendieck-Universum unter allen üblichen Mengenoperationen abgeschlossen ist. Der Vereinfachung diene zunächst folgende

Konvention:
Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathscr{U}$ stets ein Grothendieck-Universum und verwenden anstatt des Wortes Grothendieck-Universum schlichtweg Universum.

Unmittelbar aus den Axiomen können wir bereits einige elementare Sätze beweisen. Die Hauptaussagen der nun folgenden Sätze lauten:

Für X, Y $\in \mathscr{U}$ und Familien von Elementen $(x_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ von $\mathscr{U}$ gelten:
- Teilmengen von X liegen in $\mathscr{U}$, sowie $\{\mathrm{X}\} \in \mathscr{U}$
- Tupel, Produkte und Relationen von X, Y liegen in $\mathscr{U}$
- Summe und Produkt von $(x_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ liegen in $\mathscr{U}$
- Für beliebige $\mathrm{W} \subseteq \mathscr{U}$, $\mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ mit $|\mathrm{W}| \leq |\mathrm{Y}|$ gilt: $\mathrm{W} \in \mathscr{U}$
- $\mathscr{U}$ besitzt Teilmengen beliebiger endlicher Kardinalität.

Diese Aussagen werden nun in den folgenden Sätzen präzisiert und bewiesen.

Satz 1.3.
Sei $\mathscr{U}$ ein Universum. Dann gelten:
(i) Aus $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$ und $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ folgt $\mathrm{Y} \in \mathscr{U}$.
(ii) Seien $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$ und $\mathrm{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt: $\mathrm{Y} \in \mathscr{U}$.
(iii) Aus $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$ folgt $\{\mathrm{X}\} \in \mathscr{U}$.

Beweis:
(i) $\mathcal{P}(\mathrm{X}) \in \mathscr{U}$ nach (U.3), $\mathrm{Y} \in \mathcal{P}(\mathrm{X}) \Rightarrow \mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ nach (U.1).
(ii) $\mathrm{Y} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow Y \in \mathscr{U}$ nach (U.3).
(iii) Folgt aus (U.3), angewendet auf Y := X. □

Satz 1.4.
Sei $\mathscr{U}$ ein Universum. Dann gelten:
(i) Jedes Paar, Tripel und Quadrupel von Elementen aus $\mathscr{U}$ ist Element von $\mathscr{U}$.
(ii) Aus $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ folgt $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \in \mathscr{U}$.
(iii) Für beliebige Mengen X, Y, Z, ... $\in \mathscr{U}$ und jede Menge Ξ, die von höherer Stufe als X, Y, Z, ... ist, gilt: $\Xi \in \mathscr{U}$.

Beweis:
(i)Dies folgt mit der Kuratowskischen Notation $(x, y) := \{\{x, y\}, \{x\}\}$ und $(x, y, z) := ((x, y), z)$, sowie $(x, y, z, t) := ((x, y, z), t)$ aus (U.2).
(ii) Für $x \in \mathrm{X}$ ist $\{x\}\times$ Y die Vereinigung der Familie $\{(x, y)\}_{y\in \mathrm{Y}}$; da $\{(x, y)\} \in \mathscr{U}$ nach (U.1), (U.2) sowie Satz 3 folgt $\{x\}\times \mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ via (U.4). Schließlich ist $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ die Vereinigung der Familie $\{(x, \mathrm{Y})\}_{x\in \mathrm{X}}$, also nach (U.4) Element von $\mathscr{U}$.
(iii) Folgt aus sukzessiver Anwendung von Satz 1.4 (ii) und (U.3). □

Satz 1.5.
Sei $\mathscr{U}$ ein Universum. Dann gelten für eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}} \subseteq \mathscr{U}$ und einer Indexmenge $\mathrm{I} \in \mathscr{U}$:
(i) $\sum_{\alpha\in\mathrm{I}} x_\alpha \in \mathscr{U}$ für alle $\alpha \in \mathrm{I}$.
(ii) $\prod_{\alpha\in\mathrm{I}} x_\alpha \in \mathscr{U}$ für alle $\alpha \in \mathrm{I}$.

Beweis:
(i) Es gilt: $\sum_{\alpha\in\mathrm{I}} x_\alpha \subseteq (\bigcup_{\alpha\in\mathrm{I}} x_\alpha) \times \mathrm{I}$. Nach (U.4) und Voraussetzung ist $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{I}} x_\alpha \in \mathscr{U}$ und nach Satz 1.4 (ii) gilt $(\bigcup_{\alpha\in\mathrm{I}} x_\alpha) \times \mathrm{I} \in \mathscr{U}$. Anwendung von Satz 1.3 (i) liefert die Behauptung.
(ii) Das Produkt ist eine Menge von Abbildungen von I nach $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{I}} x_\alpha$, wobei diese Vereinigung nach (U.4) Element von $\mathscr{U}$ ist. □

Satz 1.6.
Sei $\mathscr{U}$ ein Universum.
(i) Für $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ gilt: Jede Relation $\mathcal{R}$ zwischen X und Y ist Element von $\mathscr{U}$. Insbesondere ist jede Abbildung zwischen X und Y Element von $\mathscr{U}$.
(ii) Für $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ gilt: Alle Mengen R von Relationen zwischen X und Y sind Element von $\mathscr{U}$.

Beweis:
(i) Eine Relation $\mathcal{R}$ ist ein Tripel (X,Y,Γ), wobei Γ eine Teilmenge von $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ ist. Nach Satz 1.4 (ii) und Satz 1.3 (i) gilt: $\Gamma \in \mathscr{U}$, also gilt nach Satz 1.4 (i): $\mathcal{R} \in \mathscr{U}$.
(ii) $\mathrm{R} \subseteq \{\mathrm{X}\} \times \{\mathrm{Y}\} \times \mathcal{P}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) := \mathrm{Z}$. Nach Satz 1.3 (iii) und 1.4 (iii) gilt: $\mathrm{Z} \in \mathscr{U}$, also gilt mit Satz 1.3 (i): $\mathrm{R} \in \mathscr{U}$. □

Satz 1.7.
Sei $\mathscr{U}$ ein Universum.
(i) Für $\mathrm{X} \subseteq \mathscr{U}$ und $\mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ mit $|\mathrm{X}| \leq |\mathrm{Y}|$ gilt: $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$.
(ii) Für $\mathscr{U} \neq \emptyset$, für alle $\mathrm{M} \subset \mathscr{U}$ mit $|\mathrm{M}| \leq \infty$ gilt: $\mathrm{M} \in \mathscr{U}$ und $\mathscr{U}$ besitzt Teilmengen beliebiger endlicher Kardinalität.

Beweis:
(i) Sei $\mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ mit $|\mathrm{X}| \leq |\mathrm{Y}|$. Dann existiert eine Surjektion: $\mathrm{Y} \supseteq \tilde{\mathrm{Y}} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$, $\mathrm{y} \mapsto \mathrm{x_y}$. Also ist X $= \bigcup_{\mathrm{y}\in\tilde{\mathrm{Y}}} \{x_{\mathrm{y}}\} \in \mathscr{U}$ nach Satz 1.3 (i), 1.3 (iii) und (U.4).
(ii) Für $\mathscr{U} = \emptyset$ ist $\emptyset$ eine endliche Teilmenge von $\emptyset$, aber kein Element von $\emptyset$. Aus $\mathscr{U} \neq \emptyset$ und Satz 1.3 (iii) folgt nun, dass eine beliebige Menge X_0 eine Teilmenge besitzt, die Element von $\mathscr{U}$ ist (wenigstens die leere Menge). Definiere $\mathrm{X}_{n+1} := \mathcal{P}(\mathrm{X}_n)$ per Rekursion nach n. Nun gilt nach (U.3): $\mathrm{X}_n \in \mathscr{U}$ und $|\mathrm{X}_{n+1}| = 2^{|\mathrm{X}_n|}$. Daraus folgt, dass $\mathscr{U}$ Elemente beliebig großer Kardinalität besitzt. □

Schließlich noch ein Satz über Operationen zwischen Universen:

Satz 1.8.
Für eine Familie $(\mathscr{U}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ nichtleerer Universen gilt: $\mathscr{U} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{U}_\lambda$ ist ein Universum.

Beweis: Dies folgt direkt aus der Definition. □

1.3 Das Universenaxiom

Mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre können wir die Existenz eines Grothendieck-Universums weder beweisen oder widerlegen. Wir können einem System wie eg. ZFC also das folgende Axiom hinzufügen.

Axiom 1.9. (Universen-Axiom)

(A$\mathscr{U}$) Für eine jede Menge X existiert ein Grothendieck-Universum $\mathscr{U}$ mit $X \in \mathscr{U}$.

In Teil 3 dieser Arbeit werden wir sehen, dass dieses Axiom (A$\mathscr{U}$) äquivalent ist zu einer gewissen Existenzaussage über sogenannte stark unerreichbare Kardinalzahlen. Deshalb wenden wir uns im zweiten Teil nun den Begriffen der Wohlordnungen, der Ordinal- und Kardinalzahlen und schließlich dem der stark unerreichbaren Kardinalzahl zu.

2 Transfinite Zahlenlehre

Während der Begriff der Ordinal- und Kardinalzahlen für endliche Mengen zusammenfällt, nämlich die Anzahl derer Elemente bezeichnet, ist dies bei unendlichen Mengen nicht der Fall. Im zweiten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns daher mit der Entwicklung eines transfiniten Konzepts der Ordinal- und Kardinalzahlen.

Um das nötige Rüstzeug zu haben, führen wir im ersten Abschnitt zunächst den Begriff der (Wohl-)Ordnung ein. Anschließend beweisen wir unter anderem mit Hilfe des Lemmas von Zermelo den Hauptsatz der Theorie der Wohlordnungen.
Mit diesen Begriffen und Sätzen ausgestattet können wir im zweiten Abschnitt auf axiomatische Weise die Ordinalzahlen nach John von Neumann einführen. Hierauf erfolgt die Definition der Kardinalzahlen als spezielle Ordinalzahlen.
Im dritten Abschnitt entwickeln wir den Begriff der stark unerreichbaren Kardinalzahl. Eine gewisse Existenzaussage über solche Objekte hängt direkt mit Grothendieck-Universen zusammen, was wir im dritten Teil der Arbeit zeigen werden.

2.1 Theorie der Wohlordnungen

Um die Ordinalzahlen definieren zu können, benötigen wir zunächst den Begriff der Menge und den der Wohlordnung. Ersteren, den Mengenbegriff, setzen wir insofern als bekannt voraus, dass wir Georg Cantors berühmte Definition „Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen" ([2], 481.) verwenden. Abraham Fraenkel folgend „stellen wir uns [...] auf einen pragmatischen Standpunkt" ([3], 13.) der Gestalt, dass wir Cantors Definition als unproblematisch hinnehmen.

Gegeben den Begriff der Menge betrachten wir nun Strukturen auf Mengen, konkret zweistellige Relationen mit gewissen Eigenschaften. Zunächst klären wir den Begriff der partiellen Ordnung und der partiellen Totalordnung durch folgende

Definition 2.1. (Partielle Ordnung, partielle Totalordnung)
Eine *partielle Ordnung* ist ein Tupel $(X,\leq)$, bestehend aus einer (partiell geordneten) nichtleeren Menge X und einer Relation „$\leq$" $\subset X \times X$, so dass für alle $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften gelten:

(O1)	$x \leq x$	(Reflexivität)
(O2)	$(x \leq y$ und $y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$	(Transitivität)
(O3)	$(x \leq y$ und $y \leq x) \Rightarrow (x = y)$	(Antisymmetrie)

Eine partielle Ordnung $(X,\leq)$ heißt *partielle Totalordnung*, wenn zusätzlich gefordert wird, dass alle Elemente der Menge X durch die Ordnungsrelation $\leq$ angeordnet werden können, ie. für alle $x, y \in (X,\leq)$ gilt:

(TO) $x \leq y$ oder $y \leq x$ (Totalität)

Indem wir je zwei Elemente $x, y \in (X,\leq)$, für die $x = y$ gilt, modulo der Gleichheitsrelation zu einer Äquivalenzlasse zusammenfassen, erhalten wir eine eine sogenannte Striktordnung $(X,<) = (X,\leq)/_{=}$ mit den folgenden Eigenschaften:

Definition 2.2. (Striktordnung, strikte Totalordnung)
Eine *Striktordnung* ist ein Tupel (X,<), bestehend aus einer (strikt geordneten) nichtleeren Menge X und einer Relation „<“ $\subset$ X $\times$ X, so dass für alle x, y, z $\in$ X folgende Eigenschaften gelten:

(O1')	$x \not< x$	(Irreflexivität)
(O2')	$(x < y$ und $y < z) \Rightarrow (x < z)$	(Transitivität)
(O3')	$(x < y) \Rightarrow (y \not< x)$	(Antisymmetrie)

Eine Striktordnung (X,<) heißt *strikte Totalordnung*, wenn zusätzlich für alle x, y $\in$ (X,<) gilt:

(TO') $x < y$ oder $y < x$ (Totalität)

Um den für die Ordinalzahltheorie zentralen Begriff der Wohlordnung einführen zu können, zunächst noch eine

Definition 2.3. (Kleinstes Element, minimales Element)
Sei (X,$\leq$) eine partielle Ordnung und M $\subseteq$ X. Dann heißt
(i) y $\in$ X ein *kleinstes Element* von M, wenn für alle x $\in$ M gilt: y $\leq$ x;
(ii) min(M) $\in$ X das *minimale Element* von M, wenn für alle x $\in$ M gilt:

$$\mathrm{x} \leq \min(M) \Rightarrow \min(X) = \mathrm{x}.$$

Definition 2.3. (Wohlordnung)
Eine *Wohlordnung* (X,$\leq$) ist eine partielle Totalordnung, welche zusätzlich die folgende Eigenschaft erfüllt:

(WO) Alle nichtleeren Teilmengen Ξ von (X,$\leq$) haben ein minimales Element ξ, bezeichnet mit $\xi =: \min(\Xi)$.

Bemerkung: Man kann Wohlordnungen auch lediglich als partielle Ordnungen mit der Eigenschaft (WO) definieren, da eine solche Ordnung automatisch eine Totalordnung ist. Diese Tatsache verifizieren wir mit dem folgenden

Lemma 2.4.
Eine partielle Ordnung (X,$\leq$) mit der Eigenschaft (WO) ist automatisch eine Totalordnung.

Beweis: Angenommen, (X,$\leq$) sei keine Totalordnung. Also gilt (TO) nicht, ie. es existiert ein $\omega \in$ X mit $\omega \not\leq$ y und y $\not\leq \omega$ für ein y $\in$ (X,$\leq$). Nach (WO) haben alle nichtleeren Teilmengen von (X,$\leq$) ein minimales Element. Da $\omega \in$ (X,$\leq$) ist, ist ω insbesondere Teilmenge von (X,$\leq$).
1. Fall: Sei $\omega \neq \emptyset$. Dann kann X nur aus ω selbst bestehen, denn falls ein $\omega \neq$ y $\in$ (X,$\leq$) gäbe, so wäre $\{y\} \cup \{\omega\}$ wieder eine nichtleere Teilmenge von (X,$\leq$), aber ohne ausgezeichnetes minimales Element, im Widerspruch zu (WO). Wegen $\omega = \omega$ gilt aufgrund der Reflexivität der partiellen Ordnung aber $\omega \leq \omega$, also gilt für alle Elemente von (X = $\{\omega\}$, $\leq$) die Eigenschaft (TO), ein Widerspruch zur Annahme.
2. Fall: Sei $\omega = \emptyset$. Falls ein anderes Element $\omega \neq \omega' \in$ (X, $\leq$) existiert, für das gilt: $\omega' \in$ X mit $\omega' \not\leq$ y oder y $\not\leq \omega'$ für ein y $\in$ (X,$\leq$), befinden wir uns wieder im Fall 1. Also sind alle Teilmengen aus (X, $\leq$), die (TO) nicht erfüllen, leer. Demnach sind alle nichtleeren Elemente von X total geordnet, also ist X (X, $\leq$) eine Totalordnung. $\square$

Unter bloßer Verwendung der Definition lassen sich bereits einige Ergebnisse über Wohlordnungen gewinnen. Zunächst eine

Definition 2.5. (Homomorphismus)
Ein *Homomorphismus* auf einer wohlgeordneten Menge X ist eine Abbildung f: $X \to X$ mit der Eigenschaft:
Wenn $x \leq y$, so gilt $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in X$.

Lemma 2.6. (Zermelo)
Sei X eine wohlgeordnete Menge. Für einen injektiven Homomorphismus f: $X \to X$ gilt: $x \leq f(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Angenommen, es existiert ein minimales $y \in X$ mit der Eigenschaft $f(y) < y$. Da f ein Homomorphismus ist, gilt dann: $f(f(y)) < f(y) < y$. Durch Umbenennen erhalten wir: $f(y') < y' < y$. $\Rightarrow$ Es existiert ein $y' < y$ mit der Eigenschaft: $f(y') < y'$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von y. □

Korollar 2.7.
Seien X, Y wohlgeordnete Mengen. Dann gibt es höchstens einen Isomorphismus f zwischen X und Y.

Beweis: Seien $f, g : X \leftrightarrow Y$ zwei Isomorphismen. Insbesondere sind f und g injektiv. Nach dem Lemma von Zermelo gilt also: $x \leq f(x)$ und $x \leq g(x)$ für alle $x \in X$. Da f und g Isomorphismen sind, existieren auch die Umkehrabbildungen f^{-1} und g^{-1}. Die Verkettungen $g^{-1} \circ f$ und $f^{-1} \circ g$ sind wieder insbesondere injektive Homomorphismen, also folgt unter erneuter Verwendung des Lemmas von Zermelo: $x \leq (g^{-1} \circ f)(x)$ und $x \leq (f^{-1} \circ g)(x)$, äquivalent zu $g(x) \leq f(x)$ und $f(x) \leq g(x)$, also folgt $f = g$. □

Zur Gewinnung weiterer Erkenntnisse empfiehlt sich an dieser Stelle die Einführung sogenannter Anfangsstücke von wohlgeordneten Mengen, via die

Definition 2.8. (Anfangsstück)
Eine Teilmenge Y einer wohlgeordneten Menge X heißt *Anfangsstück*, wenn mit $y \in Y$ und $a \leq y$ stets folgt: $a \in Y$ für alle $a \in X$. Ein von der gesamten Menge X verschiedenes Anfangsstück Y ist immer von der Form $Y = [0, x)$ mit $x = \min(X \backslash Y)$ und $0 := \min(X)$. Ein Anfangsstück von X bezeichnen wir mit Anfang(X).

Das folgende Lemma behandelt Isomorphismen zwischen einer wohlgeordneten Menge X und einem ihrer Anfangsstücke.

Lemma 2.9.
Es gibt keinen Isomorphismus zwischen einer wohlgeordneten Menge X und einem Anfangsstück [0, x) von X für alle x ∈ X.

Beweis: Angenommen, es gibt einen solchen Isomorphismus f: $X \leftrightarrow [0, x)$ für ein $x \in X$. Es muss also gelten: $f(x) \in [0, x)$. $\Rightarrow f(x) < x$, was im Widerspruch zum Lemma von Zermelo steht, da f insbesondere ein injektiver Homomorphismus ist. □

Als nächstes behandeln wir Isomorphismen zwischen einer wohlgeordneten Menge und einem ihrer Anfangsstücke, vermöge dem

Korollar 2.10.
Seien X, Y wohlgeordnete Mengen. Es gibt nicht zugleich einen Isomorphismus f zwischen X und einem Anfangsstück von Y und einen Isomorphismus g zwischen Y und einem Anfangsstück von X.

Beweis: Angenommen, es existieren zwei solche Isomorphismen f und g. Damit folgt:

$$\mathrm{X} \cong_f \mathrm{Anfang(Y)} \subseteq \mathrm{Y} \cong_g \mathrm{Anfang(X)} \subseteq \mathrm{X} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{X} \cong \mathrm{Anfang(X)}.$$

Im Widerspruch zum Lemma 2.9. □

Mit Hilfe der gewonnenen Resultate können wir nun den Hauptsatz der Theorie der Wohlordnungen, bisweilen auch Cantorscher Vergleichbarkeitssatz genannt, zeigen:

Theorem 2.11. (Hauptsatz der Theorie der Wohlordnungen)
Entweder sind zwei wohlgeordnete Menge X und Y zueinander isomorph, oder genau eine der beiden ist zu einem Anfangsstück der anderen isomorph. Diese Isomorphismen sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien X, Y zwei wohlgeordnete Mengen. Angenommen, es existiert zugleich ein Isomorphismus zwischen X und Y und zwischen X und einem Anfangsstück von Y oder umgekehrt. Dann gilt $\mathrm{X} \cong \mathrm{Y} \cong \mathrm{Anfang(X)}$ oder $\mathrm{Y} \cong \mathrm{X} \cong \mathrm{Anfang(Y)}$, also $\mathrm{X} \cong \mathrm{Anfang(X)}$ oder $\mathrm{Y} \cong \mathrm{Anfang(Y)}$, im Widerspruch zu Lemma 2.9.
Falls Y und X isomorph sind, ist dieser Isomorphismus nach Korollar 2.7 eindeutig bestimmt. Falls X zu einem Anfangsstück von Y isomorph ist, ist nach Korollar 2.10 Y nicht zu einem Anfangsstück von X isomorph und umgekehrt. Wieder folgt die Eindeutigkeit des Isomorphismus' aus Korollar 2.7.
Wir zeigen noch, dass nicht zugleich $\mathrm{X} \ncong \mathrm{Y}$, $\mathrm{X} \ncong \mathrm{Anfang(Y)}$ und $\mathrm{Y} \ncong \mathrm{Anfang(X)}$ gelten können. Hierfür definieren wir die Menge

$$\Xi := \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \mid \mathrm{X}_{<\alpha} = [0, \alpha) \cong [0, \beta) = \mathrm{Y}_{<\beta}\}.$$

α und β sind durch den Isomorphismus eineindeutig durcheinander bestimmt. Angenommen es gelten zugleich $\alpha \neq \mathrm{X}$ und $\beta \neq \mathrm{Y}$. Definiere $\mathrm{x} := \min(\mathrm{X} \backslash \alpha)$ und $\mathrm{y} := \min(\mathrm{Y} \backslash \beta)$. Diese existieren, da X und Y (WO) erfüllen. Somit gelten $\alpha = \mathrm{X}_{<\mathrm{x}} = [0, \mathrm{x})$ und $\beta = \mathrm{Y}_{<\mathrm{y}} = [0, \mathrm{y})$ und Ξ ist der Graph eines Isomorphismus' zwischen $\mathrm{X}_{<\mathrm{x}}$ und $\mathrm{Y}_{<\mathrm{y}}$. Also ist x eindeutig durch einen Isomorphismus ϕ durch y bestimmt und umgekehrt. $\Rightarrow$ Es gilt $\mathrm{y} = \phi(\mathrm{x})$, bzw. $\mathrm{x} = \phi^{-1}(\mathrm{y})$, im Widerspruch zu $\mathrm{x} \notin \alpha$, bzw. $\mathrm{y} \notin \beta$. □

2.2 Ordinal- und Kardinalzahlen

Georg Cantor kam auf die Idee isomorphen Wohlordnungen eine eindeutige Ordinalzahl zuzuordnen. Für eine gegebene Wohlordnung X geschieht dies bei ihm in drei Schritten (cf. [2], 496ff.):
(i) Er zählt sukzessive jedes Element einer wohlgeordneten Menge X der Ordnung nach.
(ii) Diese „Zählakte“ fasst er zu einem Ordnungstyp zusammen. Ein Ordnungstyp sei „selbst eine geordnete Menge, deren Elemente lauter Einsen sind“ ([2], 497.)
(iii) Er ordnete diesem Ordnungstypen eine Ordinalzahl zu.

John von Neumann definiert die Ordinalzahlen auf elegantere Weise nur mit Hilfe der Mengenlehre: „Jede Ordnungszahl ist die Menge der ihr vorangehenden Ordnungszahlen“ ([6], 199.). Er vermeidet damit den unklaren Begriff des Ordnungstyps' sowie Cantors nun redundanten Schritt (ii). Im Folgenden wird die Theorie der Ordinalzahlen, die traditionell mit kleinen griechischen Buchstaben α, β, γ... bezeichnet werden, nach John von Neumann eingeführt. Um dessen Grundidee darzustellen, betrachten wir zunächst ein

Beispiel 2.12. (Von Neumann Ordinalzahlen für abzählbare Mengen)
Sei $(\alpha, <)$ eine abzählbare Wohlordnung. Sei α_i das i-te Element von α für $\mathrm{i} \in \mathbb{N}$. Wir weisen jedem Element von α eine gewisse Mengen zu:

$\alpha_1 \mapsto \emptyset$
$\alpha_2 \mapsto \{\emptyset\}$
$\alpha_3 \mapsto \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\alpha_4 \mapsto \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
...
$\alpha_{\mathrm{n}+1} := \mathrm{n} \cup \{\mathrm{n}\}$, etc.

Syntaktisch entspricht das hier verwendete Rekursionsschema demjenigen aus Beispiel 1.2. Semantisch kommt den Zeichen auf der rechten Seite noch der Mengenbegriff hinzu. Die Mengen auf der rechten Seite der Gleichungen in der i-ten Zeile sind die *(Von Neumann-) Ordinalzahlen* einer natürlich geordneten Menge α mit genau i-1 Elementen.
Weil die Mengen auf der rechten Seite offenkundig über die Relation $\in$ wieder eine Wohlordnung bilden, ist die verwendete Abbildung ein nach Korollar 2.7 eindeutiger Isomorphismus Ord: $(\alpha, <) \to (\omega, \in)$, wobei wir mit ω die kleinste transfinite Ordinalzahl bezeichnen. ω ist also diejenige Ordinalzahl, die $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung zugeordnet wird. Wir erhalten somit

$$\omega = \mathrm{Ord}(\mathbb{N}) = \bigcup_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}} \mathrm{Ord}(\mathrm{i}) = \bigcup_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}} \mathrm{Ord}(\alpha_{\mathrm{i}}) = \mathrm{Ord}((\alpha, <)) = \mathscr{U}_1.$$

Wir sehen weiterhin, dass die Ordnungsrelation $<$ der α_i auf der linken Seite via Ord auf der rechten Seite in die Mengenrelation $\in$ übersetzt wird. Wegen $1 < 3$ in $\mathbb{N}$ gilt beispielsweise:

$$\alpha_1 < \alpha_3.$$

Und siehe da: Für die Mengen $\mathrm{ord}(\alpha_1) = \emptyset$, bzw. $\mathrm{ord}(\alpha_3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ gilt:

$$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Den Ordinalzahlbegriff aus Beispiel 2.12 werden wir nun auf beliebig große Wohlordnungen verallgemeinern durch die

Definition 2.13. (Von Neumann Ordinalzahl)
Eine Wohlordnung $(\alpha,<)$ heißt *(Von Neumann-) Ordinalzahl*, wenn für alle $\beta \in \alpha$ gilt:
Variante 1:

$$\beta = \alpha_{<\beta} := \{\gamma \in \alpha | \gamma < \beta\}.$$

Variante 2:

$$\beta \cap \alpha = \alpha_{<\beta} = \{\gamma \in \alpha | \gamma < \beta\} \text{ und gleichzeitig } \beta \subset \alpha.$$

Mit der ersten Gleichung von Variante 2 bringen wir die Ordnungsrelation $<$ mit $\in$ in Übereinstimmung. Mit der Inklusion stellen wir sicher, dass es sich bei α um eine transitive Menge bezüglich der Relation $\in$ handelt.

Wir nähern uns nun dem Begriff der Kardinalzahl. Um zum einen die transfiniten Ordinalzahlen besser zu verstehen und zum anderen Mengen zu definieren, auf die wir später noch zurückgreifen werden, betrachten wir noch folgendes

Beispiel 2.14. (Verschiedene Anordnungen von $\mathbb{N}_0$)
Im Beispiel 2.12 haben wir von $\mathbb{N}$ mit der „natürlichen Ordnung“ gesprochen, ie. die Menge

$$\mathrm{M}_1 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Wir können die Elemente von $\mathbb{N}$ auch anders anordnen, indem wir zuerst alle geraden natürlichen Zahlen durchgehen und anschließend alle ungeraden:

$$\mathrm{M}_2 := \{0, 2, 4, ..., 1, 3, 5, ...\}.$$

Die beiden Mengen sind extensional gleich, weisen jedoch unterschiedliche Ordnungen auf. Die Ordinalzahlen berücksichtigen diese Zählvorgänge.

$$\mathrm{M}_1 = \{0, 1, 2, 3, 4.5, ...\} = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < ...\} =: \omega.$$
$$\mathrm{M}_2 = \{0, 2, 4, ..., 1, 3, 5, ...\} = \{0 < 2 < 4 < ... < 1 < 3 < 5 < ...\} =: \omega + \omega$$

In ω ist einzig die Null ohne Vorgänger. Da in M_2 sowohl die 0 als auch die 1 ohne Vorgänger sind, gilt: $\mathrm{M}_2 \neq \omega$. Die wohlgeordnete Menge der geraden natürlichen Zahlen (mit Null) besitzt die Ordinalzahl ω, also hat M_2 die Ordinalzahl $\omega + \xi$, wobei ξ eine weitere Ordinalzahl ist. Die ungeraden natürlichen Zahlen beschreibt ihrerseits die Ordinalzahl ω, deshalb haben wir $\mathrm{M}_2 = \omega$. Mit dem gleichen Argument bezüglich etwaiger Vorgänger folgt auch $1 + \omega = \omega$, denn die Menge

$$\mathrm{M}_3 := \{1', 0, 1, 2, 3, 4.5, ...\} = \{1' < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < ...\} = \omega$$

besitzt nur die 1' als Element ohne Vorgänger bezüglich $<$. Wir verwenden die 1' $\neq$ 1 um kenntlich zu machen, dass hier die Wohlordnung lediglich um einen Vorgänger erweitert wird. Durch einfaches Umbenennen der Elemente sieht man, dass die wohlgeordneten Mengen M_1 und M_3 isomorph im Sinne von Definition 2.5 sind.

Indem wir eine wohlgeordnete Menge X durch eine Ordinalzahlen beschreiben, bewahren wir also die Informationen über:
(i) Die Extension der Menge X. Dass X abzählbar unendlich groß ist, beschreibt das ω.
(ii) Die Anordnung der Menge X. Dass zwei unendliche Wohlordnungen nacheinander vollständig „durchnummeriert“ werden, drückt die Summation in $\omega + \omega$ aus.

Jeder Ordinalzahl möchten wir nun eine Kardinalzahl zuordnen. Wir interessieren uns für die Mächtigkeit einer Ordinalzahl α, ie. für die Anzahl der Elemente einer beliebig wohlgeordneten Menge X mit $\mathrm{ord}(\mathrm{X}) = \alpha$. Wir benötigen also nur die Information (i) und können die Information (ii) vergessen.

Definition 2.15. (Gleichmächtige Mengen, Kardinalität)
(i) Zwei Mengen X und Y heißen *gleichmächtig*, wenn es einen Bijektion zwischen ihnen gibt. Sind X und Y gleichmächtig, schreiben wir $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$. Wir sehen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(ii) Unter der Annahme, dass jede Menge X gleichmächtig zu einer Ordinalzahl α ist, also dass zu jedem X stets eine Ordinalzahl α existiert mit $\mathrm{X} \sim \alpha$, definieren wir die *Kardinalität* von X als

$$\mathrm{card}(X) := [\alpha \mid \alpha \text{ ist Ordinalzahl und } \mathrm{X} \sim \alpha] =: \Theta.$$

Bemerkung: Dass jede Menge zu einer Ordinalzahl gleichmächtig ist, ist nicht ohne Weiteres klar. Diese Tatsache folgt aus dem Wohlordnungssatz und dieser ist äquivalent zur Gültigkeit des Auswahlaxioms. Wir nehmen für unsere Zwecke die Gültigkeit des Wohlordnungssatzes an. Eine schöne Einführung in dieses Thema liefert Robert Vaught in [8], 79ff.

Im Beispiel 2.14 haben wir gesehen, dass den natürlichen Zahlen je nach Ordnungsstruktur verschiedene Ordinalzahlen zugeordnet werden können. Demnach gilt nach dem vorangegangenen Beispiel

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\omega) = \mathrm{card}(\omega + \omega).$$

Nach Definition 2.15 ist die Kardinalität einer beliebigen Menge X die Äquivalenzklasse Θ aller zu X gleichmächtigen Ordnungszahlen. Um die Mächtigkeit einer Menge X vollständig zu beschreiben reicht es daher, dass wir einen Repräsentanten von Θ angeben. Da die Ordinalzahlen eine Wohlordnung bilden, besitzt Θ wegen (WO) eine kleinste Ordinalzahl. Diese wählen wir in kanonischer Weise als Repräsentanten von Θ und gelangen zu folgender

Definition 2.16. (Kardinalzahlen)
Die *Kardinalzahl* κ einer Menge X ist die kleinste Ordinalzahl α, die gleichmächtig zu X ist.

$$\kappa := \min_{\alpha \in \Theta} \alpha, \;\; \Theta = [\alpha \mid \alpha \text{ ist Ordinalzahl und } \mathrm{X} \sim \alpha].$$

M_1, M_2 und M_3 haben alle dieselbe Kardinalität und es existiert für eine jede eine Bijektion zu den natürlichen Zahlen. Die kleinste Ordinalzahl, die gleichmächtig zu M_1, M_2 und M_3 ist, haben wir, wie gesehen, mit ω bezeichnet, nach der Definition 2.16 ist diese Zahl insbesondere eine Kardinalzahl, nämlich das berühmte

$$\aleph_0 := \omega.$$

2.3 Stark unerreichbare Kardinalzahlen

Definition. (Stark unerreichbare Kardinalzahl)
Eine *stark unnerreichbare Kardinalalzahl* d ist eine Kardinalzahl mit folgenden Eigenschaften:
(SU1) Für jede eine Kardinalzahl c mit $\mathrm{c} < \mathrm{d}$ gilt: $2^{\mathrm{c}} < \mathrm{d}$;
(SU2) Für jede Familie von Kardinalzahlen $(\mathrm{c}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{I}}$ mit $\mathrm{c}_\lambda < \mathrm{d}$ und für alle $\lambda \in \mathrm{I}$ gilt: $\sum_{\lambda\in\mathrm{I}} \mathrm{c}_\lambda < \mathrm{d}$.
Hierbei bezeichnen wir mit I eine beliebige Indexmenge.

Beispiele:
Die Kardinalzahl 0 und die Kardinalzahl $\aleph_0$ sind bereits stark unerreichbar. Denn für die 0 gelten trivialerweise (SU1) und (SU2), da es keine Kardinalzahlen gibt, die strikt kleiner als 0 sind, und für $\aleph_0$ lassen sich die beiden Axiome (SU1) und (SU2) leicht nachrechnen:
Jede Kardinalzahl $\mathrm{c} < \aleph_0$ ist endlich, also ist auch 2^{c} endlich und somit gilt: $2^{\mathrm{c}} < \mathrm{d}$. $\Rightarrow$ (SU1)
Analog folgt $\sum_{\lambda\in\mathrm{I}} \mathrm{c}_\lambda < \mathrm{d}$ für endliche c_λ und endliches I. $\Rightarrow$ (SU2)

Die Existenz von stark unerreichbaren Kardinalzahlen kann in der üblichen Mengenlehre weder bewiesen noch widerlegt werden. Deshalb können wir einem System wie ZFC das folgende Axiom hinzufügen:

Axiom 2.16. (Axiom von den stark unerreichbaren Kardinalzahlen)

(ASU) Jede Kardinalzahl c wird von einer stark unerreichbaren Kardinalzahl d majorisiert.

Im nächsten und letzten Teil der Arbeit werden wir sehen, dass dieses Axiom (ASU) äquivalent ist zum Universenaxiom 1.9 (A$\mathscr{U}$).

3 Universen und stark unerreichbare Kardinalzahlen

Im letzten Teil dieser Arbeit möchten wir die Theorie der Grothendieck-Universen mit der Theorie Wohlordnungen und somit der Ordinal- und (stark unerreichbaren) Kardinalzahlen verbinden. Mit Theorem 3.2 werden einen Zusammenhang zwischen Axiom 1.9 (A$\mathscr{U}$) und Axiom 2.16 (ASU) herstellen. Im Beweis des Theorems wird mehrfach die Beweistechnik der transfiniten Induktion, bzw. an einer Stelle ihr definitorisches Pendant, die transfinite Rekursion, verwendet. Daher folgender

Satz 3.1. (Transfinite Induktion über Ordinalzahlen)
Sei X eine Teilmenge einer beliebigen Menge von Ordinalzahlen I. X stimmt bereits mit ganz I überein, wenn für alle $\alpha \in \mathrm{I}$ gilt: $[\beta \in \mathrm{X}$ für alle $\beta < \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathrm{X}]$.

Beweis: Angenommen, es gilt $\mathrm{X} \neq \mathrm{I}$. Da X wohlgeordnet ist, existiert eine kleinste Ordinalzahl α mit $\alpha \notin \mathrm{X}$. Für alle $\beta < \alpha$ gilt wegen der Minimalität von α also $[\beta \in \mathrm{X} \Rightarrow \alpha \in \mathrm{X}]$, ein Widerspruch. □

In der Beweispraxis zeigen wir eine Aussage für $\alpha = 0$ und $\mathrm{N}(\alpha)$, den Nachfolger von α. Dieser Teil entspricht der klassischen vollständigen Induktion. Im dritten Schritt zeigen wir für Ordinalzahlen wie ω, die selbst keine (direkten) Nachfolger anderer Ordinalzahlen sind, mittels des vorhergehenden Satzes die Aussage für alle Ordinalzahlen, die kleiner als diese sind.

Theorem 3.2. (A$\mathscr{U}$) $\Leftrightarrow$ (ASU)
Das Universenaxiom (A$\mathscr{U}$) ist äquivalent zum Axiom über stark unerreichbare Kardinalzahlen (ASU).

Beweis:

„$\Rightarrow$“

Es gelte (A$\mathscr{U}$), ie. für jede Menge X existiert ein Grothendieck-Universum $\mathscr{U}$ mit $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$.

Jedes $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$ ist nach (U.1) eine Teilmenge von $\mathscr{U}$; es folgt demnach $\mathrm{card(X)} \leq \mathrm{card}(\mathscr{U})$ für alle $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$. Weil die Menge $\Xi := \{\mathrm{card(X)} \mid \mathrm{X} \in \mathscr{U}\}$ wohlgeordnet ist, existiert die Kardinalzahl

$$\mathrm{d} := \sup_{\mathrm{X} \in \mathscr{U}} \mathrm{card(X)}.$$

Schritt 1: Zeige (SU1), ie. für jede Kardinalzahl c mit $\mathrm{c} < \mathrm{d}$ gilt: $2^{\mathrm{c}} < \mathrm{d}$.

Zu jeder Kardinalzahl $\mathrm{c} < \mathrm{d}$ existiert eine Menge $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$ mit $\mathrm{card(X)} = \mathrm{c}$; denn per Definition existiert ein $\mathrm{Y} \in \mathscr{U}$ mit $\mathrm{c} = \mathrm{card(X)} \leq \mathrm{card(Y)} \leq \mathrm{d}$ und wir gewinnen ein passendes X durch geeignete Wahl einer Teilmenge aus Y.
Andererseits gelten $\mathrm{card(X)} = \mathrm{c} < \mathrm{d}$ und $2^{\mathrm{card(X)}} = 2^{\mathrm{c}} < \mathrm{d}$ für alle $\mathrm{X} \in \mathscr{U}$; denn wir erhalten mit (U.3): $\mathcal{P}(\mathrm{X}) \in \mathscr{U}$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{X})) \in \mathscr{U} \Rightarrow \mathrm{card(X)} < 2^{\mathrm{card(X)}} = 2^{\mathrm{c}} < 2^{2^{\mathrm{card(X)}}} \leq \mathrm{d}$.

Schritt 2: Zeige (SU2), ie. für jede Familie von Kardinalzahlen $(\mathrm{c}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{I}}$ mit $\mathrm{c}_\lambda < \mathrm{d}$ und für alle $\lambda \in \mathrm{I}$ gilt: $\sum_{\lambda \in \mathrm{I}} \mathrm{c}_\lambda < \mathrm{d}$. Hierbei bezeichnet I eine beliebige Indexmenge.

Wir können I mit einer gleichmächtigen Indexmenge ersetzen, die in $\mathscr{U}$ liegt. Œ nehmen wir also $\mathrm{I} \in \mathscr{U}$ an. Nach Schritt 1 existiert zu jeder Kardinalzahl $\mathrm{c}_\lambda < \mathrm{d}$ eine Menge $\mathrm{X}_\lambda \in \mathscr{U}$ mit $\mathrm{card}(\mathrm{X}_\lambda) = \mathrm{c}_\lambda$. Mit Satz 1.5 (i) erhalten wir $\sum_{\lambda \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\lambda \in \mathscr{U}$. Somit folgt mit Schritt 1: $\mathrm{card}(\sum_{\lambda \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\lambda \in \mathscr{U}) < \mathrm{d}$.

„$\Leftarrow$“

Für die Rückrichtung werden wir unter Verwendung von (ASU) zu einer beliebigen Menge A zunächst eine (sehr große) Menge $\mathscr{U}$ konstruieren, welche A enthält. Anschließend werden wir zeigen, dass $\mathscr{U}$ ein Grothendieck-Universum ist.

Schritt 1: Erzeuge rekursiv eine abzählbare Menge B aus einer Menge A mit $\mathrm{card(B)} < \mathrm{c}$.

Wir definieren zunächst rekursiv eine Folge $(\mathrm{A}_n)_{n\geq 0}$ von Mengen mit:

$$(\mathrm{A}_n)_{n\geq 0} := \begin{cases} \mathrm{A}_0 := \mathrm{A} \\ \mathrm{A_{n+1}} = \bigcup_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{A_k} \end{cases}$$

Setze $\mathrm{B} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n$. Nach Voraussetzung (ASU) existiert eine stark unerreichbare Kardinalzahl c mit der Eigenschaft: $\mathrm{card(B)} < \mathrm{c}$.

Schritt 2: Zeichne eine wohlgeordnete (Index-)Menge I mit $\mathrm{card(I)} = \mathrm{c}$ aus.

Sei I eine wohlgeordnete Menge, so dass gilt: $\mathrm{card(I)} = \mathrm{c}$. Ein solches I existiert, weil die Kardinalzahl c ja insbesondere eine Ordinalzahl ist. Modulo möglicher Anfangsstücke von I, die in der gleichen Kardinalitätsklasse wie I liegen, können wir mit Lemma 2.9 annehmen, dass für jedes von I verschiedene Anfangsstück I' gilt: $\mathrm{card(I')} < \mathrm{c}$.

Wir bezeichnen das kleinste Element von I wie üblich mit 0. I hat kein maximales Element, demnach besitzt jedes $\alpha \in \mathrm{I}$ einen Nachfolger, den wir mit $\mathrm{N}(\alpha)$ bezeichnen.

Schritt 3: Definiere transfinit-rekursiv eine (sehr große) Menge $\mathscr{U}$ mit $\mathrm{A} \in \mathscr{U}$.

Wir definieren transfinit-rekursiv eine Familie $(\mathrm{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ von Mengen durch:

$$(\mathrm{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}} := \begin{cases} \mathrm{B}_0 = B \\ \mathrm{B}_{\mathrm{N}(\alpha)} = \mathrm{B}_\alpha \cup \mathcal{P}(\mathrm{B}_\alpha) \\ \mathrm{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{B}_\beta, & \text{falls } \alpha \text{ keinen Vorgänger hat.} \end{cases}$$

Nun definieren wir $\mathscr{U} := \bigcup_{\alpha\in I} \mathrm{B}_\alpha$. Wir werden noch zeigen, dass dies ein Universum ist. Klarerweise gilt $\mathrm{A} \in \mathscr{U}$, da $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0$ eine Teilmenge von $\mathrm{B} = \mathrm{B}_0$ ist und folglich liegt A auch in $\mathcal{P}(\mathrm{B}_0) \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{N}(0)}$.

Schritt 4: Zeige mittels TI: Für alle $\alpha \in \mathrm{I}$ und $\mathrm{B}_\alpha \subset \mathscr{U}$ gilt $\mathrm{card}(\mathrm{B}_\alpha) < \mathrm{c}$.

IA: (Per Induktion über α.) Für $\alpha = 0$ stimmt die Aussage, weil wir für $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n$ bereits festgestellt haben, dass $\mathrm{card(B)} < \mathrm{c}$ gilt.
IS: Für $\mathrm{N}(\alpha)$ erhalten wir mit (SU1)

$$\mathrm{card}(B_{\mathrm{N}(\alpha)} = \mathrm{B}_\alpha \cup \mathcal{P}(\mathrm{B}_\alpha)) \leq \mathrm{card}(\mathrm{B}_\alpha) + 2^{\mathrm{card}(\mathrm{B}_\alpha)} < \mathrm{c} + \mathrm{c} = \mathrm{c}.$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, die Kardinalzahl c unendlich groß ist.
TS: Wenn α keinen Vorgänger besitzt, hat die Menge $\mathrm{I'} = \{\beta : \beta < \alpha\}$ nach Schritt 2 eine kleinere Kardinalität als c. Also gilt für alle $\beta < \alpha$ mit (SU2):

$$\mathrm{card}(\mathrm{B}_\alpha) = \mathrm{card}(\bigcup_{\beta\in\mathrm{I}'} \mathrm{B}_\beta) \leq \sum_{\beta\in\mathrm{I}'} \mathrm{card}(\mathrm{B}_\beta) < \mathrm{c}.$$

Schritt 5: Zeige mittels TI: Für alle $x \in \mathscr{U}$ gilt $\mathrm{card}(x) < c$.

Es reicht zu zeigen, dass für alle $\alpha \in I$ gilt: $\mathrm{card}(x) < c$ für alle $x \in B_\alpha$.
IA: (Per Induktion über α.) Für $\alpha = 0$ stimmt die Aussage, denn für ein $x \in B_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in A_n$. Daher gilt nach Konstruktion von $(A_n)_{n \geq 0}$: $x \subset A_{n+1}$, demnach gilt $x \subset B$ und $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(B) < c$.
IS: Für $\alpha = N(\beta)$ und $x \in B_\alpha$ gilt $x \in B_\beta$, also $x \in \mathcal{P}(B_\beta)$ und somit $\mathrm{card}(x) < c$.
TS: Wenn α keinen Vorgänger besitzt, ist die Aussage klar.

Schritt 6: Zeige durch Nachrechnen der Axiome (U.1)-(U.4): $\mathscr{U}$ ist ein Universum.

(U.1) *Transitivität*: $x \in \mathscr{U}$ und $y \in x \Rightarrow y \in \mathscr{U}$.
Es reicht mittels TI zu zeigen: Für alle $\alpha \in I$, $x \in B_\alpha$ und $y \in x$ gilt $y \in B_\alpha$.
IA: (Per Induktion über α.) Für $\alpha = 0$ stimmt die Aussage, denn jedes $x \in B_0 = B$ liegt in mindestens einem A_n für ein $n \in \mathbb{N}$. Somit liegt jedes $y \in x$ nach Konstruktion von $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A_{n+1}, daher gilt: $y \in B_0 = B$.
IS: Für $x \in B_{N(\alpha)}$ und $\alpha = N(\beta)$ gilt $x \in B_\alpha$ und für $y \in x$ folgt damit: $y \in B_\alpha \subset B_{N(\alpha)}$. Für $x \in \mathcal{P}\ (B_\alpha)$ gilt für $y \in x$ ebenfalls: $y \in B_\alpha \subset B_{N(\alpha)}$
TS: Wenn α keinen Vorgänger besitzt, ist die Aussage klar.

(U.2) *Paarmenge*: $x, y \in \mathscr{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathscr{U}$.
Seien x, $y \in \mathscr{U}$. Da $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ entlang I wachsend ist, ie. $B_a \in B_{b'}$ für b, b' $\in$ I mit $b < b'$, existiert ein $\alpha \in I$ mit x, $y \in B_\alpha$. Also gilt $\{x, y\} \in \mathcal{P}(B_\alpha) \subset B_{N(\alpha)} \subset \mathscr{U}$.

(U.3) *Potenzmenge*: $x \in \mathscr{U} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathscr{U}$
Da für jedes $x \in \mathscr{U}$ ein $\alpha \in I$ mit $x \in B_\alpha$ existiert, reicht es mittels TI zu zeigen, dass für alle $\alpha \in I$ gilt: Für $x \in B_\alpha$ gilt $\mathcal{P}(B_\alpha) \in B_{N(N(\alpha))}$.
IA: (Per Induktion über α.) Für $\alpha = 0$ stimmt die Aussage. Ein jedes $x \in B_0 = B$ liegt für ein $n \in \mathbb{N}$ in A_n. Damit folgt für jedes $y \subset x$, dass $y \subset A_{n+1} \subset B_0 = B$ gilt. Also gelten $y \in \mathcal{P}(B_0) \subset B_{N(0)}$ für jedes $y \in \mathcal{P}(x) \subset B_{N(0)}$ und $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(B_{N(0)}) \subset B_{N(N(0))}$.
IS: Sei $x \in B_{N(\alpha)}$. Falls $x \in B_\alpha$, gilt nach Konstruktion $\mathcal{P}(x) \in B_{N(N(\alpha))} \subset B_{N(N(N(\alpha)))}$. Falls $x \in \mathcal{P}(B_\alpha)$, gelten $x \subset (B_\alpha)$ und somit $\mathcal{P}(x) \subset \mathcal{P}(B_\alpha)$ und $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B_\alpha)) \in B_{N(N(N(\alpha)))}$.
TS: Wenn α keinen Vorgänger besitzt, ist die Aussage klar, da aus $\beta < \alpha$ $N(N(\beta)) < \alpha$ folgt.

(U.4) *Vereinigung*: $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist Familie von Elementen aus $\mathscr{U}$ und $I \in \mathscr{U} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha \in \mathscr{U}$.
Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Elementen von $\mathscr{U}$ mit $\Lambda \in \mathscr{U}$.
Wir möchten zeigen: $x = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \in \mathscr{U}$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Zu jedem $\lambda \in \Lambda$ wählen wir ein $\alpha = \alpha(\lambda) \in I$, so dass $x_\lambda \in B_{\alpha(\lambda)}$ gilt.
Die Menge $\alpha(\Lambda) \supseteq \alpha(\lambda)$ wird von I majorisiert. Denn würde $\alpha(\Lambda)$ nicht von I majorisiert, so gälte $I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [0, \alpha(\lambda)]$. Dies stünde wegen $\mathrm{card}(\Lambda) < c$ und $\mathrm{card}([0, \alpha(\lambda)])$ für alle $\lambda \in \Lambda$ im Widerspruch zu (SU2).
Sei also β eine Majorante von $\alpha(\Lambda)$. Da $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ entlang I wachsend ist, ie. $B_a \in B_{b'}$ für b, b' $\in$ I mit $b < b'$, gilt $x_\lambda \in B_{\alpha(\lambda)}$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Daraus folgt, wie bei (U.1) gezeigt, $x_\lambda \subset B_\beta$. Schließlich gilt nach Konstruktion der B_α: $x \in B_{N(\beta)}$, also $x \in \mathscr{U}$.

$\square$

Literatur

[1] Artin, Michael; Grothendieck, Alexandre; Verdier, Jean-Louis. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie (1963–64). Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). Vol. 1, 269. Springer, Berlin, 1972.

[2] Cantor, Georg: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Annalen. 46 (1895), 481–512.

[3] Fraenkel, Abraham: Mengenlehre und Logik. Duncker & Humblot, Berlin, 1959.

[4] Felscher, Walter: Naive Mengen und abstrakte Zahlen. 3. Transfinite Methoden. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1979.

[5] Hallett, Michael: Cantorian Set Theory and Limitation of Size. Clarendon Press, Oxford, 1984.

[6] Neumann, von, John: Zur Einführung der transfiniten Zahlen. Acta Sci. Math. (Szeged) 1:4-4 (1922-3), 199–208.

[7] Potter, Michael: Sets. An Introduction. Clarendon Press, Oxford, 1990.

[8] Vaught, Robert: Set Theory. An Introduction. 2. Aufl. Birkhäuser, Boston, 1991.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Düsseldorf, den 02. Juni 2015

(Leonard J. E. Pleschberger)