

Практикум из рачунарских алата
испит

Име, презиме и број индекса: _____

1. Коришћењем Пајтонове библиотеке `SymPy` симболички израчунати и упростити следеће изразе:

(a) $\int \left(\log_2 x + \frac{x}{2x^2+3} \right) dx$

решење

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 pprint(integrate(log(x, 2) + x/(2*x**2 + 3)).simplify())
```

(b) $\int_{-1}^{\infty} \sqrt{x^2} e^{-2x} dx$

решење

```
1 integrate(sqrt(x**2) * exp(-2*x), (x, -1, oo)).simplify()
```

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - x}{x^3}$

решење

```
1 limit((sin(x)**2 - x) / x**3, x, 0).simplify()
```

(d) $\frac{d^2 \left(\frac{\sin^2(x^3)}{1+x} \right)}{dx^2}$

решење

```
1 ((sin(x**3)**2 / (1 + x)).diff(x, 2)).simplify()
```

2. Нека је $\gamma(x)$ рационална полиномска функција

$$\gamma(x) = \frac{x^2(x_0^2 - 1) + x_0^2(x^2 - 1)}{x_0^2 - x^2}$$

реалне променљиве x , при чему је $x_0 > 0$, и нека је

$$C_{n,m}(x) = \cos[(n - 2m) \arccos(x) + m \arccos(\gamma(x))],$$

$$B_m(x) = \frac{2}{3} (\gamma(x) - 1)^m + \gamma(x),$$

где су m и n природни бројеви. Коришћењем одговарајућих библиотека у Пајтону

(a) приказати функције $\gamma(x)$ и $C_{8,2}(x)$ за $x_0 = 1.45$ и $x \in [-1, 1]$.

решење

```
1 from sympy import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4 from scipy.optimize import fsolve
5
6 x, x0 = Symbol('x', real=True), Symbol('x0', positive=True)
7 n, m = symbols('n m', integer=True, positive=True)
8
9 g = (x**2*(x0**2 - 1) + x0**2*(x**2 - 1)) / (x0**2 - x**2)
10
```

```

11 C = cos((n - 2*m)*acos(x) + m*acos(g))
12
13 fC = lambdify(x, C.subs({n: 8, m: 2, x0: 1.45}))
14 fg = lambdify(x, g.subs(x0, 1.45))
15
16 _x = np.linspace(-1, 1, 1000)
17 plt.figure()
18 plt.plot(_x, fC(_x))
19 plt.plot(_x, fg(_x))
20 plt.legend(['C(x)', '\gamma(x)'])
21 plt.show()

```

(b) одредити $\frac{dC_{n,m}(x)}{dx}$.

_____ решење _____

```

1 pprint(C.diff(x))

```

(c) одредити x_0 које задовољава релацију

$$10 \log_{10} \left[1 + C_{5,2}^2 \left(\sqrt{x_0^2 + 4x_0 \sqrt{x_0^2 - 1}} \right) \right] = 40.$$

_____ решење _____

```

1 t = C.subs({n: 5, m: 2, x: sqrt(x0**2 + 4*x0*sqrt(x0**2 - 1))})
2 f = lambdify(x0, 10*log(1 + t**2, 10) - 40)
3 x_0 = fsolve(f, 2)

```

(d) одредити коефицијенте полинома у бројиоцу и имениоцу рационалне полиномске функције $B_3(x) = N(x)/D(x)$.

_____ решење _____

```

1 B = Rational(2, 3)*(g - 1)**m + g
2 N, D = B.subs(m, 3).as_numer_denom()
3 N_coeffs, D_coeffs = Poly(N, x).all_coeffs(), Poly(D, x).all_coeffs()
4 print(N_coeffs, D_coeffs)

```

3. Коришћењем Пајтонових библиотека NumPy и/или SciPy:

(a) израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{\exp(x^2) + 1}{(3x + 2)^2} dx$.

_____ решење _____

```

1 quad(lambda x: (np.exp(x**2) + 1) / (3*x + 2)**2, 0, 2*np.pi)[0]

```

(b) решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 2 \\ 3x + \sqrt{5}y - 5z &= 1 \\ 2x - 8\pi y + z &= 0 \end{aligned}$$

_____ решење _____

```

1 np.linalg.solve([[1, 3, -4], [3, np.sqrt(5), -5], [2, -8*np.pi, 1]], [2, 1, 0])

```

(c) решити систем нелинеарних једначина

$$\begin{aligned} e^x + y + z &= 2 \\ \cos(x) + y &= 3 \\ x^2 - y \cdot z &= 5 \end{aligned}$$

решение

```
1 from scipy.optimize import fsolve
2
3 def func(a):
4     return [np.exp(a[0]) + a[1] + a[2] - 2,
5             np.cos(a[0]) + a[1] - 3,
6             a[0]**2 - a[1]*a[2] - 5]
7
8 x, y, z = fsolve(func, [0, 0, 0])
```