以下以二维随机变量为例，展示协方差以及相关系数的概念。

协方差

设$[X, Y]$为一组二维随机变量，如果$\mathrm{E}\{[X-\mathrm{E}(X)][Y-\mathrm{E}(Y)]\}$存在，则称

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \triangleq \mathrm{E}\{[X-\mathrm{E}(X)][Y-\mathrm{E}(Y)]\}$$

为随机变量X和Y的协方差。在实际中计算协方差时，更多的是使用以下公式：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X, Y)=\mathrm{E}\{[X-\mathrm{E}(X)][Y-\mathrm{E}(Y)]\} \\
&=\mathrm{E}[XY-X\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)Y+\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)] \\
&=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)+\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\
&=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

而二维随机变量$[X, Y]$对应的协方差矩阵即为

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\mathrm{Cov}(X, X) & \mathrm{Cov}(X, Y) \\ \mathrm{Cov}(Y, X) & \mathrm{Cov}(Y, Y)\end{bmatrix}$$

相关系数

协方差考察了随机变量之间协同变化的关系，但如果采取不同的量纲，同样的数据产生的协方差相差非常大。为避免这种情况发生，我们可以首先将随机变量标准化：

$$X^{\star}=\frac{X-\mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}, \quad Y^{\star}=\frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

再求协方差$\mathrm{Cov}(X^{\star}, Y^{\star})$，这便是随机变量$X$和$Y$的相关系数：

$$\rho(X, Y)=\mathrm{Cov}(X^{\star}, Y^{\star})=\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$