# 中心极限定理

注意，在本节中，我们用$\Phi$表示标准正态分布的分布函数。

## Lindburg-Levy中心极限定理

设随机变量序列$X_1, X_2, \ldots$相互独立且同分布，若$\mathrm{E}(X_i)=\mu, \mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2 \neq \infty, i=1,2,\ldots$，则对任意实数$x$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x) = \Phi(x)$$

## de Moivre-Laplace中心极限定理

设随机变量序列$X_1, X_2, \ldots$相互独立且同分布，且$X_i \sim B(1,p), i=1,2,\ldots$，则对任意实数$x$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x) = \Phi(x)$$

显然de Moivre-Laplace中心极限定理是Lindburg-Levy中心极限定理的特例。

Bernoulli大数定律告诉我们可以用$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$（频率）近似$p$（概率），而至于近似程度如何，却不得而知。de Moivre-Laplace中心极限定理则告诉我们近似程度如何：

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - p| < \epsilon) = P(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}| < \frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{p(1-p)}}) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{p(1-p)}}) - 1\cdot$$

[高尔顿钉板：de Moivre-Laplace中心极限定理可视化]