Ist Null eine natürliche Zahl?

$0 \in \mathbb{N}$?

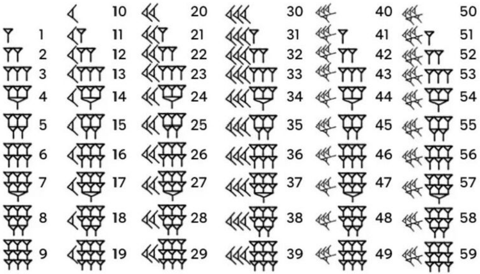
Agenda

1. Geschichte der Zahlen.
2. Ist Null eine natürliche Zahl?

Mesopotamien

Das erste mathematische Zeichensystem wurde um 3000 v. Chr. von den Sumerern entwickelt. Eine Null war ihnen nicht bekannt.

Sumerische Zahlen 1–59

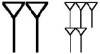


Die ersten 59 Zahlzeichen basieren auf einem Dezimalsystem, ein Stellenwertsystem zur Basis 10. Sie gleichen prinzipiell unseren heutigen Ziffern.

Mesopotamien

Insgesamt handelt sich um ein Sexagesimalsystem, ein Stellenwertsystem zur Basis 60.

$62 =$  $= 1 \cdot 60^1 + 2 \cdot 60^0$

$125 =$  $= 2 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0$

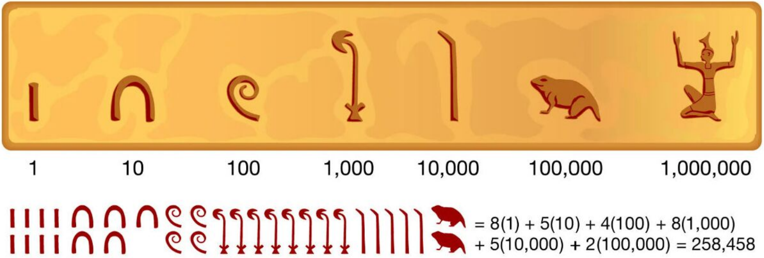
$775 =$  $= 12 \cdot 60^1 + 55 \cdot 60^0$

Problem: Die Zahl 60 konnte nicht dargestellt werden wegen

$$60 = 1 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0.$$

Ägypten

Die meisten mathematischen Überlieferungen stammen aus dem mittleren Reich um 2000 v. Chr. Es handelt sich um ein additives Dezimalsystem ohne Null.



Ägypten

Berühmt ist der Papyrus Rhind, um 1500 v. Chr. Er beinhaltet u. a. Algebra und Trigonometrie.

Bei bestimmten tabellarischen Berechnungen wurden Dreiecke als Vierecke ohne vierte Seite beschrieben. In Zeichen:

Griechenland

Ab 350 v. Chr. wurden die Zahlen – ohne Null – im milesischen System additiv durch Buchstaben repräsentiert:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ϛ	͵ζ	͵η	͵θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Man beachte die im Klassischen ausgestorbenen altgriechischen Schriftzeichen Stigma, Koppa und Sampi für die 6, 90, resp. 900.

Griechenland

Ab 550 v. Chr. existiert die Philosophenschule der Pythagoräer. Laut ihnen sei die Zahl die ἀρχή, das konstituierende Urprinzip der Welt. Iamblichos' überliefert um 300 n. Chr. in seiner *Vita Pythagorica*:

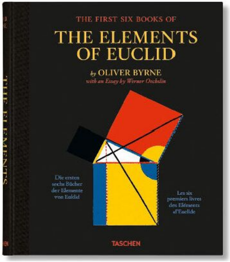
Ἐν τῷ ἀριθμῷ δέ τε τὰ πάντ' ἐπέοικε.
„Alles ist Zahl."

Um 350 v. Chr. schrieb Aristoteles in seiner Metaphysik, 986a:

„Das Erkennen von Analogien, resp. Strukturen in der Welt mag zu der Anschauung geführt haben, zwischen allem bestünde eine Harmonie und diese ließe sich durch Zahlverhältnisse wiedergeben."

Griechenland

Um 350 v. Chr. verfasste Euklid seine Elemente (Στοχεῖα), das führende mathematische Lehrbuch für die nächsten 2000 Jahre.



Es behandelt u. a. Probleme der Geometrie und Zahlentheorie. Eine Null führt er nicht ein.

Indien

Ab dem 7. Jahrhundert n. Chr. wurde das bis heute gültige Zahlensystem verwendet. Erstmals gibt es die Null als Zahl, repräsentiert durch einen Punkt oder Kreis.

Europäisch	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arabisch-Indisch	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Östliches Arabisch-Indisch (Persisch und Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Devanagari (Hindi)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Tamil		௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯

Über die Araber kam sie nach Europa. Das arabische Wort für Null entwickelte sich wie folgt:

al-ṡifr < τζίφρα < ciffra < Ziffer

Axiomatisierung der natürlichen Zahlen

Richard Dedekind gibt 1888 in *Was sind und was sollen die Zahlen?* die erste Axiomatisierung der natürlichen Zahlen. Es gibt ein Grundelement 1_0 und eine Nachfolgefunktion

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \; \varphi(n) = n + 1.$$

Im Jahre 1889 veröffentlicht Giuseppe Peano seine berühmten Peano-Axiome in *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Er verwendet als Grundelement die 1.

Axiomatisierung der natürlichen Zahlen

Richard Dedekind gibt 1888 in *Was sind und was sollen die Zahlen?* die erste Axiomatisierung der natürlichen Zahlen. Es gibt ein Grundelement 1_0 und eine Nachfolgefunktion

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \varphi(n) = n + 1.$$

Im Jahre 1889 veröffentlicht Giuseppe Peano seine berühmten Peano-Axiome in *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Er verwendet als Grundelement die 1.

Eigentlich gebührt Dedekind der Ruhm, den Peano in seinem – lateinischen – Vorwort auch explizit als den Erfinder nennt!

Axiomatisierung der natürlichen Zahlen

Richard Dedekind gibt 1888 in *Was sind und was sollen die Zahlen?* die erste Axiomatisierung der natürlichen Zahlen. Es gibt ein Grundelement 1_0 und eine Nachfolgefunktion

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \ \varphi(n) = n + 1.$$

Im Jahre 1889 veröffentlicht Giuseppe Peano seine berühmten [Dedekind-]Peano-Axiome in *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Er verwendet als Grundelement die 1.

Eigentlich gebührt Dedekind der Ruhm, den Peano in seinem – lateinischen – Vorwort auch explizit als den Erfinder nennt!

Gottlob Frege

Gottlob Frege ist ab 1884 der Erfinder der formalen Logik durch die Einführung der ersten formalen Sprache. Eine solche zu haben ist eine wesentliche Grundlage für unsere heutige Infomatik.

c) Beweis des Satzes

$$
\begin{aligned}
&,\vdash \infty = \mathrm{anz}(u) \rightarrow\\
&\neg\forall\mathfrak{q}\,[\mathrm{funk}(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall\mathfrak{i}\,[\neg\mathfrak{i}\ \text{ə}\ (\mathfrak{i}\ \text{ə}\ <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow\\
&(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\mathfrak{d}\ \text{ə}\ (\mathfrak{e}\ \text{ə}\ \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\mathfrak{d}\ \text{ə}\ u] \rightarrow\\
&\forall\mathfrak{a}\,[\neg\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(-\varepsilon\ \text{ə}\ u) = \mathfrak{a}\ \text{ə}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}])))]\text{‘}
\end{aligned}
$$

Gottlob Frege

Gottlob Frege ist ab 1884 der Erfinder der formalen Logik durch die Einführung der ersten formalen Sprache. Eine solche zu haben ist eine wesentliche Grundlage für unsere heutige Infomatik.

c) Beweis des Satzes

$$
\begin{aligned}
&,\vdash \infty = \mathrm{anz}\,(u) \rightarrow \\
&\neg\forall \mathfrak{q}\,[\mathrm{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\,[\neg \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow \\
&(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \mathfrak{q})] \rightarrow \neg \mathfrak{d} \text{ ə } u] \rightarrow \\
&\forall \mathfrak{a}\,[\neg \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(-\varepsilon \text{ ə } u) = \mathfrak{a} \text{ ə } \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))]‘
\end{aligned}
$$

Leider war seine Sprache sehr kryptrisch und er hatte zu Lebzeiten unfassbar wenig Erfolg.

Gottlob Frege

Frege konstruiert 1884 in seinen *Grundlagen der Arithmetik* die natürlichen Zahlen aus der leeren Menge:

$$0 := \text{anz}\,(\text{ext}\,\boldsymbol{\epsilon}(\neg\,\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon})), \quad 1 := \text{anz}\,(\text{ext}\,\boldsymbol{\epsilon}\,(\boldsymbol{\epsilon} = 0)).$$

Damit führt er die Zahlen und die gesamte Mathematik allein auf die (aristotelische) Logik zurück, viz. den Satz vom Widerspruch

$$\neg(\neg A \wedge A).$$

Ist Null eine natürliche Zahl?

Diese nach Karl Popper existientialistische Frage lässt sich nicht beantworten, da hier ein Verständnis von „natürlicher Zahl“ vorausgesetzt wird.

Wichtige Kriterien für eine gute Explikation sind extensionale Ähnlichkeit und Fruchtbarkeit, i. e.: Ist die Definition der natürlichen Zahlen für die jeweilige mathematische Disziplin praktischer mit oder ohne Null? Leonhard Euler bewies

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ wobei } k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Gemäß dem Beispiel ist es in der Analysis praktischer die natürlichen Zahlen ohne Null zu definieren.

Ist Null eine natürliche Zahl?

Der Mensch hatte seit jeher Wörter für „kein“ und „nichts“. Die Abstraktion hin zu einer konkreten Zahl dauerte viele Jahrhunderte. Die Null ist dem Menschen nicht sensorisch gegeben, sondern ein reines Produkt des Geistes.

Hochzivilierte Kulturen wie das antike Griechenland kamen gänzlich ohne Null aus, sogar Pythagoras, der die Zahl als oberstes Prinzip ansah. Deshalb ist die Null meiner Meinung nach nicht natürlich gegeben und ich schließe

Ist Null eine natürliche Zahl?

Der Mensch hatte seit jeher Wörter für „kein“ und „nichts“. Die Abstraktion hin zu einer konkreten Zahl dauerte viele Jahrhunderte. Die Null ist dem Menschen nicht sensorisch gegeben, sondern ein reines Produkt des Geistes.

Hochzivilierte Kulturen wie das antike Griechenland kamen gänzlich ohne Null aus, sogar Pythagoras, der die Zahl als oberstes Prinzip ansah. Deshalb ist die Null meiner Meinung nach nicht natürlich gegeben und ich schließe

$$0 \notin \mathbb{N}.$$